T.C.
YILDIZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

REKÜRSİF FONKSİYONLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

E. Mehmet ÖZKAN

İSTANBUL - 1992

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR

Tüm çalışmalarımda ve bu tezimin hazırlanması sırasında yardımlarını hiç bir zaman eksik etmeyen çok değerli hocam sayın Prof. Yavuz AKSOY 'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ödevime gereken ilgiyi gösteren çok değerli aileme, paylaşmayı ve ortak çalışmayı sağlayan çok değerli arkadaşlarıma ayrıca teşekkürlerimi sunarım.

E. Mehmet ÖZKAN

Ocak, 1992

ÖZET

Rekürsif Fonksiyonların kullanımı ve yaygınlaşmasına en büyük katkıyı Matematik Lojik sağlamıştır. Bu çalışma, Rekürsif Fonksiyonlara bir giriş olarak hazırlanmıştır. Bu nedenle, Rekürsif Fonksiyonlar ve Matematik Lojik arasındaki bağıntılar ve bağlantılı bazı konulardan ibarettir. Bu tez, beş bölümden oluşur:

Birinci bölümde, konuyla ilgili temel tanımlar verilmiştir.

İkinci bölümde, Rekürsif Fonkiyonların matematiksel tanımı ve onlara ait bazı örnekler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, doğal sayılar kümesi ile doğal sayıların sıralı çiftlerinin kümesi arasındaki birebir eşlemenin, Rekürsif Fonksiyonlar yardımı ile nasıl oluşturulduğu anlatılmıştır.

Dördüncü bölümde, konunun temeli olan takrarlı işlemler ve tekrarlı fonksiyonlardan, ayrıca Rekürsif Fonksiyonların bir alt sınıfı olan Primitif Rekürsif Fonksiyonlardan bahsedilmiştir.

Beşinci ve son bölümde ise, fonksiyonlarda olduğu gibi, kümelerin ve yüklemlerin rekürsifliği anlatılmıştır.

SUMMARY

Mathematic Logic was give the biggest support to spread and to use of Recursive Functions. This thesis has prepeared as a introduction to Recursive Functions. Therefore, it consists of some relating topics and relations between Recursive Functions and Mathematic Logic. This thesis contains five chapters:

Some basic definitions concerning with the subject placed in the first chapter.

In the second chapter, mathematical definition of Recursive Function and some examples are given.

It is a well-known fact that there exist of one-one correspondences between the set of natural numbers and and the set of ordered pairs of natural numbers. The third chapter show how to set up such a correspondence by Recursive Functions.

In the fourth chapter tell about repeated operations and repeated functions which is based of the subject. Furthermore, in this section mentions a certain subclass of the class of Recursive Functions, the so-called Primitive Recursive Functions.

Finally, in this section defined recursiveness of sets and predicates in the Modern Logic.

BÖLÜM I

TEMEL KAVRAMLAR

I.1 Giriş

Bilimsel problemler, gerçekleştirilmesi kolay olan işlemlerin uygulanması ile sonuca götüren yöntemleri bulmak zorundadırlar. Örneğin, kimyada bir maddenin bileşimini belirlemeye yarayan yöntemler, ard arda gerçekleştirilen sonlu sayıdaki deneyler aracılığıyla elde edilir.

Matematikte de benzeri bir durum vardır. Bir formülün tamlığı, bir ispatın doğruluğu bazı kolay işlerin sonlu kez uygulanması ile gözlenir. Bu yöntemlere etkin yöntemler denir. Buna bağlı olarak, söz konusu olan problemi çözen bir yöntem varsa, bu probleme saptanabilir 'dir denir. Örneğin, matematikte kullanılan; herhangi bir problemin çözümü sırasında ortaya çıkan ve bu problemin çözümüne yardımcı olan rekürans bağıntısını ele alalım. Bu bağıntıyı elde etmedeki işlem sırası, bir başlangıç değerini seçerek ve bu değeri daha sonraki aşamalarda kullanarak, belli bir bağıntı buluncaya kadar devam edecek şekildedir. Bu aşamada, dikkat edilecek hususlardan biri de iterasyon sayısının doğal sayılardan oluştuğudur (n=1,2,3,...).

Yukarıda verilen örnekten de anlaşılacağı gibi, rekürans bağıntısı, sonuçların yinelenmesi ile bulunur. Rekürsif fonksiyonlar, rekürans bağıntısında olduğu gibi; fonksiyonların yinelenmesi ile bulunan fonksiyonlardır. Bu fonksiyonların kullanımı ve yaygınlaşmasına en büyük katkıyı Matematik Lojik sağlamıştır. Bu çalışmada, rekürsif fonksiyonların nasıl oluştuğunu, nerelerde kullanıldığını ve içeriğini göstermeye çalışacağız. Çalışmamız boyunca inceleme için kullanacağımız; doğal sayılar kümesi olacaktır.

I.2 Yüklemler

Önce, modern mantığın temelini oluşturan önermeler mantığından bahsedelim.

Önermeler mantığının amacı, ifadelerin doğruluk değer analizini yapmaktır. Burada verilen önermeler, ya doğrudur ya da yanlıştır.

p,q verilen iki önerme olsun. p ile q'nun VEYA 'lı bileşimi $p \vee q$, p ile q'nun VE 'li bileşimi $p \wedge q$ şeklinde gösterilir.Bu bileşimlerin doğruluk değer analizi, modern mantıkta yöntemlerle yapılabilir. $p \wedge q$ önermesi, ancak ve ancak her iki önermenin de doğru olması ile doğru sonuç verir. Buna karşın $p \vee q$ önermesi ise önermeyi meydana getiren iki önermeden enaz birinin doğruluğu ile doğru sonuç verir.

Bir p önermesinin değili $\sim p$, $\bar{p}$, $\neg p$ veya p' ile gösterilir.

İçinde bir değişken bulunan ve önermenin doğruluk değeri bu değişkenin alacağı değerlere göre doğru ya da yanlış olarak değişen önerme çeşidine açık önerme denir. Verilen bir evren üzerinde tanımlanan açık önermeye, evrende açık önerme denir.

$E = (x_1, x_2, x_3,..., x_n)$ evreninde tanımlanmış $p(x)$ açık önermesi için,

$$\forall x,\ p(x) \equiv p(x_1) \wedge p(x_2) \wedge \dots \wedge p(x_n)$$

$$\exists\ x,\ p(x) \equiv p(x_1) \vee p(x_2) \vee \dots \vee p(x_n)$$

açılımlarının varlığı bilinmektedir. Bunların doğruluk değer analizi bakımından değerlendirilmesi için temel kural; evrensel nicelenmiş bir önerme için, bütün örnek önermelerin doğru olması halinde; varlıksal nicelenmiş bir önerme için, enaz bir örnek önermenin doğru olması halinde; nicelikli önermenin doğru olduğu şeklindedir.

