YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SINIR ŞARTLARINDA PARAMETRE BULUNAN STURM-LİOUVİLLE TİPLİ DİFERANSİYEL DENKLEMİN SPEKTRAL ANALİZİ

Matematikçi Kevser ÖZDEN

F.B.E Matematik Anabilim Dalında
hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof.Dr. Mehmet BAYRAMOĞLU

İSTANBUL, 1996

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince , bana yön veren , bilgilendiren , desteğini esirgemeyen değerli hocalarım Prof. Dr. Mehmet BAYRAMOĞLU ' na , Doç. Dr. Abdullah YILDIZ ' a , tezimin yazılması sırasında büyük yardım gördüğüm değerli arkadaşım Araş. Gör. Reşat KÖŞKER ' e teşekkürü bir borç bilirim .

ÖZET

Bu çalışmada , sınır koşulunda spektral parametre bulunan aşağıdaki özel regüler Sturm-Liouville problemi göz önüne alınmıştır. $[a,b] \subset R$ sonlu kapalı bir aralık olmak üzere , $L_2[a,b]$ Hilbert uzayında;

$$a<x<b \text{ için } -y'' + q(x)y = \lambda y \tag{*}$$

diferansiyel denkleminin,

$$y(a)Cos\alpha + y'(a)Sin\alpha = 0$$

ve

$$-(\beta_1 y(b) - \beta_2 y'(b)) = \lambda(\beta_1' y(b) - \beta_2' y'(b))$$

sınır koşullarıyla özdeğer ve özvektörleri incelenmiştir. Burada $\alpha \in [0,\pi]$, $\rho = \beta_1'\beta_2 - \beta_1\beta_2' > 0$ $(\beta_1, \beta_2, \beta_1', \beta_2' \in R)$, *ve* λ ise kompleks değerler alan bir parametredir.

Gözönüne alınan problemin ; $H = L_2[a,b] \oplus C$ uzayında , kendi kendine eşlenik bir A operatörüyle temsil edilebildiği gösterilmiş ve A operatörünün spektrumunun saf ayrık olduğu ispatlanmıştır. Bunun yardımıyla A ' nın özfonksiyonlarının $L_2[a,b] \oplus C$ uzayında tam ortonormal sistem oluşturduğu gösterilmiştir. $\beta_1, \beta_2, \beta_1', \beta_2'$ parametrelerinin değişimine bağlı olarak yukardaki problemin özdeğerlerinin asimptotik ifadeleri elde edilmiştir. Bir örnek olarak q(x)=0 , $\alpha = 0$, $\beta_1 = \beta_2' = 0$ özel halinde , (*) diferansiyel denkleminin özfonksiyonlarına göre açılım formülü , ısı denklemi için sınır değer problemine uygulanmıştır.

ABSTRACT

The following special regular Sturm-Liouville problem involving the spectral parameter in the boundary conditions is studied. In Hilbert space $L_2[a,b]$, as $[a,b] \subset \mathbb{R}$ is a finite closed interval , the eigenvalues and eigenfunctions of equation

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \qquad a < x < b \tag{*}$$

under the boundary conditions of

$$y(a)Cos\alpha + y'(a)Sin\alpha = 0$$

and

$$-(\beta_1 y(b) - \beta_2 y'(b)) = \lambda(\beta_1' y(b) - \beta_2' y'(b))$$

where $\alpha \in [0,\pi]$, $\rho = \beta_1'\beta_2 - \beta_1\beta_2' > 0$ ($\beta_1, \beta_2, \beta_1'$ *and* $\beta_2' \in \mathbb{R}$ and λ is a coplex parameter , are investigated .

It is shown that the problem considered in the Hilbert space , $H = L_2[a,b] \oplus \mathbb{C}$, can be represented with a self-adjoint operator A and it is proved that spectrum of A is purely discrete . Using this it is also shown that eigenfunctions of A take the form of a complete orthonormal system in $L_2[a,b] \oplus \mathbb{C}$. Asymptotic formulae for the eigenvalues of the above problem depending on variation of parameters $\beta_1, \beta_2, \beta_1'$ and β_2' are obtained . As an example , for a special case when $q(x) = 0, \alpha = 0$ and $\beta_1 = \beta_2' = 0$ the expansion formula for the eigenfunctions of (*) the differential equation is applied to boundary value problem for heat equation .

1.GİRİŞ.

Bu çalışmada sonlu [a,b] aralığında tanımlanmış , sınır şartlarında spektral parametre bulunan Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerini ve özfonksiyonlarına göre açılım problemlerini inceleyeceğiz.

Genel olarak söz konusu problem aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \quad , \quad a < x < b \tag{1.1}$$

$$u_1 y = A_{11}(\lambda)y(a) + A_{12}(\lambda)y'(a) + B_{11}(\lambda)y(b) + B_{12}(\lambda)y'(b) = 0 \tag{1.2}$$

$$u_2 y = A_{21}(\lambda)y(a) + A_{22}(\lambda)y'(a) + B_{21}(\lambda)y(b) + B_{22}(\lambda)y'(b) = 0 \tag{1.3}$$

Burada q(x) ; [a,b] aralığında tanımlanmış sürekli bir fonksiyon , λ; kompleks parametre, $A_{i,j}(\lambda)$, $B_{i,j}(\lambda)$ $(i,j = 1,2)$; λ' nın analitik fonksiyonlarıdır. Eğer λ ' nın herhangi bir değerinde (1.1) denkleminin (1.2) , (1.3) şartlarını sağlayan sıfırdan farklı $y(x,\lambda)$ çözümü varsa ozaman λ ' ya (1.1) , (1.2) , (1.3) sınır değer probleminin özdeğeri, buna karşılık gelen $y(x,\lambda)$ ' ya da özfonksiyonu denir.

Eğer $u_i y$ (i=1,2) ifadesinde y(x) ' in ve türevlerinin sadece bir uçta (a veya b noktasında) değerleri verilirse , böyle sınır şartına *ayrılabilir sınır şartı* denir.

