57525

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜÇ BOYUTLU YARI UZAYDA OPERATÖR KATSAYILI SCHRÖDİNDER DENKLEMİNİN SPEKTRUMUNUN ASİMTOTİK DAVRANIŞI

Mat.Yük. Müh. Fatih TAŞÇI

F.B.E. Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan

Doktora Tezi

Tez Savunma Tarihi : 20 Haziran 1996

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Abdullah YILDIZ (Y.T.Ü.)

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mehmet CAN (İ.T.Ü.)
Prof. Dr. Metin ARIK (B.Ü.)

İSTANBUL, Haziran, 1996

TEŞEKKÜR

Yüksek öğretimim boyunca bana daima yardımcı olan, hiçbir zaman ilgi ve yardımlarını esirgemeyen, tezimi yöneten hocam Sayın Doç.Dr. Abdullah YILDIZ' a, çalışmalarım sırasında büyük bir özveri ile bana daima yardımcı ve destek olan hocalarım Sayın Prof.Dr. Mehmet BAYRAMOĞLU ve Sayın Prof.Dr. Nizamettin ŞİRİNOĞLU'na teşekkür ederim.

Ayrıca sağladığı imkanlardan dolayı bölüm başkanımız Sayın Prof. Tahir ŞİŞMAN'ada teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun. $L_2(E_3^+;H)$ ile E_3^+-Euclidean uzayının üst yarı bölgesinde tanımlanmış, değerleri H Hilbert uzayında olan ve normunun karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayını gösterelim. $H_1 = L_2(E_3^+;H)$ uzayına ait keyfi $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları için

$$(f,g)_{H_1} = \int_{E_3^+} (f(x), g(x))_H dx$$

ifadesi bir skaler çarpım tanımlar. H_1 uzayı bu skaler çarpıma göre ayrılabilir bir Hilbert uzayı oluşturur.

$L_2(E_3^+;H)$ uzayında operatör katsayılı

$$-\Delta u + Q(x)u \, , x \in E_3^+$$

diferansiyel ifadesi ve

$$u(x_1, x_2, x_3)\big|_{x_3=0} = 0$$

sınır şartı ile bir L_0 simetrik operatörü oluşturulmuştur. Burada $Q(x)$, $\forall x \in E_3^+$ için kendine eş, alttan sınırlı ve tersi tam sürekli olan bir operatör, $-\Delta$ ise üç boyutlu Laplace operatörüdür. L_0 operatörünün kapanışını L ile gösterelim. Bazı şartlar altında L operatörü kendine eş olur.

Böylece elde edilen L operatörünün spektrumunun saf-ayrık olduğu ispatlanmış ve L operatörünün $\lambda > 0$ sayısını aşmayan özdeğerler sayısı olan $N(\lambda)$ fonksiyonu için

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{6\pi^2} \sum_i \int_{\alpha_i(x) \le \lambda} (\lambda - \alpha_i(x))^{\frac{3}{2}} dx \, , \quad \lambda \to \infty$$

asimptotik formülü elde edilmiştir. Burada $\alpha_1(x) \le \alpha_2(x) \le \ldots \alpha_n(x) \le \ldots$ fonksiyonları H Hilbert uzayında dönüşüm yapan $Q(x)$ operatörünün özdeğerleridir.

SUMMARY

Let H be a separable Hilbert space. $L_2(E_3^+;H)$ is the space of functions which consists of all functions defined in E_3^+ that satisfy square-integrability condition, and their values are in H. Where E_3^+ is the upper half part of Euclidean space.

The following expression

$$(f,g)_{H_1} = \int_{E_3^+} (f(x), g(x))_H dx$$

defines a scalar product for arbitrary functions f(x) and g(x) belonging to $H_1 = L_2(E_3^+;H)$. The space H_1 forms a separable Hilbert space with respect to the scalar product given above.

A symmetric operator L_0 is constructed by the differential expression $-\Delta u + Q(x)u$ with operator coefficient and the boundary condition $u(x_1,x_2,x_3)|_{x_3=0} = 0$ in $L_2(E_3^+;H)$. Where Q(x) is a self-Adjoint and positive definite operator for every $x \in E_3^+$. It is also assumed that $Q^{-1}(x)$ is a completely continuous operator for every $x \in E_3^+$. $-\Delta$ is a three-dimensional Laplace operator. We denote by L, the closure of the operator L_0. The operator L becomes a self-adjoint operator under some conditions.

It is shown that the spectrum of the self-Adjoint operator consists of eigenvalues of L, that is, purely discrete and asymptotic behaviour of the function $N(\lambda)$ is found as

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{6\pi^2} \sum_i \int_{\alpha_i(x)\le\lambda} (\lambda - \alpha_i(x))^{\frac{3}{2}} dx, \quad \lambda \to \infty$$

Where $N(\lambda)$ is the number of eigenvalues of L not exceeding λ and $\alpha_1(x) \le \alpha_2(x) \le \ldots \alpha_n(x) \le \ldots$ are the eigenvalues of the operator Q(x) defined in H.

1. Giriş

E herhangi bir lineer uzay ve A, E nin D(A) lineer alt manifoldunda tanımlanmış lineer operatör olsun. λ kompleks sayısı için $Au = \lambda u$ denklemini sağlayan $u \neq 0$ vektörü varsa, λ sayısına özdeğer, u ya ise λ ya karşılık gelen özvektör denir. E belirli bir uzay, A ise belirli bir operatör olduğu zaman, A nın özdeğer ve özvektörlerinin bulunması, operatörlerin spektral teorisinin temel konusudur.

Bazı basit diferansiyel ifadelerle oluşturulan operatörlerin özdeğerleri kesin olarak bulunabilir. Diferansiyel ifade biraz karmaşık ise özdeğerler kesin olarak belirlenemez.

Örneğin; $E = L_2(0,\pi)$ Hilbert uzayı, A ise bu uzayın D(A) alt kümesinde;

$$Au = -u'' , \quad 0 < x < \pi$$

ifadesi ile tanımlanmış operatör olsun. D(A) nın;

$$u(x), u'(x), u''(x) , \quad 0 < x < \pi \quad \text{aralığında sürekli ve}$$
$$u(o) = u(\pi) = 0$$

koşullarını sağlayan u(x) fonksiyonlarından ibaret olduğunu varsayalım; bu durumda $Au = \lambda u$ özdeğer problemi;

$$-u'' = \lambda u , \quad 0 < x < \pi$$
$$u(0) = u(\pi) = 0$$

şeklinde yazılabilir. Kolayca görüldüğü gibi, A nın özdeğerleri $\lambda_n = n^2$, bunlara karşılık gelen özvektörler ise; $\sin nx$ lerdir $(n = 1, 2, \dots)$.

q(x) keyfi sürekli reel fonksiyon ise;

$$-u'' + q(x)u = \lambda u , \quad 0 < x < \pi \tag{1}$$
$$u(0) = u(\pi) = 0 \tag{2}$$

probleminin özdeğer ve özvektörleri kesin olarak yazılamaz. Bu problemlerde özdeğer ve özvektörlerin $n \to \infty$ için asimptotik davranışının bulunması ayrıca büyük önem taşımaktadır. (1)-(2) probleminin özdeğer ve özvektörlerinin bulunması problemine regüler Sturm-Liouville problemi denir. Geçen yüzyılda (1)-(2) problemi Sturm ve Liouville tarafindan incelenmiştir. Özel olarak q(x) reel değerli, sürekli bir fonksiyon ise (1)-(2) nin spektrumunun sadece $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ özdeğerlerinden ibaret ve

$$\lambda_n = n^2 + O(1) \tag{3}$$

asimptotik davranışına sahip olduğu gösterilmiştir. Eğer q(x) k. mertebeden türeve sahip ise (3) ifadesi;

$$\lambda_n = n^2 + c_0 + \frac{c_2}{n^2} + \cdots + \frac{c_{2k}}{n^{2k}} + o(\frac{1}{n^{2k}})$$

şeklinde yazılabilir.

1908-1911 yıllarında $L_2(0,\infty)$ uzayında;

$$-u'' + q(x)u = \lambda u\,, \qquad 0 < x < \infty \tag{4}$$
$$u(0)\cos\alpha + u'(0)\sin\alpha = 0\,, \quad \alpha \in [0,\pi) \tag{5}$$

probleminin özdeğer ve özfonksiyonları incelenmiştir. Bu halde spektrum sadece özdeğerlerden oluşmayabilir, sürekli kısma da sahip olabilir, hatta q(x) e bağımlı olarak hiçbir özdeğer olmayabilir. (4)-(5) probleminin spektrumunun saf-ayrık, yani sadece özdeğerlerden ibaret olması için, q(x) in hangi özelliğe sahip olması gerektiği problemiyle ilk olarak K. Freidrichs uğraşmış ve $\lim_{x\to\infty} q(x) = \infty$ ise spektrumun sadece; $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n \le \ldots (n \to \infty, \lambda_n \to \infty)$ özdeğerlerinden ibaret olduğunu göstermiştir(1934). Burada λ_n nin nasıl bir asimptotik davranışa sahip olduğu yani hangi hızla sonsuza gittiği problemi ile karşılaşılmıştır. Genel olarak $x \to \infty$ için $q(x) \to \infty$ olan herhangi bir fonksiyon olduğundan dolayı, λ_n nin asimptotik davranışının bulunması mümkün değildir. Bunun yerine λ_n lerin yardımı ile oluşturulan $N(\lambda) = \sum_{\lambda_n \le \lambda} 1$

fonksiyonunun $\lambda \to \infty$ için asimptotik davranışını bulmak mümkündür. $N(\lambda)$ λ sayısını aşmayan özdeğerlerin sayısıdır.

q(x) üzerine bazı ilave şartlar ekleyerek T.Carleman;

$$N(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{q(x)<\lambda} \sqrt{\lambda - q(x)}\, dx[1 + o(1)] \quad , \quad \lambda \to \infty \tag{6}$$

olduğunu ispatlamıştır. Bazı hallerde ise, $N(\lambda)$ nın asimptotik davranışını kullanarak λ_n nin asimptotik davranışı bulanabilir.

Ayrıca benzer incelemeler;

$$(-1)^n u^{(2n)} + \sum_{j=1}^{2n-1} q_j(x) u^{(2n-j)} + q(x)u = \lambda u \, , \quad a < x < b \tag{7}$$

formundaki diferansiyel denklemler içinde yapılmıştır. Burada a,b sonlu (regüler hal) veya sonsuz (singüler hal) alınabilir. Diferansiyel ifadenin katsayılarının özellikleri göz önüne alınarak, (7) problemine sınır şartları eklenir.