Rekürsif fonksiyonlar için yüklem kavramında,n - değişkenli (n - li) bir yüklemin tanımı için yukarıdaki kavramlar, modern mantığın temel kurallarından hareket edilerek, ayrı ayrı ele alınacak ve değerlendirilecektir.

$P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ bir n - değişkenli yüklem olsun. Bu yüklemin kapalı ifadesi,

$$\{\, x_1,x_2,\ldots,x_n \mid P(x_1,x_2,\ldots,x_n) \,\}$$

şeklindedir. $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ n - lileri, $P(a_1,a_2,\ldots a_n)$ yüklemini doğru yapan n - liler kümesinin elemanları olarak kabul edilecektir. Ancak ve ancak, $P(a_1,a_2,\ldots a_n)$ doğru ise bu taktirde

$$(a_1,a_2,\ldots,a_n) \in \{\, x_1,x_2,\ldots,x_n \mid P(x_1,x_2,\ldots,x_n) \,\}$$

olarak gösterilir.

$P(x_1,x_2,\ldots,x_n) \Longleftrightarrow Q(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ise iki yüklem denktir. Böylece, bu iki yüklem birbirine denk ise o zaman

$$\{x_1,x_2,\ldots,x_n|P(x_1,\ldots,x_n)\} \equiv \{x_1,x_2,\ldots,x_n|Q(x_1,\ldots,x_n)\}$$

yazılır.

$P(y,x_1,\ldots,x_n)$, $(n+1)$ - değişkenli yüklem olsun. Burada $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 'leri kısaca $X^{(n)}$ ile göstereceğiz. Buna göre $P(y,X^{(n)})$ yazılacaktır. Buna, yüklemin temel ifadesi (basit ifadesi) denir.

Bu temel ifadelerden hareket ederek, ancak ve ancak $y \leq z$ $P(y,X^{(n)})$ yüklemini doğru yapacak şekilde

$$\bigvee_{y=0}^{z} P(y,X^{(n)}) \equiv P(0,X^{(n)}) \vee P(1,X^{(n)}) \vee \ldots \vee P(z,X^{(n)}) \quad (1)$$

$$\bigwedge_{y=0}^{z} P(y,X^{(n)}) \equiv P(0,X^{(n)}) \wedge P(1,X^{(n)}) \wedge \ldots \wedge P(z,X^{(n)}) \quad (2)$$

yüklemlerinden bahsedilebilir.
(1) açılımı, "0 ve z arasında $P(y,X^{(n)})$ olacak şekilde enaz bir y vardır " şeklinde, (2) açılımı ise " 0 ile z arasında tüm y 'ler için $P(y,X^{(n)})$ " şeklinde okunur.

Yukarıdaki tanınmlardan ve modern mantığın değilleme kuralından yararlanılarak, bu iki yüklem için

$$\bigwedge_{y=0}^{z} P(y,X^{(n)}) \iff \sim \bigvee_{y=0}^{z} \sim P(y,X^{(n)})$$

vardır.

$\bigvee_{y=0}^{z}$ ve $\bigwedge_{y=0}^{z}$ sembolleri sırasıyla sınırlı varlıksal (tikel) açıklayıcı ve sınırlı evrensel (tümel) açıklayıcı olarak adlandırılır.

$P(0,X^{(n)}) \vee P(1,X^{(n)}) \vee \ldots$ sınırsız ifadesinin kısa şekli

$\bigvee_{y} P(y,X^{(n)})$ olacak şekilde dikkate alınmalıdır.

Burada $\bigvee_{y} P(y,X^{(n)})$, y değişkeni için düzenlenmiş

$X^{(n)}$ argümanlı bir ifade olarak, tanım kümesinde yer alan herhangi bir y_i degeri için

$\bigvee_{y} P(y_i,X^{(n)})$ 'nin doğru olması halinde,

buna n - değişkenli yüklem 'dir denir.

Benzer şekilde $\bigwedge_{y} P(y,X^{(n)})$ ifadesi tanımlanabilecektir.

y_i elemanlarının tanım kümesinde yer alan her y değeri için ,$X^{(n)}$ argümanlı bir ifade olarak

$\bigwedge_{y} P(y_i,X^{(n)})$

doğru olduğu taktirde buna n - değişkenli yüklem denir.

$\bigvee_{y}$ ve $\bigwedge_{y}$ sembolleri varlıksal (tikel) açıklayıcı ve evrensel (tümel) açıklayıcı olarak da adlandırılır.

Bu iki tanım arasında n - değişkenli yüklem deyimi bir ortak deyim olarak kullanılmasına rağmen, bunun $\bigvee$ ile $\bigwedge$ 'den hareket ederek yapılan tanımları, farklı kavramlardan oluşmaktadır. Öyleyse $P(y,X^{(n)})$ ifadesi, ister bir y için ister bütün y 'ler için sağlanmış olsun; niceleme şekline bağlı olarak n - değişkenli yüklem olacaktır.

Bu tanımın doğal bir sonucu olarak;

$\bigvee\limits_{y=0}^{z} P(y,X^{(n)})$ ile $\bigvee\limits_{y} P(y,X^{(n)})$ ifadelerinin açılımı

bir VEYA 'lı bileşimi;

$\bigwedge\limits_{y=0}^{z} P(y,X^{(n)})$ ile $\bigwedge\limits_{y} P(y,X^{(n)})$ ifadelerinin açılımı

ise bir VE 'li bileşimi temsil etmektedir. Bunların doğruluk değer analizi bakımından ne şekilde değerlendirileceği ise yukarıda açıklanmıştır.

I.3 Fonksiyonlar

Önce, fonksiyon kavramını ele alalım. Fonksiyon, bazı özelliklerle, herhangi iki kümenin elemanları arasındaki ilişkidir. Bu özellikler: birinci kümedeki her eleman, ikinci kümedeki sadece bir elemana aittir. Burada birinci kümeye, fonksiyonun tanım bölgesi,ikinci kümeye ise fonksiyonun değer kümesi denir. İlk kümenin elemanları bağımlı değişken olarak da adlandırılabilir.

