YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DARALAN-GENİŞLEYEN AKIM KESİTİNDE NEWTONİAN OLMAYAN AKIŞKAN İÇİN BÜNYE DENKLEMLERİNİN DEĞERLENDİRİLMESİ

Mak.Yük.Müh.Mehmet KOPAÇ

F.B.E. Makina Mühendisliği Anabilim Dalı Isı Proses Programında hazırlanan

DOKTORA TEZİ

Tez Savunma Tarihi	:	12 Mart 1992
Tez Danışmanı	:	Prof.Dr.Doğan ÖZGÜR (Y.T.Ü.)
Jüri Üyeleri	:	Prof.Dr.Amable HORTAÇSU (B.Ü.)
		Prof.Dr.Mahir ARIKOL (M.Ü.)

İSTANBUL, Mart 1992

ÖZET

DARALAN-GENİŞLEYEN AKIM KESİTİNDE NEWTONİAN OLMAYAN AKIŞKAN İÇİN BÜNYE DENKLEMLERİNİN DEĞERLENDİRİLMESİ

KOPAÇ ,Mehmet
Doktora Tezi, Makina Müh. Bölümü
Tez Yöneticisi: Prof.Dr. Doğan ÖZGÜR
Ocak 1992

Viskoelastik davranışları yansıtan bünye denklemlerinin değerlendirilmesi için literatürde mevcut deneysel veriler kullanılarak nümerik bir çalışma yapılmıştır. Türev tipli bünye denklemlerinin daralıp genişleyen akımda doğrusal olmayan regresyon yöntemi kullanılarak deneysel verilerle olan uyumları belirlenmiştir. Değerlendirilen mevcut bünye denklemleri White-Metzner, Oldroyd 3-Sabit, Spriggs, Gaidos, Upper ve Lower Convekted Maxwell, Korotasyonel Maxwell ve Johnson-Segalman gibi modellerdir. Değerlendirilen bu mevcut modellerden daha uyumlu bir model geliştirilmesi ve tüm modellerin simetriekseni boyunca olan akım ve basit kaymalı akımda karşılaştırılması yapılmıştır.

Mevcut bünye denklemlerinin genel bir değerlendirmesi sonucunda elde edilen bulgulardan yararlanılarak yeni bir model de geliştirilmiştir. Simetri ekseni boyunca olan akıma göre akım kanalının belli bir bölgesinde yapılan çözümlerde

White-Metzner eşitliği, mevcut bünye denklemleri arasında en iyi sonuç veren eşitlik olmuştur. Simetri ekseni boyunca olan akım tipinde önerilen yeni model daha iyi sonuç vermektedir. Kararlı basit kaymalı akım için ise viskometrik fonksiyonların deneysel fonksiyonlara uyum derecesine göre White-Metzner bünye denklemi daha iyidir. Her iki akım türü için de en başarılı sonucu veren tek bir bünye denklemi elde etmek mümkün olmamıştır.

ABSTRACT

EVALUATION OF RATE - TYPE CONSTITUTIVE EQUATIONS FOR NON - NEWTONIAN FLUIDS IN WIGGLE FLOW

KOPAC , Mehmet

Ph.D. Thesis , Mechanical Engineering Department

Thesis Supervisor : Prof. Dr. Dogan OZGUR

January 1992

A numerical study was done for the evaluation of constitutive equations exhibiting viskoelastic behaviour using the stress and velocity data present in literature. By non-linear regression analysis rate type constitutive equations were compared with the experimental data in wiggle flow. Constitutive equations evaluated in this study were as follows : White-Metzner, Oldroyd 3-constant, Spriggs, Gaidos, Upper and Lower Convected Maxwell, Corotational Maxwell, and Johnson - Segalman Models. A new model better than the present evaluated models was developed and all of these models were

compared along the centerline and also in simple shear flow.

A new model was developed by utilizing the results obtained according to the general evaluation of present constitutive equations. White - Metzner equation was the one that gave the best fit among the present models along the centerline in the flow channel. For flow along the centerline the proposed model was better than the White - Metzner equation. For simple shear flow , the viscometric functions of White-Metzner constitutive equation was better than the other constitutive equations.It was not possible to obtain a single constitutive equation which fits both type of flows.

TEŞEKKÜR

Doktora yapma imkanını sağladıklarından dolayı Yıldız Üniversitesi Makina Mühendisliği Bölümü ve Isı Proses Anabilim dalı başkanı sayın hocam Prof. Dr. Doğan Özgür'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmalarım esnasında değerli katkılarıyla beni yönlendiren, tezin hazırlanmasında başlangıçtan itibaren sonuna kadar değerli bilgilerinden faydalandığım sayın hocam Prof.Dr.Mahir Arıkol'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım esnasında zaman zaman değerli katkılarından yararlandığım Boğaziçi Üniversitesi Kimya Mühendisliği Bölümü öğretim üyelerinden sayın Prof.Dr. Amable Hortaçsu'ya teşekkür ederim.

Doktora eğitiminde bilgilenmemi sağlayan sayın Prof.Dr. Eralp Özil ve Yrd.Doç.Dr. İbrahim Gentez'e sonsuz teşekkür ederim.

Yıldız Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü personeline gösterdikleri ilgiden dolayı teşekkür ederim.

Ayrıca tez çalışmalarım esnasında beni sabırla destekleyen eşime teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

SAYFA

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

ŞEKİL SAYFA

SEMBOLLER

C_{ij}^{-1}	: Finger tensörü
C_{ij}	: Couchy tensörü
D/Dt	: Malzeme türevi
$\mathfrak{D}/\mathfrak{D}t$	: Jaumann türevi
d	: Deformasyon hız tensörü
d_1	: White-Metzner ve Yeni modelde malzeme parametresi
e_{ij}	: Deformasyon hız tensörü
$F(\lambda)$	: Dağılım fonksiyonu
g_{ij}	: Birim tensör
G	: Kayma modülü
G(t,t')	: İntegral modellerde gevşeme modülü
I	: Deformasyon hız tensörünün 1. invaryantı
II	: Deformasyon hız tensörünün 2. invaryantı
III	: Deformasyon hız tensörünün 3. invaryantı
$I_{C^{-1}}$	: Finger tensörünün 1. invaryantı
$II_{C^{-1}}$	: Finger tensörünün 2. invaryanti
J( )	: Oldroyd modelinde türev operatörü
J_{ε}( )	: Spriggs modelinde türev operatörü
m(t,t')	: İntegral modellerinde hafiza fonksiyonu
n, n'	: Albert Co modellinde üst parametreler
r	: White-Metzner ve Yeni modelde üst parametre
s^*	: İntegral modellerinde geçmiş zaman

t	: Zaman
T_1	: Viskoelastik gerilme tensörü
T_2	: Viskoz gerilme tensörü
$T_{ij,k}$	: 2. mertebeden bir tensörün kovaryant türevi
T_1	: Türev operatörü
U_1, U_2	: BKZ modelinde hafıza fonksiyonu
V_i	: Hiz vektörü
α	: Gaidos modelinde üst parametre
β	: Gaidos ve Yeni modelde üst parametre
γ	: Kayma hızı
$\partial/\partial t$	: Kısmi türev
Γ_{ij}	: Kovaryant sonlu deformasyon tensörü
δ_{ij}	: Kroneker delta, birim karteziyen tensör
$\delta/\delta t$	: Konvekted türev operatörü
Δ_{ij}	: deformasyon hız tensörü
ε	: Spriggs modelinde malzeme parametresi
ε	: Gaidos modelinde türev ağırlık katsayısı
η	: Basit kaymalı akımda viskozite fonksiyonu
η_0	: Sifir kayma hizi viskozitesi
η_∞	: Newtonian akişkan viskozitesi
η'	: Kompleks viskozitenin gerçek kısmı
η''	: Kompleks viskozitenin sanal kısmı
θ	: White-Metzner ve Yeni modelde zaman parametresi

θ_0, θ_1	: White-Metzner ve Yeni modelde malzeme parametresi
θ_1	: 1. Normal gerilme farkı fonksiyonu
θ_2	: 2. Normal gerilme farkı fonksiyonu
$\lambda_\theta, \lambda_0, \lambda_t$	: Albert Co modelinde zaman sabitleri
$\lambda, \lambda_1, \lambda_2$	: Maxwell ve Oldroyd modellerinde zaman sabitleri
λ_{II}	: Gaidos modelinde zaman fonksiyonu
μ	: Viskozite
μ_2	: Sabit kayma hızı viskozitesi
μ_{II}	: Gaidos modelinde viskozite fonksiyonu
ξ	: Malzeme parametresi
$\Pi(\ )$	: Oldroyd modelinde türev operatörü
σ	: Gaidos modelinde malzeme parametresi
τ_{ij}	: Gerilme tensörü
$\emptyset(t)$	: İntegral modellerinde hafıza fonksiyonu
ψ	: 1. Normal gerilme farkı fonksiyonu
ψ	: İntegral modellerinde gevşeme zamanı
ω	: Frekans
Ω_{ij}	: Vortisite tensörü(karteziyen koordinatlarda)

BÖLÜM 1.

GİRİŞ

Viskoelastik bir akışkan olan polimerlerin kullanıldığı polimer endüstrisi gün geçtikçe büyüyen bir endüstri dalıdır. Yeni polimerlerin ve proseslerin gelişmesinde deneysel olarak doğruluğu sağlanmiş bünye denklemlerine ihtiyaç vardır. Bu alandaki tüm çalışmalar , " reoloji " bilimi kapsamında toplanmıştır.

Reoloji biliminin en önemli hedeflerinden biri, akışkan davranışlarını ifade eden bünye denklemleri yardımıyla kinematikle dinamik arasındaki ilişkileri kurmaktır [3,18]. Bünye denklemleri yapı olarak termodinamiğin hal denklemlerine benzerler.

Bünye denklemlerinin büyük bir kısmı , türev tipli denklemler olarak bilinmektedir. Bunların en basiti ve en bilineni Newton modelidir. Diğer bünye denklemlerinin çoğu genelleştirilmiş Newton akışkan kavramına dayandırılarak geliştirilmişlerdir [3,18,19] . Bu tür bünye denklemleri, kararlı basit kaymalı akımlarda olumlu sonuçlar vermesine rağmen , gerilme gevşemesi ve akışkanın geri çekilmesi gibi viskoelastik davranışları açıklamakta yetersiz kalmaktadır [18] .

Viskoelastik etkileri belirleyebilecek bünye denklemleri de geliştirilmiştir. Bu bünye denklemlerinin çoğu, viskoelastisitenin doğrusal teorisine dayandırılarak oluşturulmuşlardır. Bu denklemlerin en bilineni Maxwell sıvısıdır [3,18].

Viskoelastik akışkanların reolojik davranışlarının doğru olarak belirlenebilmesi için, farklı akım tiplerinde test edilmesi gerekir. Şu ana kadar viskoelastik davranışları tam olarak belirtebilecek bir bünye denklemi henüz geliştirilememiştir. Bu denklemler herhangi bir akımda iyi sonuç verirken,diğer bir akım tipinde iyi sonuç vermiyebilir. Bu denklemlerin değişik türdeki akımlar için Newtonien olmayan akışkanların davranışlarını açıklaması beklenir. Bir seri genişleyip daralan kesitlerden geçen viskoelastik bir polimer çözeltisi, Newtonien olmayan ivmeli bir akıma iyi bir örnektir. Böyle bir karmaşık olmayan viskoelastik akışkan için uygun hız ve gerilme verisi [1], mevcut bünye denklemlerinin kiritik değerlendirilmesinde faydalı olacaktır.

Viskoelastik akışkanlar üzerinde deneyler yapılırken mümkün olduğunca temassız ölçüm teknikleri arzu edilir. Bunun nedeni, viskoelastik akışkanın akım alanına sokulan bir maddenin etrafında durgun bir bölgenin meydana gelmesidir[43]. Bu da akım özelliklerinin hassas ölçülmesini belli ölçüde etkileyecektir. Bu nedenle alışilagelmiş pitot tüpü, hot wire anemometresi vs. gibi ölçme aletleri gerçek bilgi vermeyebilir.

Yukarda açıklananların ışığında sürtünmesiz ölçme teknikleri kullanılarak daralıp genişleyen akıma uğrayan viskoelastik bir akışkanın üzerinden alınan ölçümlerin kullanılmasına karar verilmiştir [1]. Yapılan deneylerde [1], noktasal hız verisi için laser dopler anemometresi ve gerilme verisi için " birefringence " yöntemi kullanılmıştır. Bu ölçme teknikleri ile ilgili detaylar literatürde mevcuttur [1,31].

Bünye denkleri genel olarak doğrusal ve doğrusal olmayan diye iki gurupta toplanabilir. Bu guruplandırma içersinde de türev ve integral tipli olmak üzere ikiye ayrılabilir. Türev tipli ve integral tipli bünye denklemleri, viskoelastik bir akışkanın reolojik davranışlarını ifade etme açısından farklı olmayıp sadece matematiksel gösterim açısından farklılık taşırlar.Türev tipli olarak ifade edilmiş bir bünye denklemi, transformasyon kuralları kullanılarak integral tipli yapıya dönüştürülebilir [18].

Bu çalışmada,hassas ölçümlerin yapıldığı [1] bir daralıp genişleyen akım kanalı seçilerek bünye denklemlerin değerlendirilmesi yapılmıştır. Seçilen akım kanalı, biri dikdörtgensel diğeri de daralıp genişlemeli olmak üzere iki tip kesitten oluşmaktadır. Böyle bir kesitte viskoelastik akışkan, daralıp genişlemelerde hem sıkışmaya hem de gevşemeye maruz kalmaktadır.Bu sebepten böyle bir akım kanalı seçilmiştir.

Bu çalışmanın amaçlarından biri deneysel hız ve gerilme verilerinin alındığı [1] simetri ekseni boyunca olan akıma göre türev tipli bünye denklemlerinin, deneysel verilere ne ölçüde uyduklarının belirlenmesidir. Eğer münkün olursa en iyi uyumlu denklem üzerinde değişiklik yapilarak yeni bir bünye denklemi geliştirmek de bir başka amaçtır.

Ayrıca değerlendirilen bünye denklemlerinin, kararlı kaymalı akıma göre bulunan viskometrik fonksiyonların, deneysel viskometrik fonksiyonlara [1] ne derece uyumlu olduklarının belirlenmesi de diğer bir amaçtır.

BÖLÜM 2.

AKIM KİNEMATİĞİ

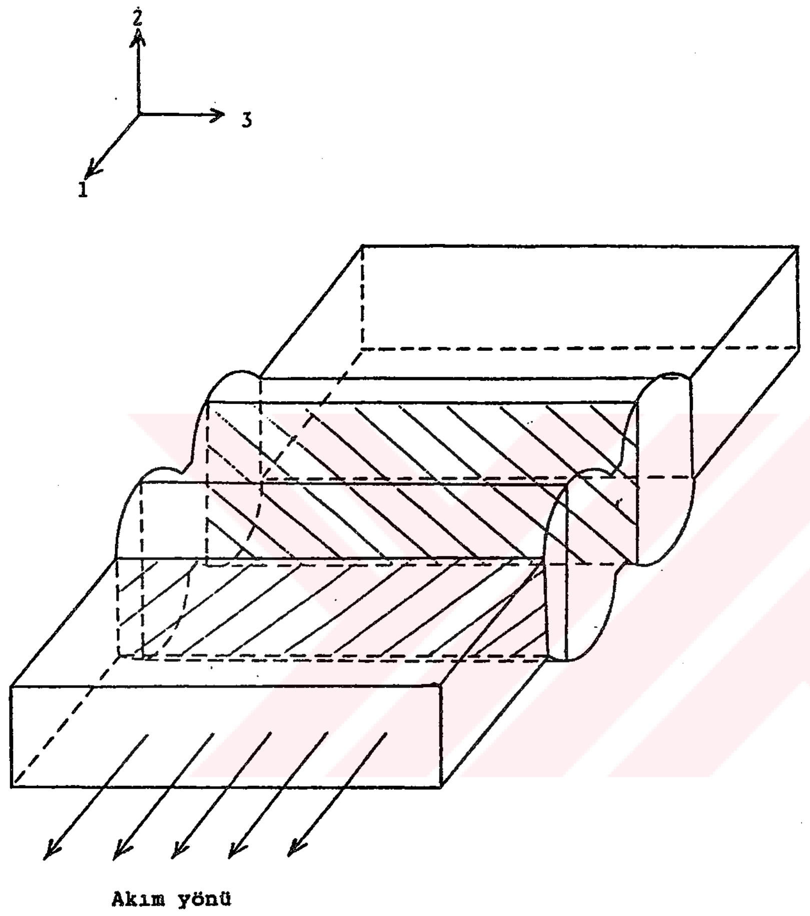
Bu bölümde daralıp genişleyen akım durumu için, simetri ekseni boyunca ve basit kaymalı akımda kinematik incelenecektir. Deformasyon hızı tensörü için genel bağıntılar, karteziyen koordinat sistemi kullanılarak bulunacaktır [1] . Midleman'ın yön kuralı uygulanarak [24] akım yönü 1- , basit kaymalı akım için hız değişim yönü 2- olarak kabul edilmiştir. Kesitin görünüm oranı arttıkça 3- yönündeki değişimler ihmal edilebilir. Bu çalışmada kullanılan deneysel verilerin alındığı akım kanalının görünüm oranı 30 olduğundan [1], akımı iki yönlü bir akış kabul etmek doğru bir yaklaşım olacaktır. Burada akım kanalı kesiti sabit olmamasına rağmen, akışta etkili kesitin dikdörtgen olarak kabul edilmesi gerektiğine dikkat edilmelidir. Akış kanalı Şekil 1. 'de sunulmuştur.

Sıkıştırılamaz bir akışkanın kararlı akım için süreklilik şartı aşağıdaki gibidir:

$$\mathrm{div}V = 0$$

veya (2-1)

$$\nabla . V = 0$$



Şekil 1. Akım kanalının üç boyutlu görünüşü

(2-1) eşitliği açık olarak yazıldığında aşağıdaki sonuç bulunur.

$$\frac{\partial V_1}{\partial X_1} + \frac{\partial V_2}{\partial X_2} = 0 \qquad (2\text{-}2)$$

Burada V1 1- yönündeki hızı, V2 2- yönündeki hızı göstermektedir.

Deformasyon hızı tensörü [3] aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$e_{i,j} = \frac{1}{2} (V_{i,j} + V_{j,i}) \qquad (2\text{-}3a)$$

Karteziyen koordinatlarda (2-3a)' ın sonucu aşağıdaki gibidir:

$$e_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial X_j} + \frac{\partial V_j}{\partial X_i}\right) \qquad (2\text{-}3b)$$

Girdap(vortisite) tensörü de aşağıdaki gibidir.

$$\Omega_{i,j} = \frac{1}{2} (V_{j,i} - V_{i,j})$$

$$\Omega_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_j}{\partial X_i} - \frac{\partial V_i}{\partial X_j}\right) \qquad (2\text{-}4)$$

Simetri ekseni boyunca olan akım için sınır şartları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$V_2 = 0$ $\quad X_1$ boyunca

$\frac{\partial V_1}{\partial X_2} = 0$ $\quad$ " "

$V_1 = V_1(X_1) = f(X_1)$ $\quad$ " " $\quad$ (2-5)

$\frac{\partial V_2}{\partial X_1} = 0$ $\quad$ " "

Süreklilik şartından aşağıdaki eşitlikler yazilabilir.

$$\frac{\partial V_1}{\partial X_1} = -\frac{\partial V_2}{\partial X_2}$$

$$V_2 = X_2.f'(X_1) \qquad (2\text{-}6)$$

Sınır şartları dikkate alındığında deformasyon hız tensörü, simetri ekseni boyunca olan akımda aşağıdaki ifadeye indirgenir.

$$e = \begin{vmatrix} \partial V_1/\partial X_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial V_2/\partial X_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad (2\text{-}7)$$

Aynı şekilde girdap tensörü de aşağıdaki gibidir.

$$\Omega = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad (\ 2\text{-}8\ )$$

(2-6) eşitliği kullanılarak (2-7) eşitliği aşağıdaki gibi basitleştirilebilir.

$$e = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial X_1} \qquad (\ 2\text{-}9\ )$$

(2-9) eşitliği, daralıp genişleyen akımda simetri ekseni boyunca olan akış ve sıkışamaz akışkan için her zaman geçerlidir.

Basit kaymalı akım için deformasyon hızı ve girdap tensörleri (2-8) ve (2-9) eşitliklerinden farklıdır. (2-3) ve (2-4) tanımlarına göre ve aşağıdaki sınır şartları kullanılarak bu tensörlerin karteziyen koordinatlarda ifadeleri bulunur.

$V_2 = 0$ $\qquad$ X_2 boyunca

$\frac{\partial V_1}{\partial X_1} = 0$ $\qquad$ " $\quad$ "

$V_1 = f(X_2)$ X_2 boyunca (2-10)

$$\frac{\partial V_2}{\partial X_1} = 0 \qquad \text{"} \quad \text{"}$$

$$e = \frac{\dot{\gamma}}{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad (2\text{-}11)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial V_1}{\partial X_2}$$

$$\Omega = \frac{\dot{\gamma}}{2} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad (2\text{-}12)$$

BÖLÜM 3.

VİSKOELASTİK AKIŞKAN MODELLERİ

Viskoelastik akışkanları diğer akışkanlardan ayıran en önemli özellik, davranışlarının sadece o andaki değil tüm geçmişteki deformasyonlara bağımlı olması, başka bir ifadeyle bu tür malzemelerin belleğe sahip olmasıdır [18]. Viskoelastik akışkanlar için çeşitli modeller geliştirilerek birçok bünye denklemi elde edilmiştir [18,19]. Bu bünye denklemleri kullanılarak akışkanların kararlı , basit kaymalı, salınımlı kaymalı gibi özel deformasyonlara karşı tepkileri hesaplanarak , görünür viskozite ve normal gerilme farkı fonksiyonu gibi viskometrik fonksiyonlar için analitik ifadeler elde edilebilir [18].

Herhangi bir modelin geçerliliğine , gerçek gözlemlere uyma derecesine göre karar verilir. Böylece önerilen bir reolojik bünye denkleminin geçerliliği , belirlediği viskometrik fonksiyonlarının ölçülen verilere göre bulunan viskometrik fonksiyonlarına olan uyum derecesine bağlıdır[18]. Prensipte genel bir reolojik denklem , herhangi uygun bir deformasyona karşı malzemenin tepkisini belirlemek için kullanılır. Pratikte verilen bir malzeme için elde edilen veri , genellikle sınırlıdır . Böylece önerilen modelin, karmaşık bir malzeme için tam uyumlu tepki göstermesi oldukça güçtür [3,18].

Verilen bir malzeme davranışını, tam olarak açıklayacak malzeme fonksiyonlarının sayısı ve herhangi bir tanım aralığı malzemenin büyük ölçüde yapısına bağlıdır. Bu aralık, normal gerilme ve elastik özellikleri olmayan basit bir Newton modeli ve Newton viskozitesine sahip bir akışkandan başlayıp, doğrusal olmayan görünür viskozite özelliği gösteren normal gerilme etkisine sahip ve karmaşık zaman bağımlılığı olan karmaşık bir polimer ya da polimer çözeltisine kadar uzanır. Bu son sınıra uyan malzemeler için kısıtlı veri aralığında ölçülebilen viskometrik fonksiyonlardan birini temsil eden bir model geliştirmek oldukça kolay olmaktadır. Fakat bu modeller tüm aralıkta uygun olmayabilir ya da diğer viskometrik fonksiyonlara uymayabilir. Böyle durumlarda model,tüm malzeme özelliklerine cevap verecek tarzda genel bir model olarak nitelendirilemez. Fakat bununla beraber belirli malzeme davranışlarının bulunması için faydalı olabilir [18].

Reolojik bünye denklemleri, türevli ve integralli modeller olmak üzere iki ana sınıfta toplanmaktadır. Gerçekte bu modeller arasında temelde bir fark olmayıp, sadece matematiksel ifade edilişleri açısından böyle bir sınıflandırmaya gidilmiştir[3]. Nitekim birçok bünye denklemi hem türevli biçime hem de integralli biçime uygun olarak ifade edilmektedir [18].

Bünye denklemleri arasında genel bir sınıflandırma ise kullanılan modelin doğrusal olup olmamasına göre yapılabilir. Genelde bünye denklemleri, gerilme, gerilme hızı, deformasyon ve deformasyon hızı arasındaki ilişkileri veren matematiksel ifadeler olarak tanımlanabileceğine göre [40] , bir bünye denkleminin doğrusal olup olmaması da bu değişkenlerin birbirleri ve / veya kendileri ile çarpımlarını içeren terimlerin varlığına bağlıdır.

Doğrusal olmamanın bir sonucu, görünür viskozite ve normal gerilme fonksiyonlarının hız gradyanına (kayma hızına) bağımlı olmasıdır. Esasen karmaşık yapıdaki bütün gerçek malzemeler , çok düşük deformasyonların haricinde doğrusal olmayan bir yapıya sahiptirler [3,18].

Genel olarak reoloji biliminin uygulanması açısından önem taşıyan malzemelerin(polimer , polimer çözeltileri,eriyikler , kıvamlı sıvılar, vs.) karmaşık davranışlarını tam olarak yansıtabilecek tek bir model henüz bulunamamıştır. Bu nedenle reoloji alanında çok yoğun araştırmalar bulunmasına rağmen, reoloji alanı henüz gelişme aşamasındadır.

3.1. Doğrusal modeller

Genelleştirilmiş doğrusal viskoelastik model olarak tanımlayabileceğimiz ve değişik zaman modülleri ile deformasyon hızlarının çarpımlarının doğrusal bir kombinasyonundan oluşan bünye denklemleri, dört değişik türde ifade edilebilir [41].

Bu tipler , aşağıda türevli ve integralli olarak topluca sunulmuştur.

I. $$\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\partial^n}{\partial t^n}\right)(\tau_{ij}-\tau_{ij}) = -\eta_p\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\partial^n}{\partial t^n}\right)\dot{\gamma}_{ij} \qquad (3\text{-}1)$$

II.

$$\tau_{ij}-\tau_{s,ij} = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_{ij}^{(k)} \qquad (3\text{-}2a)$$

$$\left(1+\lambda_k \frac{\partial}{\partial t}\right)\tau_{ij}^{(k)} = -\eta_k\,\dot{\gamma}_{ij} \qquad (3\text{-}2b)$$

III. $$\tau_{ij}-\tau_{s,ij} = -\int_{-\infty}^{t}\left\{\sum \frac{\eta_k}{\lambda_k} e^{-(t-t')/\lambda_k}\right\}\dot{\gamma}_{ij}(t')dt' \qquad (3\text{-}3)$$

IV. $$\tau_{ij}-\tau_{s,ij} = \int_{-\infty}^{t}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_p}{\lambda_k^2} e^{-(t-t')/\lambda_k}\right\}\dot{\gamma}_{ij}(t',t)dt' \qquad (3\text{-}4)$$

Burada (3-3) eşitliğinde integral içindeki ve aşağıda tanımlanan ilk terim gevşeme modülüdür.

$$G(t,t') = \{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k}{\lambda_k} e^{-(t-t')/\lambda_k} \}$$

(3-4) eşitliğinde integral içindeki ilk terim hafıza fonksiyonu olup aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$m(t,t') = \{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k}{\lambda_k^2} e^{-(t-t')/\lambda_k} \}$$

3.1.1. Türev tipli modeller

Maxwell akışkan modelinin türevli formunun genelleşmiş hali aşağıdaki gibidir.

$$\tau_{ij} + \lambda \frac{\delta}{\delta t} \tau_{ij} = \mu \Delta_{ij} \qquad (3\text{-}5)$$

Burada { μ / G (kayma modülü)} gevşeme zamanıdır [18]. $\delta/\delta t$, konvekted türev operatörü ve Δ_{ij} deformasyon hız tensörüdür.

Bu modelle belirlenen kararlı, basit kaymalı akım için aşağıdaki sınır şartları kullanılarak viskometrik fonksiyonlar bulunmuştur.

$$V_1 = V_1(X_2) \ , \ V_2 = V_3 = 0 \qquad (3\text{-}6)$$

$$\Delta_{ij} = \dot{\gamma}. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \ , \ \dot{\gamma} = \frac{\partial V_1}{\partial X_2} \ (\text{sabit}) \qquad (3\text{-}7)$$

(3-7) eşitliği kullanılarak, kaymalı akım için gerilmenin konvekted türev bileşenleri aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$\frac{\delta \tau_{11}}{\delta t} = 0$$

$$\frac{\delta \tau_{12}}{\delta t} = \dot{\gamma}\, \tau_{11} = \frac{\delta \tau_{21}}{\delta t}$$

$$\frac{\delta \tau_{22}}{\delta t} = 2\, \dot{\gamma}\, \tau_{21} \qquad (3\text{-}8)$$

$$\frac{\delta \tau_{33}}{\delta t} = 0$$

(3-8) eşitlikleri, (3-5) eşitliğinde kullanılarak bu model için gerilmeler arasındaki ilişki denklemleri bulunur.

$$\tau_{11} = 0$$

$$\tau_{22} + 2\,\lambda\,\dot{\gamma}\,\tau_{12} = 0$$

$$\tau_{33} = 0 \qquad (3\text{-}9)$$

$$\tau_{12} + \lambda\,\dot{\gamma}\,\tau_{11} = \mu\,\dot{\gamma}$$

(3-9) denklem takımları çözüldüğünde, gerilme bileşenleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$\tau_{12} = \mu\,\dot{\gamma}$$

$$\tau_{11} = 0$$

$$\tau_{22} = -\,2\,\lambda\,\dot{\gamma}^2 \qquad (3\text{-}10)$$

$$\tau_{33} = 0$$

(3-10) eşitlikleri kullanılarak viskometrik fonksiyonlar bulunabilir.

Viskozite fonksiyonu :

$$\eta = \tau_{12}/\dot{\gamma} = \mu \text{ (sabit)} \qquad (3\text{-}11)$$

1. Normal gerilme farkı fonksiyonu :

$$\Theta_1 = (\,\tau_{11} - \tau_{22}\,)/\dot{\gamma}^2 = 2\mu\lambda \text{ (sabit)} \qquad (3\text{-}12)$$

2. Normal gerilme farkı fonksiyonu :

$$\Theta_2 = (\tau_{22} - \tau_{33})/ \dot{\gamma}^2 = - 2 \mu \lambda = - \Theta_1 \qquad (3\text{-}13)$$

Kararsız akımda gerilme bileşenleri için çözülecek denklemler (3-9)eşitliklerine benzerdir.Fakat sıfır olmayan zaman türevi mevcuttur.

$$\tau_{11} + \lambda \, d\tau_{11}/dt = 0 \qquad (3\text{-}14)$$

$$\tau_{22} + 2 \lambda \dot{\gamma} \tau_{12} + \lambda \, d\tau_{12}/dt = 0 \qquad (3\text{-}15)$$

$$\tau_{33} + \lambda \, d\tau_{33}/dt = 0 \qquad (3\text{-}16)$$

$$\tau_{12} + \lambda \dot{\gamma} \tau_{11} + \lambda \, d\tau_{12}/dt = \mu \dot{\gamma} \qquad (3\text{-}17)$$

(3-14) ve (3-16) diferansiyel denklemleri çözüldüğünde zamana bağımlı sonuçlar bulunur.

$$\tau_{11} = (\tau_{11})_0 e^{-t/\lambda} \qquad (3\text{-}18)$$

$$\tau_{33} = (\tau_{33})_0 e^{-t/\lambda} \qquad (3\text{-}19)$$

Kararlı salınım hareketi için (3-17) diferansiyel denklemin çözümü aşağıdaki gibidir :

$$\frac{d\tau_{12}}{dt} + \frac{\tau_{12}}{\lambda} = \frac{\mu\dot{\gamma}}{\lambda} = \frac{\mu\dot{\gamma}_0}{\lambda}\cos wt \qquad (\ 3\text{-}20\ )$$

Burada gerilme tensörünün sadece gerçek kısmı vardır.

$$\dot{\gamma}(w) = \dot{\gamma}_0 \cos wt = \mathrm{Re}\ \dot{\gamma}_0 e^{jwt} \qquad (\ 3\text{-}21\ )$$

(3-20) diferansiyel denklemi çözüldüğünde aşağıdaki sonuç bulunur.

$$\tau_{12}(w) = \frac{\mu_0\dot{\gamma}_0}{1 + w^2\lambda^2}(\cos wt + w\lambda \sin wt) \qquad (\ 3\text{-}22\ )$$

Kompleks viskozitenin gerçek ve sanal kısımları aşağıda tanımlanmıştır.

$$\eta' = \frac{\mu}{1 + w^2\lambda^2} \quad , \quad \eta'' = \frac{\mu\lambda w}{1 + w^2\lambda^2} \qquad (\ 3\text{-}23\ )$$

$\tau 12$'in çözümü bulunduktan sonra $\tau 22$, aşağıdaki gibi çözülmüş olur :

$$\tau_{22}(w) = -\frac{\mu\lambda\dot{\gamma}_0^2}{1+\omega^2\lambda^2}\left\{1 + \frac{3w\lambda \sin 2wt + (1-2w^2\lambda^2)\cos 2wt}{1 + 4\omega^2\lambda^2}\right\} \qquad (\ 3\text{-}24\ )$$

3.1.2. Integral modeller

Vıskoelastik bir akışkanın hafızaya sahip olma özelliği, verilen bir andaki gerilme durumunum o ana kadar geçen tüm deformasyon geçmişine bağlı olmasını gerektirdiğinden, bünye denklemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir [18].

$$\tau(t) = \int_{-\infty}^{t} \psi(t-t')\dot{\gamma}(t')dt' \qquad (3\text{-}25)$$

Burada ψ , doğrusal bir viskoelastik maddenin gevşeme zamanı olup, malzemenin zamana bağlı özelliklerini yansıtmaktadır. İntegral modeller ile türevli modellerin eşdeğer olduğu daha önce vurgulanmıştı. İntegral modellerin avantajı , kompleks deformasyonlara daha kolay uygulanabilmeleridir.

Deformasyon hızı yerine deformasyonun kullanıldığı eşdeğer bir ifade de ise hafıza fonksiyonu $\phi(t)$ dir.

$$\tau(t) = \psi_{(o)}\gamma(t) + \int_{-\infty}^{t} \phi(t-t')\gamma(t')dt' \qquad (3\text{-}26)$$

$$\phi(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} \qquad (3\text{-}27)$$

Burada t anındaki durumun referans olarak kabul edilmesi uygundur . Böylece (3-26) denkleminin sağ tarafındaki ilk terim sıfır olur.

Genelleştirilmiş bir Maxwell modeli kavramına dayanarak, malzemenin molöküler yapısının ifadesi olabilecek bir gevşeme zamanı spekturumu tanımlanabilir [18]. Bu gevşeme zamanları dağılımı , genelleştirilmiş Maxwell modeline göre tanımlanan ($F(\lambda)$) dağılım fonksiyonu ile karekterize edilirler:

$$\psi(t) = \int_0^\infty F(\lambda) e^{-t/\lambda}\, d\lambda \qquad (3\text{-}28)$$

(3-28) denklemini (3-25)'de yerine koyarak dağılım fonksiyonu $F(\lambda)$ ya bağlı bir ifade elde edilir.

$$\tau(t) = \int_{-\infty}^{t}\int_0^\infty F(\lambda) e^{-(t-t')/\lambda}\,\dot{\gamma}(t')\, d\lambda\, dt' \qquad (3\text{-}29)$$

(3-25) denklemini, bütün gerilme bileşenlerini ve sonlu deformasyonları içerecek şekilde genelleştirmek için, genel tensör notasyonlarını kullanmak en kestirme yoldur.