Kısmi türevli denklemler için de benzer çalışmalar yapılmıştır. Burada da, kısmi türevli denklemle tanımlanan sınır değer probleminin, özdeğerleri ve özfonksiyonları her zaman kesin olarak belirlenememektedir. Ancak, bazı özel kısmi diferansiyel denklemler, özel bölgelerde tanımlandığında, özdeğerler ve özfonksiyonlar kesin olarak yazılabilir. Örneğin; kare bölgede tanımlanmış Dirichlet sınır değer problemini göz önüne alalım:

$$-\Delta u = \lambda u \, , \quad x = (x_1, x_2) \qquad 0 < x_1 < \pi \, , \quad 0 < x_2 < \pi \, , \tag{8}$$

$$u|_\Gamma = 0 \, . \tag{9}$$

Burada; Γ, $[0,\pi]x[0,\pi]$ kare bölgesinin sınırıdır. (8)-(9) probleminin özdeğerleri;

$$\lambda_{mn} = m^2 + n^2 \quad , \quad m, n = \pm 1, \pm 2, \ldots \; ;$$

bunlara karşılık gelen özfonksiyonlar ise;

$$u_{mn} = \sin mx_1 \sin nx_2 \;, \quad m,n = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

olur. Eğer (8)-(9) probleminde, (8) in sol tarafındaki ifadede $-\Delta$ yerine $-\Delta + q(x)$ yazarsak, veya $[0,\pi]x[0,\pi]$ kare bölgesini bir başka bölge ile değiştirirsek, elde edilen problemin özdeğer ve özfonksiyonları kesin olarak yazılamaz. Burada; $q(x)$ sürekli reel değerli bir fonksiyondur. Bundan dolayı, G herhangi bir düzlem bölgesi ise:

$$-\Delta u + q(x)u = \lambda u \;, \quad x = (x_1, x_2) \in G \tag{10}$$
$$u|_{\partial G} = 0 \;, \tag{11}$$

(burada ∂G, G bölgesinin sınırıdır.) probleminin özdeğerlerinin asimptotik davranışının bulunması önem taşımaktadır. İlk olarak 1912 yılında, Alman matematikçisi H.Weyl tarafından, $N(\lambda) = \sum_{\lambda_n \le \lambda} 1$ fonksiyonunun $\lambda \to \infty$ için asimptotik davranışı bulunmuştur. Burada $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n \le \ldots$ (10)-(11) sınır değer probleminin özdeğerleridir. İki boyutlu hal için; H.Weyl tarafından $N(\lambda)$ fonksiyonu için bulunan formül:

$$N(\lambda) = \frac{A_G}{4\pi}\lambda - \frac{L}{4\pi}\sqrt{\lambda} + o(\sqrt{\lambda}) \tag{12}$$

şeklindedir[20]. Burada A_G , G bölgesinin alanı , L ise G nin çevresidir. (12) formülünü kullanarak λ_n özdeğerinin;

$$\lambda_n = cn + o(n)$$

şeklinde olduğu gösterilebilir. Burada c belirli bir sabittir. Weyl'den önce, fizikçiler J. Jeans ve H.Lorentz elektromanyetik dalgalar teorisinde, spektrumun cismin hacmini tanımladığını tahmin etmişlerdi. Weyl, (12) formülü ile bu hipotezin doğruluğunu kanıtlamıştır. Titreşim yapan cismin şeklinin, özdeğerlerin asimptotik ifadesi ile belirlenmesi hakkında, M.Kac'ın makalesi önemlidir[7]. 1950 yıllarında $L_2(E_3)$ de, yani, üç boyutlu Euclidean uzayında tanımlanmış ve karesi Lebesgue anlamında integrallenebilir olan fonksiyonlar uzayında;

$$-\Delta u + q(x)u = \lambda u \;, \quad x \in E_3 \tag{13}$$

Schrödinger denklemi ile oluşturulan operatörün(singüler hal), özdeğerleri sayısının asimptotik davranışı bulunmuştur. Bu durumda, genellikle (13) probleminin spektrumu ayrık olmayabilir. Bu problemin, $|x| \to \infty$ için $q(x) \to \infty$ ise, spektrumunun sadece, $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n \le \ldots$ $(\lambda_n \to \infty,\ n \to \infty)$ özdeğerlerinden ibaret olduğu, ilk defa T.Carleman tarafından gösterilmiştir. Bu probleme karşılık gelen $N(\lambda)$ fonksiyonunun $\lambda \to \infty$ için, asimptotik davranışı ise, J.S.De Wet ve F.Mandl tarafından

$$N(\lambda) = \frac{1}{6\pi^2} \int_{q(x)<\lambda} (\lambda - q(x))^{3/2} dx [1 + o(1)] \tag{14}$$

olarak bulunmuştur[19].

Titchmarsh 1953 yılında, $q(x)$ üzerine daha az şartlar ekleyerek ve T.Carleman'a ait, Tauber yöntemini kullanarak (14) formülünü ispatlamıştır. 1950'den bu yana (13) ifadesindeki Schrödinger operatörü yerine, kendine eş pozitif tanımlı daha genel eliptik diferansiyel operatörler alınarak, özdeğerlerin asimptotik davranışı incelenmiştir. 1967 yılına kadar olan çalışmalar C.Clark'ın çalışmasında[3] , 1967'den 1977'ye kadar olan çalışmalar ise, A.G. Kostjucenko ve I.S.Sargsjan'nın kitabında[12], 1977'den sonrakiler ise, "Mathematics Review" in farklı sayılarında verilmiştir.

Matematik fizikteki birçok denklemleri, kısmi türevli denklemlerin çoğunu, sonlu veya sonsuz sayıda adi diferansiyel denklemler sistemini, integro diferansiyel denklemleri, vs operatör katsayılı diferansiyel denklem şeklinde yazmak mümkündür. Bundan dolayı, katsayısı operatör değerli fonksiyon olan, diferansiyel denklemlerin spektral analizinin incelenmesi büyük bir önem taşımaktadır.

1967 yılında potansiyeli(katsayısı) sınırsız operatör değerli fonksiyon olan Sturm Liouville probleminin özdeğerleri sayısının asimptotik davranışını, ilk olarak B.M.Levitan ve A.G.Kostjucenko incelemiştir[10]. Şimdi bu problemi göz önüne alalım.

H herhangi bir ayrılabilir Hilbert uzayı olsun. $L_2(a,b;H)$ ile (a,b) $(-\infty \le a < b \le \infty)$ aralığında tanımlanmış değerleri H uzayına ait, Bochner anlamında kuvvetli ölçülebilir[21] ve

$$\int_a^b \|f(x)\|^2 dx < \infty$$

özelliğine sahip $f(x)$ fonksiyonlar uzayı olsun. $L_2(a,b;H)$ uzayı $f(x), g(x) \in L_2(a,b;H)$ ise

$$(f,g)_1 = \int_a^b (f(x), g(x))dx$$

skaler çarpımı ile bir ayrılabilir Hilbert uzayı oluşturur. Burada (f,g), H uzayında skaler çarpımı göstermektedir. B.M.Levitan ve A.G.Kostjucenko;

$$-u'' + Q(x)u = \lambda u\ , \quad -\infty < x < \infty \tag{15}$$

probleminin, $L_2(-\infty,\infty;H)$ uzayında spektrumunun ayrık olduğunu ve özdeğerler sayısının asimptotik davranışını bulmuşlardır. Burada $Q(x)$, $\forall x \in (-\infty,\infty)$ için bir $D \subset H$ tanım kümesine sahip, kendine eş ve $Q(x) \geq I$ şartını sağlayan bir operatördür. Burada I birim operatördür. Ayrıca $Q^{-1}(x)$, $\forall x \in (-\infty,\infty)$ için tam sürekli (kompakt) operatör olduğu da kabul edilmiştir. $Q(x)$ in özdeğerleri $\alpha_1(x) \leq \alpha_2(x) \leq \ldots \leq \alpha_n(x) \leq \ldots$olsun. $Q(x)$ e bazı ek şartlar ilave ederek (15) sınır değer probleminin spektrumunun, sadece özdeğerlerden oluştuğu gösterilmiştir. Bu özdeğerleri ; $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \ldots$, $(\lambda_n \to \infty,\ n \to \infty)$ ile gösterelim. $N(\lambda)$ nın;

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{\pi} \sum_j \int_{\alpha_j(x)<\lambda} (\lambda - \alpha_j(x))^{1/2} dx \ , \quad \lambda \to \infty \tag{16}$$

şeklinde olduğu ispatlanmıştır. Örneğin sonsuz sayıda;

$$-u_j'' + \sum_{k=1}^{\infty} q_{jk}(x) u_k = \lambda u_j \ , \quad j = 1,2,\ldots \tag{17}$$

diferansiyel denklemler sistemi (15) şeklinde yazılabilir. Burada $H = l_2$, $Q(x) = (q_{jk}(x))_{j,k=1}^{\infty}$. Özel olarak $q_{jk}(x)$ köşegen bir $(\alpha_k(x)\delta_{kj} = \alpha_k(x))$ matrisi ise ; (17) sonsuz sisteminin λ değerini aşmayan özdeğerleri sayısının asimptotik davranışı, (16) formülü ile verilir. (15) probleminin kapsadığı bir başka örnek olarak, sonsuz silindirde verilmiş, Schrödinger denklemi için özdeğerlerin bulunmasını gösterebiliriz.

Katsayıları operatör olan;

$$(-1)^n u^{(2n)} + \sum_{j=2}^{2n-1} Q_j(x)u^{(2n-j)} + Q_{2n}(x)u = \lambda u\,, \qquad -\infty < x < \infty$$

probleminin özdeğerleri sayısının asimptotik davranışı M.Bayramoğlu tarafından incelenmiştir[1]. Burada $Q_2(x),...,Q_{2n}(x)$ $\forall x \in (-\infty,\infty)$ için, Hilbert uzayında tanımlanmış kendine eş operatörlerdir.

Operatör katsayılı denklemlerin spektrumunun incelenmesi ile ilgili çalışmalar arasında, K.Boymatov[2], M.Otelbayev[17], M.Z.Solomyak[18], V.I.Gorbachuk ve M.L.Gorbachuk[6], B.M.Levitan ve I.S.Sargsjan[15], Serge Levendorskii[14], E.B.Davies[4] çalışmalarını sayabiliriz.

Diferansiyel denklemlerin özdeğer probleminin, bu denklemlerin Green fonksiyonu ile sıkı ilişkisi vardır. Bundan dolayı ; katsayısı operatör olan diferansiyel denklemlerin özdeğerlerinin yanısıra, bunların Green fonksiyonları da incelenir. Ayrıca Green fonksiyonunun incelenmesi tek başına da önem taşımaktadır ve bu konuda çok sayıda çalışmalar mevcuttur.

Bu çalışmada, üç boyutlu Euclidean uzayının üst yarı bölgesinde tanımlanmış katsayısı kendine eş operatör değerli fonksiyon olan Schrödinger denkleminin spektrumunun ayrık olduğu gösterilmiş ve özdeğerleri sayısının asimptotik davranışı incelenmiştir. Ortaya konulan problemin incelenmesi için genel olarak iki yöntem kullanılır; Varyasyonel yöntem ve T.Carleman'nın Tauber yöntemi. Bu çalışmada T.Carleman tarafından bulunmuş olan Tauber yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntemle, incelenmesi gereken operatörün parametre içeren bir fonksiyonu oluşturulur. Parametrenin küçük veya büyük değerlerinde, bu fonksiyonun asimptotik ifadesi bulunur. Elde edilen asimptotik ifadeden Tauber teoremi yardımıyla, operatörün spektrumunun asimptotik davranışı belirlenir. Kullanılan operatör-fonksiyonlar göz önüne alınan operatörün rezolventi olabileceği gibi, bu operatör ile elde edilen parabolik veya hiperbolik denklemin, Green fonksiyonu da olabilir. Bu çalışmada, operatöre karşılık gelen parabolik denklemin, Green fonksiyonunun incelenmesi ile sonuca varılmıştır. Laplace operatörüne karşılık gelen parabolik denklemi kullanan

S.Minakshisundharam[16], Laplace operatörü yerine, keyfi negatif tanımlı eliptik operatör alarak parabolik denklemi kullanan ise A.G.Kostjucenko olmuştur[11]. Konunun kolay anlaşılabilmesi için bazı gerekli ön bilgileri verelim.