Matematik fiziğin çok sayıda kısmi türevli diferansiyel denklemlerinin çözümü (1.1)-(1.3) şeklinde problemin özdeğer ve özfonksiyonlarının bulunması problemine indirgenir. (1.1)-(1.3) probleminin en önemli hali (1.2) , (1.3) koşullarındaki $A_{i,j}(\lambda)$, $B_{i,j}(\lambda)$ katsayıları öyle tanımlanmalı ki (1.1)-(1.3) probleminin sayılabilir sayıda özdeğerleri olsun ve bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar L_2 [a,b] veya C[a,b] uzayında tam sistem oluştursun. Bizim bu çalışmamızda göz önüne alacağımız problem , bu özelliğe sahip olacaktır. Konunun iyi anlaşılması için aşağıdaki örneği verelim.

(1.1)-(1.3) de a=0 ; b=1 ; q(x)=0 ; $A_{11}(\lambda)=1$; $B_{21}(\lambda)=1$; $B_{22}(\lambda)= -K(\lambda)$; $A_{12}(\lambda)=A_{21}(\lambda)=B_{12}(\lambda)=B_{11}(\lambda)=A_{22}(\lambda)=0$ olsun.

Yani (1.1)-(1.3) problemi

$$-y'' = \lambda y \tag{1.4}$$

$$y(0) = 0 \tag{1.5}$$

$$y(1) = K(\lambda)y'(1) \tag{1.6}$$

şeklinde olsun. (1.4) 'ün genel çözümü ;

$$y(x,\lambda) = c_1 Sin\sqrt{\lambda}x + c_2 Cos\sqrt{\lambda}x$$

$$= c_1 Sin\omega x + c_2 Cos\omega x \qquad (\omega = \sqrt{\lambda})$$

dır. (1.5) den

$$y(0,\lambda) = c_2 = 0$$

$$y(x,\lambda) = c_1 Sin\omega x$$

$$y'(x,\lambda) = \omega c_1 Cos\omega x$$

$$y(1,\lambda) = c_1 Sin\omega$$

$$y'(1,\lambda) = \omega c_1 Cos\omega$$

(1.6) dan

$$c_1 Sin\omega = \omega c_1 Cos\omega K(\omega^2)$$

$$K(\omega^2) = \frac{tg\omega}{\omega}$$

$$y_1 = \frac{tg\omega}{\omega} \; ; \; y_2 = K(\omega^2)$$

elde edilir. Bu fonksiyonların grafiklerinin ortak noktalarının apsisleri , problemin özdeğerleridir. $K(\omega^2) = K(\lambda)$ fonksiyonuna bağlı olarak böyle noktaların sayısı sonlu , sonsuz olabilir ve hatta eğriler kesişmeyebilir. Yani problem

$$K(\lambda) = \begin{cases} \frac{tg\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} &, \lambda \neq 0 \\ 1 &, \lambda = 0 \end{cases}$$

şeklinde analitik fonksiyon ise ozaman bu denklem ω ' nın bütün değerlerinde sağlanacak. Dolayısıyle bütün kompleks sayılar (1.1)-(1.3) probleminin özdeğerleri olacak.

Eğer $K(\omega^2) = \frac{tg\omega}{\omega} - 1$ ise ozaman bu denklemin hiç bir çözümü olmayacak. Yani $K(\lambda)$ bu şekilde tanımlanırsa (1.1)-(1.3) probleminin hiç bir özdeğeri yoktur. Sonraki bölümlerde $K(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ olduğunda (1.1)-(1.3) probleminin sayılabilir sayıda özdeğerlere ve bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonların L_2 [0,1] de tam sistem oluşturduğunu göstereceğiz.

(1.1)-(1.3) şeklindeki problemleri ilk olarak göz önüne alan ve inceleyen G.D. Birkhoff[1] ve J.D.Tamarkin[10] dir. Bu tür problemin çeşitli hallerde özdeğer ve özfonksiyonlarının bulunmasına ait çok sayıda kitaplar ve makaleler yazılmıştır. Konunun incelenmesine günümüzde de devam edilmektedir. Buna ait geniş kapsamlı M.L.Rasulov 'un [8] monografisini ve son çalışmalardan [3] , [4] , [11] , [14] , [6] makalelerini gösterebiliriz.

Ele aldığımız problemin incelenmesinde esas olarak iki yöntem kullanılmaktadır. Bunlardan biri ; (1.1) denkleminin lineer bağımsız çözümlerinin $|\lambda|$ ' nın büyük değerlerinde asimptotik ifadesini bularak (1.2)-(1.3) sınır şartları yardımıyla özdeğerlerin sonsuz sayıda olduğunu ve bunlara karşılık gelen özfonksiyonların tam sistem oluşturduğunun gösterilmesidir. (Bu yöntem genel hallerde geçerli). İkinci yöntem ; (1.1)-(1.3) problemini genel bir uzayda operatör denkleme indirgemektir. (Bu yöntem özel hallerde geçerli.)

Eğer (1.1) probleminin yardımıyla oluşturulan bir operatör kendi kendine eşlenik ise ozaman böyle operatörün tersi tam sürekli operatör olur. Bu durumda (1.1)-(1.3) probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarının incelenmesine , kendi kendine eşlenik tam sürekli operatörler teorisi uygulanabilir. Bizim inceleyeceğimiz problemler , esas itibarıyla kendi kendine eşlenik ve tersi tam sürekli operatör olacaktır. Söz konusu (1.1)-(1.3) probleminin bazı basit hallerinde bile , bu probleme karşılık gelen operatör , kendi kendine eşlenik olmayabilir.

