TC

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ELİPTİK FONKSİYONLAR VE ELİPTİK İNTEGRALLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NAZMİYE YAHNİOĞLU

İSTANBUL 1993

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmamda bana yardımcı olan bütün eğitmen hocalarıma ve tez süresince sonsuz sabrından dolayı Sayın Prof. Tahir ŞİŞMAN'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu çalışmamızda eliptik fonksiyonlar ve eliptik integraller dört bölümde incelenmiştir. Her bölümde yapılan çalışma bölüm bölüm kısaca aşağıda verilmiştir.

I. bölümde: Jacobi'nin eliptik fonksiyonlar teorisinden yola çıkarak geliştirdiği teta fonksiyonları anlatılmıştır. Teta fonksiyonlarının periyodu, sıfır yerleri, trigonometrik seri açılımları, birbiriyle ilişkileri, karışık çarpımları, sonsuz çarpım ifadeleri ve türevi ile beraber iki özdeşlik verilmiştir. son olarak bu bölümde, teta fonksiyonlarının rasyonel türevi ile dönüşüm formülleri verilmiştir.

II. bölümde: I. bölümde anlatılan fonksiyonlar yardımıyla eliptik fonksiyonlara geçiş yapılmıştır. Teta fonksiyonları ile tanımlanan eliptik fonksiyonların yine teta fonksiyonları yardımı ile özellikleri anlatılmıştır.

Eliptik fonksiyonlar Jacobi ve Weierstrass eliptik fonksiyonları olarak iki kısımda incelenmiştir. Her iki tip eliptik fonksiyonun periyotları, kutupları ve rezüdüleri, türevleri, trigonometrik seri ifadeleri anlatılmış ve toplam formülleri verilmiştir. Ayrıca herhangi bir eliptik fonksiyonun $\wp(z)$, $\zeta(z)$ cinsinden ifede edilebilmesi ile Fourier serisine açılabilmesi incelenmiştir.

III. bölümde: Eliptik fonksiyonların eliptik integrallere eşitliğinden faydalanarak, eliptik integrallere geçiş yapılmıştır.

Önce genel olarak herhangi bir eliptik integralin elemanter üç tip eliptik integrale indirgenmesi ve buradan trigonometrik ifadelerinin belirlenmesi detaylı olarak incelenmiştir. Daha sonra I.,II.,III. tip eliptik integraller ayrıntılı olarak anlatılarak bu integraller hakkında çeşitli özellikler verilmiştir.

Son bölüm olan IV. bölümde: Önce herhangi bir işlemde ortaya çıkan integrallerin çözümleriyle ilgilenilmiştir. Verilen matematiksel örneklerin birbirinden farklı olması ve değişik yollardan çözümünün bulunmasına dikkat edilmiştir. Sonraki başlık altında ise, eliptik integraller acaba nerelerde karşımıza çıkar? Sorusunun yanıtı olarak fiziksel uygulamalardan üçü verilerek eliptik integrallerin ortaya çıktığı örnekler incelenmiştir.

SUMMARY

In this study, I investigated the Elliptic Functions and the elliptic integrals in four sections. It was explained briefly following in every section what they are.

In first chapter, it was told about Jacobi's Elliptic Functions with the helped theta functions. Then, It was given the properties of theta functions. For examples periyot's, Poles and zeros of theta functions, expantion of trigonometric series, products of theta functions with each other, relation between them, derivation and two differantial aquations satisfied by theta functions.

In chapter II, by means of theta functions, which was examined in chapter I, It has been passed to elliptic functions. Elliptic functions's properties which was defined with theta functions also explained by means of theta functions.

Elliptic functions investigated in two groups that Jacobi and Weierstrass elliptic functions. Two groups elliptic functions's properties have been given periods, poles and residues, derivation's, expensions of trigonometric series and the additions form for the elliptic functions and then formula expressing any elliptic functions in terms of Weierstrass elliptic functions and finally Fourier expansions for the elliptic functions.

In third chapter, we have been passed to elliptic integrals by using the equality of elliptic functions elliptic integrals.

Fist of all, It was examined, generally to reduce of any given elliptic integral into three kinds of elliptic integrals and then to determine the trigonometric forms of it. After then, the detailed investigations of three types integral and some special case of these integrals are given.

At the last chapter, I concerned to solve of any given elliptic integral. Examples of this sections is choosen as different from each other and various different ways in the solutions. In the second subdivision it was given the answer as pyhsicall applications of elliptic integral aganist the questions "Where elliptic integrals occur? ". Here three pyhsicall examples are given as application of elliptic integral.

I. BÖLÜM

I.1 TETA FONKSIYONU

Eliptik fonksiyonları içeren problemlerde nümerik çözümler belirlemek istendiği zaman, hesaplar teta fonksiyonu gibi bilinen yardımcı basit fonksiyonlara dönüştürülerek yapılır.

Bu yöntem sonuç elde etmede yardımcıdır. Bu olayı tersten ele alarak, bu fonksiyonları tanıyıp sonradan eliptik fonksiyonlara geçiş yapılacaktır.

Teta fonksiyonlarıyla ilk olarak Jacobi sistematik olarak ilgilenmiştir. Jacobi, eliptik fonksiyonlar teorisinden yola çıkarak, teta fonksiyonlarının teorisini geliştirmiştir.[1]

TANIM: τ ; imajiner kısmı pozitif olan komplex bir sayı olsun ve $q=e^{\pi i\tau}$ yazılsın. Böylece $|q|<1$ olur.[2]

Burada teta fonksiyonları şu seriyle tanımlanmaktadır:

$$\theta(z,q)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} e^{2inz} \qquad (1,1)$$

Bu seri $n\to\mp\infty$ giderken yakınsak bir seridir.[3]

---

[1] E.T. Whitteker and G.N. Watson -A Course of Modern Analysis

[2] Çünkü; $\tau=a+ib$ $\quad(b>0)$

$$q=e^{i\pi(a+ib)}=e^{a\pi i-\pi b}=(-1)^a e^{-\pi b}$$

$$|q|=\left|\frac{(-1)^a}{e^{\pi b}}\right|=\left|\frac{1}{e^{\pi b}}\right|<1$$

[3] D.F. Lawden -Elliptic Function and Application -sf:4

$\theta(z,q)$ serileri z değişkeninin herhangi sınırlı bir bölgesinde, düzgün yakınsak analitik fonksiyonların bir serisidir ve bu yüzden bir integral fonksiyondur.[4] Bu fonksiyon farklı sınır değer şartlarında farklı seriler verir. Bu farklı seriler dört başlık altında toplanır.

Dört teta fonksiyonu sırasıyla,

$$\theta_1(z,q)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{i(2n+1)z} \qquad (1,2)$$

$$\theta_2(z,q)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{i(2n+1)z} \qquad (1,3)$$

$$\theta_3(z,q)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2inz} \qquad (1,4)$$

$$\theta_4(z,q)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} e^{2inz} \qquad (1,5)$$

olarak verilir. Bu fonksiyonlar (1,1) formülünden çıkarılabilir.Örneğin;

$$\theta_4(z+\frac{1}{2}\pi,q)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} e^{2in(z+\frac{1}{2}\pi)}$$

[4] İntegral fonksiyon:Terimleri integrallerden oluşan fonksiyon.(bak. kaynakca [1]-sf:463)

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} e^{2inz} e^{n\pi i}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{2n} q^{n^2} e^{2inz}$$

$$\theta_4(z+\frac{1}{2}\pi,q)=\theta_3(z,q)$$

olur. Böylece genel olarak teta fonksiyonlarının birbiriyle ilişkileri;

$$\theta_4(z+\frac{1}{2}\pi,q)=\theta_3(z,q)$$

$$\theta_4(z+\frac{1}{2}\pi\tau,q)=-iq^{-\frac{1}{4}}e^{-iz}\ \theta_1(z,q)$$

$$\theta_1(z+\frac{1}{2}\pi,q)=\theta_2(z,q) \qquad (1,6)$$

olarak verilebilir.

I.2 TETA FONKSİYONLARININ GENEL ÖZELLİKLERİ

I.2.1. Periyodiklik Çarpanları[5] ∓ 1 ve $\mp q^{-1}e^{-2iz}$ dir.

Teta fonksiyonlarının periyodiklik çarpanlarını bulabilmek için $z+\pi$ ve $z+\pi\tau$ artımlarını uygulamak yeterlidir. Buradan, $\theta_4(z,q)$ için bu işlemsel olarak gösterilirse,

$z=z+\pi$ için:

---

[5] Bir fonksiyonun herhangi bir değer ve onun tamsayı katlarında sabit bir çarpan alması olayında ki bu çarpana periyodiklik çarpanı denir. Fonksiyonun periyodu daima "+1" çarpanı verir. Dolayısıyla periyodiklik çarpanı +1'dir.

$$\theta_4(z+\pi,q)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} e^{2in(z+\pi)}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} e^{2inz} e^{2in\pi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} e^{2inz}$$

$$\theta_4(z+\pi,q)=\theta_4(z,q)$$

yani +1 çarpanı verdi. Şimdi $z=z+\pi\tau$ için denenirse:

$$\theta_4(z+\pi\tau,q)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} e^{2in(z+\pi\tau)}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} e^{2inz} e^{2in\pi\tau}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1)^2} e^{2(n+1)iz} e^{-2iz} q^{-1}$$

$$=-q^{-1}e^{-2iz}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n+1} q^{(n+1)^2} e^{2(n+1)iz}=-q^{-1}e^{-2iz}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k q^{k^2} e^{2kiz}$$

k=n+1 ve $q=e^{i\pi\tau}$ değeri de kullanılarak:

$$\theta_4(z+\pi\tau,q)=-q^{-1}e^{-2iz}\theta_4(z,q) \qquad (1,8)$$

olur. Şimdi bütün teta fonksiyonları için periyodiklik çarpanları bir tablo halinde verilirse:

Tablo 1

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
π	-1	-1	1	1
$\pi\tau$	$-q^{-1}e^{-2iz}$	$q^{-1}e^{-2iz}$	$q^{-1}e^{-2iz}$	$-q^{-1}e^{-2iz}$

Teta fonksiyonlarının her biri π ve $\pi\tau$ için bir çarpan verir. Bu değerlerin herhangi bir tamsayı katı için;

$$\theta_i(z+n\pi,q)=\mp 1\ \theta_i(z,q) \qquad n \in \mathbb{Z} \qquad (1,9)$$

$$\theta_i(z+m\pi,q)=\mp q^{m^2}e^{-2imz}\ \theta_i(z,q) \qquad m \in \mathbb{Z}$$

olur. Öyleyse şu soru akla gelebilir; Acaba $z=z+n\pi+m\pi\tau$ için teta fonksiyonları nasıl değişecektir? $\theta_4(z,q)$ için:

$$\theta_4(z+n\pi+m\pi\tau,q)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k q^{k^2}e^{2ik(z+n\pi+m\pi\tau)}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k q^{k^2}e^{2ikz}e^{2ikn\pi}e^{2ikm\pi\tau}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k q^{k^2}e^{2ikz}e^{2ikm\pi\tau}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k q^{k^2}q^{2km}e^{2ikz}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k q^{(k+m)^2}e^{2i(k+m)z}q^{-m^2}e^{-2imz}$$

$$= (-1)^m q^{-m^2} e^{-2imz} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+m} q^{(k+m)^2} e^{2i(k+m)z}$$

olur.Diğer teta fonksiyonları da işaret farkıyla aynı çarpanı verir.

Şimdi m=n=1 için teta fonksiyonlarının eşitlikleri şöyle verilirse:

$$\theta_1(z,q) = -\theta_1(z+\pi,q) = -\lambda\theta_1(z+\pi\tau,q) = \lambda\theta_1(z+\pi+\pi\tau)$$

$$\theta_2(z,q) = -\theta_2(z+\pi,q) = \lambda\theta_2(z+\pi\tau,q) = -\lambda\theta_2(z+\pi+\pi\tau)$$

$$\theta_3(z,q) = \theta_3(z+\pi,q) = -\lambda\theta_3(z+\pi\tau,q) = \lambda\theta_3(z+\pi+\pi\tau)$$

$$\theta_4(z,q) = \theta_4(z+\pi,q) = -\lambda\theta_4(z+\pi\tau,q) = -\lambda\theta_4(z+\pi+\pi\tau,q) \qquad (1,12)$$

Burada λ çarpanı qe^{2iz} olarak bulunur.Aynı özdeşlikler $n\pi, m\pi\tau$ ve $n\pi+m\pi\tau$ için bu kez ∓ 1 ile $\lambda = \mp q^m e^{2imz}$ çarpanı verir.

I.2.2.Teta Fonksiyonlarının Trigonometrik Seri İfadesi

$$\theta_1 = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{i(2n+1)z}$$

$$= -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} [\cos(2n+1)z + i\sin(2n+1)z]$$

$$=-i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\cos(2n+1)z+\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\sin(2n+1)z$$

$$\theta_1(z,q)=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}\sin(2n+1)z \qquad (1,13)$$

$$\theta_2(z,q)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{(n+\frac{1}{2})^2}e^{i(2n+1)z}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{(n+\frac{1}{2})^2}[\cos(2n+1)z+i\sin(2n+1)z]$$

$$\theta_2(z,q)=2\sum_{n=0}^{\infty}q^{(n+\frac{1}{2})^2}\cos(2n+1)z \qquad (1,14)$$

$$\theta_3(z,q)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{n^2}e^{2niz}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{n^2}[\cos 2nz+i\sin 2nz]$$

$$\theta_3(z,q)=1+\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}\cos 2nz \qquad (1,15)$$

$$\theta_4(z,q)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2} e^{2niz}$$

$$=2\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}[\cos 2nz+i\sin 2nz]$$

$$\theta_4(z,q)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2nz \qquad (1,16)$$

olur. Görülüyor ki, sadece θ_1 fonksiyonun açılımının terimleri sinz'yi içerdiğinden tek fonksiyondur. Diğerleri ise açılımlarında cosz'yi içerdiklerinden çift fonksiyonlardır.

I.2.3. Teta Foksiyonlarının Periyotları

$f(z+\omega)=f(z)$ koşulunu sağlayan ω sayısı f(z) için bir periyot teşkil ediyordu. Daha önce tablo 1 de z artımları incelenmişti.

$$\theta_3(z+\pi,q)=\theta_3(z,q) \quad ile \quad \theta_4(z+\pi,q)=\theta_4(z,q) \qquad (1,17)$$

olduğu görülür. Öyleyse θ_3 *ve* θ_4 yukarıdaki koşulu sağladıklarından π periyotlu fonksiyonlardır. θ_1 *ve* θ_2 için ise $\theta_1(z+\pi\tau,q)$ yeniden incelenirse:

$$\theta_1(z+\pi\tau,q)=-i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{i(2n+1)(z+\pi\tau)}$$

$$=-i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{i(2n+1)z} e^{i(2n+1)\pi\tau}$$

Sağdaki çarpanın değeri τ 'nun hangi katı için sonucu değiştirmez? Sorusunun yanıtı periyodu verecektir. Öyleyse;

$$e^{i(2n+1)\pi\tau}=\cos((2n+1)\pi\tau)+i\sin((2n+1)\pi\tau)=1$$

olmalı ki sonuç değişmesin. Buradan en küçük τ değeri "2" olur. Çünkü cosinüs fonksiyonunun periyodu 2π dir. ((2n+1) değeri sonucu değiştirmez). Öyleyse:

$$\theta_1(z+2\pi,q)=\theta_1(z,q)\,;\quad \theta_2(z+2\pi,q)=\theta_2(z,q) \qquad (1,18)$$

olduğu görülür.

z değerinin $\pi\tau$ kadar artımı aynı teta fonksiyonunun bir sabit kadar artımına yol açıyordu. Bu özelliğinden dolayı π *ve* $\pi\tau$ değerlerine sözde periyot (quasi-periyot) denir.

I.2.4. Teta Fonksiyonlarının Birbiriyle İlişkisi

Teta fonksiyonlarının birbirinden elde edildiği (bak. (1,6) denklemleri) görüldü. Burada teta fonksiyonlarının birbirine dönüşümü verilecektir.

$$\theta_1(z)=-\theta_2(z+\frac{1}{2}\pi)=-i\mu\theta_4(z+\frac{1}{2}\pi\tau)=-i\mu\theta_3(z+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau)$$

$$\theta_2(z)=\theta_1(z+\frac{1}{2}\pi)=\mu\theta_3(z+\frac{1}{2}\pi\tau)=\mu\theta_4(z+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau)$$

$$\theta_3(z)=\theta_4(z+\frac{1}{2}\pi)=\mu\theta_2(z+\frac{1}{2}\pi\tau)=\mu\theta_1(z+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau)$$

$$\theta_4(z)=\theta_3(z+\frac{1}{2}\pi)=-i\mu\theta_1(z+\frac{1}{2}\pi\tau)=i\mu\theta_2(z+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau) \quad (1,19)$$

burada $\mu=q^{\frac{1}{2}}e^{iz}$ olarak alınmıştır.

I.2.5.Teta Fonksiyonlarının Sıfır Yerleri

$\theta_i(z,q)=0$ $(i=1,2,3,4)$ yapan z değeri bulunmaya çalışılsın.Bunun için trigonometrik bağıntılardan θ_1 in eşiti ele alınırsa (1,13)'den;

$$\theta_1(0,q)=0 \quad (1,20)$$

olduğu görülür. Çünkü θ_1 bir sinüs açılımıdır ve sin(0)=0 dır.Buradan, $z=0$ *için* $\theta_1(z,q)=0$ elde edildiğine göre, eşiti (1,12) denklemlerine uygulanırsa:

$$\theta_1(z,q)=0 \qquad z=n\pi+m\pi\tau \qquad n,m \in \mathbb{Z} \quad (1,21)$$

olur.(1,19) denklemlerinden $\theta_1(z)=-\theta_2(z+\frac{1}{2}\pi)$ olduğu görülür. $\theta_1(0)=-\theta_2(0+\frac{1}{2}\pi)=0$ olacaktır.Bu yine (1,12) denklemlerine uygulanırsa $\theta_2(\frac{1}{2}\pi)=0$ *yani* $z=\frac{1}{2}\pi$ bulunur.Bu işlemlerin sonucunda aşağıdaki veriler elde edilir:

$$\theta_2(z,q)=0; \quad z=(n+\frac{1}{2})\pi+m\pi\tau \quad (1,22)$$

$$\theta_3(z,q)=0; \quad z=(n+\frac{1}{2})\pi+(m+\frac{1}{2})\pi\tau \tag{1,23}$$

$$\theta_3(z,q)=0; \quad z=n\pi+(m+\frac{1}{2})\pi\tau \quad n,m \in \mathbb{Z} \tag{1,24}$$

olur.

Burada m ve n'nin sonsuz değerine karşılık teta fonksiyonlarının sonsuz sayıda sıfırı olacaktır. Teta fonksiyonları periyodikdir. Sonuç olarak bu sonsuz sayıdaki sıfır noktaları birbirinin katıdır ya da "congruenti" dir, denir.

Koordinat ekseni $\omega_{n,m}=n\pi+m\pi\tau$, $n,m\in Z$ düğüm noktaları olacak şekilde paralelkenarlara bölünürse, her bir paralelkenara "hücre" denir. Düğüm noktası $0,\pi,\pi\tau,\pi+\pi\tau$ olan ilk paralelkenar en basit bölge alınır. İşlemler bu basit bölgede yapılarak bu değerler bütün düzlem için genelleştirilebilir.

I.3 TETA FONKSİYONLARININ BİRBİRİYLE KARIŞIK ÇARPIMLARI

Önce bir örnek üzerinde çarpımlar açık olarak incelensin, benzer yoldan diğer çarpımlar da elde edilebilir.