2. Ön Bilgiler

E_3^+ ile üç boyutlu Euclidean uzayının üst yarı bölgesini gösterelim; ($E_3^+ = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in E_3 : x_3 \geq 0\}$). H ayrılabilir Hilbert uzayı olsun. H da skaler çarpımı $(.,.)$, normu ise $\|.\|$ ile göstereceğiz $H_1 = L_2(E_3^+; H)$ ile ise E_3^+ da tanımlanmış bochner anlamında kuvvetli ölçülebilir ve

$$\int_{E_3^+} \|f(x)\|^2 dx < \infty$$

özelliğine sahip $f(x) = f(x_1, x_2, x_3)$ fonksiyonlar uzayını gösterelim. $L_2(E_3^+; H)$ a ait olan f(x) ve g(x) fonksiyonları için;

$$(f, g)_1 = \int_{E_3^+} (f(x), g(x))dx$$

ifadesi H_1 de skaler çarpım tanımlar. Bu skaler çarpım ile, H_1 ayrılabilir bir Hilbert uzayı oluşturur. H da tanımlanmış, A lineer operatörünün tanım kümesini D(A) ile göstereceğiz.

D(A) H da yoğun bir küme ise ve f, g elemanları D(A) ya ait keyfi elemanlar olmak üzere (Af, g)=(f, Ag) sağlanıyorsa A ya *simetrik operatör* denir.

A herhangi simetrik operatör olsun. $\forall f \in D(A)$ için $(Af, f) \geq \gamma(f, f)$ ($(Af, f) \leq \gamma(f, f)$) ise, A operatörüne γ sayısı ile *alttan* (üstten) *sınırlı operatör* denir. $\gamma > 0$ ($\gamma < 0$) ise, A ya *pozitif* (negatif) *tanımlı operatör* denir.

$f \neq 0$, $(Af, f) > 0$ ($(Af, f) < 0$) ise A ya *pozitif* (negatif) *operatör* denir. $(Af, f) \geq \gamma(f, f)$ ifadesi basit olarak $A \geq \gamma I$ şeklinde yazılır. Diğer ifadeler de benzer biçimde yazılabilir.

Eğer $A \geq \gamma I$ ($\gamma > 0$) kendine eş operatör ve spektrumu $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \ldots$, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ özelliğine sahip özdeğerlerden ibaret ise, A operatörüne *saf-ayrık* spektruma sahiptir denir. $A = A^* \geq \gamma I$ ($\gamma > 0$) operatörünün saf-ayrık spektruma sahip olması için, A^{-1} tam sürekli (compakt) olması gerekli ve yeterlidir. Bu halde A^{-1} nin spektrumu;

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_n \geq \ldots \quad ,(\mu_n = \frac{1}{\lambda_n}) \ , \quad \lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$$

olacaktır. A nın λ_k ya karşılık gelen normalize edilmiş özvektörünü φ_k ile gösterelim. $(\varphi_k, \varphi_j) = \delta_{kj}$ dır. Herhangi $f \in H$ vektörü,

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k)\varphi_k \tag{2.1}$$

şeklinde gösterilebilir. Eğer $f \in D(A)$ ise;

$$Af = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (f, \varphi_k)\varphi_k \tag{2.2}$$

dır. (2.2) yi sembolik olarak,

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\cdot, \varphi_k)\varphi_k$$

şeklinde yazalım. Bu yazılışa A nın spektral açılışı denir.

F(x), $[\gamma, \infty)$ aralığında tanımlanmış herhangi bir fonksiyon olsun. F(A) ile,

$$F(A) = \sum_{k=1}^{\infty} F(\lambda_k)(\cdot, \varphi_k)\varphi_k \tag{2.3}$$

operatörünü tanımlayalım. F(A) nın tanım kümesi D(F(A))

$$\sum_{k=1}^{\infty} |F(\lambda_k)|^2 |(u, \varphi_k)|^2 < \infty \tag{2.4}$$

şartını sağlayan $u \in H$ elemanlarından ibaret olur. Eğer u elemanı (2.4) şartını sağlıyorsa;

$$\sum_{k=1}^{\infty} F(\lambda_k)(u, \varphi_k)\varphi_k$$

serisinin H da yakınsak olduğu kolayca gösterilebilir. Bu serinin toplamı;

$$F(A)u = \sum_{k=1}^{\infty} F(\lambda_k)(u, \varphi_k)\varphi_k$$

ile gösterilir. (2.3) ten görüldüğü gibi F(A) nın eşleniği $F^*(A)$;

$$F^*(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{F(\lambda_k)}(\,.\,,\ \varphi_k)\varphi_k$$

dır. F(A) nın kendine eş olması için, F(x) fonksiyonu $x = \lambda_k$ değerlerinde reel olmalıdır.

Hilbert-Schmidt ve çekirdek operatörleri:

A, ayrılabilir bir Hilbert uzayında herhangi kompakt operatör olsun. O zaman, A^*A kendine eş negatif olmayan kompakt operatör olacaktır. A^*A nın özdeğerlerini;

$$s_1^2 \geq s_2^2 \geq \ldots \geq s_n^2 \geq \ldots\,, \quad (s_n > 0)$$

ile gösterelim. Eğer $\sum\limits_{k=1}^{\infty} s_k^p$, $(p > 0)$ serisi yakınsak ise, o zaman $A \in \sigma_p$ diyeceğiz. Özel olarak $A \in \sigma_2$ ise, A ya *Hilbert-Schmidt operatörü*, $A \in \sigma_1$ ise, A ya *çekirdek operatörü* denir. $A \geq 0$ kompakt operatör ise, $s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_n \geq \ldots$ sayıları A nın özdeğerleridir. A operatörünün p normu $\|A\|_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} s_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $s_k \geq 0$ ile tanımlanır. $A \in \sigma_1$ ise tanıma göre $\sum\limits_{k=1}^{\infty} s_k$ serisi yakınsaktır ve bu serinin toplamına A operatörünün *izi* denir ve tr(A) ile gösterilir. $trA = \sum\limits_{k=1}^{\infty} s_k$, σ_1 de bir norm tanımlar. Bu normu, $\|\,.\,\|_{\sigma_1}$ veya $\|\,.\,\|_1$ ile göstereceğiz. Eğer A kendine eş negatif olmayan operatör ise bunun izi A nın özdeğerleri toplamıdır. Eğer $A = A^*$ kompakt operatör ise, A nın Hilbert-Schmidt (H-S) operatörü olması için, bu operatörün özdeğerlerinin karelerinin toplamından oluşturulan serinin yakınsak olması yeterli ve gereklidir. $A \in \sigma_2$ ve $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ A nın özdeğerleri olsun. $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2\right)^{1/2}$ serisinin toplamı, σ_2 de bir norm tanımlar. Bu norma A nın *Hilbert-Schmidt normu* denir ve $\|A\|_{H-S} = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2\right)^{1/2}$ ile gösterilir. $A \in \sigma_p$ $(p \geq 1)$ ve B herhangi lineer sınırlı operatör ise, $AB \in \sigma_p$ ve $BA \in \sigma_p$ dır. Özel olarak $A \in \sigma_1$ ve B lineer sınırlı operatör ise, $\|AB\|_1 \leq \|A\|_1 \|B\|$ dır[8]. Burada $\|\,.\,\|$, verilen Hilbert uzayındaki normu gösterir.

3. Problemin Ortaya Konulması ve Katsayı Üzerine Konulan Şartlar

H ayrılabilir Hilbert uzayı olsun. $L_2(E_3^+, H)$ uzayında,

$$l(u) = -\Delta u + Q(x)u\,, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in E_3^+$$

diferansiyel ifadesi ve $u(x_1, x_2, x_3)\big|_{x_3=0} = 0$ sınır şartı ile oluşturulan operatörü L ile gösterelim. Burada, Q(x), $\forall x \in E_3^+$ için kendine eş saf-ayrık spektruma sahip operatördür. Bu çalışmada, aşağıda belirtilen 1-8 koşulları sağlandığında L operatörünün kendine eş, pozitif tanımlı ve saf-ayrık spektruma sahip olduğunu ve L nin spektrumu;

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n \le \ldots$$

olmak üzere λ yı aşmayan özdeğerler sayısı,

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_n \le \lambda} 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}(\lambda - \lambda_k) \quad (\lambda > 0 \text{ herhangi bir sayıdır})$$

fonksiyonunun,

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{6\pi^2} \sum_j \int_{\alpha_j(x) \le \lambda} (\lambda - \alpha_j(x))^{3/2} dx\,, \quad \lambda \to \infty$$

asimptotik davranışına sahip olduğunu göstereceğiz. Burada; $\mathcal{H}$ Heaviside fonksiyonudur.

Q(x) Operatör Fonksiyonu Üzerine Konulan Şartlar:

1. Q(x) operatörleri, $(x \in E_3^+)$ H da aynı bir D tanım kümesine sahip ve $Q^*(x) = Q(x) \ge I$ olsun. Burada; I operatörü H da birim operatördür. $Q^{-1}(x)$ operatörü, $\forall x \in E_3^+$ için H da tam sürekli olsun.

2. $|x-s| \le 1$ olduğunda;

$$\|[Q(s)-Q(x)]Q^{-b}(s)\| \le Sbt^{*}\ |x-s|\ , \quad b \in (0,3/2)$$

eşitsizliği sağlansın.

3. Herhangi $k>0$ sayısı için;

$$Q^{-k}(x) \in \sigma_1 \quad \forall x \in E_3^{+} \ \text{ ve } \int_{E_3^{+}} \|Q^{-k}(x)\|_1 dx < \infty$$

olsun. (burada $\|\ \|_1$ σ_1 uzayındaki normdur.)

4. $|x-s|>1$ olduğunda;

$$\left\|Q(x)e^{-c_0|x-s|Q^{1/2}(s)}\right\| < Sbt$$

olsun.

5. $|x-s| \le 1$ için;

$$\|e^{-ctQ(s)}\|_1 \le \|e^{-c_1 tQ(x)}\|_1$$

eşitsizliği sağlansın. (burada c ve c_1 pozitif sayılardır.)

6. $t \to 0$ $(t>0)$ olduğunda;

$$\int_{E_3^{+}} e^{-\frac{x_3^2}{t}} \|e^{-tQ(x)}\|_1 dx = o(1) \int_{E_3^{+}} \|e^{-tQ(x)}\|_1 dx$$

olsun.

7. $c>0$ keyfi sayı olmak üzere

---

* Sbt ile keyfi sabiti ifade etmekteyiz.

$$\int_{E_3^+} \|e^{-ctQ(x)}\|_1 dx = O(1) \int_{E_3^+} \|e^{-tQ(x)}\|_1 dx$$

olsun.

8. $\alpha_1(x) \le \alpha_2(x) \le \ldots \le \alpha_n(x) \le \ldots$ fonksiyonları, Q(x) in H daki özdeğerleri olsun. Bunların yardımıyla;

$$p(\lambda) = \frac{1}{6\pi^2} \sum_j \int_{\alpha_j(x) \le \lambda} (\lambda - \alpha_j(x))^{3/2} dx$$

fonksiyonunu oluşturalım. Bu fonksiyon, herhangi $a_0 > 0$ sayısı için, $\lambda > 0$ ın büyük değerlerinde $\lambda p'(\lambda) < a_0 p(\lambda)$ Tauber koşulunu sağlasın.

L operatörünün oluşturulması:

M_0 ile aşağıdaki özelliklere sahip, $u(x) \in L_2(E_3^+, H)$ fonksiyonlar kümesini gösterelim.