örnek 1:

(1.1)-(1.3) problemi aşağıdaki şekilde olsun.

$$-y'' = \lambda y \qquad 0 < x < 1 \tag{1.7}$$

$$y(0) = 0 \tag{1.8}$$

$$y'(1)-\lambda y'(0)=0. \tag{1.9}$$

H ile L_2 [0,1] ve $\mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$, kompleks sayılar kümesidir) Hilbert uzaylarının direkt toplamlarını gösterelim.

$$H = L_2[0,1] \oplus \mathbb{C}$$

H ' a ait iki $Y=\begin{pmatrix} y(x) \\ a \end{pmatrix}$ $ve\ Z=\begin{pmatrix} z(x) \\ b \end{pmatrix}$ $(y(x)\,,\ z(x)\ \in\ L_2[0,1]\ ;\ a\,,b\ \in\ \mathbb{C})$ elmanlarının skaler çarpımını ;

$$(Y,Z)=\int_0^1 y(x)\overline{z(x)}\ dx + a\overline{b}$$

şeklinde tanımlayalım. H ' ın Hilbert uzayı olduğu kolayca gösterilebilir. Gözönüne aldığımız probleme karşılık gelen L operatörünü oluşturalım. D(L) ile $y(x)\in C^2[0,1]$ ve $y(0)=0$ olmak üzere $Y=\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(0) \end{pmatrix}$ vektörlerini gösterelim. D(L) , H 'da yoğun bir lineer manifold oluşturur. Gerçektende $Z=\begin{pmatrix} z(x) \\ b \end{pmatrix}$, H ' dan alınmış ve D(L) ' ye dik (yani D(L) ' nin bütün elemanlarına dik) olan bir vektör olsun. Yani

$$(Z,Y)=0 \qquad Y\in D(L)$$

$$(Y,Z)=\int_0^1 y(x)\overline{z(x)}dx + y'(0)\overline{b}=0$$

$$y'(0)=0$$

olsun. Ozaman

$$(Y,Z)=\int_0^1 y(x)\overline{z(x)}dx=0$$

dır. $y'(0)=0$ şartını sağlayan y(x) ' ler L_2 [0,1] aralığında yoğun olduğundan son eşitliğe göre $z(x)=0$ olacak. Böylece

$$(Y,Z)=y'(0)\overline{b}=0$$

dır. $y'(0) \neq 0$ olsun. Ozaman b=0 olacaktır. Bununla Z ' nin D(L) ' ye dikliğinden Z=0 olduğunu gösterelim. Yani D(L) , H ' da yoğundur.

Şimdi tanım kümesi D(L) olmak üzere , H ' da

$$LY = L\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y''(x) \\ y'(1) \end{pmatrix} \ , \quad Y \in D(L)$$

operatörünü tanımlayalım. L sınırsız operatördür. L ' nin yardımıyla (1.7) , (1.8) , (1.9) problemi LY=λY , Y$\in$D(L) şeklinde yazılabilir. L simetrik operatör değildir. Gerçekten; Y , Z D(L) ' nin herhangi elemanları ise , o zaman

$$(LY,Z) - (Y,LZ) \neq 0$$

olabilir.

2.AYRILABİLİR VE BİR SINIR ŞARTINDA PARAMETRE BULUNAN STURM-LİOUVİLLE PROBLEMİ

(1.1)-(1.3) probleminin özel hali olan

$$l(y) = -y'' + qy = \lambda y \ , \quad a < x < b \tag{2.1}$$

$$Cos\alpha y(a) + Sin\alpha y'(a) = 0 \tag{2.2}$$

$$-(\beta_1 y(b) - \beta_2 y'(b)) = \lambda(\beta_1' y(b) - \beta_2' y(b)) \tag{2.3}$$

sınır değer problemini göz önüne alalım. Burada q(x) ; [a,b] aralığında reel değerli sürekli bir fonksiyon , $\alpha \in [0,\pi]$, $\beta_1, \beta_2, \beta_1', \beta_2'$; reel sayılar , λ ise kompleks parametredir. Ek olarak

$$\rho = \begin{vmatrix} \beta_1' & \beta_1 \\ \beta_2' & \beta_2 \end{vmatrix} > 0 \tag{2.4}$$

olduğunu kabul edelim. Bu problemi de, (1.7) , (1.8) , (1,9) probleminde olduğu gibi , Hilbert uzayında tanımlanmış bir operatörün sınır değer problemine indirgeyelim.

$H = L_2[a,b] \oplus \mathbb{C}$ ile $F_1(x) \in L_2[a,b]$, $F_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere $F = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2 \end{pmatrix}$ vektörler kümesini gösterelim. H ' a ait iki F(x) ve $G(x) = \begin{pmatrix} G_1(x) \\ G_2 \end{pmatrix}$ vektörlerinin iç çarpımını

$$(F,G)_H = (F,G) = \int_a^b F_1(x)\overline{G_1(x)}dx + \tfrac{1}{\rho}F_2\overline{G_2}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada ρ , (2.4) deki gibi tanımlanıyor. R ve R′ ile aşağıdaki fonksiyonelleri gösterelim

$$R(y) = \beta_1 y(b) - \beta_2 y'(b)$$

$$R'(y) = \beta_1' y(b) - \beta_2' y'(b) .$$

D(A) ile ;

$$D(A) = \{F \in H | F_1(x) , F_1'(x) ;\ [a , b] \text{ aralığında mutlak sürekli} , \\ l(F_1) \in L_2[a,b] ,\ Cos\alpha F_1(a) + Sin\alpha F_1'(a) = 0 \text{ ve } F_2 = R'(F_1)\ \} \qquad (2.5)$$

kümesini gösterelim. A , tanım kümesi D(A) ve

$$AF = \begin{pmatrix} l(F_1) \\ -R(F_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_1''(x) + q(x)F_1(x) \\ -(\beta_1 F_1(b) - \beta_2 F_1'(b)) \end{pmatrix} ,\ F \in D(A)$$

ifadesiyle tanımlanan bir operatör olsun. Böyle tanımlanmış A operatörü , H uzayında yoğun bir alt kümede tanımlanmış kendi kendine eşlenik operatördür. Tanım kümesi D(A) ' nın , H ' da yoğunluğu , giriş bölümünde ispatladığımız gibi gösterilebilir.