Kovaryant tarzda aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\tau_{ij}(z,t) = \int_{-\infty}^{t} \psi(t-t') \frac{\partial z^m}{\partial z^i} \cdot \frac{\partial z^n}{\partial z^j} \Delta_{mn}(z,t')dt' \qquad (3\text{-}30)$$

Kontravaryant tarzda da aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\tau^{ij}(z,t) = \int_{-\infty}^{t} \psi(t-t') \frac{\partial z^i}{\partial z^m} \cdot \frac{\partial z^j}{\partial z^n} \Delta^{mn}(z,t')dt' \qquad (3\text{-}31)$$

(3-30) ve (3-31) denklemlerinin, kararlı akım şartlarında eşdeğer olmadıkları, basit kaymalı akım örneği üzerinde gösterilebilir.

$$V_1 = V_1(X_2) = \dot{\gamma} X_2 \quad , V_2 = V_3 = 0$$

$$\Delta_{ij} = \dot{\gamma} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad , \quad \dot{\gamma} = \frac{dV_1}{dX_2} \text{ (sabit)} \qquad (3\text{-}32)$$

Burada $\dot{\gamma}$ kayma hızı, pozisyona bağlı değildir. Uygulanan akım için malzeme koordinatları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned} z^3 &= X_3 \\ z^2 &= X_2 \\ z^1 &= X_1 - \dot{\gamma} X_2 (t-t') \end{aligned} \qquad (3\text{-}33)$$

Denklem (3-30)'un kovaryant formu aşağıdaki hale indirgenir:

$$\tau_{ij} = \dot{\gamma} \int_{-\infty}^{t} \psi(t-t') \left[\frac{\partial z^2}{\partial X_i} . \frac{\partial z^1}{\partial X_j} + \frac{\partial z^1}{\partial X_i} . \frac{\partial z^2}{\partial X_j} \right] dt' \qquad (3\text{-}34)$$

Sadece sıfırdan farklı gerilme bileşenleri aşağıdaki gibidir:

$$\tau_{12} = \tau_{21} = \dot{\gamma} \int_{-\infty}^{t} \psi(t-t') dt' = \dot{\gamma} \int_{0}^{\infty} \psi(t) dt \qquad (3\text{-}35)$$

$$\tau_{22} = -2\dot{\gamma}^2 \int_{-\infty}^{t} (t-t')\psi(t-t')dt' = -2\dot{\gamma}^2 \int_{0}^{\infty} t\psi(t)dt \qquad (3\text{-}36)$$

Bu gerilme bileşenlerinin dışındaki tüm bileşenler sıfırdır.

Viskometrik fonksiyonlar aşağıdaki gibidir:

$$\eta = \frac{\tau_{12}}{\dot{\gamma}} = \int_{-\infty}^{t} \psi(t-t')dt' = \int_{0}^{\infty} \psi(t)dt \text{ (sabit)} \qquad (3\text{-}37)$$

$$\Theta_1 = \frac{\tau_{11}-\tau_{22}}{\dot{\gamma}^2} = 2\int_{-\infty}^{t}(t-t')\psi(t-t')dt' = \int_{0}^{\infty} t\psi(t)dt \text{ (sabit)} \qquad (3\text{-}38)$$

$$\Theta_2 = \frac{\tau_{22}-\tau_{33}}{\dot{\gamma}^2} = -\Theta_1 \qquad (3\text{-}39)$$

(3-28) denklemi kullanılarak vıskometrik fonksiyonları dağılım fonksiyonu F(λ) cinsinden de ifade edilebilir.

$$\eta = \int_{0}^{\infty} \lambda F(\lambda)d\lambda \qquad (3\text{-}40)$$

$$\Theta_1 = -\Theta_2 = 2\int_{0}^{\infty} \lambda^2 F(\lambda)d\lambda \qquad (3\text{-}41)$$

(3-31) denkleminden sıfır olmayan gerilme bileşenleri

$\tau^{12} = \tau^{21}$ ve τ^{11} dir. τ^{11} aşağıdaki gibi ifade edildiğinde, τ^{12} (3-35) denklemindeki τ_{12} ye eşdeğer olacaktır.

$$\tau^{11} = 2\dot{\gamma}^2 \int_0^\infty t\psi(t)dt = 2\dot{\gamma}^2 \int_0^\infty \lambda^2 F(\lambda)d\lambda \qquad (3\text{-}42)$$

Sonuç olarak bu iki durumun karşılaştırması yapıldığında aşağıdaki sonuçlar bulunur:

$$0 = \tau_{33} = \tau_{11} > \tau_{22} \qquad \Theta_2 = - \Theta_1 \qquad (3\text{-}43)$$

$$0 = \tau^{33} = \tau^{22} < \tau^{11} \qquad \Theta_2 = 0 \qquad (3\text{-}44)$$

Bulunan bu sonuçlar , Maxwell modelinin konvekted türev formları için (3-5) denkleminden bulunan sonuçlarla aynıdır.

Doğrusal viskoelastik modeller ile kullanılan dağılım fonksiyonlarına bağlı olarak bulunacak viskometrik fonksiyonlar , her doğrusal model için deformasyon veya deformasyon hızından bağımsız olacaktır.

3.2. Doğrusal olmayan modeller

Bölüm 3.1.' de tanımlanan doğrusal tipteki bünye denklemlemlerinin her biri , doğrusal olmayan terimlerin eklenmesiyle yeni bünye denklemlerinin elde edilmesinde kullanılmıştır [41].

3.2.1. Türev tipli modeller

3.1.1' deki Maxwell modelinde konvekted türev yerine doğrusal olmayan Jaumann türevi kullanılarak, Maxwell modeli aşağıda verildiği gibi doğrusal olmayan bir modele dönüşür.

$$\tau_{ij} + \lambda \frac{\mathcal{D}\tau_{ij}}{\mathcal{D}t} = \mu \, \Delta_{ij} \qquad (3\text{-}45)$$

Girdap tensörü, kaymalı akım şartları için aşağıdaki gibi alınarak gerilmenin Jaumann türev bileşenleri bulunur.

$$\Omega_{ij} = V_{j,i} - V_{i,j} = \dot{\gamma}.\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad (3\text{-}46)$$

$$\frac{\mathcal{D}\,\tau_{11}}{\mathcal{D}\,t} = \frac{\partial\,\tau_{11}}{\partial\,t} + \Omega_1{}^2\,\tau_{21} = \frac{\partial\,\tau_{11}}{\partial\,t} - \dot{\gamma}\,\tau_{21}$$

$$\frac{\mathcal{D}\,\tau_{22}}{\mathcal{D}\,t} = \frac{\partial\,\tau_{22}}{\partial\,t} + \Omega_2{}^1\,\tau_{21} = \frac{\partial\,\tau_{22}}{\partial\,t} + \dot{\gamma}\,\tau_{21} \qquad (3\text{-}47)$$

$$\frac{\mathcal{D}\,\tau_{33}}{\mathcal{D}\,t} = \frac{\partial\,\tau_{33}}{\partial\,t}$$

$$\frac{\mathscr{D}\,\tau_{12}}{\mathscr{D}\,t} = \frac{\partial\,\tau_{12}}{\partial\,t} + \frac{1}{2}\,[\,\Omega_1{}^2\,\tau_{22} + \Omega_2{}^1\,\tau_{11}\,]$$

$$\frac{\mathscr{D}\,\tau_{12}}{\mathscr{D}\,t} = \frac{\partial\,\tau_{12}}{\partial\,t} + \frac{1}{2}\,[\,-\,\dot{\gamma}\,\tau_{22} + \dot{\gamma}\,\tau_{11}\,]$$

(3-47) denklemleri, (3-45) denkleminde kullanılarak, kararlı durum için gerilme bileşenleri arasındaki denklemler aşağıda tanımlandığı gibi bulunmuştur:

$$\begin{aligned} &\tau_{11} - \lambda\,\dot{\gamma}\,\tau_{21} = 0 \\ &\tau_{22} + \lambda\,\dot{\gamma}\,\tau_{21} = 0 \\ &\tau_{21} + \frac{1}{2}\,\lambda\,\dot{\gamma}\,(\,\tau_{11} - \tau_{22}\,) = \mu\,\dot{\gamma} \end{aligned} \qquad (\ 3\text{-}48\ )$$

(3-48) denklemleri çözülerek, viskometrik fonksiyonlar aşağıda verildiği gibi bulunmuştur.

$$\eta = \frac{\tau_{12}}{\dot{\gamma}} = \frac{\mu}{1 + \lambda^2\,\dot{\gamma}^2} \qquad (\ 3\text{-}49\ )$$

$$\Theta_1 = \frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{\dot{\gamma}^2} = \frac{2\,\mu\,\lambda}{1 + \lambda^2\,\dot{\gamma}^2} \qquad (3\text{-}50)$$

$$\Theta_2 = \frac{\tau_{22} - \tau_{33}}{\dot{\gamma}} = -\frac{\mu\,\lambda}{1 + \lambda^2\,\dot{\gamma}^2} \qquad (3\text{-}51)$$

Jeffreys [42],iki parametreli Maxwell modeline üçüncü bir parametre ekleyerek yeni bir model geliştirmiştir. Bu modelin genelleştirilmiş hali aşağıdaki gibidir:

$$\tau_{ij} + \lambda_1 \frac{\mathcal{D}\,\tau_{ij}}{\mathcal{D}\,t} = \mu\,[\,\Delta_{ij} + \lambda_2 \frac{\mathcal{D}\,\Delta_{ij}}{\mathcal{D}\,t}\,] \qquad (3\text{-}52)$$

Kararlı ve basit kaymalı akım için viskometrik fonksiyonlar, aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$\eta = \frac{\tau_{12}}{\dot{\gamma}} = \frac{\mu\,[\,1 + \lambda_1\lambda_2\dot{\gamma}^2\,]}{1 + \lambda^2\,\dot{\gamma}^2} \qquad (3\text{-}53)$$

$$\Theta_1 = \frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{\dot{\gamma}} = \frac{2\,\mu\,(\,\lambda_1 - \lambda_2)}{1 + \lambda_1^2\,\dot{\gamma}^2} \qquad (3\text{-}54)$$

$$\Theta_2 = \frac{\tau_{22} - \tau_{33}}{\dot{\gamma}^2} = - \frac{\Theta_1}{2} \qquad (3\text{-}55)$$

Kompleks viskozite fonksiyonları da aşağıdaki gibidir:

$$\eta' = \frac{\mu\,(1 + \lambda_1 \lambda_2 \omega^2)}{1 + \lambda_1^2\, \omega^2}$$

$$(3\text{-}56)$$

$$\eta'' = \frac{\omega\,\mu\,(\lambda_1 - \lambda_2)}{1 + \lambda_1^2\, \omega^2}$$

Bu model, sıfır olmayan yüksek kayma hızı limit viskozite için, (3-45) ile bulunan sonuçlardan daha gerçekçi sonuçlar verir [18]. Bu modelde eğer $\lambda_1 = \lambda_2$ (daha gerçekçi şart olarak $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$) olduğunda , tamamen viskoz Newton akışkan modeline dönüldüğü görülebilir.

Daha gerçekçi normal gerilme farkı fonksiyonlarını bulabilmek için Oldroyd [3,18] , bu modellere bir takım kompleks değişiklikler getirmiştir . Bu modellerin özel bir durumu olarak Williams ve Bird [43], aşağıdaki üç sabitli modeli önermişlerdir.

$$\tau_{ij} + \lambda_1 J(\tau_{ij}) = \mu\,[\,\Delta_{ij} + \lambda_2 J(\Delta_{ij})\,] \qquad (3\text{-}57)$$

Burada $J(\tau_{ij})$, bir başka doğrusal olmayan zaman türevi olup aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$J(\tau_{ij}) = \frac{\mathcal{D}\tau_{ij}}{\mathcal{D}t} - \frac{1}{2}\left[\Delta_i{}^k\tau_{jk} + \Delta_j{}^k\tau_{ik}\right] + \frac{1}{3}\tau_{kl}\Delta^{kl}g_{ij} \quad (3\text{-}58)$$

Bu modelle kaymalı akım için viskometrik fonksiyonlar, aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$\eta = \mu\,\frac{1 + 2/3\,\lambda_1\lambda_2\dot{\gamma}^2}{1 + 2/3\,\lambda_1^2\dot{\gamma}^2} \quad (3\text{-}59)$$

$$\Theta_1 = 2\mu\,\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)}{1 + 2/3\,\lambda_1^2\dot{\gamma}^2} \quad (3\text{-}60)$$

$$\Theta_2 = 0 \quad (3\text{-}61)$$

Bu modelde Weissenberg hipotezi^{+} gerçekleştirilmiştir ve (3-55) eşitliğine göre daha gerçekçi olduğu söylenebilir. Salınım etkili fonksiyonlar (kompleks viskozite) , denklem (3-56)'ya benzerdir.

$^{+}$ Weissenberg hipotezi: 2- ve 3- yönündeki normal gerilmelerin eşit olması($\Theta_2 = 0$)durumudur.

Literatürde şu ana kadar değinilen Maxwell, Jeffreys ve Oldroyd modellerinin değişik versiyonları yer almıştır (Tablo 3.1.). Genelde bu modeller arasındaki fark, kovaryant veya kontravaryant türevlerin kullanılmasından kaynaklanmakta ve değişik adlar taşıyan bünye denklemleri eşdeğer olabilmektedir (Tablo 3.1.).

Örneğin;

Upper konvekted Maxwell modeli aşağıdaki gibi verilmiştir [8].

$$\tau + \lambda \frac{\delta \tau}{\delta t} = 2 \mu D \qquad (3\text{-}62)$$

Upper konvekted Jeffreys modeli de aşağıdaki gibidir [8]:

$$\tau + \lambda_1 \frac{\delta \tau}{\delta t} = 2 \mu \left(D + \lambda_2 \frac{\delta D}{\delta t} \right) \qquad (3\text{-}63)$$

Burada τ gerilme tensörü , D deformasyon hız tensörü, $\delta/\delta t$ upper konvekted Oldroyd türevidir. λ veya λ_1 gevşeme zamanı, geciktirme zamanı ve μ sıvı viskozitesidir [8].

Weissenberg hipotezinden sapmaları dikkate alarak Spriggs [6],ε gibi ek bir parametre ilave ederek (3-58) denkleminin türev operatörünü değiştirmiş ve Maxwell tipi modele uygulamıştır:

$$\tau_{ij} + \lambda\, J_{\varepsilon}(\tau_{ij}) = \mu\, \Delta_{ij} \qquad (3\text{-}64)$$

Burada $J_{\varepsilon}(\tau_{ij})$ türev operatörü aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$J_{\varepsilon}(\tau_{ij}) = \frac{\mathscr{D}\,\tau_{ij}}{\mathscr{D}\,t} - (1+\varepsilon).\left[1/2(\tau_i^{\ m}\Delta_{mj}+\tau_j^{\ m}\Delta_{mi}) - 1/3\, \tau^{mn}\Delta_{mn} g_{ij}\right] \qquad (3\text{-}65)$$

Bu model , parametreleri μ , λ ve ε olan üç sabitli bir modeldir . Bu modelde basit kaymalı akım için kararlı durumda viskometrik fonksiyonlar aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$\eta = \frac{\tau_{12}}{\dot{\gamma}} = \frac{\mu}{1 + (\lambda c\dot{\gamma})^2} \qquad (3\text{-}66)$$

$$\Theta_1 = \frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{\dot{\gamma}^2} = \frac{2\,\lambda\,\mu}{1 + (\lambda c\dot{\gamma})^2} \qquad (3\text{-}67)$$

$$\Theta_2 = \frac{\tau_{22} - \tau_{33}}{\dot{\gamma}^2} = \frac{\varepsilon\,\mu\,\lambda}{1 + (\lambda c\dot{\gamma})^2} \qquad (3\text{-}68)$$

Burada c terimi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$c^2 = 2/3 (1 - \varepsilon - 1/2 \varepsilon^2) \qquad (3\text{-}69)$$

Düşük genlikteki salınımlı viskozite fonkşiyonları (kompleks viskozite) , (3-23) eşitliğindekine benzerdir. operatörü , düşük deformasyon ve deformasyon hızlarında kısmı zaman türevine indirgenir. Yani doğrusal hale dönüşmüş olur.

$\varepsilon = 0$ olduğunda Weissenberg hipotezi gerçekleşir. Model, ayrıca $\varepsilon = -1$ olduğunda (3-25) denklemine indirgenir. (3-69) denkleminde yer alan " c " ' ye dönüştürme faktörü adı verilir.

Upper konvekted Maxwell (UCM) ve Oldroyd -B gibi modeller literatürde yaygın olarak kullanılmakla beraber, polimer sıvıların kayma zayıflaması özelliğini yansıtmazlar . Bu özelliği de hesaba katmak amacı ile Gaidos [9], yeni bir model geliştirmiştir.

Aşağıda tanımlandığı gibi Gaidos modeli, deformasyon hızı ile gevşeme zamanı ve viskoziteye bağlı olarak ifade edilen polimer gerilmesine Newton akişkan gerilmesi ilave edilmiş doğrusal olmayan konvekted türevli bir Maxwell modeldir.

$$\tau_{ij} = (\tau_{ij})_p + (\tau_{ij})_n \qquad (3\text{-}70)$$

Newton gerilmesi $(\tau_{ij})_n$:

$$(\tau_{ij})_n = \eta_\infty \Delta_{ij} \qquad (3\text{-}71)$$

Polimer gerilmesi $(\tau_{ij})_p$:

$$(\tau_{ij})_p + \lambda_{II} \frac{D(\tau_{ij})_p}{Dt} = \eta_{II} \Delta_{ij} \qquad (3\text{-}72)$$

Gevşeme zamanı ve polimer viskoziteleri aşağıdaki şekilde ifade edilmişlerdir [19].

$$\lambda_{II} = \lambda \frac{\sigma}{\left[1 - 4\varepsilon(1-\varepsilon)\lambda^2 \, II \right]^\beta} \qquad (3\text{-}73)$$

$$\mu_{II} = \left(\eta_o - \eta_\infty\right) \frac{1 - 4\varepsilon(1-\varepsilon)\lambda_{II}^2 \, II}{\left[1 - 4\varepsilon(1-\varepsilon)\lambda^2 \, II\right]^\alpha} \qquad (3\text{-}74)$$

Burada II, Δ_{ij} deformasyon hız tensörünün ikinci invaryantını gösterir. (3-72) eşitliğindeki zaman türevi upper ve lower konvekted türevlerin ağırlıklı toplamıdır.

$$\frac{DM_{ij}}{Dt} = \varepsilon \frac{\delta M_{ij}}{\delta t} + (1-\varepsilon) \, g_{ik} \frac{\delta M^{kl}}{\delta t} g_{lj} \qquad (3\text{-}75)$$

Ağırlık faktörü ε, $0 < \varepsilon < 1$ aralığındadır. $\varepsilon = 0$ olduğunda upper(kontravaryant) konvekted türev, $\varepsilon = 1$ olduğunda da lover (kovaryant) konvekted türev oluşur.

Model, (3-70) - (3-72) eşitlikleri kullanılarak Oldroyd veya Jeffreys formunda ifade edilebilir [9].

$$\tau_{ij} + \lambda_{II}\frac{D\tau_{ij}}{Dt} = \mu_{II}\Delta_{ij} + \eta_\infty\left[\Delta_{ij} + \lambda_{II}\frac{D\Delta_{ij}}{Dt}\right] \qquad (3\text{-}76)$$

Aşağıdaki tabloda, parametreleriyle beraber çeşitli klasik bünye denklemleri gösterilmiştir [9].

TABLO 3.1 : Bünye Denklemlerinin Limit Durumları

Bünye denklemleri	η_0	ε	λ	η_∞	σ	α	β
Newton	η_0	-	0	-	-	-	-
Upper kon. Maxwell	η_0	0	λ	0	1	-	-
Lower kon. Maxwell	η_0	1	λ	0	1	-	-
Korotasyonel Maxwell	η_0	1/2	λ	0	1	1	0
Johnson - Segalman	η_0	ε	λ	0	1	1	0
Oldroyd A akışkanı/ Lower kon. Jeffreys	η_0	1	λ	η_∞	1	1	0
Oldroyd B akışkanı/ Upper kon. Jeffreys	η_0	0	λ	η_∞	1	1	0
Korotasyonel Jeffreys	η_0	1/2	λ	η_∞	1	1	0
Genelleştirilmiş Jeffreys	η_0	ε	λ	η_∞	1	1	0

Aşağıda kararlı basit kaymalı akım için viskometrik fonksiyonlar verilmiştir:

$$\eta = \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{[\,1 + 4\,\varepsilon\,(\,1 - \varepsilon\,)\,\lambda^2\,\dot{\gamma}^2\,]^{\alpha}} + \eta_\infty \qquad (\,3\text{-}77\,)$$

$$\theta_1 = \frac{2\,\sigma\,\lambda\,(\,\eta_0 - \eta_\infty\,)}{(\,1 + 4\,\varepsilon\,(\,1 - \varepsilon\,)\,\lambda^2\,\dot{\gamma}^2\,)^{\alpha+\beta}} \qquad (\,3\text{-}78\,)$$

$$\eta_e = \mu_{II}\left[\frac{2}{1+2(2\varepsilon-1)\lambda_{II}\dot{\varepsilon}} + \frac{1}{1-(2\varepsilon-1)\lambda_{II}\dot{\varepsilon}}\right] + 3\eta_\infty \qquad (\,3\text{-}79\,)$$

Burada $\dot{\varepsilon}$ simetri ekseni boyunca olan akım için hız gradyanıdır ve λ_{II} ve μ_{II} sırasıyla (3-73) ve (3-74) eşitliklerinden $II = -\,3\,\dot{\varepsilon}^2$ alınarak belirlenir.

Modelde önerilen viskozite, normal gerilme farkı ve akım boyunca olan viskozite fonksiyonlarının değişimleri, polietilen eriyiklerine ait veriler ile uyuşmaktadır [9].

Kayma hızının 100 s^{-1} den küçük değerleri için düşük elastikli bir sıvıya ait viskometrik veriler, Maxwell veya Jeffreys modellerinden birine daha iyi uymaktadır ve Jeffreys modeli, diğerine göre daha uyumludur [8].

İki model için kayma modülü aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$G'(\text{Maxwell}) = \frac{\mu \lambda \omega^2}{1 + (\lambda\omega)^2} \quad (3\text{-}80)$$

$$G'(\text{Jeffreys}) = \frac{\mu (\lambda_1 - \lambda_2)\, \omega^2}{1 + (\lambda_1 \omega)^2} \quad (3\text{-}81)$$

Her iki modelde bulunan G′ değerleri birbirleriyle uyum içindedirler. Denklem (3-81) deki $\lambda_1 - \lambda_2$ değeri , (3-80) deki λ ya nümerik olarak eşit olduğunda düşük frekannslar için iki denklem aynı sonucu verir.

Polimerlerin, deformasyon geçmişini kullanan türev tipli denklemler üzerinde de çalışmalar yapılmıştır . Polimer konfigirasyonları , deformasyon geçmişine bağlı olup, bağıl durumu tüm konfigirasyon tensörlerinin bir fonksiyonu olan hareketli bir tensör özelliğine sahip olarak tanımlanmış, sınırlı gerilmeyle belirlenir . Bu model , konfigirasyon yönünden türev tipli ve gerilme tensörü yönünden de doğrusal olmayan bir özellik taşımasına rağmen, bazı önemli tip akımlar için analitik çözümlerin yapılmasına yarar [39].

Nıtın R. Anturkar ve Albert Co [46] , Maxwel modelini değiştirerek kullanmışlardır. Gerilme tensörü ile deformasyon hız tensörü arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir:

$$\tau + \lambda(\dot{\gamma})\ \tau_{(1)} = \mu(\dot{\gamma})\ \dot{\gamma} \qquad (3\text{-}82)$$

Burada $\dot{\gamma}$ deformasyon hız tensörüdür ve aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\dot{\gamma} = [\ \nabla V + (\ \nabla V\ )^{T}\ ] \qquad (3\text{-}83)$$

Konvekted türev aşağıdaki gibidir:

$$\tau_{(1)} = \frac{\partial \tau}{\partial t} + V.\nabla\tau - \{\ \tau.\nabla V + (\nabla V)^{T}.\tau\ \} \qquad (3\text{-}84)$$

Viskozite $\mu(\dot{\gamma})$ ve akışkan karakteristik zamanı $\lambda(\dot{\gamma})$ kayma hızı $\dot{\gamma}$ 'nın fonksiyonudur.

Bu modelde viskozite fonksiyonu olarak Carreau viskozite fonksiyonu kullanılmıştır [19].

$$\mu(\dot{\gamma}) = \eta_0 (1 + \lambda_{\eta}\ \dot{\gamma}^2)^{(n-1)/2} \qquad (3\text{-}85)$$

Akışkan karakteristik zaman fonksiyonu olarak da benzer bir fonksiyon kullanılmıştır.

$$\lambda(\dot{\gamma}) = \lambda_0 (1 + \lambda_t^2\ \dot{\gamma}^2)^{(n'-1)/2} \qquad (3\text{-}86)$$

Burada η_0 başlangıç kayma hızı viskozitesi , λ_{η} , λ_0 ve λ_t zaman sabitleri , n ve n' boyutsuz üs parametreleridir.

Viskozite ve zaman fonksiyonları düşük kayma hızlarında sabit değerlere yaklaşırlar ve diğer taraftan yüksek kayma hızlarında ise üstel olarak değişen bir etki gösterirler.

Denklem (3-82), $\lambda(\dot{\gamma}) = \mu(\dot{\gamma})$ /G olduğunda White - Metzner modeline benzer.

Giesekus ve Oldroyd -B modellerinden farklı bir model üzerinde, Debraut, Marchal ve Crochet birlikte çalışmışlardır. Tek gevşeme zamanlı, türev tipli bu modelin σ Couchy gerilmesi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [47].

$$\sigma = - p I + T_1 + T_2 \qquad (3\text{-}87)$$

Burada p basınçtır. T_1 gerilme tensörünün viskoelastik kısmını ve T_2 de viskoz kısmını (Newton akışkan) ifade etmektedir.

$$T_2 = 2 \mu_2 d \qquad (3\text{-}88)$$

Burada μ_2 sabit bir kayma hızı viskozitesi ve d deformasyon hız tensörüdür.

T_1 kısmı için de aşağıdaki ifade tanımlanmıştır:

$$g\, T_1 + \lambda_1 \overset{\square}{T}_1 = 2\, \mu_1\, d \qquad (3\text{-}89)$$

Burada λ_1 ve μ_1 malzeme sabitleridir. Zaman türevi $\overset{\square}{T}_1$, T_1'in upper ve lower konvekted türevlerinin doğrusal bir kombinasyonudur.

$$\overset{\square}{T}_1 = (\, 1 - \xi/2\,)\, \overset{\nabla}{T}_1 + (\xi/2)\, \overset{\Delta}{T}_1$$

$$\overset{\nabla}{T}_1 = \dot{T}_1 - L\, T_1 - T_1\, L^T \qquad (3\text{-}90)$$

$$\overset{\Delta}{T}_1 = \dot{T}_1 + L^T\, T_1 + T_1 L$$

(3-90) eşitliklerinde ξ sabit bir malzeme parametresi ve L hız gradyan tensörüdür. (3-89) denklemindeki g ifadesi, kullanılan akışkan tipine bağlıdır. Maxwell ve Oldroyd -B akışkanları için değeri bire eşittir. Phan Thien - Tanner akışkanı için de [45] bir ε malzeme sabiti içerecek şekilde aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$g = \exp[\,(\, \varepsilon\lambda_1/\mu_1\,)\, \mathrm{tr}T_1] \qquad (3\text{-}91)$$

Giesekus akışkanı için de [39] g, tensörel bir büyüklük olarak aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$g = I + (\alpha\lambda_1/\mu_1) T_1 \qquad (3\text{-}92)$$

Burada I birim tensör ve α malzeme sabitidir.

Hasegawa , Fukutomi ve Narumi [48] yine Maxwell modelini değiştirerek çalışmalarında kullanmışlardır . Değiştirilmiş Maxwell modeli (White - Metzner modeli) aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\tau^{ij} + \lambda\{4|II_e|\}^{\frac{s-n-1}{2}} . \frac{\delta\tau^{ij}}{\delta t} = 2\mu\{4|II_e|\}^{\frac{n-1}{2}} e_{ij} \qquad (3\text{-}93)$$

τ^{ij} , gerilmelerin kontravaryant bileşenleri ;
$II_e = 1/2\, e_{ij} e^{ij}$, deformasyon hız tensörünün 2. invaryantı;
$\delta/\delta t$, konvekted türev ve λ , μ , s , n malzeme sabıtleridir. Bu modelde seyreltik çözeltiler ıçin n bire eşıt alınmıştır (Newton viskozitesi anlamında) ve μ viskozitedir.

Basit kaymalı akım için (3-93) eşitliği aşağıdaki sonuçları verir:

$$\begin{aligned} \tau_{11} - \tau_{22} &= 2\lambda\mu\dot{\gamma} \\ \tau_{22} - \tau_{33} &= 0 \end{aligned} \qquad (3\text{-}94)$$

$$\tau_{12} = \mu \dot{\gamma}$$

Yakın zamanda Zanden ve Hulsen [49], bünye denklemlerini değişik bir açıdan değerlendirerek, klasik Maxwell ve Jeffreys (Oldroyd) türü modellerin viskometrik fonksiyonlarının belli sınır şartlarında yetersiz kaldığını , halbuki Leonov ve Giesekus gibi daha yeni modellerin böyle bir dezavantajı olmadığını ve her türlü akım geometrisine uygulanabilmek açısından daha üstün olduklarını vurgulamışlardır.

3.2.2. Integral modeller

Gevşeme ve hafıza fonksiyonlarına kayma bağımlılığı verilerek , integral denklemlerine doğrusal olmama özelliği kazandırılır . Bunlar skaler fonksiyonlar olduklarından bu bağımlılık ancak deformasyon veya deformasyon hız tensörüne bağlı olan invaryantlar cinsinden olabilir [18].

Doğrusal olmayan reolojik modellerin test edilmesi ve formülasyonu ile ilgili gittikçe artmakta olan literatür mevcuttur [18,3,37,16,17,50,35,51,52,53,54]. Bu modellerin çoğu integral tipindedir . Çalışmaların çoğu , polimerik akışkanların hem çözeltiler hem eriyiklerin özelliklerinin modellenmesi konusunda yoğunlaşmıştır. Bu çalışmaların önemli olanlarından bir kısmı [3,37,16,50,35] nolu kaynaklarda toplanmıştır.

Bird ve Carreau [51,52,53] genelleştirilmiş Maxwell denkleminde ampirik olarak elde edilen bir hafıza fonksiyonu kullanarak bir model geliştirmişlerdir:

$$\tau_{ij} = \int_{-\infty}^{t} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\mu_p e^{-(t-t')/\lambda_{2p}}}{\lambda_{2p}^2 [1+1/2\ \lambda_{1p}^2 II(t')]} \right\} \left[\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\Gamma_{ij} - \frac{\varepsilon}{2}\, g_{im} g_{jn} \Gamma^{mn} \right] dt' \quad (3\text{-}95)$$

Burada

$$\lambda_{np} = \lambda_n \left[\frac{2}{p+1} \right]^{\alpha_n} \quad (3\text{-}96)$$

$$\mu_p = \frac{\lambda_{1p}\ \mu_0}{\sum_{p=1}^{\infty} \lambda_{1p}} \quad (3\text{-}97)$$

olarak tanımlanmıştır.

η_0 : sıfır kayma hızı viskozitesi

λ_1 : karekteristik kayma zaman sabiti

λ_2 : karekteristik elastik zaman sabiti

α_1 , α_2 : boyutsuz indisler

ϵ : II(t') ye bağlı olan boyutsuz ağırlık faktörü

Γ_{ij} : deformasyon tensörü

Bu modelin normal gerilme karakteristikleri basit kaymalı akım için belirlenebilir (sabit $\dot{\gamma}$ için). Bu akım için sonlu deformasyon tensörü aşağıdaki gibidir,

$$\Gamma_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & (t-t')\dot{\gamma} & 0 \\ (t-t')\dot{\gamma} & -(t-t')^2\dot{\gamma}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad (3\text{-}98)$$

$$\Gamma^{ij} = \begin{vmatrix} (t-t')^2\dot{\gamma}^2 & (t-t')\dot{\gamma} & 0 \\ (t-t')\dot{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad (3\text{-}99)$$

$$II(t') = 2\,\dot{\gamma}^2 \qquad (3\text{-}100)$$

Sıfır olmayan gerilme bileşenleri (3 -95) denkleminden bulunabilir.

$$\tau_{21} = \tau_{12} = \sum_{p=1}^{\infty}\left\{\frac{\mu_p}{\lambda_{2p}^2[1+(\lambda_{1p}\dot{\gamma})^2]}\int_{-\infty}^{t} e^{-(t-t')/\lambda_{2p}}(t-t')\dot{\gamma}dt'\right\} \qquad (3\text{-}101)$$

$$\tau_{11} - \tau_{22} = \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \frac{\mu_p}{\lambda_{2p}^2 [1+(\lambda_{1p})^2]} \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-t')/\lambda_{2p}} (t-t')^2 \dot{\gamma}^2 dt' \right\} \quad (3\text{-}102)$$

$$\tau_{22} - \tau_{33} = \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \frac{\mu_p}{\lambda_{2p} [1+(\lambda_{1p}\dot{\gamma})^2]} \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-t')/\lambda_{2p}} \frac{\varepsilon}{2} (t-t')^2 \dot{\gamma}^2 dt' \right\} \quad (3\text{-}103)$$

Kararlı viskometrik fonksiyonlar , sabit $\dot{\gamma}$ için hesaplandiğında aşağıdaki sonuçlar bulunur:

$$\eta = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\mu_p}{1 + (\lambda_{1p}\dot{\gamma})^2} \quad (3\text{-}104)$$

$$\Theta_1 = 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\mu_p \lambda_{2p}}{1 + (\lambda_{1p}\dot{\gamma})^2}$$

$$(3\text{-}105)$$

$$\Theta_2 = \varepsilon\, \Theta_1 / 2$$

Bir başka integral model de BKZ modelidir. Bu model üzerinde Berstein, Zapas ve Kearsley çalişmışlardır [14, 32]. Modelin orijinali tamamen elastik teoriye dayanmaktadır. Daha sonraki çalışmalarda sıkıştırılabilir akışkan özellikleri ve termodinamik kriterler eklenmiştir [33]. Orijinal, sıkışamaz, izotermal akış formülasyonu, kararlı basit kaymalı akım ve iki eksenli deformasyonda elde edilen deneysel sonuçların ilişkisini elde etmek için Zapas [34] tarafından kullanılmış, doğrusal hafıza fonksiyonu içeren özel bir potansiyel fonksiyonu önerilmiştir . Bu fonksiyon için bir form da Adams ve Bogue [35] tarafından önerilmiştir. Bu orijinal potansiyel fonksiyon , Doughty ve Bogue [36] tarafindan değiştirilerek kullanılmıştır . Bütün bu çalışmaların sonucunda aşağıdaki denklem oluşmuştur [29]:

$$\tau_{ij} = -\int_{s^*}^{t} \Big\{ U_1(I_C{-1},\ II_C{-1},\ t-\tau)C_{ij}(t,\tau) + U_2(I_C{-1},\ II_C{-1},\ t-\tau)C_{ij}(t,\tau)\Big\} d\tau \qquad (3\text{-}106)$$

Burada C_{ij}^{-1} ve C_{ij} Finger ve Coucy tensörleridir. Bu tensörler bağıl deformasyon tensörünün oluşturulmasından sonra elde edilebilirler. $I_c{-1}$, $II_c{-1}$, Finger deformasyon tensörünün 1. ve 2. invaryantlarıdır.

t(zaman) , şimdiki zamanı; s*, geçmişteki zamanı (t > s*) göstermektedir. U1 ve U2 hafıza fonksiyonları olup , aşağıdaki gibi tanımlanmışlardır:

$$U_1 = \frac{-m(t-\tau)}{2 + \alpha(I_c^{-1} + II_c^{-1} - 6)} - \frac{24m(t-\tau)}{I_c^{-1} + 15} \qquad (3\text{-}107)$$

$$U_2 = \frac{m(t-\tau)}{2 + \alpha(I_c^{-1} + II_c^{-1} - 6)} - \frac{24m(t-\tau)}{II_c^{-1} + 15} \qquad (3\text{-}108)$$

m(t - τ) fonksiyonu da aşağıdaki gibidir:

$$m(t-\tau) = \frac{B_1}{[1 + B_2(t-\tau)]^n} \qquad (3\text{-}109)$$

Bu eşitliklerde α , n , B1 , B2 , ve s* ve malzeme sabitleridir. İntegraldeki alt sınır s* akışkan belleğinin ne derece güçlü olduğunun bir ölçüsüdür . Bütün uygun deformasyon geçmişini görmek için fiziksel olarak zaman içinde s* kadar geriye gitmek yeterlidir [29].

Bir başka yöntem de -∞ dan şimdiki zamana integre etmektir. Bu durumda aşağıdaki şartları dikkate almak gerekir.

$$m(t-\tau) = \frac{B_1}{[1 + B_2(t-\tau)]} \qquad t-\tau < s^* \text{ durumunda}$$

$m(t-\tau) = 0 \qquad t-\tau > s^*$ için

Deformasyon iki pozisyon arasındaki uzaklığın zamanla değişiminin bir ölçüsüdür. Bu nedenle deformasyon zamana bağlı bağıl bir büyüklüktür. İntegral denklemlerinin çoğu bağıl bir deformasyon tensörü içerir ve bütün geçmiş zamanlardan şimdiki zamana integre edilirler (eşitlik 3 - 106) . Ayrıca deformasyon bir tesir fonksiyonu veya hafıza fonksiyonu ile çarpılır . Deformasyonlar yakın geçmişte uzak geçmişten daha ağırlıklı olurlar . İvmeli akışlarda deformasyon tensörünün bulunması pek kolay olmaz [29].