1) $\forall x \in E_3^+$ için $u(x) \in D$, ikinci mertebeden sürekli türeve sahip ve $u(x_1, x_2, 0) = 0$ koşunu sağlayan sıkı destekli (compact support) fonksiyonlar olsun.

2) Q(x)u(x) ise H da sürekli olsun.

$L_2(E_3^+, H)$ uzayında, tanım kümesi $D(L_0)=M_0$ olan ve

$$L_0 u = -\Delta u + Q(x)u \, , \; u \in D(L_0)$$

ifadesi ile tanımlanan operatörü L_0 ile gösterelim. Bu şekilde tanımlanan L_0 operatörü simetriktir. L_0 ın kapanmasını L ile gösterelim. 1-4 şartları sağlandığında, L operatörü kendine eş operatör olur[17].

L nin spektrumunun saf-ayrık olduğunu ve N(λ) fonksiyonunun asimptotik davranışını elde etmek için L operatörü ile ilgili;

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - Q(x)u \, , \;\; x \in E_3^+ \, , \;\; t > 0 \qquad (3.1)$$

$$u(0,x) = \Psi(x) \, , x \in E_3^+ \;\; , \;\; \Psi(x) \in L_2(E_3^+; H) \qquad (3.2)$$

$$u(t,x)\big|_{x_3=0} = 0 \qquad (3.3)$$

problemin Green fonksiyonunu inceleyelim:

Önce,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \ , \ x \in E_3^+, \ t > 0$$

$$u(0,x) = \Psi(x) \ , \ x \in E_3^+ \ , \ \Psi(x) \in L_2(E_3^+; H)$$
$$u(t,x)|_{x_3=0} = 0$$

probleminin Green fonksiyonunu bulalım. Bu problemin Green fonksiyonu,

$$G_0(t,x,s) = (2\sqrt{\pi t})^{-3}\left[e^{-\frac{|x-s|^2}{4t}} - e^{-\frac{|x-s'|^2}{4t}} \right] I \tag{3.4}$$

şeklinde olduğu kolayca gösterilebilir. Burada $s=(s_1,s_2,s_3)$, $s'=(s_1,s_2,-s_3)$ $(s_3>0)$ dır. (3.1)-(3.3) Probleminin Green fonksiyonunu E.E.Levy metodu[5] ile;

$$G(t,x,s) = e^{-tQ(s)}G_0(t,x,s) + \int_0^t d\tau \int_{E_3^+} G_0(t-\tau,x,\xi)e^{-(t-\tau)Q(\xi)}\varphi(\tau,\xi,s)d\xi \tag{3.5}$$

şeklinde arayalım. Burada; $\varphi(t,x,s)$ bulunması gereken operatör değerli fonksiyondur.

G(t,x,s) fonksiyonunun,

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \Delta G - Q(x)G$$

denklemini sağlamasını isteyelim. Bu durumda; $\varphi(t,x,s)$ operatör fonksiyonu için,

$$\varphi(t,x,s) = K(t,x,s) + \int_0^t d\tau \int_{E_3^+} K(t-\tau,x,\xi)\varphi(\tau,\xi,s)d\xi \tag{3.6}$$

integral denklemini elde ederiz. Burada K(t,x,s):

$$K(t,x,s) = [Q(s) - Q(x)]e^{-tQ(s)}G_0(t,x,s) \tag{3.7}$$

şeklindedir. (3.6) denklemini iterasyon yöntemi ile çözelim. İlk yaklaşım olarak,

$$K_1(t,x,s)=K(t,x,s)$$

alalım ve

$$K_{n+1}(t,x,s)=\int_0^t d\tau \int_{E_3^+} K(t-\tau,x,\xi)K_n(\tau,\xi,s)d\xi \qquad (n=1,2,...) \tag{3.8}$$

iterasyon formülünü oluşturalım.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|K_n(t,x,s)\|_1$$

serisinin yakınsak olduğunu gösterirsek,

$$\varphi(t,x,s)=\sum_{n=1}^{\infty} K_n(t,x,s)$$

ifadesi (3.6) integral denkleminin çözümü olur.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|K_n(t,x,s)\|_1$$

serisinin yakınsaklığını göstermek için, $K_1(t,x,s)$, $K_2(t,x,s)$,... çekirdeklerinin normlarını sınırlandıralım.

4. $K_n(t,x,s)$ çekirdeklerinin ve $\varphi(t,x,s)$ fonksiyonunun sınırlandırılması

Bu bölümde; $K_n(t,x,s)$ (n=1,2,...) ve $\varphi(t,x,s)$ için gereken bazı sınırlandırmalar yapacağız. Bu sınırlandırmalarda, daha önce belirttiğimiz $\|AB\|_1 \le \|A\|_1 \|B\|$ eşitsizliğini kullanacağız. Burada $A \in \sigma_1$ ve B operatörü ise Hilbert uzayında lineer sınırlı bir operatördür.

$$|x-s|^2 \le |x-s'|^2, \quad (x,s \in E_3^+)$$

olduğundan dolayı (3.4) e göre;

$$\|G_0(t,x,s)\| \le t^{-3/2} e^{-\frac{|x-s|^2}{4t}} \tag{4.1}$$

bulunur.

Önce $|x-s| \le 1$ halinde, $K(t,x,s)$ çekirdeğinin normunu ($K_1(t,x,s)=K(t,x,s)$) sınırlandıralım. (3.7) yi göz önüne alırsak:

$$\|K(t,x,s)\|_1 = \|[Q(s)-Q(x)]e^{-tQ(s)}G_0(t,x,s)\|_1$$

$$= \left\|[Q(s)-Q(x)]e^{-\frac{1}{2}tQ(s)}e^{-\frac{1}{2}tQ(s)}G_0(t,x,s)\right\|_1$$

$$\le \left\|[Q(s)-Q(x)]e^{-\frac{1}{2}tQ(s)}\right\| \left\|e^{-\frac{1}{2}tQ(s)}G_0(t,x,s)\right\|_1$$

$$\le \left\|[Q(s)-Q(x)]Q^{-b}(s)Q^{b}(s)e^{-\frac{1}{2}tQ(s)}\right\| \left\|e^{-\frac{1}{2}tQ(s)}\right\|_1 t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{|x-s|^2}{4t}} \tag{4.2}$$

olur.

$$B(t,x,s) = \left\|[Q(s)-Q(x)]Q^{-b}(s)Q^{b}(s)e^{-\frac{1}{2}tQ(s)}\right\|$$

olsun. Q(x) operatörü 2 şartını sağladığından dolayı,

$$B(t,x,s)=\left\|[Q(s)-Q(x)]Q^{-b}(s)Q^{b}(s)e^{-\frac{1}{2}tQ(s)}\right\|$$

$$\leq \left\|[Q(s)-Q(x)]Q^{-b}(s)\right\|\left\|Q^{b}(s)e^{-\frac{1}{2}tQ(s)}\right\|$$

$$\leq Sbt^{*}\,|x-s|\left\|Q^{b}(s)e^{-\frac{1}{2}tQ(s)}\right\|$$

$$\leq Sbt\,\frac{|x-s|}{t^{b}}\left\|t^{b}Q^{b}(s)e^{-\frac{1}{2}tQ(s)}\right\| \tag{4.3}$$

olur.

$t^{b}Q^{b}(s)e^{-\frac{1}{2}tQ(s)}$ operatör fonksiyonunun özdeğerleri,

$$[t\alpha_i(s)]^{b}e^{-\frac{1}{2}t\alpha_i(s)}\quad, i=1,2,\ldots$$

dır. $b, c > 0$ keyfi sabitler olmak üzere,

$$x^{b}e^{-cx}\leq Sbt\,,\quad 0<x<\infty$$

eşitsizliği doğrudur. Buradan,

$$\left\|t^{b}Q^{b}(s)e^{-\frac{1}{2}tQ(s)}\right\|=\sup_{i}\left\{[t\alpha_i(s)]^{b}e^{-\frac{1}{2}t\alpha_i(s)}\right\}\leq Sbt$$

yazabiliriz. Böylece:

$$B(t,x,s)\leq Sbt\,|x-s|t^{-b} \tag{4.4}$$

olur. (4.2) -(4.4) ifadelerinden,

$$\|K(t,x,s)\|_1\leq Sbt\,t^{-\frac{3}{2}-b}|x-s|\left\|e^{-\frac{1}{2}tQ(s)}\right\|_1 e^{-\frac{|x-s|^2}{4t}}$$

elde ederiz.

---

* Bu kısımda ve sonraları aynı Sbt kısaltması ile farklı sabitleri göstereceğiz.

$$\left(\frac{|x-s|^2}{t}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{8}\frac{|x-s|^2}{t}} \le Sbt$$

eşitsizliğini kullanarak

$$\|K(t,x,s)\|_1 \le At^{-1-b}\left\|e^{-\frac{1}{2}tQ(s)}\right\|_1 e^{-c\frac{|x-s|^2}{t}}, \quad |x-s| \le 1 \tag{4.5}$$

buluruz. Burada, A ve c herhangi pozitif sabitlerdir. Böylece; aşağıdaki lemma ispatlanmış olur:

Lemma 4.1. Eğer $Q(x)$ operatör fonksiyonu 1-2 şartlarını sağlıyorsa ve $t > 0$, $x \in E_3^+$ için;

$$e^{-tQ(x)} \in \sigma_1$$

ise,

$$\|K(t,x,s)\|_1 \le At^{-1-b}\left\|e^{-\frac{1}{2}tQ(s)}\right\|_1 e^{-c\frac{|x-s|^2}{t}}, \quad |x-s| \le 1$$

eşitsizliği doğrudur.

Lemma 2.2. Eğer $Q(x)$ operatörü 1-4 şartlarını sağlıyorsa ve $e^{-tQ(x)} \in \sigma_1$ $(t > 0,\ x \in E_3^+)$ ise

$$\|K(t,x,s)\|_1 \le A\left\|e^{-\frac{1}{2}tQ(s)}\right\|_1 e^{-c\frac{|x-s|^2}{t}}, \quad |x-s| > 1$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat : (3.7) ve (4.1) i kullanarak,

$$\|K(t,x,s)\|_1 = \left\|[Q(s)-Q(x)]e^{-tQ(s)}G_0(t,x,s)\right\|_1$$

$$\le \left\|[Q(s)-Q(x)]e^{-tQ(s)}\right\|_1 \|G_0(t,x,s\|$$

$$\le \left\|[Q(s)-Q(x)]e^{-\frac{1}{2}tQ(s)}\right\| \left\|e^{-\frac{1}{2}tQ(s)}\right\|_1 t^{-\frac{3}{2}} e^{-c\frac{|x-s|^2}{t}} \tag{4.6}$$

ifadesini yazabiliriz.

$$\left\|[Q(s)-Q(x)]e^{-\frac{1}{2}tQ(s)}\right\| =$$

$$= \left\|\left[Q(s)e^{-c_0|x-s|Q^{\frac{1}{2}}(s)}\, e^{c_0|x-s|Q^{\frac{1}{2}}(s)} - Q(x)e^{-c_0|x-s|Q^{\frac{1}{2}}(s)}\, e^{c_0|x-s|Q^{\frac{1}{2}}(s)}\right]e^{-\frac{1}{2}tQ(s)}\right\|$$

$$\leq \left[\left\|Q(s)e^{-c_0|x-s|Q^{\frac{1}{2}}(s)}\right\| + \left\|Q(x)e^{-c_0|x-s|Q^{\frac{1}{2}}(s)}\right\|\right]\left\|e^{c_0|x-s|Q^{\frac{1}{2}}(s)-\frac{1}{2}tQ(s)}\right\|$$

$$\leq \acute{S}bt\left\|e^{c_0|x-s|Q^{\frac{1}{2}}(s)-\frac{1}{2}tQ(s)}\right\|$$

olduğunu göz önüne alarak ve (4.6) yı kullanarak,

$$\|K(t,x,s)\|_1 \leq Sbt\, t^{-\frac{3}{2}}\left\|e^{-\frac{1}{2}tQ(s)}\right\|_1 e^{-c\frac{|x-s|^2}{t}}\left\|e^{c_0|x-s|Q^{\frac{1}{2}}(s)-\frac{1}{2}tQ(s)}\right\| \tag{4.7}$$

elde ederiz.