Teta fonksiyonları analitik olduğundan kareleri de analitik olacaktır. $\theta_1(z,q)$ nun kendisiyle çarpımı;

$$\theta_1(x,q)=-i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)ix}$$

$$\theta_1(y,q)=-i\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{(m+\frac{1}{2})^2} e^{(2m+1)iy}$$

$$\theta_1(x,q)\,\theta_1(y,q)=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^{n+m}q^{(n+\frac{1}{2})^2+(m+\frac{1}{2})^2}e^{(2n+1)ix+(2m+1)iy}$$

elde edilir. Burada bir değişken dönüştürmesi yapılırsa;
n+m=r;n-m=s

$$(m+\frac{1}{2})^2+(n+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}(r+1)^2+\frac{1}{2}s^2$$

$$\text{ve}\quad (2n+1)x+(2m+1)y=(r+1)(x+y)+s(x-y)$$

bulunur. Yeni değişkenlere göre düzenlenirse;

($m,n\to\mp\infty$ *için* $r,s\to\mp\infty$)

$$\theta_1(x,q)\,\theta_1(y,q)=-\sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{s=-\infty}^{\infty}(-1)^{r}q^{\frac{1}{2}(r+1)^2+\frac{1}{2}s^2}e^{i(r+1)(x+y)+is(x-y)} \qquad (1,25)$$

elde edilir. m ve n'nin aynı anda tek yada çift olmasına karşın r ve s çift olacaktır. Birinin tek diğerinin çift (yada tersi için) r ve s her ikiside tek olur. Buna göre teta çarpımları (r,s) çiftinin tek ve çift olmasına göre ikiye ayrılırsa, çift (r,s) için: r=2r ;s=2s ve tek (r,s) için:r=2r+1 ;s=2s+1 alındığında işlemler sırayla gösterilirse:

$$\psi_1=-\sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{s=-\infty}^{\infty}(-1)^{2r}q^{\frac{1}{2}(2r+1)^2+\frac{1}{2}(2s)^2}e^{i(2r+1)(x+y)+i2s(x-y)}$$

$$\psi_2=-\sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{s=-\infty}^{\infty}(-1)^{2r+1}q^{\frac{1}{2}(2r+1+1)^2+\frac{1}{2}(2s+1)^2}e^{i(2r+1+1)(x+y)+i(2s+1)(x-y)}$$

olur. Bu iki denklem toplanırsa istenilen seri elde edilir.

$$\theta_1(x)\theta_1(y)=-\sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{s=-\infty}^{\infty} q^{2(r+\frac{1}{2})^2+(2s)^2} e^{i(2r+1)(x+y)+2is(x-y)}+$$

$$+\sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{s=-\infty}^{\infty} q^{(2r)^2+2(s+\frac{1}{2})^2} e^{i2r(x+y)+i(2s+1)(x-y)}$$

$$=-\left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{2(r+\frac{1}{2})^2} e^{i(2r+1)(x+y)} \sum_{s=-\infty}^{\infty} q^{(2s)^2} e^{2is(x-y)}\right]+$$

$$+\left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{(2r)^2} e^{i2r(x+y)} \sum_{s=-\infty}^{\infty} q^{2(s+\frac{1}{2})^2} e^{i(2s+1)(x-y)}\right]$$

$$=\theta_3(x+y,q^2)\theta_2(x-y,q^2)-\theta_2(x+y,q^2)\theta_3(x-y,q^2) \qquad (1,26)$$

bulunur. Aynı işlemler tekrarlanarak diğer teta fonksiyonlarının çarpımları ise:

$$\theta_2(x,q)\theta_2(y,q)=\theta_3(x+y,q^2)\theta_2(x-y,q^2)+\theta_2(x+y,q^2)\theta_3(x-y,q^2)$$

$$\theta_3(x,q)\theta_3(y,q)=\theta_2(x+y,q^2)\theta_2(x-y,q^2)+\theta_3(x+y,q^2)\theta_3(x-y,q^2)$$

$$\theta_4(x,q)\theta_4(y,q)=\theta_3(x+y,q^2)\theta_3(x-y,q^2)-\theta_2(x+y,q^2)\theta_2(x-y,q^2) \qquad (1,27)$$

bulunur. Bu eşitliklerde x=y koyarak $\theta_i^2(x,q)$ ler elde edilir.Örneğin;

$$\theta_1^2(x,q)=\theta_3(2x,q^2)\ \theta_2(0,q^2)-\theta_2(2x,q^2)\ \theta_3(0,q^2) \qquad (1,28)$$

gibi. Aynı eşitliklerde y=0 (x=0 da olabilir) alınırsa:

$$\theta_1(0,q)=0 \tag{1,29}$$

$$\theta_2(x,q)\theta_2(0,q)=2\theta_3(x,q^2)\ \ \theta_2(x,q^2)$$

$$\theta_3(x,q)\theta_3(0,q)=\theta_2^2(x,q^2)\ \ \theta_3^2(x,q^2)$$

$$\theta_4(x,q)\theta_4(0,q)=\theta_3^2(x,q^2)-\theta_2^2(x,q^2) \tag{1,30}$$

bulunur. İkili çarpımlar yapılabildiği gibi üçlü çarpımlar da yapılabilir. Bu örnekler bu şekilde çoğaltılabilir.[6]

I.4 TETA FONKSİYONLARININ SONSUZ ÇARPIM İFADELERİ

F(t,q) şeklinde bir geometrik seri yardımıyla tanımlanmıştır. Bu seri şöyle verilir:

$$F(t,q)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}t)(1+q^{2n-1}t^{-1}) \tag{1,31}$$

Bu serinin yakınsak olması için $|q|<1$ ve t'nin de

sınırlı olması gerekir. Sıfır olmayan t değerleri ve modülü 1'den küçük q değerleri için bu seri tanımlıdır. t'nin değerlerine göre teta fonksiyonları şöyledir:

$$t=-qe^{2iz}\ \ için\ \ F(t,q)=ia_0q^{-\frac{1}{4}}e^{-iz}\ \theta_1(z,q)$$

$$t=qe^{2iz}\ \ için\ \ F(t,q)=a_0q^{-\frac{1}{4}}e^{-iz}\ \theta_2(z,q)$$

6 bak. D.F Lawden-Elliptic Function and Application

$$t=e^{2iz} \text{ için } F(t,q)=a_0\ \theta_3(z,q)$$

$$t=-e^{2iz} \text{ için } F(t,q)=a_0\ \theta_4(z,q) \tag{1,32}$$

Burada a_0 ,z ve t'den bağımsız olup q'ya bağlıdır.

Eşitliklerin sağlanması için $a_0=\dfrac{1}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})}$ olarak alınmalıdır.

Yani teta fonksiyonları:

$$\theta_1(z,q)=2q^{\frac{1}{4}}\sin z\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-2q^{2n}\cos 2z+q^{4n}) \tag{1,33}$$

$$\theta_2(z,q)=2q^{\frac{1}{4}}\cos z\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+2q^{2n}\cos 2z+q^{4n}) \tag{1,34}$$

$$\theta_3(z,q)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+2q^{2n-1}\cos 2z+q^{4n-2}) \tag{1,35}$$

$$\theta_4(z,q)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-2q^{2n-1}\cos 2z+q^{4n-2}) \tag{1,36}$$

şeklinde olur.

I.5 TETA FONKSİYONLARININ TÜREV VE ÖZDEŞLİKLERİ

Teta fonksiyonlarının türevleri gerek seri açılımlarından gerekse eşitliklerden kolayca bulunabilir. Burada iki önemli özdeşlik verilsin ve beraberinde türev de gösterilmiş olunsun.

I.2.1. $\kappa\, \nabla^2\theta_i = \dfrac{\partial\theta_i}{\partial\tau}$ $\kappa = sb$ **(Laplasien Eşitliği)**

Bütün teta fonsiyonları yukarıdaki eşitliği sağlar. Bu bir örnek üzerinde gösterilirse, $\theta_4(z,q)$ için;

$$\frac{\partial\theta_4}{\partial z}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}(2in)e^{2inz} \;;\quad \frac{\partial^2\theta_4}{\partial z^2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}(2in)^2 e^{2inz}$$

$$\frac{\partial\theta_4}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial\tau}\Big[\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n e^{(i\pi\tau)n^2}e^{2inz}\Big]=\sum_{n-\infty}^{\infty}(-1)^n(i\pi n^2)e^{(i\pi\tau)n^2}e^{2inz}$$

$$\frac{\partial^2\theta_4}{\partial z^2}=-\frac{4}{\pi i}\frac{\partial\theta_4}{\partial\tau}$$

şeklinde eşitlik gerçeklenir. Diğer teta foksiyonları da aynı özdeşliği sağlar.

I.5.2. $\theta_1'(0)=\theta_2(0)\theta_3(0)\theta_4(0)$

Önce θ_1 fonksiyonu için işlemler adım adım yapılsın. Diğerleri de aynı yoldan bulunacaktır.(1,33) denklemi şöyle düzenlensin, $\theta_1(z,q)=\sin z\ \phi(z,q)$ .Buradan üçüncü türeve kadar türevler alınsın ve z=0 değeri konulsun.

$$\theta_1'(0,q)=\phi(0,q) \;;\quad \theta_1''(0,q)=2\phi'(0,q)$$

$$\theta_1'''(0,q)=-\phi(0,q)+3\phi''(0,q) \qquad (1,37)$$

$$\phi(z,q)=2q^{\frac{1}{4}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-2q^{2n}\cos 2z+q^{4n}) \quad \textit{için,}$$

Her iki tarafın doğal logaritması alınarak, türev işlemi yapılırsa;

$$\ln\phi=\ln(2q^{\frac{1}{4}})\sum_{n=1}^{\infty}\ln[(1-q^{2n})(1-2q^{2n}\cos 2z+q^{4n})]$$

$$\frac{\phi'}{\phi}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4q^{2n}\sin 2z}{(1-2q^{2n}\cos 2z+q^{4n})}$$

$$\phi''=\phi(0,q)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8q^{2n}}{(1-q^{2n})^2} \qquad (\phi'(0,q)=0)$$

olur. Şimdi (1,37) denkleminde yerine konursa:

$$\theta_1'''(0,q)=\theta_1'(0,q)\,[24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}-1]$$

olur. Benzer şekilde θ_2, θ_3 *ve* θ_4 için de şu değerler bulunur.

$$\theta_2''(0,q)=\theta_2(0,q)\,[-1-8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1+q^{2n})^2}]$$

$$\theta_3''(0,q)=\theta_3(0,q)\,[-8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2}]$$

$$\theta_4''(0,q)=\theta_4(0,q)\,[8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2}]$$

$$I=\frac{\theta_4''(0,q)}{\theta_4(0,q)}+\frac{\theta_3''(0,q)}{\theta_3(0,q)}+\frac{\theta_2''(0,q)}{\theta_2(0,q)}+1 \qquad \textit{denirse}$$

$$I=8\,[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1+q^{2n})^2}]$$

son iki seri üzerinde birleşme işlemi uygulanıp, daha sonra ilk seri q'nun çift ve tek kuvvetlerine göre ayırılıp, bu iki serinin farkı alınırsa:

$$I=8\,[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n}}{(1-q^{n})^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n}}{(1+q^{n})^2}]$$

$$=8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}=1+\frac{\theta_1'''(0,q)}{\theta_1(0,q)}$$

olur. Önceki özdeşlikten (A-özdeşliği) ikinci türevler yerine birinci türevler konursa:

$$\frac{1}{\theta_1'}\frac{\partial}{\partial z}[\frac{\partial^2\theta_1}{\partial z^2}]=\frac{1}{\theta_2}\frac{\partial^2\theta_2}{\partial z^2}+\frac{1}{\theta_3}\frac{\partial^2\theta_3}{\partial z^2}\frac{1}{\theta_4}\frac{\partial^2\theta_4}{\partial z^2}$$

$$\frac{\kappa}{\theta_1'}\frac{\partial}{\partial z}[\frac{\partial\theta_1}{\partial\tau}]=\frac{\kappa}{\theta_2}\frac{\partial\theta_2}{\partial\tau}+\frac{\kappa}{\theta_3}\frac{\partial\theta_3}{\partial\tau}\frac{\kappa}{\theta_4}\frac{\partial\theta_4}{\partial\tau}$$

Her iki taraf τ 'ya göre integre edilirse:

$$\ln(\theta_1'(0)) = \ln\theta_2(0) + \ln\theta_3(0) + \ln\theta_4(0) + \ln c \qquad c = sb.$$

$$\theta_1'(0) = c\theta_2(0)\theta_3(0)\theta_4(0) \qquad (1,38)$$

c burada integral sabiti olup q ve τ dan bağımsızdır. Her iki tarafın $n \to \mp\infty$ giderken limiti alınırsa c=1 bulunur.

I.6 RASYONEL TETA FONKSİYONLARININ TÜREVİ

Teta fonksiyonlarının türevi, farklı iki yoldan türev alınarak iki örnek üzerinde gösterilsin.

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\theta_1(z,q)}{\theta_4(z,q)}\right] = \frac{\theta_1'(z,q)\theta_4(z,q) - \theta_1(z,q)\theta_4'(z,q)}{\theta_4^2(z,q)}$$

$$= \frac{\theta_2(z,q)\theta_3(z,q)\theta_4(0,q)\theta_1'(0,q)}{\theta_4^2(z,q)\theta_2(0,q)\theta_3(0,q)} = \frac{\theta_2(z,q)\theta_3(z,q)\theta_4^2(0,q)}{\theta_4^2(z,q)} \qquad (1,39)$$

olur. $[\theta_1'(z,q)\theta_4(z,q) - \theta_1(z)\theta_4'(z,q)]$ ifadesinin eşiti şöyle bulunur (aşağıdaki formül önceki çarpım formüllerinden çıkarılabilir);

$$\theta_1(x+y)\theta_4(x-y)\theta_2(0)\theta_3(0) = \theta_1(x)\theta_4(x)\theta_2(y)\theta_3(y) +$$

$$+\theta_1(y)\theta_4(y)\theta_2(x)\theta_3(x)$$

y'ye göre türetilirse;

$$[\theta_1'(x+y)\theta_4(x-y) - \theta_1(x+y)\theta_4'(x-y)]\theta_2(0)\theta_3(0) =$$

$$=\theta_1(x)\theta_4(x)[\theta_2'(y)\theta_3(y)+\theta_2(y)\theta_3'(y)]+$$

$$+\theta_2(x)\theta_3(x)[\theta_1'(y)\theta_4(y)+\theta_1(y)\theta_4'(y)]$$

bulunur. y=0 konursa;

$$\theta_2(0)\theta_3(0)[\theta_1'(x)\theta_4(x)-\theta_1(x)\theta_4'(x)]=\theta_2(x)\theta_3(x)\theta_1(0)\theta_4(0)$$

$[\theta_1(0)=\theta_2'(0)=\theta_3'(0)=\theta_4'(0)=0$ *bulunur*.]

Buradan düzenleyip eşiti yukarıda kullanılmıştır.

Şimdi başka bir yoldan $\frac{\theta_2}{\theta_4}$ ün türevi:

$$\theta_4^2(x)\theta_2^2(0)=\theta_1^2(x)\theta_3^2(0)+\theta_2^2(x)\theta_4^2(0)$$

$$\theta_2^2(0)=[\frac{\theta_1(x)}{\theta_4(x)}]^2\ \theta_3^2(0)+[\frac{\theta_2(x)}{\theta_4(x)}]^2\ \theta_4^2(0)$$

$$0=\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\theta_1(x)}{\theta_4(x)}]^2\ \theta_3^2(0)+\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\theta_2(x)}{\theta_4(x)}]^2\ \theta_4^2(0)$$

bulunur. Buradan gerekli işlemler yapılarak ve (1,39) eşitliğini de kullanarak:

$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\theta_2(x)}{\theta_4(x)}]=-\frac{\theta_1(x)\theta_3(x)\theta_3^2(0)}{\theta_4^2(x)} \qquad (1,40)$$

bulunur.

Şimdi bazı türevlere örnekler verilirse;

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\theta_3(x)}{\theta_4(x)}\right]=-\frac{\theta_1(x)\theta_2(x)\theta_2^2(0)}{\theta_4^2(x)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\theta_1(x)}{\theta_3(x)}\right]=\frac{\theta_2(x)\theta_4(x)\theta_3^2(0)}{\theta_3^2(x)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\theta_2(x)}{\theta_3(x)}\right]=-\frac{\theta_1(x)\theta_4(x)\theta_4^2(0)}{\theta_3^2(x)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\theta_1(x)}{\theta_2(x)}\right]=\frac{\theta_3(x)\theta_4(x)\theta_2^2(0)}{\theta_2^2(x)} \qquad (1,41)$$

olur.

I.7 DÖNÜŞÜM FORMÜLLERİ

I.6.1.Jacobi Dönüşümleri

$\tau'=-\frac{1}{\tau}$ değeri için aşağıdaki formüllere "Jacobi Dönüşümleri" denir.

$$\theta_1(z|\tau')=-i(-i\tau)^{\frac{1}{2}}e^{\frac{i\tau z^2}{\pi}}\theta_1(\tau z|\tau)$$

$$\theta_2(z|\tau')=(-i\tau)^{\frac{1}{2}}e^{\frac{i\tau z^2}{\pi}}\theta_4(\tau z|\tau)$$

$$\theta_3(z|\tau')=(-i\tau)^{\frac{1}{2}}e^{\frac{i\tau z^2}{\pi}}\theta_3(\tau z|\tau)$$

$$\theta_4(z|\tau')=(-i\tau)^{\frac{1}{2}}e^{\frac{i\tau z^2}{\pi}}\theta_2(\tau z|\tau) \qquad (1,42)$$

I.6.2.Landen Dönüşümleri

Daha önceki teta fonksiyonlarının karışık çarpımlarından;

$$\theta_1(x|\tau)\theta_2(y|\tau)=\theta_1(x+y|2\tau)\theta_4(x-y|2\tau)+\theta_4(x+y|2\tau)\theta_1(x-y|2\tau)$$

$$\theta_3(x|\tau)\theta_3(y|\tau)=\theta_3(x+y|2\tau)\theta_3(x-y|2\tau)+\theta_2(x+y|2\tau)\theta_2(x-y|2\tau)$$

$$\theta_3(x|\tau)\theta_4(y|\tau)=\theta_4(x+y|2\tau)\theta_4(x-y|2\tau)-\theta_1(x+y|2\tau)\theta_1(x-y|2\tau)$$

$$\theta_4(x|\tau)\theta_4(y|\tau)=\theta_3(x+y|2\tau)\theta_3(x-y|2\tau)-\theta_2(x+y|2\tau)\theta_2(x-y|2\tau) \qquad (1,43)$$

eşitliklerinde y=x konursa;

$$\theta_1(x|\tau)\theta_2(x|\tau)=\theta_1(2x|2\tau)\theta_4(0|2\tau)$$

$$\theta_3^2(x|\tau)=\theta_3(2x|2\tau)\theta_3(0|2\tau)+\theta_2(2x|2\tau)\theta_2(0|2\tau)$$

$$\theta_3(x|\tau)\theta_4(x|\tau)=\theta_4(2x|2\tau)\theta_4(0|2\tau)$$

$$\theta_4^2(x|\tau)=\theta_3(2x|2\tau)\theta_3(0|2\tau)-\theta_2(2x|2\tau)\theta_2(0|2\tau) \qquad (1,44)$$

x=0 için:

$$\theta_1(0|\tau)\theta_2(0|\tau)=\theta_1(0|2\tau)\theta_4(0|2\tau)$$

$$\theta_3^2(0|\tau)=\theta_3^2(0|2\tau)+\theta_2^2(0|2\tau)$$

$$\theta_3(0|\tau)\theta_4(0|\tau)=\theta_4^2(0|2\tau)$$

$$\theta_4^2(0|\tau)=\theta_3^2(0|2\tau)-\theta_2^2(0|2\tau) \qquad (1,45)$$

elde edilir. Şimdi $\theta_i(2x|2\tau)$ lar eşitliğin bir tarafına toplanırsa ve (1,45) formüllerinden;

$$\theta_1(2x|2\tau)=\frac{\theta_1(x|\tau)\theta_2(x|\tau)}{\theta_4(0|\tau)}=\frac{\theta_1(x|\tau)\theta_2(x|\tau)}{\sqrt{\theta_3(0|\tau)\theta_4(0|\tau)}} \qquad (1,46)$$

Diğer teta fonksiyonlarını ise (1,44) formüllerinden;

$$\theta_3^2(x|\tau)-\theta_4^2(x|\tau)=2\theta_1(2x|2\tau)\theta_2(0|2\tau)$$

$$\theta_2(2x|2\tau)=\frac{\theta_3^2(x|\tau)-\theta_4^2(x|\tau)}{2\theta_2(0|2\tau)}=\frac{\theta_3^2(x|\tau)-\theta_4^2(x|\tau)}{\sqrt{2\theta_3^2(0|\tau)-\theta_4^2(0|\tau)}} \qquad (1,47)$$

$$\theta_3(2x|2\tau)=\frac{\theta_3^2(x|\tau)+\theta_4^2(x|\tau)}{\sqrt{2\theta_3^2(0|\tau)+\theta_4^2(0|\tau)}} \qquad (1,48)$$

$$\theta_4(2x|2\tau)=\frac{\theta_3(x|\tau)\theta_4(x|\tau)}{\sqrt{\theta_3(0|\tau)\theta_4(0|\tau)}} \qquad (1,49)$$

(1,46)-(1,49) formüllerine "Landen Dönüşümleri" denir.

$x=x+\frac{1}{\pi}$ artımı verilerek alternatif durumlar elde edilebilir.