A ' nın simetrik olduğunu gösterelim ; F , G ∈ D(A) olsun.

$$(AF,G)_H = \left(\begin{pmatrix} -F_1'' + q(x)F_1 \\ -R(F_1) \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} G_1(x) \\ R'(G_1) \end{pmatrix} \right)_H$$

$$= \left(\begin{pmatrix} -F_1'' + q(x)F_1 \\ -R(F_1) \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} G_1(x) \\ \beta_1' G_1(b) - \beta_2' G_1'(b) \end{pmatrix} \right)_H$$

$$=\int_a^b(-F_1''+q(x)F_1)\overline{G_1}dx-\tfrac{1}{\rho}R(F_1)\overline{(\beta_1'G_1(b)-\beta_2'G_1'(b))}$$

$$=-F_1'\overline{G_1}\Big|_a^b+F_1\overline{G_1'}\Big|_a^b+\int_a^b\left(-\overline{G_1''}+q(x)\overline{G_1}\right)F_1dx-\tfrac{1}{\rho}R(F_1)\overline{(\beta_1'G_1(b)-\beta_2'G_1'(b))}$$

$$=-F_1'(b)\overline{G_1(b)}+F_1'(a)\overline{G_1(a)}+F_1(b)\overline{G_1'(b)}-F_1(a)\overline{G_1'(a)}-\int_a^b F_1\overline{G_1''}dx$$

$$-(\beta_1F_1(b)-\beta_2F_1'(b))\overline{(\beta_1'G_1(b)-\beta_2'G_1'(b))}$$

$$=\left(\begin{pmatrix}F_1\\ R'(F_1)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-G_1''+q(x)G_1\\ -R(G_1)\end{pmatrix}\right)_H=(F,AG)\qquad\Rightarrow$$

(AF,G)=(F,AG)

A ' nın simetrikliği ispatlandı. Kendi kendine eşlenik olduğunu sonra göstereceğiz.

A ' nın rezolventini bulalım. A ' nın rezolventini oluşturmak için (2.1) denkleminin

$$\Phi_\lambda(a)=Sin\alpha\ ,\quad \Phi_\lambda'(a)=-Cos\alpha$$

ve

$$\chi_\lambda(b)=\beta_2'\lambda+\beta_2\ ,\quad \chi_\lambda'(b)=\beta_1'\lambda+\beta_1$$

başlangıç şartlarını sağlayan $\Phi_\lambda(x)$ ve $\chi_\lambda(x)$ çözümlerini gözönüne alalım. Son ifadeleri sırasıyla

$$\begin{pmatrix}\Phi_\lambda(a)\\ \Phi_\lambda'(a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Sin\alpha\\ -Cos\alpha\end{pmatrix}\qquad(2.6)$$

ve

$$\begin{pmatrix}\chi_\lambda(b)\\ \chi_\lambda'(b)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_2'\lambda+\beta_2\\ \beta_1'\lambda+\beta_1\end{pmatrix}\qquad(2.7)$$

şeklinde yazalım. Burada $\lambda\in\mathbb{C}$ keyfi sayıdır. $W(\lambda)$ ile bu çözümlerin Wronskiyan determinantını gösterelim ;

$$W(\lambda)=W(\Phi_\lambda,\chi_\lambda)=\Phi_\lambda(x)\chi_\lambda'(x)-\Phi_\lambda'(x)\chi_\lambda(x)\,.\qquad(2.8)$$

(1.1) denkleminde birinci türevin katsayısı sıfır olduğundan W, x ' den bağımsızdır. Buna göre (2.8) eşitliğinde x=b yazalım.

$$W(\lambda) = \Phi_\lambda(b)\chi'_\lambda(b) - \Phi'_\lambda(b)\chi_\lambda(b)$$

$$= \Phi_\lambda(b)(\beta'_1\lambda + \beta_1) - \Phi'_\lambda(b)(\beta'_2\lambda + \beta_2)$$

$$= (\beta'_1\Phi_\lambda(b) - \beta'_2\Phi'_\lambda(b))\lambda + \beta_1\Phi_\lambda(b) - \beta_2\Phi'_\lambda(b)$$

$$= \lambda R'(\Phi_\lambda) + R(\Phi_\lambda) \tag{2.9}$$

(2.7) ' ye göre

$$R'(\chi_\lambda) = \beta'_1\chi_\lambda(b,\lambda) - \beta'_2\chi'_\lambda(b,\lambda)$$

$$= \beta'_1(\beta'_2\lambda + \beta_2) - \beta'_2(\beta'_1\lambda + \beta_1)$$

$$= \beta'_1\beta_2 - \beta'_2\beta_1$$

$$R'(\chi_\lambda) = \rho \tag{2.10}$$

dır. (2.7) ifadesinde $\lambda \in \mathbb{C}$ keyfi sayı olduğunda $\chi_\lambda(x)$ fonksiyonu (2.3) sınır şartlarını sağlar. Burada $W(\lambda)$ Sturm-Liouville probleminde [12] ortaya çıkan fonksiyona benzer olduğundan $W(\lambda)$ ' nın sıfırları reel ve basittir. Bunları $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...$ ile gösterelim. Ozaman A operatörünün λ_n özdeğerine karşılık gelen özfonsiyonu

$$\Phi_n = \begin{pmatrix} \Phi_{\lambda_n}(x) \\ R'(\Phi_{\lambda_n}) \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

şeklinde olacak. A simetrik operatör olduğundan dolayı

$$(\Phi_n, \Phi_m) = 0 \qquad n \neq m \tag{2.12}$$

olacak. (2.6) ve (2.7) başlangıç koşullarından [11] $\Phi_\lambda(x)$ *ve* $\chi_\lambda(x)$ fonksiyonları x ' in [a,b] aralığından alınmış her bir değerinde λ ' nın tam fonksiyonlarıdır. Bundan dolayı $W(\lambda)$ tam fonksiyondur.