Daha önce belirtildiği gibi, çalışma alanımız doğal sayılar kümesidir. Doğal sayılar kümesinin n defa kartezyen çarpımından meydana gelen kümenin elemanları, n - li şeklinde ifade edilir ve $a_i \in N$ olmak üzere $(a_1,a_2,...a_n) \in N^n$ şeklinde gösterilir. Çalışmamız sırasında bahsedilecek olan fonksiyonlar, N^n kümesini, tanım bölgesi olarak kabul edecektir. Örneğin, $f(x,y) = x-y$ şeklindeki fonksiyonun tanım bölgesi, elemanları (x,y) olacak şekilde sıralı ikililerin oluşturduğu kümedir.

Yukarıdaki açıklamalara dayanarak bir fonksiyon tanımı verelim:

I.3.1 Tanım :

Tanım bölgesi, tüm n - lilerin kümesi olan n - değişkenli fonksiyona, tam fonksiyon denir.

Şimdi bazı özel tanımları sıralayalım:

I.3.2 Tanım :

$f(Y^{(m)})$ fonksiyonu (burada $y_1,y_2,...,y_m$ yerine $Y^{(m)}$ yazılmıştır.) ve $g_1(X^{(n)}),g_2(X^{(n)}),...,g_m(X^{(n)})$ fonksiyonlarıyla

$$h(X^{(n)}) = f(g_1(X^{(n)}),g_2(X^{(n)}),...,g_m(X^{(n)}))$$

şeklinde meydana gelen $h(X^{(n)})$ fonksiyonunu bulma işlemine, bileşke işlemi denir ($x_1,x_2,...,x_n$ yerine de $X^{(n)}$ yazılmıştır.).

Burada, bulunan $h(X^{(n)})$ fonksiyonunu oluşturan $i=1,2,...,m$ olmak üzere $g_i(X^{(n)})$ fonksiyonlarının herbirinin tanım bölgesi, $(a_1,a_2,...,a_n)$ n - lilerinden meydana geldiği ve buradan hareketle $f(Y^{(m)})$ fonksiyonunun tanım bölgesi de ($g_1(a_1,a_2,...,a_n),...,g_m(a_1,a_2,...,a_n)$) gibi m - lilerden meydana geldiği açıktır.

I.3.3 Tanım :

$f(y,X^{(n)})$, bir tam fonksiyon olacak şekilde, bu tam fonksiyona uygulanan **minimalleştirme işlemi**, şu şekilde tanımlanır:

$f(y,X^{(n)}) = 0$ olacak şekilde (yani, fonksiyonun kök veya kökleri varsa), verilen $X^{(n)}$ değeri için, y'nin en küçük değerine eşit olan fonksiyon $h(X^{(n)})$ fonksiyonu ise, bu fonksiyon, $f(y,X^{(n)})$ tam fonksiyonuna uygulanan minimalleştirme işlemi sonucunda bulunan n - değişkenli fonksiyondur.

$h(X^{(n)}) = \min_y [\, f(y,X^{(n)}) = 0 \,]$ olarak ifade edilir.

Örnek olarak, $x / 2 = \min_y [\, |(y+y)-x|=0 \,]$ gösterelim:

Burada $x / 2$, sadece x çift ise tanımlıdır ve $|(y+y)-x|=0$ için mevcuttur.

I.3.4 Tanım :

$f(y,X^{(n)})$ tam fonksiyon olsun. Eğer,

$\min_y [\, f(y,X^{(n)}) = 0 \,]$ fonksiyonu da tam fonksiyon

ise $f(y,X^{(n)})$ fonksiyonuna, reguler denir.

I.4 Karakteristik Fonksiyon

Bağıntı ve yüklem arasındaki olabilecek farkı ortadan kaldırmak için karakteristik fonksiyon tanımını verebiliriz.

I.4.1 Tanım :

$f \subset N^n$ bir bağıntı veya bir yüklem olsun;

$$C_f : N^n \longrightarrow N \; ; \qquad C_f(X^{(n)}) = \begin{cases} 0 \,, & X^{(n)} \in f \\ 1 \,, & X^{(n)} \notin f \end{cases} \qquad (*)$$

şeklinde tanımlanan C_f 'ye, f 'nin karakteristik fonksiyonu denir.

Bu tanımdan yararlanarak, $P(X^{(n)})$ n değişkenli yüklemin karakteristik fonksiyonundan bahsedebiliriz. Buna göre, $C_P(X^{(n)})$ ile gösterilen karakteristik fonksiyon, bu yüklemin kapalı ifadesi olan

$$\{ x_1, x_2, \ldots, x_n \mid P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \}$$

kümesinin karakteristik fonksiyonudur.
Eğer herhangi bir $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ n - lisi için $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ doğru ise $C_P(a_1, \ldots, a_n) = 0$, aksi halde $C_P(a_1, \ldots a_n) = 1$ 'dir.

Benzer şekilde, S, n - lilerin bir kümesi olsun. O taktirde, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fonksiyonun değişkenleri olduğuna göre; S kümesinin karakteristik fonksiyonu, $C_S(X^{(n)})$ şeklinde gösterilir. Burada, verilen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ n - lisi için, eğer $(a_1, \ldots, a_n) \in S$ ise karakteristik fonksiyonun değeri 0, $(a_1, \ldots, a_n) \notin S$ ise karakteristik fonksiyon değeri 1 olacaktır.

R ve K gibi herhangi iki küme alalım. Bu kümelerin birleşiminin ve kesişiminin karakteristik fonksiyonları aşağıdaki gibidir:

$M = R \cup K$ ise, $C_M = C_R \, . \, C_K$

$N = R \cap K$ ise, $C_N = C_R + C_K - (C_R \, . \, C_K)$

(*) Bu tanımda kullanılan 0 ve 1 sayıları ile Boole Cebri 'ndeki 0 ve 1 sayıları arasında anlam benzerliği yoktur.

Ayrıca N 'nin tümleyeni olan $\bar{N}$ 'nin karakteristik fonkiyonu da

$$C_{\bar{N}} = 1 - C_N$$

şeklinde ifade edilir.

Şimdi, özel bir işlem tanımlayalım:

Tanım I.4.2 :

$x, y \in N$ olacak şekilde

$$x \dot{-} y = \begin{cases} 0 , & x < y \text{ ise} \\ x - y , & x \geq y \text{ ise} \end{cases}$$

ifadesine, x ile y 'nin quasi - farkı denir.

BÖLÜM II

BAZI FONKSİYON SINIFLARI

Tanım II.1 :

Bir fonksiyon, aşağıda sıralanan fonksiyonlar ile başlayan, bileşke ve minimalleştirme işlemleri sonucunda elde edilebilirse kısmi rekürsif 'tir, denir.