I.8 UYGULAMALAR

1-a) $\dfrac{\theta_i(z)}{\theta_i(z+\pi)}=\dfrac{\theta_i'(z)}{\theta_i'(z+\pi)}$ b) $\dfrac{\theta_i'(z)}{\theta_i(z)}-\dfrac{\theta_i'(z+\pi)}{\theta_i(z+\pi)}=2i$

olduğu gösterilsin.

a) i=3 için denensin. Diğer teta fonksiyonları için de gösterilebilir.

$$\theta_3(z)=\sum_{n=\infty}^{\infty} q^{n^2}e^{2inz} \;;\; \theta_3'(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}(2in)\; e^{2inz}=2in\;\theta_3(z)$$

$$\theta_3(z+\pi)=\sum_{n=\infty}^{\infty} q^{n^2}e^{2in(z+\pi)} \;;\; \theta_3'(z+\pi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}(2in)\; e^{2inz}=2in\;\theta_3(z+\pi)$$

Her iki denklem oranlanırsa eşitliğin doğruluğu görülür.

b) Yine θ_3 için denenirse. Tablo 1 den;

$$\theta_3(z+\pi)=[qe^{2iz}]^{-1}\;\theta_3(z)$$

$$\theta_3'(z+\pi z)=-\frac{2iqe^{2iz}}{[qe^{2iz}]^2}\theta_3(z)+[qe^{2iz}]^{-1}\;\theta_3'(z)$$

$$\frac{\theta_3'(z+\pi)}{\theta_3(z+\pi)}=-2i+\frac{\theta_3'(z)}{\theta_3(z)}$$

eşitliğin doğruluğu görülmüştür.

2) $\dfrac{\theta_4(0|\tau)}{\theta_3(0|\tau)}=\dfrac{\theta_2(0|\tau)}{\theta_3(0|\tau)}$ *olduğunu gösterin.*

Jacobi dönüşümlerinden;

$$\theta_4(\tau z|\tau)=(-i\tau)^{-\frac{1}{2}}\, e^{\frac{-i\tau z^2}{\pi}}\, \theta_2(z|\tau')$$

$$\theta_3(\tau z|\tau)=(-i\tau)^{-\frac{1}{2}}\, e^{\frac{-i\tau z^2}{\pi}}\, \theta_3(z|\tau')$$

Her iki denklemin oranı:

$$\frac{\theta_4(0|\tau)}{\theta_3(0|\tau)}=\frac{\theta_2(0|\tau')}{\theta_3(0|\tau')} \quad (\tau'=-\frac{1}{\tau}) \quad \textit{bulunur.}$$

3) $a)\ \frac{\theta_4''}{\theta_4}-\frac{\theta_3''}{\theta_3}=\theta_2''$ $\quad b)\ \frac{\theta_4''}{\theta_4}-\frac{\theta_2''}{\theta_2}=\theta_3''$ $\quad c)\ \frac{\theta_3''}{\theta_3}-\frac{\theta_2''}{\theta_2}=\theta_4''$

olduğunu gösterin.

II. BÖLÜM

II.1 ELİPTİK FONKSİYONLAR

Eliptik fonksiyonlar ilk olarak, eliptik integrallerin invers dönüşüm probleminden ortaya çıkmıştır. J. Bernoulli elastik konusundaki çalışmalarında bu integrallerle karşılaşmıştır. Ayrıca Maclauren, Fagnano, Legendre gibi matematikcilerin elips yay parçasının düzenlenmesi çalışmalarında da ortaya çıkmıştır.

Eliptik integrallerin inversinin alınması düşüncesinden yola çıkarak Abel, Jacobi ve Gauss eliptik fonksiyonların tanımlarını yapmışlardır.

Bu bölümün ileriki konularında eliptik fonksiyonları Jacobi ve Weierstrass eliptik fonksiyonları adı altında iki kısımda incelenecektir, arada bağlantılar kurup uygulamaları verelecektir.

Konuya başlamadan önce, bazı karşılaşılacak kavramların tanımlarını vermek konuyu anlama açısından uygun olacaktır.

TAM (ENTİRE) FONKSİYON: Difransiyellenebilen fonksiyonların önemli bir sınıfını teşkil eder. Sınırlı bir D bölgesinde hiç bir singülerlik göstermeyen fonksiyonlara veya sonsuzu içermeyen tüm düzlemde tek değerli ve analitik fonksiyonlara "Tam Fonksiyon" denir.

MEROMORFİK (MEROMORPHİC) FONKSİYONLAR: Kutupları hariç sonlu düzlemde analitik ve tek değerli fonksiyonlara meromorfik fonksiyonlar denir.

TEOREM 1: Meromorfik bir foksiyon iki tam fonksiyonun oranı şeklinde gösterilebilir.

$\phi(z)$ meromorfik olsun:

$\phi(z)=\frac{H(z)}{F(z)}$ $F(z)\neq 0$ olmak kaydıyla H(z) ve F(z) tam fonksiyonlardır. $F(z_i)=0$ $(i=1,2,..,n)$ in sonlu sayıda sıfırı vardır (çünki analitik). Bu z_i noktaları $\phi(z)$ fonksiyonu için kutup noktasıdır. Özel bir hal olarak herhangi k için:

$F(z_k)=H(z_k)=0$ oluyorsa bu durum belirsizlik gösterir. Bu durumda limit kullanılarak durum değerlendirmesi yapılır.
TANIM: Çift periyotlu ve meromorfik fonksiyonlara eliptik foksiyonlar denir.

II.2 ELİPTİK FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ

A-f(z) eliptik fonksiyon ise;

ω_1 ve ω_2 periyotları için $f(z+\omega_1)=f(z+\omega_2)=f(z)$ olur. Bunların dışında bir ω_3 değeri için $f(z+\omega_3)=f(z)$ oluyorsa, mutlaka ve mutlaka $\omega_3=2n\omega_1+2m\omega_2$, $n,m\varepsilon\mathbb{Z}$ dir.

B-Im $[\frac{\omega_1}{\omega_2}]>0$ **olmalıdır.**

Geometrik olarak dönmenin yönü pozitif yöndür ve üst yarı düzlemde tanımlıdır. Çünkü fiziksel olarak negatif periyot (yada frekans) olamaz.

C-Periyotlar kompleks düzlemi bir ağ şeklinde örterler.

Herhangi bir z değeri için $z=z_0+2n\omega_1+2m\omega_2$ dir.n=m=0 ise z'ye ilkel (primitive) değer denir. Dolayısıyla biz her noktayı ilkel değeriyle gösterebiliriz.[7] Bu nedenle ilk paralelkenar da (köşeleri;0, $2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_1+2\omega_2$ olan paralelkenar) yapılan işlemler genelleştirilebilir.

D-Her bir paralelkenarda eliptik fonksiyonun kutuplarının sayısı sonludur.

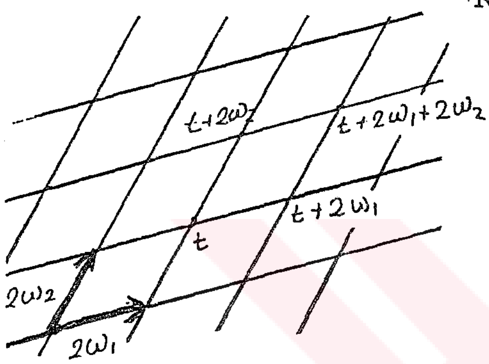
[7] İlkel değer modüler aritmetik yöntemiylede gösterilebilir. $z=z_0 \pmod{2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_1+2\omega_2}$ şeklinde eşitlik vardır.

Eğer değilse; seri açılımının terimleri kutup noktasında sonsuza kadar gideceğinden kesin süreksiz noktası olur ki, bu da eliptik fonksiyonun tanımına aykırıdır.

E-Eliptik fonksiyonun sıfırlarının sayısı sonludur.

F-Bir hücredeki rezüdüler toplamı sıfırdır.

Hücremiz köşeleri; t, $t+2\omega_1, t+2\omega_2, t+2\omega_1+2\omega_2$ olan paralelkenar olsun.



Şekil 1

Rezidüler toplamı Couchy Formülüne[8] göre

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz=\frac{1}{2\pi i}\Big[\int_t^{t+2\omega_1}+\int_{t+2\omega_1}^{t+2\omega_1+2\omega_2}+$$

$$+\int_{t+2\omega_1+2\omega_2}^{t+2\omega_2}+\int_{t+2\omega_2}^{t}\Big]f(z)\,dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+2\omega_1}[f(z)-f(z+2\omega_2)]\,dz-\frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+2\omega_2}[f(z)-f(z+2\omega_1)]\,dz=0$$

olur.Çünki $2\omega_1$ ve $2\omega_2$,f(z) için periyottur.

G-f(z) eliptik fonksiyonunun her bir hücrede kutbu yok ise Liouville Teoremi'ne[9] göre sabittir.

H-Eliptik fonksiyonun derecesi kutuplarının derecesi toplamına yada indirgenemez sıfırlarının sayısına eşittir.

I-Sabit olmayan eliptik fonksiyonun derecesi iki'den küçük olamaz.

Eğer küçük olursa; f(z) ya kutupsuz veya $z=\alpha$ gibi bir basit kutba sahiptir, denir. Lauren açılımının ilk terimi

---

[8] bak. M.İdemen-Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi-sf:71

[9] Louville Teo:Bir fonksiyon bütün düzlemin sınırlı ve sonlu, her bölgesinde regüler ise fonksiyon sabittir.Bak. kaynakca [6]- sf:86

$\frac{A}{z-\alpha}$ dır. f(z)'nin α daki rezidüsü $A\neq 0$ olur. Eliptik fonksiyonlarda rezidüler toplamı sıfır olması gerekir, olmadığından eliptik fonksiyon değildir. Buradan f(z)=sb olurki bu teoreme ters düşer. Sonuç olarak eliptik fonksiyonun derecesi "2" den küçük olamaz.

J-Aynı dereceden, periyotları ve kutupları aynı olan iki eliptik fonksiyonun farkı sabittir.

Eliptik fonksiyonlar kutuplarının sayısına göre iki kısma ayrılır. Birinci tip eliptik fonksiyonlara Jacobi Eliptik Fonksiyonları denir. Bu fonksiyonların aynı hücrede iki ayrı kutbu olup, rezüdüleri işaret farkıyla birbirine eşittir. Dolayısıyla toplamları sıfırdır. İkinci tip eliptik fonksiyonlara Weierstrass Eliptik Fonksiyonları denir. Bu fonksiyonlar aynı hücrede ikinci dereceden bir tek kutup noktası içerirler.

II.3 JACOBİ ELİPTİK FONKSİYONLARI

Jacobi eliptik fonksiyonları, eliptik integrallerin invers işleminden ortaya çıkmış ve daha sonra elementer fonksiyonlarla ifade edilmiştir. Biz ise önce elementer fonksiyonlarla ifade edip, daha sonra integrallere geçiş yapacağız. Eliptik fonksiyonları teta fonksiyonları yardımıyla tanımlayıp, işlemler teta fonksiyonları üzerinde yapılacaktır.

$z=\frac{u}{\theta_3^2(0)}$ olarak tanımlanırsa:

$$snu=\frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}\frac{\theta_1(z)}{\theta_4(z)} \tag{2,1}$$

$$cnu=\frac{\theta_4(0)}{\theta_2(0)}\frac{\theta_2(z)}{\theta_4(z)} \tag{2,2}$$

$$dnu=\frac{\theta_4(0)}{\theta_3(0)}\frac{\theta_3(z)}{\theta_4(z)} \tag{2,3}$$

Paydayı sıfır yapan değerler alınmamak kaydıyla yukarıdaki fonksiyonlara "Jacobi Eliptik Fonksiyonları" denir. Bu fonksiyonlara bağlı olarak ters eliptik fonksiyonlar:

$$nsu=\frac{1}{snu};\ ncu=\frac{1}{cnu};\ ndu=\frac{1}{dnu} \tag{2,4}$$

olarak verilebilir. Yukarıdaki eliptik fonksiyonlarının Glashier notasyonları şeklinde ifadesi:

$$scu=\frac{snu}{cnu};\ cdu=\frac{cnu}{dnu};\ dsu=\frac{dnu}{snu}$$

$$csu=\frac{cnu}{snu};\ dcu=\frac{dnu}{cnu};\ sdu=\frac{snu}{dnu} \tag{2,5}$$

dır. Bu eşitliklerdeki birinci taraf, oranı olduğu eliptik fonksiyonlarının baş harflerini (önce payındakinin baş harfi sonra paydadaki fonksiyonun baş harfi) almıştır. Toplam olarak 12 tane eliptik fonksiyon elde edilmiş oldu.

Bu oranlardan ve teta fonksiyonlarının özelliklerinden, snu fonksiyonunun tek fonksiyon, cnu ile dnu fonksiyonlarının çift fonksiyon olduğu söylenebilir.

II.3.1-Jacobi Eliptik Fonksiyonlarının Periyotları

Daha önceden teta fonksiyonlarının periyotlarını incelemiş ve iki tane sözde periyottan bahsedilmişti. Şimdi bunların oranlarından oluşan, eliptik fonksiyonlar incelensin. snu için;

θ_1 in periyodu 2π *ve* θ_4 ün periyodu π olduğuna göre;

$$\theta_1(z+2\pi)=\theta_1(z);\ \theta_4(z+2\pi)=\theta_4(z)\ \ \textit{için}\ snu(u+2\pi\theta_3^2(0))=snu$$

olacaktır.Çünki θ_4 kendini iki kez tekrarlarken,ancak θ_1 kendini bir kez tekrarlayacaktır. Baştaki sabit durumu değiştirmeyeceğine göre snu için $2\pi\theta_3^2(0)$ 'ya periyot denebilir. Şimdi $\pi\tau$ için denenirse:

$$\theta_1(z+\pi\tau)=-q^{-1}e^{-2iz}\,\theta_1(z)\,;\quad \theta_4(z+\pi\tau)=-q^{-1}e^{-2iz}\,\theta_4(z)$$

snu ifadesinde katsayılar sadeleşeceğinden $u=\pi\tau\theta_3^2(0)$ değeri de periyot özelliği gösterir.Buradan:

$$sn(u+2\pi\theta_3^2(0))=sn(u+\pi\tau\theta_3^2(0))=snu \qquad (2,6)$$

bulunur.

$$K=\frac{1}{2}\pi\theta_3^2(0) \quad ve \quad iK'=\frac{1}{2}\pi\tau\theta_3^2(0) \qquad (2,7)$$

denirse, snu için 4K ve $2iK'$ periyotdur. Bu periyotlar sıfırdan farklıdır ve $\tau\varepsilon\mathbb{C}$ olduğundan oranları da bir kompleks sayıdır (yani eliptik fonksiyon tanımına uygundur). Eğer τ sadece imajiner olursa birinci periyot sadece reel, ikinci periyot sadece imajiner olur. Fakat K ve K' değerlerinin her ikiside reel ve pozitif olacaktır.

Aynı şekilde diğer eliptik fonksiyonlar için periyotlar:

$$cnu(u+4K)=cn(u+2K+2iK')=cnu \qquad (2,8)$$

$$dnu(u+2K)=dn(u+4iK')=dnu \qquad (2,9)$$

olarak bulunur.

Burada K ve K' ;z'den bağımsız, sadece q'ya bağlıdır. Seri olarak ifade edilirse (2,7) formülünden;

$$K=\frac{1}{2}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^2(1+q^{2n-1})^4=\frac{1}{2}[1+q+q^3+...]$$

$$K'=-\frac{i}{2}\pi\tau\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^2(1+q^{2n-1})^4=-\frac{1}{2}\ln(e^{i\pi\tau})[1+q+q^3+...] \qquad (2,10)$$

olarak bulunur.Bu iki seri $q\to 0$ giderken $K\to\frac{1}{2}$; $K'\to\infty$ gider.

II.3.2-Eliptik Fonksiyonların Sıfır Yerleri

Eliptik fonksiyonların tanımından bu hemen çıkarılabilir.(bak. I.2.E konusu) (2,1)-(2,3) formüllerinden payı sıfır yapan değer eliptik fonksiyonu sıfır yapan değer olacağından;

$$snu=0 \Rightarrow u=2nK+2imK'$$

$$cnu=0 \Rightarrow u=(2n+1)K+2imK'$$

$$dnu=0 \Rightarrow u=(2n+1)K+(2m+1)iK' \quad (n,m \in \mathbb{Z}) \qquad (2,11)$$

olur. Şimdi snu'yu sıfır yapan değer diğer fonksiyonlar için de n=m=0 alarak kullanılırsa:

$$snu=-sn(u+2K)=sn(u+2iK')=-sn(u+2K+2iK') \qquad (2,12)$$

$$cnu=-cn(u+2K)=-cn(u+2iK')=cn(u+2K+2iK') \qquad (2,13)$$

$$dnu=dn(u+2K)=-dn(u+2iK')=-dn(u+2K+2iK') \qquad (2,14)$$

u=0 konsun;

$$sn0=-sn(2K)=sn(2iK')=-sn(2K+2iK')=0 \qquad (2,15)$$

$$cn0=-cn(2K)=-cn(2iK')=cn(2K+2iK')=1 \qquad (2,16)$$

$$dn0=dn(2K)=-dn(2iK')=-dn(2K+2iK')=1 \qquad (2,17)$$

En sondaki eşitliklerin doğruluğu (2,1)-(2,3) formüllerinden görülebilir.

II.3.3-Türev İfadeleri

$$snu=\frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}\frac{\theta_1(z)}{\theta_4(z)}$$

Bu ifadenin türevi alınırsa:

$$\frac{\partial}{\partial u}(snu)=\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}\frac{\theta_1(z)}{\theta_4(z)}\right]\frac{dz}{du} \qquad (2,18)$$

Kısmi türev kurallarıyla ve teta fonksiyonlarının türevlerinide kullanarak:

$$\frac{\partial}{\partial u}(snu)=cnu\ dnu \qquad (2,19)$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(cnu) = -snu \; dnu \qquad (2,20)$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(dnu) = -k^2 snu \; cnu \qquad (2,21)$$

birinci türevleri olarak bulunur. Burada $k=\dfrac{\theta_2^2(0)}{\theta_3^2(0)}=sb.$ olarak alınmıştır. İstenirse daha yüksek dereceden türevler de bulunabilir. Yüksek dereceden türevleri kullanarak her üç eliptik fonksiyon maclauren serisine açılırsa:

$$snu = u - \frac{1}{6}(1+k^2)u^3 + \frac{1}{120}(1+14k^2+k^4)u^5 + \ldots$$

$$cnu = 1 - \frac{1}{2}u^3 + \frac{1}{24}(1+4k^2)u^4 + \ldots$$

$$dnu = 1 - \frac{1}{2}k^2u^2 + \frac{1}{24}(4k^2+k^4)u^4 + \ldots \qquad (2,22)$$

bulunur.

II.3.4-Kutup Noktaları ve Rezüdüleri

Jacobi Eliptik Fonksiyonlarının iki ayrı kutbu olduğu daha önceden söylenmişti. Şimdi (tanımlarından) paydayı sıfır yapan değerleri yani kutupları bulunsun.

snu için, $\theta_4(z)$ 'ü sıfır yapan değerler kutup noktasıdır.

(Çünkü $\theta_2(0) \neq 0$ dır.)

$$u = z\;\theta_3^2(0) = [n\pi + (m+\frac{1}{2})\pi\tau]\;\theta_3^2(0)$$

$$=2n\left(\frac{1}{2}\pi\theta_3^2(0)\right)+(2m+1)\frac{1}{2}\pi\tau\theta_3^2(0)=2nK+(2m+1)iK' \qquad (2,23)$$

Birinci paralelkenardaki kutbu bulunursa; m=n=0 için birinci kutup noktası $u_1=iK'$ ve ikinci kutup noktası m=0,n=1 için $u_2=2K+iK'$ (2,24)

olarak bulunur. Aynı zamanda bulunan bu periyotlar snu için yarı periyotlardır. Diğer m ve n değerleri u_1 *ve* u_2 nin katlarıdır. Yani congruent'leridir.Her u_1, u_2 değeri ve katları için snu kutup içerir. Diğer eliptik fonksiyonlarının kutupları ve rezüdüleri aşağıda verilmiştir.

Tablo 2

FONK.	KUTUP NOK.	REZÜDÜ
snu	iK' , $2K+iK'$	$\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$
cnu	iK', $2K+iK'$	$-\frac{i}{k}$, $\frac{i}{k}$
dnu	iK', $2K+iK'$	$-i$, i

Şimdi eliptik fonksiyonun kutup noktalardaki rezüdülerinin nasıl bulunduğunu açıklayalım. Rezüdüler ancak dolaylı yoldan bulunur. snu sıfır civarında maclauren serisine açılmıştı bundan yararlanarak,birinci kutup noktası için;

$$sn(u+iK')=\frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}\frac{\theta_1(z+\frac{1}{2}\pi\tau)}{\theta_4(z+\frac{1}{2}\pi\tau)}=\frac{\theta_3^2(0)}{\theta_2^2(0)}\frac{1}{\frac{\theta_3(0)}{\theta_2(0)}\frac{\theta_1(z)}{\theta_4(z)}}$$

$$sn(u+iK')=\frac{1}{k\ snu}\ ;\ k=\frac{\theta_2^2(0)}{\theta_3^2(0)} \tag{2,25}$$

paydadaki snu'nun maclauren açılımı yerine konursa,

$$sn(u+iK')=\frac{1}{ku}[1-\frac{1}{6}(1+k^2)u^2+\frac{1}{120}(1+14k^2+k^4)u^4+...]^{-1}$$

rezüdüsü "1/k" olarak bulunur.[10] Eliptik fonksiyonların tanımından diğer rezüdünün "-1/k" olacağı açıktır.

Diğer eliptik fonksiyonların rezüdülerinin bulunmasında da aynı yöntem kullanılmıştır.

II.3.5.Eliptik Fonksiyonların Trigonometrik İfadesi

Eliptik fonksiyonlar, çarpım serilerinin oranları olarak gösterilebilir. Bunun için teta fonksiyonlarının çarpım seri ifadelerinden yararlanılır.(1,33)-(1,36) formüllerini kullanarak;

$$snu=2q^{\frac{1}{4}}k^{-\frac{1}{2}}\ sinz\prod_{n=1}^{\infty}[\frac{1-2q^{2n}cos2z+q^{4n}}{1-2q^{2n-1}cos2z+q^{4n-2}}] \tag{2,26}$$

$$cnu=2q^{\frac{1}{4}}k'^{\frac{1}{2}}\ cosz\prod_{n=1}^{\infty}[\frac{1+2q^{2n}cos2z+q^{4n}}{1-2q^{2n-1}cos2z+q^{4n-2}}] \tag{2,27}$$

$$dnu=k'^{\frac{1}{2}}\ cosz\prod_{n=1}^{\infty}[\frac{1+2q^{2n-1}cos2z+q^{4n-2}}{1-2q^{2n-1}cos2z+q^{4n-2}}] \tag{2,28}$$

10 Rezüdü;birinci dereceden negatif üslü terimin katsayısıdır.

bulunur.Bu fonksiyonlarda:

$$k=\frac{\theta_2^2(0)}{\theta_3^2(0)}=4q^{\frac{1}{4}}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1+q^{2n}}{1+q^{2n-1}}\right]^4 \qquad (2,29)$$

$$k'=\frac{\theta_4^2(0)}{\theta_3^2(0)}=\prod_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1+q^{2n}}{1+q^{2n-1}}\right]^4 \qquad (2,30)$$

olarak verilmiştir.

Burada k ve k' arasında şu bağıntı vardır:

$$k^2+k'^2=1 \qquad (2,31)$$

Burada k ve k' ye modül denir. k' 'ye k'nın bütünler (complement) modülü denir.

(2,33)-(2,36) bağıntılarından limit durumunda $k\to 0$ giderken, buna bağlı olarak $q\to 0$ için;

$$sn(u,k)\to sinz$$

$$cn(u,k)\to cosz$$

$$dn(u,k)\to 1 \qquad (2,32)$$

gider.

Eliptik fonksiyonlar aşağıdaki özdeşlikleri sağlarlar.

$$sn^2u+cn^2u=1$$

$$dn^2u+k^2sn^2u=1$$

$$dn^2u-k^2cn^2u=k'^2 \qquad (2,33)$$

II.4 TOPLAM FORMÜLLERİ

$$Sn(u+v)=\frac{snu\ cnv-kdnv+cnv\ cnu\ cnu}{1-k^2sn^2u\ sn^2v} \qquad (2,34)$$

$$cn(u+v)=\frac{cnu\ cnv-snu\ snv\ dnu\ dnv}{1-k^2sn^2u\ sn^2v} \qquad (2,35)$$

$$dn(u+v)=\frac{dnu\ dnv-k^2snu\ snv\ cnu\ cnv}{1-k^2sn^2u\ sn^2v} \qquad (2,36)$$

formüllerine eliptik fonksiyonların toplam formülleri denir. bu formüllerde u=v için çift kat formülleri :

$$sn2u=\frac{2snu\ cnu\ dnu}{1-k^2sn^4u} \qquad (2,37)$$

$$cn2u=-1+\frac{2cn^2u}{1-k^2sn^4u}=1-\frac{2sn^2u\ dn^2u}{1-k^2sn^4u} \qquad (2,38)$$

$$dn2u=\frac{2dn^2u}{1-k^2sn^4u}-1=1-\frac{2k^2sn^2u\ cn^2u}{1-k^2sn^4u} \qquad (2,39)$$

olarak bulunur.Yine yukarıdaki formülleri kullanarak;

$$snu=\left[\frac{1-cn2u}{1+dn2u}\right]^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad cnu=\left[\frac{cn2u+dn2u}{1+dn2u}\right]^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir.

$$dnu=\left[\frac{cn2u+dn2u}{1+cn2u}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (2,40)$$

II.5 WEIERSTRASS ELİPTİK FONKSİYONLARI

Nümerik hesaplamalarda Jacobi Eliptik Fonksiyonları daha çabuk yakınsadığı için, Weierstrass Eliptik Fonksiyonları kullanışsızdır. Bununla beraber bu konunun analitik incelenmesinde ve özelliklerin saptanmasında büyük yeri vardır.

Wierstrass Eliptik Fonksiyonlarını üç başlık altında inceleyeceğiz. Tabii ön bilgi olarak bu fonksiyonların bir hücrede çift katlı bir tek kutup noktasına sahip olduğunu ve rezüdünün sıfıra eşit olduğunu biliyoruz.

II.5.1. $\wp(z)$ Fonksiyonu

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{\omega\in L'}\left[\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right] \qquad (2,41)$$

$\omega\neq 0$ olmak kaydıyla tanımlıdır.Burada $\omega=2n\omega_1+2m\omega_2$ dır.

ω_1 ve ω_2, $\wp(z)$ nin yarı periyotlarıdır. L' sıfırı içermeyen tüm periyotların kümesidir.

Bu seri $\sum_{n=-\infty}^{\infty}(z-m\pi)^{-2}$ den yola çıkılarak ortaya atılmıştır.Aynı zamanda bu seri $(\sin z)^{-2}$ serisinin açılımına da benzemektedir.

Açıkca (2,41) denkleminden görüldüğü gibi z=0, $\wp(z)$ için ikinci dereceden bir kutuptur.Bu fonksiyonun kendisi çift, türevi tek fonksiyondur.

Türevi alınırsa:

$$\wp'(z)=\frac{d}{dz}\wp(z)=-\frac{2}{z^3}-\sum_{\omega\epsilon L'}\frac{2}{(z-\omega)^3} \tag{2,42}$$

bulunur. Burada $\omega=0$ olması bir önem arzetmediğinden;

$$\wp'(z)=-2\sum_{\omega\epsilon L}\frac{1}{(z-\omega)^3} \tag{2,43}$$

olur. z=-z için;

$$\wp'(-z)=-\sum_{\omega\epsilon L}\frac{2}{(-z-\omega)^3}=\sum_{\omega\epsilon L}\frac{2}{(z-(-\omega))^3}=-\wp'(z)$$

bulunur. Buradan;

$$\wp(-z)=-\wp(z) \tag{2,44}$$

olduğundan tek fonksiyon olduğu görülür.Aynı zamanda $2\omega_1$ *ve* $2\omega_2$ periyotları için;

$$\wp(z+2\omega_1)=\wp(z)\Rightarrow\wp'(z+2\omega_1)=\wp'(z)$$

$$\wp(z+2\omega_2)=\wp(z)\Rightarrow\wp'(z+2\omega_2)=\wp'(z) \tag{2,45}$$

olacaktır. Böylece türevide çift periyotlu olur. z=0 için (2,42) formülünden üç katlı kutup noktası olduğu görülür. Bu nedenle rezüdüsü sıfır olur. Dolayısıyla $\wp'(z)$ içinde eliptik fonksiyondur, denebilir.

$\wp(z)$ fonksiyonu aşağıdaki differansiyel denklemi sağlar.

$$\wp'(z)=4\wp^3(z)-g_2\wp(z)-g_3 \tag{2,46}$$

g_2 ve g_3 değerlerine invariyantlar denir. Şimdi bu differansiyel denklem gerçeklenirse; $\wp(z)$; $z=0$ cıvarında tanımsızdı. Bu şu şekilde gösterilsin,

$$\wp(z)-z^{-2}=\varphi(z)=\sum_{\omega\epsilon L'}\left[\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right]$$

Maclauren serisine açılırsa;

$$\varphi(z)=\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1!}z+\frac{\varphi''(0)}{2!}z^2+\ldots$$

$$=\frac{2}{1!}\sum_{\omega}(\omega)^{-3}z+\frac{2}{2!}\sum_{\omega}(\omega)^{-4}z^2+\frac{24}{3!}\sum_{\omega}(\omega)^{-5}z^3+\ldots$$

olur. Tek kuvvetler negatiflikten dolayı birbirini götüreceğinden

$$\wp(z)-z^{-2}=3\sum_{\omega}\frac{1}{\omega^4}z^2+5\sum_{\omega}\frac{1}{\omega^6}z^4+\ldots$$

$$g_2=60\sum_{\omega\epsilon L'}\omega^{-4} \quad g_3=140\sum_{\omega\epsilon L'}\omega^{-6} \tag{2,47}$$

alınırsa;

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{20}g_2z^2+\frac{1}{28}g_2z^4+0(z^6) \tag{2,48}$$

$$\wp'^2(z)=4z^{-6}-\frac{4}{10}g_2z^{-2}-\frac{4}{7}g_3+0(z^2)$$

$$\wp^3(z)=z^{-6}+\frac{3}{20}g_2z^{-2}+\frac{3}{28}g_3+O(z^2) \qquad (2,49)$$

$$\wp'^2-4\wp^3(z)=-g_2z^{-2}-g_3+O(z^2) \qquad (2,50)$$

bulunur.(2,48) denkleminden z^{-2} çekilirse;

$$z^{-2}=\wp(z)-\frac{1}{20}g_2z^2-\frac{1}{28}g_3z^4+O(z^6)$$

ve (2,50) denkleminde yerine konursa;

$$\wp'^2-4\wp^3(z)=-g_2\wp(z)-g_3+O(z^2)$$

bulunur.

$$\wp'^2-4\wp^3(z)+g_2\wp(z)+g_3=O(z^2)$$

eşitliklerdeki sağ taraf z=0 için tanımlı ve analitiktir. Çünkü bir polinomdur.Bu durumda birinci taraf z=0 için tanımsız olamaz. Singüler noktası olmayan eliptik fonksiyonlar liouville teoremine göre sabit olacağından, ikinci taraf sabittir. $z\to 0$ giderken her iki tarafın limiti alınırsa,ikinci taraf sıfır bulunacağından;

$$\wp'^2=4\wp^3(z)-g_2\wp(z)-g_3$$

olarak formül gerçeklenir. Bu formül başka bir formda yazılırsa;

$$[\frac{\partial y}{\partial z}]^2=4y^3-g_2(y)-g_3$$

$$\frac{dz}{dy}=\frac{1}{(4y^3-g_2y-g_3)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow dz=\frac{dy}{(4y^3-g_2y-g_3)^{\frac{1}{2}}} \qquad (2,51)$$

olarak bulunur. Burada paydadaki fonksiyonun kökleri (ki üç tanedir) paydayı sıfır yapacağından kutup noktalarıdır. Bunlara e_1, e_2, e_3 değerleri verilirse, bunlar arasında aşağıdaki eşitlikler bulunur.

$$e_1+e_2+e_3=0;\ e_1e_2+e_2e_3+e_1e_3=-\frac{g_2}{4}$$

$$e_1e_2e_3=\frac{g_3}{4} \qquad (2,52)$$

Yukarıda verilen (2,51) integrali, kompleks düzlemin kutup noktaları çıkarılmış bölgesinde tanımlıdır ve bu integrale "eliptik integral" denir.

Son olarak $\wp(z)$ 'nin toplam bağıntısı verilsin:

$$\wp(x+y)=\frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(x)-\wp'(y)}{\wp(x)-\wp(y)}\right]^2-\wp(x)-\wp(y) \qquad (2,53)$$

II.5.2. $\zeta(z)$ Fonksiyonu

Bu fonksiyon,

$$i)\ \frac{d\zeta(z)}{dz}=-\wp(z) \qquad ii)\ \lim_{z\to 0}\left[\zeta(z)-\frac{1}{z}\right]=0 \qquad (2,54)$$

ile tanımlıdır. (2,41) formülünden;

$$\zeta(z)=-\int\wp(z)\,dz$$

$$=-\int\left[\frac{1}{z^2}+\sum_{\omega}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right)\right]dz$$

$$=\frac{1}{z}+\sum_{\omega}\left[\frac{1}{z-\omega}+\frac{1}{\omega}+\frac{z}{\omega^2}\right]+C$$

İkinci tanım ifadesini de kullanarak C=0 bulunur.

$$\zeta(z)=\frac{1}{z}+\sum_{\omega}\left[\frac{1}{z-\omega}+\frac{1}{\omega}+\frac{z}{\omega^2}\right] \qquad (2,55)$$

z=-z için;

$$\zeta(-z)=-\frac{1}{z}+\sum_{\omega}\left[\frac{-1}{(-z-(-\omega))}+\frac{1}{\omega}-\frac{z}{\omega^2}\right]=-\zeta(z)$$

olur. Böylece $\zeta(z)$ tek fonksiyon olarak bulunur. $\wp(z)$ nin çift periyotlu olduğu biliniyor. $\zeta(z)$'nin nasıl davrandığı incelenirse;

$$\frac{d\zeta(z+2\omega_1)}{dz}=-\wp(z+2\omega_1)=-\wp(z)=\frac{d\zeta(z)}{dz}$$

olur. Türevleri eşit ise kendileri bir sabit farkıyla eşit olacağından;

$$\zeta(z+2\omega_1)=\zeta(z)+2\eta_1 \qquad (2,56)$$

yazılabilir.Benzer yolla,

$$\zeta(z+2\omega_2)=\zeta(z)+2\eta_2 \qquad (2,57)$$

elde edilir. Buradan η_1 ve η_2 integral sabitleridir. Şimdi yukarıdaki denklemlerde $z=-\omega_i$ yazılırsa;

$$\zeta(\omega_1)=\zeta(-\omega_1)+2\eta_1 \Rightarrow \zeta(\omega_1)=\eta_1$$

$$\zeta(\omega_2)=\zeta(-\omega_2)+2\eta_2 \Rightarrow \zeta(\omega_2)=\eta_2 \qquad (2,58)$$

olarak bulunur.

(2,55) denkleminden z=0 için $\zeta(z)$ bir katlı kutup noktasına sahip olduğu görülür ve kuvveti "-1" olan terimin katsayısı "+1" olduğundan $Rez[\zeta(z)]=1$ olur. Herhangi bir C eğrisi üzerindeki integral Couchy Teoremine göre (C; kutup noktalarını içermeyen bölge):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \zeta(z)\,dz=\sum Rez(z=0)=2\pi i.1=2\pi i$$

dir. C bölgesi periyotlar paralelkenarı olduğuna göre, herhangi bir paralelkenar köşeleri $t+2\omega_1, t+2\omega_2, t+2\omega_1+2\omega_2$ ve t için;

$$2\pi i=\int_t^{t+2\omega_1}[\zeta(z)-\zeta(z+2\omega_1)]\,dz-\int_t^{t+2\omega_2}[\zeta(z)-\zeta(z+2\omega_2)]\,dz$$

(2,56)-(2,57) eşitliklerini kullanarak,

$$2\pi i=2\eta_1\int_t^{t+2\omega_1}dz-2\eta_2\int_t^{t+2\omega_2}dz$$

$$\eta_2\omega_2-\eta_1\omega_1=\frac{\pi i}{2} \qquad (2,59)$$

deklemi bulunur ki bu denkleme "Legendre Özdeşliği" denir.

$\zeta(z)$ çift periyotlu olmakla beraber rezüdüler toplamı sıfır olmadığından eliptik fonksiyon değildir. Fakat öneminin nedeni, ileriki konularda herhangi bir eliptik fonksiyonun, bu fonksiyon cinsinden tanımlanabilmesidir.

II.5.3. $\sigma(z)$ Fonksiyonu

$$i)\ \frac{d}{dz}[\ln\,\sigma(z)]=\zeta(z) \qquad ii)\lim_{z\to 0}\frac{\sigma(z)}{z}=1 \tag{2,60}$$

ile tanımlıdır.

Buradaki "i" ifadasi incelensin,

$$\sigma(z)=e^{\int\zeta(z)\,dz}$$

$$=e^{\ln z+\sum_{\omega}[(z-\omega)+\frac{z}{\omega^2}+\frac{z^2}{2\omega^2}]+C}$$

$$\frac{\sigma(z)}{z}=e^{\sum_{\omega}[(z-\omega)+\frac{z}{\omega^2}+\frac{z^2}{2\omega^2}]+C}$$

birinci taraf $z\to 0$ limit durumunda "1" olacağından (tanım ii) integral sabiti C=0 bulunur.

$\zeta(z)$ tek fonksiyon olduğuna göre, z yerine (-z) yazılırsa:

$$\sigma(-z)=-z\exp\left[\int_0^{-z}\left(\zeta(Z)-\frac{1}{Z}\right)dZ\right]$$

$$=-z\exp\left[-\int_0^{z}\left(\zeta(-Z)-\frac{1}{(-Z)}\right)dZ\right]$$

$$\sigma(-z)=-\sigma(z) \tag{2,61}$$

olarak bulunur. $\sigma(z)$ fonksiyonu için $\zeta(z)$'nin periyotları incelenirse:

$$\frac{d}{dz}\ln[\sigma(z+2\omega_1)=\zeta(z+2\omega_1)$$

$$\ln[\sigma(z+2\omega_1)=\int\zeta(z)\,dz+2\eta_1 z+C$$

$$\ln[\sigma(z+2\omega_1)=\ln\sigma(z)+2\eta_1 z+C$$

$$\frac{\sigma(z+2\omega_1)}{\sigma(z)}=e^{2\eta_1 z+C}$$

olur ve $z=-\omega_1$ için $e^{c}=-e^{2\eta_1\omega_1}$ bulunur. O halde;

$$\sigma(z+2\omega_1)=-e^{2\eta_1(\omega_1+z)}\sigma(z) \tag{2,62}$$

elde edilir.Benzer yolla,

$$\sigma(z+2\omega_2)=-e^{2\eta_2(\omega_2+z)}\sigma(z) \tag{2,63}$$

olur. Herhangi bir ω_r için:

$$\sigma(z+\omega_r)=\exp[\int\zeta(z)+\zeta(\omega_r)\,dz-\ln C]$$

$$=C^{-1}\sigma(z)\sigma(\omega_r)$$

$$\sigma_r(z)=C\frac{\sigma(z+\omega_r)}{\sigma(\omega_r)} \qquad (2,64)$$

bulunur. Bu denklemler sırasıyla $\omega_1, \omega_2, \omega_3=-\omega_1-\omega_2$ için

$$\sigma_1(z)=e^{-\eta_1 z}\frac{\sigma(z+\omega_1)}{\sigma(z)}$$

$$\sigma_2(z)=e^{-\eta_2 z}\frac{\sigma(z+\omega_2)}{\sigma(\omega_2)}$$

$$\sigma_3(z)=e^{-(\eta_1+\eta_2)z}\frac{\sigma(z-\omega_1-\omega_2)}{\sigma(-\omega_1-\omega_2)} \qquad (2,65)$$

yazılabilir.

Bu denklemlerin herbiri ayrı bir sigma fonksiyonunu göstermektedir.(2,60) denklemiyle beraber toplam dört adet sigma fonksiyonu olur.Bunların m ve n katları için;

$$\sigma(z+2m\omega_1+2n\omega_2)=(-1)^{m+n}\sigma(z)\ A$$

$$A=\exp[(2m\eta_1+2n\eta_2)z+2m^2\eta_1\omega_1+4mn\eta_1\omega_2+2n^2\eta_2\omega_2]$$

eşitliğini verir. Bu eşitliğin gösteriminde (2,59) özdeşliği kullanılmıştır.

II.6 ELİPTİK FONKSİYONLARININ DEĞİŞİK İFADELERİ

II.6.1.Bir Eliptik Fonksiyonun $\wp(z)$ Cinsinden Eşitini Bulma

Herhangi bir eliptik fonksiyonu f(z) için;

$$i)\sum(a_r-b_r)=0$$

$$ii)\wp(z+2\omega_1)=\wp(z+2\omega_2)=\wp(z) \qquad (2,66)$$

koşullarını sağlıyorsa $\wp(z)$ cinsinden yazilabilir.

f(z)'nin sonlu sayıdaki sıfırı $a_1,a_2,...,a_n$ ve sonlu sayıdaki kutbu $b_1,b_2,...,b_n$ olsun.(Eğer kutup noktalarının toplamı ile sıfırlarının toplamı eşit değilse eşit hale gelecek şekilde congruentler alınır.)

f(z) ile aynı kutup ve sıfırlara sahip bir fonksiyon şu şekilde tanımlansın;

$$\prod_{r=1}^{n}\frac{\wp(z-a_r)}{\wp(z-b_r)} \qquad (2,67)$$

Bu yeni fonksiyonun f(z) ile sıfırları ve kutupları aynı olacaktır.Congruentleri de aynı olacağına göre periyotları da çakışacaktır.Dolayısıyla bu iki fonksiyonun oranları liouville teoremine göre sabittir. Buna göre;

$$\frac{f(z)}{\prod_{r=1}^{n}\frac{\wp(z-a_r)}{\wp(z-b_r)}}=A \Rightarrow f(z)=A\prod_{r=1}^{n}\frac{\wp(z-a_r)}{\wp(z-b_r)} \qquad (2.68)$$

olur. Buradan A değeri bulunarak yerine konursa f(z) fonksiyonunun eşiti elde edilmiş olunur.

II.6.2.Bir Eliptik Fonksiyonun $\zeta(z)$ Cinsinden İfade Edilmesi

Aynı şekilde kutupları ve sıfırları yukarıda verilen f(z) eliptik fonksiyonunu alalım. Bu fonksiyonun herhangi bir kutup noktası için negatif üslü terimleri:

$$\frac{A_{k,1}}{(z-b_k)}+\frac{A_{k,2}}{(z-b_k)^2}+\dots+\frac{A_{k,r}}{(z-b_k)^{r_k}}=\sum_{i=1}^{r}\frac{A_{k,i}}{(z-b_k)^{r_k}}$$

$$g_k(z)=\sum_{i=1}^{r}\frac{A_{k,i}}{(z-b_k)^{r_k}} \qquad (2,69)$$

k=1,...,n için değiştiği sürece kutuplar ve derecelerinin de değiştiği kabul edilsin.Burada f(z) eliptik fonksiyon olduğuna göre rezüdüsü sıfır olacaktır.Yani; $\sum_{i=1}^{n} A_{i,1}=0$ olmalıdır.Şimdi padadaki ifadeler şu şekilde yazılırsa;

$$\frac{1}{z-b_i}=\zeta(z-b_i)+O(z)$$

$$\frac{1}{(z-b_i)^2}=\zeta'(z-b_i)+O(z)$$

....

$$\frac{1}{(z-b_i)^n}=\zeta^{(n)}(z-b_i)+O(z)$$

olur.

Buradaki $O(z)$, $z=b_k(k=1,...,n)$ için tanımlı bir polinomdur.

Bu değerler (2,69) da yerine konursa;

$$g_i(z)=\sum_{k=1}^{r} A_{i,k}\left[\frac{\zeta^{r-1}}{(r-1)!}(z-b_i)\right]+O(z)$$

elde edilir. Bu fonksiyon, eliptik fonksiyon olacaktır. Çünkü terimleri eliptik fonksiyondur. Buradan liouville teoremine göre (bak. özellik K) farkları sabittir.Buna göre,

$$f(z)-\sum_{i=1}^{n} g_i(z)=C=sbt. \quad ise,$$

olur. $g_i(z)$ fonksiyonu yerine konursa;

$$f(z)=C+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} A_{i,k}\zeta^{k-1}(z-b_k) \qquad (2,70)$$

elde edilir. z yerine kutup noktaları konulduğunda, $O(z)$ fonksiyonu sabit olduğundan C'nin içinde gösterilmiştir.

II.6.3.Eliptik Fonksiyonun Fourier Seri Açılımı

Herhangi bir periyodik f(z) fonksiyonu bir D bölgesinde tek değerli ve sürekli ise (yani Dirichlet koşullarını sağlıyorsa), bu fonksiyon bu bölgede fourier serisine açılabilir.

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inz}; \quad C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_D f(z)\,e^{-inz}dz \qquad (2,71)$$

şeklinde olur. Daha açık bir ifade tarzında, f(z); 2t periyotlu alındığında:

$$f(z)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}(a_n \cos nz+b_n \sin nz)$$

olur. Özel durumda, eğer f(z) tek fonksiyon ise $a_0=a_n=0$ ve $b_n\neq 0$ bulunur ve fonksiyon sinüs serisine açılır.

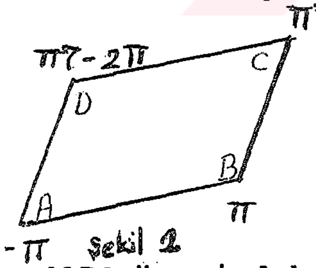
Çift fonksiyon ise $b_n=0$ ve $a_0\neq 0, a_n\neq 0$ olur ve fonksiyon cosinüs serisine açılır.

Periyodik Jacobi eliptik fonksiyonları yukarıdaki tanıma uygun olarak fourier serisine açılsın. $u=\frac{2Kz}{\pi}$ için snu foksiyonu 2π periyotlu hale gelecektir.

snu tek foksiyon olduğundan sinüs serisine açılır. D bölgesi köşeleri $-\pi, \pi, \pi\tau$ ve $\pi\tau-2\pi$ olan paralelkenar alınırsa, (2,72) formülünden;

$$snu=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \sin nz \quad ve \quad b_n=\frac{1}{\pi}\oint snu \sin nz\, dz \qquad (2,73)$$

olur. D bölgesinde b_n integrali incelenirse:



Şekil 2

[BC] üzerindeki integral [AD] üzerindeki integrale işaret farkı ile eşittir. Bu iki integral toplamda birbirini götürecektir. Geriye [AB] ile [CD] üzerindeki integral kalır. O halde [AB] üzerindeki integral;

$$I=\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inz} sn\left(\frac{2Kz}{\pi}\right)\, dz \qquad (2,74)$$

olur. [CD] üzerindeki integral $C\to D$ için $\pi\to-\pi$ gider. [CD] üzerindeki integral $z=x+\pi(\tau-1)$; $x\in(-\pi,\pi)$ şeklini alır. Bu durumda I integral;

olur. [CD] üzerindeki integral $C \to D$ için $\pi \to -\pi$ gider. [CD] üzerindeki integral $z=x+\pi(\tau-1)$; $x\epsilon(-\pi,\pi)$ şeklini alır. Bu durumda I integral;

$$I=\int_{\pi}^{-\pi} \exp[-ni(x+\pi\tau-\pi)]\, sn(\frac{2K}{\pi}x+2iK'-2K)\ dx$$

$$I=(-1)^n q^{-n}\int_{-\pi}^{\pi} snu e^{-nix}\ dx \qquad (2,74')$$

olacaktır. (2,74) ve (2.74′) göre, [AB] ve [CD] üzerindeki integraller toplamı $[1-(-1)^n q^{-n}]I$ olur. (2,72), (2,74)′e dayanarak $b_n=\frac{i}{\pi}I$ olarak bulunur.

Paralelkenar içinde fonksiyonun $z_1=\frac{1}{2}\pi\tau$ ve $z_2=\frac{1}{2}\pi\tau-\pi$ noktaların da singülerliği vardır.
(z_1 için $u_1=iK'$ ve z_2 için $u_2=iK'-2K$ olur.) Bu noktalarda b_n integralindeki snu′nun rezüdüsü tablo 2′den $\frac{1}{k}$; $-\frac{1}{k}$ olarak alınırsa; Rezüdüler, $u=\frac{2K}{\pi}z \Rightarrow Rez_1=\frac{\pi}{2kK}$, $Rez_2=-\frac{\pi}{2kK}$ olarak bulunur. (2,74) integralinin couchy teoremine göre sonucu;

$$I=\oint_D snu e^{inz}\ dz=2\pi i[\sum_i Rez(z=z_i)]$$

ise b_n integrali:

$$b_n=2\,[q^{\frac{n}{2}}\frac{\pi}{2kK}\frac{(1-(-1)^n)}{1+(-1)^n q^n}]$$

olur. n çift ve tek olduğunda b_n 'in değeri değişecektir.

$$n=\text{çift için}\quad b_n=0$$

$$n=\text{tek için}\ b_n=\frac{2\pi}{kK}\frac{q^{\frac{n}{2}}}{1-q^n} \qquad (2,75)$$

bulunur. Genel olarak bütün paralelkenarlar üzerinde integral aynı ilişkiyi vereceğinden snu'nun fourier açılımı (2,72) formülüne göre:

$$snu=\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k\ \sin kz=\frac{2\pi}{kK}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{q^{\frac{k}{2}}}{1-q^k}\sin kz;\quad k=2n+1$$

$$=\frac{2\pi}{kK}\,[\frac{q^{\frac{1}{2}}}{1-q}\sin z+\frac{q^{\frac{3}{2}}}{1-q^3}\sin 3x+\frac{q^{\frac{5}{2}}}{1-q^5}\sin 5z+...] \qquad (2,76)$$

olur. Diğer eliptik fonksiyonların fourier seri açılımı:

$$cnu=\frac{2\pi}{kK}\,[\frac{q^{\frac{1}{2}}}{1+q}\cos z+\frac{q^{\frac{3}{2}}}{1+q^3}\cos 3z+\frac{q^{\frac{5}{2}}}{1+q^5}\cos 5z+...] \qquad (2,77)$$

$$dnu=\frac{\pi}{2K}+\frac{2\pi}{K}\,[\frac{q}{1+q^2}\cos 2z+\frac{q^2}{1+q^4}\cos 4z+\frac{q^3}{1+q^6}\cos 6z+...] \quad (2,78)$$

bulunur.

III. BÖLÜM

III.1 ELİPTİK İNTEGRALLER

Daha önceki (2,51) dekleminde önümüze çıkan integrale eliptik integral denilmişti. Şimdi $y^2=ax^n+bx^{n-1}+...+cx$ (3,1)

için şöyle bir integral tanımlansın.

$$\int\frac{1}{y}dx=\int\frac{1}{\sqrt{ax^n+bx^{n-1}+...+cx+d}}dx \qquad (3,2)$$

Bu tür integrallerle daha önceden karşılaşılmıştır. Şimdi paydadaki n derecesini irdeleyelim. n=1,2 için bu integral mutlaka bilinen bir elementer integrale dönüşecektir. n üstten de sınırlanarak $2<n \leq 4$ değerleri arasında ele alınsın. n>4 için bu integral hiper eliptik integral adını alır.

(3,2) integrali basit bir eliptik integraldir. integraldeki rasyonel ifadenin payına Q(x) gibi bir ifade gelebilir.(Q(x) bir polinom fonksiyon olarak alınacak)

$$i)\int\frac{A}{y}dx,\quad ii)\int\frac{x}{y},\quad iii)\int\frac{dx}{f(x)y} \qquad (3,3)$$

Q(x), (i) durumundaki gibi sabit olabilir; (ii) durumundaki gibi lineer bir ifade olabilir veya (iii) deki gibi negatif üslü bir ifade olabilir. Bunların dışında olamaz mı? Sorusu bizi (3,3) integrallerinin kombinasyonlarına getirecektir.

III.2 ELİPTİK İNTEGRALLERİN İNDİRGENMESİ

$y^2=p(x)$ ifadesini ele alınsın. p(x), 3. yada 4. dereceden bir polinom olsun. Eğer P(x) 3. dereceden bir polinom ise Weierstrass eliptik tipine dönüştürülür. 4. dereceden ise Jacobi eliptik integrallerine dönüştürülür.

Şayet p(x), y'nin tek kuvvetine eşit bir ifade ise yani y=p(x) şeklinde ise (Q(x)/p(x))'in integrali eliptik integral olmaz. Böyle bir durumda yapılabiliyorsa y'nin karesi şeklinde bir eşitliğe dönüştürmek gereklidir.

Weierstrass eliptik fonksiyonları için:

$$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d, \quad Q(x)=mx^p+nx^{p-1}+\ldots+rx+s$$

alınsın,

$$\int\frac{Q(x)}{y}dx=m\int\frac{x^p}{y}dx+n\int\frac{x^{p-1}}{y}dx+\ldots+r\int\frac{x}{y}dx+s\int\frac{1}{y}dx \qquad (3,4)$$

şeklinde yazılabilir.

Bu integraller, kolaylık olsun diye, x'in derecesine göre isimlendirilsin. x'in derecesi "0" olana J_0 , "1"olana J_1 ,...,"n" olana J_n denilsin. (3,3) integralleri ise sırayla I_0, I_1, I_2 sembolleriyle gösterilsin. O halde (3,4) integralleri;

$$\int\frac{Q(x)}{y}dx=mJ_p+nJ_{p-1}+\ldots+rJ_1+sJ_0$$

olur. Buradan sırasıyla J_i (i=0,1,...,p) integralleri incelensin. Bu integraller (3,3)'deki integrallerin kombinasyomları olarak yazılabileceği gösterilebilir.

$$J_0=\int\frac{s}{y}dx=\int\frac{s}{\sqrt{p(x)}}dx=\int\frac{s\sqrt{p(x)}}{p(x)}dx \quad \text{için,}$$

Paydaki ifade $s\sqrt{p(x)}$ 'in türevi alınsın,

$$\frac{d}{dx}[s\sqrt{p(x)}]=\frac{s(3ax^2+2bx+c)}{2\sqrt{p(x)}}$$

şimdi her iki tarafın integrali alınırsa;

$$s\sqrt{p(x)}+C=\frac{3}{2}as\int\frac{x^2}{\sqrt{p(x)}}dx+bs\int\frac{x}{\sqrt{p(x)}}dx+\frac{1}{2}cs\int\frac{1}{\sqrt{P(x)}}dx$$

olur. Buradan J_2 integrali çekilirse;

$$J_2=[\frac{2}{3a}-\frac{1}{2}c]\,J_0-\frac{2b}{3a}J_1$$

bulunur. Bu integralde $J_0=I_0$, $J_1=I_1$ için,

$$J_2=[\frac{2}{3a}-\frac{1}{2}c]\,I_0-\frac{2b}{3a}I_1 \qquad (3,5)$$

olur.

Aynı şekilde;

$$J_1=\int\frac{rx}{y}dx=\int\frac{rx}{\sqrt{p(x)}}dx=\int\frac{rx\sqrt{p(x)}}{p(x)}dx \text{ için}$$

$rx\sqrt{P(x)}$ türevinden yola çıkarak yukarıdaki işlemler tekrarlanırsa;

$$\frac{d}{dx}[rx\sqrt{p(x)}]=r\sqrt{p(x)}+\frac{rx(3ax^2+2bx+c)}{2\sqrt{p(x)}}$$

her iki tarafın integrali alınırsa;

$$rx\sqrt{p(x)}+C=\frac{5}{2}arJ_3+2brJ_2+\frac{3}{2}rcJ_1+rdJ_0$$

olur. Buradan J_3 çekilirse;

$$J_3=\frac{2}{5a}\left[x\sqrt{p(x)}+c-2bJ_2-\frac{3c}{2}J_1-\frac{d}{2}J_0\right]$$

elde edilir. Bu sonuçta J_2 yerine konursa;

$$J_3=\frac{2}{5a}x\sqrt{p(x)}-\frac{4b}{3}\sqrt{p(x)}-\frac{40b^2+9c}{15a}I_1-\frac{20cb+3d}{15a}I_0 \qquad (3,6)$$

elde edilir. Bu işlemler p. dereceye kadar sürdürülürse, genel ifade için:

$$\frac{d}{dx}\left[x^p\sqrt{ax^3+bx^2+cx+d}\right]=px^{p-1}\sqrt{P(x)}+x^p\frac{3ax^2+2bx+c}{2\sqrt{P(x)}}$$

$$=a\left(p+\frac{3}{2}\right)\frac{x^{p+2}}{\sqrt{P(x)}}+b(p+1)\frac{x^{p+1}}{\sqrt{P(x)}}+c\left(p+\frac{1}{2}\right)\frac{x^p}{\sqrt{P(x)}}+dp\frac{x^{p-1}}{\sqrt{P(x)}}$$

her iki tarafın integrali alınırsa;

$$x^p\sqrt{P(x)}=a\left(p+\frac{3}{2}\right)I_{p+2}+b(p+1)I_{p+1}+c\left(p+\frac{1}{2}\right)I_p+dpI_{p-1} \qquad (3,7)$$

olarak bulunur.Burada p=1,2,...,p alınarak p. dereceye kadar olan eliptik integraller ilk iki tip integraller cinsinden bulunabilir.Şimdi verilen Q(x) negatif üslü olduğunda öncekinden farklı olarak paydaya gelen Q(x) yerine f(x) seçilsin. Bu durumda;

$$\int\frac{dx}{f(x)\sqrt{ax^3+bx^2+cx+d}}=\int\frac{\sqrt{P(x)}}{f(x)\,[P(x)]}dx$$

ifadesindeki $\frac{\sqrt{P(x)}}{f(x)}$ terimi ele alınsın. f(x), (x- α)'nın kuvveti şeklinde alınacaktır (genel halde; verilen f(x) çarpanlara ayrılır ve aynı çarpanlar aynı paydada, farklı çarpanlar diğer bir paydada olacak şekilde düzenlenir). Bu ifade x'e göre türetilsin,

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\sqrt{P(x)}}{(x-\alpha)^n}\right]=\frac{1}{(x-\alpha)^{2n}}\left[\frac{3ax^2+2bx+c}{2\sqrt{P(x)}}(x-\alpha)^n+n\sqrt{P(x)}(x-\alpha)^{n-1}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{P(x)}}\left[\frac{1}{2}\frac{3ax^2+2bx+c}{(x-\alpha)^n}+n\frac{P(x)}{(x-\alpha)^{n+1}}\right]$$

bulunan terimlerin paydaki ifadeleri α 'ya göre taylor serisine açılırsa:

$$R(x)=3ax^2+2bx+c \qquad R(x)=R(\alpha)+(6a\alpha+2b)(x-\alpha)+3a(x-\alpha)^2$$

$$P(x)=P(\alpha)+R(\alpha)(x-\alpha)+\frac{1}{2}(6a\alpha+2b)(x-\alpha)^2+a(x-\alpha)^3$$

bulunur. Bu eşitlikler türev ifadesinde yerine konulursa;

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\sqrt{P(x)}}{(x-\alpha)}\right]=\frac{1}{\sqrt{P(x)}}\left[\frac{Q(\alpha)}{(x-\alpha)^n}+\frac{(3a\alpha+b)(n+1)}{(x-\alpha)^{1-n}}+\frac{a(\frac{3}{2}+n)}{(x-\alpha)^{n-2}}+\frac{nP(\alpha)}{(x-\alpha)^{n+1}}\right]$$

olur. Her iki tarafın integrali alınırsa:

$$\frac{\sqrt{P(x)}}{(x-\alpha)^n}=a\left(\frac{3}{2}-n\right)J_{n-2}+(3a\alpha+b)(1-n)J_{n-1}+Q(\alpha)\left(\frac{1}{2}-n\right)J_n-nP(\alpha)J_{n+1} \quad (3,8)$$

elde edilir. Önceki integralde olduğu gibi n=0,1,2,...,n alınarak istenilen bir integral (3,3) integralleriyle ifade edilebilir. Sonuç olarak verilen bir integral (3,3) ile verilen integrallerin kombinasyonları şeklinde yazılabilir.

III.3 ELİPTİK İNTEGRALLERİN TRİGONOMETRİK İFADESİ

Bir P(x) polinomu alınsın. Weierstrass tipi için önce bu polinom 3. dereceden, $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ şeklinde olur. P(x) köklerinden en az biri real sayıdır.[9]

(3,2) integrali için; önce P(x) in üç real kökü olduğu kabul edilsin. Buna göre; $x_0<x_1<x_2$ için $P(x)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$ olur. Alınan integralde, $x=x_0+(x_1-x_0)\sin^2\varphi$ (3,9)

değişken dönüştürmesi yapılsın:

$$P(x)=(x_1-x_0)(x_2-x_0)\sin^2\varphi\cos^2\varphi[1-k^2\sin^2\varphi] \qquad (3,10)$$

$dx=2(x_1-x_0)\cos\varphi\sin\varphi d\varphi$, $k^2=\dfrac{x_1-x_0}{x_2-x_0}$ *bulunur ve* $k^2<1$ *olur.*

Bulunan bu değerler, (3,3) integrallerindeki I_0 integralinde yerine konursa;

$$I_0=\frac{2}{\sqrt{x_2-x_1}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\ \sin^2\varphi}} \qquad (3,11)$$

bulunur. Bir sabit farkı ile trigonometrik ifadesi elde eldilir.

İkinci durumda P(x)'in bir tek real kökü olsun.

$$P(x)=(x-x_0)(x^2+ax+b) \quad \text{için} \quad x=x_0\mp\sqrt{x_0^2+ax_0+b}\ \tan^2\frac{\varphi}{2} \qquad (3,12)$$

değişken dönüştürmesi yapılsın. Bu durumda:

---

9 Bak. Saffet Süray-Umumi Matematik (cilt 1)

$$P(x)=(x_0^2+ax_0+b)^{\frac{3}{2}}(1-k^2\ \sin^2\varphi)\frac{\tan^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^4\frac{\varphi}{2}}$$

$$k^2=\frac{1}{2}\left(1\pm\frac{x_0+\frac{p}{2}}{\sqrt{x_0^2+ax_0+b}}\right)\ ,\ dx=\pm\sqrt{x_0^2+ax_0+b}\frac{\tan\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}$$

için;

$$I_0=C\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\ \sin^2\varphi}} \tag{3,13}$$

şeklini alır.Bir sabit (C=sb.) farkı ile eşitlik sağlanır.

I_1 integrali için köklerin reel olması durumunda, trigonometrik ifadesi araştırılırsa:

$I_1=\int\frac{x}{\sqrt{P(x)}}dx$ için (3,9) değişken dönüştürmesi yapılsın:

$$I_1=\frac{2}{\sqrt{x_2-x_1}}\int\frac{x_0\pm(x_1-x_0)\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\ \sin^2\varphi}}d\varphi$$

$$=\frac{2x_0}{\sqrt{x_2-x_1}}I_0\pm2\sqrt{x_2-x_1}\int\frac{(1-k^2\ \sin^2\varphi)-1}{\sqrt{1-k^2\ \sin^2\varphi}}d\varphi$$

$$=\frac{2x_0\pm2(x_2-x_1)}{\sqrt{x_2-x_1}}I_0+\sqrt{x_2-x_1}\int\sqrt{1-k^2\ \sin^2\varphi}d\varphi \tag{3,14}$$

olur. Sonuçta ortaya çıkan, ikinci terimde ki integrale, ikinci tip eliptik integralin trigonometrik ifadesi denir. Üçüncü tip eliptik integralin trigonometrik ifadesi ise yine (3,3) değişken dönüştürmesi formülü kullanılarak,

$$I_2=C\int\frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \tag{3,15}$$

olarak bulunur.

I_1 ve I_2 bir tek reel kökü olması durumunda kullanılacak dönüşüm (3,12) değişken dönüştürmesidir. Sonuçta çıkan ifade, yukarıda bulunan ifadeler olacaktır.

Şimdi P(x) polinomunu dördüncü dereceden alındığında, yani; $P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ için:

i-Bu ifade de köklerin hepsi reel ve birbirinden farklı ise $x=x_0+\frac{1}{y}$ değişken dönüştürmesi yapılarak Weierstrass eliptik integrali formuna getirilir (burada ki x_0 reel köklerden biridir). Weierstrass tipi için anlatılan işlemler uygulanarak çözüm yapılır.

Eğer Weierstrass tipine dönüştürülemiyorsa, P(x)= $S_1.S_2$ gibi iki kuadratik ifadenin çarpımı haline getirilir. O halde;

$$S_1=a_1x^2+a_2x+a_3,\quad S_2=b_1x^2+b_2x+b_3$$

olsun. S_1 ve S_2 'nin kökleri için;

ii-a) $P(x)=S_1.S_2=(c_1^2-x^2)(c_2^2-x^2)$ için $x_{1,2}=\mp c_1\in\Re,\ x_{3,4}=\mp c_2\in\Re$

"i" durumundaki değişken dönüştürmesi ile 3. dereceye indirgenebilir veya $x=\frac{kx+l}{mx+n}$, $x\to x_1$, $x\to x_2$, $x\to\infty$ için k,l,m,n değerleri bulunarak Weierstrass tipine dönüştürülerek çözülür.

ii-b)Bu şekilde çözüm yapılamıyorsa, yukarıdaki şartlar geçerli olmak kaydıyla, $P(x)=(1-x^2)(1-k^2x^2)$ (3,16)

şekline getirilerek $x=\sin\theta$ değişken dönüştürmesi yapılarak trigonometrik ifadesi kolayca elde edilir.

$iii-P(x)=S_1.S_2=(c_1^2-x^2)(c_2^2+x^2)$, $x_{1,2}=\mp c_1 \in \Re$, $x_{3,4}=\mp c_2 \in \mathbb{C}$

şeklinde olduğunda $x=k\sec\theta$,k=sb dönüşümü uygulanmalıdır.

$iv-P(x)=S_1.S_2=(c_1^2+x^2)(c_2^2+x^2)$, $x_{1,2}=\mp c_1 \in \mathbb{C}$, $x_{3,4}=\mp c_2 \in \mathbb{C}$

için $x=k\tan\theta$,k=sb dönüşümü uygulanır.

V- Köklerin hepsi kompleks ve mutlak değerce de birbirinden fakli ise;önce $x=y+\alpha$ dönüşümü yapılır. Daha sonra elde edilen S_1, S_2 ifadelerinin sabitleri eşitlenerek α değeri belirlenir. Yenide yazılan integralde sabitler eşit olur. Bu halde $y=\beta u$ değişken dönüştürmesi uygulanarak,

$\beta^2=sb.$ eşitliğinden β bulur ve yerine yazılırsa; ortaya çıkan integralde yukarıdaki dönüşümlerden biri uygulanarak sonuca gidilir.

Trigonometrik ifadeleriyle eliptik integraller:

$$F(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad 0<k<1 \qquad (3,17)$$

$$E(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,\quad 0<k<1 \qquad (3,18)$$

$$\prod(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi,\ n\neq 0,\ 0<k<1 \qquad (3,19)$$

olur.Bu integrallere sırasıyla I.,II.,III. cins eliptik integrallerin Legendre trigonometrik ifadesi denir. Bu integraller de $x=\sin\varphi$ ters dönüşümüyle;

$$F_1(k,x)=\int_0^{x}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$E_1(k,x)=\int_0^{x}\sqrt{\frac{(1-k^2x^2)}{(1-x^2)}}\,dx$$

$$\prod\nolimits_1(k,x)=\int_0^{x}\frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,dx,\quad |k|<1 \qquad (3,20)$$

şekline gelir. Bu gösterime "Jacobi Normal Formu" denir. Jacobi normal formunda paydada ki köklü ifade, P(x)'in derecesi 4. dereceden alınıyordu, Weierstrass formunda ise P(x), 3. dereceden alınır. Bu durumda eliptik integrallerin Weierstrass tipi normal formu:

$$i)\ \int\frac{c}{\sqrt{4x^3+g_2x+g_3}}\,dx$$

$$ii)\ \int\frac{x}{\sqrt{4x^3+g_2x+g_3}}\,dx$$

$$iii)\ \int \frac{1}{(x-x_0)\sqrt{4x^3+g_2x+g_3}}\, dx \qquad (3,21)$$

olarak verilir.

III.4 I. TİP ELİPTİK İNTEGRAL

Jacobi ifadesiyle I.tip eliptik integral:

$$F_1(x,k)=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

olarak verilmişti. Bu integral $x=\pm 1$ *ve* $x=\pm\frac{1}{k}$ noktalarında singülerliğe sahiptir. Bu noktalara dallanma noktaları denir. Fakat sonsuz noktası bu integral için dallanma noktası değildir.(Çünkü $x\to\infty$ fonksiyonun limiti sonludur.) F_1 İntegrali dallanma noktaları çıkarılmış kompleks düzlemin bir alt bölgesinde çözülür.

Daha önceden Jacobi fonksiyonlarının eliptik integrallerin inversinden ortaya çıktığı söylenmişti. Böylece Jacobi nin tanımı doğrultusunda:

$$F(x,k)=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$F(x,k)=sn^{-1}(x,k) \qquad (3,22)$$

elde edilir.Bu integralin sayısal değerine u değeri verilirse;

$$F(k,x)=sn^{-1}(k,x)=u \Rightarrow x=snu \qquad (3,23)$$

olarak bulunur.

(3,20) denklemlerinden Legendre formuna geçerken $x=\sin\varphi$ bağıntısı kullanılmıştı. Aynı zamanda (3,23) bağıntısından $x=snu$ olduğu bulunmuştu, dolayısıyla φ ile x arasında bir ilişki kurulursa;

$x=\sin\varphi=snu$ *için* $\varphi=ampu$ *için*

$$\sin(ampu)=snu \tag{3,24}$$

bağıntısı bulunur. Böylece trigonometrik fonksiyonlarla eliptik fonksiyonlar arasında bir ilişki kurulmuş olundu. Bu denkleme ve trigonometrik özdeşliklere dayanarak;

$$x=\sin\varphi;\ \sqrt{1-x^2}=\cos(ampu)=cnu \tag{3,25}$$

$$\sqrt{1-k^2x^2}=\sqrt{1-k^2\ sn^2u}=dnu \tag{3,26}$$

(3,26) eşitliğinde k'ya modül denir. $k'^2=(1-k^2)$ için k' 'ya ise bütünler (complemetary) modul adı verilir.Bu module göre I.tip eliptik integralin ifadesinde k yerine k' alınarak;

$$F(x,k)=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}$$

olur. Bu integral F' ile gösterilirse;

$$F'(x,k)=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}} \tag{3,27}$$

şeklinde yazilabilir.

Bu bağıntılardan cnu integralini, (3,22) formülünde $x=cnu$ ($u=cnu^{-1}(k,x)$) değişken dönüştürmesi kullanılarak:

$$\frac{dx}{du}=-snu\ dnu \Rightarrow u=-\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(k'^2+k^2x^2)}}$$

$$\frac{du}{dx}=-snu\ dnu \Rightarrow u=-\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(k'^2+k^2x^2)}}$$

$$cn^{-1}(x,k)=-\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(k'^2+k^2x^2)}}=\int_x^0 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(k'^2+k^2x^2}} \qquad (3,28)$$

elde edilir.

Jacobi formunda üst sınır "1", yada Legendre fomunda üst sınır " $\frac{\pi}{2}$ " için elde edilen integrale "Tam Eliptik İntegral" adı verilir. (3,12) formüllerinde $x=1$ alındığında $u=sn^{-1}(1,k)$ olur. Bu ise (2,23) formülünden $1=snu$ eşitliği çıkar. Bu değerin eşiti (2,1) formülünden ve (1,19) formülleri kullanılarak $z=\frac{1}{2}\pi$ için $snu=1$ olduğu görülür. Bu ise $z=\frac{u}{\theta_3^2(0)}$ için $u=K$ bulunur. O halde;

$$K=\int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)}} \qquad (3,29)$$

olur. Complementary modul için $F'(1,k)=F'(\frac{\pi}{2},k)=K'$ değeri

için;

$$K'=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \qquad (3,30)$$

olur.

K integralinin " ±1 " noktasında singülerliği vardır. Bu integral aynı zamanda üst sınırda +1 değerini alır. F(x,k) integralinin üst sınırı sonsuza götürülürse;

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \lim_{x\to\infty} sn^{-1}(x,k)$$

olur. snu trigonometrik fonksiyonlara benzemektedir. Zaten $q\to 0$, $snu\to \sin x$ 'e gidiyordu. Bu yüzden sn(x,k), $x\to\infty$ için sonlu kalacaktır. Buradan $sn^{-1}(x,k)$ değeride sonludur. Alt sınırda integralin tanımlı olduğu görülmektedir.

Böylece $sn^{-1}(x,k)$ integrali üst sınır sonsuz artığında, sonlu kalır. Bu I. tip eliptik integralleri diğerlerinden ayıran önemli bir özelliktir.

III.5 II. TİP ELİPTİK İNTEGRALLER

(3,20) formüllerinden II.tip eliptik integralin ifadesi;

$$E_1(x,k)=\int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\, dx \qquad (2,31)$$

ve trigonometrik ifadesi:

$$E(\varphi,k)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\ \sin^2\varphi}\ d\varphi \qquad (3,32)$$

olarak verilir.Bu integralin;

$$1-k^2\sin^2\varphi=0 \quad veya \quad 1-x^2=0$$

$$\sin\varphi=\mp\frac{1}{k} \quad veya \quad x=\mp 1$$

noktalarında singülerliği vardır.Dolayısıyla bu noktalar dallanma noktalarıdır.Sonsuz noktası için integralin değeri,

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\ dx=\lim_{x\to\infty}\int_0^x k\ dx\to\infty$$

sonsuz olmaktadır.Böylece sonsuz noktası E integrali için singüler bir noktadır.Bu integral, kompleks düzlemin ∓ 1, ∞ noktaları çıkarılmiş her alt bölgesinde hesaplanır.

İntegralin sınırlardaki davranışı incelenirse; alt sınır için integral içindeki fonksiyon;

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\ dx=1$$

sonlu, yani integral alt sınırda tanımlıdır.Üst sınır sonsuza götürüldüğünde ise;

$$\lim_{x\to\infty}[\int_0^x\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\ dx]=\lim_{x\to\infty}\int_0^x k\ dx\to\infty$$

değeri sonsuz artmaktadır.Buradan yola çıkarak I. tip eliptik integralden farklı olarak, II. tip eliptik integral üst sınır sonsuz arttığında değeri sonsuz artmaktadır.Bu özellik, II. tip eliptik integralleri diğer elliptik integrallerden ayıran önemli bir özelliktir.

Şimdi E_1 integralinde v=snu,dv=cnu dnu du değişken dönüştürmesi yapılsın. Bu sayede yeni bir form elde edilir.

$$\int_0^u \sqrt{\frac{1-k^2 sn^2u}{1-sn^2u}}\, cnu\ dnu\ du = \int_0^u dn^2u du$$

$$E_1(x,k) = \int_0^u dn^2u\ du \qquad (3,33)$$

Şimdi bu tip eliptik integral ile ilgili bazı eşitlikler verilirse:

$$\int_0^u dn^2u du = \int_0^u (1-k^2\ sn^2u)\ du$$

$$= u|_0^u \pm k^2 \int_0^u sn^2u\ du \qquad (3,34)$$

$$= u - k^2 \int_0^u (1-cn^2u)\, du$$

$$= (1-k^2)\, u - k^2 \int_0^u (1-cn^2u)\, du \qquad (3,35)$$

elde edilir.Bu integrallerde önceki integralde olduğu gibi sırasıyla (3,31),(3,32),(3,33) formüllerinden elde edilen

$E_1(1,k)=E(\frac{\pi}{2},k)=E(K,k)$ integrallerine II. tip tam eliptik

integral denir.Complementary ifadesiyle II. tip eliptik integral:

$$E'(x,k')=\int_0^x\sqrt{\frac{1-k'^2x^2}{1-x^2}}\,dx$$

ile tam eliptik integral ifadesi:

$$E'(1,k')=\int_0^1\sqrt{\frac{1-k'^2x^2}{1-x^2}}\,dx$$

olur.

Şimdi II. tip eliptik integral ile ilgili bazı eşitlikler verilsin (Tek harfle gösterilen integraller tam eliptik integral alınacaktır):

a) E(u,k)=-E(-u,k)

Bu eşitliği göstermek için (3,32) eşitliğinden yararlanılırsa:

$$E(u,k)=\int_0^u dn^2u\ du \qquad \frac{dE(u,k)}{du}=dn^2u \tag{3,36}$$

$$\frac{dE(-u,k)}{-du}=dn^2u \qquad E(-u,k)=-\int_0^u dn^2u\,du$$

$$E(-u,k)=-E(u,k) \tag{3,37}$$

olarak bulunur.

b) $\frac{dE}{dk}$, $\frac{dE'}{dk}$, $\frac{dK}{dk}$, $\frac{dK'}{dk}$ türevleri bulunsun;

$$\frac{dE}{dk}=\frac{d}{dk}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\;d\varphi\right]$$

$$=\frac{1}{k}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\;d\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\;d\varphi\right]$$

$$\frac{dE(\frac{\pi}{2},k)}{dk}=\frac{E-F}{k} \qquad (3,38)$$

$$\frac{dE'(k,\frac{\pi}{2})}{dk}=\frac{d}{dk}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}\;d\varphi\right]$$

$$=\frac{k}{k'^2}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}\,d\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi\right]$$

$$\frac{dE'}{dk}=\frac{k}{k'^2}\left[E'-F'\right] \qquad (3,39)$$

$$\frac{dK}{dk}=\frac{d}{dk}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\;d\varphi\right]$$

$$=k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\;d\varphi$$

olur.İntegral içindeki ifadenin k'^2 katı şu şekilde ifade edilsin,

$$\frac{k'^2\sin^2\varphi}{1-k^2\sin^2\varphi}=\frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}-\frac{d}{d\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

aynı zamanda sol tarafın eşiti;

$$k'^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi}{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi$$

olarak verilsin,bu ifade E ve K cinsinden,

$$E-k'^2K=k^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi$$

olur.Buradan;

$$\frac{dK}{dk}=\frac{1}{k\ k'}[E-k'^2K] \tag{3,40}$$

olur.Aynı şekilde K' için:

$$\frac{dK'}{dk}=\frac{d}{dk}\ \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}\ d\varphi\right]$$

$$\frac{dK'(\frac{\pi}{2},k)}{dk}=\frac{1}{k\ k'^2}[k^2K'-E'] \tag{3,41}$$

eşitliği bulunur.

c) $EK'+E'K-KK'=\frac{\pi}{2}$

Şimdi her terimin sırasıyla k'ya göre türevi alınırsa;

$$\frac{d}{dk}[EK'] = \frac{dE}{dk}K' + E\frac{dK'}{dk} = \frac{1}{k}(EK'-KK')$$

$$\frac{d}{dk}[E'K] = \frac{dE'}{dk}K + E'\frac{dK}{dk} = \frac{k}{k'^2}(KE'-KK') + \frac{1}{kk'^2}(E'E-k'^2E'K)$$

$$\frac{d}{dk}[KK'] = \frac{dK}{dk}K' + K\frac{dK'}{dk} = \frac{1}{kk'^2}(EK'-KE')$$

$$\frac{d}{dk}[EK'+E'K-KK'] = 0 \quad ise \quad EK'+EK'-KK' = c = sb.$$

olarak elde edilir. Bütün eliptik integraller $|k|< 1$ için yakınsak idi.Şimdi $k \to 0$ limit alınırsa;

$$\lim_{k\to 0}(EK'+E'K-KK') \Rightarrow EK'+E'K-KK' = \frac{\pi}{2} \qquad (3,42)$$

olacaktır.Bu eşitliğe "Legendre Eşitliği" denir.

d) E(u+2nK)=E(u)+2nE(K)

(3,33) eşitliği ve (2,9) eşitliğini kullanılırsa;

$$E(u+2nK) = \int_0^{u+2nK} dn^2u\ du = \left(\int_0^u + \int_u^{u+2nK}\right) dn^2u\ du$$

$$= \left(\int_0^u + \int_0^K + \int_K^{K+K} + \int_{2K}^{2K+K} + \ldots + \int_{(2n-1)K}^{(2n-1)K+K}\right) dn^2u\ du$$

$$E(u+2nK) = E(u) + 2nE(K) \qquad (3,40)$$

olur.

III.6 III.TİP ELİPTİK İNTEGRAL

İntegral tiplerinden sonuncusu olan bu integralin genel hali daha önce (3,3) formüllerinde $\int \frac{1}{f(x)y}\,dx$ şeklinde verilmişti. $y^2=P(x)$ polinomunun derecesine göre iki guruba ayrılan eliptik integraller için; P(x)'in 3. dereceden olması yani Weierstrass eliptik integralleri için III. tip integralin genel hali:

$$\int \frac{1}{(x-x_0)\sqrt{4x^3+g_2x+g_3}}\,dx \qquad (3,44)$$

olarak verilir.(3,3) formüllerindeki f(x) burada lineer bir ifade şeklini alır. f(x)'in farklı olması durumunda verilen integral bildiğimiz üç tip integrale indirgenecektir ki bu III.2 bölümünde incelendi.

Bu integralin paydasındaki ifadedenin $x=x_0$ kökü, kare köklü ifadenin kökü olmaması şartı öne sürülecektir.Şayet aksi durum söz konusu olursa, integral bu noktada cebirsel süreksizliğe sahip olur (bak. bölüm III.2).Aynı zamanda eliptik integral I. ve II. tip eliptik integrale indirgenir. Şöyle ki; (3,8) formülünden;

$$\frac{\sqrt{P(x)}}{(x-a)^n}=\left(\frac{3}{2}-n\right)J_{n-2}+3a(1-n)J_{n-1}+(3a^2+p)\left(\frac{1}{2}-n\right)J_n-nP(a)J_{n+1}$$

P(a)=0 olacaktır.Bu durumda da integral n=1 için:

$$\frac{\sqrt{P(x)}}{(x-a)}=\frac{1}{2}J_{-1}+3a(1-p)J_0+\frac{1}{2}(3a^2+b)J_1$$

buradan:

$$J_1=\frac{1}{3a^2+p}\left[\frac{\sqrt{P(x)}}{(x-a)}-\frac{1}{2}I_1-3a(1-p)I_0\right] \qquad (3,45)$$

şeklinde J_n integralleri I_0, I_1 integrallerine dönüşecektir.

Jacobi eliptik fonksiyonları III. tip eliptik integral (3,20)'den;

$$\int\frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,dx \qquad (3,46)$$

bu integralde ise $x=\mp\sqrt{\frac{1}{n}}$ kare köklü ifadenin kökü olmamalıdır.

Trigonometrik olarak III. tip eliptik integral (3,18)'da verildiği gibi:

$$\prod(\varphi,n,k)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}} \quad n\neq0 \quad 0<k<1 \qquad (3,47)$$

trigonometrik ifade de n sıfırdan farklı olmak zorundadır. Aksi halde; bu integral F integraline dönüşür.

Diğer integrallerde olduğu gibi sınır değerleri $\varphi=\frac{\pi}{2}$ yada x=1 için integral, III. tip tam eliptik integral adını alır.

Diğer tip eliptik integraller de iki parametre varken bu integralde üç parametre vardır. (3,47) denkleminde verilen şartlar dışında, bu integral tanımlı değildir. İntegralin değeri bir sonuca yakınsamaz.İntegralin sınırlarında herhangi bir süreksizliği yoktur. Buna karşın paydadaki f(x)'in kökü yine paydadaki kareköklü ifadenin kökü ise integral dejenere olur. Bu durumda integral ilk iki tip integrale dönüşür.

Weierstrass formuna göre;

$$\int \frac{dt}{(x-b)\sqrt{P(x)}}\;;\quad P(x)=4x^3-g_2x-g_3$$

için x=b, P(x) ifadesinin kökü olmamalıdır. Eğer bu durum söz konusu olursa,(3,8) formülünde ki son terim sıfır olacaktır. Sonuçta elimizdeki integral dejenere olur.

$\dfrac{1}{(x-b)\sqrt{P(x)}}$ ifadesinde x=b, P(x)'in kökü olmasın.Bu durumda

x=b için integral:

$$\int \frac{1}{(x-b)\sqrt{P(b)}}dx=\sqrt{P(x)}\;\ln(x-b)$$

olur.Bu durumda x=b noktası yukarıdaki ifadeyi süreksizliğine yol açar. Bu özellik üçüncü tip eliptik integralleri diğer eliptik integrallerden ayıran özelliktir. Bu açıdan logaritmik süreksizliği olan integrallere üçüncü tip eliptik integral denir.

Üçüncü tip eliptik integrallere ait bazı özellikler;

A- $\prod(\phi,n,k)=F(\phi,k)$

$$\prod(\phi,n,k)=\int_0^{\phi}\frac{d\phi}{(1+n\sin^2\phi)\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}\quad \textit{için}$$

$$\prod(\phi,0,k)=\int_0^{\phi}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}=F(\phi,k)$$

B- $(1-k^2)\prod(\phi,-k^2,k)=E(\phi,k)-(1-k^2\sin^2\phi)^{-\frac{1}{2}}\;k^2\sin\phi\;\cos\phi$

C- $(1-k^2)\prod(\phi,-1,k)=(1-k^2)F(\phi,k)-E(\phi,k)+\tan\phi(1-k^2\sin^2\phi)^{\frac{1}{2}}$

D- $\prod(\phi,\varphi)-\prod(\varphi,\phi)=F(\phi)E(\varphi)-F(\varphi)E(\phi)+n\pi;$

Bu eşitliklerin doğruluğu verilmeyecektir. Her birinin kendine özgü gösterimi vardır. III. tip eliptik integral bazen "D" eşitliği ile tanımlanır.

IV.BÖLÜM

1-MATEMETİKSEL UYGULAMALAR

1-0<k<1 olduğuna göre;

$$K(k)=\frac{\pi}{2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\right)^2k^4+\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\right)^2k^6+\ldots\right]$$

olduğunu gösterin.

$$K(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$ *olarak alınırsa,*

$x=k^2\sin^2\theta$ *için* $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ 'in binom açılımı yapılsın.

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}}=\binom{-\frac{1}{2}}{0}.1+\binom{-\frac{1}{2}}{1}.(-x)+\binom{-\frac{1}{2}}{2}.(-x)^2+\binom{-\frac{1}{2}}{3}(-x)^3+\ldots$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n}=\frac{(-\frac{1}{2})!}{n!\,(-\frac{1}{2}-n)!}$$ için;

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}}=1+\left(\frac{1}{2}\right)x+\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\right)x^2+\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\right)x^3+\ldots$$

olur. x değeri yerine yazılırsa;

$$(1-k^2\sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}}=1+\left(\frac{1}{2}\right)(k^2\sin^2\theta)+\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\right)(k^2\sin^2\theta)^2+\ldots$$

bulunur. Bu seri integralde yerine yazılırsa;

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-k^2\sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1+(\frac{1}{2})(k^2\sin^2\theta)+(\frac{1}{2}\frac{3}{4})(k^2\sin^2\theta)^2+..$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta+\frac{1}{2}k^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\, d\theta+(\frac{1}{2}\frac{3}{4})k^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\, d\theta+...$$

ve integral alınırsa;

$$=\frac{\pi}{2}[1+(\frac{1}{2})^2k^2+(\frac{1}{2}\frac{3}{4})^2k^4+(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6})^2k^6+...]$$

elde edilir. İstenilen bir k değeri için K(k) integralinin değeri, istenilen yaklaşıklığa kadar bulunabilir.

2- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ integralini eliptik integral olarak ifade edip, virgülden sonra üç basamağa kadar değerini hesaplayınız.

Bu integralin sinx=0 için $x=0\mp k\pi$ noktalarında süreksizliği vardır. Dolayısıyla alt sınırda süreksizlik içerir. Üst sınırı sonsuz artırdığımızda integral sınırlı kalır. Bu özelliğinden dolayı I. tip eliptik integraldir. Üst sınır $\frac{\pi}{2}$ olduğundan integral I. tip tam eliptik integral adını alır.

$x=\frac{\pi}{2}-y$ dönüşümü uygulanırsa: dx=-dy, sınırlar, x= $\frac{\pi}{2}$ için y=0 ve x=0 için y= $\frac{\pi}{2}$ olur.

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\sin x}}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{-dy}{\sqrt{\cos y}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dy}{\sqrt{\cos y}}$$

olur. Bir başka değişken dönüştürmesi $\cos y=\cos^2 u$ alınsın.

$dy=\dfrac{2\cos u\ \sin u\ du}{\sqrt{1-\cos^4 u}}$ için;

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\sqrt{1+\cos^2 u}}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\sqrt{2-\sin^2 u}}=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 u}}$$

$$I=\sqrt{2}\ F\left(\frac{\pi}{2},\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\sqrt{2}\ K\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

bulunur. İlk problemde $k=\sqrt{\frac{1}{2}}$ alınarak integralin değeri yaklaşık olarak bulunur.

3- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\ dx$ integralinin eliptik ifadesini bulunuz.

Bu integral verilen aralıkta tanımlıdır. Sınırlar sonsuz artırıldığında değeri sonsuz artar. Dolayısıyla II. tip eliptik integral olmalıdır. Değişken dönüştürmesi;

$$\cos x=\cos^2 u,\quad dx=\frac{2\cos u\ \sin u\ du}{\sqrt{1-\cos^4 u}}\quad ve$$

$$x=0\ \text{için}\ u=0;\ x=\frac{\pi}{2}\ \text{için}\ u=\frac{\pi}{2}$$

için integral;

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2 u}\ \frac{2\cos u\ du}{\sqrt{1+\cos^2 u}}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 u}{\sqrt{1+\cos^2 u}}\ du=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\cos^2 u)-1}{\sqrt{1+\cos^2 u}}\ du$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sqrt{1+\cos^2 u}-\frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 u}}]\ du=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 u}\ du-\frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\ dx=2\sqrt{2}\ E(\frac{\pi}{2},\sqrt{\frac{1}{2}})-\sqrt{2}\ K(\sqrt{\frac{1}{2}})$$

4- $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+4\sin^2 x}\ dx=?$

Verilen integral II. tip eliptik integraldir (bkz. bölüm III.konu 5). Yukarıdaki ifade;

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+4(1-\cos^2 x)}\ dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{5-4\cos^2 x}\ dx$$

olur. $x=\frac{\pi}{2}-y$ için $dx=-dy$ değişken dönüştürmesi yapılırsa;

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{5-4\sin^2 y}\ dy=\sqrt{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{4}{5}\sin^2 y}\ dy=\sqrt{5}\ E(\frac{\pi}{2},\sqrt{\frac{4}{5}})$$

olur.

5-Elipsin yay uzunluğunu eliptik integraller cinsinden hesaplayınız.

$x=a\ \sin\phi,\ y=b\ \cos\phi$ *ve* $a>b>0$ *olsun.* $ds^2=dx^2+dy^2$

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{dx^2+dy^2}=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(a\cos\phi)^2+(-b\sin\phi)^2}\ d\phi$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\sin^2\phi}\ d\phi=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-(\frac{a^2-b^2}{a^2})\sin^2\phi}\ d\phi$$

$$S=4a\ E(\frac{\pi}{2},e) \qquad (\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{c^2}{a^2}=e^2 \text{ alınmıştır.})$$

olarak bulunur.

6-a) $\displaystyle\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)(9-x^2)}}$ integralini hesaplayınız.

$x=\mp 2$ *ve* $x=\mp 3$ noktalarında süreksizliği vardır. İntegral 4. dereceden olup kökler reeldir. Yapılacak dönüşüm ii-b)'de verilen (3,16) dönüşümüdür.

$$x=2\sin\theta,\ dx=2\cos\theta\ d\theta \text{ ve } x=0 \text{ için } \theta=0,\ x=2 \text{ için } \theta=\frac{\pi}{2}$$

değişken dönüşümü için;

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos\theta\ d\theta}{\sqrt{(4-4\sin^2\theta)(9-4\sin^2\theta)}}=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{4}{9}\sin^2\theta}}=\frac{1}{3}\ F(\frac{\pi}{2},\frac{2}{3})$$

olarak bulunur.

b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(1+2x^2)}}$ integrali hesaplansın.

Verilen integral 4. dereceden olup, $P(x)= S_1.S_2$ halindedir. Her çarpanın terimleri arasındaki işaret pozitif olduğundan kullanılacak dönüşüm, İV maddesinde verilen x=k tan θ dönüşümü-dür.

$$x=\tan\theta,\ dx=\sec^2\theta\ d\theta \text{ ve } x=0 \text{ için } \theta=0,\ x=1 \text{ için } \theta=\frac{\pi}{4}$$

alınırsa;

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2\theta\ d\theta}{\sqrt{(1+\tan^2\theta)(1+2\tan^2\theta)}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2\theta+2\sin^2\theta}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\sqrt{2-\cos^2\theta}}$$

olur. Yeni bir değişken dönüştürmesi için:

$\theta=\frac{\pi}{2}-u$ *alınırsa;* $\theta=0$ *için* $u=\frac{\pi}{2}$, $\theta=\frac{\pi}{4}$ *için* $u=\frac{\pi}{4}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\theta}{\sqrt{2-\cos^2\theta}}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\sqrt{2-\sin^2 u}}=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 u}}-\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{du}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 u}}$$

$$\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2)(1+2x^2)}=\sqrt{2}\left[F\left(\frac{\pi}{2},\sqrt{\frac{1}{2}}\right)-F\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\right]$$

sonucu bulunur.

7- $\displaystyle\int_4^6\frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}}$ integralini hesaplayınız.

Bu integral diğerlerinden farklı olarak 3. derecedendir. Yani Weierstrass eliptik integrallerine dönüştürülecektir. Paydayı sıfır yapan değerlerde süreksizliği vardır. İntegral bölgesinde ise tanımlıdır. Bu şartlar altında integrale (3,9) değişken dönüştürmesi uygulanmalıdır. Buradan;

$x_0<x_1<x_2$ *için* $x=x_0+(x_2-x_1)\sin^2\theta$ *ise* $x=1+\sin^2\theta$

yerine yazılırsa;

sınırlar; $x=4$ *için* $\sin\theta=\mp\sqrt{3}$ *ve* $x=6$ *için* $\sin\theta=\mp\sqrt{5}$ *alınırsa;*

$$\int_4^6\frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}}=\sqrt{2}\int_{\arcsin(\mp\sqrt{3})}^{\arcsin(\mp\sqrt{5})}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}}$$

olur. Köklerin sırası değiştilerek seçilen her x değişken dönüştürmesi sınırlarda çözümsüz denklemler verir. Bu yüzden başka bir yoldan çözüme gidilir. Yeni değişken dönüştürmesi;

$u=\sqrt{x-3}$, $dx=2udu$ *ve sınırlar* $x=6$ *için* $u=\mp\sqrt{3}$, $x=4$ *için* $u=\mp 1$

değerleri yerine konursa;

$$\int_4^6 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}}=2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{du}{\sqrt{(2+u^2)(1+u^2)}}$$

olur. Buradan yeni bir değişken dönüştürmesine gidilirse;

$u=\tan\theta$ *alınırsa* $u=1$ *için* $\theta=\frac{\pi}{4}$ *ve* $u=\sqrt{3}$ *için* $\frac{\pi}{3}$

ve integralde yerine konursa:

$$2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{du}{\sqrt{(2-u^2)(1+u^2)}}=\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\theta}}$$

$$\int_4^6 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}}=\sqrt{2}\left[F\left(\frac{\pi}{3},\sqrt{\frac{1}{2}}\right)-F\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\right]$$

bulunur.

8- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-2x+10)(x^2+x+7)}}$ integralini eliptik itegralle ifade ediniz.

$S_1=x^2-2x+10$ *ve* $S_2=x^2+x+7$ *olarak alınırsa* $\Delta_1<0$ *ve* $\Delta_2<0$

kökler sanal olduğundan, çözüme giderken bölüm III. 3'de anlatılan ve V maddesinde verilen yöntem kullanılacaktır.

$x=y+\alpha$ dönüşümü yapılırsa, dx=dy için;

$$I=\int \frac{dy}{\sqrt{((y-\alpha)^2-2(y-\alpha)+10)((y+\alpha)^2+(y+\alpha)+7)}}$$

açılımından elde edilen sabitler eşitlenerek;

$$\alpha^2-2\alpha+10=\alpha^2+\alpha+7 \ \textit{için} \ \alpha=1 \ \textit{bulunur}.$$

Bu değer yerine yazılırsa;

$$I=\int \frac{dy}{\sqrt{(y^2+9)(y^2+3y+9)}} \ \textit{olur}.$$

ikinci olarak $y=\beta u$ alınarak;

$$I=\int \frac{\beta \, du}{\sqrt{(\beta^2u^2+9)(\beta^2u^2+3\beta u+9)}} \ \textit{için} \ \beta^2=9 \Rightarrow \beta=\mp 3 \ \textit{olur}.$$

Yerine yazılarak;

$$I=\frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{(u^2+1)(u^2+u+1)}}$$

olur. Henüz çözüm yapılamamıştır. Çözüm için yeni bir değişken dönüştürmesi yapılırsa, uygun olan dönüşümde ikinci çarpandaki u terimini yok edilmesi istenmektedir. Bunun için aşağıdaki u'nun eşiti integralde yerine yazılarak iki denklen elde edilir. Bu denklemlerde keyfi değerler için;

$$u=\frac{k+lt}{m+nt} \ \textit{için} \ u=\frac{1-t}{1+t} \ \textit{ve} \ du=\frac{2dt}{(1-t)^2} \ \textit{olur}.$$

Buradan integral;

$$I=-\frac{\sqrt{2}}{3}\int\frac{du}{(t^2+1)(t^2+3)}$$

olur. Bu integralde t=tan θ dönüşümü ile çözüme gidilir. Sonuç;

$$I=-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\int\frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{2}{3}\sin^2\theta}}=-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\;F(\theta,\sqrt{\frac{2}{3}})$$

olur.

9- $\int_1^{\infty}\frac{du}{(3u^2+1)\sqrt{(u^2-1)(u^2+3)}}$ integralini hesaplayınız.

Bu integralde payda da kökün dışında kuadrik bir çarpan vardır. Bu ifadenin kökü, kareköklü ifadenin kökü değildir.

$$u_{1,2}=\mp\frac{i}{3},\; u_{3,4}=\mp1 \;\textit{ve}\; u_{5,6}=\mp3i\;\textit{dir.}$$

Bu integral şu şekilde yazılırsa;

$$\int\frac{du}{(3u^2+1)\sqrt{(-\frac{1}{3})-1)(-\frac{1}{3})+3)}}=\frac{\sqrt{3}}{2i}\;\log\frac{\sqrt{3}u-i}{\sqrt{3}u+i}+C$$

olur ki u= $\mp\frac{i}{\sqrt{3}}$ değeri için integralin sonucu logaritmik

süreksiz-lik verir. Dolayısıyla III. tip eliptik integral olmalıdır.

$u=\sec\theta$, $du=\cos^2\theta$ *ve sınırlar;* $u=1$ *için* $\theta=0$, $u=\infty$ *için* $\theta=\frac{\pi}{2}$

olur. Buradan;

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta\ d\theta}{(3+\cos^2\theta)\sqrt{1+3\cos^2\theta}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(3+\cos^2\theta)-3}{(3+\cos^2\theta)\sqrt{1+3\cos^2\theta}}\ d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-3\cos^2\theta}}-3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(3+\cos^2\theta)\sqrt{1+3\cos^2\theta}}$$

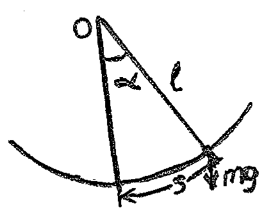
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2\theta}}-\frac{3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(1-\frac{1}{4}\sin^2\theta)\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2\theta}}$$

$$I=\frac{1}{2}\ F\left(\frac{\pi}{2},\sqrt{\frac{3}{4}}\right)-\frac{3}{8}\ \Pi\left(\frac{\pi}{2},-\frac{1}{4},\sqrt{\frac{3}{4}}\right)$$

elde edilir.

IV.2 FİZİKSEL UYGULAMALAR

1-Uzunluğu l olan bir basit sarkacın T periyodunu belirleyiniz.



Şekil 3

l-sarkacın boyu

g-yerçekim ivmesi

m-maddenin kütlesi

θ -düşey eksenle yaptığı açı

v-herhangi t anındaki hızı

enerjisi $\frac{1}{2}mv^2-mgl\cos\theta=$ sb. (1)

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2; \quad E_p=-mgl\cos\theta$$

Bu maddesel noktanın çizgisel hızı $v=l\dot{\theta}$ ve dairesel frekansın karesi $\omega^2=\frac{g}{l}$ olarak alınır ve (1) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\dot{\theta}^2-2\omega^2\cos\theta=sb. \tag{2}$$

olur. Maddesel noktanın düşey eksenden açılma açısına α denirse, ki; hareketin dejenere olmaması için ancak $\alpha\leq\mp\frac{\pi}{2}$ olabilir. $\theta=\alpha$ *ve* $\dot{\theta}=0$ bulunur. (2) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\dot{\theta}^2-2\omega^2\cos\theta=c \Rightarrow -2\omega^2\cos\alpha=c$$

olur. O halde;

$$\dot{\theta}^2=2\omega^2(\cos\theta-\cos\alpha)$$

$$=2\omega^2(-2\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin^2\frac{\alpha}{2})$$

$$\dot{\theta}=2\sqrt{\omega^2(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2})}$$

bulunur. İkinci taraftan dairesel frekans çekilirse:

olur. Her iki tarafın integrali alınırsa;

$$\omega=\frac{\dot{\theta}}{2\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}}$$

$$\omega t=\frac{1}{2}\int_0^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}}$$

olur. Burada t, maddenin en düşük pozisyondan θ açılı duruma gelene kadar geçen süredir. Son integralde bir değişken dönüştürmesi yapılırsa;

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\ \sin\phi\ \textit{için}\ d\theta=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\ \cos\phi\ d\phi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\ \cos^2\phi}}$$

ve yerine yazılırsa;

$$\omega t=\int_0^{\phi}\frac{d\phi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\ \sin^2\phi}}$$

olur. Bu integral I. tip eliptik integraldir. O halde;

$$\omega t=sn^{-1}(\phi,\sin\frac{\alpha}{2})\ \Rightarrow\ \phi=sn(\omega t,\sin\frac{\alpha}{2})$$

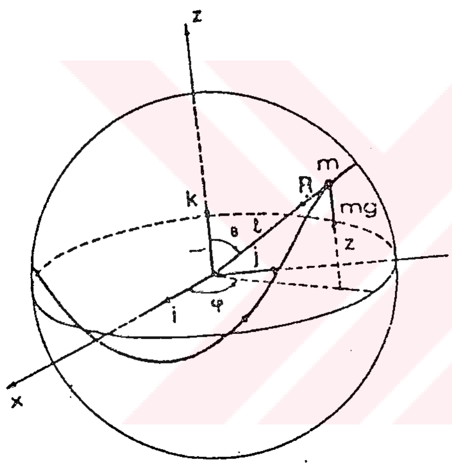
elde edilir. Burada maddesel nokta en çok yatay eksenden 90 derece yana açılabilir. O halde bu madde genliği $\sin\frac{\alpha}{2}$ olan ve periyodu,

$$T=\frac{4}{\omega}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\ \sin^2\phi}}=4\frac{K}{\omega}$$

olan bir salınım yapar.