$$\Psi_n = \frac{\Phi_n}{||\Phi_n||} = \begin{pmatrix} \Psi_n(x) \\ R'(\Psi_n) \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

ve $\chi_n \neq 0$ olduğunda

$$\chi_{\lambda_n}(x) = K_n \Phi_{\lambda_n}(x) \tag{2.14}$$

olsun. (2.13) ' de Ψ_n , A operatörünün normalize edilmiş öz fonksiyonudur. Green formülüne göre

$$\int_a^b \Phi_\lambda(x)\Phi_{\lambda_n}(x)dx = \frac{W_b(\Phi_{\lambda_n}, \Phi_\lambda)}{\lambda_n - \lambda} \tag{2.15}$$

dır. (2.14),(2.7) ve (2.9) formüllerini kullanarak

$$W_b(\Phi_{\lambda_n}, \Phi_\lambda) = -K_n^{-1}[\lambda_n R'(\Phi_\lambda) + R(\Phi_\lambda)]$$

$$= -K_n^{-1}[W(\lambda) + (\lambda_n - \lambda)R'(\Phi_\lambda)] \tag{2.16}$$

eşitliğini elde ederiz. (2.16) eşitliğini göz önüne alarak (2.15) ' de $\lambda \to \lambda_n$ olmak üzere limite geçelim.

$$\lim_{\lambda\to\lambda_n} \frac{W_b(\Phi_{\lambda_n}, \Phi_\lambda)}{\lambda_n - \lambda} = \lim_{\lambda\to\lambda_n} \left\{-K_n^{-1}\left[\frac{W(\lambda)}{\lambda_n - \lambda} + R'(\Phi_\lambda)\right]\right\}$$

$$= -K_n^{-1}\left[\lim_{\lambda\to\lambda_n} \frac{W(\lambda) - W(\lambda_n)}{\lambda_n - \lambda} + \lim_{\lambda\to\lambda_n} R'(\Phi_\lambda)\right]$$

$$= K_n^{-1} W'(\lambda_n) - K_n^{-1} R'(\Phi_{\lambda_n})$$

$$\lim_{\lambda\to\lambda_n} \int_a^b \Phi_\lambda(x)\Phi_{\lambda_n}(x)dx = \int_a^b \Phi_{\lambda_n}^2(x)dx$$

olur. Böylece

$$\int_a^b (\Phi_{\lambda_n})^2 dx = -K_n^{-1}[-W'(\lambda_n) + R'(\Phi_{\lambda_n})] \tag{2.17}$$

dır. (2.14) ve (2.10) ifadelerinden $\lambda = \lambda_n$ olduğunda

$$R'(\Phi_{\lambda_n}) = \frac{\rho}{K_n} \tag{2.18}$$

yazabiliriz. (2.17) ' de K_n ' nin (2.18) ' deki değerini yazalım. Ozaman ;

$$\|\Phi_n\|^2 = \int_a^b \Phi^2_{\lambda_n}(x)dx + \tfrac{1}{\rho}[R'(\Phi_{\lambda_n})]^2$$

$$= -\frac{1}{K_n}[-W'(\lambda_n) + R'(\Phi_{\lambda_n})] + \frac{1}{\rho}[R'(\Phi_{\lambda_n})]^2$$

$$= -\frac{R'(\Phi_{\lambda_n})}{\rho}[-W'(\lambda_n) + R'(\Phi_{\lambda_n})] + \frac{1}{\rho}[R'(\Phi_{\lambda_n})]^2$$

$$= \frac{1}{\rho}R'(\Phi_{\lambda_n})W'(\lambda_n)$$

dır. Böylece

$$\|\Phi_n\|^2 = \frac{1}{\rho}R'(\Phi_{\lambda_n})W'(\lambda_n) \tag{2.19}$$

ifadesi elde edilir.

$$(\lambda - A)\Phi = F \tag{2.20}$$

denklemini , F , H ' nın keyfi elemanı olmak üzere , çözelim. Eğer $(\lambda - A)$ operatörünün rezolvantını $R(\lambda; A)$ ile gösterirsek (2.20) denkleminin çözümü

$$\Phi = R(\lambda; A)F$$

şeklinde olacaktır. $R(\lambda; A)F$ ' nın aşağıdaki formda olduğu kolayca gözükmektedir.

$$\Phi = R(\lambda; A)F = \begin{pmatrix} (\tilde{G}_{x,\lambda}, F) \\ R'\left[(\tilde{G}_{x,\lambda}, F)\right] \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

dır. Burada

$$\tilde{G}_{x,\lambda} = \begin{pmatrix} G(x, ., \lambda) \\ R'(G(x, ., \lambda)) \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

ve

$$G(x,y,\lambda)=\begin{cases}\frac{\chi_\lambda(x)\Phi_\lambda(y)}{W(\lambda)} & , \; a\le y\le x\le b\\ \frac{\Phi_\lambda(x)\chi_\lambda(y)}{W(\lambda)} & , \; a\le x\le y\le b\end{cases} \tag{2.23}$$

dır. (2.21) , (2.22) ve (2.23) formüllerini kullanarak şunları yazabiliriz.

Sabit tutulmuş keyfi $x\in[a,b]$ için $G(x\,,\,.\,,\,\lambda)$; (1.2),(1.3) şartlarını sağlar. (2.24)

λ , $W(\lambda)$ ' nın sıfırları değilse $R(\lambda,A)F\in D(A)$ dır. (2.25)

$F\in D(A)$ ise $R(\lambda,A)(\lambda-A)F=F$ (2.26)

ve

$F\in H$ ve $Im\lambda\neq 0$ *ise* $||R(\lambda,A)F||\le \frac{1}{|Im\lambda|}||F||$ dır. (2.27)

A ' nın kendi kendine eşlenik olması $\lambda=\pm i$ olduğunda (2.20) , (2.21) ve (2.25) ifadelerinden elde edilir.

$R(\lambda,A)F$ fonksiyonunun λ ' ya göre meromorf olduğunu kullanarak (2.14) , (2.18) ve (2.26) ifadelerinden

$$C_n(F)=(F,\Psi_n) \tag{2.28}$$

olmak üzere

$$\underset{\lambda=\lambda_n}{res}\; R(\lambda;A)F=C_n(F)\Psi_n \tag{2.29}$$

elde edilir. Benzer şakilde

$$\underset{\lambda=\lambda_n}{res}\;(R(\lambda;A)F,F)=|C_n(F)|^2 \tag{2.30}$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki açılım teoremini ispatlayabiliriz.