(1) $C_A(x)$ (A 'nın karakteristik fonksiyonu)

(2) $S(x) = x + 1$ (Ardışık fonksiyon)

(3) $I^n_i(x_1,...,x_n) = x_i$ (özdeşlik fonksiyonu, $1 \leq i \leq n$)

(4) $x + y$

(5) $x \dot{-} y$

(6) $x . y$

Tanım II.2 :

Bir fonksiyon, Tanım II.1 'de sıralanan fonksiyonlar ile başlayan reguler fonkiyonların bileşke ve minimalleştirme işlemleri sonucunda elde edilebilirse rekürsif 'tir, denir.

Teorem II.1 :

Eğer bir fonksiyon rekürsif ise, A 'nın herhangi bir seçimi için A - rekürsiftir.

İspat :

Bu ispat, $C_\phi(x) = S (I^1_1(x) \dot{-} I^1_1(x))$ ifadesinden çıkar.
Burada A, doğal sayılar evrenine ait herhangi bir kümedir.
Yukarıdaki ifadeyi açalım:

$$C_\phi(x) = S (I^1_1(x) \dot{-} I^1_1(x)) = S (x \dot{-} x) = S (x-x) = S(0) = 1$$

Burada karakteristik fonksiyon tanımından;

$C_\phi(x) = 1 \iff x \notin \phi$ olur. $x \notin \phi \iff x \in A$ olacağı açıktır.
Şu halde bir fonksiyon rekürsif ise A 'nın herhangi bir seçimi için A - rekürsiftir.

Şimdi bazı rekürsif fonksiyonları sıralayalım :

(1) $N(x) = 0$; $N(x) = I_1^1(x) \dot{-} I_1^1(x) = x \dot{-} x = x - x = 0$

(2) $\alpha(x) = 1 - x$;

a) $\alpha(0) = 1$; $\alpha(0) = 1 \dot{-} 0 = 1 - 0 = 1$

b) $\alpha(x) = 0$; $x > 1$ için

$x=2$ için $\alpha(2) = 1 \dot{-} 2 = 0$

c) $\alpha(x) = S(N(x)) \dot{-} I_1^1(x)$

(3) $x^2 = I_1^1(x) \,.\, I_1^1(x)$

(4) $[\sqrt{x}]$; $\sqrt{x}$ ≥ daha büyük tamsayı

$$[\sqrt{x}] = \min_y [(y+1)^2 \dot{-} x \neq 0]$$

$$= \min_y [\alpha((y+1)^2 \dot{-} x) = 0]$$

$$= \min_y [\alpha((S(I_2^2(x,y)))^2 \dot{-} I_1^1(x)) = 0]$$

(5) $|x - y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)$

(6) $[x / y]$

Eğer $y \neq 0$ ise, $[x / y]$ ≥ en büyük tamsayıdır.

Eğer $y = 0$ ise, $[x / y] = 0$ olur.

$$[x / y] = \min_z [y=0 \bigvee y(z+1) > x]$$

$$= \min_z [y=0 \bigvee y(z+1) \dot{-} x \neq 0]$$

$$= \min_z [y=0 \bigvee \alpha(y(z+1) \dot{-} x) = 0]$$

$$= \min_z [y \,.\, \alpha(y(z+1) \dot{-} x) = 0]$$

Burada zorluk, minimalleştirmenin sıfıra eşit bir tek fonksiyon kümesini içermesidir. Kararımız, bir sayı çiftindeki sayılardan ya birinin ya da diğerinin (ya da her ikisinin) sıfır olduğunu söylemek, sayıların çarpımının sıfıra eşit olduğunu söylemeye denktir,şeklindedir.

(7) $R(x,y)$

Eğer $y \neq 0$ ise $R(x,y)$, x 'in y ile bölümündeki kalanı temsil eder.

$$x / y = [\, x / y \,] + R(x,y) / y$$

denkleminden $R(x,y)$ çekilirse,

$R(x,y) = x - y\,[\, x / y \,]$ bulunur.

$R(x,y) = x \dot{-} y\,[\, x / y \,]$ olarak alırsak, burada

$R(x,0) = x$ olur.

BÖLÜM III

DOĞAL SAYILARIN SONLU DİZİLERİ

Doğal sayıların kümesi ve doğal sayıların sıralı çiftlerinin kümesi arasında birebir eşleme olduğu bilinen bir gerçektir ve bu eşleme iyi tanımlıdır. Böyle bir eşlemenin rekürsif fonksiyonlar ile nasıl oluşturulabileceğini gösterelim.

$J(x,y) = 1/2\ [\ (x+y)^2 + 3x + y\ ]$ fonksiyonunu gözönüne alalım. Burada,

$$(x+y)^2 + 3x + y = (x+y)\ (x+y+1) + 2x$$

olduğundan $J(x,y)$, daima bir tamsayıdır.

Ayrıca,

$$J(x,y) = [\ \{(x+y)^2+I^1_1(x)+I^1_1(x)+I^1_1(x)+I^1_1(y)\}\ /\ S(S(N(x)))\ ]$$

olduğundan $J(x,y)$, rekürsiftir.

Açıkça, doğal sayıların herbir (x,y) sıralı çifti ile $J(x,y)$ fonksiyonu, bir tek doğal sayıya eşlenir. Her z doğal sayısı için $z = J(x,y)$ olacak şekilde (x,y) sıralı çiftinin bir tane olduğunu gösterelim.

$$z = J(x,y) = 1/2\ [\ (x+y)^2 + 3x + y\ ]$$

$$2z = (x+y)^2 + 3x + y \qquad (1)$$

olacak şekilde x,y,z tamsayılarını alalım.

$$2z = x^2 + 2xy + y^2 + 3x + y$$

$$8z = 4x^2 + 4y^2 + 8xy + 12x + 4y$$

$$8z+1 = 4x^2 + 4y^2 + 12x + 4y + 8xy + 1$$

$$8z+1 = (2x+2y+1)^2 + 8x$$

Burada, bulduğumuz son denklemden dolayı

$(2x+2y+1)^2 \leq 8z+1 \leq (2x+2y+3)^2$ yazabiliriz.

$$2x+2y+1 \le \sqrt{8z+1} \le 2x+2y+3$$

Bu eşitsizlikten $\sqrt{8z+1}$, ya $2x+2y+1$ ya da $2x+2y+2$ 'dir. $\sqrt{8z+1}+1$ ise ya $2x+2y+2$ ya da $2x+2y+3$ olur.
Bundan dolayı,

$$[\ \sqrt{8z+1}+1\ ] = 2x+2y+2$$

$$\Longrightarrow \quad [\ \sqrt{8z+1}+1\ ]\ /\ 2 = x+y+1 \qquad \text{olur.}$$

Buradan $x+y$ 'i çekersek,

$$x+y = \{\ [\ \sqrt{8z+1}+1\ ]\ /\ 2\ \} - 1 \qquad (2)$$

bulunur.

(1) ve (2) 'den

$$3x+y = 2z - \{\ (\ [\ \sqrt{8z+1}+1\ ]\ /\ 2\ ) - 1\ \}^2 \qquad (3)$$

bulunur.

Oysa (2) ve (3) denklemleri, herbir z için (1) koşulunu yerine getiren en fazla bir (x,y) 'nin varlığı şeklindeki idiamızı açıkça gösterir. Eğer böyle (x,y) 'ler varsa rekürsif fonksiyonlar ile hesaplanabilirler. Eğer

$$Q_1(z) = \{\ [\ \sqrt{8z+1}+1\ ]\ /2\ \} \dot{-} 1$$

$$Q_2(z) = 2z \dot{-} (Q_1(z))^2$$

olarak yazarsak, o taktirde $Q_1(z)$ ve $Q_2(z)$ rekürsif fonksiyonlardır ve (2), (3) denklemleri

$$x+y = Q_1(z)$$

$$3x+y = Q_2(z)$$

formunda yazılabilir. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

Bu denklem sistemi, iki bilinmeyenli denklem şeklinde çözülürse,

$$x = (\ Q_2(z) \dot{-} Q_1(z)\ )\ /\ 2$$

$$y = Q_1(z) \dot{-} [\ (\ Q_2(z) - Q_1(z)\ )\ /\ 2\ ]$$

şeklinde bulunur.

Bu ifadeleri,

$$K(z) = (Q_2(z) \dot{-} Q_1(z)) / 2$$

$$L(z) = Q_1(z) \dot{-} [(Q_2(z) \dot{-} Q_1(z)) / 2]$$

ile gösterirsek, K(z) ve L(z) fonksiyonları rekürsif fonksiyonlardır. Böylece x,y,z , (1) koşulunu sağlarsa x = K(z) y = L(z) 'dir. Oysa, x ve y 'i keyfi seçersek, z = J(x,y), (1) koşulunu sağlar. O halde x = K(J(x,y)) ve y = L(J(x,y)) olur.

Şimdi z, herhangi bir doğal sayı olsun. r sayısı, $1+2+...+r \leq z$ olacak şekilde bir doğal sayı olsun.

$x = z - (1+2+...+r)$ olarak alalım. O taktirde

$x \leq r$ olur.

$y = r - x$ olsun. $r = x + y$ olduğu açıktır.

$$x = z - (1+2+...+r)$$

$$z = (1+2+...+r) + x$$

$$z = (1+2+...+(x+y)) + x$$

$$z = 1 / 2 \ (x+y).(x+y+1) + x$$

$$z = J(x,y)$$

Böylece $x = K(J(x,y)) = K(z)$

$y = L(J(x,y)) = L(z)$

, yani $z = J(K(z),L(z))$ olur.

Teorem III.1.

J(K(z),L(z)) = z , K(J(x,y)) = x , L(J(x,y)) = y olacak şekilde J(x,y), K(z), L(z) rekürsif fonksiyonları vardır.

Bu teoremin ispatı, daha önce açıklandığı gibidir.

Sonuç III.1.

Eğer K(z)=K(z') ve L(z)=L(z') ise o taktirde z=z' dür.

İspat :

z = J(K(z),L(z)) = J(K(z'),L(z')) = z' dür.

Şimdi, daha sonra verilen teoremlerin ispatları için kolaylık sağlayacak yardımcı teoremi verelim.

Yardımcı Teorem III.1.

v sayısı, $1,2,\ldots,n$ sayıları ile bölünebilen bir sayı olsun. O taktirde, $1 + v(i+1)$ sayıları ($i=0,1,2,\ldots n$), ikişer ikişer aralarında asaldır.

İspat :

$m_i = 1 + v(i+1)$ olsun:

v sayısı, $1,2,\ldots,n$ sayıları ile bölünebildiğinden, m_i 'nin 1 'in dışındaki herhangi böleni, n 'den daha büyük olmalıdır.

$j=0,1,2,\ldots,n$ olmak üzere $(m_i, m_j) = d$ olsun ($i>j$).

Bundan dolayı $d \mid m_i$, $d \mid m_j$ yazabiliriz.

$$d \mid m_i \text{ , } d \mid m_j \Longrightarrow d \mid (i+1)m_j - (j+1)m_i \Longrightarrow d \mid i-j$$

$0 \leq i,j \leq n$ ve $i>j$ olduğundan $i-j \leq n$ olacaktır. d, m_i 'lerin bir böleni olduğundan ya $d = 1$ ya da $d > n$ olacaktır. Oysa,

$$i-j \leq n \text{ ve } d \mid i-j$$

olduğundan $d > n$ olamaz. O halde, $d = 1$ olmak zorundadır. Bu da

$$(m_i, m_j) = 1$$

yani, $1 + v(i+1)$ sayıları ikişer ikişer aralarında asaldır.

Teorem III.2.

$a_0, a_1, \ldots, a_n$, tamsayıların sonlu bir dizisi olsun. O taktirde $R(u, 1 + v(i+1)) = a_i$ olacak şekilde u ve v tamsayıları vardır ($i=0,1,2,\ldots,n$).

İspat :

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ tamsayılarının en büyüğü A olsun. $v = 2An!$ ve $m_i = 1 + v(i+1)$ olsun. O taktirde yardımcı teoremden, m_i 'ler, ikişer ikişer aralarında asaldır. Bu kabullerden dolayı, $a_i < v < m_i$ olacak şekilde v sayısı vardır.

Şimdi $R(x,y)$, x 'in y ile bölümündeki kalanı gösterdiğinden ve Çinlilerin Kalan Teoremi yardımı ile

$u \equiv a_i \pmod{m_i}$ $(i=0,1,\ldots,n)$ olacak şekilde bir u sayısı vardır.

Yani, $R(u,m_i) = R(a_i,m_i)$ 'dir.
Oysa $a_i < m_i$ 'dir. O halde $R(u,m_i) = R(a_i,m_i)$ olur.

Böylece,

$$R(u,1+v(i+1)) = R(u,m_i) = R(a_i,m_i) = a_i \quad \text{'dir.}$$

Teorem III.3.

$a_0,a_1,\ldots,a_n$ sayıları ne olursa olsun, $T_i(w) = a_i$ olacak şekilde bir w_0 sayısı varsa, bir $T_i(w)$ rekürsif fonksiyonu vardır $(i=0,1,\ldots,n)$.

İspat :

$$T_i(w) = R(K(w),1 + [L(w)(i+1)])$$

denklemi ile $T_i(w)$ fonksiyonu tanımlansın. $a_0,a_1,\ldots,a_n$ tamsayıları veriliyor. O taktirde, Teorem III.2. 'den,

$$R(u,1 + v(i+1)) = a_i$$

olacak şekilde bir u ve v sayısı vardır $(i=0,1,\ldots,n)$.

$w_0 = J(u,v)$ olarak alalım. Buradan,

$$\begin{aligned} T_i(w_0) &= R(K(J(u,v)),1 + [L(J(u,v))(i+1)]) \\ &= R(u,1 + v(i+1)) \\ &= a_i \end{aligned}$$

bulunur ki böyle bir w_0 sayısı mevcuttur. Bundan dolayı

$$T_i(w) = R(K(w),\ 1 + [L(w)(i+1)])$$

şeklinde verilen fonksiyon, rekürsif fonksiyondur.

BÖLÜM IV

PRİMİTİF REKÜRSİYON
VE
PRİMİTİF REKÜRSİF FONKİYONLAR

IV.1. PRİMİTİF REKÜRSİYON

Bu bölümde, konunun temeli olan, tekrarlı işlemler ve tekrarlı fonksiyonlardan bahsedilecektir.

x^y ve $x!$ gibi fonksiyonların, hesaplanabilirliği konusunu gözönüne alalım. 7^5 'in değerini bulmaya çalışalım. Bu değerin bulunması için uygulanan genel bir işlem, aşağıdaki gibidir:

$7^1 = 7$, $7^2 = 7^1 . 7 = 7 .7 = 49$

$7^3 = 7^2 . 7 = 49 .7 = 343$, $7^4 = 7^3 . 7 = 343 .7 = 2401$

$7^5 = 7^4 . 7 = 2401 . 7 = 16807$

Bu işlem,

$$\begin{cases} x^1 = x \\ x^{y+1} = x^y . x \end{cases}$$

rekürsiyon denklemleri olarak adlandırılan denklemlerle temsil edilebilir. Burada $x^0 = 1$ değeri, birinci denklem olarak alınabilir.

Aynı şekilde, $x!$ fonksiyonu,

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (x+1)! = (x+1) . x! \end{cases}$$

denklemlerinden hesaplanabilir.

Rekürsiyon denklemlerinin, daima bir ve yalnız bir tam fonksiyon tanımladığını göstererek başlayalım.

Teorem IV.1

$f(X^{(n)})$ ve $g(X^{(n+2)})$, iki tam fonksiyon olsun. O taktirde,

$$(1) \quad \begin{cases} h(0,X^{(n)}) = f(X^{(n)}) \\ h(z+1,X^{(n)}) = g(z,h(z,X^{(n)}),X^{(n)}) \end{cases}$$

rekürsiyon denklemlerini sağlayan en fazla bir $h(X^{(n+1)})$ tam fonksiyonu vardır.

İspat :

Aksini düşünelim. Yani, $h_1(X^{(n+1)})$ ve $h_2(X^{(n+1)})$ tam fonksiyonlarının her ikisinin de (1) denklemini sağladığını kabul edelim.
Sonuçta,

$$\forall\, y,X^{(n)} \text{ için } \quad h_1(y,X^{(n)}) = h_2(y,X^{(n)})$$

olduğu görülecektir.

y=0 ve her $X^{(n)}$ için kesinlikle doğrudur. Çünkü,

$$h_1(0,X^{(n)}) = f(X^{(n)}) = h_2(0,X^{(n)})$$

olduğu tanımdan kolayca görülür.

Şimdi y=z için doğru kabul edelim. O taktirde,

$$\begin{aligned} h_1(z+1,X^{(n)}) &= g(z,h_1(z,X^{(n)}),X^{(n)}) \\ &= g(z,h_2(z,X^{(n)}),X^{(n)}) \\ &= h_2(z+1,X^{(n)}) \end{aligned}$$

bulunur.

Bu durumda, aksini düşünerek kabul ettiğimiz iki fonksiyon, birbirine eşittir. Yani,

$$\forall\, y,X^{(n)} \text{ için } \quad h_1(y,X^{(n)}) = h_2(y,X^{(n)}) \quad \text{'dir}$$

ve (1) denklemlerini sağlar.

Bu teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım IV.I

Primitif rekürsiyon işlemi, verilen $f(X^{(n)})$ ve $g(X^{(n+2)})$ gibi tam fonksiyonları ile $h(X^{(n+1)})$ fonksiyonunu birleştirir. Burada işlem,

$$\begin{cases} h(0,X^{(n)}) = f(X^{(n)}) \\ h(z+1,X^{(n)}) = g(z,h(z,X^{(n)}),X^{(n)}) \end{cases}$$

şeklindedir.

Eğer f ve g fonksiyonları rekürsif ise $h(X^{(n+1)})$ fonksiyonu da rekürsiftir. Örneğin,

$$f(x) = 1 = S(N(x))$$

$$g(x,u,v) = u \,.\, v$$

şeklinde iki fonksiyon olsun. O taktirde, $f(x)$ ve $g(u,v,x)$ fonksiyonları rekürsiftir. Bundan dolayı, $h(z,x)$ de rekürsiftir ve

$$h(0,x) = f(x) = 1$$

$$h(z+1,x) = g(z,h(z,x),x) = x \,.\, h(z,x)$$

denklemlerini sağlar.

Ayrı bir örnek olarak, $h(x,y) = x^y$ fonksiyonu da bu denklem çiftini sağlar. Böylece Teorem IV.1 'den dolayı bu fonksiyon da rekürsiftir ve hesaplanabilir.

IV.2 PRİMİTİF REKÜRSİF FONKSİYONLAR

Bu kısımda, primitif rekürsif fonksiyonlar olarak adlandırılan; rekürsif fonksiyonların bir sınıfının belirli bir alt sınıfı üzerinde çalışılacaktır. Bu sınıf, genellikle karşılaşılan tüm nümerik fonksiyonları içine alır. Yine de, tüm rekürsif fonksiyonlara sahip olmayan bir sınıf, belirli bir yapısal karaktere sahiptir. Gerçekten, bu özelliklere sahip olan ve çalışılan başka bir çok sınıf vardır.

Tanım IV.2.1

Bir fonksiyon, aşağıda sıralanan fonksiyonlar ile başlayan, primitif rekürsiyon ve bileşke işlemlerinin sonucunda elde edilebilirse, primitif rekürsif 'tir, denir.

(1) $C_A(x)$

(2) $S(x) = x + 1$

(3) $N(x) = 0$

(4) $I^n_i(x_1,...,x_n)) = x_i$

Sonuç IV.2.1

Eğer bir fonksiyon primitif rekürsif ise, o taktirde rekürsiftir.

Bu sonuç, Bölüm II 'deki rekürsif fonksiyon tanım ve örneklerinden, N(x) 'in rekürsif olma durumundan ve Tanım IV.1.1 'den dolayı açıktır. Primitif rekürsif olmayan rekürsif fonksiyonların varlığı da gösterilebilir.

Şimdi ,bazı primitif rekürsif fonksiyonları sıralayalım :

(1) $x + y$ $\quad$ $x + 0 = x = I^1_1(x)$

$x + (y+1) = (x + y) + 1 = S\ (x+y)$

(2) $x\ .\ y$ $\quad$ $x\ .\ 0 = 0 = N(x)$

$$x \cdot (y+1) = (x \cdot y) + x = x \cdot y + I_1^2(x,y)$$

(3) $M(x)$ (Öncel fonksiyon)

Burada, $M(0) = 0$ ve $x>1$ ise $M(x) = x - 1$

$$M(0) = 0 = N(x)$$

$$M(x+1) = M(x) + 1 = x = I_1^1(x)$$

(4) $x \dot{-} y$

$$x \dot{-} 0 = x - 0 = x = I_1^1(x)$$

$$x \dot{-} (y+1) = (x \dot{-} y) - 1 = P(x \dot{-} y)$$

M

(5) $n!$

$$0! = 1 = S(N(x))$$

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! = S(n) \cdot n!$$

(6) x^y

$$x^0 = 1 = S(N(x))$$

$$x^{y+1} = x^y \cdot x = x^y \cdot I_1^2(x,y)$$

(7) $\alpha(x) = 1 \dot{-} x$

$$\alpha(x) = S(N(x)) \dot{-} I_1^1(x)$$

(8) $| x - y |$

$$| x - y | = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)$$

Teorem IV.2.1

Bir fonksiyon, ancak ve ancak bileşke işlemleri, primitif rekürsiyon ve Tanım IV.2.1 'de sıralanan fonksiyonların minimalleştirilmesi ile elde edilebiliyorsa, kısmi rekürsiftir.

Eğer minimalleştirme, sadece regular fonksiyonlara uygulanırsa, rekürsif fonksiyonların sınıfı bulunacaktır.

İspat :

Bu sonuç, tüm primitif rekürsif fonksiyonların ve Tanım II.1 'de sıralanan fonksiyonların, primitif rekürsif durumlarından hemen anlaşılır.

Teorem IV.2.2

$f(k,X^{(p)})$, bir (primitif) rekürsif fonksiyon olmak üzere

$$g(n,X^{(p)}) = \sum_{k=0}^{n} f(k,X^{(p)})$$

$$h(n,X^{(p)}) = \prod_{k=0}^{n} f(k,X^{(p)})$$

fonksiyonları da (primitif) rekürsiftir.

İspat :

İspat için , primitif rekürsiyon işlemlerini uygulayalım:

$$g(0,X^{(p)}) = f(0,X^{(p)})$$

$$g(n+1,X^{(p)}) = g(n,X^{(p)}) + f(n+1,X^{(p)})$$

$$h(0,X^{(p)}) = f(0,X^{(p)})$$

$$h(n+1,X^{(p)}) = h(n,X^{(p)}) \,.\, f(n+1,X^{(p)})$$

bulunur ki $g(n,X^{(p)})$ ve $h(n,X^{(p)})$ fonksiyonları da (primitif) rekürsiftir.

BÖLÜM V

REKÜRSİF KÜMELER VE YÜKLEMLER

Fonksiyonlarda olduğu gibi kümelerin ve yüklemlerin rekürsifliğinden bahsedilebilir. Bölüm I 'deki tanımlara ve açıklamalara dayanarak aşağıdaki tanımları ve teoremleri verebiliriz.

Tanım V.1

S, n - lilerin bir kümesi olsun. O taktirde S kümesinin karakteristik fonksiyonu olan $C_S(X^{(n)})$ (primitif) rekürsif ise S' ye , (primitif) rekürsif bir kümedir, denir.

Teorem V.1.

R ve S (primitif) rekürsif kümeler olsun. O taktirde $R \cup S$, $R \cap S$ ve $\tilde{R}$ kümeleri de (primitif) rekürsif kümelerdir.

İspat :

Bölüm I 'de verilen üç özellikten, yani,

$$M = R \cup S$$

$$N = R \cap S$$

olacak şekilde

$$C_M = C_{R \cup S} = C_R \,.\, C_S$$

$$C_N = C_{R \cap S} = C_R + C_S - (C_R . C_S)$$

$$C_{\tilde{R}} = 1 - C_R$$

denklemlerinden gösterilir.

Sonuç V.1

$P(X^{(n)})$, n - değişkenli bir yüklem olsun. Bu yüklemin kapalı şekli

$$\{ X^{(n)} \mid P(X^{(n)}) \}$$

kümesidir. Eğer bu küme, (primitif) rekürsif bir küme ise $P(X^{(n)})$ yüklemi, (primitif) rekürsif bir yüklemdir.

Ayrıca, yüklemin karakteristik fonksiyonu incelenirken, yüklemin kapalı şekli olan küme gözönüne alınır. O halde, Tanım V.1 'den dolayı, $P(X^{(n)})$ yükleminin (primitif) rekürsif olabilmesi için gerek ve yeter koşul, yüklemin karakteristik fonksiyonunun (primitif) rekürsif olmasıdır.

Teorem V.2

P ve Q , (primitif) rekürsif yüklemler olsun. O taktirde, $P \bigvee Q$, $P \bigwedge Q$ ve $\sim P$ yüklemleri de (primitif) rekürsiftir.

İspat :

Teorem V.1 ve Sonuç V.1 'deki açıklamalara dayanarak,

$$C_{P \vee Q} = C_P \,.\, C_Q$$

$$C_{P \wedge Q} = (C_P + C_Q) \dot{-} (C_P . C_Q)$$

$$C_{\sim P} = 1 \dot{-} C_P$$

özdeşliklerinden hemen anlaşılır.

Teorem V.3

$P(y, X^{(n)})$, (primitif) rekürsif bir yüklem olsun. O taktirde,

(1) $$\bigvee_{y=0}^{z} P(y, X^{(n)})$$

ve

(2) $$\bigwedge_{y=0}^{z} P(y, X^{(n)})$$

yüklemleri de (primitif) rekürsiftir.

İspat :

İspata kolaylı sağlamak amacıyla,

$$Q(z,X^{(n)}) \Longleftrightarrow \bigvee_{y=0}^{z} P(y,X^{(n)})$$

olacak şekilde (1) yüklemine denk, $Q(z,X^{(n)})$ yüklemini gözönüne alalım. O taktirde, bir önceki teorem ile Sonuç V.1 'den dolayı

$$C_Q(z,X^{(n)}) = \prod_{y=0}^{z} C_P(y,X^{(n)}) \qquad \text{'dir.}$$

ve (1) yüklemi (primitif) rekürsiftir.

(2) yüklemi için, Bölüm I 'de de bahsedilen modern mantığın değilleme kuralı yardımı ile

$$\bigwedge_{y=0}^{z} P(y,X^{(n)}) \Longleftrightarrow \sim \bigvee_{y=0}^{z} \sim P(y,X^{(n)})$$

yazılır ve bir önceki teorem uygulanarak (primitif) rekürsif olduğu gösterilir.

Nicelemenin sınırlılığı, bu sonuçta önemlidir.

Teorem V.4

Q, H_1, $H_2,\ldots,H_k$ yüklemleri (primitif) rekürsif yüklemler olsun. O halde

$$P(X^{(n)}) \Longleftrightarrow Q(H_1(X^{(n)}),\ldots,H_k(X^{(n)}))$$

şeklinde tanımlanan $P(X^{(n)})$ yüklemi de (primitif) rekürsiftir.

İspat :

Bu yüklemlerin (primitif) rekürsifliğini göstermek için ;

$$C_P(X^{(n)}) = C_Q(H_1(X^{(n)}),\ldots,H_k(X^{(n)}))$$

yazmak yeterlidir.

Teorem V.5

$F(X^{(n)})$ bir fonksiyon ve $P(X^{(n)})$ de bir yüklem olsun. $F(X^{(n)})$ ve $P(X^{(n)})$ (primitif) rekürsif ise $F^{-1}(P)$ 'de (primitif) rekürsiftir.

İspat :

Bu teorem, aslında,

$$C_{\underset{F}{-1}(P)}(X^{(n)}) = C_P \circ F$$

durumunun bir sonucudur. O halde ispat için,

$$C_{\underset{F}{-1}(P)}(X^{(n)}) = 0 \iff X^{(n)} \in F^{-1}(P) \iff F(X^{(n)}) \in P(X^{(n)})$$

$$\iff C_P(F(X^{(n)})) = 0$$

yazmak yeterlidir.

Teorem V.6

{ n } kümesi, (primitif) rekürsiftir.

İspat :

Bunun için tümevarım uygulayalım:

<u>n = 0 için</u> ;

{ 0 } kümesinin (primitif) rekürsif olup olmadığına, karakteristik fonksiyon yardımı ile bakalım.

$$C_{\langle 0 \rangle}(0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \in \{0\}$$

$$C_{\langle n+1 \rangle}(0) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \notin \{0\}$$

Primitif rekürsiyon işlemi sonucunda, karakteristik fonksiyon, 0 ve 1 değerlerini değiştirmektedir. O halde n = 0 için doğrudur.

<u>n = k için</u> ; doğruluğunu kabul edelim.

<u>n = k + 1</u> durumunu inceleyelim. Oysa Bölüm IV.2 'de tanımladığımız M öncel fonksiyonu yardımı ile

$$\{ k + 1 \} = M^{-1}(\{ k \})$$

yazabiliriz. M ve M^{-1} fonksiyonları (primitif) rekürsif olduklarından, teorem, k+1 için de doğrudur. O halde, her n için teorem doğru olur ve ispat biter.

Sonuç V.2

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak, sonlu kümeler ve tümleyenleri (primitif) rekürsiftir.

Teorem V.7

$x = y$ ve $x < y$ yüklemleri (primitif) rekürsiftir.

İspat :

İspat için, yüklemlerin karakteristik fonksiyonları incelenir. Özel olarak,

$x = y$ yükleminin karakteristik fonksiyonu;

$$\alpha(\alpha(|x - y|)) = \alpha(\alpha(0)) = \alpha(1) = 0$$

$x < y$ yükleminin karakteristik fonksiyonu;

$\alpha(y \dot{-} x) \Longleftrightarrow$ $x < y$ için $y \dot{-} x = y-x$ olur.
$x < y \Longleftrightarrow y-x > 0$
$\alpha(y-x) = 0$

Alternatif olarak, $x = y$ 'nin primitif rekürsifliği,

$$x = y \iff (x < y) \sim (x < y)$$

şeklinde $x < y$ yükleminden bulunmuştur.

KAYNAKÇA

AKSOY, Yavuz , Matematik Lojik - 1978

AKSOY, Yavuz , Ders Notları - 1984

DAVIS, Martin , Computability and Unsolvebility - 1958

TERZİLER, Mehmet , Yinelemeli Fonksiyonlar

GREZEGORCZYK, A. , Fonction Recursive - 1961

HERMES, H. , Enumerability, Decidability, Computability 1965

KLEENE, S.C. , General Recursive Functions of Natural Numbers - 1936

GÖDEL K. , On Undecidable Prorositions of Formal Mathematical Systems - 1934

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Erdoğan Mehmet Özkan
Doğum tarihi	: 2 Aralık 1967
Doğum Yeri	: İstanbul
İlk Öğrenimi	: 1978 yılında İstanbul Faik Binal İlkokulundan mezun oldu.
Orta Öğrenim	: 1981 yılında Özel Yıldız Kolejinden , 1984 yılında İstanbul Etiler Lisesinden mezun oldu.
Yüksek Öğrenim	: 1984 yılında Yıldız Üniversitesi Fen - Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde başladığı eğitimini, 1989 yılında tamamladı.
Görevi	: Yıldız Üniversitesi Fen - Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Matematiğin Temelleri ve Matematik Lojik Anabilim Dalı Araştırma Görevlisi

-