Q(s) operatörünün spektral açılışını yazalım:

$$Q(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(s)p_k(s) \ , \tag{4.8}$$

$$P_k(s)f = (f, e_k(s))e_k(s) \ , \ \ f \in H \, .$$

Burada $e_1(s), e_2(s), \ldots$ vektörleri Q(s) operatörünün $\alpha_1(s), \alpha_2(s), \ldots$ özdeğerlerine karşılık gelen ortonormal özvektörleridir. Young eşitsizliğini kullanarak,

$$c_0|x-s|\alpha_k^{\frac{1}{2}}(s) = \frac{c_0|x-s|}{t^{\frac{1}{2}}\delta_0^{\frac{1}{2}}}t^{\frac{1}{2}}\delta_0^{\frac{1}{2}}\alpha_k^{\frac{1}{2}}(s) \leq \frac{c_0^2|x-s|^2}{2\delta_0 t} + \frac{t\delta_0\alpha_k(s)}{2} \ ,$$

$$c_0|x-s|\alpha_k^{\frac{1}{2}}(s)P_k(s) \leq \frac{c_0^2|x-s|^2}{2\delta_0 t}P_k(s) + \frac{\delta_0 t}{2}\alpha_k(s)P_k(s) \qquad k=1,2,\ldots$$

olduğu kolayca görülür. Buradan,

$$c_0|x-s|\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^{\frac{1}{2}}(s)P_k(s) \le \frac{c_0^2|x-s|^2}{2\delta_0 t}\sum_{k=1}^{\infty}P_k(s)+\frac{\delta_0 t}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(s)P_k(s)$$

olur. (4.8) i göz önüne alırsak,

$$c_0|x-s|Q^{\frac{1}{2}}(s) \le \frac{c_0^2|x-s|^2}{2\delta_0 t}I+\frac{\delta_0 t}{2}Q(s) \qquad (4.9)$$

elde edilir.

$c_0>0$, $\delta_0>0$ sabitlerini,

$$\frac{c_0^2}{2\delta_0}<\frac{c}{2} \quad \text{ve} \quad \delta_0<1$$

olacak şekilde, yani,

$$c_0<\sqrt{c\delta_0} \quad \text{ve} \quad \delta_0<1$$

gibi seçelim. O halde (4.7) ve (4.9) dan,

$$\|K(t,x,s)\|_1 \le Sbt\, t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{c}{2}\frac{|x-s|^2}{t}}\left\|e^{-\frac{1}{2}tQ(s)}\right\|_1$$

yazabiliriz.

$|x-s|>1$ olduğuna göre,

$$t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{c}{4}\frac{|x-s|^2}{t}} \le \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{c}{4}\frac{1}{t}} \le Sbt$$

olduğu açıktır. Bundan dolayı;

$$\|K(t,x,s)\|_1 \le A\left\|e^{-\frac{1}{2}tQ(s)}\right\|_1 e^{-c\frac{|x-s|^2}{t}}$$

buluruz.

Sonuç: Eğer $Q(x)$ operatörü 1-4 şartlarını sağlıyorsa ve $k > 0$ için,

$$Q^{-k}(s) \in \sigma_1 \quad , (s \in E_3^+)$$

ise;

$$\|K(t,x,s)\|_1 \le A\|Q^{-k}(s)\|_1 e^{-c\frac{|x-s|^2}{t}} \quad , \quad |x-s| > 1 \tag{4.10}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat :

$$\left[\frac{1}{2}t\alpha_i(s)\right]^k e^{-\frac{1}{2}t\alpha_i(s)} \le \text{ Sbt}$$

olduğundan dolayı,

$$\left\|e^{-\frac{1}{2}tQ(s)}\right\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t\alpha_i(s)} \le \text{Sbt}\; t^{-k}\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{-k}(s) \tag{4.11}$$

olur.

$|x-s| > 1$ ise

$$t^{-k}e^{-\frac{c}{2}\frac{|x-s|^2}{t}} \le (\frac{1}{t})^k e^{-\frac{c}{2}\frac{1}{t}} \le \text{Sbt}$$

dır. Lemma 4.2 ye göre,

$$\|K(t,x,s)\|_1 \le \text{Sbt}\;\|Q^{-k}(s)\|_1 e^{-c\frac{|x-s|^2}{t}}$$

yazabiliriz. Böylece ispat tamamlanmış olur. Ayrıca;

$$\|K(t,x,s)\| \le At^{-1-b}e^{-c\frac{|x-s|^2}{t}-ct\alpha_1(s)} \quad , \quad |x-s| \le 1 \tag{4.12}$$

$$\|K(t,x,s)\| \le A\alpha_1^{-k}(s)e^{-c\frac{|x-s|^2}{t}-ct\alpha_1(s)} \quad , \quad |x-s| > 1 \tag{4.13}$$

eşitsizlikleri ise kolayca ispatlanabilir.

Şimdi, $K_2(t,x,s), K_3(t,x,s), \ldots$ çekirdeklerini sınırlandıralım.

(3.8) i kullanarak,

$$K_2(t,x,s) = \int_0^t d\tau \int_{E_3^+} K(t-\tau,x,\xi)K(t,\xi,s)d\xi$$

$$= \int_0^t d\tau \int_{\substack{|x-\xi|\le 1\\ |\xi-s|\le 1}} K(t-\tau,x,\xi)K(\tau,\xi,s)d\xi + \int_0^t d\tau \int_{\substack{|x-\xi|\le 1\\ |s-\xi|>1}} K(t-\tau,x,\xi)K(\tau,\xi,s)d\xi +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{\substack{|x-\xi|>1\\ |\xi-s|\le 1}} K(t-\tau,x,\xi)K(\tau,\xi,s)d\xi + \int_0^t d\tau \int_{\substack{|x-\xi|>1\\ |s-\xi|>1}} K(t-\tau,x,\xi)K(\tau,\xi,s)d\xi \tag{4.14}$$

$$= B_1 + B_2 + B_3 + B_4$$

yazabiliriz. $\|B_1\|$ i sınırlandıralım:

$$\|B_1\| = \left\| \int_0^t d\tau \int_{\substack{|x-\xi|\le 1\\ |\xi-s|\le 1}} K(t-\tau,x,\xi)K(\tau,\xi,s)d\xi \right\|_1$$

$$\le \left\| \int_0^{\frac{t}{2}} d\tau \int_{\substack{|x-\xi|\le 1\\ |\xi-s|\le 1}} K(t-\tau,x,\xi)K(\tau,\xi,s)d\xi \right\|_1 + \left\| \int_{\frac{t}{2}}^t d\tau \int_{\substack{|x-\xi|\le 1\\ |\xi-s|\le 1}} K(t-\tau,x,\xi)K(\tau,\xi,s)d\xi \right\|_1$$

$$\le \int_0^{\frac{t}{2}} d\tau \int_{\substack{|x-\xi|\le 1\\ |\xi-s|\le 1}} \|K(t-\tau,x,\xi)K(\tau,\xi,s)\|_1 d\xi + \int_{\frac{t}{2}}^t d\tau \int_{\substack{|x-\xi|\le 1\\ |\xi-s|\le 1}} \|K(t-\tau,x,\xi)K(\tau,\xi,s)\|_1 d\xi$$

$$\leq \int_0^{\frac{t}{2}} d\tau \int_{\substack{|x-\xi|\leq 1 \\ |\xi-s|\leq 1}} \|K(t-\tau,x,\xi)\|_1 \|K(\tau,\xi,s)\| d\xi + \int_{\frac{t}{2}}^{t} d\tau \int_{\substack{|x-\xi|\leq 1 \\ |\xi-s|\leq 1}} \|K(t-\tau,x,\xi)\| \, \|K(\tau,\xi,s)\|_1 d\xi =$$

$$= B_1^{(1)} + B_1^{(2)} \tag{4.15}$$

Lemma 4.1, (4.12) eşitsizliği ve Q(x) in 5 şartını sağladığını göz önüne alarak,

$$B_1^{(1)} = \int_0^{\frac{t}{2}} d\tau \int_{\substack{|x-\xi|\leq 1 \\ |\xi-s|\leq 1}} \|K(t-\tau,x,\xi)\|_1 \|K(\tau,\xi,s)\| d\xi$$

$$\leq Sbt \int_0^{\frac{t}{2}} \tau^{-1-b}(t-\tau)^{-1-b} d\tau \int_{\substack{|x-\xi|\leq 1 \\ |s-\xi|\leq 1}} \left\| e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)Q(\xi)} \right\|_1 e^{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} - c\frac{|\xi-s|^2}{\tau}} d\xi$$

$$\leq Sbt \left\| e^{-ctQ(s)} \right\|_1 \int_0^{t} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{-\frac{1}{2}+b} \tau^{-\frac{1}{2}+b}} \int_{E_3} \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}} \frac{1}{\tau^{\frac{3}{2}}} e^{-c\frac{|\xi-s|^2}{\tau}} d\xi$$

$$\leq Sbt \left\| e^{-ctQ(s)} \right\|_1 t^{\frac{1-4b}{2}} e^{-c\frac{|x-s|^2}{t}} \tag{4.16}$$

yazabiliriz. $B_1^{(2)}$ için,

$$B_1^{(2)} = \int_{\frac{t}{2}}^{t} d\tau \int_{\substack{|x-\xi|\leq 1 \\ |\xi-s|\leq 1}} \|K(t-\tau,x,\xi)\| \, \|K(\tau,\xi,s)\|_1 d\xi$$

$$\leq Sbt \int_{\frac{t}{2}}^{t} (t-\tau)^{-1-b}\tau^{-1-b} d\tau \int_{\substack{|x-\xi|\leq 1 \\ |s-\xi|\leq 1}} \left\| e^{-\frac{1}{2}ctQ(s)} \right\|_1 e^{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}} e^{-c\frac{|\xi-s|^2}{\tau}} d\xi$$

$$\leq Sbt \left\| e^{-ctQ(s)} \right\|_1 \int_0^{t} [\tau(t-\tau)]^{-1-b} d\tau \int_{E_3^+} e^{-c\frac{|x-s|^2}{t-\tau} - c\frac{|\xi-s|^2}{\tau}} d\xi$$

$$\leq Sbt \left\| e^{-ctQ(s)} \right\|_1 t^{\frac{1-4b}{2}} e^{-c\frac{|x-s|^2}{t}} \tag{4.17}$$

buluruz. $\|B_2\|_1$ i sınırlandırırsak,

$$\|B_2\|_1 = \left\| \int_0^t d\tau \int\limits_{\substack{|x-\xi|\leq 1 \\ |\xi-s|>1}} K(t-\tau, x, \xi) K(\tau, \xi, s) d\xi \right\|_1$$

$$\leq \int_0^t d\tau \int\limits_{\substack{|x-\xi|\leq 1 \\ |\xi-s|>1}} \| K(t-\tau, x, \xi) K(\tau, \xi, s) \|_1 d\xi$$