Teorem :

i) $F\in H$ olsun. Ozaman

$$||F||^2=\sum_{n=0}^{\infty}|C_n(F)|^2\,. \tag{2.31}$$

ii) $F \in D(A)$ olduğunda

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} (F, \Psi_n)\Psi_n \tag{2.32}$$

serisi birinci bileşenine göre [a,b] ' de mutlak ve düzgün yakınsak , ikinci bileşenine göre ise mutlak yakınsaktır.

(2.32) formülünün birinci bileşeni diferansiyele sahip , türev serisi [a,b] ' de $F_1'(x)$ ' e mutlak ve düzgün yakınsaktır. Teoremin her iki kısmı , birdiğerinin ispatı için kullanılabilir. $F \in D(A)$ olduğunda i) ' nin ispatı (2.26) ' dan yararlanarak [12] ' da olduğu gibi ispatlanabilir. ii) ' nin ispatı ise Parseval eşitliği kullanılarak yine [12] ' daki yöntemin yardımıyla elde edilir. (2.32) deki ikinci bileşenin mutlak yakınsaklığı ise keyfi $F \in H$ için gerçekten doğrudur. Aşağıdaki sonuç Walter ' in [14][sayfa 305, teorem 2] sonucuna karşılıktır .

Sonuç:

(2.13) deki $\Psi_n(x)$ özfonksiyonları aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(i) [a,b] aralığında ortaquadratik anlamda yakınsaklık koşuluyla ,

$$\frac{1}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} R'(\Psi_n)\Psi_n(x) = 0 \text{ dır.} \tag{2.33}$$

(ii)

$$\frac{1}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} (R'(\Psi_n))^2 = 1 \quad . \tag{2.34}$$

(iii) Keyfi $F_1(x) \in L_2[a,b]$ için [a,b] aralığında ortaquadratik anlamda yakınsaklık kullanılarak

$$F_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b F_1 \Psi_n dx \right) \Psi_n(x) \quad . \tag{2.35}$$

(iv) Her bir $F_1(x) \in L_2[a,b]$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b F_1 \Psi_n dx \right) R'(\Psi_n) = 0 \text{ dır.} \tag{2.36}$$

İspat:

A operatörünün özvektörlerinin tamlığı yukardaki teoremin -i) şıkkından görülür. $H = L_2[a,b] \oplus \mathbb{C}$ Hilbert uzayına ait herhangi F vektörü aşağıdaki açılışa sahiptir.

$$F = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b F_1 \Psi_n dx + \frac{1}{\rho} F_2 R'(\Psi_n) \right) \Psi_n(x) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b F_1 \Psi_n dx + \frac{1}{\rho} F_2 R'(\Psi_n) \right) R'(\Psi_n) \end{pmatrix} . \tag{2.37}$$

Burada seriler H normu anlamında yakınsaktırlar. Eğer F elemanını , $F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ şeklinde seçersek (i) ve (ii) özellikleri (2.37) serisinin H normuna göre yakınsaklığından elde edilir. Eğer F ' i , $F = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ 0 \end{pmatrix}$ şeklinde alırsak ozaman (iii) ve (iv) özellikleri yine (2.37) serisinin H normuna yakınsaklığından elde edilir.

3. ÖZDEĞERLER VE ÖZFONSİYONLARIN ASİMPTOTİK İFADELERİ.

Yukardaki teoremin -i) şıkkından A operatörünün spektrumu , w(λ) fonksiyonunun sıfırlarından ibaret olduğu aşikardır. $\Phi_\lambda(x)$ ' in Titchmarsh[12] ' ın asimptotik formülünde x=b yazarsak ve bunu (2.9) ' da yerine koyarsak $|\lambda| \to \infty$ giderken w(λ) için çeşitli hallerde aşağıdaki formüller elde edilir.

1.hal: $\beta_2' \neq 0$, $\alpha \neq 0$ iken

$$w(\lambda) = \beta_2' s^3 Sin\, s(b-a) Sin\alpha + O\left(|s|^2 \exp |t|(b-a) \right). \tag{3.1}$$

2.hal: $\beta_2' \neq 0$, $\alpha = 0$ iken

$$w(\lambda) = \beta_2' s^2 Cos\, s(b-a) + O(|s| \exp |t|(b-a)). \tag{3.2}$$

3.hal: $\beta_2' = 0$, $\alpha \neq 0$ iken

$$w(\lambda) = \beta_1' s^2 Cos\, s(b-a) Sin\alpha + O(|s| \exp |t|(b-a)). \tag{3.3}$$

4.hal: $\beta_2' = 0$, $\alpha = 0$ iken

$$w(\lambda) = -\beta_1' s Sin\, s(b-a) + O(\exp|t|(b-a)). \qquad (3.4)$$

Burada s ve t

$$s = \sqrt{\lambda} = \sigma + it \qquad (3.5)$$

şeklinde tanımlanıyor. Bu formüllerde s=it (t>0) yazarsak λ ' nın yeterince büyük negatif değerlerinde $w(\lambda) \neq 0$ elde edilir. Bu durumda A ' nın spektrumu bütün hallerde alttan sınırlıdır. Rouche[13] teoremine göre yeterince büyük kapalı eğrinin içinde w(λ) ' nın bütün (3.1)-(3.4) hallerinde aynı sayıda sıfırlara sahip olduğu elde edilir.