İntegral denklemlerinin diğer bir türü de Papanastasıou, Scriven ve Macasko'un önermiş oldukları denklem tipidir [54]. Bu modelde tek integral formunda bir viskoelastik bünye denklemi tasarlanmıştır. Bu modelin hafıza fonksiyonu zamana bağımlı bir terimle deformasyona bağımlı bir başka terimden oluşmaktadır . Deformasyona bağlı yeni bir fonksiyon önerilmiştir [54].

Viskoelastik malzemeler için zaman - integral bünye eşitliğindeki hafıza fonksiyonu , zamana bağımlı doğrusal bir fonksiyon ve deformasyona bağımlı doğrusal olmayan bir kısım halinde ayrılarak basitleştirilmiştir [54] . Hafıza fonksiyonunun ayrılabilme fikrine Lodge [55]'nin lastik benzeri akışkan modellerinde rastlanılmıştır. Yakın geçmişte ise Wagner [56,57] tarafından uygulanmıştır.

Ayrıca Doi ve Edward [58,59] ve onları takiben Curtiss ve Bird [60] ayrılabilme fikrini modellerinde uygulamışlardır.

Bütün bu modeller Bernstein , Kearsley ve Zapas [61] ve Kaye [63] tarafından önerilen orijinal zaman - integral bünye eşitliklerinin önderlik ettiği denklemler olarak düşünülebilir. Literatürde emprik bir çok model bulunmaktadır [57,63].

3.3. Değerlendirilecek Bünye Denklemleri

Bu çalışmada temel olarak değerlendirilecek olan bünye denklemleri , White - Metzner , Oldroyd 3 - sabit , Gaidos ve Spriggs eşitlikleridir . Bu bünye denklemlerinden Gaidos modeli , parametrelerinin değişik değerlerine göre farklı modellere dönüşebilmektedir (Tablo 3.1).

Seçilen bu bünye denklemlerinde değişik türev operatörleri bulunmaktadır.

Örneğin;

White - Metzner denklemi konvekted türev, Oldroyd 3 - sabit eşitliği Jaumann türev operatörlerini içermektedir.

Ayrıca malzeme fonksiyonları açısından da farklılık gösterdiklerinden bu bünye denklemleri değerlendirme için seçilmişlerdir.

3.3.1. White - Metzner Eşitliği

Konvekted zaman türevli ve doğrusal olmayan bu modelin karteziyen koordinat sistemine göre tensörel ifadesi aşağıdaki gibidir [26]:

$$\tau_{ij} + \Theta \frac{\delta}{\delta t} \tau_{ij} = -2 \mu e_{ij} \qquad (3\text{-}109)$$

Burada $\delta/\delta t$ konvekted zaman türevidir . Θ White - Metzner eşitliği için gevşeme zamanını ifade eden deformasyon hız tensörünün 2. invaryantının fonksiyonu olan bir parametredir. μ viskozite fonksiyonudur. Bu fonksiyonlar aşağıdaki [28] gibi tanımlanmışlardır:

$$\Theta = \frac{1}{\Theta_0 + \Theta_1 | II_e |^{r/2}} \qquad (3\text{-}110)$$

$$\mu = \frac{\eta_o}{1 + d_1 | II_e |^{r/2}} \qquad (3\text{-}111)$$

Burada $\Theta 0$, $\Theta 1$, r , d1 malzeme sabitleridir. η_o sıfır kayma hızı viskozitesidir.

3.3.2. Oldroyd 3 - Sabit Eşitliği

Oldroyd 3 - sabit modeli önce Williams [30] tarafından önerilmistir ve Oldroyd 8 - sabit modelinin indirgenmiş bir halidir.

Genel ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$(1 + \lambda_1 \Pi)\, \tau_{ij} = - 2\, \eta_0 (1 + \lambda_2 \Pi)\, e_{ij} \qquad (3\text{-}112)$$

Burada π doğrusal olmayan türev operatörü olup ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$\Pi(\;)_{ik} = \frac{\mathscr{D}}{\mathscr{D}t}(\;)_{ik} - (\;)_{im} e_{mk} - (\;)_{km} e_{mi} + 2/3(\;)_{mn} e_{mn} \delta_{ik} \qquad (3\text{-}113)$$

(3-113) denklemindeki $\mathscr{D}/\mathscr{D}t$ Jaumann türevidir. λ_1 gevşeme zamanı ve λ_2 geciktirme zamanı olup sabittirler.

Kaymalı akıma göre bulunan viskometrik fonksiyonlar aşağıdaki gibidir [3,30,43].

$$\eta = - \frac{\tau_{12}}{\dot\gamma} = \eta_0 \left[\frac{1 + 2/3\, \lambda_1 \lambda_2 \dot\gamma^2}{1 + 2/3\, \lambda_1^2\, \dot\gamma^2} \right] \qquad (3\text{-}114)$$

$$\psi = - \frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{\dot\gamma^2} = 2\eta_0 \left[\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{1 + 2/3\, \lambda_1^2\, \dot\gamma^2} \right] \qquad (3\text{-}115)$$

3.3.3. Gaidos Eşitliği

Aşağıda genel ifadesi verilen bu model, viskoelastik gerilmeyle Newton gerilmesinin bir toplamıdır.

Gerilme tensörü aşağıdaki gibidir [9]:

$$\tau_{ij} = (\tau_{ij})_p + (\tau_{ij})_n \qquad (3\text{-}116)$$

Burada $(\tau_{ij})_p$ polimer gerilme tensörü, $(\tau_{ij})_n$ de Newton gerilme tensörüdür. Bu gerilme tensörlerinin ifadeleri aşağıda tanımlanmıştır:

$$(\tau_{ij})_n = \eta_\infty \Delta_{ij} \qquad (3\text{-}117)$$

$$(\tau_{ij})_p + \lambda_{II}\frac{D(\tau_{ij})_p}{D\,t} = \mu_{II}\Delta_{ij} \qquad (3\text{-}118)$$

Gevşeme zamanı ve polimer viskozite fonksiyonları aşağıdaki gibi ifade edilmişlerdir [9]:

$$\lambda_{II} = \lambda \frac{\sigma}{[1 - 4\varepsilon(1-\varepsilon)\lambda^2 II]^\beta} \qquad (3\text{-}119)$$

$$\mu_{II} = (\eta_0 - \eta_\infty)\frac{1 - 4\varepsilon(1-\varepsilon)\lambda_{II}^2\, II}{[1 - 4\varepsilon(1-\varepsilon)\lambda^2\, II]^\alpha} \qquad (3\text{-}120)$$

Burada D / Dt türevi , kovaryant ve kontravaryant konvekted türevlerin ağırlıklı toplamıdır . Detaylı bilgi Bölüm 5'te verilmiştir.

(3 - 116) - (3 - 118) denklemleri kullanılarak Oldroyd veya Jeffreys formunda ifade edilebilir [9].

$$\tau_{ij} + \lambda_{II}\frac{D\tau_{ij}}{D\,t} = \mu_{II}\Delta_{ij} + \eta_{\infty}\left[\Delta_{ij} + \lambda_{II}\frac{D\Delta_{ij}}{D\,t}\right] \qquad (\ 3\text{-}121\ )$$

Bu modelin farklı şartlarına göre Upper Convekted Maxwell, Lower Convekted Maxwell , Johnson - Segalman, Lower Convekted Jeffreys (Oldroyd - A , Upper Convekted Jeffreys (Oldroyd - B) ve Korotasyonel Jeffreys modelleri elde edilebilir (Tablo 3.1).Bu bünye denklemleri Bölüm 5'te daha ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

3.3.4. Spriggs Modeli

Spriggs modeli Weissenberg etkisinden sapmaları dikkate alması açısından önemli bir modeldir.

Bu bünye denklemi Spriggs [44] tarafından aşağıdaki gibi önerilmiştir:

$$\tau_{ij} + \lambda\, J_{\varepsilon}(\tau_{ij}) = \mu\, \Delta_{ij} \qquad (\ 3\text{-}122\ )$$

Burada $J_{\varepsilon}(\tau_{ij})$ türev operatörüdür.

Kararlı basit kaymalı akım için viskometrik fomksiyonlar:

$$\frac{\tau_{12}}{\dot{\gamma}} = \eta = \frac{\mu}{1 + (\lambda c\dot{\gamma})^2}$$

$$\frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{\dot{\gamma}^2} = \psi = \frac{2\lambda\mu}{1 + (\lambda c\dot{\gamma})^2} \qquad (3\text{-}123)$$

BÖLÜM 4

BÜNYE DENKLEMLERİNİN DEĞERLENDİRİLMESİNDE KULLANILAN YÖNTEM

Bünye denklemlerinin değerlendirilmesi için bu çalışmanın odak noktasını oluşturan daralan-genişleyen kesitli bir akım kanalının simetri ekseni boyunca elde edilmiş hız ve gerilme verilerinin yanısıra kararlı durumda basit kaymalı akım için elde edilmiş viskometrik veriler kullanılmıştır.

Değerlendirilecek bünye denklemleri, simetri ekseni boyunca olan akım için karteziyen koordinat sistemi dikkate alınarak simetri ekseni üzerine indirgenmişlerdir. Bu şekilde 1. normal gerilme farkı için oluşturulan diferansiyel denklemler V_1, dV_1/dX_1 ve d^2V_1/dX_1^2 değişkenlerine bağımlıdır. Ayrıca her bünye denklemi için kararlı basit kaymalı akımda 1. normal gerilme farkı fonksiyonu ile viskozite fonksiyonu ifadeleri elde edilmiştir.

4.1. White - Metzner Eşitliği

Bu bünye denkleminin karteziyen koordinat sistemine göre genel ifadesi aşağıdaki gibi verilmiştir [26].

$$\tau_{ij} + \theta \frac{\delta}{\delta t} \tau_{ij} = -2\mu\, e_{ij} \qquad (4\text{-}1)$$

Burada $\delta/\delta t$ konvekted zaman türevi olup gerilmeye göre ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\delta \tau_{ij}}{\delta t} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + V_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial X_k} + \frac{\partial V_k}{\partial X_j} \tau_{ik} + \frac{\partial V_k}{\partial X_i} \tau_{kj} \quad (4\text{-}2)$$

4.1.1. Simetri Ekseni Boyunca Kararlı Akım

Simetri ekseni boyunca ve basit kaymalı akım için detaylı olarak Bölüm 2 ' de verilmiş olan akım şartları dikkate alınarak gerilmenin konvekted türev bileşenleri aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$\frac{\delta \tau_{11}}{\delta t} = V_1 \frac{\partial \tau_{11}}{\partial X_1} + 2 \frac{\partial V_1}{\partial X_1} \tau_{11} \quad (4\text{-}3)$$

$$\frac{\delta \tau_{22}}{\delta t} = V_1 \frac{\partial \tau_{22}}{\partial X_1} + 2 \frac{\partial V_2}{\partial X_2} \tau_{22} \quad (4\text{-}4)$$

$$\frac{\delta \tau_{33}}{\delta t} = V_1 \frac{\partial \tau_{33}}{\partial X_1} \quad (4\text{-}5)$$

(4-3) ve (4-4) eşitlikleri , (4-1) denkleminde yerine konulduğunda gerilme bileşenleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$\tau_{11} + \theta \frac{\delta \tau_{11}}{\delta t} = -2\mu e_{11} \qquad (4\text{-}6a)$$

$$\tau_{11} + \theta \left[V_1 \frac{\partial \tau_{11}}{\partial X_1} + 2 \frac{\partial V_1}{\partial X_1} \tau_{11} \right] = -2\mu \frac{\partial V_1}{\partial X_1} \qquad (4\text{-}6b)$$

$$\tau_{22} + \theta \left[V_1 \frac{\partial \tau_{22}}{\partial X_1} + 2 \frac{\partial V_2}{\partial X_2} \tau_{22} \right] = -2\mu \frac{\partial V_2}{\partial X_2} \qquad (4\text{-}7a)$$

Süreklilik eşitliği sonucu dVı/dXı = - dV2/dX2 yazılabileceğinden , (4-7a) eşitliği aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\tau_{22} + \left[V_1 \frac{\partial \tau_{22}}{\partial X_1} - 2 \frac{\partial V_1}{\partial X_1} \tau_{22} \right] = 2\mu \frac{\partial V_1}{\partial X_1} \qquad (4\text{-}7b)$$

(4-6b) ve (4-7b) eşitlikleri taraf tarafa çıkartılarak 1. normal gerilme farkına göre diferansiyel eşitlik bulunmuştur.

$$(\tau_{11} - \tau_{22}) + \theta \left[V_1 \frac{\partial(\tau_{11} - \tau_{22})}{\partial X_1} + 2 \frac{\partial V_1}{\partial X_1} (\tau_{11} + \tau_{22}) \right]$$

$$= -4\mu \frac{\partial V_1}{\partial X_1} \qquad (4\text{-}8a)$$

Kullanılan akım kanalı için τ33 = 0 kabul edilmiştir. Gerilmenin temel prensibinden [3,24] τ11 + τ22 + τ33 = 0 dır. Sonuç olarak τ11 + τ22 = 0 kullanılarak , gerilme farkı eşitliği aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$(\tau_{11} - \tau_{22}) + \theta V_1 \frac{\partial(\tau_{11} - \tau_{22})}{\partial X_1} = -4\mu \frac{\partial V_1}{\partial X_1} \qquad (4\text{-}8b)$$

(4-8b)eşitliği düzenlenerek aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

$$\frac{\partial(\tau_{11} - \tau_{22})}{\partial X_1} + \frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{\theta V_1} = -4\mu \frac{\partial V_1}{\partial X_1} \qquad (4\text{-}8c)$$

Bu akım durumu için bulunan (4-8c) eşitliğinde θ gevşeme zamanıdır ve aşağıdaki gibi daha önceki bölümde tanımlanmıştır [28]:

$$\theta = \frac{1}{\theta_0 + \theta_1 |II_e|^{r/2}} \qquad (4\text{-}9)$$

θ_0 , θ_1 ve r sabit parametrelerdir. IIe deformasyon hız tensörünün 2. invaryantıdır.Viskozite fonksiyonu μ ise aşağıdaki gibidir [28]:

$$\mu = \frac{\eta_0}{1 + d_1 |II_e|^{r/2}} \qquad (4\text{-}10)$$

η_0 , sıfır kayma hızı viskozitesi, d_1 sabit bir parametredir.

(4-9) ve (4-10) eşitliğinden görüldüğü gibi θ ve μ fonksiyonları deformasyon hız tensörünün invaryant fonksiyonuna bağlıdırlar [27] . İki boyutlu akımda sıkıştırılamaz bir akışkan için birinci ve üçüncü invaryantlar bulunmadığından [28] , θ ve μ fonksiyonları sadece ikinci invaryantın (IIe) fonksiyonudurlar [29].

2. İkinci invaryantın değeri aşağıdaki gibidir:

$$II_e = - e_{11}^2 = - (\partial V_1/\partial X_1)^2 \qquad (4\text{-}11)$$

(4-8c) eşitliği aşağıdaki şartlarda Newton çözümünü verir.

1. θ gevşeme zamanı Newton akışkanı için sıfırdır.

2. Deformasyon hızı çok düşüktür , μ sabit ve sıfır kayma hızı viskozitesidir.

1. ve 2. şartlar (4-8c)' de kullanıldığında Newton akışkanı için bünye dekleminin simetri ekseni boyunca olan akım için indirgenmiş hali bulunur.

$$\tau_{11} - \tau_{22} = - 4\eta_0 \frac{\partial V_1}{\partial X_1} \qquad (4\text{-}12)$$

4.1.2. Kararlı Basit Kaymalı Akım

Kararlı basit kaymalı akım için , yine Bölüm 2 ' de verilen kinematik kurallar dikkate alınarak konvekted türev bileşenleri aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$\frac{\delta \tau_{11}}{\delta t} = 0 \qquad (4\text{-}13)$$

$$\frac{\delta \tau_{22}}{\delta t} = 2\dot{\gamma}\tau_{12} \qquad (4\text{-}14)$$

$$\frac{\delta \tau_{12}}{\delta t} = \dot{\gamma}\tau_{11} \qquad (4\text{-}15)$$

(4-13) , (4-14) ve (4-15) eşitlikleri , (4-1) eşitliğinde yerine konulduğunda gerilme bileşenleri aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$\tau_{11} + \theta \frac{\delta \tau_{11}}{\delta t} = -2\mu e_{11} \qquad (4\text{-}16a)$$

$$\tau_{11} = 0 \qquad (4\text{-}16b)$$

$$\tau_{22} + \theta \frac{\delta \tau_{22}}{\delta t} = -2\mu e_{22} \qquad (4\text{-}17a)$$

$$\tau_{22} + 2\theta\dot{\gamma}\tau_{12} = 0 \qquad (4\text{-}17b)$$

$$\tau_{12} + \theta \frac{\delta \tau_{12}}{\delta t} = -2\mu e_{12} \qquad (4\text{-}18a)$$

$$\tau_{12} + \theta\dot{\gamma}\tau_{11} = -\mu\dot{\gamma} \qquad (4\text{-}18b)$$

Yukardaki denklem takımları çözüldüğünde gerilme bileşen değerleri bulunur.

$$\tau_{11} = 0 \qquad (4\text{-}19)$$

$$\tau_{22} = 2\theta\mu\dot{\gamma}^2 \qquad (4\text{-}20)$$

$$\tau_{12} = -\mu\dot{\gamma} \qquad (4\text{-}21)$$

(4-19) , (4-20) ve (4-21) eşitlikleri kullanılarak 1. normal gerilme farkı fonksiyonu ve viskozite fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$-\frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{\dot{\gamma}^2} = \psi = 2\mu\theta \qquad (4\text{-}22)$$

$$-\frac{\tau_{12}}{\dot{\gamma}} = \eta = \mu \qquad (4\text{-}23)$$

4.2. Oldroyd 3 - Sabit Eşitliği

Oldroyd 3 - sabit modeli, önce Williams [30] tarafından önerilmiş ve Oldroyd'un 8 - sabit modelinin [19] indirgenmiş bir halidir.

Bu bünye denkleminin genel ifadesi aşağıdaki gibidir[30].

$$(1 + \lambda_1 \Pi)\tau_{ij} = - 2\eta_0 (1 + \lambda_2 \Pi)e_{ij} \qquad (4\text{-}24)$$

(4-24) eşitliğindeki π , Bölüm 3.3.2.' de tanımlanmış olup doğrusal olmayan türev operatörüdür.Gerilme ve deformasyon hız tensörlerinin , π tanımına göre türevleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\Pi(\tau)_{ik} = \frac{\mathfrak{D}(\tau)_{ik}}{\mathfrak{D}t} - \tau_{im}e_{mk} - \tau_{km}e_{mi} + \frac{2}{3}\tau_{mn}e_{mn}\delta_{ik} \qquad (4\text{-}25)$$

$$\Pi(e)_{ik} = \frac{\mathfrak{D}(e)_{ik}}{\mathfrak{D}t} - e_{im}e_{mk} - e_{km}e_{mi} + \frac{2}{3}e_{mn}e_{mn}\delta_{ik} \qquad (4\text{-}26)$$

$$\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{D}t}(\ )_{ij} = \frac{\partial}{\partial t}(\ )_{ij} + \frac{\partial}{\partial X_k}(\ )_{ij}V_k - \Omega_{ik}(\ )_{kj} - \Omega_{kj}(\ )_{ik} \qquad (4\text{-}27)$$

4.2.1. Simetri Ekseni Boyunca Kararlı Akım

Böyle bir akım için akım şartları dikkate alınarak (4-25) , (4-26) ve (4-27) eşitlikleri kullanılarak bulunan sonuçlar (4-24) eşitliğinde yerine konularak ve White - Metzner eşitliğinde yapıldığı gibi 1. normal gerilme farkı diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$\frac{\partial(\tau_{11}-\tau_{22})}{\partial X_1} + \frac{\tau_{11}-\tau_{22}}{\lambda_1 V_1} = -\frac{4\eta_0}{\lambda_1 V_1}\left[\frac{\partial V_1}{\partial X_1} + \lambda_2 V_1 \frac{\partial^2 V_1}{\partial X_1^2}\right] \qquad (4\text{-}28)$$

$\eta_0 = \mu$, $\lambda_1 = \theta$ ve $\lambda_2 = 0$ için bu denklem White-Metzner için bulunan ifade ile aynıdır.

4.2.2. Kararlı Basit Kaymalı Akım

Basit kaymalı akımda (4-25) , (4-26) ve (4-27) eşitlikleri kullanılarak gerilme ve deformasyon hız tensörlerinin bu model için önerilen türev bileşenleri, akım şartları dikkate alınarak aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$\Pi(\tau)_{11} = -4/3\ \dot{\gamma}\tau_{12}$$

$$\Pi(\tau)_{11} = -2/3\ \dot{\gamma}^2 \qquad (4\text{-}29)$$

$$\Pi(\tau)_{22} = 2/3\ \dot{\gamma}\tau_{12}$$
$$\Pi(e)_{22} = 1/3\ \dot{\gamma}^2 \qquad (4\text{-}30)$$

$$\Pi(\tau)_{12} = -\ \dot{\gamma}\tau_{22}$$
$$\Pi(e)_{12} = 0 \qquad (4\text{-}31)$$

(4-29) , (4-30) ve (4-31) eşitlikleri , (4-24)' de yerine konularak gerilme bilşenleri arasındaki denklemler aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$\tau_{11} = 4/3\ \lambda_1\dot{\gamma}\tau_{12} + 4/3\ \eta_0\lambda_2\dot{\gamma}^2 \qquad (4\text{-}32)$$

$$\tau_{22} = -\ 2/3\ \lambda_1\dot{\gamma}\tau_{12} - \eta_0\lambda_2\dot{\gamma}^2 \qquad (4\text{-}33)$$

$$\tau_{12} = -\ \eta_0\left[\frac{1 + 2/3\ \lambda_1\lambda_2\dot{\gamma}^2}{1 + 2/3\ \lambda_1^2\ \dot{\gamma}^2}\right].\dot{\gamma} \qquad (4\text{-}34)$$

(4-32) , (4-33) ve (4-34) denklemleri kullanılarak viskometrik fonksiyonlar aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\psi = -\frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{\dot{\gamma}^2} = 2\eta_0\left[\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{1 + 2/3\ \lambda_1^2\ \dot{\gamma}^2}\right] \qquad (4\text{-}35)$$

$$\eta = -\frac{\tau_{12}}{\dot{\gamma}} = \eta_0\left[\frac{1 + 2/3\ \lambda_1\lambda_2\dot{\gamma}^2}{1 + 2/3\ \lambda_1^2\ \dot{\gamma}^2}\right] \qquad (4\text{-}36)$$

Düşük kayma hızlarında (4-35) ve (3-36) eşitlikleri, aşağıdaki bağıntıların verdiği sonuçları verir:

$$-\frac{\tau_{11}-\tau_{22}}{\dot{\gamma}^2} = 2\eta_0(\lambda_1-\lambda_2) \qquad (4\text{-}37)$$

$$-\frac{\tau_{12}}{\dot{\gamma}} = \eta_0 \qquad (4\text{-}38)$$

Bu durumda bulunan malzeme fonksiyonları $\lambda_1 = \theta$ ve $\lambda_2 = 0$ için White - Metzner eşitliğinden bulunan fonksiyonlara dönüşür.

Yüksek kayma hızı değerlerinde viskozite fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$-\frac{\tau_{12}}{\dot{\gamma}} = \eta_0 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \qquad (4\text{-}39)$$

4.3. Spriggs Modeli

Spriggs [44], Weissemberg etkisinden sapmaları da dikkate alacak şekilde bir bünye denklemi önermiştir.

Bu model aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\tau_{ij} + \lambda J_\varepsilon(\tau_{ij}) = \mu \Delta_{ij} \qquad (4\text{-}40a)$$

Diğer bünye denklemlerinde kullanılan notasyonlarla benzer olabilmesi için denklem, aşağıdaki gibi ifade edilmiştir,

$$\tau_{ij} + \lambda \, J_{\varepsilon}(\tau_{ij}) = - \eta_o \Delta_{ij} \qquad (\text{ 4-40b })$$

Burada η_o, λ ve ε sabitlerdir ve gerilme tensörünün bu model için türev ifadesi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır [44],

$$J_{\varepsilon}(\tau_{ij}) = \frac{\mathcal{D}\,\tau_{ij}}{\mathcal{D}\,t} - (1+\varepsilon)\left\{ \frac{1}{2}\left[\tau_{im}\Delta_{mj} + \tau_{jm}\Delta_{mi}\right] - \frac{1}{3}\,\tau_{mn}\Delta_{mn}\delta_{ij} \right\} \qquad (\text{ 4-41 })$$

4.3.1. Simetri Ekseni Boyunca Kararlı Akım

Akım kinematiğindeki şartlar kullanılarak gerilmenin bu akım için türev bileşenleri aşağıdaki gibi bulunmuştur,

$$J_{\varepsilon}(\tau)_{11} = V_1 \frac{\partial \tau_{11}}{\partial X_1} - (1+\varepsilon)\left[\frac{4}{3}\,\tau_{11} + \frac{2}{3}\,\tau_{22} \right] \frac{\partial V_1}{\partial X_1} \qquad (\text{ 4-42 })$$

$$J_{\varepsilon}(\tau)_{22} = V_1 \frac{\partial \tau_{22}}{\partial X_1} - (1+\varepsilon)\left[-\frac{2}{3}\,\tau_{11} - \frac{4}{3}\,\tau_{22} \right] \frac{\partial V_1}{\partial X_1} \qquad (\text{ 4-43 })$$

(4-42) ve (4-43) eşitlikleri (4-40b) ' de yerine konularak 1- ve 2- yönündeki normal gerilmeler bulunduktan sonra taraf tarafa çıkartıldığında 1. normal gerilme farkının diferansiyel denklemi aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$(\tau_{11}-\tau_{22}) + \lambda V_1 \frac{\partial(\tau_{11}-\tau_{22})}{\partial X_1} = -4\eta_0 \frac{\partial V_1}{\partial X_1} \qquad (4\text{-}44)$$

Burada η_0 , λ sabit malzeme parametreleridir . (4-44) eşitliği aşağıdaki gibi düzenlenerek değerlendirmede kullanılan yöntene uygun hale getirilmiştir:

$$\frac{\partial(\tau_{11}-\tau_{22})}{\partial X_1} + \frac{\tau_{11}-\tau_{22}}{\lambda V_1} = -\frac{4\eta_0}{\lambda V_1}\,\frac{\partial V_1}{\partial X_1} \qquad (4\text{-}45)$$

Xı boyunca olan akım için verilen (4-45) eşitliğinde $\lambda = \theta$ ve $\eta_0 = \mu$ olduğunda White-Metzner eşitliğine dönüşülmektedir. Bulunan son eşitlikten de görüldüğü gibi, ε parametresi bu akımda görünmemektedir.

4.3.2. Kararlı Basit Kaymalı Akım

Spriggs modeli için bu tür akımda gerilmenin türev bileşenleri aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$J_\varepsilon(\tau)_{11} = -\left(\frac{4+\varepsilon}{3}\right)\dot{\gamma}\tau_{12} \qquad (4\text{-}46)$$

$$J_\varepsilon(\tau)_{22} = \left(\frac{2-\varepsilon}{3}\right)\dot{\gamma}\tau_{12} \qquad (4\text{-}47)$$

$$J_\varepsilon(\tau)_{12} = -\left[\frac{\varepsilon}{2}\left(\tau_{11}+\tau_{22}\right)+\tau_{22}\right] \qquad (4\text{-}48)$$

(4-46) , (4-47) ve (4-48) denklemleri (4-40b) ' de yerine konulduğunda viskometrik fonksiyonlar aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$\eta = -\frac{\tau_{12}}{\dot{\gamma}} = \frac{\eta_0}{1+(\lambda c\dot{\gamma})^2} \qquad (4\text{-}49)$$

$$\psi = -\frac{\tau_{11}-\tau_{22}}{\dot{\gamma}^2} = \frac{2\lambda\eta_0}{1+(\lambda c\dot{\gamma})^2} \qquad (4\text{-}50)$$

(4-49) ve (4-50) eşitliklerinde yer alan " c " faktörü Bölüm 3' de tanımlanmıştır.

4.4. Gaidos Modeli

Bölüm 3.3.3. ' de verilmiş olan (3-121) denklemi işaret uyumu için aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

$$\tau_{ij} + \lambda_{II}\frac{D\,\tau_{ij}}{D\,t} = -\left\{\mu_{II}\Delta_{ij} + \eta_\infty\left(\Delta_{ij} + \lambda_{II}\frac{D\,\Delta_{ij}}{D\,t}\right)\right\} \qquad (4\text{-}51)$$

Gevşeme zamanı ve viskozite fonksiyonları aşağıdaki gibi Bölüm 3.3.3.' de tanımlanmıştır:

$$\lambda_{II} = \frac{\lambda\sigma}{\left[1 - 4\varepsilon(1-\varepsilon)\lambda^2 II\right]^{\beta}} \qquad (4\text{-}52)$$

$$\mu_{II} = (\eta_0 - \eta_\infty)\frac{1 - 4\varepsilon(1-\varepsilon)\lambda^2_{II} II}{\left[1 - 4\varepsilon(1-\varepsilon)\lambda^2 II\right]^{\alpha}} \qquad (4\text{-}53)$$

(4-51) ' deki D/Dt türev operatörü aşağıdaki gibi Gaidos tarafından önerilmiştir [9]:

$$\frac{D}{Dt}(\ )_{ij} = \varepsilon\frac{\delta}{\delta t}(\ )_{ij} + (1-\varepsilon)g_{ik}\frac{\delta}{\delta t}(\ )_{kl}g_{lj} \qquad (4\text{-}54)$$

$\delta/\delta t$ konvekted zaman türevi, ε , λ , α , β , σ ise malzemeye özgü parametrelerdir.

4.4.1. Kararlı, Simetri Ekseni Boyunca Akım:

Gerilme ve deformasyon hız tensörünün türev bileşenleri aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$\frac{D\tau_{11}}{Dt} = V_1\frac{\partial\tau_{11}}{\partial X_1} + 2\frac{\partial V_1}{\partial X_1}\tau_{11}$$

$$\frac{D\tau_{22}}{Dt} = V_1\frac{\partial\tau_{22}}{\partial X_1} - 2\frac{\partial V_1}{\partial X_1}\tau_{22}$$

$$\frac{D\Delta_{11}}{Dt} = V_1\frac{\partial\Delta_{11}}{\partial X_1} + 2\,\frac{\partial V_1}{\partial X_1}\,\Delta_{11} \qquad (4\text{-}55)$$

$$\frac{D\Delta_{11}}{Dt} = 2V_1\frac{\partial^2 V_1}{\partial X_1^2} + 4\left(\frac{\partial V_1}{\partial X_1}\right)^2$$

$$\frac{D\Delta_{22}}{Dt} = -\,2V_1\frac{\partial^2 V_1}{\partial X_1^2} + 4\left(\frac{\partial V_1}{\partial X_1}\right)$$

(4-55) denklemleri (4-51) ' de kullanılarak normal gerilmeler aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$\tau_{11} + \lambda_{II}\left[V_1\frac{\partial\tau_{11}}{\partial X_1} + 2\frac{\partial V_1}{\partial X_1}\,\tau_{11}\right] = -\,2\mu_{II}\frac{\partial V_1}{\partial X_1}$$

$$(4\text{-}56)$$

$$-\,2\eta_\infty\left\{\frac{\partial V_1}{\partial X_1} + \lambda_{II}\left[V_1\frac{\partial^2 V_1}{\partial X_1^2} + 2\left(\frac{\partial V_1}{\partial X_1}\right)^2\right]\right\}$$

$$\tau_{22} + \lambda_{II}\left[V_1 \frac{\partial \tau_{22}}{\partial X_1} - 2\frac{\partial V_1}{\partial X_1}\tau_{22}\right] = 2\mu_{II}\frac{\partial V_1}{\partial X_1}$$

$$- 2\eta_\infty\left\{- \frac{\partial V_1}{\partial X_1} + \lambda_{II}\left[- V_1\frac{\partial^2 V_1}{\partial X_1^2} + 2\left(\frac{\partial V_1}{\partial X_1}\right)^2\right]\right\} \qquad (4\text{-}57)$$

(4-56) ve (4-57) denklemleri taraf tarafa çıkartılırsa aşağıdaki ifade bulunur:

$$\frac{\partial}{\partial X_1}(\tau_{11} - \tau_{22}) + \frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{\lambda_{II} V_1} = - \frac{4\mu_{II}}{\lambda_{II} V_1}\left[\left(1 + \frac{\eta_\infty}{\mu_{II}}\right)\frac{\partial V_1}{\partial X_1} + \frac{\eta_\infty \lambda_{II}}{\mu_{II}} V_1 \frac{\partial^2 V_1}{\partial X_1^2}\right] \qquad (4\text{-}58)$$

(4-58) denklemi, Gaidos [9]'un orijinal bünye denkleminin simetri ekseni boyunca akım için indirgenmiş halidir.

Gaidos [9] çalışmasında η_∞ değerini sıfır almıştır.

Değerlendirmede kullanılacak Gaidos denklemi bu nedenle aşağıdaki gibi kullanılmıştır:

$$\frac{\partial}{\partial X_1}(\tau_{11} - \tau_{22}) + \frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{\lambda_{II} V_1} = - \frac{4\,\mu_{II}}{\lambda_{II} V_1}\frac{\partial V_1}{\partial X_1} \qquad (4\text{-}59)$$

(4-59) eşitliği bu haliyle White-Metzner eşitliğine şekil olarak benzemektedir.

4.4.2. Kararlı, Basit Kaymalı Akım:

Bu akım için viskometrik fonksiyonlar aşağıdaki gibi bulunmuşlardır [9]:

$$-\frac{\tau_{12}}{\dot{\gamma}} = \eta = \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{\left[1 + 4\varepsilon(1-\varepsilon)\lambda^2\dot{\gamma}^2\right]^{\alpha}} + \eta_\infty \qquad (4\text{-}60)$$

$$-\frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{\dot{\gamma}^2} = \psi = \frac{2\sigma\lambda(\eta_0 - \eta_\infty)}{\left[1 + 4\varepsilon(1-\varepsilon)\lambda^2\dot{\gamma}^2\right]^{\alpha+\beta}} \qquad (4\text{-}61)$$

4.5. Upper Convekted Maxwell Modeli (UCM):

$\varepsilon = 0$, $\eta_\infty = 0$, $\sigma = 1$ alınarak Gaidos'un genel ifadesi UCM modeline dönüştürülür.

$$\tau_{ij} + \lambda_{II}\frac{D\tau_{ij}}{Dt} = -\mu_{II}\Delta_{ij} \qquad (4\text{-}62)$$

Burada λ_{II} ve μ_{II} aşağıdaki gibi olmaktadır:

$$\lambda_{II} = \lambda = \text{sabit}$$
$$\mu_{II} = \eta_0 = \text{sabit} \qquad (4\text{-}63)$$

Bölüm 4.4'deki işlemler yapılarak simetri ekseni boyunca olan akım için bu modelin indirgenmiş hali aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$\frac{\partial}{\partial X_1}(\tau_{11}-\tau_{22})+\frac{\tau_{11}-\tau_{22}}{\lambda V_1}=-\frac{4\eta_0}{\lambda V_1}\frac{\partial V_1}{\partial X_1} \qquad (4\text{-}64)$$

Kararlı, basit kaymalı akım için viskometrik fonksiyonlar da aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$-\frac{\tau_{12}}{\dot{\gamma}}=\eta=\eta_0 \ (\text{ sabit })$$

$$(4\text{-}65)$$

$$-\frac{\tau_{11}-\tau_{22}}{\dot{\gamma}^2}=\psi=2\eta_0\lambda \ (\text{ sabit })$$

Bu modelde malzeme parametreleri ve viskometrik fonksiyonlar sabit değerdedir.

4.6. Lower Convekted Maxwell Model (LCM):

Lower Convekted Maxwell Modeli dik koordinat sisteminde Upper Convekted Maxwell Modelle aynı yapıyı ifade eder. Yani Bölüm 4.5'de anlatılan bütün özellikler bu model için de geçerlidir.

4.7. Korotasyonel Maxwell Model:

Tablo 3.1' deki şartlar kullanıldığında λ_{II} ve μ_{II} fonksiyonları UCM veya LCM Model de bulunan fonksiyonlara eşit olmaktadır.

$$\lambda_{II} = \lambda \quad \text{ve} \quad \mu_{II} = \eta_0$$

Simetri ekseni boyunca olan akım için ε ağırlık faktörü yok olduğundan, bünye denklemi yine UCM Modelindeki gibidir.

Kaymalı akım durumunda ise $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\varepsilon = 1/2$ değerlerini kullanarak (4-60) ve (4-61) eşitlikleri aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$-\frac{\tau_{12}}{\dot{\gamma}} = \eta = \frac{\eta_0}{1 + \lambda^2\dot{\gamma}^2}$$

$$-\frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{\dot{\gamma}^2} = \psi = \frac{2\lambda\eta_0}{1 + \lambda^2\dot{\gamma}^2} \qquad (4\text{-}66)$$

4.8. Johnson - Segalman Modeli:

Simetri ekseni boyunca olan akım için indirgenmiş denklem (4-64)'in aynısı olacaktır.

Basit kaymalı akım için bu modelin şartları (Tablo 3.1) kullanıldığında , viskozite ve birinci normal gerilme farkı fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$- \frac{\tau_{12}}{\dot{\gamma}} = \eta = \frac{\eta_0}{1 + 4\varepsilon(1-\varepsilon)\lambda^2\dot{\gamma}^2}$$

$$- \frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{\dot{\gamma}^2} = \psi = \frac{2\lambda\eta_0}{1 + 4\varepsilon(1-\varepsilon)\lambda^2\dot{\gamma}^2} \qquad (4\text{-}67)$$

4.9. Regresyon Analizleri

Çalışmada önce , bünye denklemlerinin simetri ekseni boyunca olan 1. Normal gerilme farkı diferansiyel denklemleri, deneysel hız verileri [1,31] kullanılarak Runge - Kutta yöntemi ile çözülmüştür . Bu çözüm metodunda , bünye denklemlerinin parametrelerine deneme-yanılma yöntemi ile değerler verilerek deneysel olarak ölçülmüş [1,31] 1. normal gerilme farkı değerlerine yaklaşım incelenmiştir . Fakat deneysel sonuçlara yaklaşacak malzeme parametrelerinin belirlenmesi oldukça güç olmuştur.

Bünye denklemlerinin daha gerçekçi değerlendirilmesinin yapılabilmesi için doğrusal olmayan bir regresyon yöntemi kullanılmıştır [73] . Bu yöntemle diferansiyel denklem takımları çözülürken, model parametrelerinin deneysel verilere uyum sağlayan en iyi değerleri belirlenebilmektedir . Böylece bünye denklemlerinin deneysel gerilme değerlerine en iyi uyacak malzeme parametre değerleri bulunabilmektedir.

Malzeme parametrelerinin çoğu , simetri ekseni boyunca olan akıma göre belirlenmişlerdir. Bazı malzeme parametreleri ise basit kaymalı akım için bulunan deneysel veriler üzerinde regresyon analizi yapılarak saptanmıştır . Genelde tüm parametrelerin diferansiyel denklemler çözülürken doğrusal olmayan regresyon ile belirlenmesi tercih edilmiş, ancak bazı durumlarda güçlüklerle karşılaşılınca parametrelerin bir kısmı basit kaymalı akıma göre belirlenmiştir.

Örneğin White - Metzner denklemi için θ0 , η_0 parametreleri, basit kaymalı akım verilerinden yararlanılarak saptanmış ve bulunan değerler, θı , dı ve r parametrelerini belirlemek için yapılan regresyon analizinde girdi olarak kullanılmıştır. Benzer şekilde Oldroyd denkleminde λ_1 ve λ_2, diferansiyel denklemlerin çözümüne bağlı olarak saptanırken sıfır kayma hızı viskozitesinin değeri 6.6 Pa.s olarak basit kaymalı akım verilerine dayandırılmıştır. Gaidos denkleminin parametreleri belirlenirken de β ve λ deneysel viskozite fonksiyonuna eğri uydurularak saptanmış ve bu değerler α ve σ için diferansiyel denklemler üzerinde yapılan regresyon analizinde girdi olarak kullanılmıştır.

Bünye denklemlerinin simetri eksenine göre indirgenmiş ifadelerinde Vı , dVı/dXı ve d²Vı/dXı² gibi büyüklüklerin bulunduğu daha önce söylenmişti . Bünye denklemlerinin regresyonunun yapılabilmesi için , yöntemin gereği bu hız büyüklüklerinin fonksiyonlarının belirlenmesi gerekmektedir.

Burada öncelikle hızın Xı' e bağlı fonksiyonu, deneysel hız verilerine göre doğrusal ve doğrusal olmayan regresyon kullanılarak bulunmuştur . Ancak tüm akım kesiti boyunca (simetri ekseni boyunca) hız fonksiyonunun deneysel verilere uydurulmasında zorluklarla karşılaşılmıştır. Yani tüm akım boyunca deneysel hız verilerine hassas olarak uyacak bir hız fonksiyonu bulmakta güçlükle karşılaşılmıştır . Değerlendirmelerin gerçekçi olması açısından hız verilerinin çok iyi uydurulması gerekmektedir . Akımın genel karekterinin sıkışma - gevşeme özelliklerine sahip olması yüzünden , bu özellikleri içeren bir bölgede hızın fonksiyonu bulunmaya çalışılmıştır . Simetri ekseni boyunca yapılan taramalar sonucunda 1.5 - 5.75 mm arasında aşağıda verilen hız fonksiyonunun deneysel hız verilerine çok iyi uymakta olduğu görülmüştür. Bu aralıkta bulunan hız fonksiyonu kullanılarak türev fonksiyonları da bulunmuş ve tüm bu fonksiyonlar , bünye denklemlerinin doğrusal olmayan regresyonunda kullanılmıştır.

$$V_1(X_1) = B_1 + B_2X_1 + B_3X_1^2 + B_4X_1^{B_5} + B_6X_1^{B_7} + B_8X_1^{B_9} + B_{10}X_1^{B_{11}} + B_{12}X_1^{B_{13}} + B_{14}X_1^{\exp(X^{-1})} \qquad (4\text{-}68)$$

Kabul edilen hız fonksiyonunda önce tüm parametreler (B1 - B13) birlikte hesaplanmışlardır . Bu durumda alınan sonuç iyi olmamıştır . Daha sonra ilk hesaplamada belirlenen B5 , B7 , B9 , B11 ve B13 parametreleri sabit alınarak çarpım parametreleri yeniden belirlenmiştir. Bu durumda çok daha iyi sonuçlar alınabilmiştir.

Sonuçta iki aşamalı olarak belirlenen hız parametreleri toplu olarak Tablo 4.1'de gösterilmiştir.Bu parametrelerde hız mm/s biriminde kabul edilmiştir.

Tablo 4.1 Regresyonla Bulunan Hız Parametreleri

Parametre	Değeri	Parametre	Değeri
B1	-524.2146	B8	0.50208730
B2	1429.0570	B9	6.11954200
B3	-396.4334	B10	-0.00803724
B4	63.567850	B11	7.19105500
B5	3.0009310	B12	-192.31020
B6	-1.101602	B13	-0.6500021
B7	5.7074360	B14	-345.12400

Bulunan bu parametrelere göre V_1, $-dV_1/dX_1$ ve $-d^2V_1/dX_1^2$ değerleri Tablo 4.2 'de sunulmuştur. Deneysel hız değerleri ile regresyonla bulunan hız değerlerinin değişimi Şekil 4.1 'de gösterilmiştir. Ayrıca $-dV_1/dX_1$ ve $-d^2V_1/dX_i^2$ değişimleri de sırasıyla Şekil 4.2 ve Şekil 4.3' te sunulmuştur.

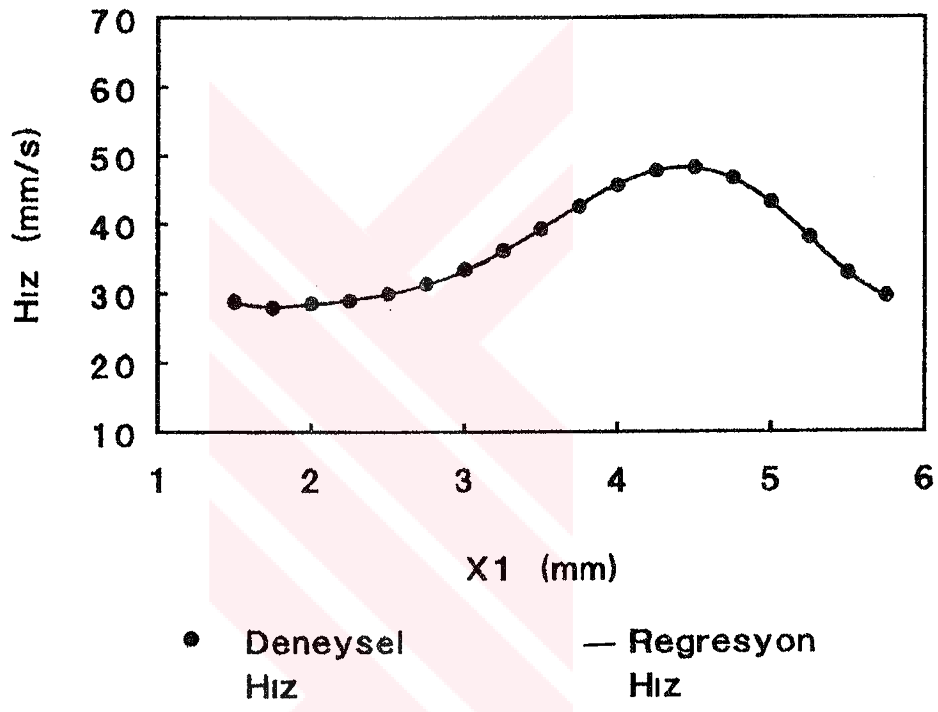
TABLO 4.2 Regresyonla bulunan hız ve türev değerleri

KONUM (mm)	V_1 (mm/s)	$-dV_1/dX_1$ (1/s)	$-d^2V_1/dX_1^2$ (1/mm.s)
1.5	28.73	5.79	-35.76
1.6	28.31	2.69	-26.20
1.7	28.16	0.53	-17.33
1.8	28.18	-0.85	-10.50
1.9	28.31	-1.65	-5.98
2.0	28.50	-2.11	-3.52
2.1	28.73	-2.41	-2.71
2.2	28.98	-2.69	-3.10
2.3	29.27	-3.06	-4.29
2.4	29.60	-3.57	-5.91
2.5	29.99	-4.24	-7.66
2.6	30.45	-5.10	-9.31
2.7	31.01	-6.10	-10.67
2.8	31.68	-7.22	-11.61
2.9	32.46	-8.40	-12.03
3.0	33.36	-9.60	-11.88
3.1	34.38	-10.76	-11.12
3.2	35.50	-11.81	-9.75
3.3	36.73	-12.69	-7.81
3.4	38.04	-13.35	-5.32
3.5	39.39	-13.74	-2.36
3.6	40.77	-13.81	1.01
3.7	42.14	-13.53	4.69

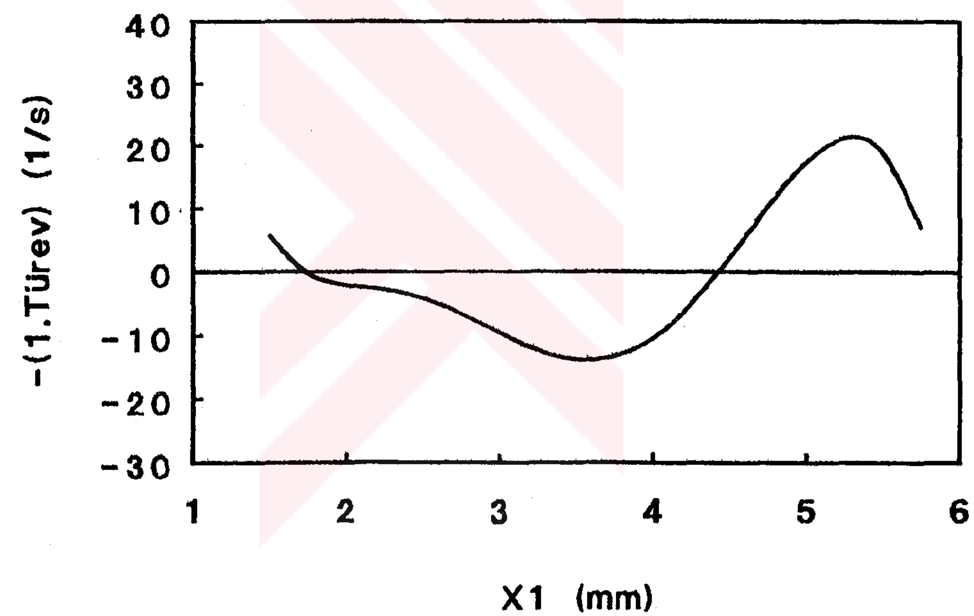
TABLO 4.2 (Devam ediyor.)

KONUM (mm)	V_1 (mm/s)	$-dV_1/dX_1$ (1/s)	$-d^2V_1/dX_1^2$ (1/mm.s)
3.8	43.46	-12.86	8.59
3.9	44.70	-11.80	12.58
4.0	45.81	-10.35	16.56
4.1	46.76	-8.50	20.39
4.2	47.50	-6.28	23.93
4.3	48.00	-3.73	27.05
4.4	48.24	-0.89	29.58
4.5	48.18	2.17	31.39
4.6	47.80	5.36	32.31
4.7	47.10	8.60	32.19
4.8	46.09	11.76	30.87
4.9	44.75	14.72	28.18
5.0	43.14	17.34	23.95
5.1	41.30	19.45	18.02
5.2	39.29	20.89	10.25
5.3	37.15	21.44	0.44
5.4	35.02	20.90	-11.52
5.5	33.03	19.05	-25.84
5.6	31.28	15.67	-42.65
5.7	29.94	10.43	-62.08

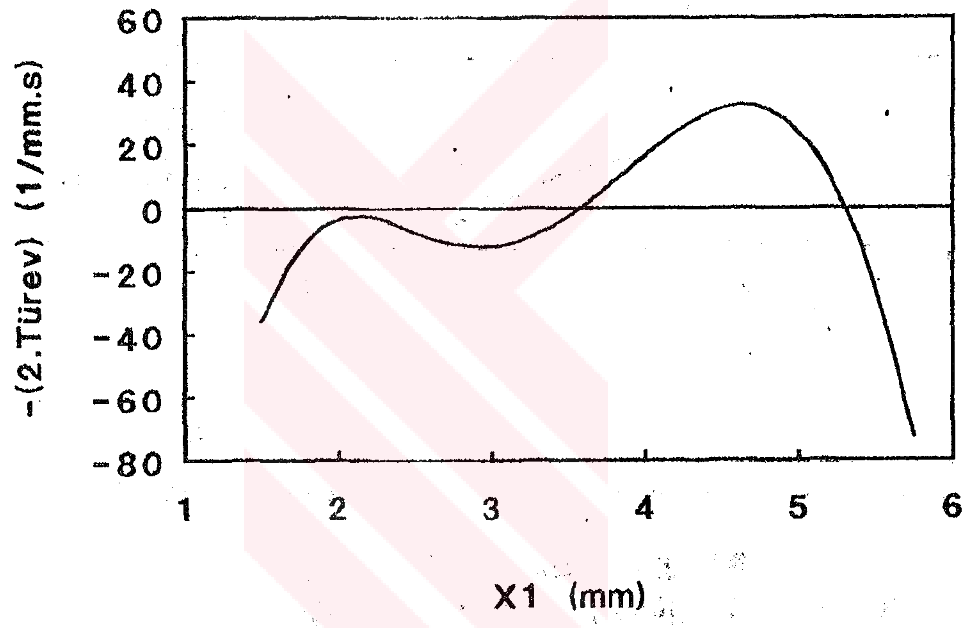
ŞEKİL 4.1. Deneysel Hız ile Regresyonla Bulunan Hızın Karşılaştırılması



ŞEKİL 4.2. Hızın(X1'e göre) 1.Türevinin X1'e Göre Değişimi



ŞEKİL 4.3. Hızın(X1'e göre) 2.Türevinin X1'e Göre Değişimi



BÖLÜM 5

BÜNYE DENKLEMLERİNİN DEĞERLENDİRİLMESİ

Bünye denklemleri iki farklı akım tipine göre değerlendirilmişlerdir . Genelde sadece akım tiplerinden biri dikkate alınarak bulunan malzeme parametreleri, diğer akım tipinde kullanıldığında iyi sonuçlar alınamamaktadır [18]. Yani , malzeme parametrelerinin nümerik değerleri kararlı kaymalı akıma göre regresyon analizi ile belirlendiğinde ve bu bulunan parametreler, simetri ekseni boyunca olan akıma göre bulunan birinci normal gerilme farkı diferansiyel denkleminde kullanıldığında bu gerilme farkının deneysel [1] değerlerinden oldukça fazla sapması beklenebilir.

Bu çalışmada 1. normal gerilme farkları değerlerinin hassas ölçü aletleri kullanılarak [1] bulunmuş olmasından dolayı değerlendirmede esas ağırlık, simetri ekseni boyunca olan akıma göre olmuştur . Bünye denklemlerinin uygun parametreleri bu akıma ait deneysel 1. normal gerilme farkı değerleri kullanılarak doğrusal olmayan regresyon yöntemi ile belirlenmiştir . Ancak bu şekilde regresyon yapılırken hesaplanmasında güçlük çekilen parametreler, önceki bölümde de anlatıldığı gibi basit kaymalı akıma göre bulunan viskometrik fonksiyonlardan biri kullanılarak belirlenmiştir. Geri kalan diğer parametreler ise , simetri ekseni boyunca olan akıma göre bulunan denklemin regresyonu ile belirlenmiştir.

Bünye denklemleri, simetri ekseni boyunca olan akıma göre indirgendiklerinde simetri ekseni boyunca viskoelastik akışkanın Vı hızı ve bu hızın Xı (simetri ekseni) ' e göre türevlerinin fonksiyonu olduğu Bölüm 4 ' de bulunmuştu . Bu nedenle değerlendirmede kullanılan yöntem [73] için bu bağımlı değişkenlerinin fonksiyonlarının belirlenmesinin gerekli olduğu Bölüm 4 ' de vurgulanmıştı. Hızın deneysel hız verilerine [1] en iyi uyduğu fonksiyon Bölüm 4 ' de verilmiştir. Malzeme parametrelerinin hassas olarak nümerik yöntemle belirlenebilmesi için özellikle hızın, deneysel hız verilerine çok iyi uyan bir fonksiyonunun bulunması gerekmektedir. Akım kanalının tümü boyunca hızın hassas olarak deneysel hız değerlerine uydurulamadığı daha önceki bölünde söylenmiştir. Bu yüzden değerlendirmelerde hızın en iyi uyduğu bölgeye göre bulunan sonuçlar dikkate alınmıştır.

Ayrıca bünye denklemlerinin, deneysel 1.normal gerilme farkı verilerine [1] ne ölçüde uyumlu olduğunu belirlemek için aşağıdaki hata ifadeleri kullanılmıştır.

$$\text{Ort. Hata} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| (\tau_{11} - \tau_{22})_{i\ \text{den.}} - (\tau_{11} - \tau_{22})_{i\ \text{hes.}} \right|}{n\ (\tau_{11} - \tau_{22})_{i\ \text{den.ort.}}}\ 100 \qquad (5\text{-}1)$$

$$\text{Hataların Kareleri Toplamı} = \Sigma\ (Y_{\text{hes.}} - Y_{\text{den.}})^2$$

5.1. White - Metzner:

White - Metzner bünye denkleminin kararlı , simetri ekseni boyunca olan akıma göre indirgenmiş hali Bölüm 4.1 ' de aşağıdaki gibi çıkartılmıştı.

$$\frac{\partial(\tau_{11}-\tau_{22})}{\partial X_1} + \frac{\tau_{11}-\tau_{22}}{\theta V_1} = -\frac{4\mu}{\theta V_1}\ \frac{\partial V_1}{\partial X_1} \qquad (5\text{-}2)$$

Burada gevşeme zaman fonksiyonu ve viskozite fonksiyonu aşağıdaki gibi daha önceki bölümlerde tanımlanmıştır [28].

$$\theta = \frac{1}{\theta_0 + \theta_1 |\ II_e\ |^{r/2}} \qquad (5\text{-}3)$$

$$\mu = \frac{\eta_o}{1 + d_1 |\ II_e\ |^{r/2}} \qquad (5\text{-}4)$$

(5-3) ve (5-4) denklemlerindeki θ_o , θ_1 , r , d_1 ve η_0 gibi parametrelerden η_0 'ın nümerik değeri , basit kaymalı akımda viskozite fonksiyonuna ait deneysel verilerin sıfır kayma hızına karşılık gelen değeri olmaktadır.

Basit kaymalı akıma göre Bölüm 4.2 ' de verilmiş olan viskozite fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\eta = \mu = \frac{\eta_0}{1 + d_1(\ 0.5\dot{\gamma}\ )^r} \qquad (5\text{-}5)$$

(5-5) eşitliğindeki η_0 sıfır kayma hızı viskozitesi olup, değeri 66 (dyn/cm²) . s olarak belirlenmiştir . Deneysel viskozite ve 1. normal gerilme farkı fonksiyonunun kayma hızına karşı değişimleri Şekil 5.1 ' de sunulmuştur [1,31].

Basit kaymalı akıma göre bulunan 1. normal gerilme farkı fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

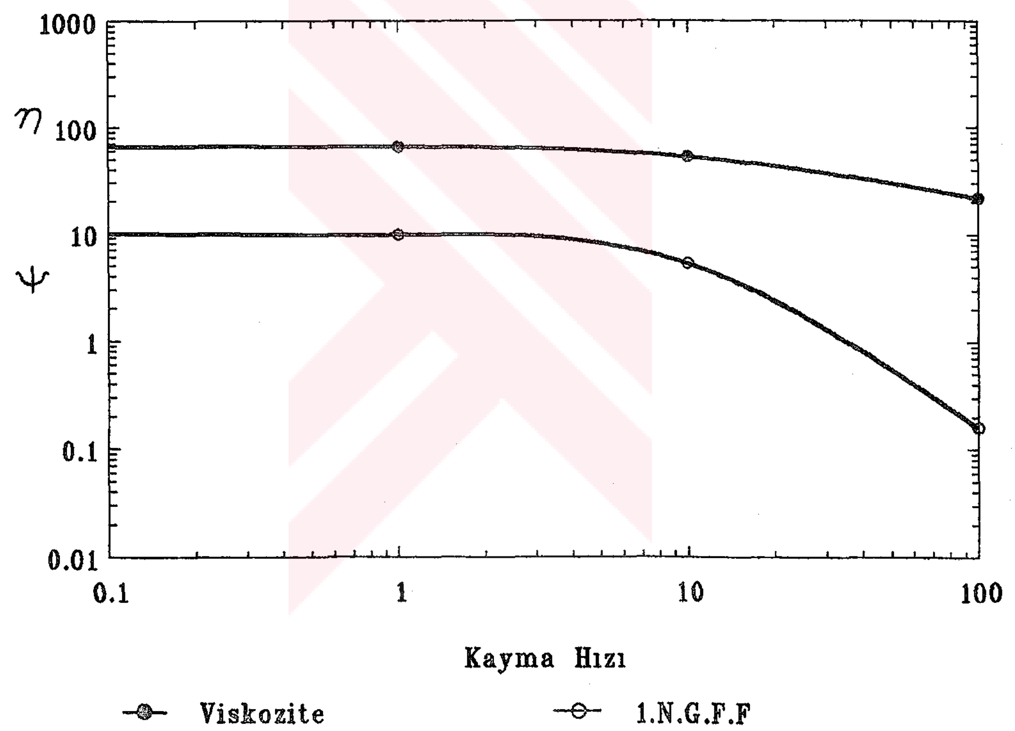
$$\psi = 2\mu\theta = \frac{2\eta_0}{1 + d_1(0.5\dot{\gamma})^r} \cdot \frac{1}{\theta_0 + \theta_1(0.5 \dot{\gamma})^r} \qquad (5\text{-}6)$$

Deneysel 1. normal gerilme farkı fonksiyonunun , kayma hızının sıfır olduğu andaki değeri 10 (dyn/cm²).s [1] dir. (5-6) eşitliğinde kayma hızı sıfır olduğunda aşağıdaki ifade bulunur:

$$\psi_0 = \frac{2\eta_0}{\theta_0} \qquad (5\text{-}7)$$

θ_0 ' ın değeri (5-7) denklemine göre belirlenmiş olup değeri 13.2 1/s dir . θ_1 , d_1 , r parametreleri de simetri ekseni boyunca olan akım a göre bulunan (5-2) denkleminin doğrusal olmayan regresyon yönteminin kullanılmasıyla belirlenmişlerdir . Parametrelerin bulunan nümerik değerleri Tablo 5.1 ' de sunulmuştur.

ŞEKİL 5.1. Deneysel Viskometrik
Fonksiyonların Değişimi



Tablo 5.1 White - Metzner Bünye Denklemindeki Parametrelerin Nümerik Değerleri

Parametreler	Değerleri
θ [s^{-1}]	13.20000
θ_1 [$s^{(r-1)}$]	43.60425
d_1 [s^{r}]	0.111058
r	0.800000
η_0 [$(dyn/cm^2).s$]	66.00000

Doğrusal olmayan regresyon yöntemi kullanılarak (5-2) denkleminin verdiği sonuçlar Tablo 5.2 ' de sunulmuştur.

White - Metzner bünye denkleminin simetri ekseni boyunca olan akıma göre bulunan 1. normal gerilme farkı değerleri ile bunların deneysel değerleri [1], Şekil 5.2 ' de sunulmuştur.

Viskometrik fonksiyonların kayma hızına göre değerleri Tablo 5.3 ' de verilmiştir.

TABLO 5.2 : Simetri Ekseni Boyunca Olan Akıma Göre Lineer Olmayan Regresyonla bulunan sonuçlar (White - Metzner)

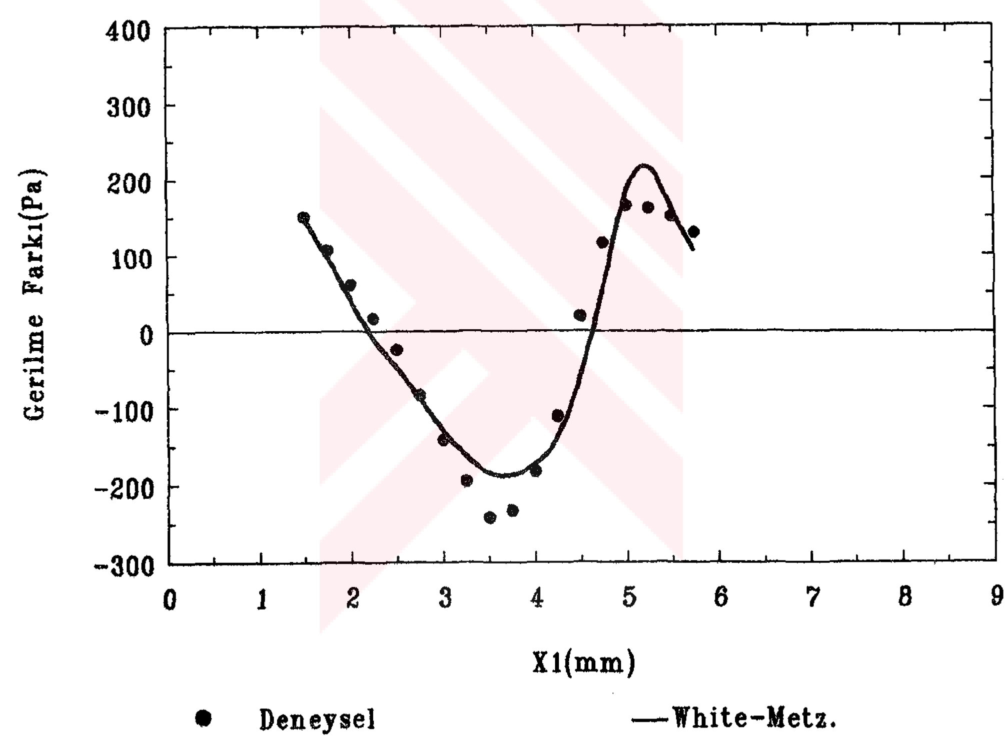
KONUM (mm)	DENEYSEL 1.NOR.GER.FAR. (Pa)	HESAPLANAN 1.NOR.GER.FAR. (Pa)
1.50	150.00	150.00
1.75	106.00	97.09
2.00	60.00	41.87
2.25	17.00	-9.55
2.50	-24.00	-47.26
2.75	-83.50	-86.81
3.00	-142.00	-128.45
3.25	-195.00	-162.30
3.50	-241.50	-182.53
3.75	-232.50	-186.49
4.00	-182.50	-171.81
4.25	-111.00	-138.10
4.50	19.00	-96.08
4.75	115.00	54.52
5.00	164.00	179.09
5.25	161.00	214.94
5.50	150.00	162.58
5.75	129.00	105.19

TABLO 5.3 : White - Metzner Eşitliğinin Viskometrik Fonksiyonlarının Kayma Hızına Göre Değişimi

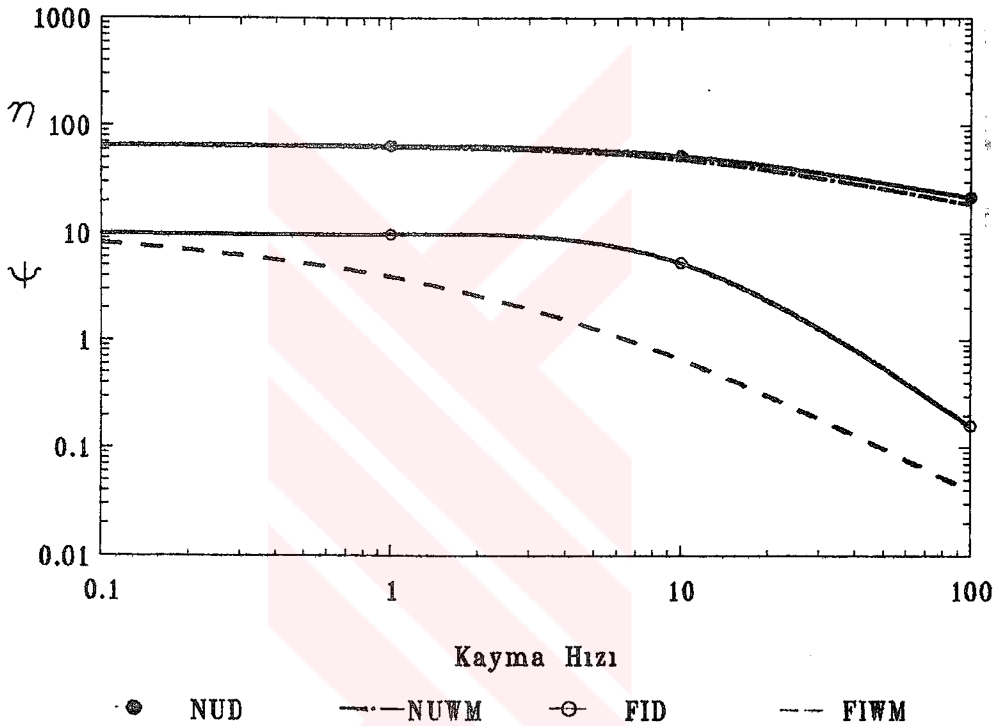
Kayma hızı (1/s)	ψ deneysel $(dyn/cm^2)s^2$	ψ hesap $(dyn/cm^2)s^2$	η deneysel $(dyn/cm^2)s$	η hesap $(dyn/cm^2)s$
0.10	10.00	8.26	66.00	65.55
1.00	9.80	3.92	65.80	62.94
10.00	5.30	0.67	52.00	49.10
100.00	0.15	0.04	22.00	19.20

Tablo 5.3 ' de kayma hızına göre değerleri verilen viskometrik fonksiyonların değişimleri Şekil 5.3 ' de sunulmuştur.

ŞEKİL 5.2. Deneysel Gerilme Farkı ile Hesaplananın Karşılaştırılması



ŞEKİL 5.3. White-Metzner Eşitliği için Viskometrik Fonksiyonların Değişimi



5.2. Oldroyd 3 - Sabit Eşitliği:

Bu modelde yer alan λ_1 , λ_2 ve η_0 sabitlerinden η_0'ın değeri 6.6 Pa.s olarak bellidir. Diğer iki sabit parametre, simetri ekseni boyunca olan akıma göre indirgenmiş Oldroyd 3-sabit bünye denklemine doğrusal olmayan regresyon yöntemi uygulanarak belirlenmiştir. λ_1 = 0.046455 s ve λ_2 = 0.017216 s dir.

Regresyonda kullanılan diferansiyel denklemler Bölüm 4.2.1'de (4-28) eşitliği ile verilmiştir.

Doğrusal olmayan regresyon yöntemi kullanılarak (4-28) eşitliğinin çözüm sonuçları Tablo 5.4 ' de sunulmuştur.

Hesaplanan 1. normal gerilme farkı değerleri ile deneysel değerler [1] Şekil 5.4 'de karşılaştırılmıştır.

Kararlı basit kaymalı akım için viskometrik fonksiyonlar Bölüm 4.2.2 'de aşağıdaki gibi bulunmuştu:

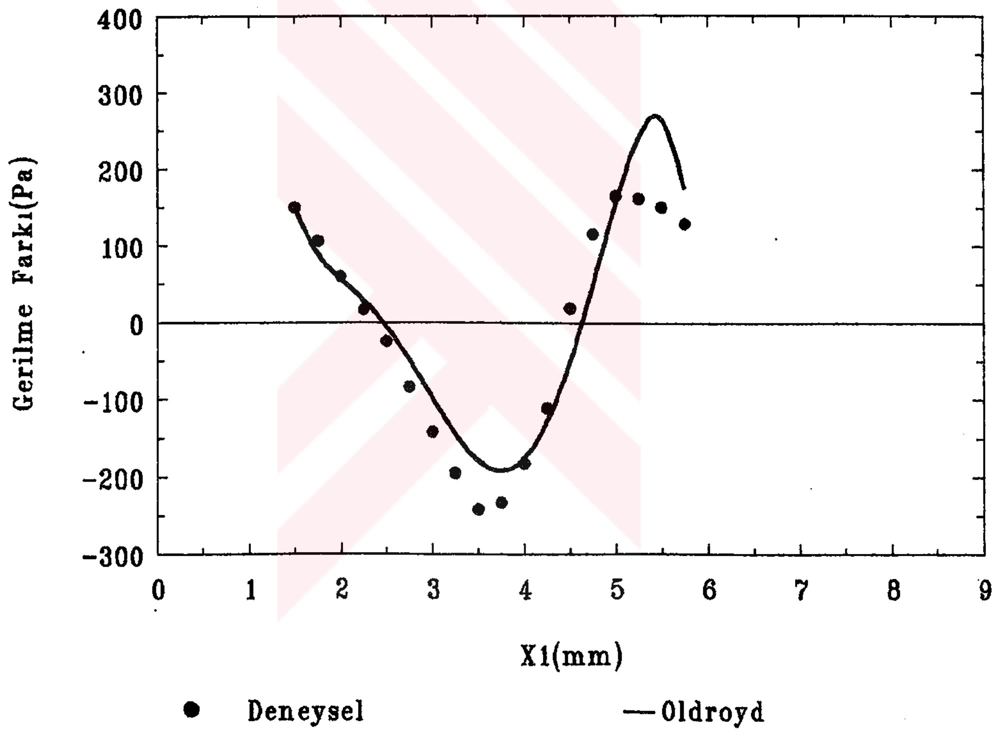
Viskozite fonksiyonu :

$$\mu = \eta_0 \frac{1 + 2/3\, \lambda_1 \lambda_2 \dot{\gamma}^2}{1 + 2/3\, \lambda_1^2\, \dot{\gamma}^2} \qquad (5\text{-}8)$$

TABLO 5.4 Simetri Ekseni Boyunca Olan Akıma Göre Lineer Olmayan Regresyonla Bulunan Sonuçlar (Oldroyd 3 - Sabit)

KONUM (mm)	DENEYSEL 1.NOR.GER.FAR. (Pa)	HESAPLANAN 1.NOR.GER.FAR. (Pa)
1.50	150.00	150.00
1.75	106.00	90.45
2.00	60.00	57.69
2.25	17.00	29.80
2.50	-24.00	-3.88
2.75	-83.50	-46.68
3.00	-142.00	-95.56
3.25	-195.00	-142.63
3.50	-241.50	-177.70
3.75	-232.50	-191.02
4.00	-182.50	-175.46
4.25	-111.00	-128.04
4.50	19.00	-50.91
4.75	115.00	47.70
5.00	164.00	152.28
5.25	161.00	237.81
5.50	150.00	265.37
5.75	129.00	175.30

ŞEKİL 5.4. Deneysel Gerilme Farkı ile Hesaplananın Karşılaştırılması



1. normal gerilme farkı fonksiyonu :

$$\psi = 2\eta_0 \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{1 + 2/3\ \lambda_1^2\ \dot{\gamma}^2} \qquad (5\text{-}9)$$

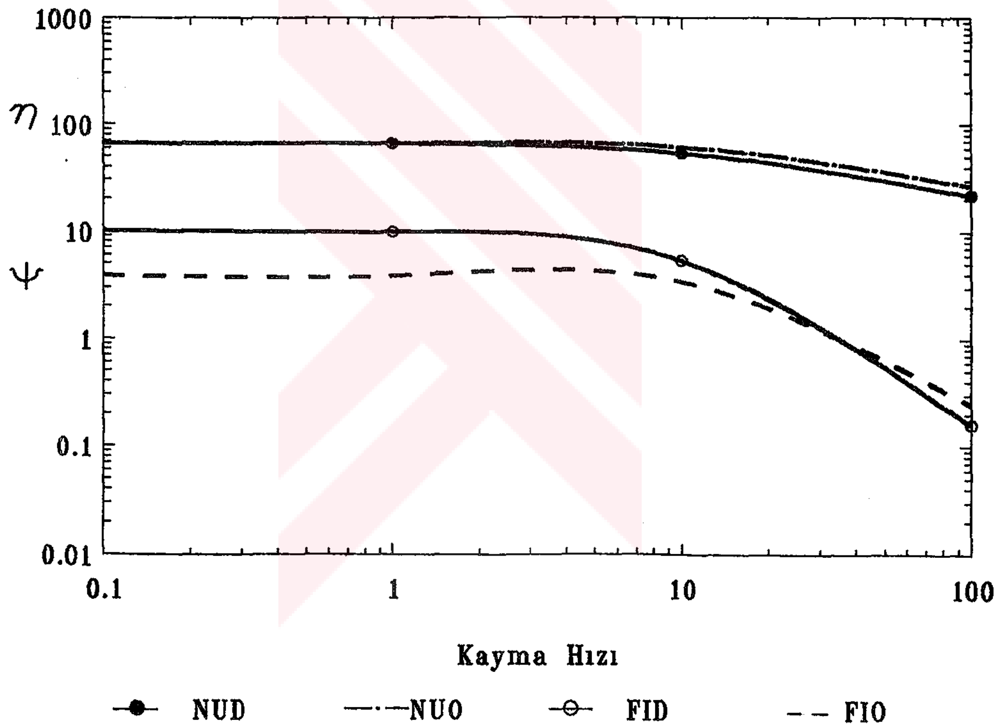
Bulunan parametreler kullanılarak (5-8) ve (5-9) fonksiyonlarının kayma hızına göre değişimleri aşağıdaki Tablo 5.5 ' de sunulmuştur:

TABLO 5.5 : Oldroyd 3 - Sabit Eşitliğinin Viskometrik Fonksiyonlarının Kayma Hızına Göre Değişimi

Kayma hızı (1/s)	ψ deneysel $(dyn/cm^2)s^2$	ψ hesap. $(dyn/cm^2)s^2$	η deneysel $(dyn/cm^2)s$	η hesap. $(dyn/cm^2)s$
0.10	10.00	3.85	66.00	66.00
1.00	9.80	3.84	65.80	65.94
10.00	5.30	3.37	52.00	60.80
100.00	0.15	0.25	22.00	27.16

Viskozite ve 1. normal gerilme farkı fonksiyonlarının kayma hızına göre değişimleri Şekil 5.5 ' de sunulmuştur.

ŞEKİL 5.5. Oldroyd 3-Sabit Eşitliği için Viskometrik Fonksiyonların Değişimi



5.3. Spriggs Modeli:

Spriggs modelinin simetri ekseni boyunca olan akım için indirgenmiş denklemi , (4-45) eşitliği ile daha önce bulunmuştu. Bu denkleme göre hesaplanacak malzeme parametresi gevşeme zamanı olan λ parametresidir . (4-45) eşitliğinin doğrusal olmayan regresyonla çözülmesi sonucunda , $\lambda = 0.0248167$ s olarak bulunmuştur.

Bu tür akımda Bölüm 4 ' de de belirtildiği gibi UCM , LCM , Korotasyonel Maxwell ve Johnson - Segalman bünye denklemleri, aynı denkleme indirgenmişlerdir (Bak Bölüm 4). Bundan dolayı söz edilen bünye denklemlerinin gevşeme zaman parametresi, Spriggs modelinin gevşeme zaman parametresine eşit olmaktadır.

Bu bünye denklemlerinin , simetri ekseni boyunca olan akım için doğrusal olmayan regresyonla bulunan ortak sonuçları Tablo 5.7 ' da sunulmuştur.

Spriggs modelinin kaymalı akım için Bölüm 4 ' de bulunmuş olan viskometrik fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

$$\eta = \frac{\eta_0}{1 + (\lambda c \dot{\gamma})^2}$$

$$\psi = \frac{2\lambda\eta_0}{1 + (\lambda c\dot{\gamma})^2} \qquad (5\text{-}10)$$

Viskometrik fonksiyonlardaki " c " faktörü (3-69) eşitliği ile daha önce tanımlanmıştı. c eşitliğindeki ε ' un değeri deneysel viskozite fonksiyonuna eğri uydurma ile belirlenmiş olup değeri -0.5 olarak bulunmuştur.

Viskozite ve 1. normal gerilme farkı fonksiyonlarının kayma hızına göre değişim değerleri Tablo 5.6'de sunulmuştur.

TABLO 5.6 : Spriggs Modeline Göre Viskometrik Fonksiyonların Kayma Hızına Göre Değişimi

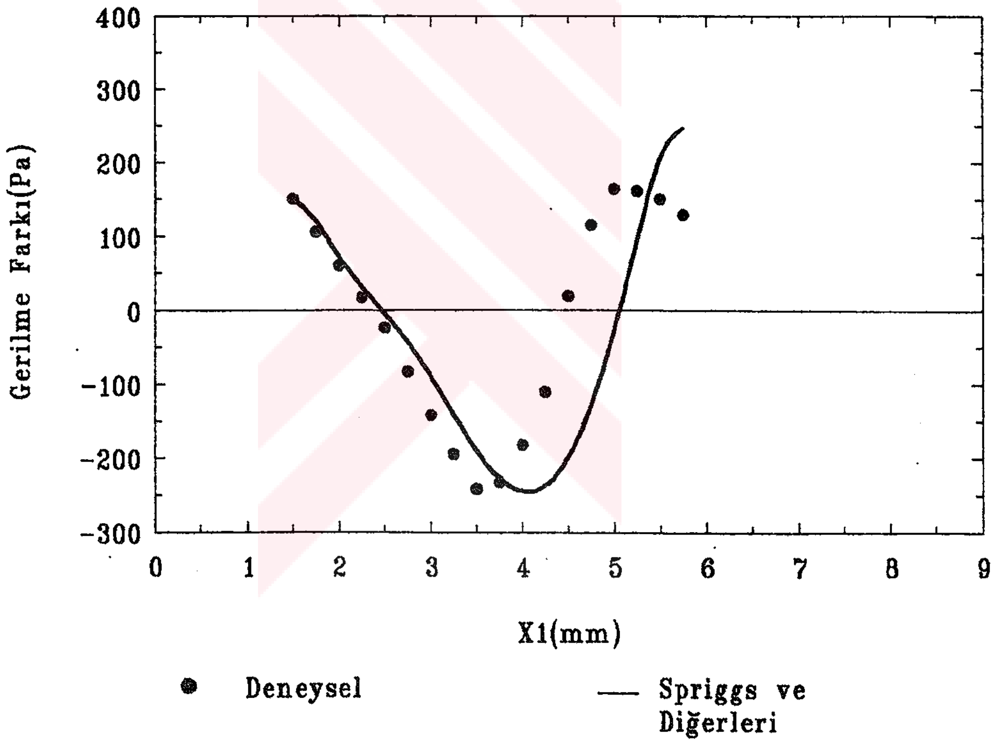
Kayma hızı (1/s)	ψ deneysel $(dyn/cm^2)s^2$	ψ hesap. $(dyn/cm^2)s^2$	η deneysel $(dyn.s/cm^2)$	η hesap. $(dyn.s/cm^2)$
0.10	10.00	3.22	66.00	66.00
1.00	9.80	3.22	65.80	65.96
10.00	5.30	3.05	52.00	62.59
100.00	0.15	0.50	22.00	10.23

Spriggs , UCM , LCM , Korotasyonel Maxwell ve Johnson - Segalman bünye denklemlerinin , simetri ekseni boyunca olan akım için hesaplanmış normal gerilme farkı değerleri,deneysel değerlerle Şekil 5.6' da karşılaştırılmıştır.

TABLO 5.7 Simetri Ekseni Boyunca Olan Akıma Göre Lineer Olmayan Regresyonla Bulunan Sonuçlar (Spriggs Modeli)

KONUM (mm)	DENEYSEL 1.NOR.GER.FAR. (Pa)	HESAPLANAN 1.NOR.GER.FAR. (Pa)
1.50	150.00	150.00
1.75	106.00	121.78
2.00	60.00	73.92
2.25	17.00	32.65
2.50	-24.00	-3.48
2.75	-83.50	-42.64
3.00	-142.00	-89.01
3.25	-195.00	-140.09
3.50	-241.50	-188.70
3.75	-232.50	-226.11
4.00	-182.50	-244.31
4.25	-111.00	-236.89
4.50	19.00	-199.30
4.75	115.00	-129.30
5.00	164.00	-28.65
5.25	161.00	92.33
5.50	150.00	204.87
5.75	129.00	247.86

ŞEKİL 5.6. Deneysel Gerilme Farkı ile Hesaplananın Karşılaştırılması



Basit kaymalı akım için Spriggs modeline göre bulunan viskometrik fonksiyonların, kayma hızına göre değişimleri Şekil 5.7'de sunulmuştur.

5.4. Lower ve Upper Convekted Maxwell Modelleri :

Bu bünye denklemleri, her iki akım için karteziyen koordinat eksen takımında aynı özellikleri göstermektedir.

Simetri ekseni boyunca olan akıma göre bu iki modelin, Spriggs modelinin verdiği sonuçların aynısını verdiği Bölüm 5.3' de belirtilmiştir.

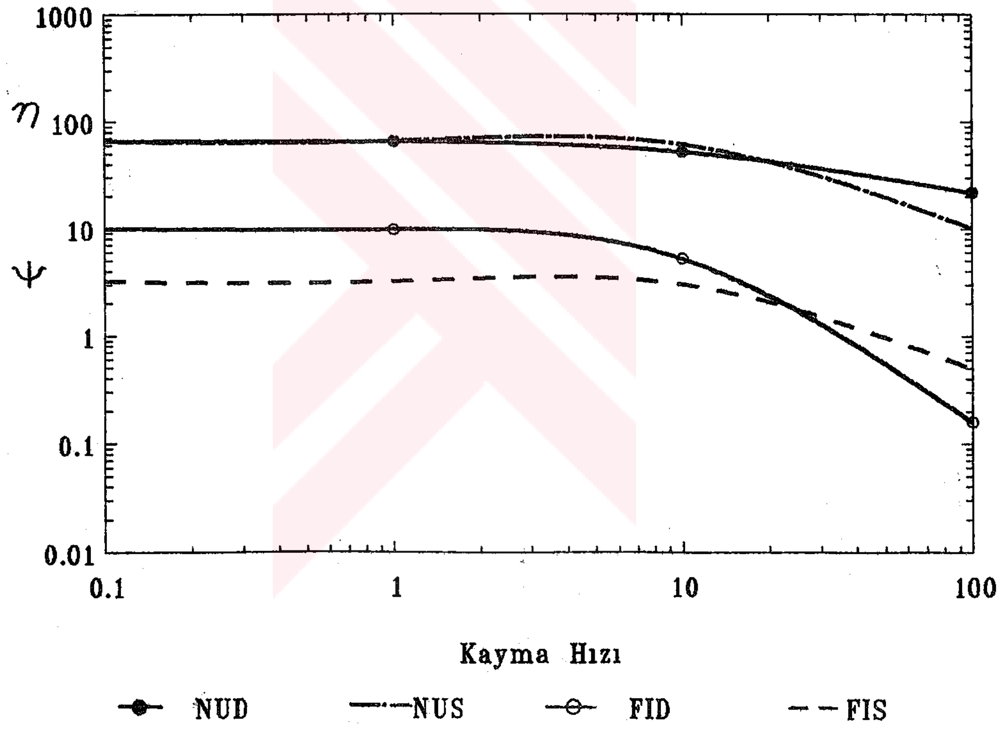
Kaymalı akım için bulunan viskometrik fonksiyonlar (4-65) eşitliğinden de görüldüğü gibi kayma hızına bağlı olmayıp sabittirler $\left[\eta = \eta_o = 66\ (dyn/cm^2).s \text{ ve } \psi = 3.22\right]$.

5.5. Korotasyonel Maxwell Modeli :

Simetri ekseni boyunca olan akıma göre bünye denklemlerinin indirgenmiş hali (4-45) denklemindeki gibi olup, Spriggs modelinin verdiği sonuçları verir.

Kaymalı akım için bulunan viskometrik fonksiyonlar, daha önceki bölümde tanımlanmış olup aşağıdaki gibidir:

ŞEKİL 5.7. Spriggs Eşitliği için
Viskometrik Fonksiyonların Değişimi



$$\eta = \frac{\eta_0}{1 + \lambda^2 \dot{\gamma}^2}$$

(5-11)

$$\psi = \frac{2\lambda\eta_0}{1 + \lambda^2 \dot{\gamma}^2}$$

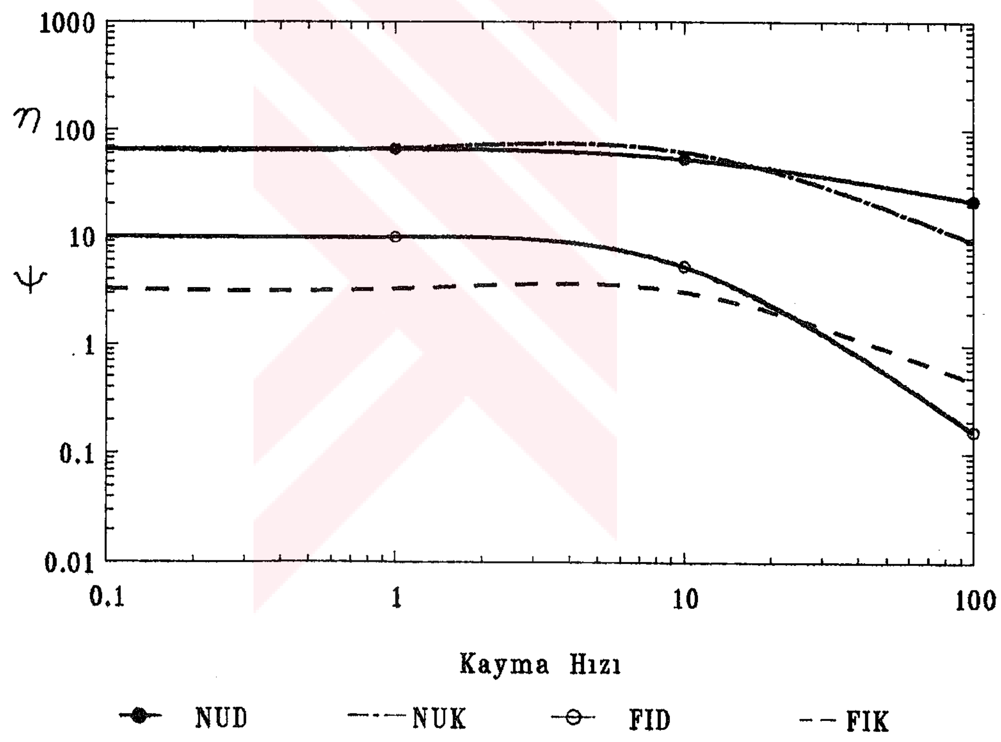
Bu modelin malzeme parametresi olan λ , Spriggs modelinin simetri ekseni boyunca olan akıma göre doğrusal olmayan regresyonu ile bulunan λ değerine eşdeğerdir. Daha önce hesaplanmış olan bu değer kullanılarak (5-11) eşitliklerinin kayma hizına karşı değişimleri Tablo 5.8 'de sunulmuştur.

TABLO 5.8 : Korotasyonel Maxwell Modelinin Viskometrik Fonksiyonlarının Kayma Hızına Göre Değişimi

Kayma Hızı (1/s)	ψ deneysel (dyn/cm²)s²	ψ hesap. (dyn/cm²)s²	η deneysel (dyn/cm²)s	η hesap. (dyn/cm²)s
0.10	10.00	3.28	66.00	66.00
1.00	9.80	3.27	65.80	65.96
10.00	5.30	3.09	52.00	62.17
100.00	0.15	0.46	22.00	9.22

Bu modelin viskometrik fonksiyonlarının kayma hızına karşı değişimleri Şekil 5.8' de gösterilmiştir.

ŞEKİL 5.8. Korotasyonel Maxwel Eşitliği için Viskometrik Fonksiyonların Değişimi



5.6. Johnson - Segalman Modeli :

Bu modelin de simetri ekseni boyunca olan akıma göre indirgenmiş denklemi (4.45) denklemine eşit olduğu daha önceki bölümde gösterilmişti . Bu akıma göre sonuçlar Tablo 5.7 'da sunulmuştur.

Bu model de görülen λ parametresi Spriggs modelinin çözümünde bulunmuştur.

Basit kaymalı akıma göre bulunmuş viskozite fonksiyonları aşağıdaki gibidir :

$$\eta = \frac{\eta_0}{1 + 4\varepsilon(1-\varepsilon)\lambda^2\dot{\gamma}^2}$$

$$\psi = \frac{2\eta_0\lambda}{1 + 4\varepsilon(1-\varepsilon)\lambda^2\dot{\gamma}^2} \qquad (5\text{-}12)$$

Bu fonksiyonlardaki ε parametresi Gaidos'un [9] aldığı değer olarak 0.1 değerinde kabul edilmiştir.

$\varepsilon = 0.1$ için viskometrik fonksiyonların ifadesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$\eta = \frac{\eta_0}{1 + 0.36\lambda^2\dot{\gamma}^2}$$

$$\psi = \frac{2\lambda\eta_0}{1 + 0.36\lambda^2\dot{\gamma}^2} \qquad (5\text{-}13)$$

(5-13) eşitliklerinin kayma hızına karşı değerleri Tablo 5.9 'da sunulmuştur.

TABLO 5.9 : Johnson - Segalman Modelinde Viskometrik Fonksiyonların Kayma Hızına Karşı Değerleri

Kayma Hızı (1/s)	Ψ deneysel $(dyn/cm^2)s^2$	Ψ hesap. $(dyn/cm^2)s^2$	η deneysel $(dyn/cm^2)s$	η hesap. $(dyn/cm^2)s$
0.10	10.00	3.22	66.00	66.00
1.00	9.80	3.22	65.80	65.99
10.00	5.30	3.15	52.00	64.62
100.00	0.15	1.02	22.00	21.01

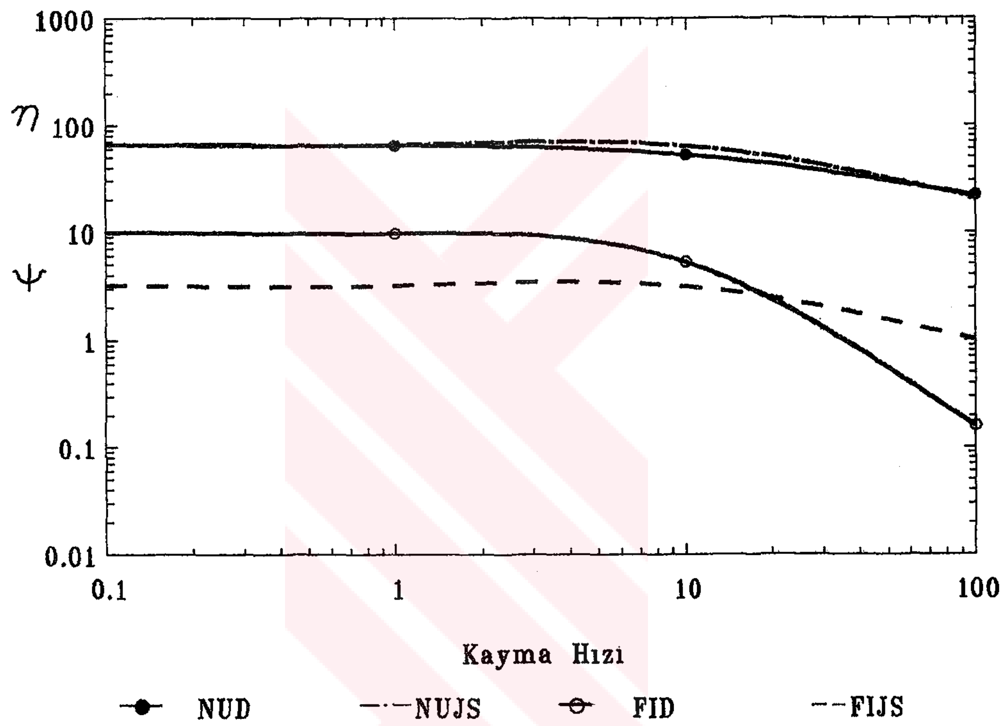
Bu modelin viskozite ve 1. normal gerilme farkı fonksiyonları Şekil 5.9' da sunulmuştur.

5.7. Gaidos Modeli :

Gaidos [9] modelinin simetri ekseni boyunca olan akıma göre indirgenmiş denklemi (4-59) eşitliği ile Bölüm 4.4.1 'de bulunmuştur.

Gaidos çalışmasında $\eta_\infty = 0$ kabul etmiştir . Burada yapılan çalışmada da aynı kabul yapılarak daralan -genişleyen akım kanalı için iki akım tipinde bu model denenmiştir.

ŞEKİL 5.9. Johnson-Segalman Eşitliği
için Viskometrik Fonksiyonların Değişimi



Bu modelde ε , λ , α , β , σ ve η_0 gibi 6 parametre bulunmaktadır. η_0 ' ın değeri daha önceki bölümlerde belirlenmiştir. ε , β ve λ parametreleri basit kaymalı akım için viskozite fonksiyonunun verileri kullanılarak regresyon analizi ile belirlenmiştir . Diğer α ve σ parametreleri de (4-59) diferansiyel denkleminin doğrusal olmayan regresyon yöntemi ile çözümünden belirlenmiştir.

Her iki akım kullanılarak belirlenen malzeme parametreleri Tablo 5.10' da sunulmuştur.

TABLO 5.İ0 : Gaidos Modelinin Malzeme Parametreleri

Parametre	Değeri
ε	0.02566
λ	3.60000
α	0.11599
σ	0.00388
β	0.28000
η_∞	0.00000

Simetri ekseni boyunca olan akıma göre (4-59) eşitliğinin regresyonundan bulunan sonuçları Tablo 5.11 ' de sunulmuştur.

TABLO 5.11 : Gaidos Modelinin Simetri Ekseni Boyunca Olan Akıma Göre Lineer Olmayan Regresyonla Bulunan Sonuçları

KONUM	DENEYSEL 1.NOR.GER.FAR.	HESAPLANAN 1.NOR.GER.FAR.
1.50	150.00	150.00
1.75	106.00	69.48
2.00	60.00	-0.51
2.25	17.00	-35.38
2.50	-24.00	-57.03
2.75	-83.50	-85.31
3.00	-142.00	-119.98
3.25	-195.00	-151.72
3.50	-241.50	-172.21
3.75	-232.50	-175.42
4.00	-182.50	-157.65
4.25	-111.00	-119.55
4.50	19.00	-68.47
4.75	115.00	67.16
5.00	164.00	174.76
5.25	161.00	225.93
5.50	150.00	200.71
5.75	129.00	103.45

Basit kaymalı akım için viskometrik fonksiyonların η_{∞} =0 ve ε = 0.02566 için ifadeleri aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$\eta = \frac{\eta_0}{[1 + 0.1\lambda^2\dot{\gamma}^2]^{\alpha}}$$

$$\psi = \frac{2\sigma\lambda\eta_0}{[1 + 0.1\lambda^2\dot{\gamma}^2]^{\alpha+\beta}} \qquad (5\text{-}14)$$

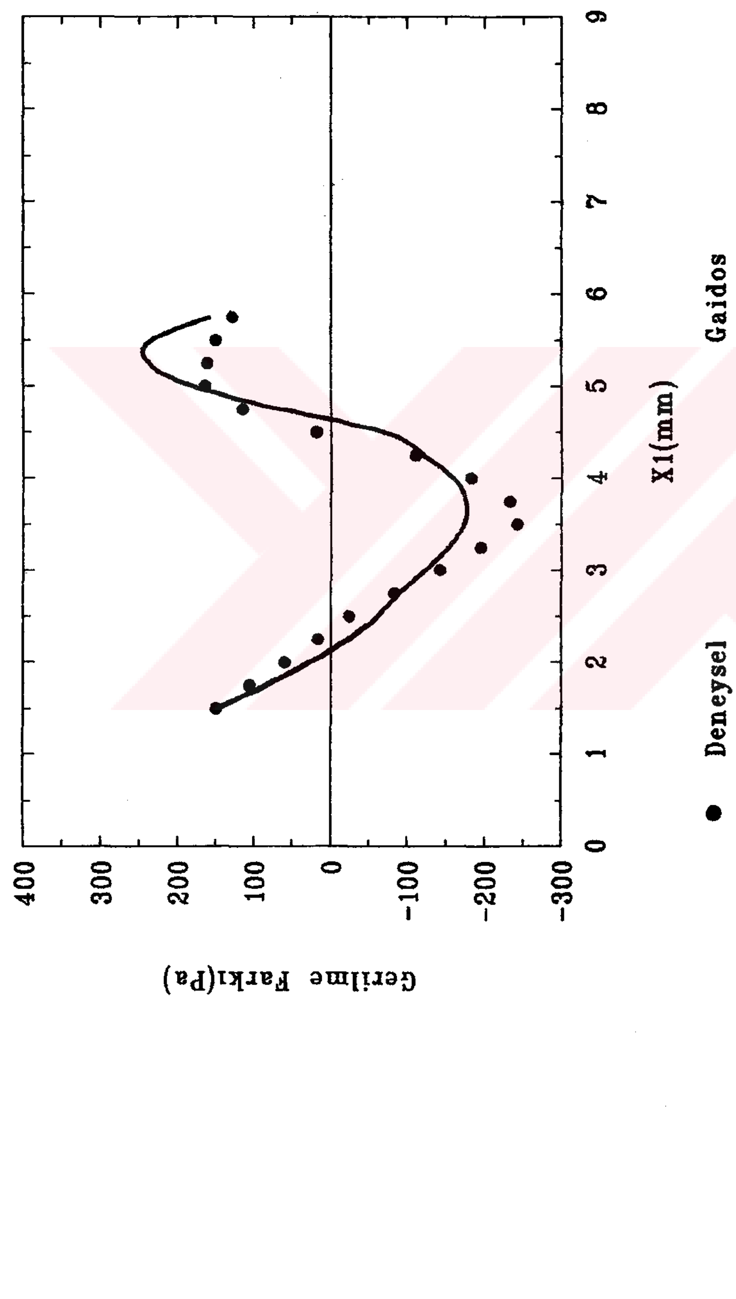
(5-14) eşitliklerinin Tablo 5.10 ' daki parametreler kullanılarak , kayma hızına karşı değerleri Tablo 5.12 ' de sunulmuştur.

TABLO 5.12 : Gaidos Modelinde Viskometrik Fonksiyonların Kayma Hızına Göre Değişimi

Kayma Hızı	ψ deneysel	ψ hesap.	η deneysel	η hesap.
0.10	10.00	1.50	66.00	65.90
1.00	9.80	1.40	65.80	59.30
10.00	5.30	0.80	52.00	35.10
100.00	0.15	0.40	22.00	19.30

Simetri ekseni boyunca olan akıma göre doğrusal olmayan regresyonla bulunan 1.normal gerilme farkı değerleri,deneysel değerlerle Şekil 5.10 ' da karşılaştırılmıştır.

ŞEKİL 5.10. Deneysel Gerilme Farkı ile Hesaplananın Karşılaştırılması



Tablo 5.12 ' deki parametre değerleri kullanılarak kaymalı akımda bulunmuş olan viskometrik fonksiyonların kayma hızına göre değişimleri Şekil 5.11 ' de sunulmuştur.

5.8. Önerilen Yeni Model :

önerilem bu yeni model, bünye denkleminin genel yapısı olarak Oldroyd 3-Sabit modelinin 4-24 eşitliği ile verilen ifadesine benzerdir. Oldroyd modelinden farklılığı malzeme fonksiyonları açısındandır. Bu modelde malzeme fonksiyonları, Oldroyd eşitliğinde olduğu gibi sabit olmayıp , deformasyon hız tensörünün 2.invaryantının fonksiyonudurlar . Bu Modelin genel ifadesi aşağıdaki gibi düşünülmüştür:

$$(1 + \theta \Pi)\tau_{ij} = -2\mu(1 + \lambda_{II}\Pi)e_{ij} \qquad (5\text{-}15)$$

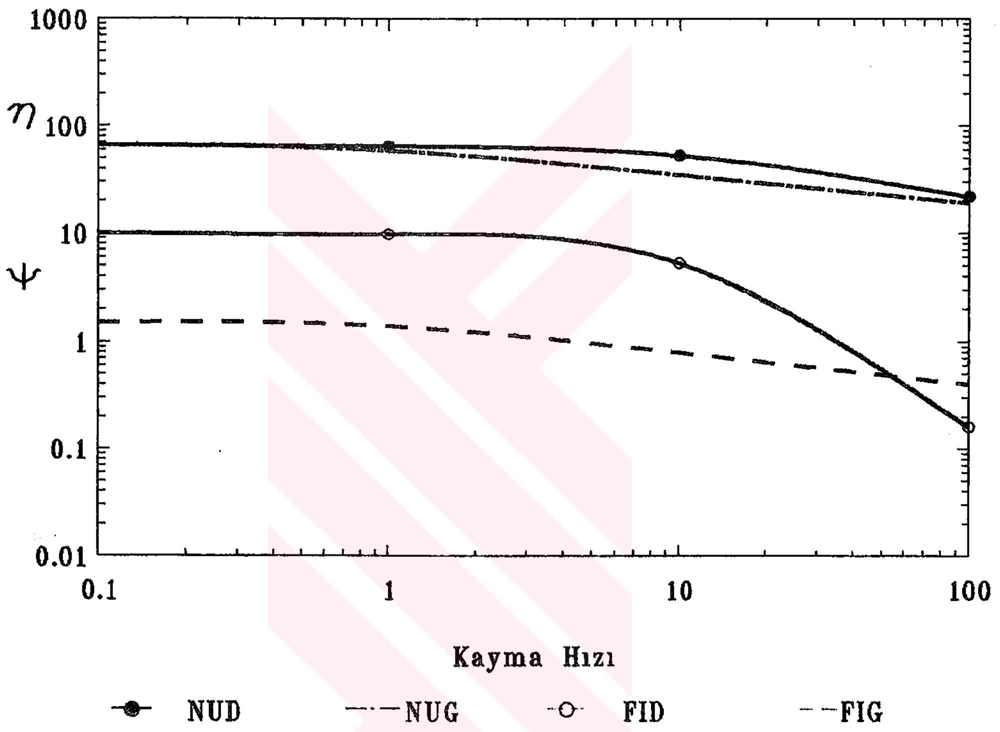
Bu modeldeki gevşeme zamanı ve viskozite fonksiyonları, White - Metzner modelinde olduğu gibi kabul edilmiştir. Geciktirme zaman fonksiyonu ise Gaidos modelindeki gibidir.

$$\mu = \frac{\eta_0}{1 + d_1| II_e|^{r/2}}$$

$$\theta = \frac{1}{\theta_0 + \theta_1| II_e|^{r/2}} \qquad (5\text{-}16)$$

$$\lambda_{II} = \frac{\lambda\sigma}{[1 - 4\varepsilon(1-\varepsilon)\lambda^2 II_e]^{\beta}}$$

ŞEKİL 5.11. Gaidos Eşitliği için Viskometrik Fonksiyonların Değişimi



5.8.1. Simetri Ekseni Boyunca Akım

Yeni modelin simetri ekseni boyunca olan akım için, Bölüm 2 ' deki akım şartları dikkate alınarak yeni modelin indirgenmiş hali aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$\frac{\partial(\tau_{11}-\tau_{22})}{\partial X_1}+\frac{\tau_{11}-\tau_{22}}{\theta V_1}=-\frac{4\mu}{\theta V_1}\left[\frac{\partial V_1}{\partial X_1}+\lambda_{II}V_1\frac{\partial^2 V_1}{\partial X_1^2}\right] \quad (5\text{-}17)$$

5.8.2. Basit Kaymalı Akım :

Bu model , kaymalı akıma göre incelendiğinde türev bileşenleri Oldroyd modelinde bulunanlar gibi olacaktır.

$$\begin{aligned}\Pi(\tau)_{11} &= -2/3\,\dot{\gamma}^2\\ \Pi(\tau)_{22} &= 1/3\,\dot{\gamma}^2 \qquad (5\text{-}18)\\ \Pi(\tau)_{12} &= 0\end{aligned}$$

(5-18) eşitlikleri , (5-15) eşitliğinde kullanılarak gerilme bileşenleri arasıdaki denklem takımları aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$\tau_{11}=4/3\,\theta\dot{\gamma}\tau_{12}+4/3\,\mu\lambda_{II}\dot{\gamma}^2$$

$$\tau_{22} = -2/3\ \theta\dot{\gamma}\tau_{12} - \mu\lambda_{II}\dot{\gamma}^2 \qquad (5\text{-}19)$$

$$\tau_{12} = -\mu\left[\frac{1 + 2/3\ \theta\lambda_{II}\dot{\gamma}^2}{1 + 2/3\ \theta^2\dot{\gamma}^2}\right]\dot{\gamma}$$

(5-19) eşitlikleri çözülerek, kaymalı akım için viskometrik fonksiyonlar aşağıdaki gibi bulunmuştur:

Viskozite fonksiyonu:

$$\eta = -\frac{\tau_{12}}{\dot{\gamma}} = \mu\left[\frac{1 + 2/3\ \theta\lambda_{II}\dot{\gamma}^2}{1 + 2/3\ \theta^2\dot{\gamma}^2}\right] \qquad (5\text{-}20)$$

1. Normal gerilme farkı fonksiyonu:

$$\psi = -\frac{\tau_{11} - \tau_{22}}{\dot{\gamma}^2} = 2\mu\left[\frac{\theta - \lambda_{II}}{1 + 2/3\ \theta^2\dot{\gamma}^2}\right] \qquad (5\text{-}21)$$

Bulunan viskometrik fonksiyonlardan da görüldüğü gibi $\mu = \eta_0$, $\lambda_{II} = \lambda_2$ ve $\theta = \lambda_1$ olduğunda , yeni modelin viskometrik fonksiyonları Oldroyd 3 - sabit modelinin viskometrik fonksiyonlarına dönüşür.

Bu yeni modelde θ_o, θ_1, σ ve d_1 parametreleri (5-17) diferansiyel eşitliğinin bağımsız değişkenleri, geri kalan β, r, λ ve ε parametreleri de sabitleri olarak düşünülmüştür. Simetri ekseni boyunca olan akımda indirgenmiş (5-17) diferansiyel denkleminin doğrusal olmayan regresyon yöntemiyle çözümünde bu sabit parametrelere başlangıçta keyfi değerler verilmiştir. Diferansiyel denklemin çözümünde hatayı azaltacak şekilde bu sabit parametreler değiştirilmiştir. Bu şekilde belirlenen parametreler, basit kaymalı akımdaki viskozite fonksiyonunda girdi olarak kullanılıp, değişimin deneysel değerlerle uyumuna bakılmıştır. Bu seçimli parametrelerde yeniden değişiklik yapılarak doğrusal olmayan regresyon yöntemiyle çözümdeki hatanın azalıp azalmadığı kontrol edilmiştir. Minumum hataya erişildiğinde bu döngü sona erdirilmiştir.

Her iki akım tipinin kullanılmasıyla belirlenmiş olan malzeme parametrelerinin değerleri Tablo 5.13' de sunulmuştur.

