YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EĞRİ UYDURULMASI

Yeşim MERT

F.B.E Matematik Anabilim Dalında Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Doç.Dr. Ayşe KURUÜZÜM

İSTANBUL , 1993

İÇİNDEKİLER

T E Ş E K K Ü R

Hazırlamış olduğum yükek lisans tezimde gereken itinayı ve yardımlarını esirgemeyen tez danışmanım *Sayın Doç.Dr. Ayşe KURUÜZÜM'* e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Gerek çelışmalarımda gerekse tezin hazırlanması sırasında desteklerini esirgemeyen *Sevgili Aileme* , gösterdiği özverileri ile Prof. Faik Somer Lisesi Müdürü *Sayın Handan DÖLEN'* e , yardımlarından dolayı *Arş.Gör. Işım GENÇ* ve *Arş.Gör. Aydın Demiriz'* e teşekkür ederim.

Yeşim MERT
Ekim 1993

Ö Z E T

Ayrık noktalardaki değerleri bilinen bir fonksiyon bu noktalardan geçen bir polinom veya başka bir fonksiyon ile yaklaşık olarak tanımlanabilir. Ancak böyle bir yaklaşım, bazen iki bakımdan sakıncalı olabilir , birincisi enterpolasyon işlemi sırasında polinomlar için alınan nokta sayısı kullanılan polinomun üssünden bir fazladır. Halbuki bu problemlerde çok fazla sayıda değer bilinebilir ve bu değerlerin tümünün iyi çözüm amacıyla kullanılması kuşkusuz yararlı olur. İkincisi, yaklaşık olarak kullanılan yaklaşım fonksiyonu G(x) verilen f(x) fonksiyonunu sadece belli bir aralıkta tanımlar. Halbuki, bazı hallerde gerçek fonksiyon ile enterpolasyon fonksiyonu verilen noktalar dışında birbirinden çok farklı olabilir ve bu durum gerçek çözümde hiçbir şekilde görülmeyebilir. Bu tür sakıncaları önlemek amacıyla bulunan G(x) fonksiyonunun verilen f(x) fonksiyonunu daha iyi bir yaklaşım ile tanımlaması istenir.

Bu yöntemlerin başında I. Bölümde incelenen Minimax yaklaşımlar , En Küçük Kareler Yaklaşımı , Trigonometrik Fonksiyonlar ile yaklaşım ve Ortogonal Fonksiyonlar ile Yaklaşımları gelmektedir.

II. Bölümde ise çok daha iyi yaklaşım sağlayan Lineer Spline fonksiyonlarını , Kübik Spline fonksiyonlarını ve Beşinci Mertebeden Spline fonksiyonları incelenmiştir.

SUMMARY

A function known the values at discrete points can be define with a polinomial or another function having these points. But such an approximation sometimes could be incovenient in two ways. Firstly the number of using points for polinomials is one more then the degree of using polinomials during to enterpolate. However, a lot of value can be known in these problems and of course, to use all of them for having well results will be usefull. Secondly approximation function G(x) using for enterpolation defines the given function f(x) only in the evident interval. However, in some cases, the real function and the enterpolation function could be very different outside of the given points. Also this situations could never be seen at the exact solution. For bewaring of this inconvenient cases, wanted to be convenient to the give f(x) functions with the founded function G(x).
Leads this methods are Minimax approximations, Least Squares, Approximation of Trigonometric and Orthogonal Functions to take up in the first chapter.

In the second chapter is shown Linear Splines, Cubic Splines and Fifth Degree Splines Functions which are the best approximations.

GİRİŞ

Matematiksel bir problemin çözümünü yapmaya başlamadan önce o problemin çözümünün var olup olmadığını saptamak gerekir. Eğer var ise bu problem için çeşitli çözüm yollarından birisi seçilerek işleme başlanır. Örneğin, bir serinin toplamı istendiğinde önce verilen serinin toplamının mevcut olup olmadığını araştırmamız gerekir. Sonuç ıraksak çıktığında toplam değeri mevcut değildir.

Sayısal hesaplamalarda da aynı durum geçerlidir ve uygulamalarda genel olarak herhangi n boyutlu uzayda $(x_1^i, x_2^i, ..., x_n^i)$ gibi n tane bağımsız değişkene bağlı $f(x_i)$ fonksiyon değerleri veya kesikli değerleri verilebilir.Eğer tablo değerleri verilmiş ise $f = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ gibi bir ilişki verilmek zorundadır. Değişkenler arasında verilmiş olan bu ilişki R^n uzayındaki bir D bölgesinde olmayıda beraberinde getirir.Halbuki birçok durumda belli koşullar altında süreklilik bölgenin her yerinde aranmayabilir. Zaten sayısal analizde kesikli büyüklükler kullanılmak zorundadır. Fonksiyon ne şekilde verilirse verilsin, bu fonksiyonu temsil eden bir başka fonksiyon sayısal hesaplamalarda kullanılacaktır. Bu belirleme genel fonksiyonun açılımları yada entegral işlemleriyle yapılabilir. Ancak bu tür işlemler pratik yöntemden yada işlem zamanı yönünden pratik olmaz, bunların yerine genelde fonksiyonu temsil edecek olan yaklaşım fonksiyonunun basit ve hesaplamada kolaylıkları getiren türden olması istenir. Bildiğimiz en basit fonksiyonlar polinomlardır, bunlarında en küçük dereceden olanları hesaplama kolaylıkları nedeniyle tercih edilirler. Herhangi bir f(x) fonksiyonu gözönüne alındığında $x = x_0$ civarında tanımlı ve sürekli olan bu fonksiyonun hesaplanması eğer bu fonksiyonun bu nokta civarında daha basit bir fonksiyon ile ifade edilmesi isteniyorsa ilk baş vurulacak yol taylor açılımıdır.

B Ö L Ü M I

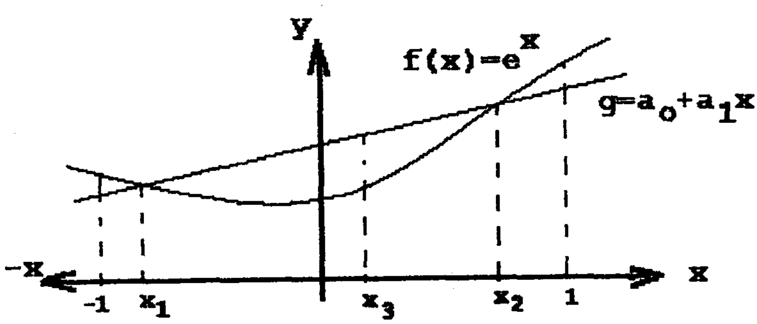
1. YAKLAŞIM FONKSİYONLARI

1.1. MİNİMAX YAKLAŞIMLAR

F(x) fonksiyonu [a,b] aralığında tanımlı ve sürekli olduğunda öyle n>0 ve $P_n(x)$ polinomu bulunmalıdır ki verilen aralıkta $e^x = |P_n(x) - f(x)|$ mutlak hataların en büyüğü yani maximum hata minimize edilsin. Minimax yaklaşım e^x değerinin minimize edilebilmesi için $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ polinomunun $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ katsayılarının nasıl belirleneceği sorusunun cevabıdır.

$P_n(x)$'i belirlemek için (n+1) bilinmeyenli bir denklem sistemi oluşturup, bu sistemi çözme zorunluluğu vardır. Bu da bu yöntemın en sonra düşünülecek güçlüğüdür. Yöntemin asıl güçlüğü f(x) fonksiyonunun gösterdiği eğrinin belli bazı noktalardaki değeri ile , yaklaşım fonksiyonunun belirtilen noktalardaki değerinin maximum hata veren noktalar olarak saptanmasıdır. Bu nedenle bu yöntemde küçük derceli polinomlar ile çalışmak hem hesaplama kolaylığı bakımından ,hemde maximum hatayı veren nokta veya noktaların bulunabilmesi açısından önemlidir. Ancak polinomun derecesi arttıkça daha az hata ile yaklaşım fonksiyonuna varılabileceği söylenebilir.

ÖRNEK: [-1,1] aralığında $f(x) = e^x$ fonksiyonuna $g_1(x) = a_0 + a_1x$ şeklinde bir polinom ile minimax yaklaşalım,bu durumda a_0 ve a_1 değerlerini bulmalıyız.



Şekil 1.1.

$\varepsilon(x) = e^x - (a_0 + a_1 x)$ herhangi bir noktadaki hata. Amacımız q_1 denilen hatayı [-1,1] aralığında minimize etmek.

$$\begin{array}{ccc} \varepsilon(-1) = q_1 & \varepsilon(x_3) = -q_1 & \varepsilon(1) = q_1 \\ \varepsilon(x_1) = 0 & \varepsilon(x_2) = 0 & \end{array}$$

Burada bilinmeyenler $q_1, a_0, a_1, x_1, x_2, x_3$ dür.

$\varepsilon'(x_3) = 0$ olmalıdır.

$$\begin{aligned} \varepsilon(-1) &= e - 1 - a_0 + a_1 &= q_1 \\ \varepsilon(x_3) &= e^{x^3} - a_0 - a_1 x_3 &= -q_1 \\ \varepsilon(1) &= e - a_0 - a_1 = q_1 & \end{aligned}$$

bağıntılarından

$$\varepsilon(-1) = \varepsilon(1)$$

$$e - 1 - a_0 + a_1 = e - a_0 - a_1$$

$$a_1 = e - e - \frac{1}{2} = sin(h_1) = 1.1752$$

elde edilir.

$\varepsilon(x_3) = e^{x_3} - a_0 - a_1 x_3 = -q_1$

$\varepsilon'(x_3) = e^{x_3} - a_1 = 0$ 'dan

$$e^{x_3} = a_1$$

$$Ln(e^{x_3}) = Ln(a_1)$$

$$x_3 = Ln(1.1752) = 0.1614$$

$\varepsilon(1) = -\varepsilon(x_3)$ ise

$$e - a_0 - a_1 = -e^{x_3} + a_0 + a_1 x_3$$

elde edilir. Bulunan değerleri yerine koyarsak ; $a_0 = 1.2643$ olarak bulunur.

$$\begin{aligned} \varepsilon(1) &= e - a_0 - a_1 \\ &= 0.2788 (Max.Hata) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_1(x) &= a_0 + a_1 x \\ &= 1.2643 + 1.1752x \end{aligned}$$

1.2. EN KÜÇÜK KARELER YAKLAŞIMI

$(x_i, f(x_i))$ i= 1,2,3,...,n tablo değerleri verilmiş olsun. Bu şekilde verilen noktaları en iyi şekilde temsil edecek G(x) fonksiyonunu seçmek mümkündür. G(x) fonksiyonunun tipi bir polinom, rasyonel fonksiyon, trigonometrik fonksiyon vb. olarak problem çözücü tarafından seçilir. Bu veriler altında $[x_0, x_n]$ aralığında her x_i değerinin tablo değeri $f(x_i)$ ile yaklaşım fonksiyonu $G(x_i)$ arasındaki farkı m_i ile gösterirsek ;

$$m_i = |f(x_i) - G(x_i)|$$

dir.

Her bir noktada

$$M = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - G(x_i)]^2$$

şeklinde ifade edilir. M ile gösterdiğimiz toplamların mininum olması koşulu ile G(x) yaklaşım fonksiyonunun belirlenmesi yöntemine E.K.K.Y denir. Bu yaklaşım fonksiyonu hangi türden olursa olsun m tane parametresi olacaktır.

$G(x) = (x, c_1, c_2, ..., c_m)$ polinomunu işlemciye kolaylık sağlayacak biçimde istediğimiz biçimde seçebiliriz. G(x) fonksiyonu $G(x) = (x, c_1, c_2, ..., c_m)$ şeklinde seçilmiş olsun. Bu durumda

$$M = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - G(x_i, c_1, c_2, ..., c_m)]^2$$

olur. M değerinin bir minimuma sahip olabilmesi için gerek koşul

$$\frac{\partial M}{\partial c_i} = 0 \qquad i = 1, 2, 3..., m$$

olmasıdır. Bu koşul karşımıza n bilinmeyen içeren m denklemden oluşan bir sistem çıkarır karşımıza. Buna A.C=B şeklinde bir sistem diyebiliriz.