2- Kütlesi m olan maddesel bir nokta, uzunluğu l olan rijit bir ipe asılı olarak ağırlık etkisiyle hareket etmektedir. Parçacığın hareketini inceleyiniz.

Parçacığın langrange denklemleri:



Şekil 4

$E_T=E_K+E_P$ *içi.*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\phi}\right)-\frac{\partial L}{\partial\phi}=0$$ bu denklemlerden,

$$m(l\ddot\theta-l\dot\phi^2\sin\theta\ \cos\theta)-mg\sin\theta=0 \ \ ve$$

$$\frac{1}{l\sin\theta}\frac{\partial}{\partial t}(l^2\dot\phi\sin^2\theta)=0 \qquad (1)$$

bulunur. Her iki denklemi kullanarak,

$$\ddot\theta-\frac{h^2}{l^4}\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}-\frac{g}{l}\sin\theta=0 \quad (h=l^2\dot\phi\sin^2\theta) \qquad (2)$$

bulunur. Bu denklemin integrali iki yoldan bulunabilir. Denklemi doğrudan doğruya integre ederek veya enerjinin korunumu ilkesin-den hareket ederek;

$$\frac{1}{2}m(l^2\dot\theta^2+l^2\dot\phi^2\sin^2\theta)+mgl\cos\theta=E \qquad (E_T=E_K+E_p) \qquad (3)$$

bulunur. Burada E başlangıç koşullarından belirlenmesi gereken bir sabittir. Örneğin; $E=\frac{1}{2}v_0^2+mgz_0$ şeklinde olabilir.

(3) denkleminden,

$$\dot{\theta}^2+\frac{h^2}{l^4\sin^2\theta}+2\frac{g}{l}\cos\theta=\frac{2E}{ml^2} \tag{4}$$

elde edilir. Bu denklemin reel çözümünün olabilmesi için;

$$2\frac{g}{l}\left(\frac{E}{mgl}-\cos\theta\right)\geq 0 \quad (\textit{çünkü},\ E\geq 0)$$

olmalıdır. Denklemde yalnız değişken olan θ 'dır. Bunun için $\cos\theta$ 'nın en küçük değeri -1 olacağına göre;

$$\frac{E}{mgl}+1\geq 0 \ \textit{ise}\ \frac{E}{mgl}\geq -1 \ \textit{olur}.\ \frac{E}{mgl}=-1 \ \textit{olduğunda}$$

parçacık kürenin en alt noktasında ($\theta=\pi$ için) olur. Parçacığın hareket denklemlerini bulmak için (4) ile (2) denklemlerindeki ikinci denklemin integralini kullanarak (h eşitliği) $\theta(t)$ ve $\varphi(t)$ fonksiyonları belirlenmelidir. Bunun için önce (4) denkleminin çözülmesi gerekir. Bu amaçla $\cos\theta=\zeta(z)$ dönüşümü yapılsın $-1\leq\zeta\leq 1$ olur. Bu dönüşümle $z=l\zeta$ olduğu görülür. Buradan (4) denklemi:

$$\dot{\zeta}^2=2\frac{g}{l}f(\zeta) \quad f(\zeta)=(\zeta^2-1)(\zeta-\alpha)-\beta \tag{5}$$

olur. Burada $\alpha=\dfrac{E}{mgl},\beta=\dfrac{h^2}{2gl^3}$ *ve* $\alpha>-1,\beta>0$ olacaktır.

Hareketin şeklini $f(\zeta)$ fonksiyonu belirler. Fonksiyonun optimum noktaları:

$$f'(\zeta)=0 \text{ için } \zeta_{1,2}=\frac{1}{3}[\alpha\mp(\alpha^2+3)^{\frac{1}{2}}]$$

olur. Burada kökün işareti negatif olan (ζ_1) maksimum nokta, diğeri ise minimum nokta olarak belirlenir. Maksimum değeri için fonksiyon;

$$f(\zeta_1)=\phi(\alpha)-\beta \text{ için } \phi(\alpha)=\frac{2}{27}[(\alpha^2+3)^{\frac{3}{2}}+9\alpha-\alpha^3]$$

olur. Hareketin fiziksel olarak varolabilmesi için fonksiyonun üç reel kökü olamalıdır. Buradan;

$$\zeta\to\infty \text{ için } f(\zeta)\to\infty>0;\ \zeta\to\mp1 \text{ için } f(\zeta)\to-\beta<0$$

$$\zeta\to\zeta_0 \text{ için } f(\alpha)=\phi(\alpha)-\beta>0 \text{ için } \phi(\alpha)\geq\beta\geq0 \qquad (7)$$

elde edilir. Fonksiyon, (+) bölgeden (-) bölgeye geçerken yada tersi için bu aralıkta kök içereceğinden yukarıda ki incelemelere dayanarak, sırasıyla $\zeta_1<\zeta_2<\zeta_3$ kökleri için;

$$\zeta_1\in(-1,\zeta_{max}),\zeta_2\in(\zeta_{max},1) \text{ ve } \zeta_3\in(1,\infty)$$

olarak bulunur. Yani

$$-1<\zeta_1<\zeta_{max}<\zeta_2<\zeta_3 \qquad (8)$$

şeklinde olur. (7) denklemindeki $\beta \geq 0$ şartı için β 'nın durumu incelensin.

i) $\beta=0$ için, tanımından hareketle $\phi=0$ ((2) eşitliği kullanılarak) bulunur. Buna göre hareket kürenin merkezinden geçen sabit bir düşey düzlem içinde gerçeklenir. Sonuçta basit sarkaç haline dönüşecektir.

ii) $\phi(\alpha)>\beta>0$ için, fonksiyonun üç reel kökü vardır. z doğrultusundaki hareket $z_1=l\zeta_1$ ve $z_2=l\zeta_2$ ile belirlenmiştir. Bu değerler arasında bir salınım gösterir. Çünkü;

$$\dot{\zeta}^2=2\frac{g}{l}(\zeta-\zeta_1)(\zeta-\zeta_2)(\zeta-\zeta_3) \qquad \zeta_1<\zeta<\zeta_2$$

için integral alınırsa, bu integral Weierstrass tipi bir eliptik integraldir. (3,9) değişken dönüştürmesi kullanılarak;

$$\sqrt{\frac{2g}{l}}\,dt=\frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta-\zeta_1)(\zeta-\zeta_2)(\zeta-\zeta_3)}}$$

için değişken dönüştürmesi yapılıp integral alınırsa;

$$t=\sqrt{\frac{2l}{g(\zeta_3-\zeta_1)}}\;sn^{-1}\left(\theta,\sqrt{\frac{\zeta_2-\zeta_1}{\zeta_3-\zeta_1}}\right)$$

bulunur. Burada t, ζ_1 *'den* ζ_2 'ye geliş süresidir. Periyot olabilmesi için bu geliş süresinin iki katı alınmalıdır. O halde;

$$T=2t=2\sqrt{\frac{2l}{g(\zeta_3-\zeta_1)}}\;sn^{-1}\left(\frac{\pi}{2},\sqrt{\frac{\zeta_2-\zeta_1}{\zeta_3-\zeta_1}}\right)$$

$$T=2\sqrt{\frac{2l}{g(\zeta_3-\zeta_1)}}\ K$$

olarak belirlenir. Parçacık z_1 *ile* z_2 arasında yukarıda bulunan T periyoduyla hareket eder. (Bu harekette ζ_3 için z_3 değeri kürenin dışına çıktığı için kullanılamamıştır.)

iii) $\phi(\alpha)=\beta$ için $f(\zeta_{max})=0$ olur. Dolayısıyla hareket $z=l\zeta_{max}$ yatay dairesi üzerinde hareket eder. Farklı z değerleri için bu dairenin yarıçapı; $r=l(1-\zeta^2_{max})^{\frac{1}{2}}$ olur.

$f(\zeta_{max})=0$ *için* $\zeta^2=0$ olur. Buradan $\cos\theta=\zeta$ *için* $\theta=\theta_0$ sabit açısı bulunur. Buna dayanarak $v_\theta=0$ olur. h eşitliğinden ise $\phi=sb$ için $v_\varphi=sb$, bulunur. Verilere göre sarkacın böyle bir hareket yapabilmesi için küre üzerindeki $r=l\sin\theta_0$ yarıçaplı yatay çember üzerinde teğet doğrultuda $v_\varphi=v_0$ hızı ile harekete geçirilmesi gerekmektedir. ζ_{max} daima negatif olduğundan parçacık kürenin alt yarısında hareket eder. Bu sarkaca konisel sarkaç denir.

iV) $\beta>\phi(\alpha)$ durumuna fiziksel bir olay karşı gelmez.

3-Yay kuvvetlerinin incelenmesi (Duffing Denklemi)

Elastik konusunda, titreşimlerin incelenmesinde çeşitli differansiyel denklemler ortaya çıkar. Cisimler ya serbest yada zorlanmış titreşim yaparlar. Bu differansiyel denklemlerin çözümünde G.Duffing'in çalışmaları önemli bir yer tutar. Bu nedenle bu tip denklemlere "Duffing denklemleri" denir.

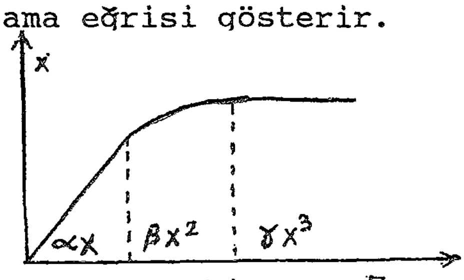
Genel yapısı ile titreşimin differansiyel denklemi;

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+f(x)=P(t)$$

şeklinde verilir. x burada yaylarda uzanımı gösterir. İkinci terim uzanımı engelleyici dış kuvvettir (titreşimin sönümlü olup olmamasını belirler). f(x) ise yay kuvvetidir. Lineer veya üçüncü dereceden bir ifade olabilir. P(t) ise dıştan yaya uygulanan zorlayıcı kuvvet adını alır. Denklem bu terimlerin varlığına göre isim alır. Örneğin $m\ddot{x}+x+x^3=0$ lineer olmayan serbest titreşim denklemi, gibi.

Yaylarda bir kuvvet etkisiyle uzanımın incelenmesinde, yayın ucuna asılmış maddenin, kütlesine ve yerçekimine bağlı olarak yayı harekete zorlaması hali göz önüne alınır. Bu durumdaki bir yayın titreşimleri incelensin.

Yaylarda bu hareketin verdiği grafik üç farklı kısım içerir. Önce yay kuvvet etkisinde lineer bir uzama eğrisi gösterir. Daha sonra kuvvet devam ettirilirse, yay yay özelliğini kaybederek bozunmaya başlar. Son olarak hâlâ kuvvet devam ettiriliyorsa yay tel haline gelmiş ve kopmasına kadar uzama eğrisi gösterir.



Şekil 5

Genel halde yaydaki gerilme denklemi:

$T=\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3$ olarak verilir.

Genel denklemde bu ifade T=f(x)'e karşı gelir. Bu denklemde daima $\alpha>0$ 'dır. Eğer $\beta=0$ *ve* $\gamma=0$ olursa yay Hooke kanunlarına uyar ve hareket basit harmonik harekettir. Eğer $\beta>0$ ise uzamayla gerilme hızla artar ve Hooke Kanunlarına uymaz. $\beta>0$ iken yaya sıkı yay, $\beta<0$ durumunda da yaya yumuşak yay denir. Gerilme daha az hızla artar ve kanunlara uymaz.

Genel denklemin bir özel hali, tam esnek cisimlerde kopmanın incelenmesinde verilen denklemde $f(x)=\alpha x+\gamma x^3$ alı-nır. Birim zamanın uygun seçilmesiyle, yaydaki bir noktanın hareket denklemi:

$$\ddot{x}+x+\epsilon x^3=0$$

dır. Bu differansiyel denklem x'e göre integre edilirse; t=0 için x=a, $\dot{x}$=0 başlangıç koşullarına göre: (ϵ>0 için)

$$\ddot{x}=\frac{d}{dx}(\frac{1}{2}\dot{x}^2) \quad için,$$

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}\epsilon x^4=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}\epsilon a^4$$

veya;

$$\dot{x}^2=(a^2-x^2)(1+\frac{1}{2}\epsilon a^2+\frac{1}{2}\epsilon x^2)$$

bulunur. Bu eşitlik düzenlenip integrali alınırsa;

$$t=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(1+\frac{1}{2}\epsilon a^2+\frac{1}{2}\epsilon x^2)}}$$

olur. Bu integralde bir değişken dönüştürmesi yapılırsa,

$$x=a\cos\theta \quad (\cos\theta=\frac{x}{a}) \quad ve \quad dx=-\sin\theta \, d\theta$$

alınırsa;

$$t=\int_{0}^{\cos\theta}\frac{-d\theta}{\sqrt{1+\epsilon a^2+\frac{1}{2}\epsilon a^2\cos^2\theta}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon a^2}}\int_{\cos\theta}^{0}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{\epsilon a^2}{2+2\epsilon a^2}\sin^2\theta}}$$

$$t=\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon a^2}}\ cn^{-1}\left(\frac{x}{a},\sqrt{\frac{\epsilon a^2}{2+2\epsilon a^2}}\right)$$

bulunur. İnvers dönüşümle uzanım;

$$x=a\ cn\left(\sqrt{1+\epsilon a^2}\ t,\sqrt{\frac{\epsilon a^2}{2+2\epsilon a^2}}\right)$$

olarak konum denklemi bulunur. Periyot ise, T=4t olacağından, hareketin periyodu: $T=\frac{4K}{\sqrt{1+\epsilon a^2}}$ olarak bulunur.

Eğer Hooke kanunlarından ayrılma küçük ise, ϵ 'nu birinci dereceden kabul edebiliriz. Burada k^2 ifadesinde sonsuz bölme yaptıktan sonra ϵ 'nun yüksek mertebeden terimlerini ihmal edilerek $k^2=\frac{\epsilon a^2}{2}$ değeri elde edilir. Bulunan bu değer K'nın seri açılımında yerine yazılırsa (matematiksel uygulama 1);

$$K=\frac{1}{2}\pi\left[1+\frac{1}{8}\epsilon a^2\right] \quad (\epsilon^2<<<1 \text{ olduğundan})$$

$$T=\frac{4K}{\sqrt{1+\epsilon a^2}}=2\pi\left[\frac{(1+\frac{1}{8}\epsilon a^2)}{\sqrt{1+\epsilon a^2}}\right]=2\pi(1-\frac{3}{8}\epsilon a^2)$$

olarak bulunur.

$\epsilon>0$ alındığında yukarıdaki periyot elde edilmektedir. Bu durumda titreşimin aplitüdü (genliği) artar ve periyodu düşer. Buna bağlı olarak frekansı düşür.

$\epsilon<0$ alındığında (yumuşak yaylar için) ϵ yerine $-\eta$ değeri kullanılsın. Bu durumda maddesel noktanın hareket denklemi:

$$x''+x-\eta x^3=0 \quad olur.$$

Bu maddesel nokta $x=\frac{1}{\sqrt{3\eta}}$ için maksimum uzanım gösterir.

Teorik olarak gerilme düşer. Bu gerçek dışıdır. $a<\frac{1}{\sqrt{3\eta}}$ kabulu için, x=0 ve t=0 anındaki t değeri;

$$dt=\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)(\frac{2-\eta a^2}{2}-\frac{\eta}{2}x^2)}}$$

için bir değişken dönüştürmesi yapılırsa,

$$x=a\ \sin\theta \quad için \quad dx=a\ \cos\theta\ d\theta$$

alınırsa:

$$t=\sqrt{\frac{2}{2-\eta a^2}}\int_0^{\sin\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\frac{\eta a^2}{2-\eta a^2}\sin^2\theta}}$$

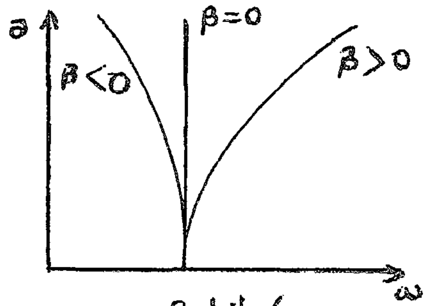
olur. invers dönüşümle:

$$t=\sqrt{\frac{2}{2-\eta a^2}}\ sn^{-1}\left(\frac{x}{a},\sqrt{\frac{\eta a^2}{2-\eta a^2}}\right)\ \textit{ise}\ x=a\ sn\left(\sqrt{\frac{2-\eta a^2}{2}}\ t,\sqrt{\frac{\eta a^2}{2-\eta a^2}}\right)$$

elde edilir. Bu hareketin periyodu ise; $T=\dfrac{4K}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\eta a^2}}$ olarak

bulunur. Küçük η değeri için: $T=2\pi(1+\frac{3}{8}\eta a^2)$ bulunur. Yumuşak yaylar için, titreşimin frekansı düşer, aplitüdü artar.

Grafik olarak yukarıda anlatılanlar yanda verilen grafikten doğrulanabilir.



Şekil 6

Grafikte görüldüğü gibi yumuşak ($\epsilon<0$) yaylar için; dairesel frekans artarken, genlik düşer. Sert ($\epsilon>0$) yaylarda ise; dairesel frekans artarken, genlik artar. $\epsilon=0$ halinde ise; dairesel frekansın "1" olduğu yerde sert ve yumuşak yaylar ortak teğete sahiptir.

KAYNAKCA

[1]- A COURSE OF MODERN ANALYSIS

A.T.Whittaker and G.N.Whatson

Cambridge at the University Press-1935

[2]- A COURSE OF HIGHER MATHEMATICS (vol.III.)

V. I. Smirnov

Pergamon Press-1964

[3]- COMPLEX ANALYSIS

Serge Lang

Yale University-1977

[4]- ELLIPTIC FUNCTIONS AND APPLICATIONS

Derek F. Lawden

New York

[5]- KOMPLEKS DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLAR TEORİSİ

Mithat İdemen

İstanbu Teknik Ünüversitesi-1990

[6]- TABLES OF SERIES,PRODUCTS AND INTEGRALS

I. M. Ryshık and I. S. Gradsteın

Russian Edition-1957

[7]- TEORİ VE PROBLEMLERLE İLERİ ANALİZ

(ADVANCE CALCULUS)

Sanem Çözüm Serisi- 1963

[8]- THEORY OF FUCTIONS OF A COMPLEX VARIABLE (vol. III.)

A. I. Markushevich

(Translated by Richard A. Silverman)

Prentice-Hall ınc. 1967

[9]- THEORY OF ELLIPTIC FUNCTIONS (vol.I)

Harris Hancock

Dover Publications, New York-1958

ÖZGEÇMİŞ

14 Eylül 1969 Devrekâni/ Kastamonu'da doğdu. İlk öğrenimini 1979-1980 öğretim yılında Devrekâni Merkez İlkokulu'nda, orta ve lise tahsilini, 1985-1986 öğretim yılında Devrekâni Lise'sinde tamamladı. Aynı yıl ÖSYS sınavı ile Yıldız Üniversitesi Matematik Mühendisliği Bölümünü kazandı. 1989-1990 öğretim yılında mezun oldu. Bunu takiben mezun olduğu bölümün yüksek lisans sınavını kazandı. Şubat 1990'da aynı üniversitenin Fen Bilimleri Enstitüsü'nde araştırma görevlisi olarak işe başladı. 1991 yılında kendi bölümüne geçiş yaptı ve halen burada araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.