Eğer w(λ) ' nın sıfırları $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ....$ ise ozaman n ' nin yeterince büyük değerlerinde

$$\frac{\left(n-\frac{3}{2}\right)\pi}{b-a} < s_n < \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{b-a} \qquad \text{(1.hal)} \qquad (3.6)$$

$$\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{b-a} < s_n < \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{b-a} \qquad \text{(4.hal)} \qquad (3.7)$$

ve

$$\frac{(n-1)\pi}{b-a} < s_n < \frac{n\pi}{b-a} \,. \qquad \text{(2. ve 3. haller)} \qquad (3.8)$$

dır. Yukarıdaki formüllerde

$$s_n = \frac{(n-1)\pi}{b-a} + \delta_n \qquad \text{(1.hal)} \qquad (3.9)$$

$$s_n = \frac{n\pi}{b-a} + \delta_n \qquad \text{(4.hal)} \qquad (3.10)$$

ve

$$s_n = \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{b-a} + \delta_n \qquad \text{(2. ve 3. haller)} \qquad (3.11)$$

yazarsak $\delta_n = O(n^{-1})$ olur.

Regüler Sturm-Liouville probleminde olduğu gibi Titchmarsh[12] yöntemini kullanırsak özdeğerlerin sonraki yaklaşımını elde edebiliriz. 1. hali gözönüne alalım. Titchmarsh[12] ' da olduğu gibi $\Phi_\lambda(x)$ için integral denklemi ve (3.1) deki s^2 ' nin diğer bütün terimlerini kullanırsak ve (3.9) ' u (3.1) ' de yerine yazarsak ;

$$Sin\,\delta_n(b-a)=\frac{Cos\,\delta_n(b-a)}{s_n}\left\{-Cot\alpha-\frac{\beta_1'}{\beta_2'}+\frac{1}{Sin\alpha}\int_a^b Cos\,s_n(y-a)q(y)\Phi_{\lambda_n}(y)dy\right\}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{3.12}$$

elde ederiz.

$\Phi_{\lambda_n}(y)$ fonksiyonu için Titchmarsh[12][sayfa 10,denklem(1.7.3)] kullanarak aşağıdaki formülü yazabiliriz.

$$\frac{1}{Sin\alpha}\int_a^b Cos\,s_n(y-a)q(y)\Phi_{\lambda_n}(y)dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^b q(y)dy+\frac{1}{2}\int_a^b Cos2\,s_n(y-a)q(y)dy+O(n^{-1}). \tag{3.13}$$

Riamann-Lebesque[15] teoremine göre q(x) fonksiyonu [a,b] de sınırlı varyasyona sahip ise ozaman (3.13) ' ün sağ tarafindaki ikinci integral $O(n^{-1})$ ' e eşit olacaktır. (3.12) ve (3.13) ifadelerinden

$$\delta_n=\frac{1}{(n-1)\pi}\left\{-Cot\alpha-\frac{\beta_1'}{\beta_2'}+\frac{1}{2}\int_a^b q(y)dy\right\}+\varepsilon_n \tag{3.14$_1$}$$

elde edilir. Burada $\varepsilon_n=O(n^{-2})$ dir.

(3.14) ile tanımlanmış ε_n ' nin değerini (3.12) ' de yerine yazarsak gözönüne aldığımız 1.hal gösterilmiş olur. (2.13) normalize edilmiş özvektörünün , birinci bileşeni için $x\in[a,b]$ ' ye göre düzgün olarak

$$\Psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{b-a}}\,Cos\left(\frac{(n-1)\pi(x-a)}{b-a}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.15$_1$}$$

asimptotik davranışını elde ediyoruz. Bu ifadenin elde edilmesinde (3.9) , (3.12) ifadeleri ve $\Phi_{\lambda_n}(x)$ için $(R'(\Phi_{\lambda_n})=O(n^{-1}))$ integral denklem alınarak $\Phi_{\lambda_n}(x)$ için asimptotik formül kullanılarak $||\Phi_n||^2$ ' nin tahmini yapılmıştır. Diğer haller için benzer formüller aşağıdaki gibidir.

2.halde;

$$s_n=\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{b-a}+\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}\left\{\frac{\beta_1'}{\beta_2'}-\frac{1}{2}\int_a^b q(y)dy\right\}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{3.14$_2$}$$

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}}\, Sin\left(\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi(x-a)}{b-a}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.15$_2$}$$

3.halde;

$$s_n = \frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}{b-a} + \frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}\left\{-Cot\alpha + \frac{\beta_2}{\beta_1'} + \frac{1}{2}\int_a^b q(y)dy\right\} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{3.14$_3$}$$

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}}\, Cos\left(\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi(x-a)}{b-a}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.15$_3$}$$

4.halde;

$$s_n = \frac{n\pi}{b-a} + \frac{1}{n\pi}\left\{\frac{\beta_2}{\beta_1'} + \frac{1}{2}\int_a^b q(y)dy\right\} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{3.14$_4$}$$

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}}\, Sin\left(\frac{n\pi(x-a)}{b-a}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.15$_4$}$$

Örnek 2:

(2.1) , (2.2) , (2.3) probleminde özel olarak a=0 , b=1 , q(x)=0 , $\alpha = 0$, $\beta_1 = \beta_2' = 0$ olsun. Bu durumda (2.1) , (2.2) , (2.3) problemimiz

$$-y'' = \lambda y \ ; \quad 0 < x < 1 \tag{3.16}$$

$$y(0) = 0 \tag{3.17}$$

$$y'(1) = \lambda y(1) \tag{3.18}$$

şekline gelir. Bu halde (3.16) , (3.17) , (3.18) problemine karşılık gelen A operatörünün özdeğerleri $Cos\sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda}\, Sin\sqrt{\lambda}$ denkleminin $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots..$ kökleri,normalize edilmiş özfonksiyonlar ise

$$\Psi_n(x) = \left(\frac{Sin\sqrt{\lambda_n}\, x}{Sin\sqrt{\lambda_n}}\right)$$

şeklinde olacak. $F=\begin{pmatrix} f(x) \\ f_1 \end{pmatrix} \in H$ keyfi elemanı için (2.32) açılım formülü

$$F=\begin{pmatrix} f(x) \\ f_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n Sin\sqrt{\lambda_n}\,x \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n Sin\sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

şeklinde olur. Burada

$$\alpha_n=\frac{\int_0^1 f(x)Sin\sqrt{\lambda_n}\,xdx+f_1 Sin\sqrt{\lambda_n}}{\frac{\left(1+Sin^2\sqrt{\lambda_n}\right)}{2}}$$

dır. Bu formül ilk kez R.E Langer[7] ' in çalışmasında elde edilmiştir.(Bak[5]).

Örnek3:

Örnek2 ' yi ısı denkleminin başlangıç sınır değer problemine uygulayalım.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ,\quad 0<x<1\ ,\quad t>0 \tag{3.19}$$

$$u(0,t)=0 \tag{3.20}$$

$$u_x(1,t)=-u_t(1,t) \tag{3.21}$$

$$u(x,0)=\varphi(x) \tag{3.22}$$

olsun. (3.19)-(3.22) problemini Fourier yöntemi ile çözmeye çalışalım.

$$u(x,t)=X(x)T(t)\neq 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=X(x)T'(t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t).$$

(3.19) ' a göre ;

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda$$

$$X''(x) = -\lambda X(x) \tag{3.23}$$

$$T'(t) = -\lambda T(t) \tag{3.24}$$

olur. (3.20) ' den

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \ , \ X(0) = 0 \tag{3.25}$$

ve (3.21) ' den

$$u_x(1,t) = X'(1)T(t) = -X(1)T'(t) = X(1)\lambda T$$

$$X'(1) = \lambda X(1) \tag{3.26}$$

dır. Elde ettiğimiz bu (3.23) , (3.25) ve (3.26) formları , örnek2 ' deki (3.16) , (3.17) , (3.18) problemi ile aynıdır. Bu (3.16)-(3.18) probleminin özfonksiyonlarının , $L_2[0,1]\oplus C$ uzayında tam ortonormal sistem oluşturduğu bellidir. (3.24) ' den

$$T_n'(t) = -\lambda_n T_n(t)$$

ve buradan

$$T_n(t) = c_n \exp(-\lambda_n t)$$

buluruz. Burada c_n ' ler keyfi bilinmeyen sabitlerdir. (3.16)-(3.18) probleminin özfonsiyonlarının $L_2[0,1]\oplus C$ uzayında tam ortonormal sistem oluşturduğundan dolayı

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(-\lambda_n t)\, Sin\sqrt{\lambda_n}\, x$$

ve

$$u(1,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(-\lambda_n t) Sin\sqrt{\lambda_n}$$

yazabiliriz. Son iki ifadede (3.22) ' yi gözönüne alalım ve t=0 kabul edelim.

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n Sin\sqrt{\lambda_n}\,x=\varphi(x)$$

ve

$$u(1,0)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n Sin\sqrt{\lambda_n}=\varphi(1)$$

ifadeleri elde edilir. Diğer yandan , örnek2 ' deki α_n eşitliğini ele alarak

$$c_n=\frac{\int_0^1 \varphi(x)Sin\sqrt{\lambda_n}\,xdx+\varphi(1)Sin\sqrt{\lambda_n}}{\frac{\left(1+Sin^2\sqrt{\lambda_n}\right)}{2}} \tag{3.27}$$

eşitliğini yazabiliriz. Böylece biz gözönüne aldığımız (3.19)-(3.22) probleminin çözümünün

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(-\lambda_n t) Sin\sqrt{\lambda_n}\,x$$

şeklinde olduğunu elde ettik. Burada c_n sabitleri , (3.27) formülü ile veriliyor.

Sonuç olarak ; Açılım teoremini , çeşitli sınır değer problemlerine bu şekilde uygulamak mümkündür.

KAYNAKLAR

1-Birkhoff, G.D. , 1908. Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations . Trans. Amer. Math. Soc. 9 : 373-395.

2-Birkhoff,G.D. , 1908. On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations. Trans. Amer. Math. Soc.9 :373-395.

3-Cohen,D.S. , 1966. An integral transform associated with boundary conditions containing an eigenvalue parameter.SIAM J.Appl.Math.14 :1164-1175.

4-Evans,W.D. , 1970. A non selfadjoint differential operatör in L^2 [a,b]. Quart.J.Math.Oxford Ser.21:371-383.

5-Friedman,B. , 1956. Principles and techniques of applied mathematics.Wiley , New York.

6-Fulton,C.T. , 1976. Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions. Department of Mathematics , The Pennsylvania State University: 293-307.

7-Langer,R.E. , 1932. A problem in diffusion or in the flow of heat for a solid in contact with a fluid. Tohoku Math.J.35:360-375.

8-Rasulov,M.L. , 1964. Kontur integral yöntemi (rusça). Moskova.

9-Tamarkin,J.D. , 1928. Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansions of an arbitrary function in series of fundamental functions.Math.Z.27:1-54.

10-Tamarkin , J.D. , 1912. Sur quelques points de la theorie des equations differentielles. Rend. di Palermo 34 :345-382.

11-Schneider,A. , 1968. Zur Einordnung selbstadjungierter Rand-eigenwertprobleme bei gewöhnlichen differentialgleichungen in die theorie S-hermitescher Rand-eigenwertprobleme. Math.Ann.178:277-294.

12-Titchmarsh,E.C. , 1962. Eigenfunction expansions associated with second order differential equations 1(2nd edn).Oxford Univ.Press , London.

13-Titchmarsh,E.C. , 1939. Theory of functions. Oxford Univ.Press,London.

14-Walter,J. , 1973. Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions. Math.Z.133:301-302.

15-Zygmund,A. , 1959. Trigonometrik series1(2nd edn).Pergaman , London.

ÖZGEÇMİŞ

1968 yılında Niğde ' de doğdu. İlk , orta ve lise eğitimini burada tamamladı. 1986-87 öğretim yılında Yıldız Üniversitesi , Fen Edebiyat Fakültesi , Matematik Bölümü ' ne girdi . Bu bölümü 1990-91 öğretim yılında bitirdi . Aynı yıl Y.Ü. Matematik Mühendisliği Bölümü ' nde Araştırma Görevlisi oldu . Halen bu görevini sürdürmektedir .