A:Katsayı vektörü **B:** İkinci taraf vektörü **C:** Bilinmeyen vektör

Eğer seçtiğimiz yaklaşım fonksiyonu $c_1, c_2, c_3, ..., c_m$ parametrelerine göre,

$$G(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + c_3 g_3(x) + ... + c_m g_m(x)$$

şeklinde lineer ise;

$$\frac{\partial M}{\partial c_i} = 0 \qquad i = 1, 2, 3, ..., m$$

denklem sistemi lineerdir. Ayrıca çoğu zaman analitik ifadesi verilen bir f(x) fonksiyonuna G(x) gibi daha basit bir fonksiyon ile yaklaşılmak istenebilir.Bu durumda ;

$$M = \int_{x_0}^{x_n} [f(x_i) - G(x_1, x_2, x_3, ..., x_m)]^2 dx$$

olarak belirlenir. Aynı koşullar bu durumda da söz konusudur.

ÖRNEK: $f(x) = e^x$ fonksiyonuna $G(x) = c_1 + c_2 x$ şeklinde bir yaklaşım fonksiyonu [-1,1] aralığında E.K.K.Y ile yaklaşalım.

$f(x) = e^x$ analitik ifadesi verildiğinden

$$M = \int_{x_0}^{x_n} [f(x_i) - G(x_1, x_2, x_3, ..., x_m)]^2$$
$$= \int_{-1}^{1} (e^x - c_2 - c_2 x)^2 dx$$

$\frac{\partial M}{\partial C_i} = 0$ i=1,2,...,m koşulundan

$$\frac{\partial M}{\partial c_1} = 0$$
$$\frac{\partial M}{\partial c_2} = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial c_1} = -2 \int_{-1}^{1} (e^x - c_1 - c_2 x) dx = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial c_2} = -2 \int_{-1}^{1} x(e^x - c_1 - c_2 x) dx = 0$$

dır.

$$\int_{-1}^{1} (e^x - c_1 - c_2 x) dx = e^x - c_1 x - c_2 . \frac{x^2}{2} |_{-1}^{1} = 0$$

$$c_1 = sh(1) = 1.1752$$

$$\int_{-1}^{1}(xe^x - c_1 x - c_2 x^2)dx = e^x(x-1) - c_1.\frac{x^2}{2} - c_2.\frac{x^3}{3}|_{-1}^{1}$$

$$c_2 = 1.1036$$

bulunur. Buradan

$$G(x) = c_1 + c_2 x = 1.1752 + 1.1036x$$

elde edilir.

[-1,1] aralığında f(x) ile G(x) arasındaki hatanın maxsimum değeri :

$$M = \int_{-1}^{1} [e^x - 1.1752 - 1.1036]^2\, dx$$
$$= 2e^x + 1.38x + 0.40x - 4.45e^x + 0.64x^2|_{-1}^{1} = 0.44$$

olarak elde edilir.

ÖRNEK:

$P_1(1, 5.12)$ $P_2(3,3)$ $P_3(6, 2.48)$ $P_4(9, 2.34)$ $P_5(15, 2.18)$

olarak veriliyor. $G(x) = \alpha e^{\beta x}$ şeklinde bir fonksiyon ile yaklaşılmak istendiğinde α ve β bilinmeyendir.

$$M = \sum_{i=1}^{5}(f(x_i) - G(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{5}(f(x_i) - \alpha_{\beta x_i})^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial \alpha} = 0$$
$$\frac{\partial M}{\partial \beta} = 0$$
koşullarından

$$f_1(\alpha, \beta) = 0 \qquad (1)$$

$$f_2(\alpha, \beta) = 0 \qquad (2)$$

gibi nonlineer bir sistem elde edilir. Bu non-lineer sistem çeşitli yöntemler kullanılarak çözülebilir. Fakat fonksiyonu lineerleştirmek mümkünse bu çoğu zaman daha uygun bir yol olur.

$G(x) = \alpha e^{\beta x}$ ise

$$Ln(G(x)) = Ln(\alpha e^{\beta x})$$
$$= Ln\alpha + \beta x$$

olur.

Ln(G(x)) = U(x) =A +Bx şeklinde lineer olarak seçebiliriz. Bu durumda M değeri

$$M = \sum_{i=1}^{5} [Lnf(x_i) - A - Bx_i]^2$$

$\frac{\partial M}{\partial A} = -2 \sum_{i=1}^{5} [Ln(f(x_i)) - A - Bx_i] = 0$

$$\sum_{i=1}^{n} Ln(f(x_i)) = \sum_{i=1}^{5}(A + Bx_i)$$

$$Ln(5.12) + Ln(3) + Ln(2.48) + Ln(2.34) + Ln(2.18) = 5A + 34B \qquad (1)$$

$\frac{\partial M}{\partial B} = -2 \sum_{i=1}^{5} \left(x_i Ln\left(f(x_i)\right) - Ax_i - Bx_i^2\right) = 0$

$$\sum_{i=1}^{5}(x_i.Ln\left(f(x_i)\right) = \sum_{i=1}^{5} Ax_i + \sum_{i=1}^{5} Bx_i^2$$

$$Ln(5.12) + 3Ln3 + 6Ln(2.48) + 9Ln(2.34) + 15Ln(2.18) = 34A + 352B \qquad (2)$$

$$5A + 34B = 5.26$$

$$34A + 352B = 29.7$$

Denklem sistemi çözülürse;

$$\alpha \cong 4.67$$

$$\beta \cong -0.0746$$

olarak bulunur.

1.3. ORTOGONAL FONKSİYONLAR İLE YAKLAŞIM

$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ polinomal yaklaşımları belli koşulları sağlayan fonksiyonlar olarak belirlenmek ve sayısal yöntem içinde kullanılmak durumunda olabilirler. Bu koşulları gerçekleyen fonksiyonlardan bir grubunu ortogonal fonksiyonlar şeklinde tanımlayabiliriz.

w(x) bir sıklet fonksiyonu olmak üzere; f(x) ve g(x) sürekli fonksiyonlar olduğunda bu iki fonksiyonun [a,b] aralığındaki skaler çarpımı;

$$(f,g) = \int_a^b w(x)f(x)g(x)dx$$

olarak tanımlanır.

Skaler çarpım ile ilgili şu özellikleri yazabiliriz.

1-) $\alpha \in R$ için $(\alpha f, g) = (f, \alpha g)$

2-) $f = f_1 + f_2$ ise $(f,g) = (f_1, g) + (f_2, g)$

$g = g_1 + g_2$ ise $(f,g) = (f, g_1) + (f, g_2)$

3-) (f,g)=(g,f)

4-) $(f,f) \geq 0$ $\forall x_i \in [a,b]$ için $f(x_i) = 0$ ise $(f\ ,\ f) = 0$ olur.

$(f,f) = \int_a^b w(x).f(x)^2dx$ olacağından; fonksiyonun yine aynı aralıktaki öklidyen normu;

$$\sqrt{(f,f)} = ||f||_2 = \sqrt{\int_a^b w(x)f(x)^2dx}$$

şeklinde olur.

YARDIMCI TEOREM (Cauchy Schwards):

$x \in [a,b]$ f ve g [a,b] aralığında tanımlanmış iki fonksiyon ise;

$$(f,g) \leq ||f||.||g||$$

dir.

İspat:

g(x)=0 ise doğru olduğu açıkça görülür.

$g(x) \neq 0$ olduğunda ise $\alpha \in R$ olmak üzere;

$$(f+\alpha g, f+\alpha g) \geq 0$$

$$(f+\alpha g, f+\alpha g) = (f,f) + 2\alpha(f,g) + \alpha^2(g,g) \geq 0 .$$

α'ya göre 2. dereceden bir denklem elde edildi. Denklemin her durumda 0'dan büyük olabilmesi için $P(\alpha) = A\alpha^2 + B\alpha + C$ denkleminin $\Delta \leq 0$ şartını sağlaması gerekir.

$\Delta = 4(f,g)^2 - 4(f,f).(g,g) \leq 0$ ise $(f,g)^2 \leq (f,f)(g,g)$

$$(f,g)^2 \leq \|f\|^2.\|g\|^2 \qquad ise \qquad (f,g) \leq \|f\|.\|g\|$$

elde edilir.

TANIM: f(x) ve g(x) skaler iki fonksiyon, $f(x) \neq g(x)$ olmak koşulu ile;

$$(f,g) = \int_a^b w(x)f(x)g(x)dx = 0$$

olması halinde f ve g fonksiyonlarına ***ortogonaldir*** denir.

Bu tanım ve (Gram-Schmidt) teoremi yardımı ile herhangi ortogonal foksiyonu bir polinomlar kümesi olarak oluşturmak mümkündür.

TEOREM (Gram-Schmidt):

$\forall n \in N$ için D=derece $D(\varphi_n) = n$ $n \neq m$ $m,n \geq 0$ olmak üzere

$$(\varphi_n, \varphi_m) = 0$$

olacak şekilde $\{\varphi_n(x) | n \geq 0\}$ polinomlar kümesi vardır.

a-) $\forall n \in N$ için $(\varphi_n, \varphi_n) = 1$

b-) $\varphi_n(x)$ polinomundaki n. dereceli terimin katsayısı pozitiftir.

Bu koşullar ile oluşturulan küme tektir. Kümenin oluşturulmasında $\varphi_n(x)$ polinomlarının yapısı w(x) sıklet fonksiyonunun yapısı ile farklılık gösterir.

İspat:

$\{\varphi_n(x)|n \geq 0\}$ dizisinin elemanlarının oluşturulabilmesi için bir ardışık tekrar işleyişi kurmak gerekir.

$\varphi_0(x) = c \quad c>0 \quad \|\varphi_0(x)\| = 1$ seçelim;

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \int_a^b w(x)\varphi_0^2(x)dx = \int_a^b c^2 w(x)dx = 1$$

$$c^2 = \frac{1}{\int_a^b w(x)dx}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\int_a^b w(x)dx}}$$

bulunur.

$\varphi_1(x)$'i belirlemeden önce $\psi_1(x) = x + a_{1,0}.\varphi_0(x)$ fonksiyonunu seçelim. Bu fonksiyonda $(\psi_1(x), \varphi_0(x)) = 0$ olsun, $\psi_1(x)$ iki terimli bir fonksiyondur ve $\varphi_0(x)$ ile ortogonaldir.

$$(\psi_1(x), \varphi_0(x)) = (x + a_{1,0}\varphi_0(x), \varphi_0(x)) = (x, \varphi_0(x)) + a_{1,0}(\varphi_0, \varphi_0) = 0$$

dir.

$$a_{1,0} = -(x, \varphi_0(x)) = -\int_a^b x.w(x).\varphi_0(x)dx = -c\int_a^b x.w(x)dx$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\int_a^b w(x)dx}}$$

ise

$$a_{1,0} = \frac{-\int_a^b x.w(x)dx}{\sqrt{\int_a^b w(x)dx}}$$

olarak belirlenir.

$\varphi_1(x)$ fonksiyonu yine normu 1 olacak şekilde $\quad (\|\varphi_1(x)\| = 1)$

$$\varphi_1(x) = \frac{\psi_1(x)}{\|\psi_1(x)\|}$$

yazılır ve $(\varphi_0(x), \varphi_1(x)) = 0$ şartı sağlanır. Benzer işlem sürdürüldüğünde $\varphi_n(x)$'i oluşturabilmek için

$$\psi_n(x) = x^n + a_{n,n-1}\varphi_{n-1}(x) + ... + a_{n,0}\varphi_0(x)$$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyonun bütün $\varphi_i(x)$ i=1,2,...,n-1 fonksiyonları ile ortogonal olması yani $(\psi_n(x), \varphi_i(x)) = 0$ olması koşullarından yine

$$(\psi_n(x), \varphi_0(x)) = 0$$

olması koşulu ile $a_{n,0}$ bulunacaktır.
$a_{n,j} = -(x^n, \varphi_j)$ olarak belirlenir. Katsayıları bu şekilde belirlenen $\psi_n(x)$ fonksiyonunda normu 1 yapacak

$$\varphi_n(x) = \frac{\psi_n(x)}{\|\psi_n(x)\|} = 0$$

fonksiyonu verilecektir ki, bu fonksiyonda $(\varphi_n(x), \varphi_j(x)) = 0$ j = 0,1,2,...,n-1 olur. w(x) sıklet fonksiyonu seçilmek üzere öklidyen normu 1 olacak şekilde oluşturulabilir ve sıklet fonksiyonunun bu seçimine göre bulunan ortogonal polinomlar dizisi tektir. Yani w(x) değiştikçe polinomlar da değişicektir.