$$\leq \int_0^t d\tau \int\limits_{\substack{|x-\xi|\leq 1 \\ |s-\xi|>1}} \| K(t-\tau, x, \xi) \| \, \| K(\tau, \xi, s) \|_1 d\xi$$

$$\leq Sbt \left\| Q^{-k}(s) \right\|_1 \int_0^t [\tau(t-\tau)]^{-1-b} d\tau \int\limits_{\substack{|x-\xi|\leq 1 \\ |\xi-s|>1}} e^{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} - c\frac{|\xi-s|^2}{\tau}} d\xi$$

$$\leq Sbt \left\| Q^{-k}(s) \right\|_1 t^{\frac{1-4b}{2}} e^{-c\frac{|x-s|^2}{t}} \qquad (t<1) \tag{4.18}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Lemma 4.2, (4.12) eşitsizliğini kullanarak ve Q(x) in 5 şartını sağladığını göz önüne alarak $\|B_3\|_1$ için,

$$\|B_3\|_1 = \left\| \int_0^t d\tau \int\limits_{\substack{|x-\xi|>1 \\ |\xi-s|\leq 1}} K(t-\tau, x, \xi) K(\tau, \xi, s) d\xi \right\|_1$$

$$\leq \int_0^t d\tau \int_{\substack{|x-\xi|>1 \\ |\xi-s|\leq 1}} \|K(t-\tau, x, \xi)K(\tau, \xi, s)\|_1 d\xi$$

$$\leq \int_0^t d\tau \int_{\substack{|x-\xi|>1 \\ |\xi-s|\leq 1}} \|K(t-\tau, x, \xi)\|_1 \| K(\tau, \xi, s)\| d\xi$$

$$\leq Sbt \int_0^t [\tau(t-\tau)]^{-1-b} d\tau \int_{\substack{|x-\xi|>1 \\ |\xi-s|\leq 1}} \left\| e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)Q(\xi)} \right\|_1 e^{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}} - e^{-c\frac{|s-\xi|^2}{\tau}} d\xi$$

$$\leq Sbt \int_0^t [\tau(t-\tau)]^{-1-b} d\tau \int_{\substack{|x-\xi|>1 \\ |\xi-s|\leq 1}} e^{-\frac{c}{2(t-\tau)}} \left\| e^{-\frac{c}{2}(t-\tau)Q(s)} \right\|_1 e^{-\frac{c}{2}\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} - \frac{c}{2}\frac{|\xi-s|^2}{\tau}} d\xi$$

bulunur.

$$e^{-\frac{c}{2(t-\tau)}} \left\| e^{-\frac{c}{2}(t-\tau)Q(s)} \right\|_1 \leq Sbt\,(t-\tau)^{-k} \|Q^{-k}(s)\|_1 e^{-\frac{c}{2(t-\tau)}} \leq Sbt\, \|Q^{-k}(s)\|_1$$

olduğundan,

$$\|B_3\|_1 \leq Sbt\, \|Q^{-k}(s)\|_1 \int_0^t [\tau(t-\tau)]^{-1-b} d\tau \int_{E_3} e^{-\frac{c}{2}\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} - \frac{c}{2}\frac{|\xi-s|^2}{\tau}} d\xi$$

$$\leq Sbt\, \|Q^{-k}(s)\|_1\, t^{\frac{1-4b}{2}} e^{-c\frac{|x-s|^2}{t}} \tag{4.19}$$

yazabiliriz. $\|B_4\|_1$ i sınırlandırsak,

$$\|B_4\|_1 = \left\| \int_0^t d\tau \int_{\substack{|x-\xi|>1 \\ |\xi-s|>1}} K(t-\tau, x, \xi)K(\tau, \xi, s) d\xi \right\|$$

$$\le \int_0^t d\tau \int_{\substack{|x-\xi|>1 \\ |\xi-s|>1}} \|K(t-\tau, x, \xi)K(\tau, \xi, s)\|_1 \, d\xi$$

$$\le \int_0^t d\tau \int_{\substack{|x-\xi|>1 \\ |\xi-s|>1}} \|K(t-\tau, x, \xi)\| \, \|K(\tau, \xi, s)\|_1 \, d\xi$$

$$\le Sbt \int_0^t d\tau \int_{\substack{|x-\xi|>1 \\ |\xi-s|>1}} \|Q^{-k}(s)\|_1 e^{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}} e^{-c\frac{|\xi-s|^2}{\tau}} d\xi$$

$$\le Sbt \, \|Q^{-k}(s)\|_1 \int_0^t [\tau(t-\tau)]^{-1-b} d\tau \int_{E_3^+} e^{-c\frac{|x-s|^2}{t-\tau} - c\frac{|\xi-s|^2}{\tau}} d\xi$$

$$\le Sbt \, \|Q^{-k}(s)\|_1 \, t^{\frac{1-4b}{2}} e^{-c\frac{|x-s|^2}{t}} \tag{4.20}$$

eşitsizliğini buluruz. Elde edilen eşitsizlikleri (4.14) de yerine yazarsak,

$$\|K_2(t, x, s)\|_1 \le Sbt \, t^{\frac{1-4b}{2}} e^{-c\frac{|x-s|^2}{t}} \left[\|e^{-ctQ(s)}\|_1 + \|Q^{-k}(s)\|_1 \right] \tag{4.21}$$

elde ederiz. Yukarıdaki işlemlere benzer şekilde,

$|x-s| > 1$ halinde;

$$\|K_2(t, x, s)\|_1 \le Sbt \, \|Q^{-k}(s)\|_1 e^{-c\frac{|x-s|^2}{t}} \tag{4.22}$$

eşitsizliğini elde edilir. Tamamen benzer olarak,

$$\|K_2(t, x, s)\| \le Sbt \, t^{\frac{1-4b}{2}} e^{-c\frac{|x-s|^2}{t} - ct\alpha_1(s)} \quad , \qquad |x-s| \le 1$$

$$\|K_2(t, x, s)\| \le Sbt \, \alpha_1^{-k}(s) e^{-c\frac{|x-s|^2}{t}} \quad , \qquad |x-s| > 1$$

eşitsizlikleri de ispatlanabilir.

$K_3(t,x,s)$, $K_4(t,x,s)$,... için benzer sınırlandırmaları yaparsak,

$$\|K_{m_0}(t,x,s)\|_1 \le Sbt\, t^{\frac{m_0(3-2b)-5}{2}} e^{-c\frac{|x-s|^2}{t}}\left[e_1^{-ctQ(s)} + \|Q^{-k}(s)\|_1\right] \quad , \quad |x-s| \le 1$$

$$\|K_{m_0}(t,x,s)\|_1 \le Sbt\, \|Q^{-k}(s)\|_1 e^{-c\frac{|x-s|^2}{t}} \quad , \quad |x-s| > 1$$

buluruz. m_0 sayısını,

$$\frac{m_0(3-2b)-5}{2} \ge k$$

eşitsizliğini sağlayacak yani,

$$m_0 \ge \frac{2k+5}{3-2b} \qquad (b < \frac{3}{2})$$

olacak şekilde seçelim $(t < 1)$;

$$\|K_{m_0}(t,x,s)\|_1 \le Sbt\, t^k e^{-c\frac{|x-s|^2}{t}}\left[\|e^{-ctQ(s)}\|_1 + \|Q^{-k}(s)\|_1\right]$$

olur.

(4.11) eşitsizliğini göz önüne alarak bir önceki eşitsizliği,

$$\|K_{m_0}(t,x,s)\|_1 \le A\|Q^{-k}(s)\|_1 e^{-c\frac{|x-s|^2}{t}} \quad , \quad |x-s| \le 1 \tag{4.23}$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece, (4.12), (4.23) ü kullanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$\|K_{m_0+1}(t,x,s)\|_1 = \left\|\int_0^t d\tau \int_{E_3^+} K(t-\tau,x,\xi)K_{m_0}(\tau,\xi,s)d\xi\right\|_1$$

$$\leq \int_0^t d\tau \int_{E_3^+} \|K(t-\tau,x,\xi)K_{m_0}(\tau,\xi,s)\|_1 d\xi$$

$$\leq \int_0^t d\tau \int_{E_3^+} \|K(t-\tau,x,\xi)\| \, \|K_{m_0}(\tau,\xi,s)\|_1 d\xi$$

$$\leq A^2 \|Q^{-k}(s)\|_1 \int_0^t (t-\tau)^{-1-b} d\tau \int_{E_3} e^{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}-c\frac{|\xi-s|^2}{\tau}} d\xi$$

$$\leq A^2 \|Q^{-k}(s)\|_1 \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{-\frac{1}{2}+b}\tau^{-\frac{1}{2}+b}} \int_{E_3} \frac{1}{[\tau(t-\tau)]^{\frac{3}{2}}} e^{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}-c\frac{|\xi-s|^2}{\tau}} d\xi$$

$$\leq A^2 \|Q^{-k}(s)\|_1 B\left(\frac{3-2b}{2},\frac{3-2b}{2}\right)\left(\frac{\pi}{c}\right)^{\frac{3}{2}} t^{\frac{1-4b}{2}} e^{-c\frac{|x-s|^2}{t}}$$

Matematik tümevarım metodu ile,

$$\|K_{m_0+n}(t,x,s)\|_1 \leq A^{n+1}\|Q^{-k}(s)\|_1 \left(\frac{\pi}{c}\right)^{\frac{3n}{2}} \frac{\Gamma^{n+1}\left(\frac{3-2b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{(n+1)(3-2b)}{2}\right)} t^{\frac{(n+1)(3-2b)-5}{2}} e^{-c\frac{|x-s|^2}{t}} \tag{4.24}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Lemma 4.1, Lemma 4.2 ve (4.22)-(4.24) eşitsizliklerinden

$$\|\varphi(t,x,s)\|_1 = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} K_i(t,x,s) \right\|_1 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|K_i(t,x,s)\|_1$$

$$\leq Sbt\, e^{-c\frac{|x-s|^2}{t}} \left[t^{-1-b} \|e^{-ctQ(s)}\|_1 + \|Q^{-k}(s)\|_1 \right] \quad , \qquad |x-s| \leq 1 \tag{4.25}$$

yazabiliriz. Böylece,

$$\|\varphi(t,x,s)\|_1 \leq Sbt\, \|Q^{-k}(s)\|_1 e^{-c\frac{|x-s|^2}{t}} \quad , \; |x-s| > 1 \tag{4.26}$$

elde edilir. Dolayısıyla; aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.1. Eğer Q(x) operatör fonksiyonu 1-2 ve 4-5 koşullarını sağlıyorsa ve ek olarak $\forall x \in E_3^+$ için $Q^{-k}(x) \in \sigma_1$ ise;

$$\|\varphi(t,x,s)\|_1 \le Sbt\, e^{-c\frac{|x-s|^2}{t}}\left[t^{-1-b}\|e^{-ctQ(s)}\|_1 + \|Q^{-k}(s)\|_1\right] \quad , \qquad |x-s| \le 1$$

$$\|\varphi(t,x,s)\|_1 \le Sbt\, \|Q^{-k}(s)\|_1 e^{-c\frac{|x-s|^2}{t}} \quad , \qquad |x-s| > 1$$

eşitsizlikleri doğrudur. Burada, k herhangi pozitif sayıdır.

Aynı zamanda,

$$\|\varphi(t,x,s)\| \le Sbt\, t^{-1-b} e^{-c\frac{|x-s|^2}{t}} \tag{4.27}$$

eşitsizliğinin de doğru olduğu ispatlanabilir.