Tablo 5.13 : Yeni Modeldeki Malzeme Parametrelerinin Değerleri

Parametre	Değeri	Parametre	Değeri
d_1	-0.08097943	ε	0.0256600
θ_o	22.56069000	σ	0.0398598
θ_1	-2.67059400	β	0.1000000
r	0.71600000	λ	0.8000000

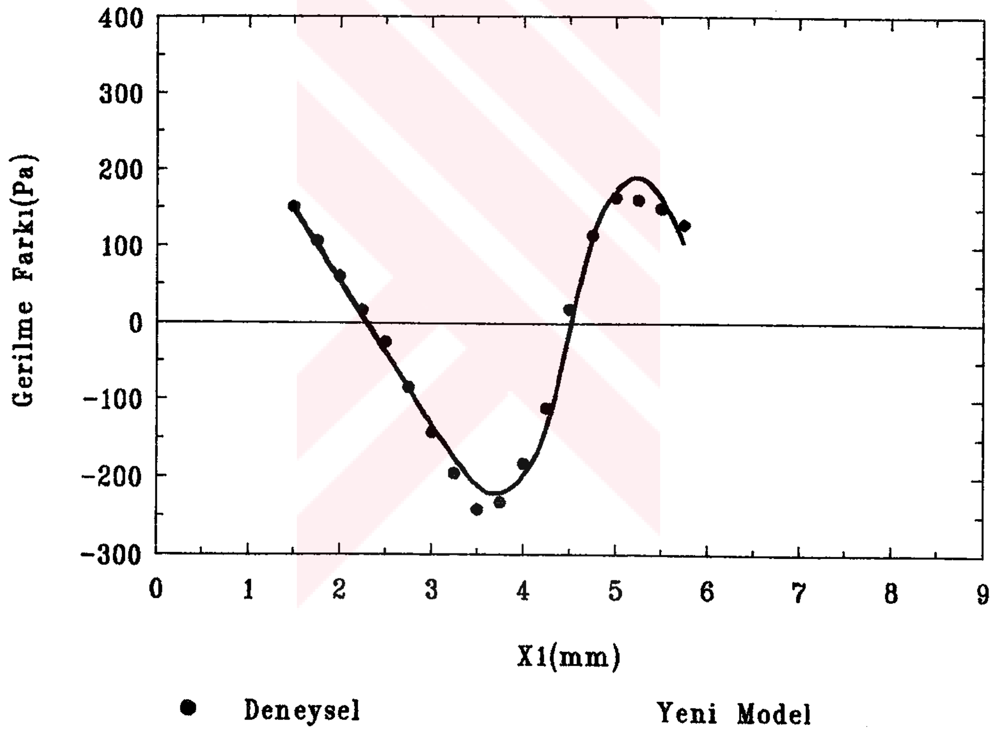
Simetri ekseni boyunca olan akımda (5-17) denkleminin doğrusal olmayan regresyonla bulunan sonuçları Tablo 5.14'de sunulmuştur.

TABLO 5.14 : Yeni Modelin Simetri Ekseni Boyunca Olan Akıma Göre Lineer Olmayan Regresyonla Verdiği Sonuçlar

KONUM (mm)	DENEYSEL 1.NOR.GER.FAR. (Pa)	HESAPLANAN 1.NOR.GER.FAR. (Pa)
1.50	150.00	150.00
1.75	106.00	80.50
2.00	60.00	27.56
2.25	17.00	0.80
2.50	-24.00	-36.02
2.75	-83.50	-83.23
3.00	-142.00	-132.28
3.25	-195.00	-173.11
3.50	-241.50	-200.00
3.75	-232.50	-220.01
4.00	-182.50	-205.14
4.25	-111.00	-138.51
4.50	19.00	-11.33
4.75	115.00	110.76
5.00	164.00	178.28
5.25	161.00	177.84
5.50	150.00	165.75
5.75	129.00	98.30

Hesaplanan ve deneysel gerilme farkı değerleri Şekil 5.12 ' de sunulmuştur.

ŞEKİL 5.12. Deneysel Gerilme Farkı ile
Hesaplananın Karşılaştırılması



Bu modelde viskometrik fonksiyonlar,kayma hızının 10 1/s değerine kadar $\beta = 0$,r = 0 ve 10 1/s den büyük değerlerinde de Tablo 5.13'deki değerler kullanılarak hesaplanmışlardır.

Basit kaymalı akıma göre bulunan viskometrik fonksiyonların , kayma hızına göre değişimi Tablo 5.15 ' de verilmiştir.

TABLO 5.15 : Yeni Modelde Kaymalı Akım İçin Bulunmuş Viskometrik Fonksiyonların Kayma Hızına Göre Değişimi

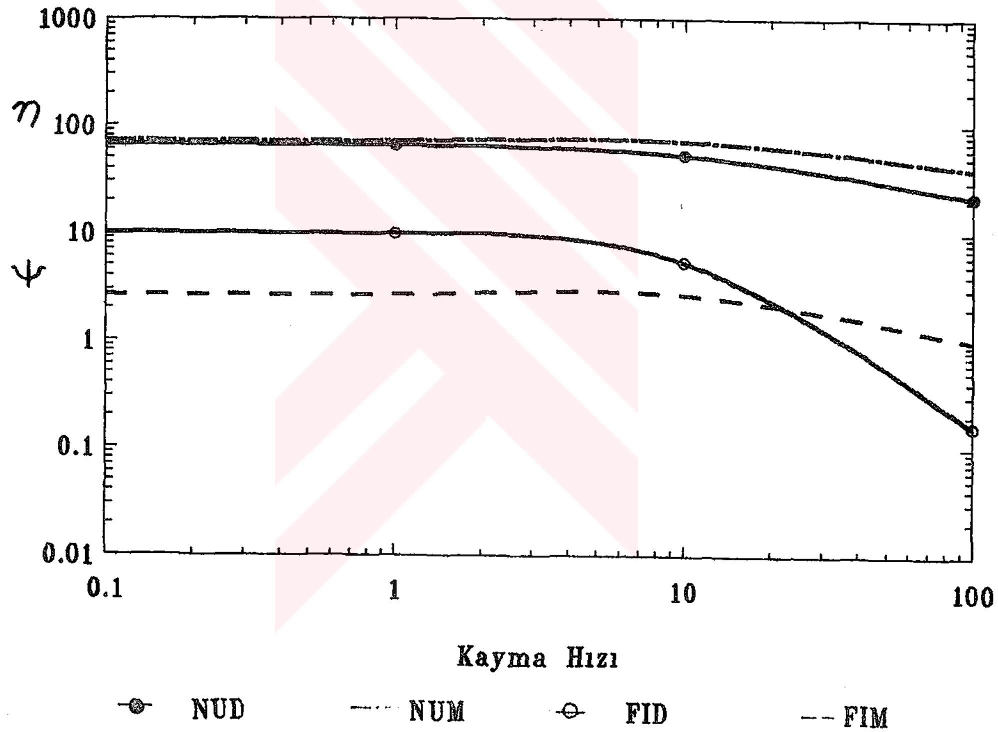
Kayma Hızı	ψ deneysel	ψ hesap.	η deneysel	η hesap.
0.10	10.00	2.64	66.00	71.80
1.00	9.80	2.64	65.80	71.80
10.00	5.30	2.64	52.00	71.80
100.00	0.15	1.15	22.00	41.20

Tablo 5.15 ' de verilmiş viskometrik fonksiyonların, kayma hızına karşı değişimleri Şekil 5.13' de sunulmuştur.

5.9. İncelenen Modellerin Genel Değerlendirilmesi:

İncelemelerde doğrusal olmayan regresyon yöntemi uygulandığından ve bu yöntemle simetri ekseni boyunca olan akımda bünye denklemlerinin indirgenmiş diferansiyel denklemleri çözüldüğünden , esas değerlendirme bu akım tipi

ŞEKİL 5.13. Yeni Model için
Viskometrik Fonksiyonların Değişimi



için bulunan sonuçlara göre yapılmıştır . Gerek viskometrik fonksiyonlara eğri uydurma gerek doğrusal olmayan regresyon yöntemiyle belirlenen malzeme parametreleri Tablo 5.16 ' da sunulmuştur.

TABLO 5.16 : Bünye Denklemlerinin Malzeme Parametre Değerleri

BÜNYE DENKLEMİ	PARAMETRE VE DEĞERLERİ	
	BU ÇALIŞMA İÇİN	LEIDER İÇİN
OLDROYD 3-SABİT	η_0 = 66.000000 λ_1 = 0.0464553 λ_2 = 0.0172159	η_0 = 66.000 λ_1 = 0.1050 λ_2 = 0.0292
WHITE-METZNER	θ_0 = 13.20 θ_1 = 43.60 d_1 = 0.111 r = 0.800	θ_0 = 13.20 θ_1 = 5.250 d_1 = 0.154 r = 0.750
SPRIGGS	λ = 0.0248167 ε = -0.5	
GAIDOS	η_∞ = 0.00000 α = 0.129773 ε = 0.02566 β = 0.280000 λ = 3.60000 σ = 0.003221	
UPPER KONVEKTED MAXWELL	η_∞ = 0.00000 λ = 0.024817 σ = 1.00000 ε = 0.000000	
LOWER KONVEKTED MAXWELL	η_∞ = 0.00000 λ = 0.024817 σ = 1.00000 ε = 1.000000	
KOROTASYONEL MAXWELL	η_∞ = 0.00000 β = 0.000000 σ = 1.00000 λ = 0.024817 α = 1.00000 ε = 0.500000	
JOHNSON-SEGALMAN	η_∞ = 0.00000 β = 0.000000 σ = 1.00000 λ = 0.024817 α = 1.00000 ε = 0.100000	
YENİ MODEL	θ_0 = 22.5607 λ = 0.800000 θ_1 = -2.6706 d_1 = -0.08098 β = 0.10000 r = 0.716000 σ = 0.03986	

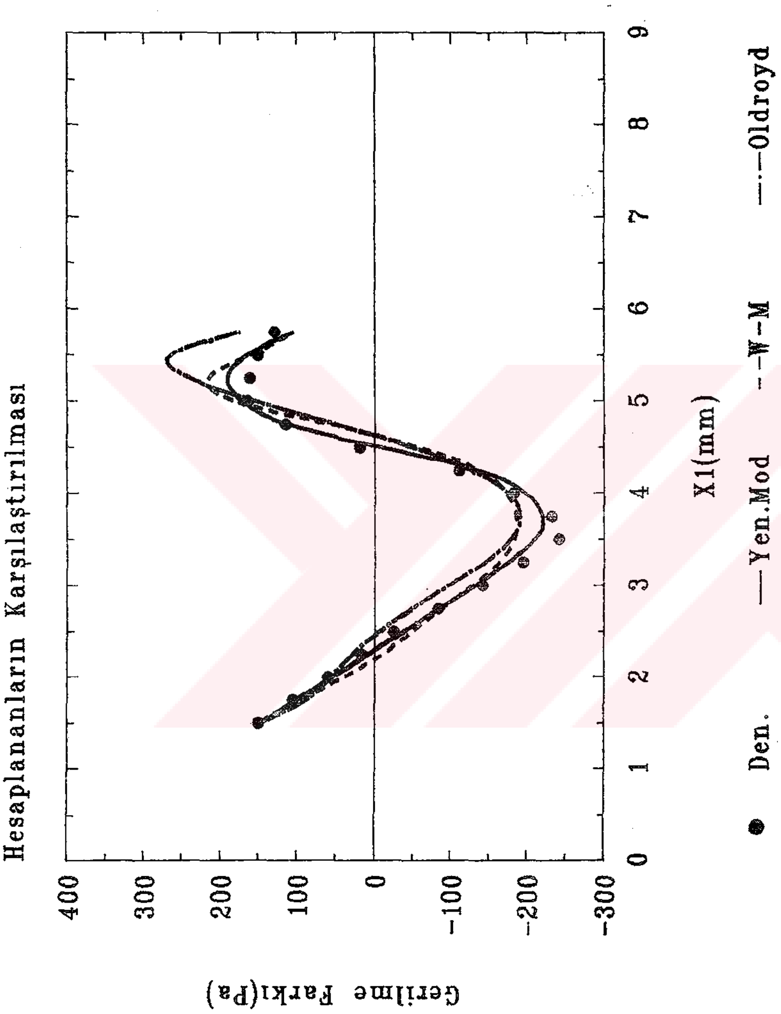
Değerlendirme için incelenmiş olan bünye denklemlerinin simetri ekseni boyunca olan akımda doğrusal olmayan regresyon yöntemi kullanılarak bulunan 1.normal gerilme farklarının, deneysel değerlere [1] göre hesaplanam ortalama hata % si , hataların karelerinin toplamı ve maksimum hata değerleri Tablo 5.17 ' de sunulmuştur.

TABLO 5.17 : Simetri Ekseni Boyunca Olan Akımda Bünye Denklemlerinin Hata Değerleri

BÜNYE DENKLEMLERİ	Ort.Hata (%)	Hat.Kar.Top. $(dyn/mm^2)^2$	Maksimum Hat. (dyn/mm^2)
Yeni model	15.16	96	4.15
White - Metzner	24.10	301	11.50
Gaidos	30.50	372	8.75
Oldroyd 3-Sabit	30.80	441	11.54
Spriggs	45.80	1974	24.40
Upper Convekt.Max.	45.80	1974	24.40
Lower " "	45.80	1974	24.40
Korotasyonel "	45.80	1974	24.40
Johnson - Segalman	45.80	1974	24.40

Tablo 5.17 ' den de görüldüğü gibi bu çalışmada önerilen yeni model, her üç hataya göre de en iyi model durumundadır. Değerlendirilen bünye denklemleri toplu olarak Şekil 5.14' de sunulmuştur(Yeni Model, White-Metzner, Oldroyd 3-Sabit).

ŞEKİL 5.14. Deneysel Gerilme Farkı ile Hesaplananların Karşılaştırılması



Bünye denklemlerin kaymalı akıma göre bulunan viskometrik fonksiyonlarının hataları Tablo 5.18 ' de toplu olarak sunulmuştur.

TABLO 5.18 : Viskometrik Fonksiyonların Hata Değerleri

BÜN.DENK.	Ort.Hata		Hata.Kare.Top.		Maks.Hata	
	η_{hata}	ψ_{hata}	η_{hata}	ψ_{hata}	η_{hata}	ψ_{hata}
	(%)	(%)	$(.1Pas)^2$	$(.1Pas^2)^2$	.1Pas	$.1Pas^2$
Y.Mod.	24.68	72.00	830	113	19.8	7.36
W-M	4.38	48.95	25	59	2.9	5.88
Old. 3-S.	6.85	56.00	77	104	8.8	6.15
Gaidos	12.73	80.00	335	163	16.9	8.50
Spriggs	10.94	63.21	94	251	11.8	6.78
Korot.Max.	11.23	62.45	93	267	12.8	6.72
John-Seg.	6.62	64.87	95	160	12.6	6.78
UCM	28.28	74.30	103	2132	44.0	6.78
LCM	28.28	74.30	103	2132	44.0	6.78

Yeni model , Gaidos modeli ve Upper ,Lower Convekted Maxwell modelinin viskometrik fonksiyonlarının kayma hızına göre değişimleri Şekil 5.15' de, Oldroyd 3 - sabit, Spriggs ve White - Metzner modellerinin viskometrik fonksiyonları Şekil 5.16' da ve Johnson - Segalman ve Korotasyonel Maxwell modellerinin viskometrik fonksiyonları Şekil 5.17' de sunulmuştur.

Tablo 5.16 ' da verilen Leider' in malzeme parametreleri kullanılarak [4] , White - Metzner ve Oldroyd 3- sabit bünye denklemlerinin simetri ekseni boyunca olan akıma göre Runge-Kutta yöntemiyle çözümleri yapılmıştır . Bu çalışmada aynı denklemler için bulunan sonuçlar , Leider' in parametreleri kullanılarak bulunan sonuçlarla Şekil 5.18 ve Şekil 5.19' da karşılaştırılmıştır.

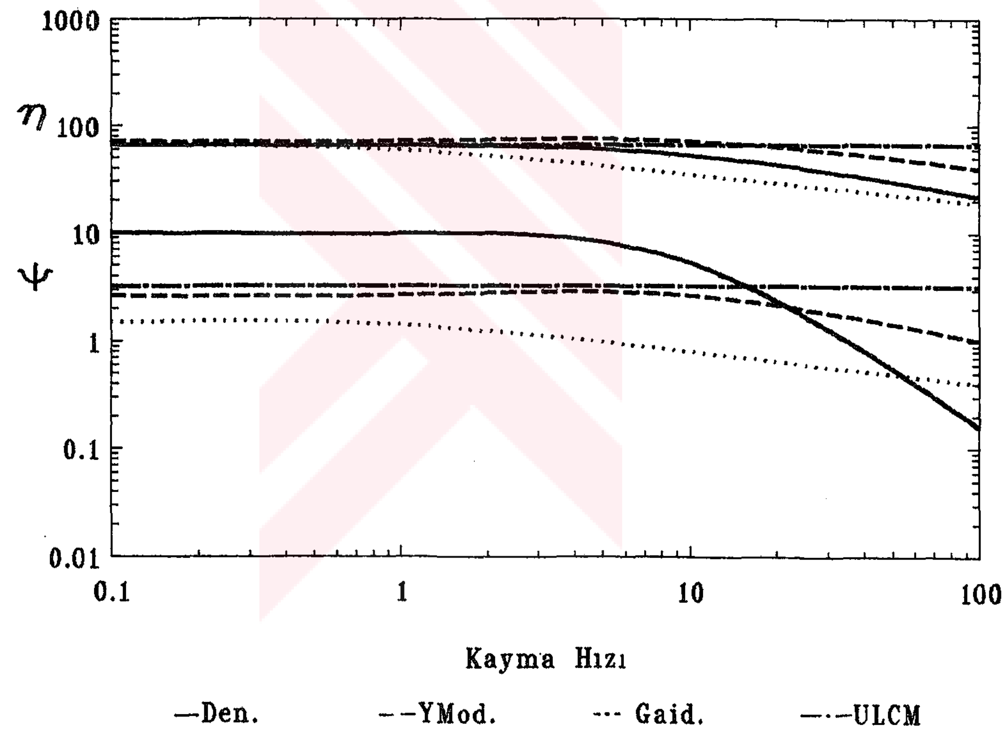
Bünye denklemlerinden deneysel sonuçlara en az hata ile yaklaşan Yeni Model , White-Metzner , Gaidos ve Oldroyd 3-sabit gibi modellerin, doğrusal olmayan regresyon yöntemi ve viskometrik fonksiyonlara eğri uydurma yöntemi uygulanarak belirlenen malzeme parametreleri kullanılarak , Runge-Kutta yöntemi ile simetri ekseni boyunca çözümleri yapılmıştır. Bulunan sonuçlar toplu olarak Şekil 5.20' de sunulmuştur.

Bünye denklemlerinin simetri ekseni boyunca Runge-Kutta yöntemi kullanılarak çözümlerinin hata değerleri Tablo 5-19 da , yeni modelin dar aralıkta regresyon ve Runge-Kutta yöntemleriyle bulunan sonuçları Şekil 5.21'de sunulmuştur.

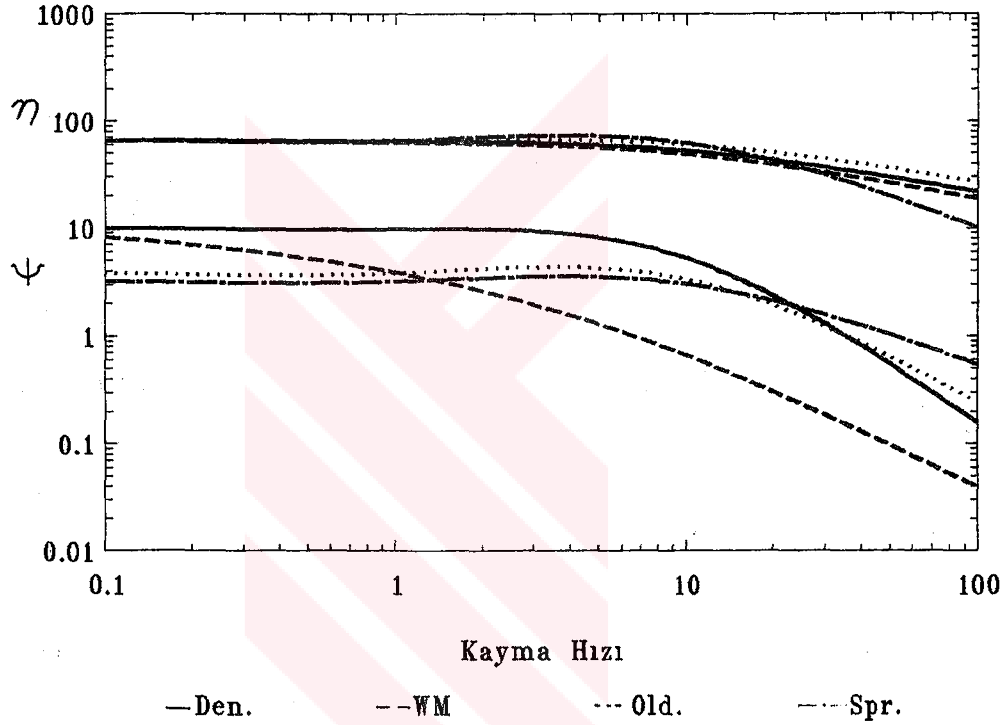
TABLO 5.19 : Bünye Denklemlerinin Runge-Kutta Yöntemine Göre Çözümlerinin Hata Değerleri

BÜNYE DENKLEMİ	Ort.Hata (%)	Hat.Kar.Top $(dyn/mm^2)^2$	Maks.Hata (dyn/mm^2)
Yeni Model	15.0	592	7.25
White-Metzner	18.0	713	12.06
Gaidos	22.3	923	8.96
Oldroyd 3-Sabit	23.5	1063	10.30

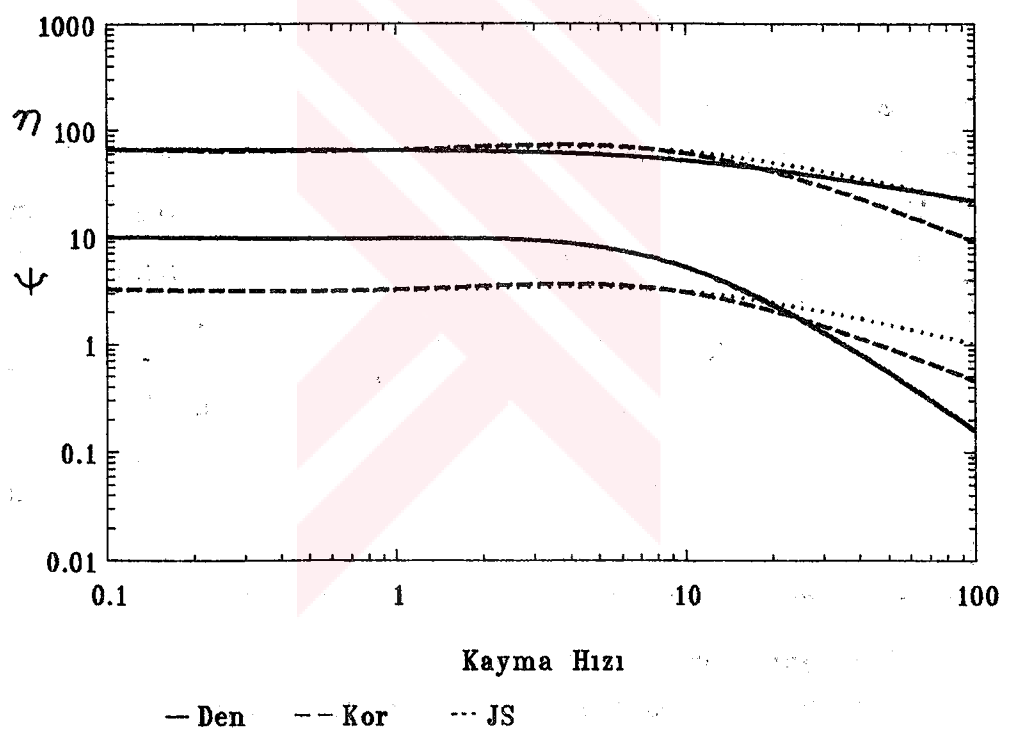
ŞEKİL 5.15. Modellerin Viskometrik Fonksiyonlarının Değişimi



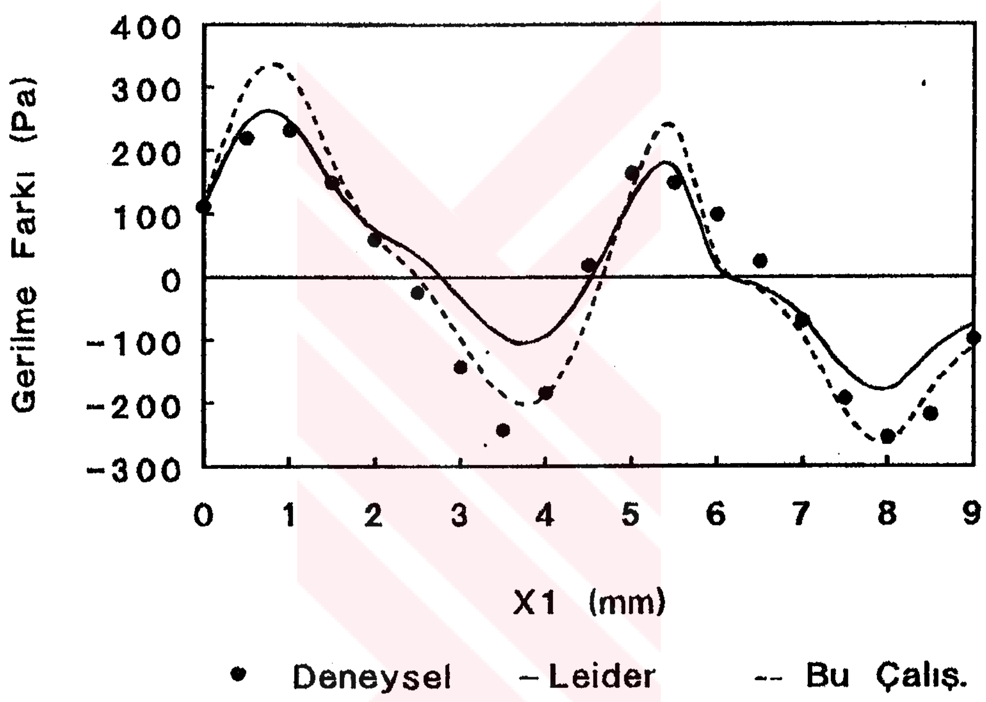
ŞEKİL 5.16. Modellerin Viskometrik Fonksiyonlarının Değişimi



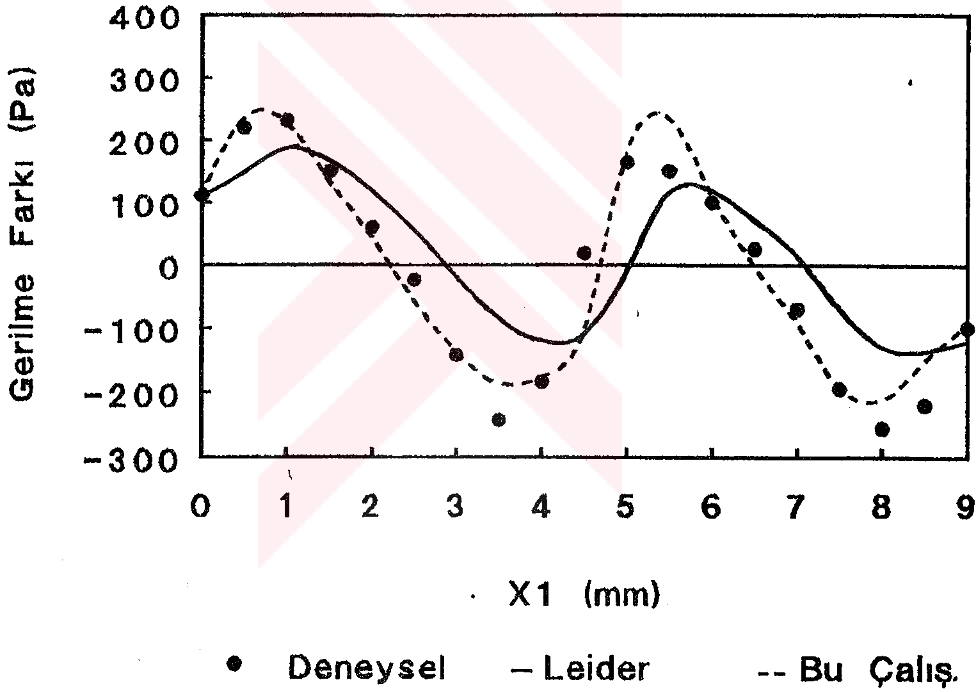
ŞEKİL 5.17. Modellerin Viskometrik Fonksiyonlarının Değişimi



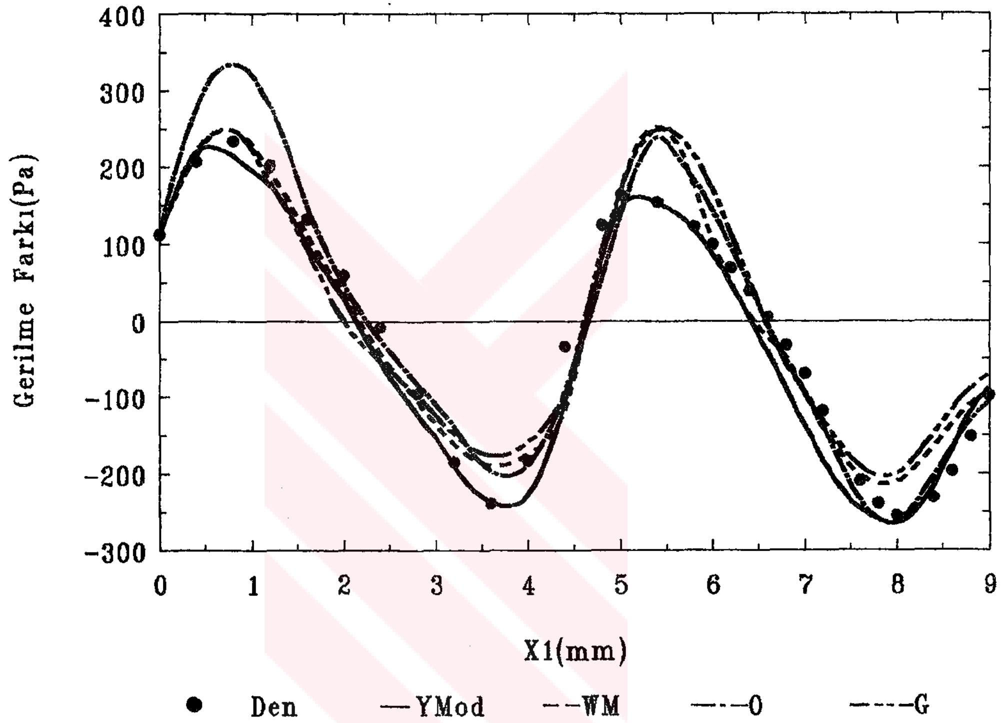
ŞEKİL 5.18. Oldroyd Modelinin Leider ve Bu Çalışma ile Karşılaştırılması



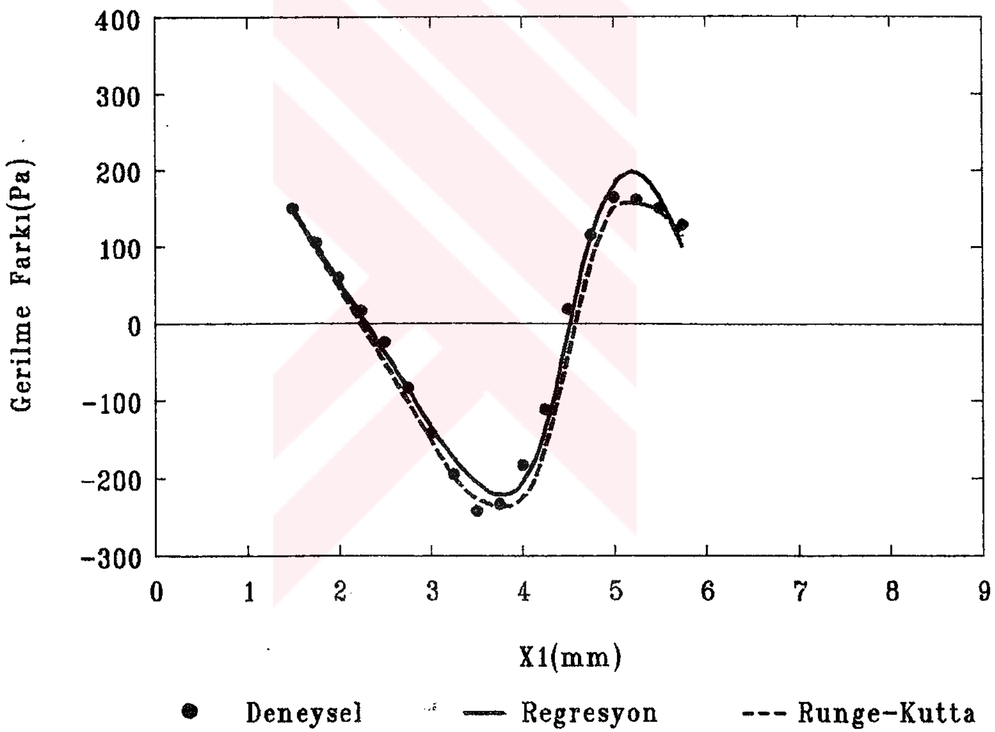
ŞEKİL 5.19. White-Metzner Modelinin Leider veBu Çalışma ile Karşılaştirilması



ŞEKİL 5.20. Bünye Denklemlerinin Tüm
Kanal Boyunca Karşılaştırılması



ŞEKİL 5.21. Yeni Modelin Regresyon ve Runge-Kutta Sonuçlarının Karşılaştırılması



BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER

Değerlendirmede esas olan akımda (simetri ekseni boyunca olan akım), doğrusal olmayan regresyonla bulunan sonuçlara göre deneysel 1. normal gerilme farkı değerlerine [1] en iyi uyan bir bünye denklemi önerilmiştir. önerilen bu modelin genel ifadesi Oldroyd 3-Sabit modelinin genel ifadesine benzemektedir.Malzeme fonksiyonları açısından da White-Metzner (gevşeme zamanı ve viskozite fonksiyonu) ve Gaidos modellerine (geciktirme zamanı) benzer.

Bünye denklemlerinin daralıp-genişleyen kesitli bir akım kanalının simetri ekseni üzerine indirgenmiş hallerinin değerlendirilmesinde başarılı ve başarısız olanları birbirinden ayıran ortak özellik araştırılmıştır . Bu amaçla bünye denklemlerinin simetri ekseni üzerinde geçerli olan indirgenmiş ifadeleri yazıldığında tümünün aşağıdaki ifadeye uydukları gözlenir:

$$\frac{\partial(\tau_{11}-\tau_{22})}{\partial X_1} + \frac{\tau_{11}-\tau_{22}}{\theta V_1} = -\frac{4\mu}{\theta V_1}\left[\frac{\partial V_1}{\partial X_1} + \lambda_2 V_1 \frac{\partial^2 V_1}{\partial X_1^2}\right]$$

Burada θ ve μ genelleştirilmiş gevşeme zamanı ve viskoziteyi ifade etmektedir. λ_2 ikinci bir zaman sabiti olup Oldroyd 3- sabit modeli dışında diğer bünye denklemleri için değeri sıfırdır. Değerlendirmede diğerlerinden daha başarılı olan mevcut bünye denklemlerinde (White-Metzner ve Gaidos) gerek μ , gerek θ , sabit olmayıp deformasyon hız tensörünün ikinci invaryantına bağlı olarak değişmektedirler.

Simetri ekseni boyunca olan akıma göre mevcut bünye denklemleri değerlendirildiğinde en başarılı denklem White-Metzner bünye denklemi olmuştur . Bu modelde malzeme parametreleri (5-3) ve (5-4) eşitliklerinde görüldüğü gibi sabit olmayıp deformasyon hız tensörünün ikinci invaryantının fonksiyonu olarak simetri ekseni boyunca değişmektedir. Yani akım kanalı boyunca akışkanın deformasyon etkisi malzeme parametrelerinde görünmektedir . Bu sebepten dolayı mevcut bünye denklemleri arasında White-Metzner bünye denklemi, akışkanın reolojik davranışına en fazla cevap veren bir denklem görünümündedir.

Gaidos bünye denklemi de mevcut denklemler arasında ikinci dereceden en iyi denklem durumundadır. Bu modelin genel denkleminin simetri eksen üzerindeki indirgenmiş hal denklemi yapı olarak White-Metzner bünye denklemine benzemektedir. Bu modelde de malzeme parametreleri sabit olmayıp, deformasyon hız tensörünün ikinci invaryantının fonksiyonu olarak akım kanalının simetri ekseni boyunca değişmektedir.

Oldroyd 3-sabit modelinde θ ve μ nün sabit olmasına karşın diğer mevcut bünye denklemlerinde var olmayan λ_2 li bir terim bulunmaktadır. Başarısız bünye denklemlerinde bu parametreler birer sabittirler . Mevcut başarılı bünye denklemleri arasında bir karşılaştırma yapıldığında değişken θ ve μ kullanılması, bunları sabit tutarak hızın ikinci türevine bağlı ek bir terim kullanılmasına tercih edilebilir.

Başarısız diğer bünye denklemlerine bakıldığında, malzeme parametreleri tüm kanal boyunca sabit düşünülmüştür. Yani akım boyunca parametrelerde deformasyon etkisi görülmemektedir.

Deneysel sonuçlara daha iyi yaklaşan bünye denklemlerinde farkedilen bir başka ayrıcalık ise malzeme davranışını açıklayacak parametre sayısının başarısız bünye denklemlerine göre daha fazla olmasıdır . örnek olarak Oldroyd 3-sabit denkleminde iki parametre bulunurken,White-Metzner eşitliğinde dört parametre bulunmaktadır.

Bu çalışmada basit kaymalı akım ve simetri ekseni boyunca olan akımlara göre yapılan değerlendirmede , sadece akımlardan biri dikkate alınarak bünye denklemlerinin nümerik çözümünden bulunan malzeme parametreleri diğer akım tipinde kullanıldığında kötü sonuç verdiği görülmüştür.

Değerlendirmede kullanılan akım tipinden basit kaymalı akımda kanal boyunca olan deformasyon etkisi görünmemekte, sadece akım kanalının herhangi bir yerinde ve tüm kanal boyunca aynı olan akıma dik yöndeki etkiler dikkate alınmaktadır . Bu akım tipinde malzeme parametreleri belirlenirken , akım kanalı boyunca deneysel ölçümlerden bulunan veriler kullanılmamaktadır (hız , simetri eksenine göre hız gradyanı vs.).Örnek olarak White-Metzner denkleminde malzeme fonksiyonları basit kaymalı akım için aşağıdaki gibi daha önceki bölümlerde tanımlanmıştı.

$$\theta = \frac{1}{\theta_0 + \theta_1(\,0.5\dot{\gamma}\,)^r} \qquad \dot{\gamma} = \partial V_1/\partial X_2$$

$$\mu = \frac{\eta_0}{1 + d_1(0.5\dot{\gamma}\,)^r}$$

Yukardaki eşitliklerden de görüldüğü gibi basit kaymalı akım için bulunan malzeme fonksiyonlarından gevşeme ve viskozite fonksiyonlarında, değişkenliği yaratan akıma dik yöndeki hız gradyanıdır. Malzeme fonksiyonlarında yer alan parametrelerin regresyon analizi ile belirlenmesinde bu hız gradyanı (kayma hızı), 0.1 ile 100 1/s arasında değerler almaktadır. Bu değişim aralığı kanal boyunca sabittir. Akışkanın kanal boyunca meydana gelebilecek değişimleri bu akım türünde dikkate alınmamaktadır. Bunun sonucu olarak da sadece basit kaymalı akım kullanılarak belirlenen parametreler simetri ekseni boyunca akıskanın davranışlarını yansıtmamış olacaklardır.

Bu çalışmada Leider'in belirlediği (basit kaymalı akım kullanılarak) parametreler kullanılarak Runge-Kutta yöntemi ile White-Metzner ve Oldroyd 3-sabit bünye denklemleri çözülmüştür . Ayrıca bu bünye denklemlerinde yer alan parametrelerin bir kısmı , basit kaymalı akımda bulunan viskometrik fonksiyonların regresyonu ile , geri kalan parametreler de simetri ekseni boyunca olan akımda simetri ekseni üzerine indirgenmiş diferansiyel denklemin doğrusal olmayan regresyon yöntemiyle çözümü esnasında belirlenmiştir. Bu hesaplamada kanalın belirli aralığında sonuçlar alınmıştır. Buradan belirlenen parametreler , kanalın tüm boyu için oluşturulan indirgenmiş diferansiyel denklemin , Runge-Kutta ile çözümünde girdi olarak kullanılmıştır. Bu iki farklı tip çalışma Şekil 5.18 ve Şekil 5.19' da sunulmuştur. Bu her iki şekil incelendiğinde , Leider'in parametreleri kullanılarak hesaplanan normal gerilme farkı değerlerinin, deneysel gerilme farkı değerlerine göre oldukça kötü bir değişim içinde olduğu görünmektedir. Bu şekiller üzerinde, bu çalışmadaki hesaplama yöntemine göre bulunan sonuçların, deneysel verilere Leider'in parametreleri kullanılarak bulunan sonuçlardan çok daha uyumlu olduğu görülmektedir. Bu durum önceki paragraftaki tartışmayı doğrulamaktadır.

Simetri ekseni boyunca olan akımda White-Metzner bünye denklemi için malzeme fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

$$\theta = \frac{1}{\theta_0 + \theta_1 \left| \partial V_1 / \partial X_1 \right|^r}$$

$$\mu = \frac{\eta_0}{1 + d_1 \left| \partial V_1 / \partial X_1 \right|^r}$$

Bu fonksiyonlarda simetri ekseni boyunca olan hız gradyanı değerleri , simetri ekseni boyunca değişmektedir.Bu sebepten kanalın simetri ekseni boyunca akışkanın deformasyon etkisi, malzeme fonksiyonlarında yer almaktadır. Dolayısıyla bu akım türüne göre malzeme parametreleri belirlenirken, akım boyunca akışkanın deformasyon etkileri dikkate alınmaktadır.

Yukardaki paragraflarda açıklananların ışığı altında , basit kaymalı akımdan belirlenen malzeme parametreleri ile simetri ekseni boyunca olan akımdan belirlenen malzeme parametreleri birbirlerinden farklı olmaktadır.Belirlendikleri akımlarda iyi sonuç veren bu parametreler, diğer akım türünde iyi sonuç vermemektedir. Yani iki akım tipini de başarılı kılacak malzeme parametrelerinin belirlenmesinin oldukça güç olduğu söylenebilir.

Yapılan bu çalışmada parametreler belirlenirken , daha hassas hesaplamalar yaptığı için ağırlık doğrusal olmayan regresyon yöntemine kaydığından , simetri ekseni boyunca olan akım değerlendirmelerde esas alınmıştır.Gerçi bu çalışmada, doğrusal olmayan regresyon yöntemiyle hesaplamakta zorluk çekilen parametreler, basit kaymalı akım dikkate alınarak belirlenmiştir . Fakat basit kaymalı akımdan belirlenen parametre sayısı arttıkça, simetri ekseni boyunca olan akımdan bulunan sonuçların kötüleştiği görülmüştür. Ayrıca bu söylenen sonucun tersi de geçerlidir. Yani simetri ekseni boyunca iyi olan bir bünye denkleminin parametreleri,basit kaymalı akımdan bulunan viskometrik fonksiyonların değişimini bozmaktadır.

Bünye denklemleri , önce kanalın belirli aralığinda doğrusal olmayan regresyon yöntemi kullanılarak çözülmüşlerdir Deneysel gerilme farkı değerlerine göre hesaplanan üç hata değeri dikkate alınarak bir sıralama yapılmıştır. Bu hata değerleri Tablo 5.17'de sunulmuştur. Bu tablodan da görüldüğü gibi önerilen modelin hataları , diğer bünye denklemlerinin hatalarından oldukça düşüktür.

Dar aralıkta belirlenen parametreler kullanılarak , bünye denklemleri kanalın bütün uzunluğu için Runge-Kutta ile çözülmüşlerdir . Buradan bulunan sonuçların deneysel gerilme farklarına göre belirlenen hata değerleri de Tablo 5.19' da sunulmuş olup, yine önerilen modelin bu geniş aralık için de en az hatalı bünye denklemı olduğu görünmektedir. Sıralamada az hatalı bulunan bünye denklemlerinden dördü Şekil 5.20' de gösterilmiştir. Bu grafikten de görüldüğü gibi mevcut bünye denklemleri genel olarak deneysel gerilme farkı değerlerinin maksimum ve minimum değerlerinden sapmalar göstermektedir. örneğin; mevcut bünye denklemleri arasında en iyi durunda olan White-Metzner denkleminin ilk maksimun değerlerinde deneysel gerilme farkı ile uyumlu olmasına karşın daha sonraki minumum ve maksimun bölgelerinde saptığı gözlenmektedir . Oldroyd 3-sabit bünye denkleminin sonuçları ise , sadece son minumum bölgede iyi , diğer ekstremum bölgelerinde kötü bir yaklaşım sergilemektedir. Genel ifadesi olarak Oldroyd 3-sabite ,malzeme fonksiyonları bakımından da White-Metzner ve Gaidos denklemlerine benzeyen yeni modelin davranışı ise, genelde bütün maksimum ve minumum bögelerde deneysel gerilme farkı değerleri ile büyük bir uyum içersindedir.

Basit kaymalı akımdaki akım şartları kullanılarak bulunan viskometrik fonksiyonlar , belli bir kayma hızından sonra azalma göstermektedirler. Yani düşük kayma hızlarında akışkan Newtonian , yüksek kayma hızlarında da Newtonian olmayan özellik taşımaktadır. Yeni modelde bu fiziki yapının oluşması için kayma hızının 10 1/s değerine kadar , viskometrik fonksiyonlarda r ve β gibi üst parametreler sıfır alınmak süretiyle tüm aralık için 2 tipte fonksiyon kabul edilmiştir.

Basit kaymalı akımdan belirlenen viskometrik fonksiyonlar için bünye denklemleri karşılaştırıldığında , hem viskozite fonksiyonu ve hem de 1. normal gerilme farkı fonksiyonuna göre en iyi denklem White-Metzner denklemidir. Tüm modellerin viskometrik fonksiyonlarının hata değerleri Tablo 5.18' de toplu olarak sunulmuştur.

Bu çalışmada çeşitli denemeler sonucunda önerilen yeni model, mevcut bünye denklemlerinden en iyi davranışı gösteren White - Metzner , Gaidos ve Oldroyd 3 - sabit modellerinin özelliklerini taşıyan karma bir modeldir. Bu modelde mevcut bünye denklemlerinin birinde olup diğerinde bulunmayan özellikler biraraya getirilmiştir.örneğin: White - Metzner ve Gaidos modellerinde var olmayan, sadece Oldroyd modelinde var olan hızın 2. türevinin etkisi yeni modele dahil edilmiştir.Ancak Oldroyd modelinden farklı olarak sabit değil, deformasyona bağlı olarak değişen bir zaman fonksiyonu kullanılmıştır.Yeni modelin simetri ekseni boyunca olan akım için gerek dar aralıkta lineer olmayan regresyon yöntemiyle ve gerek simetri ekseni boyunca Runge - Kutta yöntemiyle bulunan sonuçların hataları diğer tüm modellere göre en az durumdadır.

Her iki akım tipi için de en iyi sonuç verecek bir bünye denkleminin bulunması , akım kanalının tamamı için çözümlerin yapılması, yeni modelin viskometrik fonksiyonlarında yer alan r ve β gibi üst parametrelerin değişiminin simetri ekseni boyunca olan akımda etkisinin araştırılması daha ilerde yapılabilecek çalışmalar olarak önerilebilir.

KAYNAKLAR

[1]. Arıkol , M. , " Accelerated Non-Newtonian Flow ", Ph.D.Dissertation , University of Virginia (1976).

[2]. Bird, R.B., W.E. Stewart and E.N. Lightfoot, " Trasport Phenomena ", John Wiley and Sons, New York (1960).

[3]. Fredrickson, A.G., " Principles and Application of Rheology ", Prentice-Hall Inc., Englewood-Cliffs, New Jersey (1964).

[4]. Leider, P.J., L.U. Lilleieht, " Viscoelastic Behavior in Stagnation Flow ", Trans. Soc. Rheol., 173, 501-524 (1973).

[5]. Oldroyd, J.G.," On the Formulation of Rheological Equations of State ", Proc. Roy. Soc. London, A200, 523 (1950).

[6]. Spriggs, T.W., Chem. Eng. Sci., 20, 931 (1965).

[7]. Marchal, J.M., and M.J. Crochet, " A New Mixed Finite Element For Method for Calculating Viscoelastic Flow ", J. Non-Newtonian Fluid Mech., 26, 77-114 (1987).

[8]. S.Ridhar, T. and R.K. Gupta, " Fibre Spinning of a Weakly Elastic Liquid ", J. Non-newtonian Fluid Mech., 27, 349-362 (1988).

[9]. Gaidos, E.R. and R. Darby, " Numerical Simulation and Change in Type in the Developing Flow of a Nonlinear Viscoelastic Fluid ", J. Non-Newtonian Fluid Mech., 29, 59-79 (1988).

[10]. Apelian, M.R., R.C. Armstrong and R.A. Brown, " Impact of the Constitutive Equation and Singularity on the Calculation of Stick-Slip Flow ", J. Non-Newtonian Fluid Mech., 27, 299-321 (1988).

[11]. Phan-Thein, N., Y.T. Chew, " On the Rayleigh Problem for a Viscoelastic Fluid ", J. Non-Newtonian Fluid Mech., 28, 117-127 (1988).

[12]. Larson, R.G., " Analytical Results for Viscoelastic Flow in a Porous Tube ", J. Non-Newtonian Fluid Mech., 28, 349-371 (1988).

[13]. Lodge, A.S., " Elastic Liquids ", Academic Press, New York (1964).

[14]. Bernstein, B., E.A. Kearsley and L.J. Zapas, " A Study of Stress Relaxation with Finite Strain ", Trans. Soc. Rheo. 7, 391 (1963).

[15]. Bernstein, B., E.A. Kearsley and L.J. Zapas, " Elastic Stress-Strain Relations in Perfect Elastic Fluids ", Trans. Soc. Rheo., 9, 27 (1965).

[16]. Bogue, D.C., " An Explicit Constitutive Equation Based on an Integrated Strain History ", I. and E.C. Fund., 5, 243 (1966).

[17]. Emery, A.H. and M.L. White, " A Single-Integral Constitutive Equation ", Trans. Soc. Rheo. 12, 103, (1968).

[18]. Darby, R., " Viscoelastic Fluids ", Chemical Processing and Eng. Vol. 9, New York (1976).

[19]. Bird, R.B., R.C. Armstrong and O. Hassager, " Dynamics of Polymeric Fluids ", Vol.1, Fluid Mechanics, Wiley, New York (1977).

[20]. Tanner R.I., " Engineering Rheology ", Oxford University Press, Oxford (1985).

[21]. Joseph, D.D., " Instability of the Rest State of Fluids of Arbitrary Grade Greater Than One ", Arch. Ration Mech. Anal., 75, 251-268 (1981).

[22]. Tanner, R.I., J.M. Simmons, " An Instability in Some Rate-Type Viscoelastic Constitutive Equations ", Chem. Eng. Sci., 22, 1079-1082 (1967).

[23]. Crochet, M.J., A.R. Davies and K. Walters, " Numerical Simulation of Non-Newtonian Fluid Flow ", Elsevier, Amsterdam (1984).

[24]. Middleman, S., " The Flow of High Polymers ", John Wiley and Sons, New York (1968).

[25]. Schlithing, H., " Boundary Layer Theory ", 6th Ed., McGraw-Hill, New York (1963).

[26]. White, J.L. and A.B. Metzner, " Development of Constitutive Equations for Polymeric Melts and Solutions ", J. Appl. Polymer Sci., 7, 1867 (1963).

[27]. Metzner, A.B., E.A. Uebler and C.F. Chan Man Fong , " Converging Flows of Viscoelastic Materials ", A.I.Ch.E.J., 15, 750 (1969).

[28]. White, J.L. and A.B. Metzner, " Constitutive Equations for Viscoelastic Fluids with Application to Rapid External Flows ", A.I.Ch.E.J., 11, 324 (1965).

[29]. Leider, P.J., " The Behavior of Viscoelastic Fluids in Stagnation Flow ", Ph.D. Dissertation, University of Virjinia (1972).

[30]. Williams, M.C. and R.B. Bird, " Three-Constant Oldroyd Model for Viscoelastic Fluids ", Phys. Fluids, 5, 1126 (1962).

[31]. Arıkol, M., " Kinematics and Normal Stress Differences of a Viscoelastic Fluid Undergoing Wiggle Flow", J. of Non-Newtonian Fluid Mech., 19, 209-227 (1985).

[32]. Bogue, D.C. and J. D. Doughty, " Comparison of Constitutive Equations for Viscoelastic Fluids ", I. and E.C. Fund., 5, 243 (1966).

[33]. Bernstein, B., E.A. Kearsley and L.J. Zapas, " Thermodynamics of Perfect Elastic Fluids ", J. Res. Natl. Bur. Stds., 68b,103 (1964).

[34]. Zapas, L.J., " Viscoelastic Behavior under Large Deformations ", J. Res. Natl. Bur. Stds., 70A, 525 (1960).

[35]. Adams, E.B. and D.C. Bogue, " Viscoelasticity in Shearing and Accelerative Flows: A Simplified Integral Theory ", A.I.Ch.E.J., 16, 53 (1970).

[36]. Daughty, J.O. and D.C. Bogue, "Experimental Evaluation of Viscoelastic Theories ", I. and E.C. Fud., 6, 388 (1967).

[37]. Spriggs, T.W., J.D. Huppler and R.B. Bird, " An Experimental Appraisal of Viscoelastic Model", Trans. Soc. Rheo., 10, 191 (1966).

[38]. Adams, E.B., " A Simplified Constitutive Equation for Two-Dimensional Viscoelastic Flow", Ph.D. Dissertation, Univ. of Tenn. (1967).

[39]. Giesekus, H., " A Simple Constitutive Equation for Polymer Fluids Based on the Concept of Deformation - Dependent Tensorial Mobility ", J. Non-Newtonian Fluid Mech., 11, 69-109 (1982).

[40]. Kestin, J., " A Course in Thermodynamics ", Vol. 2, p. 456 (1979).

[41]. Bird, R.B., " Macromolecular Hydrodynamics ", Rheology Research Center, Report No. 14, p. 96, Univ. of Wisconsin, U.S.A.

[42]. Jeffreys, H., The Earth, 2nd. ed., Cambridge University Press, London, p. 265 (1929).

[43]. Williams, M.C. and R.B. Bird, " Phys. Fluids ", 5, 1867 (1963).

[44]. Metzner, A.B. and G. Astarita, " External Flows of Viscoelastic Material: Fluid Property Restrictions on the use of Velocity - Sensitive Probes ", A. I. Ch. E. J., 13, 550 (1967).

[45]. Thien, N.P. and R.I. Tanner, " A New Constitutive Equation Derived from Network Theory ", J. Non-Newtonian Fluid Mech., 2, 353-365 (1977).

[46]. Anturkor, R.N. and C. Albert, " Drow Resononce in Film Costing of Viscoelastic Fluids ", J. Non-Newtonian Fluid Mech., 28,287-307 (1988).

[47]. Debbaut, B., J.M. Marchal and M.J. Crochet, " Nümerical Simulation of Highly Viscoelastic Flows Through an Abrupt Contraction ", J. Non-Newtonian Fluid Mech., 29, 119-146 (1988).

[48]. Hasegawa, T., K. Fukutomi and T. Narumi, " Experimental Estimation of Elongational Stresses of Dilute Polymer Solutions and a Related Examination of Some Constitutive Equations ", J. Non-Newtonian Fluid Mech., 27, 133-151 (1988).

[49]. Zanden, J. and M. Hulsen, " Mathematical and Physical Requirement for Successful Compytatiöns with Viscoelastic Fluid Models ", J. Non-newtonian Fluid Mech., 29, 93-117 (1988).

[50]. Oldroyd, J.G.,Proc. Roy. Soc.,London, A245, 278(1958).

[51]. Bird, R.B., W.E. Stewart, E.N. Lightfoot and T.W. Chapman , " Lectures in Transport Phenomena ", Chap. 1, A. I. Ch. E. Continuing Educ. Ser., 4 (1966).

[52]. Bird, R.B., P.J. Carreau, Chem. Eng. Sci., 23, 427 (1968).

[53]. Carreau,P.J., I.F. Mac Donald and R.B. Bird, Chem. Eng. Sci., 23, 901 (1968).

[54]. Papanastasiou, A.C., L.E. Scriven and C.W. Mocosko, " An Integral Constitutive Equation for Mixed Flows: Viscoelastic Characterization ", J. Rheol., 27, 4, 387-410 (1983).

[55]. Lodge, A.S., Trans. Faraday Soc., 52, 120 (1956).

[56]. Wagner, M.H., Rheol. Acta, 15,133 (1976).

[57]. Wagner,M.H. and J. Meissner, Makromol. Chem., 181, 1533 (1980).

[58]. Doi, M. and S.F. Edwards, J. Chem. Soc. Faraday Trans. , 74, 1789, 1802,1818 (1978).

[59]. Doi, M. and S.F. Edwards, J. Chem. Soc. Faraday Trans. , 75,38 (1979).

[60]. Curtiss, C.F. and R.B. Bird, J. Chem. Phys., 74, 2016, 2026 (1981).

[61]. Bernstein, B.A., E.A. Kearsley and L.J. Zapas, Trans. Soc. Rheol., 7, 391 (1963).

[62]. Kaye, A., College of Aeronautics, Cranfield, Note No. 134 (1962).

[63]. Raible, T., S.E. Stephenson, J. Meissner and M.H. Wagner, J. Non-Newtonian Fluid Mech., 11, 239 (1982).

[64]. Ferry,J.D., " Viscoelastic Properties of Polymers ", 3. ed. , Wiley, New York (1980).

[65]. Berker, A., " Kinematics of Plane Stagnation Flow ", Ph. D. Dissertation, University of Virginia (1975).

[66]. Adams, E.B., J.C. Whitehead and D.C. Bogue, "Stresses in a Viscoelastic Fluid in Converging and Diverging Flow ", A. I. Ch. E. J., 11, 1026 (1965).

[67]. Boles, R.L., H.L. Davis and D.C. Bogue, " Entrance Flows of Polymeric Materials: Pressure Drop and Flow Patterns ", Poly. Engr. Sci., 10, 1, 24 (1970).

[68]. Peterlin, A., " Rheology ", Vol. 1, Chapter 15. ed. Eirch, New York (1956).

[69]. Aris, R., " Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics ", Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1962).

[70]. Ginn, R.F. and A.B. Metzner, " Normal Stresses in Polymeric Solutions ", Proc. 4th. Inter. Congr. Rheol. Part 3, 583 (1965).

[71]. Nicodemo, L., L. Nicolais and R.F. Landel, " Shear Rate Dependent Viscosity of Suspensions in Newtonian and Non-Newtonian Liquids ", Chem. Eng. Sci., 29, 729 (1974).

[72]. Caswell, B., " The Effect of Finite Bounderies on the Motion of Particles in Non-Newtonian Fluids ", Chem. Eng. Sci., 25, 1167 (1970).

[73]. Constantinides, A., " Applied Numerical Methods with Personal Computers ", Mc Graw-Hill, U.S.A. (1987).

[74]. Metzner, A.B., J.L. White and M.M. Denn, " Behavior of Viscoelastic Materials in Short-Time Processes ", Chem. Eng. Progr., 62, 12, 81 (1966).

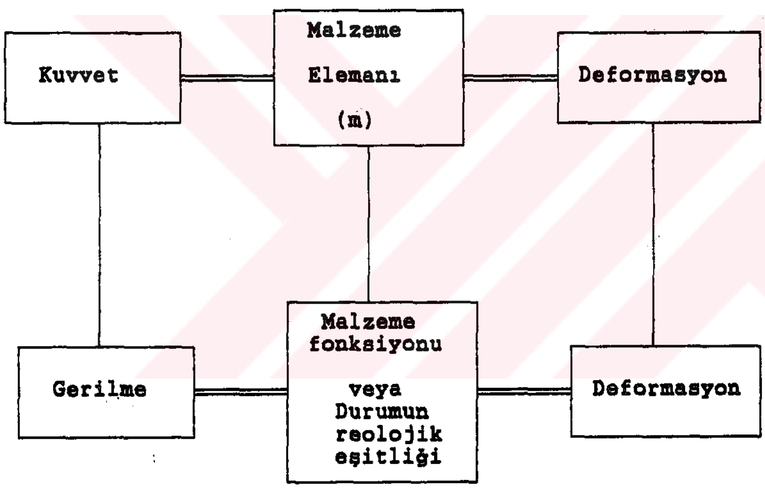
[75]. Marquardt, D.W., " An Algorithm for Least Squares Estimation of Nonlinear Parameters ", J. Soc. Ind. Math., Vol. 11, p. 431 (1963).

E K L E R

EK A

KUVVET, DEFORMASYON, VE MALZEME ÖZELLİKLERİ ARASINDAKİ FİZİKSEL VE MATEMATİKSEL İLİŞKİ

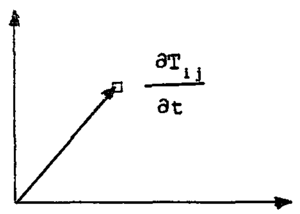
A. KUVVET, DEFORMASYON VE MALZEME ÖZELLİKLERİ ARASINDAKİ FİZİKSEL VE MATEMATİKSEL İLİŞKİ



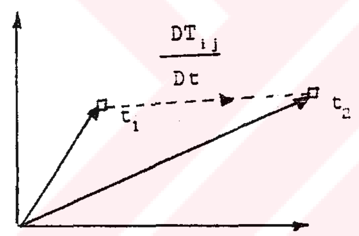
EK B

VİSKOELASTİK AKIŞKANLARIN DEFORMASYON DURUMLARINA GÖRE TÜREV OPERATÖRLERİ

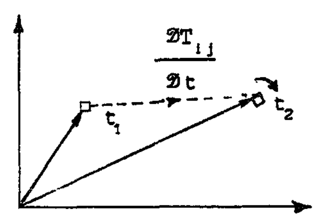
B. VİSKOELASTİK AKIŞKANLARIN DEFORMASYON DURUMLARINA GÖRE TÜREV OPERATÖRLERİ



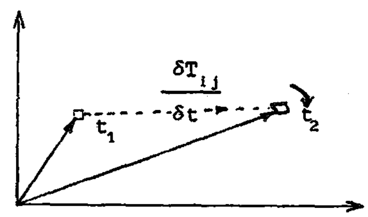
Kısmi türev: Sabit bir noktada zamana bağlı değişim.



Malzeme türevi: Malzeme ötelenmesinin zamana bağlı değişimi.



Jaumann türevi: Malzemenin dönmesi ve ötelenmesinin zamana bağlı değişimi.



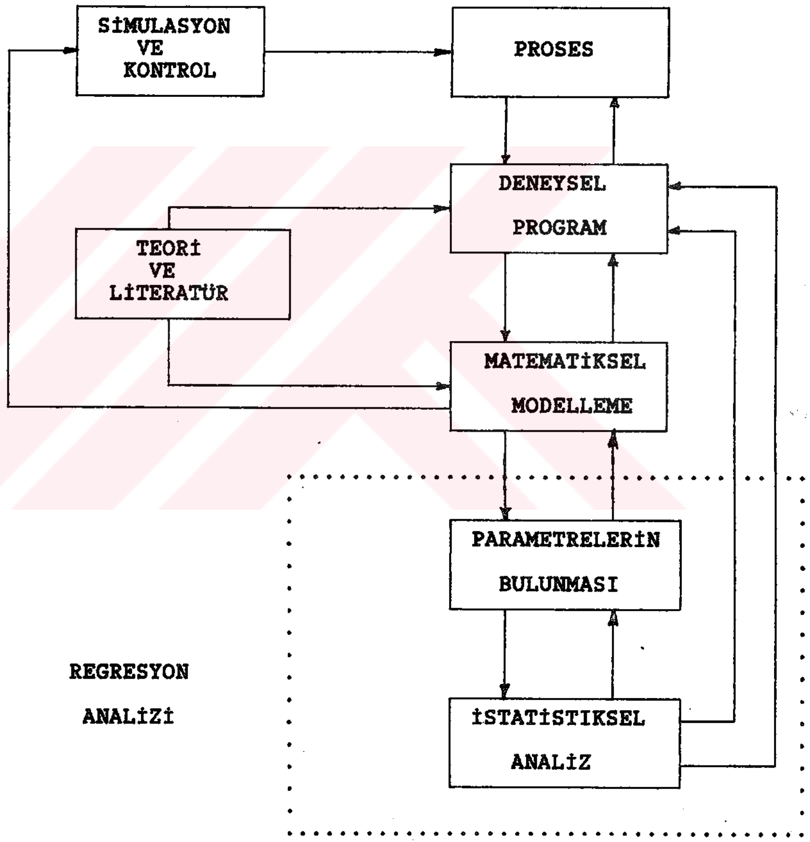
Konvekted türev: Malzemenin deformasyonu, dönmesi ve ötelenmesinin zamana bağlı değişimi.

EK C

DOĞRUSAL OLMAYAN REGRESYON YÖNTEMİ

C. DOĞRUSAL OLMAYAN REGRESYON YÖNTEMİ

C.1. REGRESYON ANALİZİ AKIŞ DİYAGRAMI



Şekil C.1 :Matematiksel Modelleme ve Regresyon Analizi

C.2. Doğrusal olmayan regresyon yöntemi:

Kullanılan regresyon Marquart tarafından geliştırilmiştir [73]. Bu yöntem istenirse cebirsel denklemlerden istenirse de adi diferansiyel denklemlerden oluşan modellere uyarlanabilir.

örneğin

$$\frac{dY_1}{dt} = b_1 Y_1 \left[1 - \frac{Y_1}{b_2} \right] \qquad (C\text{-}1)$$

$$\frac{dY_2}{dt} = b_3 Y_1 - b_4 Y_2 \qquad (C\text{-}2)$$

gibi adi diferansiyel denklemlerden oluşan modelde Y1 ve Y2 nin zamanla değişimini gösteren değerler mevcut ise b1, b2, b3 ve b4 parametrelerinin uygun değerleri regresyonla belirlenebilmektedir.

Bu amaçla model denklemlerine aşağıdaki parametrelere göre kısmi türev denklemlerinin de eklenmesi gerekir.

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial Y_1}{\partial b_1}\right] = \left[b_1 - 2\,\frac{b_1}{b_2}\,Y_1\right] \cdot \left[\frac{\partial Y_1}{\partial b_1}\right] + Y_1 - \frac{Y_1^2}{b_2} \qquad (C\text{-}3)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial Y_1}{\partial b_2}\right] = \left[b_1 - 2\,\frac{b_1}{b_2}\,Y_1\right] \cdot \left[\frac{\partial Y_1}{\partial b_2}\right] + b_1\left[\frac{Y_1}{b_2}\right]^2 \qquad (C\text{-}4)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial Y_1}{\partial b_3}\right] = \left[b_1 - 2\,\frac{b_1}{b_2}\,Y_1\right]\cdot\left[\frac{\partial Y_1}{\partial b_3}\right] \qquad (C\text{-}5)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial Y_1}{\partial b_4}\right] = \left[b_1 - 2\,\frac{b_1}{b_2}\,Y_1\right]\cdot\left[\frac{\partial Y_1}{\partial b_4}\right] \qquad (C\text{-}6)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial Y_2}{\partial b_1}\right] = b_3\left[\frac{\partial Y_1}{\partial b_1}\right] - b_4\left[\frac{\partial Y_2}{\partial b_1}\right] \qquad (C\text{-}7)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial Y_2}{\partial b_2}\right] = b_3\left[\frac{\partial Y_1}{\partial b_2}\right] - b_4\left[\frac{\partial Y_2}{\partial b_2}\right] \qquad (C\text{-}8)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial Y_2}{\partial b_3}\right] = b_3\left[\frac{\partial Y_1}{\partial b_3}\right] - b_4\left[\frac{\partial Y_2}{\partial b_3}\right] + Y_1 \qquad (C\text{-}9)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial Y_2}{\partial b_4}\right] = b_3\left[\frac{\partial Y_1}{\partial b_4}\right] - b_4\left[\frac{\partial Y_2}{\partial b_4}\right] - Y_2 \qquad (C\text{-}10)$$

TABLO C.1: Değişkenlerin Gösterimleri ve Girdi Değerleri

Bağımlı değişken	Program değişkeni	Girdi değeri
	Y(1)	0.29
	Y(2)	0.00
Parametrelere göre kısmi türevler		
$\frac{\partial Y_1}{\partial b_1}$	Y(3)	0.00
$\frac{\partial Y_1}{\partial b_2}$	Y(4)	0.00
$\frac{\partial Y_1}{\partial b_3}$	Y(5)	0.00
$\frac{\partial Y_1}{\partial b_4}$	Y(6)	0.00
$\frac{\partial Y_2}{\partial b_1}$	Y(7)	0.00
$\frac{\partial Y_2}{\partial b_2}$	Y(8)	0.00
$\frac{\partial Y_2}{\partial b_3}$	Y(9)	0.00
$\frac{\partial Y_2}{\partial b_4}$	Y(10)	0.00

C.3. White - Metzner Bünye Denkleminin Model Eşitlikleri:

$$G(1) = -\frac{13 + B(1)\ ABS(Y(3))^{0.8}}{Y(2)}\left[Y(1) - \frac{2.64\ Y(3)}{1 + B(2)\ ABS(Y(3))^{0.8}}\right]$$

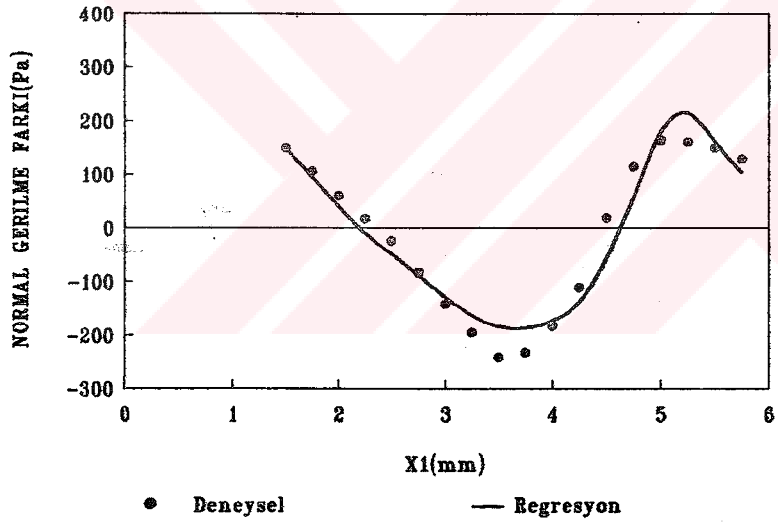
$$\begin{aligned} G(2) = {} & 1429.057 - 792.8668\ X + 190.7627\ X^{2.000931} - 6.287\ X^{4.707436} \\ & + 3.0725\ X^{5.119542} - 0.0578\ X^{6.191055} + 125.0016\ X^{-1.66} \\ & - 345.124\ EXP(X^{-1})\ X^{EXP(X^{-1})}\ (X - LOG(X))/X^{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(3) = {} & -(-\ 792.8668 + 381.7031\ X^{1.000931} - 25.5972\ X^{3.707436} \\ & + 15.73\ X^{4.119542} - 0.3578\ X^{5.19055} - 206.2527\ X^{-2.66} \\ & - 345.124\ EXP(X^{-1})\ X^{EXP(X^{-1})}\ ((X-LOG(X))\ ((X-LOG(X)) \\ & EXP(X^{-1}) - 2\ X - 1) + X^{2} - X\ )/X^{4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(4) = {} & -\ (ABS(Y(3))^{0.8}/Y(2))(Y(1) - 2.64\ Y(3)/[1+B(2)\ ABS(Y(3))^{0.8}]) \\ & - (Y(4)/Y(2))(13.2 + B(1)\ ABS(Y(3))^{0.8}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(5) = {} & -\ ((13.2+B(1)\ ABS(Y(3))^{0.8})/Y(2))(Y(5)+2.64\ Y(3)\ ABS(Y(3))^{0.8} \\ & /(1+B(2)\ ABS(Y(3))^{0.8})^{2}) \end{aligned}$$

ŞEKIL C.1: White - Metzner Eşitliğinin Regresyon Yöntemiyle Çözümünün Grafiği



EK D

BAZI BÜYÜKLÜKLERİN SPESİFİK BİLEŞENLERİ

D. BAZI BÜYÜKLÜKLERİN SPESİFİK BİLEŞENLERİ

Aşağıdaki büyüklüklerin tüm bileşenleri karteziyen koordin eksen takımına göre tablolar halinde sunulmuştur.

1. Kovaryant hızın kovaryant türevi:

$$V_{i,j} = \frac{\partial V_i}{\partial z^j} - \begin{Bmatrix} m \\ i \quad j \end{Bmatrix} V_m$$

Karteziyen koordinatlarda tüm $\begin{Bmatrix} m \\ i \quad j \end{Bmatrix} = 0$ dır.

2. Kovaryant deformasyon hız tensörü:

$$A_{ij} = V_{i,j} + V_{j,i}$$

3. Girdap tensörü:

$$\Omega_{ij} = V_{j,i} - V_{i,j}$$

4. Bir hız vektörünün malzeme türevi:

$$\frac{D V^i}{D t} = \frac{\partial V^i}{\partial t} + V^k V^i_{,k}$$

5. 2.Mertebeden bir tensörün kovaryant türevi:

$$T_{ij,k} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial z^k} - \left\{ {m \atop i\ \ k} \right\} . T_{mj} - \left\{ {m \atop j\ \ k} \right\} . T_{im}$$

$\left\{ {i \atop k\ \ j} \right\}$ Christoffel sembolüdür.

$$\left\{ {i \atop k\ \ j} \right\} = \frac{1}{2} g^{im} \left[\frac{\partial g_{km}}{\partial z^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial z^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial z^m} \right]$$

g_{ij} birim tensordur.

6. 2.Mertebeden bir tensörün malzeme türevi:

$$\frac{DT_{ij}}{Dt} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial t} + V^k T_{ij,k}$$

7. 2.Mertebeden bir tensörün Joumann türevi:

$$\frac{\mathscr{D} T_{ij}}{\mathscr{D} t} = \frac{DT_{ij}}{Dt} + \frac{1}{2} \left(\Omega_i{}^k \, T_{kj} - T_{ik} \, \Omega^k{}_j \right)$$

TABLO D.1: Bir Hız Vektörünün Kovaryant Türevi

$$V_{i,j} = \frac{\partial V_i}{\partial z^j} - \left\{ {m \atop i \;\; j} \right\} . V_m$$

Karteziyen koordinatlarda $X_1 = z^1,\ X_2 = z^2,\ X_3 = z^3$

$$V_{i,j} = \begin{vmatrix} \partial V_1/\partial X_1 & \partial V_1/\partial X_2 & \partial V_1/\partial X_3 \\ \partial V_2/\partial X_1 & \partial V_2/\partial X_2 & \partial V_2/\partial X_3 \\ \partial V_3/\partial X_1 & \partial V_3/\partial X_2 & \partial V_3/\partial X_3 \end{vmatrix}$$

TABLO D.2: Deformasyon Hız Tensörü

$$\Delta_{ij} = V_{i,j} + V_{j,i}$$

Karteziyen koordinatlarda: $X_1 = z^1,\ X_2 = z^2,\ X_3 = z^3$

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} 2\partial V_1/\partial X_1 & \left(\partial V_1/\partial X_2 + \partial V_2/\partial X_1\right) & \left(\partial V_1/\partial X_3 + \partial V_3/\partial X_1\right) \\ \left(\partial V_2/\partial X_1 + \partial V_1/\partial X_2\right) & 2\partial V_2/\partial X_2 & \left(\partial V_2/\partial X_3 + \partial V_3/\partial X_2\right) \\ \left(\partial V_3/\partial X_1 + \partial V_1/\partial X_3\right) & \left(\partial V_3/\partial X_2 + \partial V_2/\partial X_3\right) & 2\,\partial V_3/\partial X_3 \end{vmatrix}$$

TABLO D.3: Girdap Tensörü

$$\Omega_{ij} = V_{j,i} - V_{i,j}$$

$$\Omega_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & \left(\frac{\partial V_2}{\partial X_1} - \frac{\partial V_1}{\partial X_2}\right) & \left(\frac{\partial V_3}{\partial X_1} - \frac{\partial V_1}{\partial X_3}\right) \\ \left(\frac{\partial V_1}{\partial X_2} - \frac{\partial V_2}{\partial X_1}\right) & 0 & \left(\frac{\partial V_3}{\partial X_2} - \frac{\partial V_2}{\partial X_3}\right) \\ \left(\frac{\partial V_1}{\partial X_3} - \frac{\partial V_3}{\partial X_1}\right) & \left(\frac{\partial V_2}{\partial X_3} - \frac{\partial V_3}{\partial X_2}\right) & 0 \end{vmatrix}$$

TABLO D.4: Bir Hız Vektörünün Malzeme Türevi

$$\frac{DV^i}{Dt} = \frac{\partial V^i}{\partial t} + V^k V^i{}_{,k}$$

$$V^k V^i{}_{,k} = \begin{vmatrix} V_1 \frac{\partial V_1}{\partial X_1} + V_2 \frac{\partial V_1}{\partial X_2} + V_3 \frac{\partial V_1}{\partial X_3} \\ V_1 \frac{\partial V_2}{\partial X_1} + V_2 \frac{\partial V_2}{\partial X_2} + V_3 \frac{\partial V_2}{\partial X_3} \\ V_1 \frac{\partial V_3}{\partial X_1} + V_2 \frac{\partial V_3}{\partial X_2} + V_3 \frac{\partial V_3}{\partial X_3} \end{vmatrix}$$

TABLO D.5: 2.Mertebeden Bir Tensörün Kovaryant Türevi

$$T_{ij,k} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial z^k} - \left\{ {m \atop i \quad j} \right\} . T_{mj} - \left\{ {m \atop j \quad k} \right\} . T_{im} = T_{ji,k}$$

$$T_{ij,X_1} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial T_{11}}{\partial X_1} & \dfrac{\partial T_{12}}{\partial X_1} & \dfrac{\partial T_{13}}{\partial X_1} \\ \dfrac{\partial T_{21}}{\partial X_1} & \dfrac{\partial T_{22}}{\partial X_1} & \dfrac{\partial T_{23}}{\partial X_1} \\ \dfrac{\partial T_{31}}{\partial X_1} & \dfrac{\partial T_{32}}{\partial X_1} & \dfrac{\partial T_{33}}{\partial X_1} \end{vmatrix}$$

$$T_{ij,X_2} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial T_{11}}{\partial X_2} & \dfrac{\partial T_{12}}{\partial X_2} & \dfrac{\partial T_{13}}{\partial X_2} \\ \dfrac{\partial T_{21}}{\partial X_2} & \dfrac{\partial T_{22}}{\partial X_2} & \dfrac{\partial T_{23}}{\partial X_2} \\ \dfrac{\partial T_{31}}{\partial X_2} & \dfrac{\partial T_{32}}{\partial X_2} & \dfrac{\partial T_{33}}{\partial X_2} \end{vmatrix}$$

TABLO D.5 (devam ediyor)

$$T_{ij,x_3} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial T_{11}}{\partial X_3} & \dfrac{\partial T_{12}}{\partial X_3} & \dfrac{\partial T_{13}}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial T_{21}}{\partial X_3} & \dfrac{\partial T_{22}}{\partial X_3} & \dfrac{\partial T_{23}}{\partial X_3} \\ \dfrac{\partial T_{31}}{\partial X_3} & \dfrac{\partial T_{32}}{\partial X_3} & \dfrac{\partial T_{33}}{\partial X_3} \end{vmatrix}$$

TABLO D.6: 2.Mertebeden Bir Tensörün Malzeme Türevi

$$\frac{DT_{ij}}{Dt} = \frac{\partial t_{ij}}{\partial t} + V^k T_{ij,k}$$

Karteziyen koordinatlarda:

$$V^k T_{11,k} = V^1 \frac{\partial T_{11}}{\partial X_1} + V^2 \frac{\partial T_{11}}{\partial X_2} + V^3 \frac{\partial T_{11}}{\partial X_3}$$

$$V^k T_{12,k} = V^1 \frac{\partial T_{12}}{\partial X_1} + V^2 \frac{\partial T_{12}}{\partial X_2} + V^3 \frac{\partial T_{12}}{\partial X_3}$$

$$V^k T_{13,k} = V^1 \frac{\partial T_{13}}{\partial X_1} + V^2 \frac{\partial T_{13}}{\partial X_2} + V^3 \frac{\partial T_{13}}{\partial X_3}$$

$$V^k T_{21,k} = V^1 \frac{\partial T_{21}}{\partial X_1} + V^2 \frac{\partial T_{21}}{\partial X_2} + V^3 \frac{\partial T_{21}}{\partial X_3}$$

TABLO D.6 (devam ediyor)

$$V^k T_{22,k} = V^1 \frac{\partial T_{22}}{\partial X_1} + V^2 \frac{\partial T_{22}}{\partial X_2} + V^3 \frac{\partial T_{22}}{\partial X_3}$$

$$V^k T_{23,k} = V^1 \frac{\partial T_{23}}{\partial X_1} + V^2 \frac{\partial T_{23}}{\partial X_2} + V^3 \frac{\partial T_{23}}{\partial X_3}$$

$$V^k T_{31,k} = V^1 \frac{\partial T_{31}}{\partial X_1} + V^2 \frac{\partial T_{31}}{\partial X_2} + V^3 \frac{\partial T_{31}}{\partial X_3}$$

$$V^k T_{32,k} = V^1 \frac{\partial T_{32}}{\partial X_1} + V^2 \frac{\partial T_{32}}{\partial X_2} + V^3 \frac{\partial T_{32}}{\partial X_3}$$

$$V^k T_{33,k} = V^1 \frac{\partial T_{33}}{\partial X_1} + V^2 \frac{\partial T_{33}}{\partial X_2} + V^3 \frac{\partial T_{33}}{\partial X_3}$$

TABLO D.7: 2.Mertebeden Bir Tensörün Jaumann Türevi

$$\frac{\mathcal{D}T_{ij}}{\mathcal{D}t} = \frac{DT_{ij}}{Dt} + \frac{1}{2}\left(\Omega_i{}^k T_{kj} - T_{ik}\Omega^k{}_j\right) = \frac{DT_{ij}}{Dt} + \frac{1}{2} J_{ij}$$

$$J_{11} = \left[\frac{\partial V_2}{\partial X_1} - \frac{\partial V_1}{\partial X_2}\right]\left[T_{21} + T_{12}\right] + \left[\frac{\partial V_3}{\partial X_1} - \frac{\partial V_1}{\partial X_3}\right]\left[T_{31} + T_{13}\right]$$

$$J_{12} = \left[\frac{\partial V_2}{\partial X_1} - \frac{\partial V_1}{\partial X_2}\right]\left[T_{22} - T_{11}\right] + \left[\frac{\partial V_3}{\partial X_1} - \frac{\partial V_1}{\partial X_3}\right] T_{32} + \left[\frac{\partial V_3}{\partial X_2} - \frac{\partial V_2}{\partial X_3}\right] T_{13}$$

$$J_{13} = \left[\frac{\partial V_2}{\partial X_1} - \frac{\partial V_1}{\partial X_2}\right] T_{23} + \left[\frac{\partial V_3}{\partial X_1} - \frac{\partial V_1}{\partial X_3}\right]\left[T_{33} - T_{11}\right]\left[\frac{\partial V_2}{\partial X_3} - \frac{\partial V_3}{\partial X_2}\right] T_{12}$$

TABLO D.7 (devam ediyor)

$$J_{21}=\left[\frac{\partial V_2}{\partial X_1}-\frac{\partial V_1}{\partial X_2}\right]\left[T_{22}-T_{11}\right]+\left[\frac{\partial V_3}{\partial X_1}-\frac{\partial V_1}{\partial X_3}\right]T_{23}+\left[\frac{\partial V_3}{\partial X_2}-\frac{\partial V_2}{\partial X_3}\right]T_{31}$$

$$J_{22}=\left[\frac{\partial V_2}{\partial X_1}-\frac{\partial V_1}{\partial X_2}\right]\left[T_{12}+T_{21}\right]+\left[\frac{\partial V_3}{\partial X_2}-\frac{\partial V_2}{\partial X_3}\right]\left[T_{32}+T_{23}\right]$$

$$J_{23}=\left[\frac{\partial V_1}{\partial X_2}-\frac{\partial V_2}{\partial X_1}\right]T_{13}+\left[\frac{\partial V_3}{\partial X_2}-\frac{\partial V_2}{\partial X_3}\right]\left[T_{33}-T_{22}\right]+\left[\frac{\partial V_1}{\partial X_3}-\frac{\partial V_3}{\partial X_1}\right]T_{21}$$

$$J_{31}=\left[\frac{\partial V_1}{\partial X_3}-\frac{\partial V_3}{\partial X_1}\right]\left[T_{11}-T_{33}\right]+\left[\frac{\partial V_2}{\partial X_3}-\frac{\partial V_3}{\partial X_2}\right]T_{21}+\left[\frac{\partial V_2}{\partial X_1}-\frac{\partial V_1}{\partial X_2}\right]T_{32}$$

$$J_{32}=\left[\frac{\partial V_1}{\partial X_3}-\frac{\partial V_3}{\partial X_1}\right]T_{12}+\left[\frac{\partial V_3}{\partial X_2}-\frac{\partial V_2}{\partial X_3}\right]\left[T_{33}-T_{22}\right]+\left[\frac{\partial V_1}{\partial X_2}-\frac{\partial V_2}{\partial X_1}\right]T_{31}$$

$$J_{33}=\left[\frac{\partial V_1}{\partial X_3}-\frac{\partial V_3}{\partial X_1}\right]\left[T_{12}+T_{31}\right]+\left[\frac{\partial V_2}{\partial X_3}-\frac{\partial V_2}{\partial X_2}\right]\left[T_{23}+T_{32}\right]$$

EK E

AKIM TİPLERİNE GÖRE GERİLMENİN TÜREV BİLEŞENLERİ

TABLO E.1: Deformasyon Hız Tensörü

$$\Delta_{ij} = V_{i,j} + V_{j,i}$$

I. Simetri ekseni boyunca akım:

$$V_1 = V_1(X_1),\ V_3 = 0$$

$$\Delta_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial X_1}$$

II. Basit kaymalı akım:

$$V_1 = V_1(X_2)\ ,\ V_2 = V_3 = 0$$

$$\Delta_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial X_2}$$

TABLO E.2: Girdap tensörü

$$\Omega_{ij} = V_{j,i} - V_{i,j}$$

I. Simetri ekseni boyunca akım:

$$\Omega_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

II. Basit kaymalı akım:

$$\Omega_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial X_2}$$

TABLO E.3: Gerilme tensörünün malzeme türevi

$$\frac{D\tau_{ij}}{Dt} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + V^k \tau_{ij,k}$$

TABLO E.3 (devan ediyor)

I. Simetri ekseni boyunca akım:

$$V_1 = f(X_1)\ ,\ V_2 = V_3 = 0$$

$$\frac{D\tau_{11}}{Dt} = \frac{\partial\tau_{11}}{\partial t} + V_1\frac{\partial\tau_{11}}{\partial X_1} + V_2\frac{\partial\tau_{11}}{\partial X_2} + V_3\frac{\partial\tau_{11}}{\partial X_3}$$

$$\frac{D\tau_{11}}{Dt} = V_1\frac{\partial\tau_{11}}{\partial X_1}$$

$$\frac{D\tau_{12}}{Dt} = \frac{\partial\tau_{12}}{\partial t} + V_1\frac{\partial\tau_{12}}{\partial X_1} + V_2\frac{\partial\tau_{12}}{\partial X_2} + V_3\frac{\partial\tau_{12}}{\partial X_3}$$

$$\frac{D\tau_{12}}{Dt} = V_1\frac{\partial\tau_{12}}{\partial X_1}$$

$$\frac{D\tau_{13}}{Dt} = V_1\frac{\partial\tau_{13}}{\partial X_1}$$

$$\frac{D\tau_{21}}{Dt} = V_1\frac{\partial\tau_{21}}{\partial X_1}$$

$$\frac{D\tau_{22}}{Dt} = V_1\frac{\partial\tau_{22}}{\partial X_1}$$

TABLO E.3 (devam ediyor)

$$\frac{D\tau_{23}}{Dt} = V_1\frac{\partial\tau_{23}}{\partial X_1}$$

$$\frac{D\tau_{31}}{Dt} = V_1\frac{\partial\tau_{31}}{\partial X_1}$$

$$\frac{D\tau_{32}}{Dt} = V_1\frac{\partial\tau_{32}}{\partial X_1}$$

$$\frac{D\tau_{33}}{Dt} = V_1\frac{\partial\tau_{33}}{\partial X_1}$$

II. Kararlı basit kaymalı akım:

$$V_1 = f(X_2),\ V_2 = V_3 = 0$$

$$\frac{D\tau_{11}}{Dt} = \frac{\partial\tau_{11}}{\partial t} + V_1\frac{\partial\tau_{11}}{\partial X_1} + V_2\frac{\partial\tau_{11}}{\partial X_2} + V_3\frac{\partial\tau_{11}}{\partial X_3}$$

$$\frac{D\tau_{11}}{Dt} =0$$

$$\frac{D\tau_{12}}{Dt} = 0$$

$$\frac{D\tau_{ij}}{Dt} = 0$$

TABLO E.4 : Gerilme Tensörünün Konvekted Türevi

$$\frac{\delta\tau_{ij}}{\delta t} = \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial t} + V^k\tau_{ij,k} + V^k{}_{,j}\tau_{ik} + V^k{}_{,i}\tau_{kj}$$

I. Kararlı simetri ekseni boyunca akım:

$$f(X_1) = V^1 = V_1,\ V^2 = V_2 = V^3 = V_3 = 0$$

$$\frac{\delta\tau_{ij}}{\delta t} = \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial t} + V_1\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial X_1} + V_2\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial X_2} + V_3\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial X_3}$$

$$+ \frac{\partial V_1}{\partial X_j}\tau_{i1} + \frac{\partial V_2}{\partial X_j}\tau_{i2} + \frac{\partial V_3}{\partial X_j}\tau_{i3}$$

$$+ \frac{\partial V_1}{\partial X_i}\tau_{1j} + \frac{\partial V_2}{\partial X_i}\tau_{2j} + \frac{\partial V_3}{\partial X_i}\tau_{3j}$$

$$\frac{\delta\tau_{ij}}{\delta t} = V_1\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial X_1} + \frac{\partial V_1}{\partial X_j}\tau_{i1} + \frac{\partial V_2}{\partial X_j}\tau_{i2} + \frac{\partial V_1}{\partial X_i}\tau_{1j} + \frac{\partial V_2}{\partial X_i}\tau_{2j}$$

$$\frac{\delta\tau_{11}}{\delta t} = V_1\frac{\partial\tau_{11}}{\partial X_1} + \frac{\partial V_1}{\partial X_1}\tau_{11} + \frac{\partial V_2}{\partial X_1}\tau_{12} + \frac{\partial V_1}{\partial X_1}\tau_{11} + \frac{\partial V_2}{\partial X_1}\tau_{21}$$

$$\frac{\delta\tau_{11}}{\delta t} = V_1\frac{\partial\tau_{11}}{\partial X_1} + 2\frac{\partial V_1}{\partial X_1}\tau_{11}$$

TABLO E.4 (devam ediyor)

$$\frac{\delta\tau_{12}}{\delta t} = V_1\frac{\partial\tau_{12}}{\partial X_1} + \frac{\partial V_1}{\partial X_2}\tau_{11} + \frac{\partial V_2}{\partial X_2}\tau_{12} + \frac{\partial V_1}{\partial X_1}\tau_{12} + \frac{\partial V_2}{\partial X_1}\tau_{22}$$

$$\frac{\delta\tau_{12}}{\delta t} = V_1\frac{\partial\tau_{12}}{\partial X_1}$$

$$\frac{\delta\tau_{21}}{\delta t} = V_1\frac{\partial\tau_{21}}{\partial X_1}$$

$$\frac{\delta\tau_{22}}{\delta t} = V_1\frac{\partial\tau_{22}}{\partial X_1} + 2\frac{\partial V_2}{\partial X_2}\tau_{22}$$

II. Kararlı basit kaymalı akım:

$$\frac{\delta\tau_{11}}{\delta t} = V_1\frac{\partial\tau_{11}}{\partial X_1} + \frac{\partial V_1}{\partial X_1}\tau_{11} + \frac{\partial V_2}{\partial X_1}\tau_{12} + \frac{\partial V_1}{\partial X_1}\tau_{11} + \frac{\partial V_2}{\partial X_1}\tau_{21}$$

$$\frac{\delta\tau_{11}}{\delta t} = 0$$

$$\frac{\delta\tau_{12}}{\delta t} = V_1\frac{\partial\tau_{12}}{\partial X_1} + \frac{\partial V_1}{\partial X_2}\tau_{11} + \frac{\partial V_2}{\partial X_2}\tau_{12} + \frac{\partial V_1}{\partial X_1}\tau_{12} + \frac{\partial V_2}{\partial X_1}\tau_{22}$$

TABLO E.4 (devam ediyor)

$$\frac{\delta\tau_{12}}{\delta t} = \frac{\partial V_1}{\partial X_2}\tau_{11} = \frac{\delta\tau_{21}}{\delta t}$$

$$\frac{\delta\tau_{22}}{\delta t} = V_1\frac{\partial\tau_{22}}{\partial X_1} + \frac{\partial V_1}{\partial X_2}\tau_{21} + \frac{\partial V_2}{\partial X_2}\tau_{22} + \frac{\partial V_1}{\partial X_2}\tau_{12} + \frac{\partial V_2}{\partial X_2}\tau_{22}$$

$$\frac{\delta\tau_{22}}{\delta t} = 2\frac{\partial V_1}{\partial X_2}\tau_{21} = 2\frac{\partial V_1}{\partial X_2}\tau_{12}$$

TABLO E.5 : Gerilmenin Jaumann Türevi

$$\frac{\mathcal{D}\tau_{ij}}{\mathcal{D}t} = \frac{D\tau_{ij}}{Dt} + \frac{1}{2}\left(\Omega_{ik}\tau^k{}_j - \tau_i{}^k\Omega_{kj}\right)$$

I. Simetri ekseni boyunca akım:

$$\frac{\mathcal{D}\tau_{ij}}{\mathcal{D}t} = \frac{D\tau_{ij}}{Dt} + \frac{1}{2}\left(\Omega_{i1}\tau^1{}_j - \tau_i{}^1\Omega_{1j} + \Omega_{i2}\tau^2{}_j - \tau_i{}^2\Omega_{2j}\right)$$

$$\frac{\mathcal{D}\tau_{11}}{\mathcal{D}t} = \frac{D\tau_{11}}{Dt} + \frac{1}{2}\left(\Omega_{11}\tau^1{}_1 - \tau_1{}^1\Omega_{11} + \Omega_{12}\tau^2{}_1 - \tau_1{}^2\Omega_{21}\right)$$

TABLO E.5 (devam ediyor)

$$\frac{\mathcal{D}\tau_{11}}{\mathcal{D}t} = V_1 \frac{\partial \tau_{11}}{\partial X_1}$$

$$\frac{\mathcal{D}\tau_{22}}{\mathcal{D}t} = \frac{D\tau_{22}}{Dt} = V_1 \frac{\partial \tau_{22}}{\partial X_1}$$

II. Kararlı basit kaymalı akım :

$$\frac{\mathcal{D}\tau_{11}}{\mathcal{D}t} = \frac{D\tau_{11}}{Dt} + \frac{1}{2} \left(\Omega_{11}\tau^{1}{}_{1} - \tau_{1}{}^{1}\Omega_{11} + \Omega_{12}\tau^{2}{}_{1} - \tau_{1}{}^{2}\Omega_{21} \right)$$

$$\frac{\mathcal{D}\tau_{11}}{\mathcal{D}t} = \frac{D\tau_{11}}{Dt} + \frac{1}{2} \left(- \frac{\partial V_1}{\partial X_2} \tau_{21} - \frac{\partial V_1}{\partial X_2} \tau_{12} \right)$$

$$\frac{\mathcal{D}\tau_{11}}{\mathcal{D}t} = - \frac{\partial V_1}{\partial X_2} \tau_{12}$$

$$\frac{\mathcal{D}\tau_{12}}{\mathcal{D}t} = \frac{1}{2} \frac{\partial V_1}{\partial X_2} \left(\tau_{11} - \tau_{22} \right)$$

$$\frac{\mathcal{D}\tau_{22}}{\mathcal{D}t} = \frac{\partial V_1}{\partial X_2} \tau_{12}$$

EK F

DENEYSEL HIZ VE 1.NORMAL GERİLME FARKI DEĞERLERİ
(SİMETRİ EKSENİ BOYUNCA)

F. DENEYSEL HIZ VE 1.NORMAL GERİLME FARKI DEĞERLERİ

TABLO F.1: Deneysel Hız ve 1.Normal Gerilme Farkı Değerleri

KONUM (mm)	HIZ (mm/s)	1.NOR.GER.FAR.(Pa)
0.00	53.1	112.3
0.25	49.9	182.8
0.50	44.9	220.0
0.75	39.3	229.0
1.00	34.3	232.0
1.25	30.7	194.2
1.50	28.8	150.0
1.75	28.0	106.0
2.00	28.6	60.0
2.25	29.0	17.0
2.50	30.0	-24.0
2.75	31.4	-83.5
3.00	33.5	-142.0
3.25	36.2	-195.0
3.50	39.3	-241.5
3.75	42.6	-232.5
4.00	45.7	-182.5
4.25	47.8	-111.0
4.50	48.3	19.0
4.75	46.8	115.0
5.00	43.2	164.0
5.25	38.1	161.0
5.50	32.9	150.0

TABLO F.1 (devam ediyor)

KONUM (mm)	HIZ (mm/s)	1.NOR.GER.FAR. (Pa)
5.75	29.6	129.0
6.00	28.7	100.0
6.25	29.2	62.5
6.50	29.7	25.0
6.75	30.3	-22.4
7.00	31.4	-69.0
7.25	33.6	-130.2
7.50	37.1	-192.5
7.75	41.3	-217.4
8.00	45.5	-254.0
8.25	48.6	-247.1
8.50	50.7	-217.5
8.75	51.9	-163.5
9.00	52.5	-98.0

EK G

BÜNYE DENKLEMLERİNİN RUNGE-KUTTA YÖNTEMİNE GÖRE ÇÖZÜM SONUÇLARI

G. BÜNYE DENKLEMLERİNİN RUNGE-KUTTA YÖNTEMİNE GÖRE ÇÖZÜM SONUÇLARI

TABLO G.1: Yeni Modelin Sonuçları

KONUM(mm)	NORMAL GERİLME FARKI(dyn/mm²)
0.00	11.23
0.25	18.36
0.50	21.97
0.75	21.30
1.00	19.60
1.25	16.95
1.50	12.35
1.75	7.83
2.00	3.30
2.25	-1.68
2.50	-6.85
2.75	-11.12
3.00	-15.20
3.25	-19.50
3.50	-22.65
3.75	-23.93
4.00	-22.80
4.25	-16.00
4.50	-5.35
4.75	6.00
5.00	14.70
5.25	15.90

TABLO G.1 (Devam ediyor)

KONUM(mm)	NORMAL GERİLME FARKI(dyn/mm^2)
5.50	14.70
5.75	12.50
6.00	9.00
6.25	4.10
6.50	-1.60
6.75	-7.73
7.00	-13.40
7.25	-18.72
7.50	-22.95
7.75	-25.37
8.00	-26.40
8.25	-24.17
8.50	-19.25
8.75	-13.20
9.00	-8.95

TABLO G.2: White-Metzner Modelinin Sonuçları

KONUM(mm)	NORMAL GERİLME FARKI(dyn/mm^2)
0.00	11.23
0.25	17.70
0.50	23.73
0.75	24.90
1.00	23.02
1.25	18.50
1.50	13.53
1.75	9.02
2.00	3.91
2.25	-1.60
2.50	-5.55
2.75	-9.40
3.00	-13.31
3.25	-16.50
3.50	-18.44
3.75	-18.70
4.00	-17.23
4.25	-13.80
4.50	-10.16
4.75	4.50
5.00	18.15
5.25	23.50

TABLO G.2 (Devam ediyor)

KONUM(mm)	NORMAL GERİLME FARKI(dyn/mm²)
5.50	23.52
5.75	16.90
6.00	10.51
6.25	4.10
6.50	-0.57
6.75	-4.00
7.00	-8.95
7.25	-14.10
7.50	-18.92
7.75	-20.90
8.00	-20.96
8.25	-18.70
8.50	-14.90
8.75	-11.50
9.00	-9.10

TABLO G.3 : Gaidos Modelinin Sonuçları

KONUM(mm)	NORMAL GERİLME FARKI(dyn/mm²)
0.00	11.23
0.25	16.98
0.50	23.52
0.75	24.92
1.00	22.46
1.25	17.04
1.50	11.69
1.75	6.35
2.00	0.31
2.25	-4.77
2.50	-6.14
2.75	-8.96
3.00	-12.26
3.25	-15.20
3.50	-17.17
3.75	-17.37
4.00	-15.67
4.25	-11.95
4.50	-7.06
4.75	6.36
5.00	17.74
5.25	23.20

TABLO G.3 (Devam ediyor)

KONUM(mm)	NORMAL GERİLME FARKI(dyn/mm²)
5.50	23.11
5.75	15.13
6.00	7.27
6.25	0.35
6.50	-2.98
6.75	-5.06
7.00	-8.80
7.25	-13.70
7.50	-17.80
7.75	-20.00
8.00	-19.93
8.25	-17.28
8.50	-12.98
8.75	-9.49
9.00	-6.98

TABLO G.4 : Oldroyd 3-Sabit Modelinin Sonuçları

KONUM(mm)	NORMAL GERİLME FARKI(dyn/mm^2)
0.00	11.23
0.25	22.48
0.50	30.07
0.75	33.20
1.00	32.10
1.25	26.77
1.50	18.57
1.75	11.22
2.00	6.80
2.25	3.72
2.50	0.26
2.75	-4.25
3.00	-9.49
3.25	-14.60
3.50	-18.50
3.75	-20.00
4.00	-18.68
4.25	-13.90
4.50	-6.26
4.75	3.48
5.00	13.62
5.25	21.50

TABLO G.4 (Devam ediyor)

KONUM(mm)	NORMAL GERİLME FARKI(dyn/mm²)
5.50	23.71
5.75	14.00
6.00	2.90
6.25	-0.40
6.50	-1.88
6.75	-4.30
7.00	-8.81
7.25	-15.00
7.50	-21.11
7.75	-25.20
8.00	-26.22
8.25	-23.30
8.50	-18.12
8.75	-13.70
9.00	-10.95

EK H

BÜNYE DENKLEMLERİNİN MODEL EŞİTLİKLERİ

TABLO H.1: Yeni Modelin Model Eşitlikleri

```
G(1)=-((B(1)+B(2)*(ABS(Y(3)))^.856)/Y(2))*(Y(1)-2.64*(Y(3)+3.6*B(4)*Y(2)
       *Y(4)/(1+1.296*Y(3)^2)^.1)/(1+B(3)*(ABS(Y(3)))^.856))
G(2)=1429.057-792.8668*X+190.76273*X^2.000931-6.2873229*X^4.707436+
      3.0725443*X^5.119542-.057796234*X^6.191055+125.00163*X^-1.65-
      345.124*EXP(X^-1)*X^EXP(X^-1)*(X-LOG(X))/X^2
G(3)=-(-792.8668+381.70306*X^1.000931-29.59717*X^3.707436+15.730019*
       X^4.119542-.35781966*X^5.191055-206.25268*X^-2.65-345.124*EXP(X^-1)*
       X^EXP(X^-1)*((X-LOG(X))*((X-LOG(X))*EXP(X^-1)-2*X-1)+X^2-X)/X^4)
G(4)=-(229.3318*1.08702*X^.08702-15.85026*3.660155*X^2.660155+6.791266*
       4.164236*X^3.164236-.1791569*5.074036*X^4.074036-594.2766*2.239699*
       X^-3.239699)
G(5)=-(1/Y(2))*(Y(1)-2.64*(Y(3)+3.6*B(4)*Y(2)*Y(4)/(1+1.296*Y(3)^2)^.1)/
       (1+B(3)*(ABS(Y(3)))^.856))-((B(1)+B(2)*(ABS(Y(3)))^.856)/Y(2))*Y(5)
G(6)=-((ABS(Y(3)))^.856/Y(2))*(Y(1)-2.64*(Y(3)+3.6*B(4)*Y(2)*Y(4)/(1+1.296*
       Y(3)^2)^.1)/(1+B(3)*(ABS(Y(3)))^.856))-((B(1)+B(2)*(ABS(Y(3)))^.856)/
       Y(2))*Y(6)
G(7)=-((B(1)+B(2)*(ABS(Y(3)))^.856)/Y(2))*(Y(7)+2.64*(ABS(Y(3)))^.856*(Y(3)
       +3.6*B(4)*Y(2)*Y(4)/(1+1.296*Y(3)^2)^.1)/(1+B(3)*(ABS(Y(3)))^.856)^2)
G(8)=-((B(1)+B(2)*(ABS(Y(3)))^.856)/Y(2))*(Y(8)-2.64*(3.6*Y(2)*Y(4)/(1+
       1.296*Y(3)^2)^.1)/(1+B(3)*(ABS(Y(3)))^.856))
```

TABLO H.2: **Gaidos Modelinin Model** Eşitlikleri

```
G(1)=-(1+4.6656*Y(3)^2)^B(2)/(3.6*B(1)*Y(2))*(Y(1)-2.64*Y(3)*(1+4.6656*Y(3)
    ^2*B(1)^2*(1+4.6656*Y(3)^2)^(-2*B(2)))*2.64*Y(3)/(1+4.6656*Y(3)^2)^.28)
G(2)=1429.057-792.8668*X+190.76273*X^2.000931-6.2873229*X^4.707436+
     3.0725443*X^5.119542-.057796234*X^6.191055+125.00163*X^-1.65-345.124*
     EXP(X^-1)*X^EXP(X^-1)*(X-LOG(X))/X^2
G(3)=-(-792.8668+381.70306*X^1.000931-29.59717*X^3.707436+15.730019*
      X^4.119542-.35781966*X^5.191055-206.25268*X^-2.65-345.124*EXP(X^-1)*
      X^EXP(X^-1)*((X-LOG(X))*((X-LOG(X))*EXP(X^-1)-2*X-1)+X^2-X)/X^4)
G(4)=(1+4.6656*Y(3)^2)^B(2)/(3.6*B(1)^2*Y(2))*(Y(1)-2.64*Y(3)*(1+4.6656*
     B(1)^2*Y(3)^2*(1+4.6656*Y(3)^2)^(-2*B(2)*2.64*Y(3)*(1+4.6656*Y(3)^2)^
    .28)-(1+4.6656*Y(3)^2)^B(2)/(3.6*B(1)*Y(2))*(Y(4)-24.6344*B(1)*Y(3)^2/
    (1+4.6656*Y(3)^2)^(.28+2*B(2)))
G(5)=-((1+4.6656*Y(3)^2)^B(2)/(3.6*B(1)*Y(2)))*(LOG(1+4.6656*Y(3)^2)*(Y(1)-
      2.64*Y(3)*(1+4.6656*B(1)^2*Y(3)^2*(1+4.6656*Y(3)^2)^-(2*B(2)))/(1+
      4.6656*Y(3)^2)^.28)+Y(5)+24.6344*B(1)^2*Y(3)^3*LOG(1+4.6656*Y(3)^2)/(
      1+4.6645*Y(3)^2)^(.28+2*B(2)))
```

TABLO H.3: Oldroyd 3-Sabit Modelinin Model Eşitlikleri

```
G(1)=1/(B(1)*Y(2))*(-Y(1)+2.64*(Y(3)+B(2)*Y(2)*Y(4)))
G(2)=1429.057-792.8668*X+190.76273*X^2.000931-6.2873229*X^4.707436+
     3.0725443*X^5.119542-.057796234*X^6.191055+125.00163*X^-1.65-
     345.124*EXP(X^-1)*X^EXP(X^-1)*(X-LOG(X))/X^2
G(3)=-(-792.8668+381.70306*X^1.000931-29.59717*X^3.707436+15.730019*
      X^4.119542-.35781966*X^5.191055-206.25268*X^-2.65-345.124*EXP(X^-1)
      *X^EXP(X^-1)*((X-LOG(X))*((X-LOG(X))*EXP(X^-1)-2*X-1)+X^2-X)/X^4)
G(4)=-(229.3318*1.08702*X^.08702-15.85026*3.660155*X^2.660155+6.791266*
      4.164236*X^3.164236-.1791569*5.074036*X^4.074036-594.2766*2.239699
      *X^-3.239699)
G(5)=-1/(B(1)^2*Y(2))*(-Y(1)+2.64*(Y(3)+B(2)*Y(2)*Y(4)))-Y(5)/(B(1)*Y(2))
G(6)=1/(B(1)*Y(2))*(-Y(6)+2.64*Y(2)*Y(4))
```

TABLO H.4: Spriggs ve Diğer Modellerin Model Eşitlikleri

```
G(1)=1/(B(1)*Y(2))*(-Y(1)+2.64*Y(3))
G(2)=1429.057-792.8668*X+190.76273*X^2.000931-6.2873229*X^4.707436+
     3.0725443*X^5.119542-.057796234*X^6.191055+125.00163*X^-1.65-
     345.124*EXP(X^-1)*X^EXP(X^-1)*(X-LOG(X))/X^2
G(3)=-(-792.8668+381.70306*X^1.000931-29.59717*X^3.707436+15.730019*
      X^4.119542-.35781966*X^5.191055-206.25268*X^-2.65-345.124*
      EXP(X^-1)*X^EXP(X^-1)*((X-LOG(X))*((X-LOG(X))*EXP(X^-1)-2*X-1)+
      X^2-X)/X^4)
G(4)=-1/(B(1)^2*Y(2))*(-Y(1)+2.64*Y(3))-Y(4)/(B(1)*Y(2))
```