ÖRNEK: [a,b]= [-1,1] w(x) = 1 olmak üzere ardışık tekrar işlemlerini $\varphi_3(x)$'e kadar devam ettiriniz.
$\varphi_0(x) = c \qquad \|\varphi_0(x)\| = 1$ idi.

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \int_{-1}^{1} w(x)\varphi_0^2(x)dx = c^2x\Big|_{-1}^{1} = 2c^2 = 1 \quad ise \quad c = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ve buradan da $\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ yazılır.
$\psi_1(x) = x + a_{1,0}\varphi_0(x)$ idi.

$a_{1,0} = -(x, \varphi_0) = \int_{-1}^{1} x\varphi_0(x)w(x)dx = 0$ dan $\psi_1(x) = x$ elde edilir.

$\|\psi_1(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2 w(x)dx = \frac{2}{3}$

$\varphi_1(x) = \frac{\psi_1(x)}{\|\psi_1(x)\|}$ dan $\varphi_1(x) = \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}x$ bulunur.

$\psi_2(x) = x^2 + a_{2,1}\varphi_1(x) + a_{2,0}\varphi_0(x) \quad (\psi_2(x), \varphi_j(x)) = 0$ idi.

$a_{2,1} = -(x^2, \varphi_1) = -(x^2, \sqrt{\frac{3}{2}}x) = 0$

$a_{2,0} = -(x^2, \varphi_0) = -(x^2, \frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{\sqrt{2}}{3}$

şeklinde hesaplanarak;

$$\psi_2(x) = x^2 - \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{1}{\sqrt{2}} = x^2 - \frac{1}{3} \qquad \|\psi_2(x)\| = \sqrt{\int_{-1}^{1}(x^2 - \frac{1}{3})^2 dx} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}$$

elde edilir ve buradan;

$$\varphi_2(x) = \frac{\psi_2(x)}{\|\psi_2(x)\|} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{5}{2\sqrt{2}}}\ (3x^2 - 1)$$

bulunur. Benzer şekilde;

$\psi_3(x) = x^3 + a_{3,2}\varphi_2(x) + a_{3,1}\varphi_1(x) + a_{3,0}\varphi_0(x) \qquad (\psi_3(x), \psi_j(x)) = 0$

olması koşulundan

$a_{3,0} = -(x^3, \varphi_0) = -\int_{-1}^{1} x^3\varphi_0(x)w(x)dx = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$

$a_{3,1} = -(x^3, \varphi_1) = -\int_{-1}^{1} x^3\varphi_1(x)w(x)dx = -\sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-1}^{1} x^4 dx = 0$

$a_{3,2} = -(x^3, \varphi_2) = -\int_{-1}^{1} x^3\varphi_2(x)w(x)dx = -\sqrt{\frac{5}{2\sqrt{2}}}\int_{-1}^{1}(3x^2 - 1)x^3 dx = 0$

şeklinde hesaplanarak

$$\varphi_3(x) = x^3 - \sqrt{\frac{3}{2}}.\frac{2}{5}.\sqrt{\frac{3}{2}}.x = x^3 - \frac{3}{5}x \qquad \|\psi_3(x)\|^2 = \int_{-1}^{1}(x^3 - \frac{3}{5}x)^2 dx = \frac{24}{525}$$

$$\varphi_3(x) = \frac{\psi_3 x}{\|\psi_3(x)\|}$$

$$= \frac{x^3 - \frac{3}{5}x}{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{175}}} = \frac{\sqrt{175}}{2\sqrt{2}}(x^3 - \frac{3}{5}x)$$

elde edilir.

Ortogonal polinomlarda [a,b] aralığı genelde [-l,l] olarak verilir. Eğer verilmemiş ise dönüştürülür. Her ortogonal fonksiyon için sıklet fonksiyonu ve $\varphi_0(x)$ seçimine göre $\|\varphi_j(x)\| \neq 1$ olması halinde bir ortogonal fonksiyon dizisi oluşturmak oldukça güç bir işlemdir. Bu işlemleri basitleştirmek için çeşitli sıklet fonksiyonlarına göre $\|\varphi_j(x)\| = 1$ olacak şekilde ortogonal fonksiyon dizilerinin oluşturulması için ardışık tekrar bağıntıları kurulabilir.

Elde edilen fonksiyonlar genelde analitik ifadesi verilmiş ve sürekli olan fonksiyonlara yaklaşım için kullanılır. Bunun dışında bir fonksiyonun tablo değerleri verildiğinde sadece bu verileri kullanarak fonksiyona yaklaşmak mümkündür. Yani fonksiyon $(x_i, f(x_i))$ i=0,...,n şeklinde verilmiş ise, $P_i(x)$ i=0,...,n ortogonal polinomlar kümesi elemanları ile;

$$\sum_{i=1}^{n} P_j(x_i)P_k(x_i) = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ \neq 0 & j = k \end{cases}$$

koşullarını sağlayacak şekilde

$$G(x) = c_1P_1(x) + c_2P_2(x) + ... + c_mP_m(x)$$

yaklaşım fonksiyonu seçilebilir. Bu durumda yaklaşım fonksiyonunun $c_1, c_2, ..., c_m$ parametreleri E.K.K.Y kullanarak;

$$M = \sum_{i=1}^{n} [G(x_i) - f(x_i)]^2 \qquad \frac{\partial M}{\partial c_i} = 0 \qquad i = 1, 2, ..., n$$

için;

$$\begin{array}{cccc}
c_1 \sum_{i=0}^{n} P_1(x_i)^2 & +c_2 \sum_{i=1}^{n} P_1(x_i)P_2(x_i) & +\dots & = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)P_1(x_i) \\
0 & +c_2 \sum_{i=1}^{n} P_2(x_i)^2 & +\dots & = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)P_2(x_i) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & +0 & +C_m \sum_{i=1}^{n} P_m(x_i)^2 & = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)P_m(x_i)
\end{array}$$

şeklinde denklem sistemi bulunur. Bu sistemin c_j 'leri

$$c_j = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)P_j(x_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}(P_j(x_i))^2} \qquad j = 0, 1, ..., m$$

şeklindedir.

1.3.1. LEGENDRE POLİNOMLARI

w(x)=1 sıklet fonksiyonu, [a,b] = [-1,1], $P_0(x) = 1$ olmak üzere;

$$P_n(x) = (-1)^n \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n \quad , n \geq 1$$

şeklinde tanımlanır.

$$P_n(1) = 1 \ , \ (P_n, P_n) = \frac{2}{2n+1}$$

[-1,1] de daima ortogonaldir. Bu polinomları iteratif olarak yazacak olursak,

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= \frac{-1}{2}\frac{d}{dx}(1-x^2) = -\frac{1}{2}(-2x) = x \\
P_2(x) &= \frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{dx^2}(1-x^2)^2 = \frac{1}{2}(3x^2-1) \\
&\vdots \\
P_{n+1}(x) &= x\frac{2n+1}{n+1}P_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

Bu polinomlar için ortogonallik şartı:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \begin{cases} 0 & m \neq 0 \\ \frac{2}{2n+1} & m = n \end{cases}$$

olarak verilir.

ÖRNEK:

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	-2	0	0	-2

tablo değerlerini ve Legendre Polinomlarını kullanarak ikinci dereceden $G(x) = c_1P_1(x) + c_2P_2(x)$ şeklinde polinom elde ediniz.

$$P_0(x) = 1 \qquad G(x) = c_1P_1(x) + c_2P_2(x)$$

$$P_1(x) = x \qquad M = \sum_{i=1}^{n} \left(G(x_i) - f(x_i)\right)^2$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$\frac{\partial M}{\partial c_1} = 2\sum_{i=1}^{4} P_1(x_1)\left(c_1P_1(x_i) + c_2P_2(x_i) - f(x_i)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad c_1\sum_{i=1}^{4} P_1^2(x_i) + c_2\sum_{i=1}^{4} P_1(x_i)P_2(x_i) = \sum_{i=1}^{4} P_1(x_i)f(x_i)$$

$$\frac{\partial M}{\partial c_2} = 2\sum_{i=1}^{4} P_2(x_i)\left(c_1P_1(x_i) + c_2P_2(x_i) - f(x_i)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad c_1\sum_{i=1}^{4} P_1(x_i)P_2(x_i) + c_2\sum_{i=1}^{4} P_2^2(x_i) = \sum_{i=1}^{4} P_2(x_i)f(x_i)$$

olur.

$$51c_1 + \tfrac{401}{2}c_2 \;=\; 25$$

$$14c_1 + 51c_2 \;=\; -6 \;\Rightarrow\; c_1 = -12.029\,,\, c_2 = 3.184$$

$$G(x) \;=\; c_1P_1(x) + c_2P_2(x) \;=\; -12.029x + \frac{3.184}{2}(3x^2 - 1)$$

olarak bulunur.

Eğer fonksiyonun kesikli değerleri değil de, [-1,1] aralığında sürekli olmak şartı ile analitik ifadesi verilmiş ise, o zaman;

$$G(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} a_kP_k(x)$$

$$a_k \;=\; \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)\,dx$$

olarak yaklaşım yapılabilir.

ÖRNEK: [-1,1] aralığında tanımlı $f(x) = e^x$ fonksiyonuna Legendre Polinomları ile $G(x) = a_0P_0(x) + a_1P_1(x) + a_2P_2(x)$ gibi bir polinom ile yaklaşınız.

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$G(x) = \sum_{k=0}^{2} a_k P_k(x)$$

$$a_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)dx \qquad ise$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^x dx = sh1 = 1.17$$

$$a_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} e^x dx = 3e - 1 = 1.10$$

$$a_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(3x^2 - 1)e^x dx = \frac{15}{4}0.88 - \frac{5}{2}sh1 = 0.37$$

$$G(x) = \sum_{k=0}^{2} a_k P_k(x) = a_0P_0(x) + a_1P_1(x) + a_2P_2(x)$$

$$= 1.17 + 1.10x + \frac{0.37}{2}(3x^2 - 1)$$

$$= 0.55x^2 + 1.10x + 0.99$$

1.3.2. LAGUERRE POLİNOMLARI :

Şimdiye kadar görülen yöntemlerde sonlu bir aralıkta en küçük kareler yaklaşımı incelenmiştir. Eğer yarı sonsuz bir aralıkta en küçük kareler yöntemi kullanılacaksa genellikle aralıklar $[0,\infty)$ aralığına dönüştürülür. Bu polinomlar genellikle analitik ifadesi verilmiş ve sürekli olan fonksiyonlara yaklaşım için kullanılır. Bu polinomlar;

[a,b]=[0,∞] $w(x) = e^{-x}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1 \\ L_n(x) &= \frac{1}{e^{-x}} \frac{d^n}{dx^n}[x^n e^{-x}] \quad , n \geq 0 \end{aligned}$$

$\|L_n(x)\| = 1$ olan polinomlardır.

Bu polinomları iteratif olarak yazacak olursak;

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1 \\ L_1(x) &= 1 - x \\ L_2(x) &= 2 - 4x + x^2 \\ &\vdots \\ L_{n+1}(x) &= (1 + 2n - x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x) \end{aligned}$$

dir.

ÖRNEK:

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	-2	0	0	-2

tablo değerlerini ve Laguerre Polinomlarını kullanarak ikinci dereceden $G(x) = c_1L_1(x) + c_2L_2(X)$ şeklinde bir polinom elde ediniz.

$$M = \sum_{i=1}^{4} \left(G(x_i) - f(x_i)\right)^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial c_1} = 0 \;\Rightarrow\; c_1 \sum_{i=1}^{4} L_1(x_i)^2 + c_2 \sum_{i=1}^{4} L_1(x_i)L_2(x_i) = \sum_{i=1}^{4} L_1(x_i)f(x_i)$$

$$\frac{\partial M}{\partial c_2} = 0 \;\Rightarrow\; c_2 \sum_{i=1}^{4} L_1(x_i)L_2(x_i) + c_2 \sum_{i=1}^{4} L_2(x_i)^2 = \sum_{i=1}^{4} L_2(x_i)f(x_i)$$

$6c_1 + 6c_2 = 2\ 6c_1 + 10c_2 = -2 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{4}{3}\ , c_2 = -1$

$$\begin{aligned} G(x) = c_1L_1(x) + c_2L_2(x) &= \frac{4}{3}(1-x) - (2-4x+x^2) \\ &= -x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M = \sum_{i=1}^{4}\left(G(x_i) - f(x_i)\right)^2 &= \frac{16}{9} + 1 + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} \\ &= 3.3 \end{aligned}$$

Eğer fonksiyonun kesikli değeri değilde $(0,\infty)$ aralığında sürekli analitik ifade verilmiş ise G(x) yaklaşım fonksiyonu

$$G(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k L_k(x) \quad , \ 0 \le x < \infty$$

$$b_k = \frac{1}{(k!)^2}\int_0^{\infty} f(x)L_k(x)dx$$

olarak ifade edilebilir. Laguerre polinomları

$$\int_0^{\infty} e^{-x}L_m(x)L_n(x)dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ (n!)^2 & m = n \end{cases}$$

denklemini sağlarlar.

1.3.3. FORSYTHE YÖNTEMİ İLE YAKLAŞIM:

Forsythe tarafından geliştirilen ve ortogonalite özelliğini sağlayan bu polinom ailesi;

$$P_k(x) = (x - u_k)P_{k-1}(x) - V_{k-1}P_{k-2}(x)$$

tekrar bağıntısı ve $P_{-1}(x) = 0 \quad P_0(x) = -1$ başlangıç koşulları ile

$$U_k = \frac{\sum_{i=0}^{n} x_i P_{k-1}^2(x_i)}{\sum_{i=0}^{n} P_{k-1}^2(x_i)} \quad , \quad V_{k-1} = \frac{\sum_{i=0}^{n} x_i P_{k-1}^2(x_i) P_{k-2}(x_i)}{\sum_{i=0}^{n} P_{k-2}^2(x_i)}$$

bağıntıları ile tanımlanmış olmak üzere bu ortogonal fonksiyonları kullanan bir G(x) yaklaşım fonksiyonu;

$$G(x) = \sum_{j=0}^{m} C_j P_j(x)$$

şeklinde seçildiğinde C_j katsayıları

$$C_j = \frac{\sum_{i=0}^{n} f(x_i) P_j(x_i)}{\sum_{i=0}^{n} \left(P_j(x_i)\right)^2}$$

şeklinde belirlenir.

ÖRNEK:

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	-2	0	0	-2

tablo değerlerini kullanarak ikinci dereceden $g(x) = c_1P_1(x) + c_2P_2(x)$ şeklinde ortogonal fonksiyonlar kümesinin terimlerini içeren bir yaklaşım fonksiyonunu forsythe yöntemi ile bulalım.

Buna göre $n = 3 \quad m = 2 \quad P_{-1}(x) = 0 \quad P_0(x) = 1$

$P_1(x) = (x - u_1)P_0(x) - V_0P_{-1}(x) = (x - u_1)$

$$U_1 = \frac{\sum_{i=0}^{3} x_i P_0^2(x_i)}{\sum_{i=0}^{3} P_0^2(x_i)} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad P_1(x) = (x - \frac{3}{2})$$

$P_2(x) = (x - u_2)P_1(x) - V_1P_0(x)$

$$U_2 = \frac{\sum_{i=0}^{3} x_i P_1^2(x_i)}{\sum_{i=0}^{3} P_1^2(x_i)} = \frac{3}{2} \quad , \quad V_1 = \frac{\sum_{i=0}^{3} x_i P_1^2(x_i) P_0(x_i)}{\sum_{i=0}^{3} P_0^2(x_i)} = \frac{5}{4}$$

$$P_2(x) = (x - \frac{3}{2})(x - \frac{3}{2}) - \frac{5}{4}1 \; = \; x^2 - 3x + 1$$

$$c_1 = \frac{\sum_{i=0}^{3} f(x_i)P_1(x_i)}{\sum_{i=0}^{3} P_1^2(x_i)} = 0 \;\; , \qquad c_2 = \frac{\sum_{i=0}^{3} f(x_i)P_2(x_i)}{\sum_{i=0}^{3} P^2(x_i)} = -1$$

$$G(x) = c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) \; = \; -x^2 + 3x - 1$$

1.4. TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR İLE YAKLAŞIM:

Sürekli fonksiyonlar olan sinx, sin2x,... ,sinkx ve cosx, cos2x,... ,coskx fonksiyonları [0,2π] aralığında birbirlerine ortogonaldirler.
Diğer bir deyişle bu fonksiyonlar;

$$\int_0^{2\pi} cosmx \; sinnx \; dx \quad (\forall\, m, n \in R)$$

$$\int_0^{2\pi} sinmx \; sinnx \; dx \; = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & \text{m=n} \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} cosmx \; cosnx \; dx \; = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \neq 0 \\ 2\pi, & \text{m=n=0} \end{cases}$$

özelliklerini sağlarlar. Buna göre herhangi sürekli f(x) fonksiyonu Fourier Serisine göre;

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \; cosnx \; + \; b_n \; sinnx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \ , a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} cosnx \ f(x)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} sinnx \ f(x)dx$$

şeklinde ifade edilir. Herhangi bir f(x) fonksiyonunun Fourier Serisi ile yaklaşık olarak ifade edilebilmesi için istenilen aralıkta şu şartları sağlaması gerekir:

a) Fonksiyonun istenilen aralıkta sürekli olduğu her noktada tek değerli olması,

b) İstenilen aralıkta sonlu olması,

c) İstenilen aralıkta sürekli olması veya sadece belli sayıda süreksizlikler olması,

d) Sonlu sayıda en küçük veya en büyük değerleri olması,

Eğer herhangi bir problemde fonksiyonun analitik ifadesi değil de m tane ayrık noktadaki değerleri verilmiş ise formüllerdeki integral işaretinin yerini m'e kadar toplama işlemi alacaktır. Şimdi bu şekilde tablo değerleri ile verilmiş olan f(x) fonksiyonu için nokta sayısının çift yada tek olması hallerinde yaklaşım fonksiyonlarını belirleyelim.

A) 2N TANE ÇİFT SAYIDA VERİ İÇİN YAKLAŞIM:

Toplam 2N tane çift sayıda f(x) değerleri tablo ile verilmiş olsun $\forall x_i \in [a,b]$ için ;

$$\theta = \frac{2(x-a)\pi}{(b-a)}$$

şeklinde bir θ değişkeni tanımlayarak f(x) fonksiyonunu yaklaşık olarak ;

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} a_n cosn\theta + b_n cosn\theta$$

şeklinde yazabiliriz.

Burada m<N-1'dir. Çünkü E.K.K.Y uygulandığında a_n ve b_n katsayılarının sayısı en fazla verilen ayrık noktaların sayısına eşit olmalıdır. Bu şart sağlandığı takdirde

katsayılar;

$$a_n = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{2N-1} f(\theta_i)\, cosn\theta_i \qquad n = 0, ..., m$$

$$b_n = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{2N-1} f(\theta_i)\, sinn\theta_i \qquad n = 1, ..., m$$

elde edilecektir. Burada

$$\theta_i = \frac{2(x_i - a)\pi}{(b-a)}$$

dır.

ÖRNEK: Değerleri $0 \le x \le 4$ aralığında

x_i	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
$f(x_i)$	0	2.707	5	2.707	0	1.293	3	1.293

olarak verilen f(x) fonksiyonu için m=2 olacak şekilde Fourier Serisini açınız.

$$0 \le x_i \le 4 \ ise \ [a,b] = [0,4] \quad 2N = 8 \quad m \le N-1 \ ise \ m \le 3$$

$$\theta = \frac{\theta(x-a)\pi}{(b-a)} = \frac{2(x-0)\pi}{(4-0)} = \frac{\pi x}{2} \ ise \ \theta_i = \frac{\pi x_i}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{2N-1} f(x_i) cosn\theta_i$$

ise

n=0 için;

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{4} \sum_{i=0}^{7} f(x_i) cos0\theta_i \\ &= \frac{1}{4}(2.707 + 5 + 2.707 + 1.293 + 3 + 1.293) = \frac{16}{4} = 4 \end{aligned}$$

n=1 için ;

$$a_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f(x_i)cos\theta_i$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f(x_i)cos(\frac{\pi}{2}x_i)$$

$$= \frac{1}{4}(2.707cos(\frac{0.5\pi}{2}) + cos(\frac{5\pi}{2}) + 2.707cos(\frac{1.5\pi}{2}) + 1.293cos(\frac{2.5\pi}{2}) + 3cos(\frac{3\pi}{2}) + 1.293cos(\frac{3.5\pi}{2}) = 0$$

n=2 için ;

$$a_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f(x_i)\cos 2\theta_i$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f(x_i)cos\pi x_i$$

$$= \frac{1}{4}(2.707cos\frac{\pi}{2} + 5cos\pi + 2.707cos\frac{3\pi}{2} + 1.293\cos\frac{5\pi}{2} + 3cos3\pi + 1.293cos\frac{7\pi}{2} = -2$$

n=m için;

$$a_m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f(x_i)cosm\theta_i$$

olacak şekilde a_n katsayıları belirlenir. Ancak bunların sayısı $m \leq N-1$ olacak şekilde alınmalıdır.

$$b_n = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)sinn\theta_i$$

ise;

n=1 için;

$$b_1 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{7} f(x_i) sin\theta$$
$$= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{7} f(x_i) sin\frac{\pi}{2}x_i$$
$$= \frac{1}{4}(2.707 sin\frac{0.5\pi}{2} + 5 sin\frac{\pi}{2} + 2.707 sin\frac{1.5\pi}{2}$$
$$+ 1.293 sin\frac{2.5\pi}{2} + 3 sin\frac{3\pi}{2} + 1.293 sin\frac{3.5\pi}{2}$$
$$= \frac{1}{4}(2.707(\frac{\sqrt{2}}{2}) + 5 + 2.707(\frac{\sqrt{2}}{2}) + 1.293(-\frac{\sqrt{2}}{2})) = 1$$

n=2 için;

$$b_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f(x_i) sin2\theta_i = 0$$

n = m için;

$$b_m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} f(x_i) sinm\theta_i$$

ve yine $m \leq N-1$ dir.

m = 2 için bulunan a_0, a_1, a_2, b_1, b_2 için yaklaşım polinomu:

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{2} a_n cosn\theta + b_n sinn\theta$$

$$= \frac{a_0}{2} + a_1 cos\theta + a_2 cos2\theta + b_1 sin\theta + b_2 sin2\theta$$

$$= 2 + sin\theta - 2cos2\theta$$

$\theta = \frac{\pi}{2}x$ ise

$$f(\theta) = f(\frac{\pi}{2}x) = 2sin\frac{\pi}{2}x - 2cos\pi x \qquad \Rightarrow$$

$$f(x) = 2 + sinx - 2cos2x$$

olarak elde edilir.

B) 2N+1 TANE EŞİT ARALIKLI VERİ İÇİN YAKLAŞIM

$\theta = \frac{2(x-a)\pi}{(b-a)} = \frac{2\pi(x-a)}{h(2N+1)}$ gibi bir θ değişkeni tanımlanır.

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} a_n cosn\theta + b_n sinn\theta$$

dir.

Burada $m \leq N$ sağlandığı halde katsayılar ;

$$a_n = \frac{2}{2N+1} \sum_{i=0}^{2} Nf(x_i)cosn\theta_i \qquad n = 0, 1, 2, ..., m$$

$$b_n = \frac{2}{2N+1} \sum_{i=0}^{2} Nf(x_i)sinn\theta_i \qquad n = 0, 1, 2, ..., m$$

formülleri ile bulunur.

Burada $\theta_i = \frac{2(x_i-a)\pi}{(b-a)}$ dır.

ÖRNEK:

x_i	-2	1	4	7	10
$f(x_i)$	0	4	6	6	4

değerleri ile verilen f(x) için yaklaşım fonksiyonu bulun.

2N+1=5 h=3 a=-2 b=13 $m \leq N$ verilmeli yani $m \leq 2$ olsun.

N=2 $\theta = \frac{2(x+2)\pi}{13+2} = \frac{2\pi}{15}(x+2)$ ise $\theta_i = \frac{2\pi}{15}(x+2)$ olur.

$$a_0 = \frac{2}{5} \sum_{i=0}^{4} f(x_i) = \frac{2}{5}(-2+1+4+7+10) = \frac{40}{5} = 8$$

$$a_1 = \frac{2}{5} \sum_{i=0}^{4} f(x_i)cos\theta_i \quad ise$$

$$= \frac{2}{5}(4cos\frac{6\pi}{15} + 6cos\frac{12\pi}{15} + 6cos\frac{18\pi}{15} + 4cos\frac{24\pi}{15}) = -2.894$$

$$a_2 = \frac{2}{5} \sum_{i=0}^{4} f(x_i)cos2\theta_i \quad ise$$

$$= \frac{2}{5}(4cos\frac{12\pi}{15} + 6cos\frac{24\pi}{15} + 6cos\frac{36\pi}{15} + 4cos\frac{48\pi}{15} = -1.106$$

$$k=1 \quad icin \quad b_1=\tfrac{2}{5}\sum_{i=0}^{4} f(\theta_i)sin\theta_i=0$$
$$\Rightarrow$$
$$k=2 \quad icin \quad b_2=\tfrac{2}{5}\sum_{i=0}^{4} f(\theta_i)sin2\theta_i=0$$

$$f(\theta)=4-2.894cos\theta-1.106cos2\theta$$

$\theta=\frac{2\pi}{15}(x+2)$ dönüşümü yapılırsa;

$$f(x)=4-2.894cos\frac{2\pi(x+2)}{15}-1.106cos\frac{4\pi(x+2)}{15}$$

olarak elde edilir.

a_k ve b_k katsayıları hesaplanırken kullanılan formüller çok büyük N değerleri için pratik değildir ve yuvarlatma hatası birikimine yol açar.

B Ö L Ü M II

2. PARÇALI (PIECEWICE) POLİNOMSAL FONKSİYONLAR İLE YAKLAŞIM

Ara enterpolasyon fonksiyonları parça parça veya polinom tipli fonksiyonların bir sınıfıdır. (a,b) aralığında bir x değişkeni ile gösterilen reel sayıların artan sırada verilmiş dizisi; $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b$ olsun bunlara karşılık gelen bağımsız değişkenleri de bir Y vektörü ile: $Y : y_0, y_1, y_2, ...y_n$ olarak verilsin; S(x) fonksiyonu (a,b) aralığında aşağıdaki koşulları sağlayan m. dereceden bir fonksiyondur.

1) S(x) fonsiyonu $\forall$ (x_{i-1}, x_i) alt aralığında en fazla m. dereceden bir polinomdur.

2) S(x) ve S(x)'in (m-1). dereceden türevleri (a,b) aralığında süreklidir.

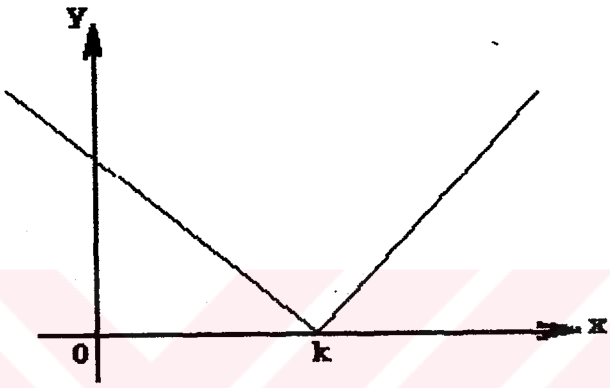
Yukarıda verilen 2. koşul Spline Fonksiyonun düğüm noktalarında sürekliliği sağlaması için istenmektedir. Genellikle S(x) fonksiyonu (x_{i-1}, x_i) ve (x_i, x_{i+1}) gibi komşu alt aralıklarda farklı polinomlar olarak verilir. Çok özel durumlarda (a,b) aralığında tek polinom olarak verilir. Spline Fonksiyonun S(x) için birbirinden biraz farklı sayılabilecek tanımlara literatürde rastlanmaktadır. Biz Ahlberg, Nilson, Walsh'a göre S(x) fonksiyonunu inceleyeceğiz.

2.1. LİNEER SPLINE FONKSİYONLARI İLE YAKLAŞIM

TANIM: K, $k_0 < k_1 < ... < k_N$ şartını sağlayan düğümler (Reel Sayılar) kümesini göstersin. Yani $K = \{k_0, ..., k_N\}$ olsun. Her x reel sayısı için

$$S(x) = a_0|x - k_0| + a_1|x - k_1| + ... + a_N|x - k_N|$$

şeklinde tanımlanan bir S fonksiyonu , (burada $a_0, a_1, ..., a_N$ sabit reel sayılardır), K köşeli (sürekli) *parçalı lineer fonksiyon* veya *lineer spline* olarak adlandırılır. Şekil 2.1' deki S fonksiyonu $x = k_i$ 'de köşe noktasına sahip $|x - k_i|$ i=0,...,N bir fonksiyondur. Aynı zamanda S, $|x - k_0|, ..., |x - k_N|$ sürekli fonksiyonlarının lineer kombinezonudur ve sonuç olarak S süreklidir. Herhangi iki düğüm noktası arasındaki $|x - k_i|$, i=0,...,N fonksiyonlarının her biri grafik için bir doğru parçası oluştutur ve böylece S, düğümlerde birleşen doğru parçalarından oluşan bir grafiğe sahip olur. Keza fonksiyonun, sadece $a_0 = a_1 = ... = a_N = 0$ olursa $\forall x \in [a, b]$ için birinci mertebeden türevleri sürekli olacaktır.



ŞEKİL 2.1.

Parçalı lineer fonksiyonlar uzayını $\mathcal{L}_N(K)$ ile gösterelim. Amaç (x_i, f_i) i=0,1,...,N datasına enterpole eden bir fonksiyon bulmaktır, burada x_i apsisleri [a,b] aralığındaki ayrık noktalardır. Bu durum, eğer x_i noktaları $\mathcal{L}_N(K)$ uzayını belirleyen k_i düğümleri olursa kolaydır.

TEOREM 2.1. $K = \{x_0, x_1, ..., x_N\}$ düğümler dizisi ve $f_0, f_1, ..., f_N$ keyfi reel sayılarını alalım. $\mathcal{L}_N(N)$' de her j=0,1,...,N için $S(x_j) = f_j$ koşulunu sağlayan bir tek S spline'ı vardır.

$a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b$ kabulünü gözönüne alırsak söz konusu yaklaşım fonksiyonu data noktalarını soldan sağa bir kırık-doğru parçası ile birleştirir. Diğer yandan eğer düğümlerin sayısı N+1' i aşarsa, veya x_i ' lere göre istenmeyen bir şekilde toplanırsa yaklaşım fonksiyonu tek olma özelliğini kaybedebilir.

a_i katsayılarını belirlemek için yaklaşım koşullarını incelememiz gerekir.

$$\begin{array}{lclcl} a_0|x_0-x_0| & +...+ & a_N|x_0-x_N| & = & f_0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0|x_N-x_0| & +...+ & a_N|x_N-x_N| & = & f_N \end{array}$$

ve matris formunda;

$$\begin{bmatrix} 0 & |x_0-x_1| & \dots & |x_0-x_N| \\ |x_1-x_0| & 0 & \dots & |x_1-x_N| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |x_N-x_0| & |x_N-x_1| & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix} \tag{2.1.1}$$

Başlangıç kümeden bir başlangıç temel (cardinal basis) seçilirse çok daha uygun sonuçlar elde edilir. Bu da

$$S_i(x_k) = \delta_{ik} \qquad k = 0,1,...,N \ ; i = 0,1,...,N$$

elemanter enterpolasyon problemini çözen $\mathcal{L}_N(K)$' deki S_i fonksiyonlarının kümesidir. Burada δ_{ik} ,i=k iken 1 , $i \neq k$ olduğunda 0 değerini alan Kronecker sembolüdür. Her nekadar $S_0, S_1, ...S_N$ (2.1.1) denklem sisteminde sağ taraf değerleri olarak $[1,0,...,0]^T$, $[0,1,0,...,0]^T$, ..., $[0,0,...,1]^T$ vektörleri seçilerek oluşturulsa da geometrik olarak bu fonksiyonların nasıl fonksiyonlar olduğu açıktır. Şekil 2.1 ' de denklem (2.1.2) ile tanımlanan pramid veya çadır (tent) fonksiyonları görülmektedir. (j=1,2,...,N-1)

$$S_0(x) = \begin{cases} \frac{x-x_1}{x_0-x_1} & a \le x \le x_1 \\ 0 & x_1 \le x \le b \end{cases}$$

$$S_j(x) = \begin{cases} 0 & a \le x \le x_{j-1} \\ \frac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}} & x_{j-1} \le x \le x_j \\ \frac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}} & x_j \le x \le x_{j+1} \\ 0 & x_{j+1} \le x \le b \end{cases} \tag{2.1.2}$$

$$S_N(x) = \begin{cases} 0 & a \le x \le x_{N-1} \\ \frac{x-x_{N-1}}{x_N-x_{N-1}} & x_{N-1} \le x \le b \end{cases}$$

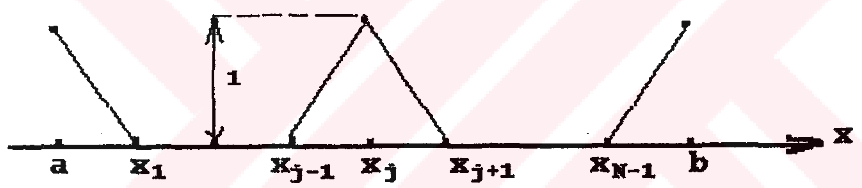
Bu temel yönünden enterpolasyon

$$\begin{aligned} S(x) &= S_0(x)f_0 + S_1(x)f_1 + \ldots + S_N(x)f_N \\ &= [S_0, S_1, \ldots, S_N].[f_0, f_1, \ldots, f_N]^T \\ &= \vec{S}(x)^T \vec{f} \end{aligned}$$

fonksiyon değerlerinin açık bir şekilde enterpole edildiği basit bir şekle sahiptir ve (2.1.1) denklem sistemini çözmek gerekmez. Gerçekten $\mathcal{L}_N(K)$' daki her fonksiyon

$$S(x) = S_0 y_0 + S_1 y_1 + \ldots + S_N y_N = \vec{S}(x)^T \vec{y} \qquad (2.1.3)$$

şeklinde ifade edilebilir. $y_0, y_1, \ldots, y_N$ S(x) ' in şeklini kontrol eden parametrelerdir. Bu tamamen Lagrange entrepolasyon tekniğine benzer.



ŞEKİL 2.2. Çadır Fonksiyonları

Bu tip fonksiyonlar enterpolasyondan çok en küçük kareler yöntemini gerçekleştirmede kullanılır. En küçük kareler yönteminde $1 \leq M \leq N$ olmak üzere $\mathcal{L}_M(K)$ uzayı ile çalışılır ve K düğüm dizisi $h_0 = a$, $k_M = b$, ve $k_0 < k_1 < \ldots < k_M$ ile sınırlanır. Böylece $\mathcal{L}_M(K)$ uzayını tanımlayan $k_1, k_2, \ldots, k_{M-1}$ iç düğümleri çok sayıda $x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}$ iç noktalarıyla ilişkiye dayanmayabilir.

LINEER SPLINE' LARLA EN KÜÇÜK KARELER YAKLAŞIMI

En basit en küçük kareler yaklaşımı problemi M=1 seçilmesi ile elde edilir. Bu durumda a ve b arasında düğüm yoktur ve genel S(x) fonksiyonu

$$S(x) = \frac{x - x_N}{x_0 - x_N} y_0 + \frac{x - x_0}{x_N - x_0} y_N$$

şeklindedir. Bu A + Bx şeklinde keyfi bir fonksiyondur ve bu en küçük kareler yaklaşım problemi lineer regresyon problemi ile eşdeğerdir. Ancak M=2 seçildiğinde a ve b arasında bir k_1 iç düğümü olacaktır.

İç düğüm veya düğümlerin pozisyonunu sabit kabul ederek (2.1.3)' deki yaklaşım fonksiyonunu , x_j noktalarındaki (j=0,1,...,N) f_j datalarından sapmaların kareleri toplamı şeklinde

$$E(S) = \sum_{j=0}^{N} \left\{ \sum_{i=0}^{M} y_i S_i(x_j) - f_j \right\}^2 \tag{2.1.4}$$

tanımlayalım.

Verilen datalarda N+1 tane ayrık nokta sapmalar hesaplandığında data noktalarına uyan veya uymayan M+1 tane ayrık düğüm vardır.

Cardinal fonksiyonların özellikleri nedeniyle (2.1.4) denklemindeki $S_i(x_j)$ değerlerini bazıları sıfır olacaktır. y_i ' in E(S) de mutlaka bulunması için x noktasında $S_i(x) \neq 0$ olmalıdır.

E(S) ' in minimum olması için gerekli koşullar

$$\frac{\partial E(S)}{\partial y_k} = 2\sum_{j=0}^{N} \left\{ \sum_{i=0}^{M} y_i S_i(x_j) - f_j \right\} S_k(x_j) = 0 \quad k = 0, 1, ..., M \tag{2.1.5}$$

$y_0, y_1, ..., y_M$ parametrelerinin değerleri, bu denklem yeniden

$$\begin{bmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M0} & \cdots & a_{MM} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} \begin{matrix} = \\ \\ = \end{matrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix} \tag{2.1.6}$$

şeklinde düzenlenerek elde edilir. Burada

$$a_{ki} = \sum_{j=0}^{M} S_k(x_j) S_i(x_j) \quad k, i = 0, 1, ..., M$$

$$b_k = \sum_{j=0}^{M} f_j S_k(x_j) \quad k = 0, 1, ..., M$$

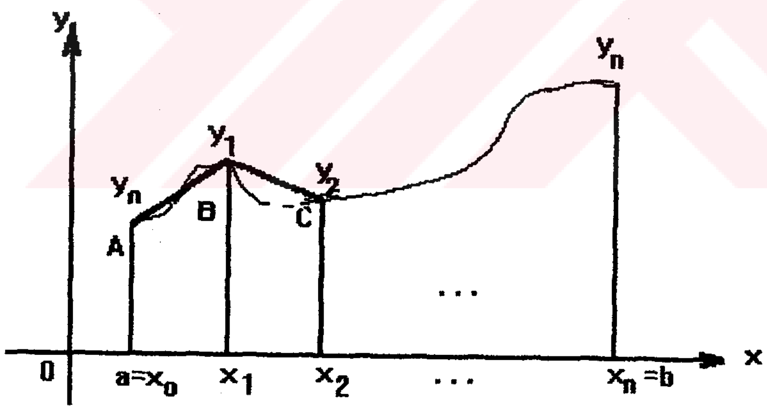
dir. $|k-i| \geq 2$ olduğunda $S_k.S_i = 0$ olduğundan (2.1.6) sistemindeki $[a_{ki}]$ matrisi üçlü diyagonal matrisdir. Bu özellik katsayılar matrisinin inversinin alınmasını kolaylaştırır.

M=2 seçerek ve sadece k_1 iç düğümünü alarak başlanır. En iyi yaklaşım hesaplanır ve k_1' in sağındaki ve solundaki sapmaların kareleri toplamı değerlendirilir. [a,k] , [k,b] aralıklarının hangisi daha büyük toplama sahipse bir düğümün aralığıyla tekrar bölünür. Düğümlerin eklenmesi δ değeri

$$\delta = \frac{E(S)}{(N-M)}$$

ile tanımlandığında son bulur. Burada E(S) (2.4)' deki gibidir.
Lineer spline' ların durumu, düzeltilmesine elverişli olmamasına rağmen her x için bir türeve sahip olması yönünden düşünülürse en az bir sürekli birinci türeve hatta bazı durumlarda sürekli ikinci türeve sahip parçalı kübik fonksiyonlar da elde edilebilir.

2.2. KÜBİK SPLINE FONKSİYONLARI İLE YAKLAŞIM



Şekil 2.3.

AB doğrusunun denklemi:

$$\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)} = \frac{(y-y_0)}{(y_1-y_0)}$$

$$(x-x_0)(y_1-y_0) = (x_1-x_0)(y-y_0)$$

$$(x-x_0)y_1-(x-x_0)y_0 = (x_1-x_0)y-(x_1-x_0)y_0$$

$$(x-x_0)y_1+(x_1-x)y_0 = (x_1-x_0)y$$

$$y = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} y_0 + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} y_1$$

olarak bulunur.

Her alt aralıkta S(x) fonksiyonu kübik polinom olarak seçersek ve bu polinomun 2. dereceden türevini alırsak

$$S(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$S'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$S''(x) = 6ax + 2b$$

gibi bir doğru denklemi çıkar. Elde edilen $S''(x)$ ise AB doğrusunun denklemidir. O halde;

$$S_i''(x) = \frac{(x - x_i)}{(x_{i-1} - x_i)} y_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} y_i$$

$M_{i-1} = S''(x_i)$ i=1,2,3,...,n-1 olmak üzere

$$S_i''(x) = \frac{(x - x_i)}{(x_{i-1} - x_i)} M_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} M_i$$

yazılır.

Bu fonksiyonun art arda iki kere integrali alınırsa S(x) fonksiyonu bulunur.

$$S''(x) = \frac{(x_{i+1} - x)}{h_i} M_i + \frac{(x - x_i)}{h_i} M_{i+1}$$
$$S'(x) = (-1)\frac{(x_{i+1} - x)^2}{2h_i} M_i + \frac{(x - x_i)^2}{2h_i} M_{i+1} + c_1$$
$$S(x) = (-1)^2 \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} M_i + \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} M_{i+1} + c_1 x + c2$$

elde edilir. Şimdi c_1 ve c_2 sabitlerini belirleyelim.

$$S(x_0) = y_0$$
$$S(x_1) = y_1$$
$$\vdots \qquad\qquad i = 0, 1, 2, ..., n-1'den$$
$$S(x_i) = y_i$$

$$S(x_i) = y_i \;\; = \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{6h_i} M_i + \frac{(x_i - x_i)^3}{6h_i} M_{i+1} + c_1 x_i + c2$$
$$S(x_{i+1}) = y_{i+1} = \frac{(x_{i+1} - x_{i+1})^3}{6h_i} M_i + \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{6h_i} M_{i+1} + c_1 x_{i+1} + c2$$

$$y_i = \frac{h_i^3}{6h_i} M_i + c_1 x_i + c_2$$
$$y_{i+1} = \frac{h_i^3}{6h_i} M_{i+1} + c_1 x_{i+1} + c_2$$

denklemleri elde edilir. Bunları taraf tarafa çıkartırsak;

$$(y_i - y_{i+1}) = \frac{h_i^2}{6}(M_i - M_{i+1}) + c_1(x_i - x_{i+1})$$

yazılır ve buradan

$$c_1 = \frac{-(y_i - y_{i+1})}{h_i} + \frac{h_i}{6}(M_i - M_{i+1})$$

elde edilir.

Benzer işlemler yapılırsa;

$$c_2 = \frac{(x_{i+1} y_i - x_i y_{i+1})}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_i x_{i+1} - M_{i+1} x_i)$$

bulunur.

Bulunan integral sabitleri S(x) fonksiyonunda yerine yazılırsa;

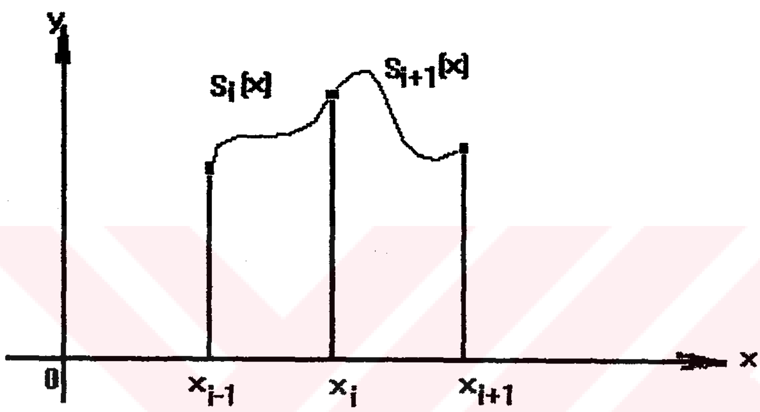
$$S(x) = \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} M_i + \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} M_{i+1} + (y_i - \frac{h_i^2 M_i}{6})(\frac{x_{i+1} - x}{h_i})$$
$$+ (y_{i+1} + \frac{h_i^2 M_{i+1}}{6})(\frac{(x - x_i)}{h_i})$$

bulunur.

Bu elde ettiğimiz fonksiyon spline fonksiyonudur. Burada bilinmeyenler sadece M_i ve M_{i+1} momentleridir. Şimdi bunları da bulabilmek için c_1 ve c_2 sabitlerini $S'(x)$ denkleminde yerine yazalım.

$$S'(x) = \frac{(x_{i+1}-x)^2}{2h_i}M_i + \frac{(x-x_i)^2}{2h_i}M_{i+1} + \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_{i+1}-M_i)$$

Türev ifadesinde de bilinmeyen olarak sadece M_i ve M_{i+1} kalmıştır.



Şekil 2.4

x_i noktasında $S_i(x)$ ve $S_{i+1}(x)$ fonksiyonlarının kendileri ve türevleri aynı değerleri alırlar.

$$S'_{i+1}(x) = -\frac{(x_{i+1}-x)^2}{2h_i}M_i + \frac{(x-x_i)^2}{2h_i}M_{i+1} - \frac{y_i-y_{i+1}}{h_i} + \frac{h_i}{6}(M_i-M_{i+1})$$

$$S'_i(x) = -\frac{(x_i-x)^2}{2h_{i-1}}M_i + \frac{(x-x_{i-1})^2}{2h_{i-1}}M_i - \frac{y_{i-1}-y_i}{h_{i-1}} + \frac{h_{i-1}}{6}(M_{i-1}-M_i)$$

$x = x_i$ için $\quad S'_{i+1}(x_i) = S'_i(x_i) \quad$ dir.

$$S'_{i+1}(x_i) = -\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2h_i}M_i - \frac{(y_i-y_{i+1})}{h_i} + \frac{h_i}{6}(M_i-M_{i+1})$$

$$S'_i(x_i) = -\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{2h_{i-1}}M_i - \frac{(y_{i-1}-y_i)}{h_{i-1}} + \frac{h_{i-1}}{6}(M_{i-1}-M_i)$$

$$S'_{i+1}(x_i) = -\frac{h_i}{3}M_i - \frac{y_i - y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}M_{i+1}$$

$$S'_i(x_i) = \frac{h_{i-1}}{3}M_i - \frac{y_{i-1} - y_i}{h_{i-1}} + \frac{h_i}{6}M_{i-1}$$

$S'_i(x_i) = S'_{i+1}(x_i)$ den

$$\frac{-h_i}{3}M_i - \frac{y_i - y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}M_{i+1} = \frac{h_{i-1}}{3}M_i - \frac{y_{i-1} - y_i}{h_{i-1}} + \frac{h_i}{6}M_{i-1}$$

$$\frac{h_{i-1}}{6}M_{i-1} + \frac{h_i + h_{i-1}}{3}M_i + \frac{h_i}{6}M_{i+1} = -\frac{\Delta y_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{\Delta y_i}{h_i}$$

$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ alındı.

$$h_{i-1}M_{i-1} + 2(h_i + h_{i-1})M_i + h_iM_{i+1} = 6[-\frac{\Delta y_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{\Delta y_i}{h_i}]$$

$h_i = h$ için; (eşit aralıklı veriler için)

$$M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1} = \frac{6}{h^2}(\Delta y_i - \Delta y_{i-1}) \quad i = 1(1)(n-1)$$

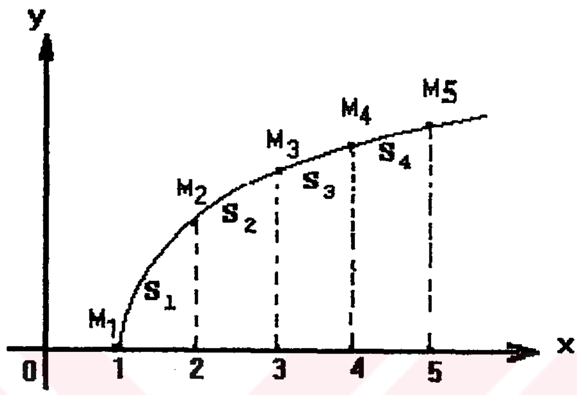
S(x) fonksiyonunun $(-\infty, a)$, (b, ∞) aralığında lineer olması varsayımından

$$S''(a) = S''(b) = 0 \quad veya \quad M_0 = M_n = 0$$

olur. O zaman yukarıdaki denklem $\mathbf{RM} = \mathbf{D}$ şeklinde bir denklem sistemi oluşturur. Bu denklem sisteminin çözümü ile M_i 'ler bulunur. Bu bulunan M_i değerleri S(x) fonksiyonunda yerine yazılarak her (x_i, x_{i+1}) aralığı için (a,b) aralığı boyunca kübik spline fonksiyonları bulunmuş olur.

ÖRNEK:

$P_1(1, ln1)$, $P_2(2, ln2)$, $P_3(3, ln3)$, $P_4(4, ln4)$, $P_5(5, ln5)$ noktalarıyla verilen fonksiyonun f(2.4)' deki değerini kübik spline yaklaşımını kullanarak belirleyiniz.



Şekil 2.5

$$S_i(x) = \frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_i}M_i + \frac{(x-x_i)^3}{6h_i}M_{i+1} + (y_i - \frac{h_i^2 M_i}{6})(\frac{x_{i+1}-x}{h_i})$$
$$+ (y_{i+1} + \frac{h_i^2 M_{i+1}}{6})(\frac{(x-x_i)}{h_i})$$

den

$$S_1(x) = \frac{(x_2-x)^3}{6}M_1 + \frac{(x-x_1)^3}{6}M_2 + (y_1 - \frac{M_1}{6})(x_2 - x)$$
$$+ (y_2 + \frac{M_2}{6})(x - x_1)$$

$$S_2(x) = \frac{(x_3-x)^3}{6}M_2 + \frac{(x-x_2)^3}{6}M_3 + (y_2 - \frac{M_2}{6})(x_3 - x)$$
$$+ (y_3 + \frac{M_3}{6})(x - x_2)$$

$$S_3(x) = \frac{(x_4-x)^3}{6}M_3 + \frac{(x-x_3)^3}{6}M_4 + (y_3 - \frac{M_3}{6})(x_4 - x)$$
$$+ (y_4 + \frac{M_4}{6})(x - x_3)$$

$$S_4(x) = \frac{(x_5-x)^3}{6}M_4 + \frac{(x-x_4)^3}{6}M_5 + (y_4 - \frac{M_4}{6})(x_5 - x)$$
$$+ (y_5 + \frac{M_5}{6})(x - x_4)$$

denklemleri bulunur.

$$S_i'(x) = -\frac{(x_{i+1}-x)^2}{2h_i}M_i + \frac{(x-x_i)^2}{2h_i}M_{i+1} + \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_{i+1}-M_i)$$

den

$$S_1'(x) = -\frac{(x_2-x)^2}{2}M_1 + \frac{(x-x_1)^2}{2}M_2 + (y_2-y_1) - \frac{1}{6}(M_2-M_1)$$
$$S_2'(x) = -\frac{(x_3-x)^2}{2}M_2 + \frac{(x-x_2)^2}{2}M_3 + (y_3-y_2) - \frac{1}{6}(M_3-M_2)$$
$$S_3'(x) = -\frac{(x_4-x)^2}{2}M_3 + \frac{(x-x_3)^2}{2}M_4 + (y_4-y_3) - \frac{1}{6}(M_4-M_3)$$
$$S_4'(x) = -\frac{(x_5-x)^2}{2}M_4 + \frac{(x-x_4)^2}{2}M_5 + (y_5-y_4) - \frac{1}{6}(M_5-M_4)$$

denklemleri yazılır.

$S_1'(x_2) = S_2'(x_2)$

$S_2'(x_3) = S_3'(x_3)$

$S_3'(x_4) = S_4'(x_4)$

den ve $M_1 = M_5 = 0$ ' dan;

$$S_1'(x_2) = \frac{M_2}{2} + ln2 - ln1 + \frac{1}{6}M_1 - \frac{1}{6}M_2$$

$$S_2'(x_2) = -\frac{M_2}{2} + ln3 - ln2 + \frac{1}{6}M_2 - \frac{1}{6}M_3$$

$$M_1 + 4M_2 + M_3 = 6[ln\frac{3}{2} - ln\frac{2}{1}] \qquad (1)$$

$$S_2'(x_3) = \frac{M_3}{2} + ln3 - ln2 + \frac{1}{6}M_2 - \frac{1}{6}M_3$$

$$S_3'(x_3) = -\frac{M_3}{2} + ln4 - ln3 + \frac{1}{6}M_3 - \frac{1}{6}M_4$$

$$M_2 + 4M_3 + M_4 = 6[ln\frac{4}{3} - ln\frac{3}{2}] \qquad (2)$$

$$S_3'(x_4) = \frac{M_4}{2} + ln4 - ln3 + \frac{1}{6}M_3 - \frac{1}{6}M_4$$

$$S_4'(x_4) = -\frac{M_4}{2} + ln5 - ln4 + \frac{1}{6}M_4 - \frac{1}{6}M_5$$

$$M_3 + 4M_4 + M_5 = 6[ln\frac{5}{4} - ln\frac{4}{3}] \tag{3}$$

denklemleri bulunur. Bu denklemler

$$\begin{array}{lllllll} M_1 & +4M_2 & +M_3 & & & = -1.72609 \\ & M_2 & +4M_3 & +M_4 & & = -0.70670 \\ & & M_3 & +4M_4 & +M_5 & = -0.50970 \end{array}$$

ve $M_1 = M_5 = 0$ kabulünden üç bilinmeyenli üç denklem oluşturur. Bunun çözümünden

$$M_1 = M_5 = 0$$

$$M_2 = -0.421$$

$$M_3 = -0.042$$

$$M_4 = -0.117$$

elde edilir.

Bulunan bu M_i değerleri $S_i(x)$ i=1,2,3,4 denklemlerinde yerine yazılarak her bir (x_i, x_{i+1}) alt aralığında (a,b) aralığı boyunca kübik spine fonksiyonları bulunmuş olur.

Şimdi f(2.4) değerini hesaplamak için $S_2(x)$ fonksiyonunu oluşturalım.

$$S_2(x) = \frac{(3-x)^3}{6}0.421 - \frac{(x-2)^3}{6}0.042 + (ln2 + \frac{0.421}{6})(3-x) + (ln3 + \frac{0.042}{6})(x-2)$$

$$S_2(2.4) = 0.876$$

bulunmuş olur. Gerçekten bu

$$f(x) = ln(x) \Longrightarrow ln(2.4) = 0.8754$$

gerçek değerine değerine çok yakın bir değerdir.

2.3. BEŞİNCİ DERECE SPLINE POLİNOMLAR İLE YAKLAŞIM

$x_0 = a, x_1, ..., x_n = b$ noktaları için f_i i=1,...,n fonksiyon değerleri verilmiş olsun. Amacımız elbetteki, bu noktalarda verilen değerleri sağlayan yaklaşım polinomunu belirlemektir. x_0, x_1 noktalarına karşılık gelen f_0, f_1 değerleri arasındaki doğrunun denklemi $\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}$ 'dan

$$y = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}y_0 + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}y_1 \qquad (2.3.1)$$

bulunur. Herbir alt aralıkta S fonksiyonunu 5. dereceden polinomlar olarak seçersek,

$$S(x) = A_5x^5 + A_4x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0$$
$$S'(x) = 5A_5x^4 + 4A_4x^3 + 3A_3x^2 + 2A_2x + A_1$$
$$S''(x) = 20A_5x^3 + 12A_4x^2 + 6A_3x + 2A_2$$
$$S'''(x) = 60A_5x^2 + 24A_4x + 6A_3$$
$$S^{(iv)}(x) = 120A_5x + 24A_4$$

gibi doğru denklemini buluruz.
O halde bulunan (2.3.1) denklemi bilinenler cinsinden yazıldığında,

$$S^{(iv)}(x) = y = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}y_0 + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}y_1$$

yazılabilir. Her bir i alt aralığı için $M_i = S^{(IV)}(x_i)$ i=1,...,n olmak üzere;

$$S^{(iv)}(x) = y = \frac{(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i+1})}M_i + \frac{(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_i)}M_{i+1}$$

yazılabilir. h_i adım uzunluğu olmak üzere,

$$S^{(iv)}(x) = y = \frac{(x_{i+1}-x)}{h_i}M_i + \frac{(x-x_i)}{h_i}M_{i+1}$$

elde edilir.

$S^{(iv)}(x)$ 'in ard arda dört kez integrali alınırsa,

$$S'''(x) = (-1)\frac{(x_{i+1}-x)^2}{2h_i}M_i + \frac{(x-x_i)^2}{2h_i}M_{i+1} + c_1$$

$$S''(x) = (-1)^2\frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_i}M_i + \frac{(x-x_i)^3}{6h_i}M_{i+1} + c_1x + c_2$$

$$S'(x) = (-1)^3\frac{(x_{i+1}-x)^4}{24h_i}M_i + \frac{(x-x_i)^4}{24h_i}M_{i+1} + c_1\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3$$

$$S(x) = (-1)^4\frac{(x_{i+1}-x)^5}{120h_i}M_i + \frac{(x-x_i)^5}{120h_i}M_{i+1} + c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3x + c_4$$

elde edilir. Şimdi c_1, c_2, c_3, c_4 sabitlerini belirlensin.

$$\begin{array}{lll} S(x_0) = y_0 & S'(x_0) = y_0' & S''(x_0) = y_0'' \\ S(x_1) = y_1 & S'(x_1) = y_1' & S''(x_1) = y_1'' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ S(x_n) = y_n & S'(x_n) = y_n' & S''(x_n) = y_n'' \end{array}$$

olduğundan,

$$S_i''(x_i) = \frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{6h_i}M_i + c_1x_i + c_2 = y_i''$$

$$S_i''(x_{i+1}) = \frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{6h_i}M_{i+1} + c_1x_i + c_2 = y_{i+1}''$$

$$y_i'' = \frac{h_i^2}{6}M_i + c_1x_i + c_2$$
$$y_{i+1}'' = \frac{h_i^2}{6}M_{i+1} + c_1x_{i+1} + c_2$$

taraf tarafa çıkartılırsa,

$$y_i'' - y_{i+1}'' = \frac{h_i^2}{6}(M_i - M_{i+1}) + c_1(x_i - x_{i+1})$$

$$c_1 = \frac{-(y_i'' - y_{i+1}'')}{h_i} + \frac{h_i}{6}(M_i - M_{i+1}) \tag{2.3.2}$$

bulunur. Aynı yolla c_2 'de kolayca hesaplanır.

$$x_{i+1}y_i'' = \frac{h_i^2}{6}M_i x_{i+1} + c_1 x_i x_{i+1} + c_2 x_{i+1}$$

$$x_i y_{i+1}'' = \frac{h_i^2}{6}M_{i+1}x_i + c_1 x_i x_{i+1} + c_2 x_i$$

yine taraf tarafa çıkarılarak,

$$(x_{i+1}y_i'' - x_i y_{i+1}'') = \frac{h_i^2}{6}(M_i x_{i+1} - M_{i+1}x_i) + c_2(x_{i+1} - x_i)$$

$$c_2 = \frac{(x_{i+1}y_i'' - x_i y_{i+1}'')}{h_i} + \frac{h_i}{6}(M_i x_{i+1} - M_{i+1}x_i) \tag{2.3.3}$$

bulunur.

$S_i(x_i) = y_i$

$S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$ 'den

$$S_i(x_i) = \frac{h_i^5}{120h_i}M_i + c_1\frac{x_i^3}{6} + c_2\frac{x_i^2}{2} + c_3 x_i + c_4 = y_i$$

$$S_i(x_{i+1}) = \frac{h_i^5}{120h_i}M_{i+1} + c_1\frac{x_{i+1}^3}{6} + c_2\frac{x_{i+1}^2}{2} + c_3 x_{i+1} + c_4 = y_{i+1}$$

yazılır. c_1 ve c_2 'ler biliniyor, c_3 ve c_4 'lerde hesaplanırsa bu son yazılan iki denklem taraf tarafa çıkartılıp;

$$c_3 = \frac{h_i^3}{120}(M_i - M_{i-1}) - \frac{(y_i - y_{i+1})}{h_i} + c_1\frac{(x_i^3 - x_{i+1}^3)}{6h_i} + c_2\frac{(x_i^2 - x_{i+1}^2)}{2h_i} \tag{2.3.4}$$

olup, yine benzer yolla;

$$x_{i+1}y_i = \frac{h_i^4}{120}M_i x_{i+1} + c_1\frac{x_i^3 x_{i+1}}{6} + c_2\frac{x_i^2 x_{i+1}}{2} + c_3 x_i x_{i+1} + c_4 x_{i+1}$$

$$x_i y_{i+1} = \frac{h_i^4}{120}M_{i+1}x_i + c_1\frac{x_i x_{i+1}^3}{6} + c_2\frac{x_i x_{i+1}^2}{2} + c_3 x_i x_{i+1} + c_4 x_i$$

yazılıp taraf tarafa çıkartılırsa;

$$c_4 = \frac{x_{i+1}y_i - x_iy_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i^3}{120}(M_ix_{i+1} - M_{i+1}x_i) - c_1\frac{(x_i^3x_{i+1} - x_{i+1}^3x_i)}{6h_i}$$

$$-c_2\frac{(x_i^2x_{i+1} - x_{i+1}^2x_i)}{2h_i} \tag{2.3.5}$$

değerleri bulunur.

(2.3.2) ve (2.3.3) denklemlerinde bulunan c_1 ve c_2 değerleri c_3 ve c_4 'de yerlerine yazılıp düzenlenirse;

$$c_3 = \frac{h_i^3}{120}(M_i - M_{i+1}) - \frac{(y_i - y_{i+1})}{h_i} + \Big(-\frac{(y_i'' - y_{i+1}'')}{h_i} + \frac{h_i}{6}(M_i - M_{i+1})\Big)\frac{(x_i^3 - x_{i+1}^3)}{6h_i}$$

$$+\Big(\frac{(x_{i+1}y_i'' - x_iy_{i+1}'')}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_ix_{i+1} - M_{i+1}x_i)\Big)\frac{(x_i^2 - x_{i+1}^2)}{26} \tag{2.3.6}$$

$$c_4 = \frac{(x_{i+1}y_i - x_iy_{i+1})}{h_i} - \frac{h_i^3}{120}(M_ix_{i+1} - M_{i+1}x_i)$$

$$-\Big(-\frac{(y_i'' - y_{i+1}'')}{h_i} + \frac{h_i}{6}(M_i - M_{i+1})\Big)\frac{(x_i^3x_{i+1} - x_{i+1}^3x_i)}{6h_i} \tag{2.3.7}$$

$$-\Big(\frac{(x_{i+1}y_i'' - x_iy_{i+1}'')}{h_i} + \frac{h_i}{6}(M_ix_{i+1} - M_{i+1}x_i)\Big)\frac{(x_i^2x_{i+1} - x_{i+1}^2x_i)}{2h_i}$$

c_1, c_2, c_3, c_4 değerleri $S_i(x)$ 'de yerine yazılır ve düzenlemeler yapılırsa;

$$S_i(x) = \frac{(x_{i+1}-x)^5}{120h_i}M_i + \frac{(x-x_i)^5}{120h_i}M_{i+1} + \frac{1}{h_i}\Big((y_{i+1}'' - y_i'') + \frac{h_i^2}{6}(M_i - M_{i+1})\Big)x^3$$

$$+\frac{1}{h_i}\Big((x_{i+1}y_i'' - x_iy_{i+1}'') - \frac{h_i^2}{6}(M_ix_{i+1} - M_{i+1}x_i)\Big)x^2$$

$$+\Big[-\frac{h_i^3M_i}{120} + \frac{y_i}{h_i} + \frac{(y_i'' - y_{i+1}'')x_i^3}{6h_i^2} - \frac{(M_i - M_{i+1})x_i^3}{36}$$

$$-\frac{(x_{i+1}y_i'' - x_iy_{i+1}'')x_i^2}{2h_i} + \frac{(M_ix_{i+1} - M_{i+1}x_i)x_i^2}{12}\Big](x_{i+1} - x)$$

$$+\Big[-\frac{h_i^3M_{i+1}}{120} + \frac{y_{i+1}}{h_i} + \frac{(y_i'' - y_{i+1}'')x_{i+1}^3}{6h_i^2} - \frac{(M_i - M_{i+1})x_{i+1}^3}{36}$$

$$-\frac{(x_{i+1}y_i'' - x_iy_{i+1}'')x_{i+1}^2}{2h_i} + \frac{(M_ix_{i+1} - M_{i+1}x_i)x_{i+1}^2}{12}\Big](x - x_{i+1}) \tag{2.3.8}$$

olarak elde edilir. Bu denklem çok uzun ve karmaşık görünmekle birlikte bilinmeyen olarak içinde sadece M_i , M_{i+1} değerleri kalmıştır.

$$S'''(x) = -\frac{(x_{i+1}-x)^2}{2h_i}M_i + \frac{(x-x_i)^2}{2h_i}M_{i+1} + \frac{(y''_{i+1}-y''_i)}{h_i} + \frac{h_i}{6}(M_i - M_{i+1})$$

ifadesinde de bilinmeyen olarak M_i , M_{i+1} değerleri kalmıştır.

$$S'''_{i+1}(x) = -\frac{(x_{i+1}-x)^2}{2h_i}M_i + \frac{(x-x_i)^2}{2h_i}M_{i+1} + \frac{(y''_{i+1}-y''_i)}{h_i} + \frac{h_i}{6}(M_i - M_{i+1})$$

$$S'''_i(x) = -\frac{(x_i-x)^2}{2h_i}M_{i-1} + \frac{(x-x_{i-1})^2}{2h_i}M_i + \frac{(y''_i-y''_{i-1})}{h_i} + \frac{h_i}{6}(M_{i-1} - M_i)$$

$x \to x_i$ için $S'''_{i+1}(x_i) = S'''_i(x_i)$ ' den

$$S'''_{i+1}(x_i) = -\frac{h_i^2}{2h_i}M_i + \frac{(y''_{i+1}-y''_i)}{h_i} + \frac{h_i}{6}(M_i - M_{i+1})$$

$$S'''_i(x_i) = \frac{h_{i-1}^2}{2h_{i-1}}M_i + \frac{(y''_i-y''_{i-1})}{h_{i-1}} + \frac{h_{i-1}}{6}(M_{i-1} - M_i)$$

$$S'''_{i+1}(x_i) = -\frac{h_i}{3}M_i + \frac{(y''_{i+1}-y''_i)}{h_i} - \frac{h_i}{6}M_{i+1}$$

$$S'''_i(x_i) = \frac{h_{i-1}}{3}M_i + \frac{(y''_i-y''_{i-1})}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}}{6}M_{i+1}$$

$$-\frac{h_i}{3}M_i + \frac{(y''_{i+1}-y''_i)}{h_i} - \frac{h_i}{6}M_{i+1} = \frac{h_{i-1}}{3}M_i + \frac{(y''_i-y''_{i-1})}{h_{i-1}} - \frac{h_{i-1}}{6}M_{i+1}$$

$$\frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{h_i+h_{i-1}}{3}M_i + \frac{h_i}{6}M_{i+1} = -\frac{\Delta y''_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{\Delta y_i}{h_i}$$

$h_i = h$ için (eşit aralıklı veriler için;)

$$M_{i-1} + 4M_i + M_{i+1} = \frac{6}{h^2}(\Delta y''_i - \Delta y''_{i-1})i = 1, ..., n-1 \qquad (2.3.9)$$

şeklinde M_i 'lerden oluşan üçlü band matris oluşur. S(x) fonksiyonunun $(-\infty, a)$, (b, ∞) aralığında 2. mertebe veya daha düşük dereceli polinom olması varsayımından,

$$S'''(a) = S'''(b) = 0 \qquad yada \qquad M_0 = M_n = 0$$

olur. O zaman (2.3.9) denklemi,

R.M=D

şeklinde bir denklem sistemi oluşturur. Bu denklem sisteminin çözümü ile M_i 'ler bulunur.Bulunan M_i değerleri S(x) fonksiyonunda yerine yazılarak her (x_i, x_{i+1}) aralığı için (a,b) aralığı boyunca 5. derece spline polinomları bulunmuş olur.

S O N U Ç

Eğri uydurma gereksinimi ölçümleri kesikli (discrete) olmasına rağmen bazı fiziksel olayların sürekli olduğu inancından ortaya çıkmıştır. Bazı matematiksel araçlar kullanarak bu kesikli olayların yeniden sürekliliği oluşturulmaktadır.

Bu çalışmada verilen datalara uygun olan fonksiyonu bulmak için en çok kullanılan yöntemler incelenmiştir: En küçük kareler yöntemi, ortogonal fonksiyonlarla yaklaşım, trigonometrik fonksiyonlarla yaklaşım ,parça parça polinomlar ile yaklaşım.

Bu yöntemlerin çoğunda yaklaşım fonksiyonu olarak bir polinom kullanılmıştır ve enterpolasyon noktalarının sayısı arttıkça gerekli esneklik hem uydurulan eğrinin derecesini hemde fazla salınım riskini arttırır.

Polinomların derecesini düşük tutan ve yeterli sayıda polinomsal parçalar ekleyerek esnekliği sağlayan fonksiyonlara *Parçalı Polinomsal Fonksiyonlar* denir. Bu fonksiyonların en çok bilineni ise kübik spline'lardır. Çalışmanın ikinci bölümünde Lineer Spline' lar en küçük kareler yönteminde kullanılmış ve lineer spline' lerden daha iyi bir yaklaşım olan kübik spline' lara geçilmiştir. Son yıllarda kübik spline fonksiyonları ile yaklaşım diğer yöntemlere göre daha geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Özellikle gemi inşaatı, aircraft endüstrisinde kübik spline fonksiyonlarının kullanımı yaygındır.

K A Y N A K L A R

1-) AHLBERG J.H. ,NILSON E.N. ,WALSH J.L. , Theory Of Splines And Their Applications, 1967

2-) AKTAŞ Z. ,Öncül H. ,URAL S. , Sayısal Çözümleme, 1983

3-) ÇAĞAL Behiç, Nümerik Analiz, 1988

4-) ÇAĞAL Behiç, Sayısal Analiz, 1989

5-) ÇAĞAL Behiç, Yüksek Lisans Ders Notları, 1990

6-) FRÖBERG K.E., Introduction to Numerical Analysis, 1974

7-) KAHANER D. ,MOLER C. ,NASH S. ,Numerical Analysis And Matematical Software, 1989

8-) LANCASTER P., ŠALKAUSKAS K., Curve And Surface Fitting,1986

9-) MARON M.J. , Numerical Analysis-A Practical Approach,1982

Ö Z G E Ç M İ Ş

Doğum Tarihi.......: *28 Temmuz 1964*

Doğum Yeri..........: *İSTANBUL*

İlk Öğrenim..........: *İstanbul Bahçelievler İlkokulu ,1975*

Orta Öğrenimi......: *İstanbul Erenköy Kız Lisesi ,1983*

Yüksek Öğrenimi..: *Marmara Üniversitesi Fen Edebiyat Fak. Matematik Bölümü ,1990.*

Mesleği.................: *Prof.Faik Somer Lisesi Matematik Öğretmeni*