5. N(λ) fonksiyonunun asimptotik davranışı

Bu kısımda; önceden elde ettiğimiz sonuçların yardımı ile, $G(t,x,s)$ Green fonksiyonunun $t \to 0+$ için davranışını bulacağız. Bunun yardımıyla, L operatörünün spektrumunun saf-ayrık olduğunu göstereceğiz ve $N(\lambda)$ nın asimptotik ifadesini elde edeceğiz.

Daha sonra kullanacağımız aşağıdaki eşitsizliği yazalım[19]:

$$\int_{E_3} e^{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}-c\frac{|\xi-s|^2}{\tau}}\left[(t-\tau)\tau\right]^{-\frac{3}{2}} d\xi \le Sbt\, t^{-\frac{3}{2}} e^{-c'\frac{|x-s|^2}{t}} \qquad , (0 < c' < c) \qquad (5.1)$$

Teorem 5.1. $Q(x)$ operatör fonksiyonu, teorem 4.1 in koşullarını sağlıyorsa; $t \to 0+$ için,

$$G(t,x,s) = e^{-tQ(s)}G_0(t,x,s) + O(1)t^{-b}e^{-c\frac{|x-s|^2}{t}}\left[\|Q^{-k}(s)\|_1 + \|e^{-ctQ(s)}\|_1\right]$$

asimptotik formülü doğrudur. Burada; $O(1)$ sembolü, σ_1 normu ve x,s,t değişkenlerine göre düzgün sınırlılığı ifade etmektedir.

İspat : (3.5) i göz önüne alalım:

$$\|G(t,x,s) - e^{-tQ(s)}G_0(t,x,s)\|_1 = \left\| \int_0^t d\tau \int_{E_3^+} G_0(t-\tau,x,\xi)e^{-(t-\tau)Q(\xi)}\varphi(\tau,\xi,s)d\xi \right\|_1$$

$$\le \int_0^{\frac{t}{2}} d\tau \int_{E_3^+} \|G_0(t-\tau,x,\xi)e^{-(t-\tau)Q(\xi)}\varphi(\tau,\xi,s)\|_1 d\xi$$

$$+\int_{\frac{t}{2}}^{t} d\tau \int_{E_3^+} \|G_0(t-\tau,x,\xi)e^{-(t-\tau)Q(\xi)}\varphi(\tau,\xi,s)\|_1 d\xi = D_1 + D_2 \qquad (5.2)$$

Önce D_1 i sınırlandıralım:

$$D_1 = \int_0^{\frac{t}{2}} d\tau \int_{E_3^+} \|G_0(t-\tau,x,\xi)e^{-(t-\tau)Q(\xi)}\varphi(\tau,\xi,s)\|_1 d\xi \qquad (5.3)$$

$$= \int_0^{\frac{t}{2}} d\tau \int_{|s-\xi|\le 1} \left\|G_0(t-\tau, x, \xi)e^{-(t-\tau)Q(\xi)}\varphi(\tau, \xi, s)\right\|_1 d\xi$$

$$+ \int_0^{\frac{t}{2}} d\tau \int_{|s-\xi|> 1} \left\|G_0(t-\tau, x, \xi)e^{-(t-\tau)Q(\xi)}\varphi(\tau, \xi, s)\right\|_1 d\xi$$

Yukarıdaki ifadenin birinci kısmını, (4.1), (4.27) ve (5.1) eşitsizliklerini ve Q(x) in 5 şartını sağladığını kullanarak sınırlandırırsak,

$$\int_0^{\frac{t}{2}} d\tau \int_{|s-\xi|\le 1} \left\|G_0(t-\tau, x, \xi)e^{-(t-\tau)Q(\xi)}\varphi(\tau, \xi, s)\right\|_1 d\xi$$

$$\le \int_0^{\frac{t}{2}} d\tau \int_{|s-\xi|\le 1} \left\|G_0(t-\tau, x, \xi)\right\| \left\|e^{-(t-\tau)Q(\xi)}\right\|_1 \left\|\varphi(\tau, \xi, s)\right\| d\xi$$

$$\le Sbt \int_0^{\frac{t}{2}} (t-\tau)^{-\frac{3}{2}}\tau^{-1-b} d\tau \int_{|s-\xi|\le 1} \left\|e^{-c_1 t Q(s)}\right\|_1 e^{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} - c\frac{|\xi-s|^2}{\tau}} \, d\xi$$

$$\le Sbt \left\|e^{-c_1 t Q(s)}\right\|_1 \int_0^{t} \tau^{\frac{1}{2}-b} d\tau \int_{E_3} e^{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} - c\frac{|\xi-s|^2}{\tau}} \left[\tau(t-\tau)\right]^{-\frac{3}{2}} d\xi$$

$$\le Sbt \left\|e^{-c_1 t Q(s)}\right\|_1 e^{-c_1\frac{|x-s|^2}{t}} t^{-\frac{3}{2}} \int_0^{t} \tau^{\frac{1}{2}-b} d\tau$$

$$\le Sbt\, t^{-b} \left\|e^{-c_1 t Q(s)}\right\|_1 e^{-c_1\frac{|x-s|^2}{t}} \tag{5.4}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

(4.1), (4.26) ve (5.1) eşitsizliklerine göre, (5.3) ün ikinci kısmını sınırlandırırsak;

$$\int_0^{\frac{t}{2}} d\tau \int_{|s-\xi|> 1} \left\|G_0(t-\tau, x, \xi)e^{-(t-\tau)Q(\xi)}\varphi(\tau, \xi, s)\right\|_1 d\xi$$

$$\leq \int_0^{\frac{t}{2}} d\tau \int_{|s-\xi|>1} \|G_0(t-\tau,x,\xi)\| \, \|e^{-(t-\tau)Q(\xi)}\| \, \|\varphi(\tau,\xi,s)\|_1 d\xi$$

$$\leq Sbt \int_0^{\frac{t}{2}} (t-\tau)^{-\frac{3}{2}} d\tau \int_{|s-\xi|>1} \|Q^{-k}(s)\|_1 e^{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}-c\frac{|\xi-s|^2}{\tau}} d\xi$$

$$\leq Sbt \|Q^{-k}(s)\|_1 \int_0^t \tau^{\frac{3}{2}} d\tau \int_{E_3} e^{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}-c\frac{|\xi-s|^2}{\tau}} [\tau(t-\tau)]^{-\frac{3}{2}} d\xi$$

$$\leq Sbt \|Q^{-k}(s)\|_1 t^{-\frac{3}{2}} e^{-c_1\frac{|x-s|^2}{t}} \int_0^t \tau^{\frac{3}{2}} d\tau \leq$$

$$\leq Sbt\, t \|Q^{-k}(s)\|_1 e^{-c_1\frac{|x-s|^2}{t}} \tag{5.5}$$

yazabiliriz. (5.4) -(5.5) den,

$$D_1 \leq Sbt\, t^{-b} e^{-c\frac{|x-s|^2}{t}} \left[\|e^{-ctQ(s)}\|_1 + \|Q^{-k}(s)\|_1 \right] \tag{5.6}$$

buluruz.

(4.1) ve (4.25) kullanarak D_2 yi sınırlandırırsak,

$$D_2 = \int_{\frac{t}{2}}^{t} d\tau \int_{E_3^+} \|G_0(t-\tau,x,\xi)\, e^{-(t-\tau)Q(\xi)} \varphi(\tau,\xi,s)\|_1 d\xi$$

$$\leq \int_{\frac{t}{2}}^{t} d\tau \int_{E_3^+} \|G_0(t-\tau,x,\xi)\, e^{-(t-\tau)Q(\xi)}\| \, \|\varphi(\tau,\xi,s)\|_1 d\xi$$

$$\leq Sbt \int_{\frac{t}{2}}^{t} d\tau \int_{E_3} (t-\tau)^{-\frac{3}{2}} e^{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}} \tau^{-1-b} e^{-c\frac{|\xi-s|^2}{\tau}} \left[\|Q^{-k}(s)\|_1 + \|e^{-c\tau Q(s)}\|_1 \right] d\xi$$

$$\leq Sbt \left[\|Q^{-k}(s)\|_1 + \|e^{-c_1 tQ(s)}\|_1 \right] \int_{\frac{t}{2}}^{t} d\tau \int_{E_3} \tau^{-1-b} (t-\tau)^{-\frac{3}{2}} e^{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}-c\frac{|\xi-s|^2}{\tau}} d\xi$$

$$\leq Sbt \left[\|Q^{-k}(s)\|_1 + \|e^{-c_1 tQ(s)}\|_1 \right] \int_0^t \tau^{\frac{1}{2}-b} d\tau \int_{E_3} e^{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}} e^{-c\frac{|\xi-s|^2}{\tau}} [\tau(t-\tau)]^{-\frac{3}{2}} d\xi$$

$$\leq Sbt\, t^{-\frac{3}{2}} e^{-c_1 \frac{|x-s|^2}{t}} \left[\|Q^{-k}(s)\|_1 + \|e^{-c_1 t Q(s)}\|_1 \right] \int_0^t \tau^{-\frac{1}{2}-b} d\tau$$

$$\leq Sbt\, t^{-b} \left[\|Q^{-k}(s)\|_1 + \|e^{-c_1 t Q(s)}\|_1 \right] e^{-c_1 \frac{|x-s|^2}{t}}$$

elde ederiz. D_1 ve D_2 ifadelerini (5.2) de yerine yazarsak,

$$G(t,x,s) = e^{-tQ(s)} G_0(t,x,s) + O(1) t^{-b} e^{-c\frac{|x-s|^2}{t}} \left[\|Q^{-k}(s)\|_1 + \|e^{-ctQ(s)}\|_1 \right]$$

elde ederiz. Böylece, teorem ispatlanır.

(3.1)-(3.3) probleminin Green fonksiyonu, $G(t,x,s)$ olduğundan dolayı;

$$u = \int_{E_3^+} G(t,x,s)\Psi(s)ds$$

yazabiliriz.

$$u = e^{-tL}\Psi$$

olduğunu göz önüne alalım . Buradan,

$$e^{-tL}\Psi = \int_{E_3^+} G(t,x,s)\Psi(s)ds$$

olur. Bu ise; e^{-tL} nin $\forall\, t > 0$ için $G(t,x,s)$ çekirdekli integral operatör olduğunu gösterir.

Teorem 5.1 e göre,

$$\operatorname{tr} G(t,x,x) = \operatorname{tr} G_0(t,x,x) e^{-tQ(x)} + O(1) t^{-b} [\operatorname{tr} Q^{-k}(x) + \operatorname{tr} e^{-ctQ(x)}] \qquad (5.7)$$

yazabiliriz.

Burada,

$$\operatorname{tr} Q^{-k}(x) = \|Q^{-k}(x)\|_1 \quad , \qquad (Q(x) \geq I)$$

$$\operatorname{tr} e^{-ctQ(x)} = \|e^{-ctQ(x)}\|_1$$

olduğunu göz önüne aldık.

$G_0(t,x,s)$ operatör fonksiyonunun (1.4) deki ifadesini, $b < \frac{3}{2}$ ve $Q(x)$ in 6 ve 7 şartlarını sağladığını göz önüne alarak (5.7) den,.

$$\int_{E_3^+} \operatorname{tr} G(t,x,x)dx = \left(2\sqrt{\pi t}\right)^{-3} \int_{E_3^+} \operatorname{tr} e^{-tQ(x)}dx$$

$$-\left(2\sqrt{\pi t}\right)^{-3} \int_{E_3^+} e^{-\frac{x_3^2}{t}} \operatorname{tr} e^{-tQ(x)}dx + O(1)t^{-b} \int_{E_3^+} \operatorname{tr} Q^{-k}(x)dx + O(1)t^{-b} \int_{E_3^+} \operatorname{tr} e^{-ctQ(x)}dx$$

ve $t \to 0$ için

$$\int_{E_3^+} \operatorname{tr} G(t,x,x)dx \sim \left(2\sqrt{\pi t}\right)^{-3} \int_{E_3^+} \operatorname{tr} e^{-tQ(x)}dx \tag{5.8}$$

yazabiliriz. $e^{-tQ(x)} \in \sigma_1$ ve $t > 0$ için;

$$\int_{E_3^+} \operatorname{tr} e^{-tQ(x)}dx < \infty$$

şartının sağlandığını göz önüne alarak[13],

$$\operatorname{tr} e^{-tL} = \int_{E_3^+} \operatorname{tr} G(t,x,x)dx < \infty \tag{5.9}$$

yazabiliriz. Yani, e^{-tL} $\forall t > 0$ değerinde, $H_1 = L_2(E_3^+, H)$ uzayında çekirdek operatörüdür. Diğer yandan; e^{-tL} ve L operatörlerinin spektrumu arasında

$$S\{e^{-tL}\} = e^{-tS\{L\}}$$

formülü olduğundan dolayı, L operatörünün spektrumunun saf-ayrık olduğu sonucuna varırız.

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n \le \ldots$$

sayıları, L operatörünün özdeğerleri olsun. $N(\lambda)$ ile, L nin $\lambda > 0$ sayısını aşmayan özdeğerleri sayısını gösterelim. Yani,

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_n \le \lambda} 1$$

olsun. Bu durumda,

$$\operatorname{tr} e^{-tL} = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-t\lambda_i} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dN(\lambda)$$

olduğu kolayca görülür. (5.9) ve yukarıdaki eşitliğe göre,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} dN(\lambda) = \int_{E_3^+} \operatorname{tr} G(t,x,x)d$$

buluruz. (5.8) i göz önüne alırsak $t \to 0$ için,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} dN(\lambda) \sim \left(2\sqrt{\pi t}\right)^{-3} \int_{E_3^+} \operatorname{tr} e^{-tQ(x)} dx \tag{5.10}$$

elde ederiz.

$$p_i(\lambda) = \frac{1}{6\pi^2} \int_{\alpha_i(x) \leq \lambda} (\lambda - \alpha_i(x))^{\frac{3}{2}} dx$$

olsun. Aşağıdaki integrali göz önüne alalım:

$$\int_0^\infty e^{-t\lambda} d\lambda \left\{ \int_0^\lambda (\lambda - \nu)^{\frac{1}{2}} d\sigma(\nu) \right\}$$

integrasyon sırasını değiştirirsek,

$$\int_0^\infty e^{-t\lambda} d\lambda \left\{ \int_0^\lambda (\lambda - \nu)^{\frac{1}{2}} d\sigma(\nu) \right\} = \int_0^\infty d\sigma(\nu) \left\{ \int_\nu^\infty e^{-\lambda t} (\lambda - \nu)^{\frac{1}{2}} d\lambda \right\}$$

olur. $\lambda - \nu = s$ dönüşümü yaparsak yukarıdaki integral,

$$\int_0^\infty d\sigma(\nu) \left\{ \int_0^\infty e^{-(\nu+s)t} s^{\frac{1}{2}} ds \right\} = \int_0^\infty e^{-\nu t} d\sigma(\nu) \left\{ \int_0^\infty e^{-st} s^{\frac{1}{2}} ds \right\}$$

halini alır.

$$\int_0^\infty e^{-st} s^{\frac{1}{2}} ds = t^{-\frac{3}{2}} \Gamma(\tfrac{3}{2})$$

olduğundan,

$$\int_0^\infty e^{-t\lambda} d\lambda \left\{ \int_0^\lambda (\lambda - \nu)^{\frac{1}{2}} d\sigma(\nu) \right\} = t^{-\frac{3}{2}} \Gamma(\tfrac{3}{2}) \int_0^\infty e^{-\nu t} d\sigma(\nu)$$

olur.

Buradan,

$$\int_0^\infty e^{-\nu t}d\sigma(\nu) = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})}\int_0^\infty e^{-t\lambda}d\lambda\left\{\int_0^\lambda(\lambda-\nu)^{\frac{1}{2}}d\sigma(\nu)\right\}$$

elde edilir.

$$\int_{E_3^+} e^{-t\alpha_i(x)}dx = \int_0^\infty e^{-\lambda t}d\sigma(\lambda)\,, \quad \sigma(\lambda) = \text{ölçüm}\ \{x : \alpha_i(x) < \lambda\}$$

eşitliğini kullanarak,

$$\int_{E_3^+} e^{-t\alpha_i(x)}dx = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})}\int_0^\infty e^{-t\lambda}d\lambda\left\{\int_0^\lambda(\lambda-\nu)^{\frac{1}{2}}d\sigma(\nu)\right\}$$

elde ederiz.

$$\int_{E_3^+} e^{-t\alpha_i(x)}dx = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})}\frac{2}{3}\int_0^\infty e^{-t\lambda}d_\lambda\left\{\int_0^\lambda(\lambda-\nu)^{\frac{3}{2}}d\sigma(\nu)\right\}$$

Buradan,

$$\left(2\sqrt{\pi t}\right)^{-3}\int_{E_3^+} e^{-t\alpha_i(x)}dx = \int_0^\infty e^{-\lambda t}dp_i(\lambda)$$

elde edilir. (5.10) u göz önüne alarak,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}dN(\lambda) \sim \int_0^\infty e^{-\lambda t}dp(\lambda)$$

yazabiliriz. Burada

$$p(\lambda) = \frac{1}{6\pi^2}\sum_i \int_{\alpha_i(x)\le\lambda}(\lambda-\alpha_i(x))^{\frac{3}{2}}dx$$

dır.

$P(\lambda)$, 8 şartını sağladığından dolayı, M.Keldysh ve B.Korenblum teoremini[9] kullanarak, son iki ifadeden $\lambda \to \infty$ için,

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{6\pi^2} \sum_i \int_{\alpha_i(x)\leq\lambda} (\lambda - \alpha_i(x))^{\frac{3}{2}} dx \tag{5.11}$$

buluruz. Böylece, çalışmanın temel teoremi ispatlanmış olur.

Teorem 5.2. $Q(x)$ operatör fonksiyonu 1-8 şartlarını sağlıyorsa; L operatörünün $\lambda > 0$ sayısını aşmayan özdeğerleri sayısı $N(\lambda)$ için,

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{6\pi^2} \sum_i \int_{\alpha_i(x)\leq\lambda} (\lambda - \alpha_i(x))^{\frac{3}{2}} dx, \quad \lambda \to \infty$$

asimptotik formülü doğrudur.

SONUÇ

Bu çalışmada $H_1 = L_2(E_3^+, H)$ Hilbert uzayında operatör katsayılı,

$$-\Delta u + Q(x)u, \quad x \in E_3^+$$

diferansiyel ifadesi ve

$$u(x_1, x_2, x_3)\big|_{x_3=0} = 0$$

sınır şartı ile oluşturulan kendine eş L operatörünün spektrumunun saf-ayrık olduğu gösterilmiş ve $\lambda > 0$ sayısını aşmayan özdeğerler sayısı olan;

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} 1$$

fonksiyonu için,

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{6\pi^2} \sum_i \int_{\alpha_i(x) \le \lambda} (\lambda - \alpha_i(x))^{\frac{3}{2}} dx, \quad \lambda \to \infty$$

asimptotik formülü elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Bayramoğlu, M., Operatör Katsayılı Adi Diferansiyel Denklemlerin Özdeğerlerinin Asimptotik Davranışı, Bakü "Fonksiyonel Analiz ve Uygulamaları", (1971), 144-166, (R*).

[2] Boymatov, K., Operatör Diferansiyel Denklemlerin Spektrumunun Asimptotik Davranışı, Uspekhi Mat.Bil., Cilt 73, No.4, (1973), 207-208, (R).

[3] Clark, C., The Asymptotic Distribution of Eigenvalues and Eigenfunctions for Elliptic Boundary Value Problems, SIAM Review, Vol.9, No.4, October, (1967).

[4] Davies, E.B., Spectral Theory and Differential Operators, Cambridge University Press, 1995.

[5] Eidel'man, S.D., Parabolic Systems, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1969.

[6] Gorbachuk, V.I., and Gorbachuk, M.L., Boundary Value Problems for Operator Differential Equations, Kluwer Academic Publishers Group, London, 1991.

[7] Kac, M., Can one Hear the Shape of a Drum? Amer.Math.Monthly 73, (II) (1966), 1-23.

[8] Kato, T., Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag, 1980.

[9] Korenblum, B.I., Fonksiyonların Oranı için Genel Tauber Teoremi, Soviet Math. Dokl. Cilt 88 (1953), 745-748, (R).

[10] Kostjucenko, A.G., Levitan B.M, Asymptotic Behaviour of Eigenvalues of the Operator Sturm-Liouville Problem, English Transl. in Functional Anal. Appl.1 (1967).

[11] Kostjucenko, A.G., Kendine Eşlenik Eliptik Operatörlerin Spektral Fonksiyonunun Asimptotik Davranışı, 7. Matematik Yaz Okulu, Kiev, (1968), 42-117, (R).

[12] Kostjucenko, A.G., and Sargsjan I.S., Özdeğerlerin Asimptotik Dağılımı, Bilim, Moskova, 1979, (R)

[13] Krillov, A.A., Temsil Teorisinin Elemanları, Moskova, Bilim, (1986), (R).

[14] Levendorskii, S., Asymptotic Distribution of Eigenvalues of Differential Operators, Kluwer Academic Publishers Group, London, 1990.

* R, Kaynağın Rusça olduğunu göstermektedir.

[15] Levitan, B.M., and Sargsjan, I.S., Sturm-Liouville and Dirac Operators, Kluwer Academic Publishers Group, London, 1991.

[16] Minakshisundaram, S.A., Generalization of Epstein Zeta Functions, Canad. J. Math., 1 (1949), 320-327.

[17] Otelbayev, M., Sturm-Liouville Operatörünün Spektrumunun Davranışı, Alma-Ata, Bilim, (1990), (R).

[18] Solomyak, M.Z., Asymptotics of the Spectrum of the Schrödinger Operator with Nonregular Homogeneous Potential, Math. Ussr Sbornik Vol.55, No.1, (1986).

[19] Wet, J.S.De., and Mandl, F., On the Asymptotic Distribution of Eigenvalues, Proc. Roy. Soc. Ser. A, 200, (1949-1950), 572-580.

[20] Weyl, H., Das Asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte Linearer Partieller Differentialgleichungen, Math. Ann., 71 (1912), 441-479.

[21] Yosida, K., Functional Analysis, New-York, 1980.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Fatih TAŞÇI
Doğum Tarihi	: 13.11.1966
Doğum Yeri	: İkizdere / RİZE
İlk Öğretim	: 1972-1977 Zeynep Kamil İlkokulu
Orta Eğitim	: 1977-1983 Haydarpaşa Lisesi
Lisans Öğretim	: 1984-1988 Y.T.Ü. Mühendislik Fakültesi Matematik Mühendisliği Bölümü
Yüksek Lisans Öğretimi	: 1989-1992 Y.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü
Göreve Başlama	: 1989 Y.T.Ü. Mühendislik Fakültesi Matematik Mühendisliği Bölümü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalında Araştırma Görevlisi
Doktora Öğretimi	: 1992 Y.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü