YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MODÜLER FONKSİYONLAR
VE
MODÜLER FORMLAR

Erhan ÇALIŞKAN

F.B.E. Matematik Anabilim Dalında
hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Prof.Dr.Yasemin KAHRAMANER

İSTANBUL, 1996

İÇİNDEKİLER

Sayfa no

İÇİNDEKİLER	i
SEMBOL LİSTESİ	iv
ŞEKİL LİSTESİ	vi
TEŞEKKÜR	vii
ÖZET	viii
SUMMARY	ix
GİRİŞ	1
I. MODÜLER GRUP	5
1.1. İnhomojen Lineer Dönüşümler	5
1.1.1. Tanım	5
1.1.2. İnhomojen Lineer Dönüşümlerin Önemli Özellikleri	5
1.1.3. İnhomojen Lineer Dönüşümlerin Sabit Noktalar ile Sınıflanması	5
1.1.4. Reel Katsayılı İnhomojen Lineer Dönüşümler ve Öklid Olmayan Geometri	6
1.2. Homojen Lineer Dönüşümler	7
1.2.1. Tanım	7
1.2.2. Bir Homojen Lineer Dönüşümün Jordan Normal Formu	8
1.2.3. Homojen ve İnhomojen Lineer Dönüşümler Arasındaki İlişki	10
1.2.4. Aynı Sabit Noktalı Dönüşümler	16
1.3. Modüler Grup ve Sabit Noktalar	16
1.3.1. Tanım ve Sınıflama	16
1.3.2. Parabolik Durum	22
1.3.3. Gauss Sayı Cismi Üzerinde Eliptik Durum	24
1.3.4. Birimin Küp Köklerinin Cismi Üzerindeki Eliptik Durum	27

Sayfa no

1.3.5. Hiperbolik Durum	30
1.4. Üreteçler ve Bağıntılar	36
1.4.1. Üretim	36
1.4.2. Tanımlanan Bağıntılar	37
1.5. Temel Bölge	39
1.5.1. Temel Bölge	39
1.5.2. Bir Temel Bölgenin Varlığının Sonuçları	45
1.5.3. Üst Yarı Düzlemin Bölümlere Ayrılması	46
1.5.4. Komşuluklar ve Temel Bölgenin Kanonik Formu	48
1.5.5. Normal Çokgen	49
II. BİRİNCİ BASAMAK MODÜLER FONKSİYONLAR	52
2.1. Tanım ve Modüler Fonksiyonların Özellikleri	52
2.1.1. Tanım	52
2.1.2. Kuvvet Serilerine Açılımlar	53
2.1.3. c-Noktalarında Mertebe	56
2.1.4. c-Noktalarının Sayısı	57
2.1.5. Normalleştirme	61
2.2. Yansımalarla Modüler Grubun Genişlemesi	63
2.2.1. $\mathbb{C}$ de Yansımalar	63
2.2.2. Yansımalarla $\overline{\Gamma}$ nın Genişlemesi	64
2.2.3. Γ^* İçin Temel Bölge	65
2.2.4. Üst Yarı Düzlemin Bölümlere Ayrılması	66
2.3. Modüler Fonksiyonları Varlığı ve Mutlak Modüler J Değişmezi	67
2.3.1. Modüler J Fonksiyonunun Oluşturulması	67
2.3.2. Ana Teorem	70
2.3.3. J nin Tersinin Riemann Yüzeyi	70
2.4. Modüler Formlar	72

Sayfa no

2.4.1. Tanım 72
2.4.2. Kuvvet Serilerine Açılımlar 76
2.4.3. Sıfırlar ve Kutuplar 80
2.5. Tam Modüler Formlar 91
2.5.1. Tanım 91
2.5.2. Modüler Fonksiyonların Türevi 92
2.5.3. Tam Modüler Formların Kuruluşu 96
2.5.4. Tam Modüler Formlar İçin Baz 101
2.5.5. Tam Modüler Formların Bölümleri Olarak Modüler Fonksiyonların Gösterilişi 106
SONUÇ 110
KAYNAKLAR 111
ÖZGEÇMİŞ

SEMBOL LİSTESİ

$\mathscr{A}$: $\mathbb{C}$ üzerinde 2x2 lik tersinir matrisler grubu

$\hat{\mathbb{C}}$: Kompaktlanmış kompleks düzlem

$\Delta(\omega)$: $\mathbb{Q}$ üzerinde bir kuadratik sayı cisminin ω sayısının diskriminantı

$\Delta^* = G_4^{*3} - G_6^{*2}$

$\cong$: İzomorfizm

$\mathcal{F}$: Γ nın temel bölgesi

$\mathcal{F}^*$: Γ^* ın temel bölgesi

$\mathcal{F}^{*0}$: $\mathcal{F}^*$ ın içi

$\mathcal{F}_S$: $\mathcal{F}$in $S \in \Gamma$ altındaki görüntüsü

$f_{a,b,c}$: $\dfrac{J'^a}{J^b (J-1)^c}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$: $-2a$ boyutlu tam modüler form

f_k : -k boyutlu modüler form

$$f|_k A: |A|^{1/2} (c\tau + d)^{-k} f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right), |A| > 0$$

$\phi_A(x)$: det $(xI - A)$, $A \in \mathscr{A}$

$$\Gamma: \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

$\overline{\Gamma}: \{ \overline{A} | A \in \Gamma \}$

$\mathcal{G}$: $f(\tau)$ nun tüm sıfır ve kutuplarını içeren temel bölgenin kesilmiş hali

$G_k^*, k \geq 4$: $-k$ boyutlu tam modüler form (-k mertebedeki Eisentein serisi)

$\mathscr{H}$: Üst yarı düzlem ($\mathrm{Im}\tau > 0$)

$\mathscr{H}^*$: Genişletilmiş üst yarı düzlem ($\mathscr{H} \cup \mathbb{Q} \cup U\{i\infty\}$)

$-\mathscr{H}$: Alt yarı düzlem ($\mathrm{Im}\tau < 0$)

$\mathscr{H}_{M^*}$: σ_3 ün $M^* \in \Gamma^*$ altındaki görüntüsü

:= : Tanım ve eşitlik

$J(\tau)$:Mutlak modüler değişmez (Klein'ın modüler fonksiyonu)

$\mathbb{L}$: Homojen lineer dönüşümler grubu

$\mathcal{L}$: İnhomojen lineer dönüşümler grubu

L : İnhomojen lineer dönüşüm

L_A : Homojen lineer dönüşüm

N(c) : c-noktalarının sayısı

N.E. : Öklid olmayan

$\mathbb{Q}(\sqrt{D})$: Kuadratik sayı cismi, D>0 ve tam kare değil

S,T : Γ nın üreteçleri

τ : Üst yarı düzlemin kompleks değişkeni

$t_{\bar{\tau}}$: Yerel değişken

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa no
Şekil 1.	40
Şekil 2.	47
Şekil 3.	49
Şekil 4.	58
Şekil 5.	62
Şekil 6.	67
Şekil 7.	69
Şekil 8.	71
Şekil 9.	84
Şekil 10.	96

TEŞEKKÜR

Tez konusunun seçimindeki katkılarından, araştırmanın her aşamasında verdiği destekten ve kaynak bulmadaki yardımlarından dolayı danışman hocam Prof.Dr.Yasemin Kahramaner'e teşekkkür ederim.

ÖZET

Bu tezde modüler fonksiyonlar ve modüler formlar incelenmiştir.

Birinci bölümde öncelikle homojen ve inhomojen lineer dönüşüm kavramları ve bu iki dönüşüm arasındaki ilişkiler ele alınmıştır. Bu dönüşümler kullanılarak modüler grubun tanımı yapılmıştır. Modüler grup yardımı ile modüler dönüşümler sınıflandırılmış, modüler grubun üreteç ve bağlantılarına yer verilmiştir. Daha sonra temel bölge tanımlanarak temel bölgenin varlığına bağlı olarak, üst yarı düzlemin bölümlere ayrılması incelenmiştir.

İkinci bölümde ise periyodik olmayan ve kompleks düzlemi eğrisel üçgenler halinde değer bölgelerine ayıran ve bu bölgelerin her birinde olanaklı bütün değerleri alan modüler fonksiyonlar ele alınmıştır. Ayrıca bu bölümde eliptik modüler fonksiyonlar üzerinde çalışılmıştır. Modüler fonksiyonların varlığından yararlanarak modüler formların oluşturulması gösterilmiştir. Buna bağlı olarak modüler J fonksiyonunun J' türevi yardımı ile tüm modüler formların kuruluşu ile bunların özellikleri çalışılmıştır. Son olarak tüm modüler formlar uzayı ve modüler fonksiyonlar ile tüm modüler formlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

SUMMARY

These thesis mainly concerned with modular functions and related modular forms.

In Chapter I, firstly homogeneous and inhomogeneous linear transformations concepts, and relations between these two transformations are considered. The modular group is defined using these transformations. After these, modular transformations are classified by means of the transformations, and also generators of the modular group and their relations are studied. Furthermore, fundamental region is defined. Tesellation upper half plane is examined because of existence of fundamental region.

In Chapter II, modular functions which are not periodic and tesellate the complex plane like triangular and take all possible values in the each region are discussed. However, in this chapter, modular forms which represent an important class of functions in the development of the theory of elliptic modular functions are studied. In addition existence of modular forms are showed by means of modular functions. Connected with this, construction of entire modular forms with the help of J' which is derivative of modular J function and their properties are studied. Lastly, the space of entire modular forms and relations between modular functions and entire modular forms are examined.

GİRİŞ

Bu tezde esas olarak modüler fonksiyonlar ve modüler formlar ele alınmış olmakla birlikte, homojen ve inhomojen dönüşümler, modüler grup ve bunların temel özellikleri de incelenmiştir.

Birinci bölüm: bu bölümde ilk olarak homojen ve inhomojen lineer dönüşümler tanımlanıp önemli özellikleri ifade edilmiştir. $L:\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}},\ z \to w = L(z) := \dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc \neq 0$, $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ inhomojen lineer dönüşümü terslenebilir ve bu dönüşümler $\hat{\mathbb{C}}$ nın çemberlerinin kümesini korur. İnhomojen modüler dönüşümler kümesi $\mathcal{L}$ ile gösterilir. $L \in \mathcal{L}$ özdeş olmadığı taktirde en çok iki sabit noktaya sahiptir. Sabit noktalarına göre L dönüşümü, hiperbolik, eliptik, loksodromik ve parabolik dönüşümler şeklinde sınıflandırılır. Eğer ad-bc>0 ise, L, reel ekseni, üst yarı düzlemi ve reel eksene dik olan yarı çemberleri korur. $\mathbb{C}$ üzerinde 2x2 lik terslenebilir matrislerin grubu $\mathcal{A}$ olmak üzere ve det $A \neq 0$ iken $L_A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2,\ z \to w = Az$ dönüşümüne homojen lineer dönüşüm denir. $\mathcal{A} \to \mathbf{L},\ A \to L_A$ eşlemesi bir izomorfidir ve $\mathcal{A} \cong \mathbf{L}$ ile gösterilir. Eğer $A, B \in \mathcal{A}$ iken $B = SAS^{-1}$ olacak şekilde $S \in \mathcal{A}$ varsa A ve B ye denk matrisler denir. $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ matrisinin özdeğerleri sadece A nın denklik sınıfına bağlıdır. $\{\lambda I\}$dan farklı denk matrislerinin sınıfları, onların özdeğerleri ile belirlenir. Homojen ve inhomojen lineer dönüşümler arasındaki ilişki $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{L},\ A \to \overline{A} : z \to w = \overline{A}(z) = \dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ homomorfisi ile verilir. λ_υ özdeğer ve z_υ ise $(\upsilon = 1,2)$ sabit noktalar olmak üzere $\lambda_\upsilon = \alpha + \dfrac{\beta}{z_\upsilon}$ ve eğer tek sabit nokta varsa $z_0 = \infty$ ise $\lambda_0 = \alpha$, $z_0 \neq \infty$ ise $\lambda_0 = \gamma z_0 + \delta$ elde ederiz.

Homojen modüler dönüşümler, elemanları rasyonel tamsayılar olan 1 determinantlı homojen lineer dönüşümlerdir. Homojen modüler dönüşümlerin oluşturduğu gruba homojen modüler grup denir. $\overline{A} : z \to \dfrac{az+b}{cz+d}$ dönüşümü ise inhomojen modüler dönüşümdür. Bu dönüşümler üst yarı $\mathcal{H}$ düzlemini, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismini ve $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesini korur. Γ ve $\overline{\Gamma}$ arasındaki ilişki $\Gamma \setminus \{+I\} \cong \overline{\Gamma}$ izomorfisi ile verilir. Ayrıca $A \in \Gamma$ matrisinin özdeğerlerine bağlı olarak, dönüşümler parabolik, eliptik ($\mathbb{Q}(i)$ ve

$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ üzerinde) ve hiperbolik olarak sınıflandırılmıştır. Sınıflandırma başlangıçta sabit noktalara sahip olarak yapılmıştır. Burada ise sabit noktalar ve özdeğerler arasındaki bağıntılar yardımı ile sınıflandırma yapılarak her bir durumun sahip olduğu özellikler ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

Modüler grubun üreteçleri ve aralarındaki bağıntıların yanı sıra temel küme ve temel bölge tanımlanmış ve temel bölgenin varlığına bağlı olarak, bazı sonuçlar elde edilmiştir. Temel bölgenin Γ modüler grubunun elemanları altındaki görüntüleri yardımı ile üst yarı düzlem bölümlere ayrılmıştır. Ayrıca klasik temel bölgeden farklı olarak yeni temel bölgeler elde edilebileceği gösterilmiştir. Örneğin, klasik temel bölge olan eğrisel $\Delta(\rho,-\overline{\rho},i\infty)$ üçgeninden farklı olarak $(i\infty,\rho,\overline{T}(\alpha),\alpha)$ dörtgeni ve $\mathcal{F}_0:=(i\infty,\tau_2,\tau_1,-\overline{\rho},\tau_3)$ beşgeni birer temel bölgedir. Bu şekilde devam ederek temel bölge olan bir normal çokgen elde edilebilir.

İkinci bölüm : ilk olarak, üst yarı düzlemde meromorf olan, tüm Γ dönüşümleri için değişmeyen ve genel olarak $f(\tau)=\sum\limits_{\upsilon\geq h} b_\upsilon e^{2\pi i\upsilon\tau},(h\in\mathbb{Z},b_h\neq 0)$ formunda bir Fourier açılımına sahip olan modüler fonksiyonlar ele alınmıştır.f(τ) modüler fonksiyonunun τ=i∞ daki durumu Fourier serisi ile açıklanabilir. $x=e^{2\pi i\tau}$ ise f in Fourier serisi x=0 civarındaki bir Laurent serisine dönüşür. i∞ daki açılımdan yararlanarak f modüler fonksiyonunun herhangi bir rasyonel noktadaki açılımını elde edebiliriz. ρ ve i ye denk olmayan herhangi $\tau_0\in\mathscr{H}$ için f fonksiyonu $f(\tau)=\sum\limits_{\upsilon\geq k} a_\upsilon\left(\frac{\tau-\tau_0}{\tau-\overline{\tau}_0}\right)^\upsilon,k\in\mathbb{Z},$ formunda bir açılıma sahiptir. Bir modüler fonksiyon denk noktalarda aynı c-nokta mertebelerine sahiptir ve $\mathcal{F}$ deki herbir c-değerini eşit sıklıkta alır. Diğer bir deyişle f in tüm c-noktalarını ve kutuplarını içerecek şekilde yukarıdan yeterince büyük a için y=ia ile sınırlanmış temel bölgede, sıfırlarının sayısı kutuplarının sayısına eşittir. Bunu ispatlamak için klasik $\Delta(\rho,-\overline{\rho},i\infty)$ temel bölgesi yerine $(\rho,T(\alpha+1),\alpha+1,i\infty)$ temel bölgesi kullanılmıştır. Modüler fonksiyonlar bir cisim oluşturur ve bu cisim $\mathbb{C}$ ye J eklenerek elde edilen rasyonel fonksiyon cismidir.

Bir mertebeli bir modüler fonksiyonun varlığından dolayı, $\Delta(\rho,i,i\infty)$ bölgesinin içini üst yarı düzleme birebir ve sınırlarıise reel eksene üzerine tasvir eden bir modüler fonksiyonun mevcut olduğunu söyleyebiliriz.

$O_1: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}, z \to -\bar{z}$ olmak üzere $S: \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}, z \to \dfrac{\alpha\bar{z}+\beta}{\gamma\bar{z}+\delta}$ tasvirine, $S = LO_1L^{-1}$ olacak şekilde inhomojen lineer dönüşüm varsa bir yansıma denir. Özel olarak O_1, imajiner eksende bir yansımadır. Modüler grup yansımalarla genişletilebilir. $\Gamma^* = \overline{\Gamma} \cup O_1\overline{\Gamma}$ kümesi bir gruptur ve bu grubun üreteçleri O_1, T ve U, temel bölgesi ise $\mathcal{F}^* = \Delta(\rho, i, i\infty)$ eğrisel üçgenidir. Üst yarı düzlem tekrarlı yansımalarla örtülebilir. Her modüler fonksiyon mutlak modüler J değişmezi ile ifade edilebilir. J fonksiyonu Γ^* grubunun $\mathcal{F}^*$ temel bölgesini ve onun Γ altındaki görüntülerini $\mathscr{H} \cup \mathrm{IR} \cup \{\infty\}$ a birebir ve üzerine tasvir eder.

Modüler fonksiyonlardan sonra onlarla benzer özelliklere sahip modüler formlar incelenmiştir. Modüler formlar, üst yarı düzlemdeki holomorfluğu ve $i\infty$ daki Fourier açılımı dışında homojenlik ve bir baza göre tüm uzayı germe özelliklerine sahiptir. Modüler formların boyutu onların homojenlik derecesine göre belirlenir. Aynı boyutlu modüler formlar, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı oluşturur. 0-fonksiyon dışında, tek boyutlu modüler form yoktur. Modüler formların, modüler fonksiyonlara benzer şekilde kuvvet serilerine açılımları vardır ve denk noktalarda sıfır veya kutuplarının mertebesi değişmez. İkinci bölümün önemli teoremlerinden birisi -k boyutlu bir modüler formun sıfırlarının mertebeleri toplamı ve kutuplarının mertebeleri toplamını veren $N(0) - N(\infty) = \dfrac{k}{12}$ eşitliğinin ispatlanmasıdır. Teoremin ispatı ayrıntılı bir biçimde sunulmuştur.

Modüler formların bir alt uzayı olan ve kutup noktalarına sahip olmayan tam modüler formların oluşturulmasına geçmeden önce, modüler fonksiyonların varlığının modüler formların varlığını gerektirdiği bir teoremle gösterilmiştir. Şöyle ki eğer f bir modüler fonksiyon ise o taktirde $\dfrac{df}{d\tau}$, -2 boyutlu bir modüler formdur. Özel olarak, J bir modüler fonksiyon olduğundan J' fonksiyonu -2 boyutlu bir modüler formdur. Buradan hareketle, J' yardımı ile tam modüler fomların oluşturulması ve bunların özellikleri ile birlikte bazı örnekler verilmiştir. G_4^{*3} ve G_6^{*2}, -12 boyutlu tam modüler formlar olmak üzere $\Delta^* := G_4^{*3} - G_6^{*2}$ diskriminantı tanımlanarak G_4^{*3} ve Δ^* ın, -12 boyutlu modüler formların uzayı için baz olduğu ve buna benzer şekilde -k boyutlu tam modüler formlar uzayı için ise $G_4^{*\alpha} G_6^{*\beta} G_4^{*3(k'-\upsilon)} \Delta^{*\upsilon}$, $\upsilon = 0, 1, \ldots, k'$, fonksiyonlarının bir baz olduğu verilmiştir. Son kısımda ise modüler fonksiyonlar ile tam modüler formlar arasındaki ilişki incelenmiş ve her modüler fonksiyonun tam modüler formların bir rasyonel ifadesi olduğu sonucu bulunmuştur.

I.MODÜLER GRUP

1.1. İnhomojen Lineer Dönüşümler

1.1.1. Tanım

IR reel sayılar cismini, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismini ve $\hat{\mathbb{C}}$ Riemann küresini göstersin. İnhomojen lineer dönüşüm :

$$L : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}, \quad z \to w = L(z) := \frac{az+b}{cz+d} \tag{1.1}$$

şeklindedir. Burada a, b, c, d$\in\mathbb{C}$ olmak üzere ad - bc $\neq$ 0 varsayılmıştır. Tüm inhomojen lineer dönüşümlerin kümesi $\mathcal{L}$ ile gösterilecektir.

1.1.2. İnhomojen Lineer Dönüşümlerin Önemli Özellikleri

$L\in\mathcal{L}$ nin tersi mevcuttur ve $L^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ ters dönüşümü $w \to z = L^{-1}(w) = \dfrac{dw-b}{-cw+a}$ ile verilir. L kümesi, fonksiyonların bileşimi işlemi altında bir gruptur. Ayrıca, $L\in\mathcal{L}$, $z \neq \dfrac{-d}{c}$ olmak üzere $z\in\mathbb{C}$ için holomorftur. L, w üzerindeki çemberler kümesini kendi üzerine dönüştürür.

1.1.3. İnhomojen Lineer Dönüşümlerin Sabit Noktalar İle Sınıflanması

Eğer $L\in\mathcal{L}$ özdeş tasvir değilse, o taktirde L en çok iki sabit noktaya sahiptir. $L\in\mathcal{L}$, $\hat{\mathbb{C}}$ nin üç farklı noktası ve bunların görüntüleri ile tek olarak belirlenir. z_1, z_2 ve z_3 keyfi noktalar ve bunların görüntüleri w_1, w_2 ve w_3 olsun. L tasviri

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} : \frac{w_3-w_1}{w_1-w_2} = \frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} \tag{1.2}$$

eşitliğini sağlar. Eğer (1.2) yi w için çözersek L yi (1.1) formunda elde ederiz.

$$D(z_1,z_2,z_3,z):=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} \tag{1.3}$$

ifadesine z_1, z_2 , z_3 ve z noktalarının iki kat oranı denir. (1.2) den dolayı, (1.3) iki kat oranı, eğer dört noktanın hepsi aynı $L\in\mathcal{L}$ lineer dönüşümüne bağlı ise değişmez.

Teorem 1:

i) İki farklı sabit nokta z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0, 1$ olmak üzere $L\in\mathcal{L}$ için

$\dfrac{L(z)-z_1}{L(z)-z_2}=\lambda\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$ normal formu vardır.

ii) $z_1 \in \mathbb{C}$ ve ∞ sabit noktalar, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0,1$ olmak üzere $L\in\mathcal{L}$ için

$L(z)-z_1=\lambda(z-z_1)$ normal formu vardır.

iii) $z_0 \in \mathbb{C}$ sabit nokta ve $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0,1$ olmak üzere $L\in\mathcal{L}$ için

$\dfrac{1}{L(z)-z_0}=\dfrac{1}{z-z_2}+\alpha$ normal formu vardır.

iv) ∞ sabit nokta ve $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0,1$ olmak üzere $L\in\mathcal{L}$ için $L(z)=z+\alpha$ normal formu vardır. L ye

$\lambda > 0$ ise hiperbolik dönüşüm,
$|\lambda| = 1$ ise eliptik dönüşüm,
$\lambda < 0$ ve $|\lambda| \neq 1$ ise loksodromik dönüşüm,
tek sabit noktalı bir lineer dönüşüm ise parabolik dönüşüm denir.

1.1.4. Reel Katsayılı İnhomojen Lineer Dönüşümler ve Öklid Olmayan Geometri

a, b, c, $d\in\mathbb{R}$ ve ad - bc > 0 ise o taktirde L, reel ekseni (∞ dahil) kendi üzerine dönüştürür ve aynı şekilde L, üst yarı $\mathscr{H}$ düzlemini kendi üzerine dönüştürür. Özellikle L, reel eksene dik olan $\mathscr{H}$ daki (düşey yarı doğrular dahil) yarı çemberlerin kümesini, kendi üzerine dönüştürür. Eğer noktaları, üst yarı düzlemin noktaları olan, bu yarı çemberler bir geometrinin doğruları olarak tanımlanırsa, o zaman Öklid olmayan (N.E.) bir geometrinin Poincaré modeli elde edilir : Kesişim noktasında, onların Öklid teğetleri arasında Öklid açısı olarak 2 N.E. doğru arasındaki açı ölçülür. İki z_1, $z_2 \in \mathscr{H}$ noktası arasındaki N.E. δ (z_1, z_2) uzaklığını tanımlamak için reel eksene ortogonal ve z_1, z_2 noktalarından geçen Öklid-çemberinin reel ∞_1 ve ∞_2 noktalarını gözönüne alalım. ∞_1 ve ∞_2 noktaları öyle nitelendirilir ki, bu çember üzerinde ∞_1, z_1, z_2 ve ∞_2 noktaları devirsel olarak birbirini izler. O zaman reel pozitif logaritmayla

$$\delta(z_1,z_2) := \log D\,(z_1,z_2,\infty_1,\infty_2) \tag{1.4}$$

tanımlarız. Eğer, bir lineer dönüşümle dört katlı $(\infty_1, z_1, z_2, \infty_2)$, $(0, 1, \lambda, \infty)$ üzerine dönüştürülürse bu seçimin mümkün olduğu görülür.

Işın, doğru parçası ve çember tanımları Öklid geometrisinden alınacaktır. Eğer K, μ merkezli ve r yarıçaplı bir N.E. çemberi ise, o zaman onun $z \to w := \dfrac{z-\mu}{z-\overline{\mu}}$ dönüşümü altındaki görüntüsü ($\overline{\mu}$, μ nün kompleks eşleniğidir) w=0 merkezli bir E-çemberidir. Çünkü $z = \mu$ boyunca olan N.E.-doğruları, w=0 boyunca olan E.-doğrularına dönüştürülür, reel z-ekseni, w=0 civarındaki bir E.-çemberi üzerine tasvir edilir ve lineer dönüşüm altındaki iki kat oranın değişmezliği, K nın görüntüsünün bir E.-çemberi olduğunu gösterir. Bundan dolayı, N.E. K çemberinin bir E.-çemberi olduğunu görürüz. Bununla beraber, onun E.-merkezi ve yarıçapı farklıdır.

Eğer z_1 ve z_2 $\mathscr{H}$ da iki farklı nokta ise, o taktirde, onlardan eşit N.E.- uzaklığında olan $\mathscr{H}$ ın noktalarının kümesi, $[z_1\ ,\ z_2]$ doğru parçasının N.E.-dikey açıortayı olan bir N.E.-doğrusudur. z_1 ve z_2, reel eksenin yukarısında aynı yükseklikteki noktaların bir çifti üzerine dönüştürülerek bu görülür. Bilindiği gibi, gözönüne aldığımız dönüşümler $\mathscr{H}$ ın konform tasvirlerinin kümesinin kendi üzerine olması koşuluyla aynıdır.

1.2. Homojen Lineer Dönüşümler

1.2.1. Tanım

$\mathscr{A}$, $\mathbb{C}$ üzerinde tersi alınabilir, 2x2 lik matrislerin grubu olsun: Eğer $A \in \mathscr{A}$ ise, $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{C}$ olmak üzere $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ nın determinantı $|A| = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ dır. Bundan başka **L**, $\mathbb{C}^2$

nin kendi üzerine olan terslenebilir lineer dönüşümlerin grubu olsun. Bunlara lineer homojen dönüşümler denir.

$\forall$ $A \in \mathscr{A}$ için, L_A: $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $z \to w = A.z$ dönüşümü **L** ye aittir. Burada A.z, A nın $z = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ kolonuyla bir matris çarpımıdır ve $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ dir.

Buradan $w = A.z = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \\ \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ elde ederiz.

$\mathscr{A} \to \mathbf{L}$, $A \to L_A$ eşlemesi bir izomorfidir. Bunu $A \cong \mathbf{L}$ şeklinde gösteriniz. Dolayısıyla, ilerde matrisler ve homojen lineer dönüşümler için aynı notasyon kullanılacaktır. Eğer $z' = Sz$, $w' = Sw$, $(|S| \neq 0)$ yazarsak o taktirde $w' = Sw = SAz = SAS^{-1}z'$ olur.

1.2.2.Bir Homojen Lineer Dönüşümün Jordan Normal Formu

İki A, $B \in \mathscr{A}$ matrisine, eğer eşlenik iseler, yani $B = SAS^{-1}$ koşulunu sağlayan bir $S \in \mathscr{A}$ varsa denk matrisler denir. $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathscr{A}$ nın özdeğerleri sıfırdan farklıdır ve sadece A nın denklik sınıfına bağlıdır.

$$xI - A = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-\alpha & -\beta \\ -\gamma & x-\delta \end{pmatrix}$$

için $\phi_A(x) = \det(xI - A)$ olarak tanımlansın. $\phi_A(x)$ e karekteristik polinom denir. $\phi_A(x)$ in kökleri A nın özdeğerleridir. $\det(xI - A) = \phi_A(x) = (x-\alpha)(x-\delta) - \gamma\beta = x^2 + (-\delta-\alpha)x + \alpha\delta - \gamma\beta$ denkleminin köklerine x_1 ve x_2 diyelim. $x_1, x_2 \neq 0$ dır. Gerçekten, x_1 veya $x_2 = 0$ ise o zaman $\phi_A(0) = \alpha\delta - \gamma\beta = 0$ olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla kökler sıfırdan farklıdır.

$$x_{1,2} = \frac{-(-\delta-\alpha) \mp \sqrt{(-\delta-\alpha)^2 - 4.1(\alpha\delta - \gamma\beta)}}{2.1} = \frac{1}{2}\left(\delta + \alpha \mp \sqrt{\delta^2 + 2\delta\alpha + \alpha^2 - 4\alpha\delta + 4\gamma\beta}\right)$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\delta + \alpha \mp \sqrt{\delta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\delta + 4\gamma\beta}\right) = \frac{1}{2}\left(\delta + \alpha \mp \sqrt{(\delta-\alpha)^2 + 4\gamma\beta}\right)$$

x_1 ve x_2, sadece A nın denklik sınıfına bağlıdır.

Teorem 2: Farklı λ_1, λ_2 özdeğerli denk matrislerin oluşturduğu sınıfların her biri tam olarak iki köşegen matris içerir, yani $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ i içerir ve λ_1, λ_2 çifti ile karekterize edilir.

İspat: $z^{(1)} = \begin{pmatrix} \omega_1^{(1)} \\ \omega_2^{(1)} \end{pmatrix}$, $z^{(1)} = \begin{pmatrix} \omega_1^{(2)} \\ \omega_2^{(2)} \end{pmatrix}$ özvektörlerinin, böyle bir sınıfa ait olan A matrisinin lineer bağımsız özvektörleri olduğunu kabul edelim. Yani υ=1,2 için $A.z^{(\upsilon)} = \lambda_v z^{(\upsilon)}$ olsun. O taktirde

$$S := \begin{pmatrix} \omega_1^{(1)} & \omega_1^{(2)} \\ \omega_2^{(1)} & \omega_2^{(2)} \end{pmatrix}^{-1} \tag{1.5}$$

A yı $SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ ye dönüştürür. Karekteristik polinom ise

$\left(xI - SAS^{-1}\right) = \begin{pmatrix} x-\lambda_1 & 0 \\ 0 & x-\lambda_2 \end{pmatrix}$ için $\phi_{SAS^{-1}}(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2) = x^2 + (-\lambda_1 - \lambda_2)x + \lambda_1\lambda_2$ olarak bulunur. Dolayısıyla karekterizasyon açıktır.

Teorem 3 : λI dan farklı ve tam olarak λ_0 özdeğerine sahip olan denk matrislerin sınıfları, $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ matrisini içerir ve λ_0 sayısıyla karekterize edilir.

İspat : Eğer $z^{(0)} = \begin{pmatrix} \omega_1^{(0)} \\ \omega_2^{(0)} \end{pmatrix}$ özvektörü böyle bir sınıfa ait $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \gamma \end{pmatrix}$ şeklindeki bir matrisin özvektörü ise, o zaman

$$\omega_2^{(0)} \neq 0 \quad \text{ise} \quad S = \begin{pmatrix} \omega_1^{(0)} & 1 \\ \omega_2^{(0)} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \qquad (1.6)$$
$$w_2^{(0)} = 0 \quad \text{ise} \quad S = I$$

A yı $SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \beta^* \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ a dönüştürür. Burada $\omega_2^{(0)} \neq 0$ ise $\beta^* = \dfrac{\gamma}{\omega_2(0)}$, $\omega_2^{(0)} = 0$ ise $\beta^* = \beta$ dır ve $A \neq \lambda I$ olduğundan her iki durumda da $\beta^* \neq 0$ dır. Ayrıca $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta^* \end{pmatrix}$ vasıtasıyla $\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ için dönüşüm yapılabilir. Karekterizasyon yine apaçıktır.

$\{\lambda I\}$ sınıfları, bir tek λ özdeğerine sahiptir ve özuzay $\mathbb{C}^2$ dir. Sonuç olarak, $\{\lambda I\}$ dan farklı denk matrislerin sınıfları, onların öz değerleri ile belirlenir.

1.2.3.Homojen ve İnhomojen Lineer Dönüşümler Arasındaki İlişki

$\varphi{:}\mathscr{A} \to \mathscr{L}.\ A \to \overline{A}: z \to w = \overline{A}(z) = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, eşlemesi $C^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ çekirdeğiyle bir homomorfizmadır. ($\alpha I \in \mathscr{A}$ olmak üzere $\alpha \in \mathbb{C}$ tanımlanırsa). Eğer φ, birim modüler $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathscr{A}^*, |A| = \alpha\delta - \beta\gamma = 1$, matrislerinin $\mathscr{A}^*$ grubuna kendisini kısıtlarsa o zaman φ nin çekirdeği $\{\pm I\}$dır ve $\mathscr{A} | C^* \cong \mathscr{L}, \mathscr{A}^* | \{\pm I\} \cong \mathscr{L}$ dır.

Teorem 1 in ispatı : a)A nın iki farklı λ_1 , λ_2 özdeğerli bir matris olduğunu kabul edelim. S, Teorem 2 nin ispatında elde edilen matris olmak üzere $z' := Sz$, $w' := Sw$ olsun. Bu dönüşümleri w=Az ye uygulayalım. $w' = Sw = SAz = SAS^{-1}z^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} z'$

olur veya $w' = Sw = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} z' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} Sz \Rightarrow Sw = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} Sz$

olur. Burada S, w ve z yi yerine yazalım. Teorem 2 nin ispatındaki S dönüşümü

$S = \begin{pmatrix} \omega_1^{(1)} & \omega_1^{(2)} \\ \omega_2^{(1)} & \omega_2^{(2)} \end{pmatrix}^{-1}$ idi. Buradan $S = \begin{pmatrix} \omega_2^{(2)} & -\omega_1^{(2)} \\ -\omega_2^{(1)} & \omega_1^{(1)} \end{pmatrix}$ olur. Ayrıca $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ ve

$z=\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}$ idi. $Sw=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}Sz$ de bunları yerine koyalım.

$$\begin{pmatrix}\omega_2^{(2)} & -\omega_1^{(2)}\\ -\omega_2^{(1)} & \omega_1^{(1)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_2^{(2)} & -\omega_1^{(2)}\\ -\omega_2^{(1)} & \omega_1^{(1)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}\omega_2^{(2)}w_1-\omega_1^{(2)}w_2\\ -\omega_2^{(1)}w_1+\omega_1^{(1)}w_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\omega_2^{(2)} & -\lambda_1\omega_1^{(2)}\\ -\lambda_2\omega_2^{(1)} & \lambda_2\omega_1^{(1)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\omega_2^{(2)}\omega_1-\lambda_1\omega_1^{(2)}\omega_2\\ -\lambda_2\omega_2^{(1)}\omega_1+\lambda_2\omega_1^{(1)}\omega_2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\omega_2^{(2)}w_1-\omega_1^{(2)}w_2&=\lambda_1(\omega_2^{(2)}\omega_1-\omega_1^{(2)}\omega_2)\\ -\omega_2^{(1)}w_1+\omega_1^{(1)}w_2&=\lambda_2(-\omega_2^{(1)}\omega_1+\omega_1^{(1)}\omega_2)\end{aligned}\tag{1.7}$$

olur. $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}=z$, $\dfrac{w_1}{w_2}=w$, $\dfrac{\omega_1^{(1)}}{\omega_2^{(1)}}=z_1$ ve $\dfrac{\omega_1^{(2)}}{\omega_2^{(2)}}=z_2$ olsun

i) $\omega_2^{(1)},\ \omega_2^{(2)}\neq 0$ olsun. (1.7) yi taraf tarafa bölelim.

$$\frac{\dfrac{1}{\omega_2^{(2)}}\left(\omega_2^{(2)}w_1-\omega_1^{(2)}w_2\right)}{\dfrac{1}{\omega_2^{(2)}}\left(-\omega_2^{(1)}w_1+\omega_1^{(1)}w_2\right)}=\frac{\lambda_1\left(\omega_2^{(2)}\omega_1-\omega_1^{(2)}\omega_2\right)\dfrac{1}{\omega_2^{(2)}}}{\lambda_2\left(-\omega_2^{(1)}\omega_1+\omega_1^{(1)}\omega_2\right)\dfrac{1}{\omega_2^{(2)}}}\Rightarrow$$

$$\frac{w_1-\dfrac{\omega_1^{(2)}}{\omega_2^{(2)}}w_2}{\dfrac{-\omega_2^{(1)}}{\omega_2^{(2)}}w_1+\dfrac{\omega_1^{(1)}}{\omega_2^{(2)}}w_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\,\frac{\omega_1-\dfrac{\omega_1^{(2)}}{\omega_2^{(2)}}\omega_2}{\dfrac{-\omega_2^{(1)}}{\omega_2^{(2)}}\omega_1+\dfrac{\omega_1^{(1)}}{\omega_2^{(2)}}\omega_2}$$

Şimdi ise sol tarafin pay ve paydasını $\dfrac{1}{w_2}$ ve sağ tarafin pay ve paydasını $\dfrac{1}{\omega_2}$ ile çarpalım.

$$\frac{\frac{w_1}{w_2}-\frac{\omega_1^{(2)}}{\omega_2^{(2)}}}{\frac{-\omega_2^{(1)}}{\omega_2^{(2)}}\frac{w_1}{w_2}+\frac{\omega_1^{(1)}}{\omega_2^{(2)}}}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{\frac{\omega_1}{\omega_2}-\frac{\omega_1^{(2)}}{\omega_2^{(2)}}}{\frac{-\omega_2^{(1)}}{\omega_2^{(2)}}\frac{\omega_1}{\omega_2}+\frac{\omega_1^{(1)}}{\omega_2^{(2)}}} \Rightarrow \frac{w-z_2}{\frac{-\omega_2^{(1)}}{\omega_2^{(2)}}w+\frac{\omega_1^{(1)}}{\omega_2^{(2)}}}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{z-z_2}{\frac{-\omega_2^{(1)}}{\omega_2^{(2)}}z+\frac{\omega_1^{(1)}}{\omega_2^{(2)}}}$$

Her iki tarafi $\dfrac{1}{-\omega_2^{(2)}/\omega_2^{(1)}}$ ile çarparsak ;

$$\frac{w-z_2}{w+\frac{\omega_1^{(1)}}{\omega_2^{(2)}}\frac{-\omega_2^{(2)}}{\omega_2^{(1)}}}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{z-z_2}{z+\frac{\omega_1^{(1)}}{\omega_2^{(2)}}\frac{-\omega_2^{(2)}}{\omega_2^{(1)}}} \Rightarrow \frac{w-z_2}{w-\frac{\omega_1^{(1)}}{\omega_2^{(1)}}}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{z-z_2}{z-\frac{\omega_1^{(1)}}{\omega_2^{(1)}}}$$

$\dfrac{w-z_2}{w-z_1}=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\dfrac{z-z_2}{z-z_1}$ olur. $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}=\lambda \Rightarrow \dfrac{w-z_1}{w-z_2}=\lambda\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$ elde edilir.

ii) $\omega_2^{(2)}=0$ olsun.

$$\frac{\frac{1}{w_2}\left(-\omega_1^{(1)}w_2\right)}{\frac{1}{w_2}\left(-\omega_2^{(1)}w_1+\omega_1^{(1)}w_2\right)}=\frac{\frac{1}{\omega_2}\left(-\omega_1^{(2)}\omega_2\right)}{\frac{1}{\omega_2}\left(-\omega_2^{(1)}\omega_1+\omega_1^{(1)}\omega_2\right)} \Rightarrow$$

$$\frac{-\omega_1^{(2)}}{-\omega_2^{(1)}w+\omega_1^{(1)}}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{-\omega_1^{(2)}}{-\omega_2^{(1)}z+\omega_1^{(1)}}$$

$\dfrac{1}{-\omega_2^{(1)}w+\omega_1^{(1)}}=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\dfrac{1}{-\omega_2^{(1)}z+\omega_1^{(1)}}$ iken her iki tarafi $\dfrac{1}{-1/\omega_2^{(1)}}$ ile çarpalım ;

$$\Rightarrow \frac{1}{w-\frac{\omega_1^{(1)}}{\omega_2^{(1)}}}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{1}{z-\frac{\omega_1^{(1)}}{\omega_2^{(2)}}} \Rightarrow \frac{1}{w-z_1}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{1}{z-z_1} \Rightarrow (w-z_1)\lambda_1=\lambda_2(z-z_1)$$

$\Rightarrow w-z=\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}(z-z_1) \Rightarrow w-z_1=\lambda(z-z_1)$ elde edilir.

Sonuçta inhomojen dönüşüme karşılık gelen $w = \overline{A}z$ için, bu dönüşümün normal formu;

$$\begin{aligned} &\text{eğer } \omega_2^{(1)}, \omega_2^{(2)} \neq 0 \text{ ise } \frac{w-z_1}{w-z_2} = \lambda \frac{z-z_1}{z-z_2} \\ &\text{veya } \omega_2^{(2)} = 0 \quad \text{ise} \quad w - z_1 = \lambda(z - z_1) \end{aligned} \tag{1.8}$$

elde edilir.

$\overline{A}$ nın katsayısı, $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ ve sabit noktalar z_1, z_2 dir.

$Az^{(\upsilon)} = \lambda_v z^{(\upsilon)} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1^{(\upsilon)} \\ \omega_2^{(\upsilon)} \end{pmatrix} = \lambda_v \begin{pmatrix} \omega_1^{(\upsilon)} \\ \omega_2^{(\upsilon)} \end{pmatrix}$ den devam edersek

$\begin{pmatrix} \alpha\omega_1^{(\upsilon)} + \beta\omega_2^{(\upsilon)} \\ \gamma\omega_1^{(\upsilon)} + \delta\omega_2^{(\upsilon)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_v\omega_1^{(\upsilon)} \\ \lambda_v\omega_2^{(\upsilon)} \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha\omega_1^{(\upsilon)} + \beta\omega_2^{(\upsilon)} = \lambda_v\omega_1^{(\upsilon)} \\ \gamma\omega_1^{(\upsilon)} + \delta\omega_2^{(\upsilon)} = \lambda_v\omega_2^{(\upsilon)} \end{array} \right\}$ denklemlerinden , sabit

noktalar ve özdeğerler arasındaki şu bağıntıyı elde ederiz :

$\lambda_v = \alpha + \beta \frac{\omega_2^{(\upsilon)}}{\omega_1^{(\upsilon)}} = \alpha + \beta \frac{1}{\frac{\omega_1^{(\upsilon)}}{\omega_2^{(\upsilon)}}} = \alpha + \beta \frac{1}{z_\upsilon} \Rightarrow \lambda_\upsilon = \alpha + \frac{\beta}{z_\upsilon}$ ve

$\lambda_\upsilon = \delta + \gamma \frac{\omega_1^{(\upsilon)}}{\omega_2^{(\upsilon)}} = \delta + \gamma z_\upsilon \Rightarrow \lambda_\upsilon = \gamma z_\upsilon + \delta$ olur. Yani $\upsilon = 1,2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \lambda_\upsilon &= \alpha + \frac{\beta}{z_\upsilon} \\ \lambda_\upsilon &= \delta + \gamma z_\upsilon \end{aligned} \tag{1.9}$$

elde edilir. $\omega_1^{(\upsilon)}$ veya $\omega_2^{(\upsilon)}=0$ olması durumunda bunlardan biri kullanılmaz. $\mu\neq 0$ koşuluyla μA matrisleri $\overline{\mu A} = \overline{A}$ yı sağlar ve bunlar $\mu\lambda_1$, $\mu\lambda_2$ özdeğerine sahiptir, dolayısıyla $\frac{\mu\lambda_2}{\mu\lambda_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \lambda$ olur. Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4: Eğer $A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ matrisi, lineer bağımsız $\begin{pmatrix}\omega_1^{(1)} \\ \omega_2^{(1)}\end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix}\omega_1^{(2)} \\ \omega_2^{(2)}\end{pmatrix}$ özvektörleri ile farklı λ_1, λ_2 özdeğerine sahipse, o taktirde ilişkili $\overline{A}$ dönüşümü iki farklı $z_\upsilon = \dfrac{\omega_1^{(\upsilon)}}{\omega_2^{(\upsilon)}} = \dfrac{\lambda_\upsilon - \delta}{\gamma} = \dfrac{\beta}{\lambda_\upsilon - \alpha}$, $\upsilon = 1,2$, sabit noktasına ve $\lambda = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$ katsayısına sahiptir.

b) Eğer A bir tek λ_0 özdeğerine sahipse, o taktirde, Teorem 3 ün ispatındaki, S dönüşümü kullanılarak, yine yukarıdaki gibi benzer işlemler, karşılık gelen normal formu ortaya çıkaracaktır.

$w' = Sw = SAS^{-1}Sz$ idi.

i) $\omega_2^{(0)} \neq 0$ olduğunu kabul edelim

Bu durumda, $S = \begin{pmatrix}\omega_1^{(0)} & 1 \\ \omega_2^{(0)} & 0\end{pmatrix}^{-1}$ ve $SAS^{-1} = \begin{pmatrix}\lambda_0 & \dfrac{\gamma}{\omega_2^{(0)}} \\ 0 & \lambda_0\end{pmatrix}$ olur. Bunları yerine yazalım,

:

$$\begin{pmatrix}0 & -1 \\ -\omega_2^{(0)} & \omega_1^{(0)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1 \\ w_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_0 & \dfrac{\gamma}{\omega_2^{(0)}} \\ 0 & \lambda_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1 \\ -\omega_2^{(1)} & \omega_1^{(1)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1 \\ \omega_2\end{pmatrix}$$ çarpım işlemini yapalım :

$$\begin{pmatrix}-w_2 \\ -\omega_2^{(0)}w_1 + \omega_1^{(0)}w_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\gamma & -\lambda_0 + \gamma\dfrac{\omega_1^{(0)}}{\omega_2^{(0)}} \\ -\lambda_0\omega_2^{(0)} & \lambda_0\omega_1^{(0)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1 \\ \omega_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\gamma\omega_1 - \lambda_0\omega_2 + \gamma\dfrac{\omega_1^{(0)}}{\omega_2^{(0)}}\omega_2 \\ -\lambda_0\omega_2^{(0)}\omega_1 + \lambda_0\omega_1^{(0)}\omega_2\end{pmatrix}$$

Böylece

$$\left.\begin{aligned} -w_2 &= -\gamma\omega_1 - \lambda_0\omega_2 + \gamma\frac{\omega_1^{(0)}}{\omega_2^{(0)}}\omega_2 \\ -\omega_2^{(0)}w_1 + \omega_1^{(0)}w_2 &= -\lambda_0\omega_2^{(0)}\omega_1 + \lambda_0\omega_1^{(0)}\omega_2 \end{aligned}\right\}$$ sistemi elde edilir.

$\frac{w_1}{w_2} = w$, $\frac{\omega_1^{(0)}}{\omega_2^{(0)}} = z_0$ olsun. İkinci denklemin her iki tarafını $\frac{1}{\omega_2^{(0)}}$ ile çarpıp sistemi düzenleyelim :

$$\left.\begin{aligned} -w_2 &= -\gamma\omega_1 - \lambda_0\omega_2 + \gamma z_0\omega_2 \\ -w_1 + z_0 w_2 &= -\lambda_0\omega_1 + \lambda_0 z_0\omega_2 \end{aligned}\right\}$$ taraf tarafa bölme yaparsak,

$$\frac{-w_2}{-w_1 + z_0 w_2} = \frac{-\gamma\omega_1 - \lambda_0\omega_2 + \gamma z_0\omega_2}{-\lambda_0\omega_1 + \lambda_0 z_0\omega_2}$$

olur. Sol tarafı $\frac{-1}{w_2}$ ve sağ tarafı $\frac{-1}{\lambda_0\omega_2}$ ile kısaltırsak $\frac{1}{w - z_0} = \frac{\frac{\gamma}{\lambda_0}z + 1 - \frac{\gamma}{\lambda_0}z_0}{z - z_0}$ ve

$$\frac{1}{w - z_0} = \frac{1 + \frac{\gamma}{\lambda_0}(z - z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + \frac{\gamma}{\lambda_0} \Rightarrow \frac{1}{w - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + \frac{\gamma}{\lambda_0}$$ bulunur.

$\frac{\gamma}{\lambda_0} = \alpha$ dersek $\frac{1}{w - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + \alpha$ normal formu elde edilir.

ii) $\omega_2^{(0)} = 0$ olsun. Bu durumda $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ ve $SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \beta \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ olur. Bunları yerine koyarsak;

$Sw = SAS^{-1}Sz$ den

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \beta \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z \Rightarrow w = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \beta \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} z \Rightarrow \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \beta \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0\omega_1 + \beta\omega_2 \\ \lambda_0\omega_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} w_1 &= \lambda_0\omega_1 + \beta\omega_2 \\ w_2 &= \lambda_0\omega_2 \end{aligned}\right\}$$ sistemi elde edilir. Taraf tarafa bölme

yaparsak $\frac{w_1}{w_2} = \frac{\lambda_0\omega_1 + \beta\omega_2}{\lambda_0\omega_2} \Rightarrow w = z + \frac{\beta}{\lambda_0}$ bulunur. $\alpha = \frac{\beta}{\lambda_0}$ dersek $w = z + \alpha$ normal formunu elde ederiz.

Bu durumda, eğer A bir tek λ_0 özdeğerine ve z_0 sabit noktasına sahip ise $Az^{(\upsilon)} = \lambda_\upsilon z^{(\upsilon)}$ den $Az^{(0)} = \lambda_0 z^{(0)}$ olur. Matrisleri yerine yazıp çarpalım :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1^{(0)} \\ \omega_2^{(0)} \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} \omega_1^{(0)} \\ \omega_2^{(0)} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha\omega_1^{(0)} + \beta\omega_2^{(0)} \\ \gamma\omega_1^{(0)} + \delta\omega_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0\omega_1^{(0)} \\ \lambda_0\omega_2^{(0)} \end{pmatrix} \quad \text{buradan}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha\omega_1^{(0)} + \beta\omega_2^{(0)} &= \lambda_0\omega_1^{(0)} \\ \gamma\omega_1^{(0)} + \delta\omega_2^{(0)} &= \lambda_0\omega_2^{(0)} \end{aligned}\right\}\text{sistemi bulunur. Buradan } \lambda_0 = \alpha + \beta\frac{\omega_2^{(0)}}{\omega_1^{(0)}} \quad \text{ve } \lambda_0 = \gamma\frac{w_2^{(0)}}{w_1^{(0)}} + \delta$$

elde edilir.

$$\text{Eğer } \begin{cases} \omega_2^{(0)} = 0 & \text{ise 1. bağıntıdan } \lambda_0 = \alpha \\ \omega_2^{(0)} \neq 0 & \text{ise 2. bağıntıdan } \lambda_0 = \gamma\dfrac{\omega_1^{(0)}}{\omega_2^{(0)}} + \delta \end{cases} \quad \text{olur.}$$

Sonuçta,

$$\begin{aligned} z_0 &= \infty \quad \text{ise } \lambda_0 = \alpha \\ z_0 &\neq \infty \quad \text{ise } \lambda_0 = \gamma z_0 + \delta \end{aligned} \tag{1.9'}$$

elde edilir.

1.2.4. Aynı Sabit Noktalı Dönüşümler

Sırasıyla, sabit noktaları z_1 , z_2 nokta çifti olan veya tek bir sabit z_0 noktasına sahip olan tüm $\overline{A} \in \mathcal{L}$ lerin grubunu, gözönüne alalım. Eşleniklikten dolayı bu grup ya sabit 0, ∞ nokta çiftine sahip olan tüm $\overline{A} \in \mathcal{L}$ lerin grubuna ya da tek sabit noktası ∞ olan $\overline{A} \in \mathcal{L}$ lerin grubuna izomorfiktir. Ayrıca normal formlar sırasıyla ya tüm $\lambda \in \mathbb{C}^*$ nin çarpımsal grubu ile ya da tüm $\alpha \in \mathbb{C}$ nin toplamsal grubu ile tüm $\overline{A} \in \mathcal{L}$ grubunun izoformizmini gösterir.

1.3. Modüler Grup ve Sabit Noktalar

1.3.1. Tanım ve Sınıflama

Bir homojen modüler dönüşüm, elemanları rasyonel tamsayılar ve determinantı 1 olan bir homojen lineer dönüşümdür. Homojen modüler dönüşümler bir grup teşkil eder. Buna homojen modüler grup denir.

Bu grup, tam birim modüler $\Gamma := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$ matris grubuna izomorfiktir. 1.2.3 üncü bölümde verilen φ homomorfizmi, inhomojen $\overline{\Gamma} := \{\overline{A} | A \in \Gamma\}$ modüler grubunu gösterir. Burada eğer $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ ise $\overline{A}: z \to \dfrac{az+b}{cz+d}$ dir.

$\overline{A} \in \overline{\Gamma}$ elemanlarına inhomojen modüler dönüşümler denir. Bu dönüşümler, üst yarı $\mathscr{H}$ düzlemini $\mathbb{R}$ reel eksenini ve $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesini korur.

Γ ve $\overline{\Gamma}$ arasındaki ilişki $\Gamma \backslash \{+I\} \cong \overline{\Gamma}$ izomorfizmasıyla verilir.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ ve $iz(A) = a + d$ olsun.

$xI - A = \begin{pmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{pmatrix}$ için $\phi_A(x) = \begin{vmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{vmatrix} = (x-a)(x-d) - bc = x^2 - (a+d)x + ad - bc$

$\phi_A(x) = x^2 - (a+d)x + 1$ olur. Bu polinomun iki

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{(a+d)^2 - 4} \tag{1.10}$$

özdeğeri vardır. $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{1} = 1$ dir. Böylece $\lambda_{1,2}$ özdeğerleri cebirsel sayılar olur ve bunlar ya rasyonel sayıların $\mathbb{Q}$ cisminde ya da kuadratik $\mathbb{Q}\left(\sqrt{(a+d)^2 - 4}\right)$ sayı cisminde birim elemandırlar. Gerçekten, a=d=∓ 1 için $\lambda_{1,2} = \mp 1$ olur ki bunlar $\mathbb{Q}$ da birimdir. Çünkü $\mathbb{Q}$ nun birimleri $\mp$ 1 dir. $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ olduğundan

$a + d = 2$ için $\lambda_{1,2} = 1 \mp \frac{1}{2}.0 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$a + d = -2$ için $\lambda_{1,2} = -1 \mp \frac{1}{2}.0 = -1 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$ dir. Sonuçta, a+d=$\pm$2 için $\lambda_{1,2} \in \mathbb{Q}$ olur. $a + d \neq \mp 2$ için $\lambda_{1,2} \notin \mathbb{Q}$ ve $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olur. Bir sonuç olarak aşağıdaki sınıflamayı elde ederiz :

i) Parabolik durum :

Bu durum 1. bölümde tam olarak bir sabit noktaya sahip olma şeklinde tanımlandı ve 2. bölümde de tam olarak bir özdeğere sahip olmaya denk olarak gösterildi. Yani tam olarak bir sabit noktaya ve dolayısıyla tam olarak bir özdeğere sahip olma durumu parabolik olma durumuyla eşdeğerdir.

Parabolik durum, sadece $|a+d|=2$ olduğu zaman gerçekleşir. Çünkü $|a+d|=2 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=1$ veya $\lambda_1=\lambda_2=-1$ olur. Yani karekteristik polinom bir tek $\lambda_0=-1$ veya $\lambda_0=+1$ köküne sahiptir.

ii) Eliptik durum :

a)Q(i) üzerinde eliptik durum : a+d=0 olduğu zaman gerçekleşir. Çünkü a+d=0 $\Rightarrow$ $\lambda_{1,2}=\mp i$ olur. 1.2.3 üncü bölüme göre $\lambda=\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$ olduğundan $\lambda=-1$ ve $|\lambda|=1$ olur, bu ise eliptik modüler dönüşümü gösterir.

b)Q($\sqrt{-3}$) üzerinde eliptik durum : $|a+d|=1$ olduğu zaman gerçekleşir. Gerçekten $|a+d|=1$ ise ya $a+d=1$ yada $a+d=-1$ olur. $\rho=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ olmak üzere

$$a+d=1 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}\sqrt{-3}=\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}i=-\rho \text{ veya } -\bar{\rho}$$

$$a+d=-1 \Rightarrow \lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}\sqrt{-3}=-\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}i=\rho \text{ veya } \bar{\rho} \text{ olur.}$$

$$\rho=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{\frac{2\pi}{3}i} \Rightarrow \rho^{-1}=e^{-\frac{2\pi}{3}i}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\bar{\rho} \text{ ve } -\rho^{-1}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=-\bar{\rho} \text{ olur.}$$

Bu durumda,
$$\begin{array}{l} a+d=1 \Rightarrow \lambda_{1,2}=-(\rho)^{\pm 1} \text{ veya } (-\rho)^{\pm 1} \\ a+d=-1 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\rho^{\pm 1} \end{array}$$
olarak bulunur.

$\lambda=\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$ olduğuna göre,

$$a+d=1 \text{ için } \lambda=\frac{(-\rho)^{+1}}{(-\rho)^{-1}}=(-\rho)^2=\rho^2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\rho^{-1}$$

$$a+d=-1 \text{ için } \lambda=\frac{\rho^{-1}}{\rho}=\frac{1}{\rho^2}=\frac{1}{\rho^{-1}}=\rho \text{ olur. Sonuçta,}$$

$|a+d|=1$ ise $\lambda=\rho^{\pm 1}$ dir. Ayrıca $|\rho|=|\rho^{-1}|=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}}=1$ olduğundan $|\lambda|=1$ olur. Bu ise eliptik modüler dönüşümü gösterir. Burada $\rho^{\pm 3}=1$ dir. Gerçekten,

$$\rho=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \rho^3=-\frac{1}{8}+3\frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}i+3\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{3}{4}(-1)-\frac{3\sqrt{3}}{8}i=-\frac{1}{8}+\frac{9}{8}=1$$

$$\rho^{-1}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow \overline{\rho}^3=-\frac{1}{8}+3\frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i+3\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{3\sqrt{3}}{8}i=-\frac{1}{8}+\frac{9}{8}=1$$

Böylece $\rho^{\pm 3}=1$ bulunur. $\left(\rho^{\pm 1}\right)^3=1 \Rightarrow (\lambda)^3=1$ ve $1^{1/3}=\lambda$ olur. Yani λ katsayısı birimin küpkökü olur.

iii) Hiperbolik durum :

$|a+d|>2$ ve yukarıda elde edilen sonuçlara göre, özdeğerlerin ve λ katsayılarının bir reel kuadratik sayı cisminde, birim olması koşulu ile geriye kalan olasılıklar için gerçekleşir. $\lambda_1\lambda_2=1 \Rightarrow \lambda=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ den $\lambda=\lambda_2\frac{1}{\lambda_1}=\lambda_2\lambda_1=\lambda_2^2>0$ olduğundan $\lambda>0$ olur ki böylece bu dönüşüm gerçekten hiperbolik olur.

Tanım: $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ noktalarına, eğer $\overline{A}(z_1)=z_2$ koşulu ile bir inhomojen $\overline{A}\in\overline{\Gamma}$ modüler dönüşümü varsa $\overline{\Gamma}$ modüler grubu altında denktirler denir. Bunun bir denklik bağıntısı tanımladığını gösterelim :

i) $z_1 \sim z_1$ dir :

$\overline{A}(z_1)=z_1$ olmasını sağlayan $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in\Gamma$ var olduğundan yansıma var.

ii) $z_1 \sim z_2$ ise $z_2 \sim z_1$ dir :

$z_1 \sim z_2$ ise $\overline{A}(z_1)=z_2$ koşulu ile bir $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma$ modüler dönüşümü var

$$\overline{A}(z_1)=\frac{az_1+b}{cz_1+d}=z_2 \quad \Rightarrow az_1+b=cz_2z_1+dz_2 \Rightarrow az_1-(cz_2)z_1=dz_2-b \Rightarrow$$

$z_1=\dfrac{dz_2-b}{-cz_2+a}=A^{-1}(z_2)$ olur. $\overline{\Gamma}$ bir modüler grup olduğundan $A^{-1}\in\overline{\Gamma}$ olur. Dolayısıyla $z_2 \sim z_1$ olur.

iii) $z_1 \sim z_2$, $z_2 \sim z_3$ ise $z_1 \sim z_3$ dür :

$z_1 \sim z_2$ ise $\overline{A}_1(z_1)=z_2$ koşulu ile bir $A_1=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{pmatrix}\in\Gamma$ modüler dönüşümü var.

$z_2 \sim z_3$ ise $\overline{A}_2(z_2)=z_3$ koşulu ile bir $A_2=\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in \Gamma$ modüler dönüşümü var.

$$\overline{A}_1(z_1)=\frac{a_1z_1+b_1}{c_1z_1+d_1}=z_2\ ,\ \overline{A}_2(z_2)=\frac{a_2z_2+b_2}{c_2z_2+d_2}=z_3$$

z_2 yi ikincide yerine koyalım

$$\frac{a_2\dfrac{a_1z_1+b_1}{c_1z_1+d_1}+b_2}{c_2\dfrac{a_1z_1+b_1}{c_1z_1+d_1}+d_2}=z_3 \Rightarrow \frac{a_2a_1z_1+a_2b_1+b_2c_1z_1+d_1b_2}{c_2a_1z_1+c_2b_1+d_2c_1z_1+d_1d_2}=\frac{(a_2a_1+b_2c_1)z_1+a_2b_1+d_1b_2}{(c_2a_2+d_2c_1)z_1+c_2b_1+d_1d_2}$$

$$=\overline{A}_2\overline{A}_1(z_1)=z_3 \qquad \text{elde edilir.}$$

$\overline{A}_1, \overline{A}_2 \in \overline{\Gamma}$ olduğundan $\overline{A}_2.\overline{A}_1 \in \overline{\Gamma}$ dir. Dolayısıyla $z_1 \sim z_3$ olur. Sonuçta bu denklik bağıntısıdır.

Şimdi K, $\mathbb{Q}$ üzerinde bir kuadratik sayı cismi olmak üzere bir $\omega \in K$ için diskriminantı tanımlayalım. $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ tamsayı olmak üzere $\omega=\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$ şeklinde gösterelim. $\Delta(\omega)$ diskriminantı

$$\Delta(\omega):=\left[\frac{\alpha_1\alpha_2'-\alpha_2\alpha_1'}{N(\alpha_1,\alpha_2)}\right]^2 \tag{1.11}$$

ifadesi ile tanımlanır. Burada üs eşleniği gösterir. Yani $\overline{\alpha}_1=\alpha_1'$ ve $\overline{\alpha}_2=\alpha_2'$ dir. $N(\alpha_1,\alpha_2)$ ifadesi α_1 ve α_2 nin en büyük ortak böleni (α_1,α_2) olmak üzere, (α_1,α_2) idealinin normudur. $\Delta(\omega)$ nın, K nın tamsayılarının bir bölümü olarak bu gösterimden bağımsız olduğu açıktır. $\Delta(\omega)$, aynı zamanda, katsayıları ortak bölensiz rasyonel tamsayılar olan (yani aralarında asal) kuadratik polinomun diskriminantıdır ve ω bu polinomun bir köküdür. Bu durumu, sözü edilen polinom

$$\frac{(\alpha_2x-\alpha_1)-(\alpha_2'x-\alpha_1')}{N(\alpha_1,\alpha_2)}=\frac{1}{N(\alpha_1,\alpha_2)}\left[\alpha_2\alpha_2'x^2-(\alpha_1\alpha_2'+\alpha_2\alpha_1')+\alpha_1\alpha_1'\right] \tag{1.12}$$

olmak üzere gösterelim :

$$P(x)=\frac{1}{N(\alpha_1,\alpha_2)}\left[\alpha_2\alpha_2'x^2-\alpha_1'\alpha_2x-\alpha_1\alpha_2'x+\alpha_1\alpha_1'\right]=\frac{\alpha_2\alpha_2'}{N(\alpha_1,\alpha_2)}x^2+\frac{-\alpha_1'\alpha_2-\alpha_1\alpha_2'}{N(\alpha_1,\alpha_2)}x+\frac{\alpha_1\alpha_1'}{N(\alpha_1,\alpha_2)}$$

P (x) in diskriminantına Δ diyelim .

$$\Delta=\left[\frac{-\alpha_2\alpha_1'-\alpha_1\alpha_2'}{N(\alpha_1,\alpha_2)}\right]^2-4\frac{\alpha_2\alpha_1'}{N(\alpha_1,\alpha_2)}\frac{\alpha_1\alpha_1'}{N(\alpha_1,\alpha_2)}=\left[\frac{\alpha_2^2\alpha_1'^2+\alpha_1^2\alpha_2'^2+2\alpha_2\alpha_1\alpha_2'\alpha_1'-4\alpha_2\alpha_1\alpha_1'\alpha_2'}{[N(\alpha_1,\alpha_2)]^2}\right]$$

$$\Delta=\frac{(\alpha_2\alpha_1')^2+(\alpha_1\alpha_2')^2-2\alpha_2\alpha_1\alpha_1'\alpha_2'}{[N(\alpha_1,\alpha_2)]^2}=\frac{(\alpha_1\alpha_2'-\alpha_2\alpha_1')^2}{[N(\alpha_1,\alpha_2)]^2}=\left[\frac{(\alpha_1\alpha_2'-\alpha_2\alpha_1')}{[N(\alpha_1,\alpha_2)]}\right]^2=\Delta(\omega)$$

Görüldüğü gibi $\Delta=\Delta(\omega)$ dır. P(x) in kökleri x_1 ve x_2 olsun.

$$x_{1,2}=\frac{\frac{\alpha_2\alpha_1'+\alpha_1\alpha_2'}{N(\alpha_1,\alpha_2)}\mp\sqrt{\Delta(\omega)}}{2\frac{\alpha_2\alpha_2'}{N(\alpha_1,\alpha_2)}}=\frac{\frac{\alpha_2\alpha_1'+\alpha_1\alpha_2'}{N(\alpha_1,\alpha_2)}\mp\frac{\alpha_1\alpha_2'-\alpha_2\alpha_1'}{N(\alpha_1,\alpha_2)}}{2\frac{\alpha_2\alpha_2'}{N(\alpha_1,\alpha_2)}}$$

$$x_{1,2}=\frac{\alpha_2\alpha_1'+\alpha_1\alpha_2'\mp(\alpha_1\alpha_2'-\alpha_2\alpha_1')}{2\alpha_2\alpha_2'}=\frac{\alpha_2\alpha_1'+\alpha_1\alpha_2'}{2\alpha_2\alpha_2'}\mp\frac{\alpha_1\alpha_2'-\alpha_2\alpha_1'}{2\alpha_2\alpha_2'}$$

$$x_{1,2}=\frac{\alpha_1'}{2\alpha_2'}+\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}\mp\left(\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}-\frac{\alpha_1'}{2\alpha_2'}\right)$$

$$x_1=\frac{\alpha_1'}{2\alpha_2'}+\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}+\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}-\frac{\alpha_1'}{2\alpha_2'}=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\omega \text{ olduğu görülür}$$

ve

$$x_2=\frac{\alpha_1'}{2\alpha_2'}+\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}-\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}+\frac{\alpha_1'}{2\alpha_2'}=\frac{\alpha_1'}{\alpha_2'}=\omega' \text{ diyebiliriz.}$$

Görüldüğü gibi $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\omega$ ve $\frac{\alpha_1'}{\alpha_2'}=\omega'$ P(x) in kökleridir.

Bu hazırlıktan sonra yukarıdaki sınıflamaya göre modüler dönüşümleri inceleyeceğiz.

1.3.2.Parabolik Durum

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\Gamma$ ve $|a+d|=2$ olmak üzere $\overline{A}\in\overline{\Gamma}$ modüler dönüşümleri aşağıdaki özelliklere sahiptir :

Teorem 5 : 1) Sabit noktaların kümesi rasyonel sayılar ve ∞ dan ibarettir.

2) Aynı sabit noktalı $\overline{A}\in\overline{\Gamma}$, aynı tek sabit ∞ noktalı modüler dönüşümlerin grubuna $\overline{\Gamma}$ da eşlenik olan sonsuz bir devirsel grup teşkil eder.

3) Tüm rasyonel sayılar $\overline{\Gamma}$ modüler grubu altında ∞ a denktirler.

İspat : $|a+d|=2$ ve $c\neq 0$ olmak üzere $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\Gamma$ olsun

$$\lambda I-A=\begin{pmatrix} \lambda-a & -b \\ -c & \lambda-d \end{pmatrix}\Rightarrow \phi_A(\lambda)=(\lambda-a)(\lambda-d)-bc=\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc.$$

$$\phi_A(\lambda)=\lambda^2-(a+d)\lambda+1\Rightarrow\lambda_{1,2}=\frac{a+d\mp\sqrt{(a+d)^2-4.1.1}}{2.1}=\frac{a+d}{2}\mp\frac{\sqrt{(a+d)^2-4}}{2}$$

olur. $|a+d|=2$ olduğundan $\lambda_{1,2}=\frac{a+d}{2}$ yani $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_0=\frac{a+d}{2}$ olur. Bu ise $\frac{a+d}{2}$ nin tek özdeğer olduğunu gösterir. (1.9') eşitliğini kullanarak $\overline{A}$ nın tek sabit noktası z_0 ı bulalım. Buna göre $\lambda_0=cz_0+d$ olur. Buradan $z_0=\frac{\lambda_0-d}{c}$ ve $z_0=\frac{\frac{a+d}{2}-d}{c}=\frac{a+d-2d}{2c}=\frac{a-d}{2c}$ bulunur.

$z_0=\frac{a-d}{2c}$ noktası gerçekten de $c\neq0$ için $\overline{A}$ nın tek sabit noktasıdır. Şöyle ki

$$\overline{A}(z_0)=\overline{A}\left(\frac{a-d}{2c}\right)=\frac{a\left(\frac{a-d}{2c}\right)+b}{c\left(\frac{a-d}{2c}\right)+d}=\frac{a^2-ad+2bc}{ac-cd+2dc}=\frac{a^2-ad+2bc}{ac+dc}$$ olur. $|a+d|=2$ ise

$a=d=-1$ olabilir. Bu durumda $z_0=0$ ve $\overline{A}(0)=\frac{1-1+2bc}{-2c}=-b$ olur. Ayrıca ad-bc=1 olduğundan $1-bc=1$ ve $-bc=0$ olur. $c\neq0$ olduğundan b=0 dır ve bu nedenle $\overline{A}(0)=0$ olur.

Aynı şekilde,

$a=d=1$ için $A(0)=0$, $a=2$, $d=0$ için $A\left(\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{c}$

$a=-2$, $d=0$ için $A\left(-\frac{1}{c}\right)=-\frac{1}{c}$, $a=0$, $d=2$ için $A\left(-\frac{1}{c}\right)=-\frac{1}{c}$

ve $a=0$, $d=-2$ için $A\left(\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{c}$ bulunur.

Şimdi c=0 olsun. O taktirde $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ olur. $ad-bc=1$ ise $ad=1$ olur. $|a+d|=2$ olduğundan $a=d=1$ veya $a=d=-1$ olur. Buna göre $A=\begin{pmatrix} \mp 1 & \mp b \\ 0 & \mp 1 \end{pmatrix}$ olur.

$$U=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \overline{U}: z \to z+1 \tag{2.13}$$

olmak üzere, $\overline{U}^b(z)=z+b$ dir. Diğer taraftan $\overline{A}(z)=\frac{\mp z \mp b}{0.z \mp 1}$ den $\overline{A}(z)=z+b$ olur. Böylece $\overline{U}^b=\overline{A}$ olur. $b\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $\overline{U}^b$ dönüşümleri tek sabit ∞ noktası ile parabolik dönüşüm olur. $\overline{U}^b$ dönüşümleri, $\overline{U}$ tarafından üretilen sonsuz bir devirsel grup teşkil eder. $(a',c')=1$ olmak üzere bir rasyonel $\frac{a'}{c'}$ noktası için $a'(d')+(-b')(c')=1$ olacak şekilde $b',d'\in\mathbb{Z}$ sayıları var olmak üzere $S=\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ matrisini oluşturalım. Burada $a',b',c',d'\in\mathbb{Z}$ ve $a'd'-b'c'=1$ olduğundan $S\in\Gamma$ olur. Buna göre $\overline{S}(z)=\frac{a'z+b'}{c'z+d'}=\frac{a'+\frac{b'}{z}}{c'+\frac{b'}{z}}$ olur. Buradan $\overline{S}(\infty)=\frac{a'+0}{c'+0}=\frac{a'}{c'}$ bulunur ki böylece 3) iddiası kanıtlanmış olur.

Ayrıca, eğer $A'=SUS^{-1}\in\Gamma$ ise o zaman $\overline{A'}$, sabit nokta olarak verilen $\frac{a'}{c'}$ noktasına sahiptir. Gerçekten, $A'=SUS^{-1}$ den $A'=\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d' & -b' \\ -c' & a' \end{pmatrix}$ ve $A'=\begin{pmatrix} a' & a'+b' \\ c' & c'+d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d' & -b' \\ -c' & a' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a'd'-a'c'-b'c' & -a'b'+a'^2+a'b' \\ c'd'-c'^2-c'd' & -b'c'+a'c'+a'd' \end{pmatrix}$ olur. Düzenlenip

$z=\frac{a'}{c'}$ alınırsa $\overline{A'}\left(\frac{a'}{c'}\right)=\frac{(1-a'c')\frac{a'}{c'}+a'^2}{-c'^2\frac{a'}{c'}+1+a'c'}=\frac{a'-a'^2c'+a'^2c'}{-c'^2a'+c'+a'c'^2}=\frac{a'}{c'}$ bulunur. Böylece $\frac{a'}{c'}$ noktası 1) iddiasını kanıtlayan bir sabit nokta olarak gerçekleşir.

Diğer taraftan ∞ ve $\frac{a'}{c'}$ noktalarında sabit olan gruplar $\overline{S}\in\overline{\Gamma}$ vasıtasıyla eşleniktirler. Gerçekten, A', $\frac{a'}{c'}$ noktasında sabit, $\overline{U}^b$ ise ∞ noktasında sabit ve $\overline{A'}=\overline{SU^bS^{-1}}$ eşitliği mevcut olduğundan $\overline{A'}$ ve $\overline{U}^b$ grupları $\overline{S}\in\overline{\Gamma}$ vasıtasıyla eşlenik olurlar. Böylece 2) iddiası kanıtlanmış olur.

1.3.3. Gauss Sayı Cismi Üzerinde Eliptik Durum

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\Gamma$ ve $a+d=0$ olmak üzere modüler $\overline{A}\in\overline{\Gamma}$ dönüşümleri aşağıdaki özelliklere sahiptir :

Teorem 6 : 1) Sabit noktaların kümesi $d^2\equiv-1 \bmod c$ olmak üzere $\frac{\mp i-d}{c}$ çiftlerinden oluşur ve bunlar, diskriminantı -4 olan $\mathbb{Q}(i)$ deki sayılardır.
2) Böyle sabit noktaların aynı çifti ile $\overline{A}\in\overline{\Gamma}$ iki mertebeli bir devirsel grup teşkil eder.
3) $d^2\equiv-1 \bmod c$ ve $c>0$ olmak üzere tüm $\frac{i-d}{c}\in\mathbb{Q}(i)$ sayıları, $\overline{\Gamma}$ modüler grubu altında denktirler.

İspat : $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\lambda I-A=\begin{pmatrix} \lambda-a & -b \\ -c & \lambda-d \end{pmatrix}\Rightarrow\phi_A(\lambda)=\lambda^2-(a+d)\lambda+1$

$a+d=0\Rightarrow\phi_A(\lambda)=\lambda^2+1=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=\mp i$ ve $\lambda=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=-1$ bulunur.

$$A^3=A(A.A)=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2+bc & ab-ba \\ ca-ac & bc+a^2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2+bc & 0 \\ 0 & bc+a^2 \end{pmatrix}.$$ $ad-bc=1$ ve $a=-d$ ise $a^2+bc=-1$ olur. Buradan

$$A^3=A.A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=-A$$ olur. $\overline{A}(z)=-\overline{A}(z)$ olduğundan $\overline{A}^3(z)=\overline{A}(z)$

olur ki bu ise $\overline{A}\in\overline{\Gamma}$ nın iki mertebeli bir devirsel grup oluşturduğunu gösterir. Böylece 2) iddiası kanıtlanmış olur.

Şimdi 1) iddiasını kanıtlayalım : $\overline{A}$ nın sabit noktaları Teorem 4 de verilen $\lambda_{1,2}=cz_{1,2}+d$ formülü ile $\lambda_{1,2}=\pm i$ özdeğerlerinden hesaplanır. $\pm i=cz_{1,2}+d\rightarrow \dfrac{\pm i-d}{c}=z_{1,2}$ sabit noktaları bulunur. Ayrıca a= -d ve ad-bc=1 den $-d^2=bc+1\rightarrow d^2=(-b)c-1$ ise $d^2\equiv-1 \bmod c$ sonucu çıkar. $z_{1,2}$ noktalarının sabit nokta olduklarını görelim : Bunun için

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$ iken $a+d=0\Rightarrow a=-d$ ve $d^2=-bc-1\Rightarrow b=-\dfrac{d^2+1}{c}$ olmak üzere

$$A=\begin{pmatrix} -d & -\dfrac{d^2+1}{c} \\ c & d \end{pmatrix}$$ matrisini oluşturalım. $\det(A)=-d^2+d^2+1=1$ ve $c,d,-\dfrac{d^2+1}{c}\in Z$

olduğundan $A\in\Gamma$ olur. Buradan

$$A(z_{1,2})=\frac{-dz_{1,2}-\dfrac{d^2+1}{c}}{cz_{1,2}+d}=\frac{-d\left(\dfrac{\pm i-d}{c}\right)-\dfrac{d^2+1}{c}}{c\left(\dfrac{\pm i-d}{c}\right)+d}\Rightarrow A\left(\frac{\pm i-d}{c}\right)=$$

$$\frac{\mp di+d^2-d^2-1}{\pm ci-cd+cd}=\frac{\mp di-1}{\pm ci}=\frac{(\mp di-1)\pm i}{-c}=\frac{(\mp di-1)\mp i}{c}=\frac{di^2\pm i}{c}$$

$\Rightarrow A\left(\dfrac{\pm i-d}{c}\right)=\dfrac{\pm i-d}{c}$ olarak bulunur.Bu ise 1) iddiasının ilk kısmını kanıtlar.

$d^2\equiv-1 \bmod c$ den $b=\dfrac{-d^2-1}{c}$ olmak üzere $\dfrac{\pm i-d}{c}$ sayıları $cx^2+2dx-b=0$

polinomunun kökleridir. Gerçekten; $cx^2+2dx-b=0$ için

$$x_{1,2}=\frac{-2d\mp\sqrt{4d^2-4c(-b)}}{2c}=\frac{-d\mp\sqrt{d^2+bc}}{c}=\frac{-d\mp\sqrt{-bc-1+bc}}{c}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{\mp i-d}{c}$$

olarak bulunur. Burada, $-bc=1+d^2$ nin e.b.o.b. $(b,c,2d)=1$ i gerektirdiğini gösterelim: e.b.o.b. $(b,c,2d)=\ell$ olsun. $\ell|b$, $\ell|c$, $\ell|2d$ olur. $\ell|b$, $\ell|c\Rightarrow\ell|bc$ ve $\ell|-bc$ olur. Buradan $\ell|d^2+1$ olur. $\ell|2d\Rightarrow\ell|2d^2$ olur. Bu ise $\ell|d^2-1$ i gerektirir. Böylece $\ell|2$ olur. Bu durumda $\ell=1$ veya $\ell=2$ olur. $\ell\neq 2$ olduğunu gösterelim. Burada d^2-1, d^2, d^2+1 sayıları ardışık sayılarını gözönüne alalım. İlk olarak d^2+1 in tek olduğunu kabul edelim. $d^2+1=-bc$ olduğundan b veya c den en az biri tek olmak zorunda. $\ell|b$ ve $\ell|c$ olduğundan $\ell\neq 2$ olmak zorundadır. Dolayısıyla $\ell=1$ olur. Şimdi d^2+1 in çift olduğunu kabul edelim. $0\leq n\in\mathbb{Z}$ olmak üzere d^2+1 sayıları dolayısıyla -bc sayıları 2+n8 şeklindeki sayılardır. Bunu 2(1+4n) şeklinde yazarsak b ve c den en az birinin tek olduğu sonucu çıkar. $\ell|b$ ve $\ell|c$ olduğundan $\ell\neq 2$ olmak zorundadır. Dolayısıyla $\ell=1$=e.b.o.b (b,c,2d) olur.

$cx^2+2dx-b=0\Rightarrow\Delta=(2d)^2-4c(-b)=4d^2+4bc=4(-bc-1)+4bc=-4$

olarak bulunur. $\Delta=\Delta(\omega)$ olduğundan $\Delta(\omega)=-4$ olur.

Karşıt olarak $\frac{d'i-d}{c}\in\mathbb{Q}(i)$ nin ortak bölensiz c, d, d' $\in\mathbb{Z}$ ile ve -4 diskriminantı ile verildiğini kabul edelim. Eğer $\gamma=(d'i-d,c)$ ise $-4=\left[\frac{2id'c}{N(\gamma)}\right]^2$ olur. Çünkü $\Delta(\omega)=\left[\frac{\alpha_1\alpha_2'-\alpha_2\alpha_1'}{N(\alpha_1\alpha_2)}\right]^2$ şeklinde tanımlanmıştı. Buna göre $(\alpha_1,\alpha_2)=\gamma$ dan $\alpha_1=d'i-d$, $\alpha_2=c$ olur. Dolayısıyla $\alpha_1'=-d'i-d$ ve $\alpha_2'=c$ olur. Bunları $\Delta(\omega)$ da yerine yazalım;

$$\Delta(\omega)=\left[\frac{(d'i-d)c-c(-d'i-d)}{N(\gamma)}\right]^2=\left[\frac{cd'i-cd+cd'i+cd}{N(\gamma)}\right]^2=\left[\frac{2id'c}{N(\gamma)}\right]^2 \text{ bulunur.}$$

$\Delta(\omega)=-4$ verildiğinden $-4=\left[\frac{2id'c}{N(\gamma)}\right]^2$ sonucu olur. Buradan devam edersek,

$$-4=\frac{-4[d'c]^2}{[N(\gamma)]^2}\rightarrow[d'c]^2=[N(\gamma)]^2\Rightarrow d'c=\mp N(\gamma) \text{ olur.}$$

$\pi|d'$ olacak şekilde bir asal π sayısı olsaydı, o taktirde $\pi|\gamma$ veya $\pi|\gamma'$ olacağından $\pi|c$ ve $\pi|d'i-d$ olur. Buradan $\pi|-(d'i-d)+d'i$den $\pi|d$ elde edilir. Bu ise e.b.o.b. (c,d,d)=1 olmasıyla çelişir. Dolayısıyla d' nün iki ve daha büyük bir böleni olmadığından $d'=\pm1$ olmak zorundadır. Buradan $N(\gamma)=\mp c$ olur. $\gamma|d'i-d$ ve $d'=\mp1$ den $\gamma|\mp i-d$ olur. Böylece $N(\gamma)|N(\mp i-d)$ den $N(\gamma)=\mp c$ ve $N(\mp i-d)=1+d^2$ olduğundan $c|1+d^2$ olur ve $d^2\equiv-1 \bmod c$ elde edilir. Böylece 1) iddiası tamamen ispatlanır.

3) iddiasını ve iz(A)=0 iken tüm $\overline{A}\in\overline{\Gamma}$ ların

$$T=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \overline{T}:z\to\frac{-1}{z} \tag{1.14}$$

olmak üzere $\overline{\Gamma}$da $\overline{T}$nin eşlenikleri olduğunu daha sonra ispatlayacağız.

1.3.4. Birimin Küp Köklerinin Cismi Üzerindeki Eliptik Durum

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma$ ve $|a+d|=1$ olmak üzere $\overline{A}\in\overline{\Gamma}$ modüler dönüşümleri aşağıdaki özelliklere sahiptir :

Teorem 7 : 1) Sabit noktalar kümesi, $d^2+d+1\equiv0 \bmod c$ olmak üzere $\dfrac{\rho^{\mp1}-d}{c}\in\mathbb{Q}(\rho)$ sayı çiftlerinden oluşur ve bunlar diskriminantı -3 olan $\mathbb{Q}(\rho)$ deki sayılardır.
2) Böyle aynı sabit nokta çiftine sahip olan $\overline{A}\in\overline{\Gamma}$, 3 mertebeli bir devirsel grup teşkil eder.
3) $d^2+d+1\equiv0 \bmod c$ ve c>0 olmak üzere tüm $\dfrac{\rho-d}{c}\in\mathbb{Q}(\rho)$ sayıları $\overline{\Gamma}$ modüler grubu altında denktirler.

İspat : Daha önce çarpanın birimin küpkökü olduğunu, yani $\lambda=\rho^{\mp1}$ ve $\lambda^3=\rho^{\mp3}=1$ den $\lambda=1^{1/3}$ olduğunu göstermiştik. 1.2.4 ün sonuçlarından 2) iddiası hemen çıkar.

Şimdi 1) iddiasını kanıtlayalım : $|a+d|=1$ olmak üzere $\overline{A}\in\overline{\Gamma}$ verilmiş ise o taktirde genelliği bozmaksızın a+d = -1 seçilebilir. Bu durumda

$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{(a+d)^2-4}$ den $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{-3} = -\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i = \rho^{\mp 1} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \rho^{\mp 1}$ olur. $\lambda_{1,2} = cz_{1,2} + d$ formülü ile $\rho^{\pm 1} = cz_{1,2} + d$, $\frac{\rho^{\pm 1} - d}{c} = z_{1,2}$ sabit noktaları bulunabilir. $a = -(1+d)$ ve $ad-bc = 1 \Rightarrow -(1+d)d - bc = 1$, $-d-d^2-bc = 1$, $d^2+d+1=-bc$ ise buradan $d^2+d+1 \equiv 0 \mod c$ sonucu çıkar. a, b, c, $d \in \mathbb{Z}$ için $a = -(1+d)$ ve $b = -\frac{d^2+d+1}{c}$ olmak üzere $A := \begin{pmatrix} -(1+d) & -\frac{d^2+d+1}{c} \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisini oluşturalım. Bu matris $iz(A) = -1-d+d = -1$ den -1 izine ve $\det(A) = -d-d^2+d^2+d+1 = 1$ den 1 determinantına ve tamsayı elemanlara sahiptir. Dolayısıyla $A \in \Gamma$ olur. $z_{1,2}$ noktalarının sabit nokta olduklarını görelim. $A(z_{1,2}) = A\left(\frac{\rho^{\mp 1} - d}{c}\right)$ ise

$$A\left(\frac{\rho^{\mp 1}-d}{c}\right) = \frac{-(1+d)\left(\frac{\rho^{\mp 1}-d}{c}\right) - \frac{d^2+d+1}{c}}{c\left(\frac{\rho^{\mp 1}-d}{c}\right)+d} = \frac{(-1-d)(\rho^{\mp 1}-d)-d^2-d-1}{c\rho^{\mp 1}}$$

$$= \frac{-\rho^{\mp 1}+d-d\rho^{\mp 1}+d^2-d^2-d-1}{c\rho^{\mp 1}} = \frac{-\rho^{\mp 1}-d\rho^{\mp 1}-1}{c\rho^{\mp 1}} = \frac{-1-d-\rho^{\mp 1}}{c}$$

$$= \frac{-1-\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-d}{c} = \frac{\left(-\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-d}{c} = \frac{\rho^{\mp 1}-d}{c}$$

olarak bulunur. Bu ise 1) iddiasının ilk kısmını kanıtlar.

$d^2+d+1 \equiv 0 \mod c$ olmak üzere $\frac{\rho^{\mp 1}-d}{c}$ sayıları $cx^2+(1+2d)x-b=0$ denkleminin kökleridir. Bu polinomun köklerine $x_{1,2}$ dersek,

$$x_{1,2} = \frac{-(1+2d) \mp \sqrt{(1+2d)^2-4c(-b)}}{2c} = \frac{-1-2d \mp \sqrt{1+4d^2+4d+4bc}}{2c} \text{ olur.}$$

$b=-\dfrac{d^2+d+1}{c} \Rightarrow d^2+d+1=-bc$ yi $x_{1,2}$ de yerine yazalım;

$$x_{1,2}=\frac{-1-2d\mp\sqrt{1+4d^2+4d+4(-d^2-d-1)}}{2c}=\frac{-1-2d\mp\sqrt{1+4d^2+4d-4d^2-4d-4}}{2c}$$

$$x_{1,2}=\frac{-1-2d\mp\sqrt{-3}}{2c}=\frac{-\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{-3}}{2}i-d}{c}=\frac{\rho^{\mp 1}-d}{c}$$ olduğu görülür.

Görüldüğü gibi polinomun diskriminantı Δ= -3 dür.

Şimdi e.b.o.b. (c, 1+2d, b) = 1 olduğunu gösterelim : e.b.o.b. (c, 1+2d, b) = ℓ olsun. $\ell|b$, $\ell|c \Rightarrow \ell|bc$ olur. $-bc=d^2+d+1$ den $\ell|(d^2+d+1)2=2d^2+2d+2$ olur. Buradan ve $\ell|(1+2d)d=d+2d^2$ den $\ell|d+2$ ve $\ell|(d+2)2=2d+4$ olur. Buradan ve yine $\ell|1+2d$ den $\ell|2d+4-2d-1=3$ ve $\ell|3$ olur. $\ell=2$ olamaz. Çünkü $2\nmid 1+2d$ dir. Bu durumda $\ell=1$ veya $\ell=3$ dür. $\ell=3$ olduğunu kabul edelim. $3|d^2+d+1$ olur. Bunun gerçekleşebilmesi için, tümevarımla d sayılarının, $n\in\mathbb{Z}$ olmak üzere 3n+1 şeklindeki sayılar olması gerektiği görülebilir. Bu durumda $d^2+d+1=(3n+1)^2+(3n+1)+1=3(3n^2+3n+1)=-bc$ sonucuna varılır. Diğer taraftan $3|b$ ve $3|c$ olduğundan $3(3n^2+3n+1)$ sayısı iki çarpan olarak yazıldığında her iki çarpanda 3 ile bölünebilmelidir. Oysa bu olanaksızdır. Çünkü $3\nmid 3n^2+3n+1$ olduğundan $3n^2+3n+1$ sayısının içinde hiç 3 veya 3 ün katı yoktur. Bu ise $3(3n^2+3n+1)$ sayısının çarpanlarından birinin 3 ile tam bölünemeyeceğini gösterir. Bu durumda 3 sayısı b ve c nin her ikisini aynı anda bölemez. Oysa bu $3|b$ ve $3|c$ olmasına aykırıdır. Bu çelişki ℓ=3 kabul edilmesinden dolayı oluştu. Dolayısıyla ℓ=1 olmak zorundadır. Buradan e.b.o.b. (c,1+2d,b)=1 olur.

$cx^2+(1+2d)x-b=0 \Rightarrow \Delta=(1+2d)^2-4c(-b)=1+4d+4d^2+4cb$

$\Delta=1+4d+4d^2+4(-d^2-d-1)=-3$ olarak bulunur. $\Delta=\Delta(\omega)$ olduğundan $\Delta(\omega)$ = -3 olur. Karşıt olarak $\dfrac{d'\rho-d}{c}\in\mathbb{Q}(\rho)$; e.b.o.b. (c,d,d')=1 olmak üzere -3 diskriminantı ile verilmiş olsun (Aynı zamanda $\dfrac{d'\overline{\rho}-d}{c}$ durumu da incelenmiş olur).

$\gamma=(d'\rho-d,c)$ ise $\Delta(\omega)=\left[\dfrac{(d'\rho-d)c-c(d'\overline{\rho}-d)}{N(\gamma)}\right]^2$ olur. Buradan

$$-3=\left[\frac{cd'\rho-cd-cd'\overline{\rho}+cd)}{N(\gamma)}\right]^2=\left[\frac{cd'(\rho-\overline{\rho})}{N(\gamma)}\right]^2 \text{ bulunur. Böylece}$$

$-3[N(\gamma)]^2=(d'c)^2(\rho-\overline{\rho})^2$ iken $\rho-\overline{\rho}=\sqrt{-3}$ olduğundan

$[N(\gamma)]^2=(d'c)^2 \Rightarrow d'c=\mp N(\gamma)$ olur. $\pi|d'$ olacak şekilde bir asal π sayısı olsaydı, o taktirde $\pi|\gamma$ veya $\pi|\gamma'$ olacağından $\pi|c$ ve $\pi|d'\rho-d$ olurdu. Buradan $\pi|-(d'\rho-d)+d'\rho$ dan $\pi|d$ elde edilir. Bu ise e.b.o.b. (c,d,d)=1 olmasıyla çelişir. Dolayısıyla d' nün 2 ve daha büyük bir böleni olmadığından d'=±1 olmak zorundadır. Buradan $N(\gamma)=\mp c$ olur. $\gamma|d'\rho-d$ ve $d'=\mp 1$ den $\gamma|\mp\rho-d$ olur. Böylece $N(\gamma)|N(\mp\rho-d)$ den $N(\gamma)=\mp c$ ve $N(\mp\rho-d)=d^2\mp d+1$ olduğundan $\mp c|d^2\mp d+1$ olur. Buradan $d^2+d+1\equiv 0 \bmod c$ olur. Bu ise 1) iddiasını kanıtlar.

3) iddiası ve $|iz(A)|=1$ iken tüm $\overline{A}\in\overline{\Gamma}$ ların

$$R=TU=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ \overline{R}:z\rightarrow\frac{-1}{z+1} \tag{1.15}$$

olmak üzere $\overline{\Gamma}$ da, $\overline{R}$ veya $\overline{R}^2$ nin eşlenikleri olduğunu daha sonra ispatlayacağız.

1.3.5. Hiperbolik Durum

$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma$ ve $|a+d|>2$ olmak üzere $\overline{A}\in\overline{\Gamma}$ modüler dönüşümleri aşağıdaki özelliklere sahiptir :

Teorem 8 : 1) Sabit noktalarının kümesi, keyfi bir reel kuadratik sayı cisminin farklı cebirsel eşlenik sayı çiftlerinden ibarettir.

2) Böyle aynı sabit nokta çiftine sahip olan $\overline{A}\in\overline{\Gamma}$, sonsuz bir devirsel grup oluşturur.

3) α_1, α_2, β_1, β_2 tam olmak üzere iki reel kuadratik $z=\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$ ve $w=\dfrac{\beta_1}{\beta_2}$ (veya $w=\dfrac{\beta_2}{\beta_1}$) irrasyoneli ancak ve ancak (α_1,α_2) ve (β_1,β_2) Z-modülleri benzer iseler modüler grup altında denktirler.

İspata geçmeden önce modül ve modüllerin benzerliği tanımlarını verelim :

i) (α, β) $\mathbb{Z}$-modülü $(\alpha,\beta):=\{a\alpha+b\beta \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ ile tanımlanır.

ii) İki (α_1,α_2) ve (β_1,β_2) $\mathbb{Z}$-modülü, eğer α_1, α_2, β_1, β_2 elemanları aynı cisme ait ve $(\alpha_1,\alpha_2)=\sigma(\beta_1,\beta_2)$ olacak şekilde bu cisimde bir σ sayısı varsa benzerdirler.

İspat : Burada özdeğerlerin ve λ katsayılarının bir reel kuadratik sayı cisminde bir birim olduğunu biliyoruz. Gerçekten $\lambda=\lambda_2^2$ olduğundan λ katsayısı $\mathbb{Q}\left(\sqrt{(a+d)^2-4}\right)$ reel kuadratik sayı cisminde bir birimin karesi olur. O halde λ_2 birimdir. Bir reel kuadratik sayı cismindeki bir temel birimin varlığından, -1 i içermeyen birimlerin grubunun her uygun alt grubunun, sonsuz mertebeli bir devirsel alt grup olduğu sonucuna ulaşırız. Özel olarak bu, katsayıların alt grubu için doğrudur. Dolayısıyla 1.2.4 e göre 2) iddiasını kanıtlar.

1) iddiasının ispatı : Özdeğerler cebirsel eşlenikler olduğundan $\lambda_\upsilon=cz_\upsilon+d$ den $\frac{\lambda_\upsilon-d}{c}=z_\upsilon$ sabit noktaları da cebirsel eşlenik olurlar. Ayrıca sabit noktalar rasyonel değildir. Çünkü $|a+d|>2$ olduğundan $\lambda_{1,2}=\frac{a+d}{2}\mp\sqrt{(a+d)^2-4}$ den

$$z_\upsilon=\frac{\frac{a+d}{2}\mp\sqrt{(a+d)^2-4}-d}{c}=\frac{a-d}{2c}\mp\frac{1}{c}\sqrt{(a+d)^2-4}\notin\mathbb{Q}$$ olduğu görülür.

Şimdi D>0 olmak üzere ω_1, ω_2 nin tamsayı olduğunu ve $z=\frac{\omega_1}{\omega_2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ nin bir rasyonel kare olmadığını kabul edelim. Ayrıca, ω_1, ω_2, (ω_1, ω_2) $\mathbb{Z}$-modülünün bir tabanı (bazı) olacak şekilde $z\notin\mathbb{Q}$ olduğunu kabul edelim. $\varepsilon\neq\pm1$ ve $\varepsilon\varepsilon'=1$ olmak üzere $\varepsilon\equiv1 \bmod (\omega_1\omega_2'-\omega_2\omega_1')$ şeklinde bir birim seçelim. Böyle bir birim mevcuttur. Çünkü mod $(\omega_1\omega_2'-\omega_2\omega_1')$ kalanlarının halkası sonlu ve pozitif normlu birimlerin oluşturduğu grubun mertebesi sonsuzdur. Yani, burada sonsuz tane ω_1, ω_2 seçebilmemize karşın mod $(\omega_1\omega_2'-\omega_2\omega_1')$ kalanlarının halkası sonlu fakat ω_1, ω_2 nin seçiminden dolayı yine sonsuz tane birimi (burada ε) kongrüanslar vasıtasıyla elde edebileceğimizden, birimlerin oluşturduğu grubun mertebesi sonsuz olur. a, b, c, d$\in\mathbb{Q}$ olmak üzere ve ω_1, ω_2 baz olduğundan

$$(1)\ \varepsilon\omega_1 = a\omega_1 + b\omega_2$$
$$(2)\ \varepsilon\omega_2 = c\omega_1 + d\omega_2 \qquad (1.16)$$

sistemini oluştururuz. Bunların eşleniklerinden

$(3)\ \varepsilon'\omega_1' = a\omega_1' + b\omega_2'$
$(4)\ \varepsilon\omega_2' = c\omega_1' + d\omega_2'$
sistemi elde edilir. Her iki sistemden a, b, c, d$\in\mathbb{Z}$ katsayılarını hesaplayalım.

(1) ve (3) den $a = \dfrac{\begin{vmatrix} \varepsilon\omega_1 & \omega_2 \\ \varepsilon'\omega_1' & \omega_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_1' & \omega_2' \end{vmatrix}} = \dfrac{\varepsilon\omega_1\omega_2' - \varepsilon'\omega_2\omega_1'}{\omega_1\omega_2' - \omega_2\omega_1'}$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} \omega_1 & \varepsilon\omega_1 \\ \omega_1' & \varepsilon\omega_1' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_1' & \omega_2' \end{vmatrix}} = \frac{\varepsilon'\omega_1\omega_1' - \varepsilon\omega_1\omega_1'}{\omega_1\omega_2' - \omega_2\omega_1'} = \frac{(\varepsilon' - \varepsilon)\omega_1\omega_1'}{\omega_1\omega_2' - \omega_2\omega_1'}$$

(2) ve (4) den $c = \dfrac{\begin{vmatrix} \varepsilon\omega_2 & \omega_2 \\ \varepsilon'\omega_2' & \omega_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_1' & \omega_2' \end{vmatrix}} = \dfrac{\varepsilon\omega_2\omega_2' - \varepsilon'\omega_2\omega_2'}{\omega_1\omega_2' - \omega_2\omega_1'} = \dfrac{(\varepsilon - \varepsilon')\omega_2\omega_2'}{\omega_1\omega_2' - \omega_2\omega_1'}$

$$d = \frac{\begin{vmatrix} \omega_1 & \varepsilon'\omega_2 \\ \omega_1' & \varepsilon'\omega_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_1' & \omega_2' \end{vmatrix}} = \frac{\varepsilon'\omega_1\omega_2' - \varepsilon\omega_2\omega_1'}{\omega_1\omega_2' - \omega_2\omega_1'}$$

$\varepsilon \equiv 1 \bmod (\omega_1\omega_2' - \omega_2\omega_1')$ ve $\varepsilon\varepsilon' = 1$ ise $\omega_1\omega_2' - \omega_2\omega_1' | \varepsilon - 1$ den
$\omega_1\omega_2' - \omega_2\omega_1' | \varepsilon - \varepsilon\varepsilon' = -\varepsilon(\varepsilon' - 1)$ ise $\omega_1\omega_2' - \omega_2\omega_1' | \varepsilon' - 1$ den
$\varepsilon' \equiv 1 \bmod (\omega_1\omega_2' - \omega_2\omega_1')$ elde edilir. Bundan yararlanarak a,b,c,d$\in\mathbb{Z}$ olduğunu gösterelim.

$\omega_1\omega_2' - \omega_2\omega_1' | \varepsilon - 1$ ve $\omega_1\omega_2' - \omega_2\omega_1' | \varepsilon' - 1$ den $\omega_1\omega_2' - \omega_2\omega_1' | -(\varepsilon - 1) + \varepsilon' - 1 = \varepsilon' - \varepsilon$ dan dolayı b,c $\in\mathbb{Z}$ olur. Ayrıca

$$a=\frac{\varepsilon\omega_1\omega_2'-\varepsilon'\omega_2\omega_1'}{\omega_1\omega_2'-\omega_2\omega_1'}=\frac{(\varepsilon-1+1)\omega_1\omega_2'-(\varepsilon'-1+1)\omega_2\omega_1'}{\omega_1\omega_2'-\omega_2\omega_1'}\text{ den}$$

$$a=\frac{(\varepsilon-1)\omega_1\omega_2'+\omega_1\omega_2'-(\varepsilon'-1)\omega_2\omega_1'-\omega_2\omega_1'}{\omega_1\omega_2'-\omega_2\omega_1'}=\frac{(\varepsilon-1)\omega_1\omega_2'}{\omega_1\omega_2'-\omega_2\omega_1'}-\frac{(\varepsilon'-1)\omega_2\omega_1'}{\omega_1\omega_2'-\omega_2\omega_1'}+1$$

ve

$$d=\frac{(\varepsilon'-1)\omega_1\omega_2'+\omega_1\omega_2'-(\varepsilon-1)\omega_2\omega_1'-\omega_2\omega_1'}{\omega_1\omega_2'-\omega_2\omega_1'}=\frac{(\varepsilon'-1)\omega_1\omega_2'}{\omega_1\omega_2'-\omega_2\omega_1'}-\frac{(\varepsilon-1)\omega_2\omega_1'}{\omega_1\omega_2'-\omega_2\omega_1'}+1$$

den dolayı $a,d\in\mathbb{Z}$ olur.

$$\det\begin{pmatrix}\omega_1 & \omega_1'\\ \omega_2 & \omega_2'\end{pmatrix}=1.\begin{vmatrix}\omega_1 & \omega_1'\\ \omega_2 & \omega_2'\end{vmatrix}=\varepsilon\varepsilon'\begin{vmatrix}\omega_1 & \omega_1'\\ \omega_2 & \omega_2'\end{vmatrix}=\varepsilon'\begin{vmatrix}\varepsilon\omega_1 & \omega_1'\\ \varepsilon\omega_2 & \omega_2'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\varepsilon\omega_1 & \varepsilon'\omega_1'\\ \varepsilon\omega_2 & \varepsilon'\omega_2'\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}\omega_1 & \omega_1'\\ \omega_2 & \omega_2'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a\omega_1+b\omega_2 & a\omega_1'+b\omega_2'\\ c\omega_1+d\omega_2 & c\omega_1'+d\omega_2'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\omega_1 & \omega_1'\\ \omega_2 & \omega_2'\end{vmatrix}\text{ den }\Rightarrow\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=1\text{ ve } ad-bc=1$$

olduğu görülür.

(1.16) sisteminden $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ ye karşılık gelen inhomojen dönüşümün özdeş olmadığını ve $z=\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ sabit noktasına sahip olduğunu görürüz. Gerçekten (1.16) dan yararlanarak bulduğumuz $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ katsayıları birim matris oluşturmaz, bu ise dönüşümün özdeş olmadığını gösterir. Ayrıca (1.16) daki denklemleri taraf tarafa bölersek

$$\frac{\varepsilon\omega_1}{\varepsilon\omega_2}=\frac{a\omega_1+b\omega_2}{c\omega_1+d\omega_2}\text{ den }\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{a\frac{\omega_1}{\omega_2}+b}{c\frac{\omega_1}{\omega_2}+d}=\overline{A}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)\text{ den } z=\overline{A}(z)\text{ olur bu ise } z=\frac{\omega_1}{\omega_2}$$

noktasının inhomojen $\overline{A}$ dönüşümünün bir sabit noktası olduğunu gösterir. Benzer şekilde, (1.16) daki denklemlerin eşleniklerinden $\dfrac{\omega_1'}{\omega_2'}=\dfrac{a\frac{\omega_1'}{\omega_2'}+b}{c\frac{\omega_1'}{\omega_2'}+d}=\overline{A}\left(\dfrac{\omega_1'}{\omega_2'}\right)$ den $z'=\overline{A}(z')$

olur. Dolayısıyla $z=\frac{\omega_1}{\omega_2}$ nin eşleniği olan $z'=\frac{\omega_1'}{\omega_2'}$ noktası da $\overline{A}$ dönüşümünün bir sabit noktası olur. Böylece 1) iddiası ispatlanmış olur.

Şimdi 3) iddiasını ispatlayalım : (α_1,α_2) ve (β_1,β_2) $\mathbb{Z}$-modüllerinin benzer olduklarını kabul edelim. Bu durumda $(\alpha_1,\alpha_2)=\sigma(\beta_1,\beta_2)$ olacak şekilde burada σ sayısı vardır. $(\alpha_1,\alpha_2)=(\sigma\beta_1,\sigma\beta_2)$ olur. Burada α_1, α_2 baz olduğundan

$$\begin{aligned} &(1)\ \sigma\beta_1 = a\alpha_1 + b\alpha_2 \\ &(2)\ \sigma\beta_2 = c\alpha_1 + d\alpha_2 \end{aligned} \tag{1.17}$$

olacak şekilde a, b, c, $d\in\mathbb{Z}$ vardır. Bunların eşlenikleri ile

$$\begin{aligned} &(3)\ \sigma'\beta_1' = a\alpha_1' + b\alpha_2' \\ &(4)\ \sigma'\beta_2' = c\alpha_1' + d\alpha_2' \end{aligned}$$

elde edilir. (1) ve (3) den $a=\dfrac{\begin{vmatrix}\sigma\beta_1 & \alpha_2\\ \sigma'\beta_1' & \alpha_2'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_1' & \alpha_2'\end{vmatrix}}=\dfrac{\sigma\beta_1\alpha_2'-\sigma'\beta_1'\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2'-\alpha_1'\alpha_2}$

$$b=\dfrac{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \sigma\beta_1\\ \alpha_1' & \sigma'\beta_1'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_1' & \alpha_2'\end{vmatrix}}=\dfrac{\sigma'\alpha_1\beta_1'-\sigma\beta_1\alpha_1'}{\alpha_1\alpha_2'-\alpha_1'\alpha_2}$$

(2) ve (4) den $c=\dfrac{\begin{vmatrix}\sigma\beta_2 & \alpha_2\\ \sigma'\beta_2' & \alpha_2'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_1' & \alpha_2'\end{vmatrix}}=\dfrac{\sigma\beta_2\alpha_2'-\sigma'\beta_2'\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2'-\alpha_2\alpha_1'}$

$$d=\dfrac{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \sigma\beta_2\\ \alpha_1' & \sigma'\beta_2'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_1' & \alpha_2'\end{vmatrix}}=\dfrac{\sigma'\alpha_1\beta_2'-\sigma\beta_2\alpha_1'}{\alpha_1\alpha_2'-\alpha_1'\alpha_2}$$

$\sigma\sigma'=1$ olacak şekilde σ' vardır.

$$\det\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_1'\\ \beta_2 & \beta_2'\end{pmatrix}=\sigma\sigma'\det\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_1'\\ \beta_2 & \beta_2'\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}\sigma\beta_1 & \sigma'\beta_1'\\ \sigma\beta_2 & \sigma'\beta_2'\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}a\alpha_1+b\alpha_2 & a\alpha_1'+b\alpha_2'\\ c\alpha_1+d\alpha_2 & c\alpha_1'+d\alpha_2'\end{pmatrix}$$

$$=\det\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}.\det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_1'\\ \alpha_2 & \alpha_2'\end{pmatrix}$$

$\beta_1\beta_2' - \beta_2\beta_1' = (ad-bc)(\alpha_1\alpha_2' - \alpha_2\alpha_1') \Rightarrow ad-bc=1$ olur. Dolayısıyla $z=\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$ yi $w=\dfrac{\beta_1}{\beta_2}$ ye dönüştüren bir tam birim modüllü $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ dönüşümü vardır. Gerçekten (1.17) deki denklemleri taraf tarafa bölersek,

$\dfrac{\sigma\beta_1}{\sigma\beta_2}=\dfrac{a\alpha_1+b\alpha_2}{c\alpha_1+d\alpha_2}$ ise $w=\dfrac{\beta_1}{\beta_2}=\dfrac{a\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}+b}{c\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}+d}=\overline{A}\left(\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)=\overline{A}(z)$ elde edilir. Bu ise z ile w nin modüler grup altında denk olduğunu gösterir.

Karşıt olarak, z ve w nin denk olduğunu kabul edelim. $\overline{A}\in\overline{\Gamma}$ olmak üzere

$\overline{A}(z)=\overline{A}\left(\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)=\dfrac{a\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}+b}{c\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}+d}=\dfrac{a\alpha_1+b\alpha_2}{c\alpha_1+d\alpha_2}=\dfrac{\beta_1}{\beta_2}=w$ den $\begin{matrix}\sigma\beta_1=a\alpha_1+b\alpha_2\\ \sigma\beta_2=c\alpha_1+d\alpha_2\end{matrix}$ olacak şekilde bir σ seçebiliriz. Buradan $(\sigma\beta_1,\ \sigma\beta_2)=(a\alpha_1+b\alpha_2,\ c\alpha_1+d\alpha_2)$ olur.

$(a\alpha_1+b\alpha_2,\ c\alpha_1+d\alpha_2)=\{a'(a\alpha_1+b\alpha_2)+b'(c\alpha_1+d\alpha_2) \mid a',b'\in\mathbb{Z}\}$ şeklindedir.

a, b$\in\mathbb{Z}$ olduğundan,

$(a\alpha_1+b\alpha_2,\ c\alpha_1+d\alpha_2)=\{(a'a+b'c)\alpha_1+(a'b+b'd)\alpha_2 \mid a'a+b'c, a'b+b'd\in\mathbb{Z}\}$
olur ki bu (α_1,α_2) $\mathbb{Z}$-modülüdür. Bu ise $(\sigma\beta_1,\sigma\beta_2)=\sigma(\beta_1,\beta_2)=(\alpha_1,\alpha_2)$ demektir. Dolayısıyla (β_1,β_2) ve (α_1,α_2) $\mathbb{Z}$-modülleri benzer olurlar.

1.4.Üreteçler ve Bağıntılar

1.4.1.Üretim : Önce aşağıdaki teoremi ispatlayalım

Teorem 9: Homojen modüler grup, sonsuz mertebeli $U=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ve 4 mertebeli $T=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ elemanları ile üretilir. İnhomojen modüler grup sonsuz mertebeli $\overline{U}: z \to z+1$ ve 2 mertebeli $\overline{T}: z \to \dfrac{-1}{z}$ dönüşümleri ile üretilir.

İspat : Eğer $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \Gamma$ ve $k \in \mathbb{Z}$ ise o taktirde

$TA=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-c & -d\\ a & b\end{pmatrix}$ olur. $U^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ve

$U.U^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ise tümevarımla $U^k=\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ elde edilir. Buradan

$U^kA=\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+kc & b+kd\\ c & d\end{pmatrix}$ olur. $|c| \le |a|$ olduğunu kabul edelim (Eğer bu A için doğru değilse A nın yerine TA yı alırız). Eğer c = 0 ise ad-bc = 1 den ad = 1 ve a = d= ± 1 olur. Buna göre

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pm 1 & b\\ 0 & \pm 1\end{pmatrix}=\pm\begin{pmatrix}1 & \pm b\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\pm U^{\pm b} \text{ den } \pm b = q_0 \text{ diyelim.}$$

$A=U^{q_0}$ olur. Böylece, A, U nun bir kuvveti şeklinde ifade edilebildiğinden c=0 için teorem ispatlanmış olur. Eğer $c \neq 0$ ise, a ve c ye Öklid bölme algoritması uygulayalım. Aynı şekilde kalan ve bölene uygulayarak işleme devam edelim.

$a = q_0 c + r_1, \quad 0 < r_1 < c$
$-c = q_1 r_1 + r_2, \quad 0 < r_2 < r_1$
$r_1 = q_2 r_2 + r_3, \quad 0 < r_3 < r_2$
$r_2 = q_3 r_3 + r_4, \quad 0 < r_4 < r_3$
$\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots$
$r_{n-2} = q_{n-1} r_{n-1} + r_n, \quad 0 < r_n < r_{n-1}$
$(-1)^n r_{n-1} = q_n r_n + r_{n+1}, \quad 0 < r_{n+1} < r_n$

Burada ad-bc=1 den (a,c)=1 olduğundan $r_{n-1} = q_n r_n + r_{n+1}$ iken belli bir n den sonra $r_{n+1} = 0$ ve $r_n = \mp 1$ olacaktır. Dolayısıyla $(-1)^n r_{n-1} = q_n r_n$ olur.

$TU^{-q_n} TU^{-q_{n-1}} \ldots\ldots TU^{-q_0}$ 1 A ile soldan çarparak $q_{n+1} \in \mathbb{Z}$ olmak üzere;
$TU^{-q_n} TU^{-q_{n-1}} \ldots\ldots TU^{-q_0} A = \pm U^{q_{n+1}}$ elde ederiz. Buradan;
$A = T^m U^{q_0} TU^{q_1} \ldots\ldots TU^{q_{n-1}} TU^{q_n} TU^{q_{n+1}}$ olur. Burada m =0,1, 2 veya 3;
$q_0, q_1, \ldots\ldots, q_{n+1} \in \mathbb{Z}$ ve $q_0, \ldots\ldots, q_n \neq 0$ dır. Ayrıca $|c| > |a|$ dır. Aynı şekilde teorem $\overline{\Gamma}$ içinde ispatlanır.

Bu teoremin, daha sonra, temel bölgenin varlığına bağlı olan diğer ispatını vereceğiz.

1.4.2. Tanımlanan Bağıntılar

U ve T, Γ grubunu ürettiğinden dolayı, (1.15) e göre $U = -TR$ olduğundan T ve $R_1 = -R$ de üretir.

Teorem 10 : Γ grubunun T ve R_1 üreteçleri

$$T^4 = R_1^3 = I, \quad R_1 T^2 = T^2 R_1 \tag{1.19}$$

bağıntılarını sağlar ve bunlara Γ için "tanımlanan bağıntılar" denir.

İspat : T ve R_1 in (1.19) bağıntılarını sağladığını gösterelim.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow T^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad \Rightarrow T^4 = I$$

$$R_1 = -R \quad \Rightarrow U = -TR = T(-R) \qquad T^{-1}U = -R \quad \Rightarrow R_1 = T^{-1}U = -TU$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow R_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_1^3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R_1^3 = I$$

$$\left.\begin{aligned} R_1T^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ T^2R_1 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow R_1T^2 = T^2R_1 \quad \text{olur.}$$

Şimdi, ε_1, $\alpha_1 \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $T^{\varepsilon_1}R_1^{\alpha_1}T^{\varepsilon_2}R_1^{\alpha_2}\ldots T^{\varepsilon_n}R_1^{\alpha_n}T^{\varepsilon_{n+1}} = I$ formuna sahip olduğunu varsaydığımız kısıtlamasız kabul ettiğimiz bir keyfi bağıntının verildiğini kabul edelim. (1.19) bağıntıları uygulanarak $T^{\varepsilon_1}R_1^{\alpha_1}TR_1^{\alpha_2}\ldots TR_1^{\alpha_n}T^{\varepsilon_{n+1}} = I$ elde ederiz. Burada $\varepsilon_1, \varepsilon_{n+1} = 0,1,2$ veya 3 $\alpha_\upsilon = 1$ veya 2 ve $n \geq 0$ dır. Sırasıyla, soldan $\left(T^{\varepsilon_1}\right)^{-1}$ sağdan $\left[T^{\varepsilon_{n+1}}\right]^{-1}$ ve T ile çarptıktan sonra

$$S := R_1^{\alpha_1}T\ldots R_1^{\alpha_n}T = T^{\alpha}, \;\; \alpha_\upsilon = 1 \text{ veya } 2, \; \alpha = 0,1,2 \text{ veya } 3, \;\; n \geq 0 \qquad (1.20)$$

elde ederiz. Bununla beraber böyle bir bağıntının $n \geq 1$ için gerçekleşmesi mümkün değildir. Gerçekten eğer, (1.20) de $S = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$ yazarsak o taktirde indüksiyon ile $n \geq 1$ için S in elemanlarının $a,b,c,d \geq 0$, $b+c > 0$ veya $a,b,c,d \leq 0$, $b+c < 0$ koşullarını sağladığını fakat T^{α} nın elemanlarının sağlamadığını gösteririz. (1.20) bağıntısının sadece n=0 için mümkün olduğu aşikardır. S nin $R_1T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ve $R_1^2T = -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$e eşit olması durumunda koşullar sağlanır. Ayrıca

$\alpha = 1$ için $T^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha = 2$ için $T^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ve $\alpha = 3$ için $T^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

matrisleri açıkca görüldüğü gibi koşulları sağlamaz. Eğer iddia $S = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$ matrisi için doğru ise, o taktirde $R_1TS = \begin{pmatrix} a & -b \\ -(a+c) & b+d \end{pmatrix}$ için de doğrudur. Aynı şekilde $R_1^2TS = -\begin{pmatrix} a+c & -(b+d) \\ -c & d \end{pmatrix}$, $n \geq 1$ olmak üzere tüm S ler için koşulları sağlar.

(1.19) bağıntıları yerine, inhomojen $\overline{\Gamma}$ grubu için

$$\overline{T}^2 = \overline{R}^3 = \overline{I} \tag{1.21}$$

bağıntısı elde edilir. Ayrıca (1.19) un son bağıntısı ise $\overline{T}^2 = \overline{I}$ olduğundan aşikardır. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 11: $\overline{\Gamma}$ grubu, ikinci mertebeden bir devirsel grup ile üçüncü mertebeden bir devirsel grubun serbest çarpımına izomorftur.

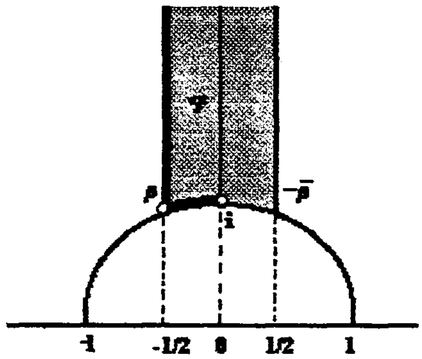
1.5.Temel Bölge

1.5.1.Temel Bölge

Bundan sonra, ∞ noktası ve reel eksenin rasyonel noktaları üst yarı düzleme dahil edilecektir. Ayrıca ∞ yerine $i\infty$ sembolünü tercih edeceğiz. Bu genişletilmiş üst yarı düzlem $\mathscr{H}^*$ ile ve değişkeni τ ile gösterilecektir.

Tanım (temel küme, temel bölge) : Eğer $\overline{\Gamma}$ altında denk olan $\mathscr{H}^*$ ın noktalarının herbir sınıfından tam olarak bir tane nokta içeriyorsa $\mathcal{F}$ kümesine $\mathscr{H}^*$ için $\overline{\Gamma}$ modüler grubunun bir temel kümesi denir.

Eğer $\mathcal{F}$ kümesi bir temel kümeyi içeriyorsa ve eğer $\tau \in \mathcal{F}$, $\overline{S}(\tau) \in \mathcal{F}$, $\overline{I} \neq \overline{S} \in \overline{\Gamma}$ olması τ nun $\mathcal{F}$in bir sınır noktası olmasını gerektiriyorsa $\mathcal{F}$e bir temel bölge denir.



Şekil 1.

Şimdi aşağıdaki teoremi ispatlayalım :

Teorem 12:

$$\mathcal{F}:=\left\{\tau \,\middle|\, \tau\in\mathcal{H}, |\mathrm{Re}\,\tau|<\frac{1}{2}, |\tau|>1\right\}\cup\{i\infty\}\cup\left\{\tau \,\middle|\, \mathrm{Re}\,\tau=-\frac{1}{2}, |\tau|\geq 1\right\}\cup\left\{\tau \,\middle|\, |\tau|=1, \frac{-1}{2}\leq \mathrm{Re}\,\tau\leq 0\right\}$$

kümesi $\mathcal{H}^*$ için $\overline{\Gamma}$ nın bir temel bölgesidir.

İspat : İlk olarak $\overline{\Gamma}$ altında herbir denklik sınıfının

$\mathcal{F}^{-}:=\left\{\tau \,\middle|\, \tau\in\mathcal{H}, |\mathrm{Re}(\tau)|\leq\frac{1}{2}, |\tau|\geq 1\right\}\cup\{i\infty\}$ da bir gösterime sahip olduğunu kanıtlayalım.

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma$ ve $\tau\in\mathcal{H}$ için $\mathrm{Im}\overline{A}(\tau)=\dfrac{\mathrm{Im}(\tau)}{|c\tau+d|^2}$ olduğunu gösterelim.

$$\overline{A}(\tau)=\frac{a\tau+b}{c\tau+d}=\frac{(a\tau+b)(\overline{c\tau+d})}{|c\tau+d|^2}=\frac{(a\tau+b)(c\overline{\tau}+d)}{|c\tau+d|^2}=\frac{ac|\tau|^2+ad\tau+bc\overline{\tau}+bd}{|c\tau+d|^2}$$

$$=\frac{ac|\tau|^2+bd+ad[\mathrm{Re}\,\tau+\mathrm{Im}\tau]+bc[\mathrm{Re}\,\tau-\mathrm{Im}\tau]}{|c\tau+d|^2}=\frac{ac|\tau|^2+bd+(ad+bc)\,\mathrm{Re}\,\tau+(ad-bc)\mathrm{Im}\tau}{|c\tau+d|^2}$$

$\Rightarrow \mathrm{Im}\overline{A}(\tau)=\dfrac{\mathrm{Im}(\tau)}{|c\tau+d|^2}$ bulunur. $\mathrm{Im}(\tau)>0$ olmak üzere sabit bir τ için $c,d\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $c\tau+d$ noktaları $\mathbb{C}$ de bir ağ oluştururlar. Böylece $|c\tau+d|$, bir pozitif minimuma sahip olur. Şimdi $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\Gamma$ nın, $|c\tau+d|$ minimal olacak şekilde seçildiğini kabul edelim. Bu durumda $\overline{A}(\tau)=\tau_0$ kendi sınıfındaki elemanların arasında en büyük sanal kısma sahip olur. Bu ise minimum imajiner kısımlı her τ_0 için $|\tau_0|\geq 1$ in sağlandığını gösterir.Çünkü eğer $T=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $|\tau_0|<1$ ise o taktirde,$\mathrm{Im}\overline{T}(\tau_0)=\dfrac{\mathrm{Im}(\tau_0)}{|\tau_0|^2}>\mathrm{Im}(\tau_0)$ olur. Bu ise $\mathrm{Im}(\tau_0)=\mathrm{Im}\overline{A}(\tau)$ nun en büyük sanal kısmına sahip olmasıyla tezat teşkil eder. Böyle bir τ_0 için $\left|\mathrm{Re}\,\overline{U}^k(\tau_0)\right|\leq\frac{1}{2}$ olacak şekilde $k\in\mathbb{Z}$ vardır. Çünkü $\overline{U}^k(\tau_0)=\tau_0+k$ olduğundan ve $\left|\mathrm{Re}\,\overline{U}^k(\tau_0)\right|=|\mathrm{Re}(\tau_0+k)|=|\mathrm{Re}(\tau_0)+k|\leq\frac{1}{2}$ olacak şekilde uygun bir $k\in\mathbb{Z}$ seçebiliriz. O zaman $\mathrm{Im}\overline{U}^k(\tau_0)=\mathrm{Im}\tau_0$ olduğundan ve $\tau_0=\overline{A}(\tau)$ maksimal imajiner kısımlı olduğundan $\overline{U}^k(\tau_0)$ da maksimal sanal kısma sahiptir. Bu ise bir önceki sonuca göre $\left|\overline{U}^k(\tau_0)\right|\geq 1$ olduğunu gösterir. Ayrıca her rasyonel noktanın $i\infty$ a denk olduğunu biliyoruz.

Şimdi, $\overline{\Gamma}$ modüler grubu altında $\mathcal{F}$ de denk olan sonlu noktaları inceleyeceğiz. Bu sonuçla, $\mathcal{F}$ de $\tau=x+iy$, $\tau'=x'+iy'$ verildiğini kabul edelim ve $\tau'=\overline{A}(\tau),\overline{A}\in\overline{\Gamma}$, $y\leq y'$ olsun.

$$\overline{A}(\tau)=\frac{ac|\tau|^2+bd+(ad+bc)\mathrm{Re}\,\tau}{|c\tau+d|^2}+\frac{\mathrm{Im}\tau}{|c\tau+d|^2}$$

ifadesinde $\tau=x+iy$, $\tau'=x'+iy'$ yazarsak

$$\overline{A}(\tau)=\frac{ac(x^2+y^2)+bd+(ad+bc)x}{|c\tau+d|^2}+i\frac{y}{|c\tau+d|^2}$$ olur. $\overline{A}(\tau)=\tau'=x'+iy'$ den

$$y'=\frac{y}{|c\tau+d|^2}$$ olur. $y\leq y'\Rightarrow$

$$|c\tau+d|^2\leq 1 \tag{1.22}$$

çıkar. Şimdi c nin durumuna göre inceleme yapacağız :

İlk olarak c=0 olduğunu kabul edelim. ad-bc=1 den d=±1 olur. O zaman

$A=\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}=U^b$ olur. $|b|>1$ ise b ler gözönüne alınmaz. O zaman $(\rho, i\infty)$ ve $(-\bar{\rho}, i\infty)$ sınır yayları $\overline{U}$ altında denk olurlar. Bu ise

$$\overline{U}\left(\frac{-1}{2}+iy\right)=\frac{-1}{2}+iy+1=\frac{1}{2}+iy \tag{1.23}$$

ve $\overline{U}(i\infty)=i\infty+1=i\infty$ dan açıkça görülebilir.

Şimdi $c\neq 0$ olduğunu kabul edelim. O taktirde $\left|\tau+\frac{d}{c}\right|=\left|\frac{c\tau+d}{c}\right|$ den $|c\tau+d|^2\leq 1$ olduğundan $|c\tau+d|\leq 1$ ve dolayısıyla $\left|\tau+\frac{d}{c}\right|=\left|\frac{c\tau+d}{c}\right|\leq\frac{1}{|c|}$ olur. Böylece $|c|=1$ olur.

c=1 alalım. $|\tau+d|\leq 1$ olur ve $|\mathrm{Re}\tau|\leq\frac{1}{2}$ den dolayı $|d|\leq 1$ olmak zorundadır. Burada $\tau\in\mathcal{F}$ gerçeğini kullandık. Eğer c=1 ve d=0 ise o zaman $|a|\leq 1$ olmak üzere

$A=\begin{pmatrix}a & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=U^aT$ olur. Eğer $|a|>1$ ise $\overline{A}$, $\mathcal{F}$ yi, $\mathcal{F}$ in dışına tasvir eder. Gerçekten, $\tau\in\mathcal{F}$ ise $|\tau|>1$, $|\mathrm{Re}(\tau)|\leq\frac{1}{2}$ olmak üzere

$\overline{A}(\tau)=\frac{a\tau-1}{1.\tau+0}=\frac{a\tau-1}{\tau}=a-\frac{1}{\tau}=a-\frac{\bar{\tau}}{|\tau|^2}=a-\frac{x}{|\tau|^2}+i\frac{y}{|\tau|^2}$ den $|\mathrm{Re}\overline{A}(\tau)|=\left|a-\frac{x}{|\tau|^2}\right|$ olur ve $|\mathrm{Re}\overline{A}(\tau)|>\frac{1}{2}$ olduğu görülür. Bu ise $\overline{A}(\tau)\notin\mathcal{F}$ olduğunu gösterin. Eğer a=0 ise

$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=T$ olur ve

$$|\tau|=1 \text{ için } \overline{T}(-x+iy)=x+iy \tag{1.24}$$

(ρ, i) ve $(-\bar{\rho}, i)$ sınır yaylarının denk olduğunu gösterir. Eğer a=1 ise $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ dan

$$\overline{A}(-\overline{\rho})=\frac{-\overline{\rho}-1}{-\overline{\rho}+0}=\frac{\overline{\rho}+1}{\overline{\rho}}=\frac{|\rho|^2+\rho}{|\rho|^2}=\frac{1+\rho}{1}=\rho+1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=-\overline{\rho} \quad \text{ve } a=-1 \text{ ise}$$

$A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ dan

$$\overline{A}(\rho)=\frac{-\rho-1}{\rho}=\frac{-|\rho|^2-\overline{\rho}}{|\rho|^2}=\frac{-1-\overline{\rho}}{1}=-1-\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\rho$$ olur. Eğer c=1 ve d=±1 ise ad-bc=1 den -b=±a-1 olduğundan

$$A=\begin{pmatrix}a & \pm a-1\\ 1 & \pm 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \pm 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=U^aTU^{\pm 1} \text{ olur.}$$

Burada $a=0$ veya $a=d=\pm 1$ dir. Diğer durumlarda $\overline{A}$ yine $\mathcal{F}^-$ yi $\mathcal{F}^-$ in dışına tasvir eder.

Şimdi c=1 olmak üzere ρ ve $-\overline{\rho}$ noktalarının $\overline{A}$ altındaki dönüşümlerini bulalım. Eğer a=0, d=1 ise ad-bc=1 den b= -1 çıkar ve $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ olur. Buradan

$$\overline{A}(\rho)=\frac{-1}{\rho+1}=\frac{-1}{\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+1}=\frac{-1}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\frac{\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\rho$$ bulunur. Eğer a=0,

d= -1 ise ad-bc=1 den b= -1 çıkar ve $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ olur ve

$$\overline{A}(-\overline{\rho})=\frac{-1}{(-\overline{\rho})-1}=\frac{-1}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-1}=\frac{-1}{\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\rho$$ bulunur.

Eğer a=d=1 ise ad-bc=1 den b=0 çıkar ve $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ olur. Buradan

$$\overline{A}(\rho)=\frac{\rho}{\rho+1}=\frac{\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+1}=\frac{\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{1}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=-\overline{\rho}\ \text{çıkar}$$

Eğer a=d= -1 ise ad-bc=1 den b=0 ve $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ olur. Böylece

$$\overline{A}(-\overline{\rho})=\frac{-(-\overline{\rho})}{(-\overline{\rho})-1}=\frac{\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-1}=\frac{\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\frac{\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{1}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\rho$$

bulunur. $\mathcal{F}$ in iç noktaları asla birbirine denk olmaz. Son olarak, ancak ve ancak $\tau_0=i\infty$ ve $A=\pm U^k$, $k\in\mathbb{Z}$, ise $\overline{A}(i\infty)=\tau_0\in\mathcal{F}$ dir. Çünkü $\tau_0=i\infty$ ve $A=\pm U^k$ ise $\overline{A}(i\infty)=\frac{\pm i\infty\pm k}{\pm 0\pm 1}=i\infty+k=i\infty=\tau_0\in\mathcal{F}$ olur. Tersine $\overline{A}\in\overline{\Gamma}$ herhangi bir dönüşüm ve

$\overline{A}(i\infty)=\tau_0\in\mathcal{F}$ olsun. $\overline{A}(\tau)=\frac{a\tau+b}{c\tau+d}=\frac{\tau\left(a+\frac{b}{\tau}\right)}{\tau\left(c+\frac{d}{\tau}\right)}=\frac{a+\frac{b}{\tau}}{c+\frac{d}{\tau}}$ eğer $\tau=i\infty$ ise

$\overline{A}(i\infty)=\frac{\left(a+\frac{b}{i\infty}\right)}{\left(c+\frac{d}{i\infty}\right)}=\frac{a}{c}=\tau_0$ olur. $\tau_0=\frac{a}{c}\in\mathbb{Q}\notin\mathcal{F}$ olduğundan $\tau_0\in\mathcal{F}$ olması için c=0 olmak zorundadır. Bundan $\tau_0=\infty$ olur. ∞ yerine $i\infty$ alırsak $\tau_0=i\infty$ çıkar. c=0 ise ad-bc=1 den ad=1 ve a=d=±1 çıkar. Dolayısıyla $A=\begin{pmatrix}\pm 1 & \pm b\\ 0 & \pm 1\end{pmatrix}$ olur. $b=k\in\mathbb{Z}$ dersek $A=\begin{pmatrix}\pm 1 & \pm k\\ 0 & \pm 1\end{pmatrix}=\pm U^k$ bulunur. Böylece $\mathcal{F}$, bir temel küme olmasına ek olarak bir temel bölge olur.

$\mathcal{F}$ in sınırı, sırasıyla $\overline{U}$ veya $\overline{U}^{-1}$ ve $\overline{T}$ üreteçleri ile biri diğerine üzerine tasvir edilen $(\rho,i\infty)\sim(-\overline{\rho},i\infty)$ ve $(\rho,i)\sim(-\overline{\rho},i)$ eşlenik kenar çiftlerinden oluşur.

$\mathcal{F}$, $\overline{\Gamma}$ nın temel bölgesinin çok özel bir şeklidir.

1.5.2.Bir Temel Bölgenin Varlığının Sonuçları

$\Gamma^* = [\overline{U}, \overline{T}] \subset \overline{\Gamma}, \overline{U}$ ve $\overline{T}$ ile üretilmiş bir grup olsun. O zaman her $\tau \in \mathscr{H}$ için Γ^* altında τ ya denk olan minimal sanal kısımlı bir nokta vardır. Çünkü c ve d, Γ^* ın dönüşümlerindeki katsayılar olarak düşünülürse $c\tau + d$ noktaları yukarıda bahsedilen ağ a ait olduğundan bu sonuç çıkar. Bu ise $\overline{U}$ ve $\overline{T}$ dönüşümleri zaten Γ^* da olduğundan Γ^* altında her denklik sınıfının $\mathcal{F}$de bir gösterilişe sahip olduğunu gösterir. Şimdi $\overline{A} \in \overline{\Gamma}$ nın verildiğini ve τ nun $\mathcal{F}$ in bir iç noktası olduğunu kabul edelim. O taktirde $\overline{BA}(\tau) \in \mathcal{F}$ olacak şekilde $\overline{A}(\tau)$ ya karşılık gelen bir $\overline{B} \in \Gamma^*$ vardır. Şimdi $\overline{BA} = \overline{I}$ olur ve dolayısıyla $\overline{A} = \overline{B}^{-1} \in \Gamma^*$ bulunur. $\overline{A} \in \overline{\Gamma}$ verildiğinden $\overline{\Gamma} \subset \Gamma^*$ ve buradan $\overline{\Gamma} = \Gamma^*$ sonucu bulunur. Böylece $\overline{U}$ ve $\overline{T}$ nin $\overline{\Gamma}$ yı ürettiği iddiasını ikinci kez ispatlamış olduk.

Şimdi 1.3.3 ve 1.3.4 de verilmeyen ispatları vermek istiyoruz.

İddia : $d^2 \equiv -1 \mod c$ ve $c>0$ olmak üzere tüm $\dfrac{i-d}{c} \in \mathbb{Q}(i)$ sayıları $\overline{\Gamma}$ altında denktirler. Ayrıca $iz(A) = 0$ olmak üzere tüm $\overline{A} \subset \overline{\Gamma}$ lar $\overline{\Gamma}$ da $\overline{T}$ ye eşleniktirler.

İspat : τ sayısı $d^2 \equiv -1 \mod c$ ve $c>0$ olmak üzere $\dfrac{i-d}{c} \in \mathbb{Q}(i)$ şeklinde bir sayı olsun

$$\overline{A}(\tau) = \frac{a\left(\frac{i-d}{c}\right)+b}{c\left(\frac{i-d}{c}\right)+d} = \frac{ai-ad+bc}{ci-cd+cd} = \frac{ai-1}{ci} = \frac{a+i}{c}$$ olur. $a+d=0$ ve buradan $a = -d$ ve dolayısıyla $\overline{A}(\tau) = \dfrac{a+i}{c} = \dfrac{-d+i}{c}$ olduğu görülür. τ nun $\mathcal{F}$deki sınıfının gösterimi yine $\overline{\Gamma}$ nın bir dönüşümünün sabit noktasıdır ve de $\mathbb{Q}(i)$ dedir. Açıktır ki bu i olmalıdır. $Iz(A)=0$ olmak üzere eğer τ ve $\overline{\tau}$ $\overline{A}$ nın sabit noktaları ise o zaman $S(\tau) = i$ olacak şekilde bir $\overline{S} \in \overline{\Gamma}$ vardır ve dolayısıyla $\overline{SAS^{-1}}(i) = i$ olur. i yi i ye dönüştüren tek modüler dönüşüm $\overline{T}$ olduğu için $\overline{SAS^{-1}} = \overline{T}$ olur. Bu ise $\overline{A} \in \overline{\Gamma}$ dönüşümlerinin $\overline{\Gamma}$ da $\overline{T}$ ye eşlenik olduklarını gösterir.

Benzer şekilde aşağıdaki iddiayı ispatlayalım:

İddia : $d^2 + d + 1 \equiv 0 \mod c$ ve $c>0$ olmak üzere tüm $\dfrac{\rho - d}{c} \in \mathbb{Q}(\rho)$ sayıları, modüler grup altında denktirler. Ayrıca $|iz(A)| = 1$ olmak üzere tüm $\overline{A} \subset \overline{\Gamma}$ lar $\overline{\Gamma}$ da $\overline{R}$ veya $\overline{R}^2$ ye eşleniktirler.

İspat : τ sayısı $d^2+d+1\equiv 0 \mod c$ ve c>0 olmak üzere tüm $\dfrac{\rho-d}{c}\in\mathbb{Q}(\rho)$ şeklinde bir sayı olsun. $\overline{A}(\tau)=\dfrac{a\left(\dfrac{\rho-d}{c}\right)+b}{c\left(\dfrac{\rho-d}{c}\right)+d}=\dfrac{a\rho-ad+bc}{c\rho-cd+cd}=\dfrac{a\rho-1}{c\rho}=\dfrac{a-\overline{\rho}}{c}$ olur.

$|a+d|=1 \Rightarrow a+d=-1$ kabul edelim. a= -d+1 olur.

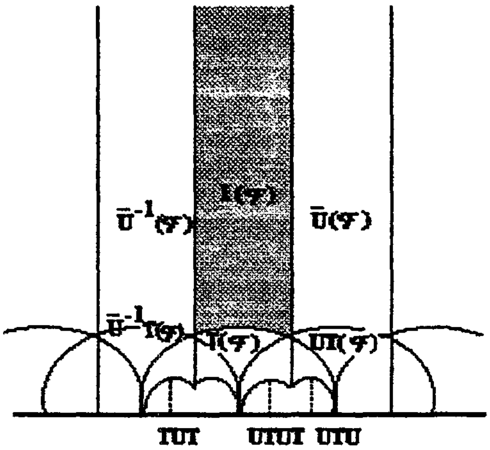
$$\overline{A}(\tau)=\frac{a-\overline{\rho}}{c}=\frac{-d-1-\overline{\rho}}{c}=\frac{-1+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-d}{c}=\frac{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-d}{c}=\frac{\rho-d}{c}$$ olduğu görülür.

$|iz(A)|=1$ olmak üzere τ ve $\overline{\tau}$ A nın sabit noktaları ise o zaman $S(\tau)=\rho$ olmak üzere bir $\overline{S}\in\overline{\Gamma}$ vardır ve dolayısıyla $\overline{SAS^{-1}}(\rho)=\rho$ olur. ρ yu ρ ya dönüştüren modüler dönüşümler $\overline{R}$ ve $\overline{R}^2$ olduğundan $\overline{SAS^{-1}}=\overline{R}$ veya $\overline{R}^2$ olur. Bu ise $\overline{A}\in\overline{\Gamma}$ dönüşümlerinin $\overline{\Gamma}$ da $\overline{R}$ veya $\overline{R}^2$ ye eşlenik olduklarını gösterir.

1.5.3.Üst Yarı Düzlemin Bölümlere Ayrılması

Bu inhomojen modüler dönüşüm ρ, i ve $i\infty$ den farklı bir $\tau\in\mathcal{F}$ noktasının görüntüsü ile tek olarak belirlenir. Bu sonuç şu şekilde de formüle edilebilir: ρ, i ve $i\infty$ a denk olmayan her $\tau\in\mathscr{H}$ noktası $\overline{\Gamma}$ altında kesin olarak bir kere $\mathcal{F}$ deki bir noktanın görüntüsü olur. Açıkça i ye denk olan noktalar iki kez, ρ ya denk olan noktalar üç kez, $i\infty$ a denk olan noktalar sonsuz kez örtülür. Bir $\mathcal{F}_S$ modüler üçgeni ile, $\overline{S}$ altında $\mathcal{F}$ in görüntüsünü belirtelim. Yani herhangi bir $\overline{S}\in\overline{\Gamma}$ için $\mathcal{F}_S=\overline{S}(\mathcal{F})$ olsun. Tabi ki $\mathcal{F}_S$ de bir esas bölgedir. Modüler üçgenlerin kümesi, üst yarı $\mathscr{H}^*$ düzlemini örter. Her modüler $\mathcal{F}_S$ üçgeni, üç modüler üçgene komşudur. Şöyleki

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{SU}=\overline{SU}(\mathcal{F})=\overline{SUS^{-1}S}(\mathcal{F})=\overline{SUS^{-1}}(\mathcal{F}_S)\\
&\mathcal{F}_{SU}^{-1}=\overline{SU^{-1}}(\mathcal{F})=\overline{SUS^{-1}S}(\mathcal{F})=\overline{SU^{-1}S^{-1}}(\mathcal{F}_S)\\
&\mathcal{F}_{ST}=\overline{ST}(\mathcal{F})=\overline{STS^{-1}S}(\mathcal{F})==\overline{STS^{-1}}(\mathcal{F}_S)
\end{aligned}\tag{1.25}$$



Şekil 2.

$\overline{S}(\rho)$ noktasında altı modüler üçgenin bitişik olduğu açıkça görülüyor. Orada herbir üçgenin açısı $\pi/3$ dür. $\overline{SRS}^{-1}$ dönüşümleri $\overline{S}(\rho)$ civarındaki $2\pi/3$ açılı Öklid olmayan dönmelerdir.

$\overline{S}(i)$ noktasında iki üçgen bitişiktir. $\overline{STS}^{-1}$ dönüşümleri $\overline{S}(i)$ deki Öklid olmayan yansımalardır.

Rasyonel $\overline{S}(i\infty)$ noktasında sayılabilir çoklukta $\mathcal{F}_{SU^n}, n \in \mathbb{Z}$, modüler üçgenleri bir araya gelir. Böyle bir üçgenin komşu kenarları $\overline{S}(i\infty)$ da sıfır açı oluşturur ve reel eksenle $\pi/2$ lik açı yapar. $\overline{S}(i\infty)$ a $\mathcal{F}_{SU^n}$ modüler üçgeninin bir kaspı (cusp) denir ve genel olarak her rasyonel noktanın bir rasyonel kasp olduğunu söyleriz. Çünkü rasyonel noktalar $\overline{\Gamma}$ altında $i\infty$ a denktirler.

$\overline{SU^{\pm 1}S^{-1}}$ dönüşümleri sabit nokta olarak $\overline{S}(i\infty)$ a sahiptir ve $\overline{S}(i\infty)$ a dokunan her modüler üçgen, $\overline{S}(i\infty)$ a dokunan bir başka komşu üçgen üzerine dönüşür. $\mathcal{F}_S$ modüler üçgenleri ile $\mathscr{H}^*$ ın örtülmesine modüler ayırım denir.

Teorem 14: Sabit bir $\tau_0 \in \mathscr{H}$ için $\{\overline{S}(\tau_0) | \overline{S} \in \overline{\Gamma}\}$ kümesi $\mathscr{H}$ da yığılma noktasına sahip değildir.

İspat : $\overline{S} \in \overline{\Gamma}$ dönüşümleri üst yarı düzlemi denklik sınıflarına ayırdığından ve de denklik sınıfları birbirinden ayrık olduğundan denk olmayan $\overline{S} \in \overline{\Gamma}$ lar için farklı $\overline{S}(\tau_0)$ noktaları karşılık gelecektir. Bu ise $\{\overline{S}(\tau_0) | \overline{S} \in \overline{\Gamma}, \tau_0 \in \mathscr{H}, \tau_0 \text{ sabit bir nokta}\}$ kümesinin $\mathscr{H}$ da yığılma noktasına sahip olmadığını gösterir.

Aksi taktirde bu küme $\mathcal{F} \setminus \{i\infty\}$ da bir yığılma noktasına sahip olacaktı ki bu hal mümkün değildir.

Bu durumda $\overline{\Gamma}$ nın $\mathscr{H}$ üzerinde süreksiz olduğunu söyleyebiliriz.

1.5.4.Komşuluklar ve Temel Bölgenin Kanonik Formu

ρ, i, $i\infty$ ve bunların denk olduğu noktalardan farklı her $\tau \in \mathscr{H}^*$ için $\mathbb{C}$ de bir eşdeğer nokta çifti içermeyen bir komşuluk vardır.

Eğer τ_0, $\overline{\Gamma}$ altında i ye eşdeğer ise o zaman $\mathbb{C}$ deki her komşuluk eşdeğer nokta çiftlerini içerir. Eğer $\tau_0 = \overline{S}(i)$ dersek ve eğer τ_0 ın $\mathcal{U}$ komşuluğu $\overline{S}(i)$ civarında yeterince küçük bir N.E.-çemberinin içi ise o taktirde $\mathcal{U} \cap \mathcal{F}_S$ tam olarak $\mathcal{U}$ nun eşdeğer noktalarının böyle her çiftinin bir temsilini içerir.

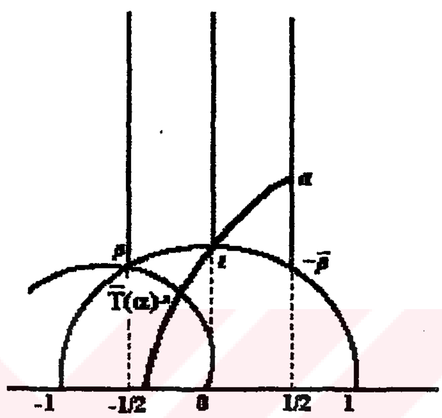
Eğer τ_0, $\overline{\Gamma}$ altında ρ ya denk ise o zaman her komşuluk eşdeğer noktaların üçlüsünü içerir. Eğer $\tau_0 = \overline{S}(\rho)$ dersek ve τ_0 ın $\mathcal{U}$ komşuluğu $\overline{S}(\rho)$ civarında yeterince küçük bir N.E.-çemberinin içi ise, o zaman $\mathcal{U} \cap \{\mathcal{F}_S \cup \mathcal{F}_{ST}\}$ kesin olarak $\mathcal{U}$ da eşdeğer noktaların her üçlüsünün bir tanesini içerir.

$\tau_0 = \overline{S}(i\infty)$ diyelim. Yani τ_0, $\overline{\Gamma}$ altında $i\infty$ a denk ise o zaman τ_0 ın her $\mathbb{C}$ komşuluğu alt yarı düzlemin noktalarının yanı sıra τ_0 a denk sonsuz çokluktaki noktaları içerir. Dolayısıyla $\mathcal{U} := \{\tau | \operatorname{Im} \overline{S}^{-1}(\tau) > 1\} \cup \{\tau_0\}$ kümelerini tanımlarız. Böylece $\tau_0 = i\infty$ için $\mathcal{U} = \{\tau | \operatorname{Im} \tau > 1\} \cup \{i\infty\}$ olur.

Her $\mathcal{U} \cap \mathcal{F}_{SU^n}$ kümesi, kesin olarak $\tau \in \mathcal{U}$ ya eşdeğer noktaların birini içerir. Eğer biraz önce i, ρ ve $i\infty$ için tanımlanan noktaların kümelerine denk, bağlantılı kümeler elde edilmek istenirse o zaman esas bölgenin kanonik formu kullanılır. $\operatorname{Re} \alpha = \frac{1}{2}$, $|\alpha| > 1$ olmak üzere keyfi $\alpha \in \mathscr{H}$ için $\Delta(i, \rho, \overline{T}(\alpha))$ ve $\Delta(i, -\overline{\rho}, \alpha)$ sırasıyla "i, ρ ve $\overline{T}(\alpha)$" ve "$i, -\overline{\rho}$ ve α" köşeleri olmak üzere N.E.-üçgenlerini göstersin. O zaman $\Delta(i, \rho, \overline{T}\alpha) = \overline{T}(\Delta(i, -\overline{\rho}, \alpha))$ ve buradan $\measuredangle(\rho, i, \overline{T}(\alpha)) = \measuredangle(-\overline{\rho}, i, \alpha)$ olur. Sonuç olarak,

$\measuredangle(\overline{T}(\alpha),i,\alpha)=\pi$ ve $(i\infty,\rho,\overline{T}(\alpha),\alpha)$ dörtgeni istenen özelliklere sahip bir temel bölgedir.

Teorem 12 nin klasik esas bölgesinden, $\overline{\Gamma}$ altında eşdeğer parçalarla, onların yerlerinin değiştirerek ve N.E.-doğruları ve çemberlerinin vasıtasıyla sonlu sayıdaki parçaların kesilmesiyle yeni bir temel bölge elde ettik.



Şekil 3.

1.5.5.Normal Çokgen

Aşağıdaki geometrik kavramlar, N.E.-geometrisi anlamında anlaşılacaktır.$\mathscr{H}$'ın iki noktası arasındaki uzaklık özellikle (1.4) denklemiyle tanımlanır. i veya ρ ya eşdeğer olmayacak şekilde $\tau_0 \in \mathscr{H}$ verilsin. Amacımız $\pm I \neq S \in \Gamma$ olmak üzere, τ_0 dan, eşdeğer $\overline{S}(\tau_0)$ noktalarının herhangi birinden daha küçük $\delta(\tau,\tau_0)$ uzaklığına sahip, τ noktaları iç nokta olan bir temel bölge elde etmektir.

Kısıtsız olarak τ_0 ın $\mathcal{F}$ın $\mathcal{F}^-$ kapanışına ait olduğunu kabul edelim. İlk olarak $\mathrm{Re}\tau_0>0$ olmak üzere $|\tau_0|>1$ durumunu inceleyelim. Bu durum, $\mathrm{Re}\tau_0<0$ olmak üzere $|\tau_0|>1$ durumunun $\mathrm{Re}\tau=0$ a göre simetriğidir. $|\tau_0|=1$ ve $\mathrm{Re}\tau_0=0$ durumları özeldir.

$\tau_0 \in \mathcal{F}$, $|\tau_0|>1$ ve $\mathrm{Re}\tau_0>0$ olsun.

$R_1 := UT$ alalım. Dolayısıyla $\overline{R}_1(-\overline{\rho}) = -\overline{\rho}$, $\overline{R}_1^3 = \overline{I}$ olur. $\measuredangle(\tau_0, -\overline{\rho}, \overline{R}_1(\tau_0))$ açısının ω_1 açıortayı, τ_0 ve $\overline{R}_1(\tau_0)$ dan eşit uzaklıktaki noktaların kümesidir. Böylece $\omega_1, \mathscr{H}$ ı iki yarı düzleme böler. Bunların biri $\overline{R}_1(\tau_0)$ dan τ_0 a daha yakın tüm noktaları içerir. $\measuredangle(\tau_0, -\overline{\rho}, \overline{R}_1^2(\tau_0))$ ın ω_2 açıortay açısı için ve $[\tau_0, \overline{T}(\tau_0)]$ doğru parçasının dikey ℓ açıortayı içinde bu sonuç doğrudur. Bu durumda ℓ ve ω_2 doğruları bir $\tau_1 \in \mathscr{H}$ noktasında kesişirler. Şimdi $\tau_2 := \overline{T}(\tau_1) \in \ell$, $\tau_3 := \overline{R}_1(\tau_1) \in \omega_1$ alalım. $-\overline{\rho} = \overline{U}(\rho)$ ve $\tau_3 = \overline{U}(\tau_2)$ olduğundan $\Delta(-\overline{\rho}, \tau_3, i\infty) = \overline{U}(\Delta(\rho_1, \tau_0, i\infty))$ çıkar.Ek olarak $\Delta(i, \tau_1, -\overline{\rho}) = \overline{T}(\Delta(i, \tau_2, \rho)$ olur. Bu ise kapalı

$$\mathcal{F}_0 := (i\infty, \tau_2, \tau_1, -\overline{\rho}, \tau_3) \tag{1.27}$$

beşgeninin bir temel bölge olmasını gerektirir. Bunun içi denk noktalar içermez. Eşlenik kenarların çiftleri ve ilgili sınır dönüşümleri

$$\left.\begin{array}{l} \overline{U}(i\infty, \tau_2) = (i\infty, \tau_3) \\ \overline{T}(i, \tau_2) = (i, \tau_1) \\ \overline{R}_1(-\overline{\rho}, \tau_1) = (-\overline{\rho}, \tau_3) \end{array}\right\} \text{ile gösterilir.}$$

Böylece, $\delta(\tau_0, \tau_1) = \delta(\tau_0, \tau_2) = \delta(\tau_0, \tau_3)$ ve $\mathrm{Im}(\tau_2) = \mathrm{Im}(\tau_3)$ den $R(\tau_0) = \mathrm{Re}\left(\frac{\tau_2 + \tau_3}{2}\right)$ sonucu çıkar ve sonuç olarak $\mathcal{F}_0 = \{\tau | \delta(\tau, \tau_0) \le \delta(\tau, \overline{S}(\tau_0)); S = U^{\pm1}, R_1^{\pm1}\} \cup \{i\infty\}$ çıkar.

Eğer $|\tau_0| = 1$ ve $0 < \mathrm{Re}\,\tau_0 < \frac{1}{2}$ ise o zaman ℓ ve ω_2 $\tau_1 = 0$ da kesişirler ve dolayısıyla $\overline{T}(\tau_1) = \tau_2$ ve $R_1(\tau_1) = \tau_3$ den $\tau_2 = \tau_3 = i\infty$ olur. Bu durumda temel bölge, birbirine denk $i\infty$ ve 0 kapsları ile kapalı $\mathcal{F}_0 := \Delta(i\infty, 0, -\overline{\rho})$ üçgeni olur. Eşlenik kenarlar ve ilgili sınır dönüşümleri $\overline{T}(i, i\infty) = (i, 0)$, $\overline{R}_1(-\overline{\rho}, 0) = (-\overline{\rho}, i\infty)$ dur. Sonuç olarak $\mathcal{F}_0 = \{\tau | \delta(\tau, \tau_0) \le \delta(\tau, \overline{S}(\tau_0)),\ S = R_1^{\pm1}, T\} \cup \{i\infty\}$ olur. $-\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\,\tau_0 < 0$ olmak üzere $|\tau_0| = 1$ durumu biraz önceki durumun simetriğidir.

$\mathrm{Im}(\tau_0) > 1$ olmak üzere $\mathrm{Re}(\tau_0) = 0$ durumu için τ_1 kesişim noktası yoktur. $\overline{U}^{\pm1}(\tau_0)$ ve $\overline{T}(\tau_0)$ ı gözönüne alırsak iki denk ρ ve $-\overline{\rho}$ köşesi ile temel bölge olarak $\mathcal{F}_0 := \Delta(i\infty, \rho, -\overline{\rho})$ yi elde ederiz. Ayrıca
$\mathcal{F}_0 = \{\tau | \delta(\tau, \tau_0) \le \delta(\tau, \overline{S}(\tau_0)),\ S = U^{\pm1}, T\} \cup \{i\infty\}$ klasik $\mathcal{F}$ esas bölgesinin kapanışıdır.

Kabul edilebilir her τ_0 için $\mathcal{F}_0$ temel bölgesi belirli eşitsizliklerle tanımlanır. Ayrıca,

$$\delta(\tau,\tau_0) > \delta(\tau,\overline{S}(\tau_0)) \tag{1.28}$$

eşitsizliğini sağlayan hiçbir $\tau \in \mathcal{F}_0$ ve dolayısıyla $S \in \Gamma$ yoktur. Eğer bu eşitsizlik bir çift $\tau \in \mathcal{F}$ ve $S_0 \in \Gamma$ için gerçekleşseydi o zaman (1.28) aynı S_0 ile $\mathcal{F}_0$ ın bir iç τ noktası tarafından sağlanırdı. O zaman bu τ ile

$$\mathcal{M} := \{\tau | \delta(\tau,\tau_0) \le \delta(\tau,\overline{S}(\tau_0)),\ \text{tüm } S \in \Gamma \text{ için}\} \cup \{i\infty\} \tag{1.29}$$

alt kümesi bir temel küme içerirken $\mathcal{F}_0 \setminus \{\tau\}$ bir temel küme içermez. Bu iddiayı şöyle kanıtlıyoruz: Her $\tau \in \mathscr{H}$ için bir S_1 vardır, öyle ki $\forall S \in \Gamma$ için $\delta(\tau,\overline{S}_1(\tau_0)) \le \delta(\tau,\overline{S}(\tau_0))$ dır. Buradan $\forall S \in \Gamma$ için $\delta(\overline{S}_1^{-1}(\tau),\tau_0) \le \delta(\overline{S}_1^{-1}(\tau),\overline{S}(\tau_0))$ olur. Sonuçta $\overline{S}_1^{-1}(\tau) \in \mathcal{M}$ olur. Bu ise $\mathcal{M}$ kümesinin temel küme içerdiğini gösterir.

Eğer, τ_0, $\overline{\Gamma}$ altında ne i, ne de ρ ya denk olan $\mathscr{H}$ ın keyfi bir noktası ise o zaman dönüşümle aşağıdaki teoremi elde ederiz:

Teorem 14: τ_0 ve $(i\infty)' \in \mathbb{Q}$ aynı modüler üçgende olmak üzere

$$\mathcal{F}_0 := \{\tau | \delta(\tau,\tau_0) \le \delta(\tau,\overline{S}(\tau_0)),\ \text{her } S \in \Gamma \text{ için}\} \cup \{(i\infty)'\} \tag{1.30}$$

kümesi $\overline{\Gamma}$ için bir esas bölgedir.

$\mathcal{F}_0$ a bir normal çokgen denir.

II.BİRİNCİ BASAMAK MODÜLER FONKSİYONLAR

2.1.Tanım ve Modüler Fonksiyonların Özellikleri

Birinci bölümdeki gibi,

2.1.1.Tanım: $\mathscr{H}=\{\tau\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\tau>0\}$ ın üst yarı düzlemi gösterdiğini, $\mathscr{H}^{*}=\mathscr{H}\cup\mathbb{Q}\cup\{i\infty\}$ un genişletilmiş üst yarı düzlem olduğunu ve $\hat{\mathbb{C}}$ nin kompaktlanmış kompleks düzlemi gösterdiğini kabul edelim.

Aşağıdaki özelliklere sahip bir $f:\mathscr{H}^{*}\to\hat{\mathbb{C}}$ tasvirine birinci basamak modüler fonksiyon denir :

a) f,$\mathscr{H}$ da meromorftur, yani kutuplar dışında holomorftur,

b) $\forall A\in\Gamma$ ve $\forall\tau\in\mathscr{H}^{*}$ için $f(A(\tau))=f(\tau)$,

c) $\operatorname{Im}\tau>a$ olacak şekilde bir a>0 vardır ve $f(\tau), h\in\mathbb{Z}, b_h\neq 0$ olmak üzere $f(\tau)=\sum\limits_{\upsilon\geq h} b_\upsilon e^{2\pi i\upsilon\tau}$ şeklinde bir açılıma sahiptir. Eğer ;

$$h>0 \text{ ise } f(i\infty)=\sum_{\upsilon\geq h} b_\upsilon e^{2\pi i\upsilon(i\infty)}=\sum_{\upsilon\geq h} b_\upsilon e^{-2\pi\upsilon\infty}=\sum_{\upsilon\geq h} b_\upsilon 0=0,$$

$$h=0 \text{ ise } f(\tau)=b_0e^0+\sum_{\upsilon>0} b_\upsilon e^{2\pi i\upsilon\tau}=b_0+\sum_{\upsilon>0} b_\upsilon e^{2\pi i\upsilon\tau}$$

$$\Rightarrow f(i\infty)=b_0+\sum_{\upsilon>0} b_\upsilon e^{2\pi i\upsilon(i\infty)}=b_0$$

$$h<0 \text{ ise } f(\tau)=\sum_{0>\upsilon>h} b_\upsilon e^{2\pi i\upsilon\tau}+b_0e^0+\sum_{\upsilon>0} b_\upsilon e^{2\pi i\upsilon\tau}$$

$$\Rightarrow f(i\infty)=\sum_{0>\upsilon>h} b_\upsilon e^{2\pi i\upsilon(i\infty)}+b_0+\sum_{\upsilon>0} b_\upsilon e^{2\pi i\upsilon(i\infty)}=\infty+b_0+0=\infty$$

bulunur.

2.1.2. Kuvvet Serilerine Açılımlar

$f(\tau)=\sum_{\upsilon\geq h} b_\upsilon e^{2\pi i\upsilon\tau}$ açılımından, herhangi bir rasyonel r noktasının civarında, f modüler fonksiyonunun açılımını elde edebiliriz.c,d∈$\mathbb{Z}$, (c,d)=1 olmak üzere $r=-\frac{d}{c}$ olsun ve ad-bc=1 olacak şekilde a,b∈$\mathbb{Z}$ alalım. O zaman $S=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ modüler dönüşümü için

$S(r)=\frac{ar+b}{cr+d}=\frac{a\left(\frac{-d}{c}\right)+b}{c\left(\frac{-d}{c}\right)+d}=\frac{-ad+bc}{-cd-cd}=\frac{-ad+bc}{0}=\frac{1}{0}=-\infty$ dan $S(r)=i\infty$ olur. $S\in\Gamma$ altında f değişmedi-ğinden, $\tau\in\mathscr{H}$ ve yeterince büyük $\operatorname{Im}\frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ için ve h∈$\mathbb{Z}$ olmak üzere

$$f(\tau)=f(S(\tau))=\sum_{\upsilon\geq h} b_\upsilon e^{2\pi i\upsilon\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)} \tag{2.1}$$

elde ederiz.

$e^{2\pi i\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)}$ a ve b den bağımsızdır. Modüler fonksiyonlar rasyonel noktalarda aynı değerleri kabul ettiğinden ve $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ de yoğun olduğundan, sabit olmayan bir modüler fonksiyonu analitik olarak alt yarı düzleme devam ettirmek mümkün değildir.

f modüler fonksiyonunun $\rho=e^{2\pi i/3}$ civarında açılımını $f(\tau)=\sum_{\upsilon\geq m} c_\upsilon\left(\frac{\tau-\rho}{\tau-\bar\rho}\right)^\upsilon$ şeklinde alırız. R=TU olmak üzere $\overline{R}$ dönüşümü sabit ρ, $\bar\rho$ noktasına sahiptir. Buradan $\overline{R}$ dönüşümü $\frac{R(\tau)-\rho}{R(\tau)-\bar\rho}=\lambda\frac{\tau-\rho}{\tau-\bar\rho}$ normal formuna sahip olur.

$$R=TU=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix} \text{ den } R(\tau)=\frac{-1}{\tau+1}$$

olur. Böylece

$$\lambda=\frac{\frac{-1}{\tau+1}-\rho}{\frac{-1}{\tau+1}-\bar\rho}\,\frac{\tau-\bar\rho}{\tau-\rho}=\frac{(-1-\rho\tau-\rho)(\tau-\bar\rho)}{(-1-\bar\rho\tau-\bar\rho)(\tau-\rho)}=\frac{-\rho\tau^2-\rho\tau+\bar\rho+1}{-\bar\rho\tau^2-\bar\rho\tau+\rho+1}=\frac{-\rho\tau^2-\rho\tau-\rho}{-\bar\rho\tau^2-\bar\rho\tau-\bar\rho} \text{ ve}$$

$\lambda = \dfrac{-\rho(\tau^2+\tau+1)}{-\overline{\rho}(\tau^2+\tau+1)} = \dfrac{\rho}{\overline{\rho}} = \rho^2 = \overline{\rho}$ olarak bulunur. Buna göre $\overline{R}$ nin normal formu

$\dfrac{R(\tau)-\rho}{R(\tau)-\overline{\rho}} = \overline{\rho}\dfrac{\tau-\rho}{\tau-\overline{\rho}}$ olur. Dolayısıyla

$$f(R(\tau)) = \sum_{\upsilon\geq m} c_\upsilon \left(\frac{R(\tau)-\rho}{R(\tau)-\overline{\rho}}\right)^\upsilon = \sum_{\upsilon\geq m} c_\upsilon \left(\overline{\rho}\frac{\tau-\rho}{\tau-\overline{\rho}}\right)^\upsilon = \sum_{\upsilon\geq m} c_\upsilon \overline{\rho}^{v}\left(\frac{\tau-\rho}{\tau-\overline{\rho}}\right)^\upsilon$$

olur ve $f(R(\tau)) = f(\tau)$ koşulu $\upsilon \not\equiv 0 \bmod 3$ için $c_\upsilon = 0$ olmasını gerektirir. Çünkü

$$f(\tau) = \sum_{\upsilon\geq m} c_\upsilon \left(\frac{\tau-\rho}{\tau-\overline{\rho}}\right)^\upsilon = \sum_{\upsilon\geq m} c_\upsilon \overline{\rho}^\upsilon \left(\frac{\tau-\rho}{\tau-\overline{\rho}}\right)^\upsilon = f(R(\tau))$$

olması için ya $c_\upsilon = 0$ ya da $\overline{\rho}^\upsilon = 1$ olmalıdır. $\overline{\rho}^3 = 1$ olduğundan $\overline{\rho}^\upsilon = 1$ olması için $\upsilon \equiv 0 \bmod 3$ olmalıdır. Aksi taktirde, yani $\upsilon \not\equiv 0 \bmod 3$ ise $\overline{\rho}^\upsilon \neq 1$ olacağından eşitlik durumu ancak ve ancak $c_\upsilon = 0$ olmasıyla mümkündür. Sonuç olarak $0 \neq f(\tau)$ nun açılımında υ sayılarının 3 ün katları olması gerekiyor. Dolayısıyla ρ daki açılım $m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $f(\tau) = \sum_{\upsilon\geq m} c_\upsilon \overline{\rho}^{3\upsilon}\left(\frac{\tau-\rho}{\tau-\overline{\rho}}\right)^{3\upsilon}$ den

$$f(\tau) = \sum_{\upsilon\geq m} c_\upsilon \left(\frac{\tau-\rho}{\tau-\overline{\rho}}\right)^{3\upsilon} \tag{2.2}$$

formunu kabul eder ve ρ ya denk olan noktalar civarındaki açılım da aynı forma sahiptir. Aynı şekilde f modüler fonksiyonunun i noktasındaki açılımı için $\overline{T} \in \overline{\Gamma}$ dönüşümünü kullanırız. Çünkü i yi i ye dönüştüren tek modüler dönüşüm $\overline{T}$ dönüşümüdür. Dolayısıyla $\overline{T}$ dönüşümü $\dfrac{1}{T(\tau)-i} = \dfrac{1}{\tau-i} + \alpha$ normal formuna sahiptir. Buradan $\alpha = i\dfrac{\tau+i}{\tau-i}$ çıkar. f modüler fonksiyonunun i civarındaki açılımı

$f(\tau) = \sum_{\upsilon\geq n} d_\upsilon \left(\dfrac{\tau-i}{\tau-\overline{i}}\right)^\upsilon$ şeklinde ise $f(\tau) = f(T(\tau))$ koşulundan

$$f(\tau)=\sum_{\upsilon\geq n} d_\upsilon\left(\frac{\tau-i}{\tau-\bar{i}}\right)^\upsilon=\sum_{\upsilon\geq n} d_\upsilon\left(\frac{T(\tau)-i}{T(\tau)-\bar{i}}\right)^\upsilon=\sum_{\upsilon\geq n} d_\upsilon\left(\frac{\tau-i}{1+i\tau-1}\frac{1}{T(\tau)+i}\right)^\upsilon$$

$$=\sum_{\upsilon\geq n} d_\upsilon\left(\frac{\tau-i}{i\tau}\frac{1}{\frac{-1}{\tau}+i}\right)^\upsilon=\sum_{\upsilon\geq n} d_\upsilon\left(\frac{\tau-i}{i(i^2+i\tau)}\right)^\upsilon=\sum_{\upsilon\geq n} d_\upsilon\left(\frac{\tau-i}{(-1)(i+\tau)}\right)^\upsilon=\sum_{\upsilon\geq n} d_\upsilon\left(-\frac{(\tau-i)}{\tau+i}\right)^\upsilon$$

çıkar.

$f(\tau)=\sum_{\upsilon\geq n} d_\upsilon\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right)^\upsilon=\sum_{\upsilon\geq n} d_\upsilon(-1)^\upsilon\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right)^\upsilon$ olması için ya $d_\upsilon=0$ ya da $(-1)^\upsilon=1$

olmalıdır.

$(-1)^\upsilon=1$ olması için $\upsilon\equiv 0$ mod2 olmalıdır. Aksi taktirde $d_\upsilon=0$ olacaktır. Dolayısıyla $0\neq f(\tau)$ nun açılımında υ sayıları 2 nin katları olmalıdır. Sonuçta i deki açılım, $n\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $f(\tau)=\sum_{\upsilon\geq n} d_\upsilon(-1)^{2\upsilon}\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right)^{2\upsilon}$ den

$$f(\tau)=\sum_{\upsilon\geq n} d_\upsilon\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right)^{2\upsilon} \tag{2.3}$$

sonucu çıkar. Ayrıca i ye denk olan noktalar içinde aynı formda bir açılım vardır. ρ veya i ye denk olmayan $\tau_0\in\mathscr{H}$ noktaları için

$$f(\tau)=\sum_{\upsilon\geq k} a_\upsilon\left(\frac{\tau-\tau_0}{\tau-\bar{\tau}_0}\right)^\upsilon,\quad k\in\mathbb{Z} \tag{2.4}$$

formunda bir açılım elde ederiz. Bu (2.1), (2.2), (2.3) ve (2.4) açılımlarındaki $t_{i\infty}:=e^{2\pi i\tau}$, $t_\rho:=\left(\frac{\tau-\rho}{\tau-\bar{\rho}}\right)^3$, $t_i:=\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right)^2$, $t_{\tau_0}:=\left(\frac{\tau-\tau_0}{\tau-\bar{\tau}_0}\right)$ fonksiyonlarına sırasıyla $i\infty$, ρ, i ve τ_0 noktalarındaki yerel düzgünleştirilen değişkenler denir. Benzer şekilde denk noktalar içinde bu değişkenler tanımlanabilir. Bu fonksiyonlar, denk noktalara sahip olmayan kümeleri 0 ın ($\mathbb{C}$ deki) komşulukları üzerine tasvir eder.

2.1.3. c-Noktalarında Mertebe

Yukarıda elde ettiğimiz açılımları düzgün olarak $\sum_{\upsilon\geq k} a_\upsilon t_{\tilde{\tau}}^{\upsilon}$, $a_{\tilde{k}} \neq 0$, şeklinde yazarız. Burada $\tilde{\tau}$ ya $i\infty$, ρ, i, τ_0 noktalarından biridir ya da onlardan birine denktir. $c \in \hat{\mathbb{C}}$ için f in $\tau \in \mathscr{H}^*$ daki $n(c,\tilde{\tau})$ c-nokta mertebesi şöyle tanımlanır :

$$n(\infty,\tilde{\tau}) = \max(0,-\tilde{k}); n(0,\tilde{\tau}) = \max(\tilde{k},0) \tag{2.5}$$

Eğer $c \neq 0,\infty$ ise yukarıdaki açılım $f(\tau)-c$ için gözönüne alınır. O zaman $\tilde{\tau}$ da f in $n(c,\tilde{\tau})$ mertebesi, $\tilde{\tau}$ da $f(\tau)-c$ nin 0 nın $n(0,\tilde{\tau})$ mertebesi olarak tanımlanır.

Bir rasyonel r noktasında f modüler fonksiyonunun (2.1) açılımı, c-nokta mertebesinin $i\infty$ a denk olan tüm noktalarda aynı olduğunu gösterir.

Eğer $\tau_0 \in \mathscr{H}$, ρ veya i ye denk değil ise o zaman c-nokta mertebesi kavramımız $\tau-\tau_0$ değişkeninde ölçüldüğü gibi mertebenin genel fikri ile aynıdır; ρ ya denk noktalarda 3 ün bir çarpanına göre farklıdır ve i ye denk noktalarda 2 nin bir çarpanına göre farklıdır. Denk $\tau \in \mathscr{H}$ noktalarına geçiş altında c-nokta mertebesinin değişmezliğini kanıtlamak için, keyfi $\tau_0 \in \mathscr{H}$ için $\tau-\tau_0$ değişkeninde ölçülmüş olarak c-noktasındaki mertebeyi gözönüne almak yeterlidir. τ_0 ve τ_0' de f in açılımları

$$f(\tau) = \sum_{\upsilon\geq k} a_\upsilon \left(\frac{\tau-\tau_0}{\tau-\bar{\tau}_0}\right)^{\upsilon}, \quad f(\tau') = \sum_{\upsilon\geq k'} a_\upsilon' \left(\frac{\tau'-\tau_0'}{\tau'-\bar{\tau}_0'}\right)^{\upsilon} \tag{2.6}$$

olursa bu mertebeler uygun olur. Eğer $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, $\tau' = S(\tau)$, $\tau_0' = S(\tau_0)$ alırsak

$$\tau'-\bar{\tau}_0' = S(\tau) - \overline{S(\tau_0)} = \frac{a\tau+b}{c\tau+d} - \overline{\left(\frac{a\tau_0+b}{c\tau_0+d}\right)} = \frac{a\tau+b}{c\tau+d} - \frac{a\bar{\tau}_0+b}{c\bar{\tau}_0+d} = \frac{(a\tau+b)(c\bar{\tau}_0+d)-(c\tau+d)(a\bar{\tau}_0+b)}{(c\tau+d)(c\bar{\tau}_0+d)}$$

$$= \frac{(ad-bc)\tau-(ad-bc)\bar{\tau}_0}{(c\tau+d)(c\bar{\tau}_0+d)} = \frac{\tau-\bar{\tau}_0}{(c\tau+d)(c\bar{\tau}_0+d)} \quad \text{ve} \quad \frac{\tau'-\tau_0'}{\tau'-\bar{\tau}_0'} = \frac{\dfrac{\tau-\tau_0}{(c\tau+d)(c\tau_0+d)}}{\dfrac{\tau-\bar{\tau}_0}{(c\tau+d)(c\bar{\tau}_0+d)}} = \frac{c\bar{\tau}_0+d}{c\tau_0+d}\,\frac{\tau-\tau_0}{\tau-\bar{\tau}_0}$$

olur. Böylece

$$\tau' - \tau_0' = \frac{\tau - \tau_0}{(c\tau + d)(c\tau_0 + d)} \quad \text{ve} \quad \frac{\tau' - \tau_0'}{\tau' - \bar{\tau}_0'} = \frac{c\bar{\tau}_0 + d}{c\tau_0 + d}\frac{\tau - \tau_0}{\tau - \bar{\tau}_0} \tag{2.7}$$

elde edilmiş olur. $\upsilon \geq k = k'$ için $f(\tau) = f(S(\tau))$ değişmezlik koşulundan

$f(S(\tau)) = f(\tau') = \sum\limits_{\upsilon \geq k'} a_\upsilon' \left(\frac{\tau' - \tau_0'}{\tau' - \bar{\tau}_0'}\right)^\upsilon = \sum\limits_{\upsilon \geq k} a_\upsilon \left(\frac{\tau - \tau_0}{\tau - \bar{\tau}_0}\right)^\upsilon$ olur. Sol taraf

$\sum\limits_{\upsilon \geq k'} a_\upsilon' \left(\frac{c\bar{\tau}_0 + d}{c\tau_0 + d}\frac{\tau - \tau_0}{\tau - \bar{\tau}_0}\right)^\upsilon = \sum\limits_{\upsilon \geq k'} a_\upsilon' \left(\frac{c\bar{\tau}_0 + d}{c\tau_0 + d}\right)^\upsilon \left(\frac{\tau - \tau_0}{\tau - \bar{\tau}_0}\right)^\upsilon$ olur. $f(\tau) = f(\tau')$ koşulu

$k=k'$ için

$$a_\upsilon = a_\upsilon' \left(\frac{c\bar{\tau}_0 + d}{c\tau_0 + d}\right)^\upsilon \tag{2.8}$$

olmasını gerektirir. Bu ise aşağıdaki teoremi kanıtlar.

Teorem 1: Bir modüler fonksiyon denk noktalarda aynı c-nokta mertebesine sahiptir.

2.1.4. c-Noktalarının Sayısı

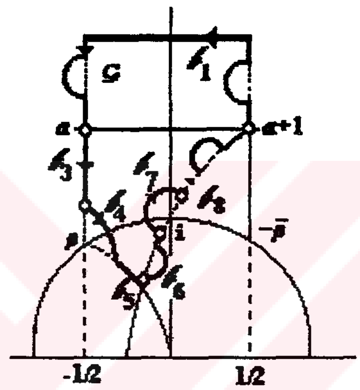
Aşağıda göz önüne aldığımız f sabit olmayan bir modüler fonksiyondur. Böyle f için

$$N(c) := \sum_{\tau \in \mathcal{F}} n(c, \tau) \tag{2.9}$$

ile c-mertebeyi tanımlarız ve f in $\mathcal{F}$deki c-noktaları bir limit noktasına sahip olmadığından bu toplamın sonlu olduğunu belirtelim.

Teorem 2 : N(c) tüm $c \in \hat{\mathbb{C}}$ ler için aynıdır, yani bir modüler fonksiyon yerel değişken ile ifade edilen her bir c değerinin ölçülen katlılığını eşit sıklıkta alır.

İspat : Sabit bir $c \neq \infty$ u gözönüne alalım ve $N(c)=N(\infty)$ olduğunu kanıtlayalım. Sonlu parça muhtemelen $i\infty$ un dışında tüm c-noktaları ve kutuplarını içerecek şekilde reel eksene paralel bir doğru boyunca temel bölgenin kanonik formunu keselim. Aynı şekilde i ve ρ da c-noktaları ve kutuplarının çıkarılmasıyla c-nokta ve kutuplarını içermeyen bölgeleri i ve ρ civarındaki N.E.-dairesel yayları boyunca keserek kaldıralım. Ayrıca, sınır üzerindeki c-noktaları ve kutupları şekilde gösterildiği gibi alınmamalıdır. ρ, i veya $i\infty$ daki kutup ve c-noktaları hariç içindeki tüm c-noktaları ve kutuplarını içeren ℓ sınırına sahip bir $\mathcal{G}$ bölgesi elde ederiz. ℓ yi ℓ_1 den ℓ_9 a alt yolların toplamı olarak bölelim. ℓ_2 ve ℓ_9, ℓ_3 ve ℓ_5 ve ℓ_6 ve ℓ_8 alt yol çiftleri Γ altında eşdeğerdirler.



Şekil 4.

$$N_0(c) = \sum_{\tau \in \mathcal{G}} n(c,\tau), \quad N_0(\infty) = \sum_{\tau \in \mathcal{G}} n(\infty,\tau) \quad \text{tanımlanarak}$$

$N_0(c) - N_0(\infty) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\ell} \dfrac{f'(\xi)}{f(\xi)-c}d\xi$ elde ederiz. Bu integrali ℓ_1 den ℓ_9 a olan alt yollar üzerindeki integrallerin bir toplamı olarak yazarak değerini buluruz. Yukarıda verilen eşdeğer alt yolların çiftleri zıt yönlerde döndüklerinden karşılık gelen integrallerin bir çiftinin toplamı 0 dır. Gerçekten eğer $S \in \Gamma$ ve $\omega \subset \mathcal{H}$ keyfi bir yol ise,

$$\int_{\omega} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)-c}d\xi = \int_{S(\omega)} \frac{\frac{df}{d\xi}}{f(S^{-1}(\tilde{\xi}))-c}d\tilde{\xi} = \int_{S(\omega)} \frac{1}{f(S^{-1}(\tilde{\xi}))-c}\left(\frac{df}{d\tilde{\xi}}\frac{d\tilde{\xi}}{d\xi}\right)\left(\frac{d\xi}{d\tilde{\xi}}\right)d\tilde{\xi} \quad \text{şeklinde yazabiliriz.}$$

$$\int_{\omega} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)-c}d\xi = \int_{S(\omega)} \frac{1}{f(\tilde{\xi})-c}\frac{df}{d\tilde{\xi}}d\tilde{\xi} = \int_{S(\omega)} \frac{f'(\tilde{\xi})}{f(\tilde{\xi})-c}d\tilde{\xi} \qquad (2.10)$$

elde ederiz. Bu durumda sadece ℓ_1, ℓ_4 ve ℓ_7 boyunca olan integrallerin hesaplanması yeterlidir. ℓ_1 boyunca olan integrali hesaplamak için $t_{i\infty} = e^{2\pi i\tau}$ tanımlayalım. a yeterince büyük bir sayı olmak üzere τ, ℓ_1 üzerinde değişirken $t_{i\infty}$ ise $t_{i\infty}=0$ civarındaki $e^{-2\pi a}$ yarıçaplı bir çember üzerinde negatif yönde değişir ve ℓ_1 parçasının yukarısındaki noktalar bu çemberin içine dönüşür. Dolayısıyla $t_{i\infty}=0$ hariç hiç sıfırı veya kutbu yoktur.

(2.1) den $f(\tau)-c = \sum_{\upsilon\geq h} b_\upsilon e^{2\pi i\tau\upsilon} = \frac{b_{-h}}{(t_{i\infty})^h}+\ldots(-c) = f(t_{i\infty})-c$ yazarsak

$f'(\tau) = f'(t_{i\infty})\frac{dt_{i\infty}}{d\tau} \rightarrow \frac{f'(\tau)}{f(\tau)-c}d\tau = \frac{f'(t_{i\infty})}{f(t_{i\infty})-c}dt_{i\infty}$ olur. Buradan $\tau=\xi$ için

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\ell_1} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)-c}d\xi = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|t_{i\infty}|=e^{-2\pi a}} \frac{f'(t_{i\infty})}{f(t_{i\infty})-c}dt_{i\infty}$$

$$= -[n(c,i\infty)-n(\infty,i\infty)] = -[n(c,\tilde{\tau})-n(\infty,\tilde{\tau})]$$

olur burada $n(c,\tilde{\tau})$, $\tilde{\tau}$ da $f(\tau)-c$ nin 0 nın mertebesidir. Dolayısıyla

$\frac{1}{2\pi i}\int_{\ell_1} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)-c}d\xi = -[\max(\tilde{k},0)-\max(0,-\tilde{k})]$ çıkar. $f(\tau) = \sum_{\upsilon\geq h} b_\upsilon e^{2\pi i\tau\upsilon} = \sum_{\upsilon\geq\tilde{k}} a_\upsilon t_{\tilde{\tau}}^{\upsilon}$ den

$\tilde{k}=h$ olur. Buna göre $\frac{1}{2\pi i}\int_{\ell_1} \frac{f'(\xi)}{f(\xi)-c}d\xi = -[\max(h,0)-\max(0,-h)] = -[h-0] = -h$

bulunur. Burada $h>0$ ise $t_{i\infty}=0$ $f(t_{i\infty})$ un kutup noktası, $h<0$ ise kutup yoktur ve $t_{i\infty}=k$ için $f(t_{i\infty})-c$ nin bir sıfırı vardır. Eğer $c=0$ ise $h<0$ iken $t_{i\infty}=k=0$ $f(t_{i\infty})$ un sıfırı olur.

Şimdi ℓ_4 boyunca olan integrali hesaplayalım : $t_\rho = \left(\frac{\tau-\rho}{\tau-\bar{\rho}}\right)^3$ tanımlayalım. τ, ℓ_4 üzerinde değişirken, t_ρ ise $t_\rho = 0$ civarında r yarıçaplı bir çember üzerinde değişir. $t_\rho = 0$ hariç hiç sıfır veya kutbu yoktur. (2.2) den

$f(\tau)-c = \sum_{\upsilon\geq m} c_\upsilon \left(\frac{\tau-\rho}{\tau-\bar{\rho}}\right)^{3\upsilon} - c = \frac{c_{-m}}{(t_\rho)^m}+\ldots(-c) = f(t_\rho)-c$ yazarsak

$$f'(\tau)=f'(t_\rho)\frac{dt_\rho}{d\tau}\to\frac{f'(\tau)}{f(\tau)-c}d\tau=\frac{f'(t_\rho)}{f(t_\rho)-c}$$ olur. Buradan $\tau=\xi$ için

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\ell_4}\frac{f'(\xi)}{f(\xi)-c}d\xi=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|t_{i\infty}|=c}\frac{f'(t_\rho)}{f(t_\rho)-c}dt_\rho=-[n(c,\rho)-n(\infty,\rho)]$$

$f(\tau)=\sum_{\upsilon\geq m}c_\upsilon t_\rho{}^\upsilon=\sum_{\upsilon\geq k}c_\upsilon t_{\tilde{\tau}}^\upsilon$ den $\tilde{k}=m$ ve $\tilde{\tau}=\rho$ olur. Buna göre,

$\frac{1}{2\pi i}\int_{\ell_4}\frac{f'(\xi)}{f(\xi)-c}d\xi=-[n(c,\tilde{\tau})-n(\infty,\tilde{\tau})]$, burada $n(c,\tilde{\tau})$, $\tilde{\tau}$ da $f(\tau)$ - c nin 0 nın mertebesidir.

Dolayısıyla

$=-[\max(\tilde{k},0)-\max(0,-\tilde{k})]=-[m-0]\Rightarrow\frac{1}{2\pi i}\int_{\ell_4}\frac{f'(\xi)}{f(\xi)-c}d\xi=-m$ bulunur. Burada m>0

ise $t_\rho=0$ $f(t_\rho)$ nun kutup noktası, m<0 ise kutup yoktur ve $t_\rho=k$ için $f(t_\rho)-c$ nin bir sıfırı vardır. Eğer c=0 ise h<0 iken $t_\rho=k=0$ $f(t_\rho)$ nun sıfırı olur. $\rho=R(\rho)=R^2(\rho)$ olduğundan ve (2.10) dan dolayı ℓ_4 boyunca olan integral $R(\ell_4)$ ve $R^2(\ell_4)$ boyunca olan integrallerle aynıdır. Dolayısıyla

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\ell_4}\frac{f'(\xi)}{f(\xi)-c}d\xi+\frac{1}{2\pi i}\int_{R(\ell_4)}\frac{f'(\xi)}{f(\xi)-c}d\xi+\frac{1}{2\pi i}\int_{R^2(\ell_4)}\frac{f'(\xi)}{f(\xi)-c}d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\ell_4+R(\ell_4)+R^2(\ell_4)}\frac{f'(\xi)}{f(\xi)-c}d\xi=-3m$$

bulunur. Aynı şekilde ℓ_7 boyunca olan integrali hesaplayalım :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\ell_7}\frac{f'(\xi)}{f(\xi)-c}d\xi=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|t_i|=r}\frac{f'(t_i)}{f(t_i)-c}dt_i=-[n(c,i)-n(\infty,i)]=-[n(c,\tilde{\tau})-n(\infty,\tilde{\tau})]$$

$$=-[n(0,\tilde{\tau})-n(\infty,\tilde{\tau})]=-[\max(\tilde{k},0)-\max(0,-\tilde{k})]=-[n-0]=-n$$

bulunur.

$$N(c)=\sum_{\tau\in\mathcal{F}}n(c,\tau)=\sum_{\tau\in\mathcal{G}}n(c,\tau)+n(c,i\infty)+n(c,\rho)+n(c,i)$$

$N(c)=N_0(c)+n(c,i\infty)+n(c,\rho)+n(c,i)$ olur ve $c=\infty$ ise

$N(\infty)=N_0(\infty)+n(\infty,i\infty)+n(\infty,\rho)+n(\infty,i)$ çıkar. Buradan

$$N(c)-N(\infty)=N_0(c)-N_0(\infty)-[n(\infty,i\infty)-n(c,i\infty)+n(\infty,\rho)-n(c,\rho)+n(\infty,i)-n(c,i)]$$

$=N_0(c)-N_0(\infty)-[-h-m-n]=N_0(c)-N_0(\infty)+h+m+n=0$ dan

$N(c)=N(\infty)$ bulunur. Tabii ki (2.10) denklemi denk noktalarda c-nokta mertebesinin değişmezliğini gerektirir. Bu teoremin bir sonucu olarak, $c\in\hat{\mathbb{C}}$ olmak üzere modüler f fonksiyonunun mertebesini N(c) sabiti olarak tanımlarız. $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ olmak üzere kompleks $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ için $\dfrac{\alpha f+\beta}{\gamma f+\delta}$ nın f ile aynı mertebeli bir modüler fonksiyon olduğunu göstermek kolaydır. Paydanın sıfırdan farklı olması koşulu ile modüler fonksiyonlaın toplamları, farkları ve bölümleri de $\overline{A}\in\overline{\Gamma}$ altında değişmez. Bunların kuvvet serileri de aynı şekilde yazılabilir. Böylece şu teoremi verebiliriz.:

Teorem 3: Modüler fonksiyonlar bir cisim oluşturur.

2.1.5.Normalleştirme

Modüler fonksiyonların oluşturulmasına yardımcı olacak kullanışlı bir teorem verelim.

Teorem 4: Eğer 1 mertebeli modüler fonksiyonlar varsa o zaman

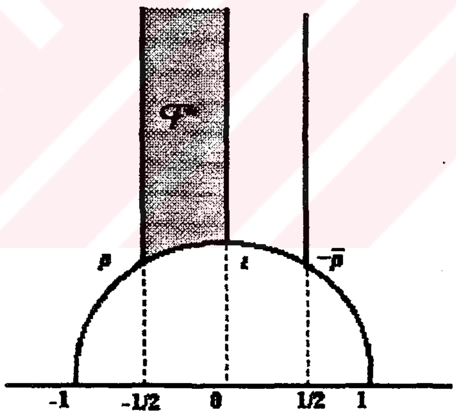
$\mathcal{F}^*:=\left\{\tau \,\middle|\, \tau\in\mathcal{H},\ \frac{1}{2}\leq \operatorname{Re}\tau\leq 0,|\tau|\geq 1\right\}\cup\{i\infty\}$ un içini üst yarı düzleme birebir ve üzerine tasvir eden ve sınırını reel eksen üzerine tasvir eden 1 mertebeli bir modüler fonksiyon vardır.

İspat : İlk olarak eğer f(τ) bir modüler fonksiyon ise o zaman $\overline{f(-\overline{\tau})}$ nunda bir modüler fonksiyon olduğunu ve her ikisinin aynı mertebeye sahip olduğunu gösterelim. Şöyle ki eğer $f(\tau)=\sum\limits_{\upsilon\geq k} a_{\upsilon}(\tau-\tau_0)^{\upsilon}, \tau_0 \in \mathscr{H}$ da f in açılımı ise o zaman

$$\overline{f(-\overline{\tau})}=\sum_{\upsilon\geq k}\overline{a}_{\upsilon}(-\overline{\tau}-\overline{\tau}_0)^{\upsilon}=\sum_{\upsilon\geq k}\overline{a}_{\upsilon}(-1)^{\upsilon}(\tau+\overline{\tau}_0)^{\upsilon}=\sum_{\upsilon\geq k}\overline{a}_{\upsilon}(-1)^{\upsilon}(\tau-(-\overline{\tau}_0))^{\upsilon}$$

ise f in $-\overline{\tau}_0$ daki açılımı olur. Böylece $\overline{f(-\overline{\tau})}$ $\mathscr{H}$ da meromorf olur ve onun $-\overline{\tau}_0$ daki mertebesi f in τ_0 daki mertebesi ile aynıdır. Benzer sonuçlar i∞ daki açılımlar için de geçerlidir. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ altında değişmezlik direkt olarak gösterilebilir :

$$\overline{f\left(-\frac{a\overline{\tau}+b}{c\overline{\tau}+d}\right)}=\overline{f\left(\frac{a(-\overline{\tau})-b}{-c(-\overline{\tau})+d}\right)}=\overline{f(-\overline{\tau})} \text{ olur. Çünkü } \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \in \Gamma \text{ dır.}$$



Şekil 5.

Şimdi f in 1 mertebeli bir modüler fonksiyon olduğunu kabul edelim. Bu fonksiyon $\mathcal{F}$ deki her değeri tam olarak bir kere aldığından, $\mathcal{F}$ den $\hat{\mathbb{C}}$ ye üzerine ve birebirdir ve tam olarak 1 mertebeli bir kutba sahiptir. Bu kutbun i∞ da olduğunu kabul edelim (aksi taktirde uygun bir lineer dönüşüm uygularız). Eğer gerekliyse $f(\tau)-\overline{f(-\overline{\tau})}$ modüler fonksiyonunun i∞ da holomorf ve dolayısıyla her yerde holomorf olması için i∞ da bir reel kalan elde etmek için bir sabitle çarparız. Böylece $f(\tau)-\overline{f(-\overline{\tau})}=c$ olur. $\tau=iy$ alarak $s,r\in\mathbb{R}$ olmak üzere $f(iy)-\overline{f(-(\overline{iy}))}=f(iy)-\overline{f(iy)}$ olur. Eğer

$f(iy)=s+i\frac{r}{2}$ ise $\overline{f(iy)}=s-i\frac{r}{2}$ den $f(iy)-\overline{f(iy)}=s+i\frac{r}{2}-\left(s-i\frac{r}{2}\right)=ir$ ve dolayısıyla $c=ir$ olduğunu görürüz. Eğer f yerine $f-\frac{ir}{2}$ alır ve tekrar buna da f dersek,

$f(\tau)-\overline{f(-\overline{\tau})}=i\frac{r}{2}+i\frac{r}{2}$ den $f(\tau)-i\frac{r}{2}-\left(\overline{f(-\overline{\tau})}+i\frac{r}{2}\right)=0$ ve $f(\tau)-\overline{f(-\overline{\tau})}=0$ olur, buradan $f(\tau)=\overline{f(-\overline{\tau})}$ elde ederiz.

Eğer ;

$\tau=iy$ ise o zaman $\overline{\tau}=-\tau$ ve dolayısıyla $f(\tau)=\overline{f(\tau)}\in\mathbb{R}$;

$|\tau|=1$ ise $|\tau|^2=1$ ve $\tau\overline{\tau}=1$ den $\overline{\tau}=\frac{1}{\tau}$ olur ve $f(\tau)=\overline{f\left(-\frac{1}{\tau}\right)}=\overline{f(T(\tau))}=\overline{f(\tau)}\in\mathbb{R}$;

$\tau=-\frac{1}{2}+iy$ ise $\overline{\tau}=-\frac{1}{2}-iy=-\tau-1$ olur ve $f(\tau)=\overline{f(-(-\tau-1))}=\overline{f(\tau+1)}=\overline{f(U(\tau))}=\overline{f(\tau)}\in\mathbb{R}$;

elde ederiz. Böylece f_1 $\mathcal{F}^*$ ın sınırını reel eksene dönüştürür. Şimdi τ nun $\mathcal{F}^*$ ın bir iç noktası olduğunu ve $f(\tau)\in\mathbb{R}$ olduğunu kabul edelim. Dolayısıyla $f(\tau)=\overline{f(\tau)}$ olur. Bu taktirde $f(\tau)=\overline{f(-\overline{\tau})}$ dan $f(\tau)=f(-\overline{\tau})$ olur. f birebir ve üzerine olduğundan τ nun $-\overline{\tau}$ ya denk olduğu sonucu çıkar. Ayrıca $-\overline{\tau}$, $\mathcal{F}$ bir iç noktası olur. Bu ise $\tau=-\overline{\tau}$ veya $\mathrm{Re}\tau=0$ olmasını gerektirir. Fakat $-\overline{\tau}\notin\mathcal{F}^*$ olduğundan, bu durum τ nun $\mathcal{F}^*$ in içi olması gerçeğine tezat teşkil eder. Böylece $f(\tau)\in\mathbb{R}$ kabulü yanlış olur. Reel eksenin her noktası $\mathcal{F}$ in bir noktasının görüntüsü olduğundan $\mathbb{R}$ nin $\mathcal{F}^*$ in sınırının görüntüsü olduğu sonucu çıkar. Bir lineer dönüşümlü kompozisyonla ρ için 0, i için 1 ve $i\infty$ için ∞ olan bir f elde ederiz. Açıkça, bu normalleştirme ile f tek olarak belirlenir ve $\mathcal{F}^*$ içi $\mathcal{H}$ a üzerine tasvir edilir.

2.2.Yansımalarla Modüler Grubun Genişlemesi

Bu bölümde üst çizgileri atarak $\overline{U},\overline{T},\overline{A},\ldots$ lineer dönüşümleri U,T,A,... ile göstereceğiz.

2.2.1.$\mathbb{C}$ de Yansımalar

$O_1:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}},\ z\to -\overline{z}$ olsun.

Tanım : Eğer $S=LO_1L^{-1}$ formunda yazılabilecek şekilde bir inhomojen lineer dönüşüm varsa $S:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}},\ z\to\frac{\alpha\overline{z}+\beta}{\gamma\overline{z}+\delta}$ tasvirine bir yansıma denir. $O_1(z)=-\overline{z}$ ise $O_1(O_1(z))=$

$O_1(-\bar{z}) = -(\bar{\bar{z}}) = -(-z) = z$ den $O_1^2 = I$. Bundan dolayı $S^2 = LO_1L^{-1}LO_1L^{-1}$ olmak üzere $S^2 = LO_1IO_1L^{-1} = LO_1O_1L^{-1} = LO_1^2L^{-1} = LIL^{-1} = I$ dan $S^2 = I$ elde ederiz. Ayrıca, $y = \mathrm{Im}(z)$ olmak üzere $SL(iy) = LO_1(iy) = L(-(\overline{iy})) = L(iy)$ olur yani L altında imajiner eksenin dairesel görüntüsü S ile soldan çarpılırsa sabit kalır. Özel olarak O_1 imajiner σ_1 eksenindeki yansımadır.

2.2.2. Yansımalarla $\bar{\Gamma}$ nın Genişlemesi

O, T, U dönüşümleri için aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$UO_1(z) = U(-\bar{z}) = -\bar{z}+1$ ve $O_1(U^{-1}(z)) = O_1(z-1) = -(\overline{z-1}) = -(\bar{z}-1) = -\bar{z}+1$,

$U^{-1}O_1(z) = U^{-1}(-\bar{z}) = -\bar{z}-1$ ve $O_1U(z) = O_1(z+1) = -(\overline{z+1}) = -(\bar{z}+1) = -\bar{z}-1$,

$TO_1(z) = T(-\bar{z}) = \frac{-1}{-\bar{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$ ve $O_1T(z) = O_1\left(\frac{-1}{z}\right) = -\overline{\left(\frac{-1}{z}\right)} = -\left(\frac{-1}{\bar{z}}\right) = \frac{1}{\bar{z}}$ den dolayı

$$UO_1 = O_1U^{-1},\ U^{-1}O_1 = O_1U,\ TO_1 = O_1T \tag{2.11}$$

elde ederiz. Bunlardan yararlanarak aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 5: $\Gamma^* = \bar{\Gamma} \cup O_1\bar{\Gamma}$ dönüşümlerinin kümesi, dönüşümler çarpımının genel tanımı altında bir gruptur. Γ^* grubu O_1, T ve U dönüşümleri ile üretilir.

Eğer O_1, T ve R üreteç olarak seçilirse o zaman $O_1^2 = T^2 = R^3 = I$, $TO_1 = O_1T$, $RO_1 = O_1R^{-1}$ Γ^* için tanımlanan bağıntılar olur. Bunlar $\bar{\Gamma}$ için çıkarılanlara benzer şekilde elde edilir. Yukarıda $TO_1 = O_1T$ olduğunu göstermiştik. Ayrıca $O_1^2 = T^2 = R^3 = I$ ve $RO_1 = O_1R^{-1}$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Dolayısıyla bunlar için 3 yansıma ile üretilen Γ^* yı elde etmek önemlidir. $O_1 = O_1$, $O_2 := O_1U$, $O_3 := O_1T$ şeklinde tanımlansın. Burada O_1 in σ_1 de bir yansıma olduğunu biliyoruz. Gerçekten, $O_1 = LO_1L^{-1}$ olacak şekilde bir $L \in \mathcal{L}$ inhomojen lineer dönüşümü bulunabilir. Şöyle ki $O_1(z) = \frac{(-1)z+0}{0.\bar{z}+1}$ iken $L(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ olsun. Burada a, b, c, d katsayılarını belirleyelim. $L^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$ olur. $O_1L^{-1}(z) = -\left(\overline{L^{-1}(z)}\right)$

ve $O_1L^{-1}(z) = -\overline{\left(\frac{dz-b}{-cz+a}\right)} = -\left(\frac{d\bar{z}-b}{-c\bar{z}+a}\right) = \frac{-d\bar{z}+b}{-c\bar{z}+a}$ olur. Buradan

$$LO_1L^{-1}(z) = \frac{a\left(\frac{-d\bar{z}+b}{-c\bar{z}+a}\right)+b}{-c\left(\frac{-d\bar{z}+b}{-c\bar{z}+a}\right)+d} \text{ dan } LO_1L^{-1}(z) = \frac{-ad\bar{z}+ab+b(-c\bar{z}+a)}{-cd\bar{z}+bc+d(-c\bar{z}+a)} = \frac{(-ad-bc)\bar{z}+2ab}{-2cd\bar{z}+bc+ad}$$

bulunur. $O_1 = LO_1L^{-1}$ ise -1=-ad-bc, 2ab=0, -2cd=0, bc+ad=1 olur. Burada b=c=0 alalım. Böylece ad=1 ve keyfi olarak a=d=1 alırsak L(z)=z inhomojen lineer dönüşümü bulunur. Dolayısıyla $O_1: z \to -\bar{z}$ imajiner σ_1 ekseninde bir yansımadır. Şimdi O_2 nin bir yansıma olduğunu gösterelim. $O_2 = LO_1L^{-1}$ olacak şekilde bir $L \in \mathcal{L}$ inhomojen lineer dönüşümü bulalım.

$$O_2(z) = -\bar{z}-1 = \frac{(-1)\bar{z}-1}{0.\bar{z}+1} \text{ ve } LO_1L^{-1}(z) = \frac{(-ad-bc)\bar{z}+2ab}{-2cd\bar{z}+bc+ad} \text{ ise}$$

-1=-ad-bc, 2ab=-1, -2cd=0, ad+bc=1 olur. c=0 alalım. Böylece ad=1 ve keyfi olarak a=d=1 alırsak $b = -\frac{1}{2}$ olur. Sonuçta $L(z) = z - \frac{1}{2}$ inhomojen lineer dönüşümü bulunur. Dolayısıyla $O_2: z \to -\bar{z}-1$, $\sigma_2 := \left\{ z \middle| \operatorname{Re} z = -\frac{1}{2} \right\}$ de bir yansımadır. Son olarak O_3 ün bir yansıma olduğunu gösterelim.

$O_3(z) = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{(0)\bar{z}+2}{(2)\bar{z}+0}$ ve $LO_1L^{-1}(z) = \frac{(-ad-bc)\bar{z}+2ab}{-2cd\bar{z}+bc+ad}$ ise -ad-bc=0, 2ab=2, -2cd=2, ad+bc=0 olur a=a, b=1/a, c=-a, d=1/a bulunur. a=1 olsun, b=1, c=-1, d=1 çıkar. Dolayısıyla, $L(z) = \frac{z+1}{-z+1}$ inhomojen lineer dönüşümü bulunur. Bu ise $O_3: z \to \frac{1}{\bar{z}}$ nin $\sigma_3 := \left\{ z \middle| z = 1, -\frac{1}{2} \le \operatorname{Re} z \le 0 \right\}$ birim çemberinde bir yansıma olduğunu gösterir.

2.2.3. Γ* İçin Temel Bölge

Temel bölgenin tanımını 1.4.3 den alalım ve aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 6: $\mathcal{F}^* := \left\{\tau \middle| \tau \in \mathscr{H}, -\frac{1}{2} \le \operatorname{Re}\tau \le 0, |\tau| \ge 1\right\} \cup \{i\infty\}$ kümesi, Γ^* için bir esas bölgedir.

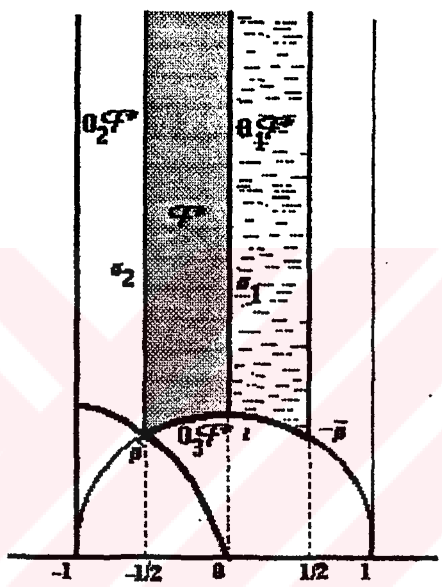
İspat : Her $\tau \in \mathscr{H}^*$ noktası $\overline{\Gamma}$ ile $\mathcal{F}$in içine tasvir edilebilir. Eğer bu görüntünün reel kısmı pozitif ise O_1 i uygularız. Bu durumda bu nokta $\mathcal{F}^*$ için tasvir edilmiş olur. Şimdi Γ^* altında $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}^*$ noktalarının denk olduğunu kabul edelim. Bu taktirde $A \in \overline{\Gamma}$ olarak $\tau_2 = A(\tau_1)$ veya $\tau_2 = O_1 A(\tau_1)$ olur. İlk olarak eğer $A \neq I$ ise daha önceki sonuçlardan ya $\tau_1 = \tau_2 = i$ ve $A = T$ veya $\tau_1 = \tau_2 = \rho$ ve $A = R$, R^2 yada $\tau_1 = \tau_2 = i\infty$ ve $\underline{\underline{A = U^n}}$ çıkar. İkinci halde $\tau_2 = O_1(A(\tau_1)) = -\overline{A(\tau_1)} \Rightarrow -\tau_2 = \overline{A(\tau_1)}$ ve $-\overline{\tau}_2 = A(\tau_1)$ den $-\overline{\tau}_2 = A(\tau_1)$ olur. Buradan $O_1(\tau_2) = A(\tau_1)$ bulunur. Burada $O_1(\tau_2) = \tau_3$ diyelim. τ_3 $\mathcal{F}$esas bölgesinin sağ yarı kısmındadır. $\tau_3 = A(\tau_1)$ iken daha önceki sonuçlardan ya $\tau_3 = I(\tau_1)$ ve $A=I$ ya $\tau_3 = U(\tau_1)$ ve $A=U$ ya da $\tau_3 = T(\tau_1)$ ve $A=T$ olur. $A=I$ iken $O_1(\tau_2) = (\tau_1)$ olur bu ise $\operatorname{Re}(\tau_1) = 0$ dolayısıyla $\tau_1 = \tau_2$ nin imajiner σ_1 ekseni üzerinde olduğunu gösterir. $A=U$ iken $O_1(\tau_2) = U(\tau_1)$ olur. Bu ise $\operatorname{Re}(\tau_1) = -\frac{1}{2}$ ve dolayısıyla $\tau_1 = \tau_2$ nin σ_2 ekseni üzerinde olduğunu gösterir. $A=T$ iken $O_1(\tau_2) = T(\tau_1)$ olur. Bu ise $|\tau_1| = 1$ ve dolayısıyla $\tau_1 = \tau_2$ nin σ_3 birim çemberi üzerinde olduğunu gösterir. Son olarak, $\tau_1 = \rho$ için $\tau_3 = A(\rho)$ olur. τ_3 $\mathcal{F}$nin sağ yarısının sınırları üzerinde olmak zorundadır. $UR(\rho) = -\overline{\rho}$ olduğundan $A=UR$ veya UR^2 çıkar. $\tau_3 = O_1(\tau_2) = -\overline{\rho}$ ise $-\overline{\tau}_2 = -\overline{\rho}$ dan $\tau_2 = \rho$ dolayısıyla $\tau_1 = \tau_2$ bulunur. Ayrıca $A=I$ ise $O_1 A = O_1$, $A = U$ ise $O_1 A = O_2$ ve $A = T$ ise $O_1 A = O_3$ olur. Diğer durumlarda $\tau_1 = \tau_2$ olur. Böylece, tüm sınır noktaları aşikar olmayacak şekilde kendi kendilerine denktirler. Diğer denklikler yoktur. Dolayısıyla $\mathcal{F}^*$ bir temel kümedir ve açıkça bir temel bölgedir.

2.2.4. Üst Yarı Düzlemin Bölümlere Ayrılması

Teorem 7: Üst yarı $\mathscr{H}^*$ düzlemi, aşağıdaki gibi tekrarlanan yansımalarla örtülebilir. σ_1, σ_2 ve σ_3 çemberlerinde $\mathcal{F}^*$ temel bölgesini yansıtalım. Sonra bu görüntüleri de tekrar elde edilen bu çemberlerde yansıtalım ve bu şekilde devam edelim.

İspat : $\mathscr{H}^* = \bigcup\limits_{A \in \overline{\Gamma}} A(\mathcal{F}^* U O_1 \mathcal{F}^*) = \bigcup\limits_{M^* \in \Gamma^*} M^*(\mathcal{F}^*)$ olduğunu görürüz. Böylece $\mathscr{H}^*$, Γ^* altında $\mathcal{F}^*$ ın görüntüsü ile örtülür. M^*, O_1, O_2 ve O_3 yansımalarının bir çarpımı olduğundan $M^*(\mathcal{F}^*)$ yansımaların bir serisi vasıtasıyla elde edilir. Tüm $M^*(\mathcal{F}^*)$ ların iç noktaları bir kere örtülür. $\upsilon=1,2,3$ olmak üzere uç noktalar hariç $M^*(\sigma_\upsilon)$ nün noktaları iki kere örtülür. i ye denk noktalar Γ^* altında 4 kez örtülür. ρ ya denk noktalar 6 kez, $i\infty$ a denk noktalar sonsuz kez örtülür.

Ayrıca, onların ortak kenarlarındaki $M^*O_{\upsilon}M^{*-1}$yansımalarının vasıtasıyla $M^*(\mathcal{F}^*)$ ın bitişik $M^*O_{\upsilon}(\mathcal{F}^*)$, $(\upsilon = 1,2,3)$ görüntüleri elde edilebilir. $M^* \in \Gamma^*$ ın ancak ve ancak O_1, O_2 ve O_3 yansımalarının bir çift sayıdaki çarpımı olarak yazılabilirse Γ da olduğunu söyleyebiliriz.



Şekil 6.

2.3.Modüler Fonksiyonların Varlığı ve Mutlak Modüler J Değişmezi

2.3.1. Modüler J Fonksiyonunun Oluşturulması

Riemann tasvir teoremine göre, $\mathcal{F}^*$ ın içi olan $\mathcal{F}^{*0}$ da holomorf olan ve $\mathcal{F}^{*0}\mathcal{H}$ a birebir ve üzerine tasvir eden bir f fonksiyonu vardır. Bu tasvir $\mathcal{F}^*$ dan $\mathcal{H}^-$ a üzerine olan $\hat{\mathbb{C}}$ deki bir homeomorfizmaya genişler.

Genişlemeyi $\rho \to 0$, $i \to 1$, $i\infty \to \infty$ ile normalize ederiz. Yansımalarla genişlemeyi sürdürelim :

$$\begin{aligned}
&\overline{f(O_1(\tau))} = \overline{f(-\overline{\tau})} = f(\tau) \quad \sigma_1 \text{ de } \quad O_1\mathcal{F}^* \text{ ın içine,}\\
&\overline{f(O_2(\tau))} = \overline{f(-\overline{\tau}-1)} = f(\tau) \quad \sigma_2 \text{ de } \quad O_2\mathcal{F}^* \text{ ın içine,}\\
&\overline{f(O_3(\tau))} = \overline{f\left(\frac{1}{\overline{\tau}}\right)} = f(\tau) \quad \sigma_3 \text{ de } \quad O_3\mathcal{F}^* \text{ ın içine,}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

bir yansımadır. 2.2.4 den böyle yansımaların limitsiz tekrarının bir tek değerli J fonksiyonunu kabul ettiği sonucu çıkar (J, yansımaların farklı modlarından bağımsızdır). Schwarz yansıma prensibi, i ve ρ ya denk olan noktaların dışında J nin $\mathcal{H}$ da holomorf olduğunu gösterir. Bununla beraber, i ve ρ ya denk olan noktalar kaldırıldığından ve bunlar J için uzanım noktaları olduğundan, J bu noktalarda da holomorftur ve $J(\tau+1) = J(U(\tau)) = J(O_1O_2(\tau)) = \overline{J(O_2(\tau))} = \overline{\overline{J(\tau)}} = J(\tau)$ bulunur ve bir periyodik fonksiyon olarak $J(\tau) = \sum_{\upsilon\in\mathbb{Z}} b_\upsilon e^{2\pi i\upsilon\tau}$ açılımına sahiptir. J, $\operatorname{Im}(\tau) > 0$ için holomorf olduğundan, $\operatorname{Im}(\tau) > 0$ için bu seri yakınsaktır. J, $\mathcal{F}$ deki her değeri tam olarak bir kere alır ve dolayısıyla $\mathcal{F}$ de 1 mertebeli bir kutba sahiptir. Böylece $\upsilon < -1$ için $b_\upsilon = 0$ ve $b_{-1} \neq 0$ olur. Modüler dönüşüm altında J nin değişmez olduğunu, periyodikliği kanıtlamak için yaptığımız işleme benzer olarak yaparız: J, yansıma çiftlerinin çarpımları için değişmez ve sadece O_1, O_2 ve O_3 ün çift sayıdaki çarpımları $\overline{\Gamma}$ da bulunur. Bu ise herhangi $S \in \overline{\Gamma}$ için $J(S(\tau)) = J(\tau)$ olduğunu gösterir. Sonuç olarak, J nin bir mertebedeli bir modüler fonksiyon olduğunu elde ederiz ve J ye mutlak modüler değişmez denir.

$\overline{J(-\overline{\tau})} = J(\tau)$ olduğundan b_υ katsayılar reeldir. Gerçekten de $\tau = x+iy$ olarak alırsak $-\overline{\tau} = -x+iy$ den

$$J(-\overline{\tau}) = \sum_{\upsilon\in Z} b_\upsilon e^{2\pi i\upsilon(-\overline{\tau})} = \sum_{\upsilon\in Z} b_\upsilon e^{2\pi i\upsilon(-x+iy)}$$

$$J(-\overline{\tau}) = \sum_{\upsilon\in Z} b_\upsilon e^{-2\pi\upsilon y} e^{-2\pi i\upsilon x} \Rightarrow \overline{J(-\overline{\tau})} = \sum_{\upsilon\in Z} \overline{b_\upsilon} e^{-2\pi\upsilon y} e^{2\pi i\upsilon x} \quad \text{çıkar ve}$$

$$J(\tau) = \sum_{\upsilon\in Z} b_\upsilon e^{2\pi i\upsilon(x+iy)} \text{ den } J(\tau) = \sum_{\upsilon\in Z} \overline{b_\upsilon} e^{-2\pi\upsilon y} e^{2\pi i\upsilon x}$$

olduğundan $\overline{J(-\overline{\tau})} = J(\tau)$ koşulundan $\overline{b_\upsilon} = b_\upsilon$ olması sonucu çıkar ki bu ise b_υ katsayılarının reel olduğunu gösterir.

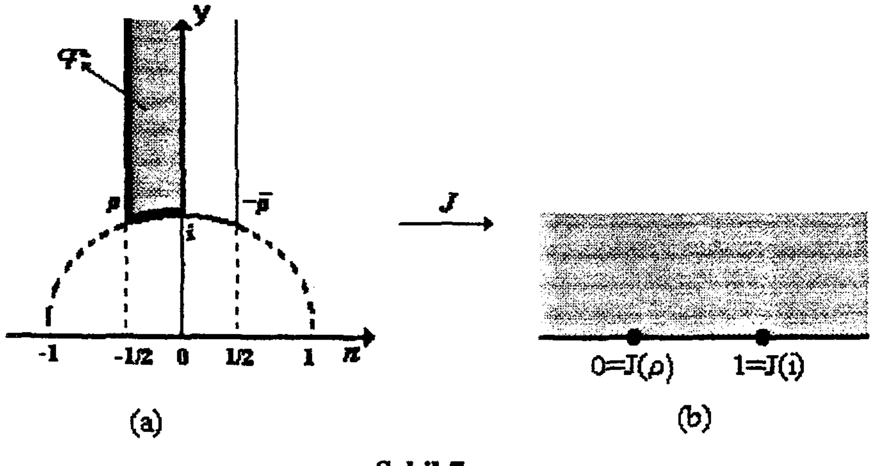
J nin Tasvir Özellikleri

σ_1 imajiner ekseninde, $\tau = iy$, böylece $q = e^{2\pi i\tau} = e^{-2\pi y} > 0$ elde ederiz. Dolayısıyla $12^3 J(\tau) = \frac{1}{q} + \sum_{\upsilon=0}^{\infty} b_\upsilon q^\upsilon$, $(q = e^{2\pi i\tau})$. Fourier serisi, J(iy) nin reel olduğunu gösterir. $J(i) = 1$ ve $\lim_{y\to+\infty} J(iy) \to +\infty$ olduğundan, imajiner eksenin $1 \le y < +\infty$ parçası reel eksenin $1 \le J(\tau) < +\infty$ parçasına dönüşür.

σ_2 ekseni üzerinde $\tau = -1/2 + iy$ elde ederiz, buradan $q = e^{2\pi i\tau} = e^{-2\pi y}e^{-\pi i} = -e^{-2\pi y} < 0$ olur.Çok büyük y (dolayısıyla q) için $J(-1/2 + iy) < 0$ dolayısıyla J, x= -1/2 doğrusunu reel eksenin negatif kısmını dönüştürür. $J(\rho) = 0$ ve $J(\infty) = \infty$ olduğundan σ_2 ekseni $-\infty < J(\tau) \le 0$ doğrusuna dönüşür.

σ_3 birim çemberi ise $[0,1]$ aralığına dönüşür. $\mathcal{F}^{*0}$ ise reel eksenin üzerindeki sanal düzleme dönüşür.

Son olarak, imajiner eksene göre simetrik olan noktalarda J nin eşlenik değerler aldığını, yani $J(\tau)=\overline{J(-\bar{\tau})}$ olduğunu gösterelim. Bunu görmek için $\tau = x + iy$ yazalım. O takdirde $q = e^{2\pi i\tau} = e^{2\pi i(x+iy)} = e^{-2\pi y}e^{2\pi ix}$ ve $\bar{q} = e^{-2\pi y}e^{-2\pi ix} = e^{-2\pi i(x+iy)} = e^{-2\pi i\bar{\tau}}$ olur. Böylece τ ve $\bar{\tau}$, eşlenik q ve $\bar{q}$ noktalarına karşılık gelir, fakat J nin Fourier serisi reel katsayılara sahiptir, dolayısıyla J(τ) ve J(-τ) kompleks eşlenikler olurlar. Özel olarak, $|\tau|^2 = 1$ dairesel yayı üzerinde, $|\tau|^2 = \tau\bar{\tau} = 1$ den $-\bar{\tau} = -1/\tau$, böylece $J(-\bar{\tau}) = J(-1/\tau) = J(\tau)$ olur, dolayısıyla J bu yay üzerinde reeldir.



Şekil 7.

2.3.2. Ana Teorem

J fonksiyonunun özel önemi aşağıdaki teoremde gösteriliyor.

Teorem 8 : Modüler fonksiyonlar cismi, $\mathbb{C}$ ye J eklenerek elde edilen rasyonel fonksiyon cismidir ve $\mathbb{C}(J)$ ile gösterilir. Başka bir deyişle; J nin her rasyonel fonksiyonu bir modüler fonksiyondur. Karşıt olarak, her modüler fonksiyon, J nin bir rasyonel fonksiyonu olarak ifade edilebilir.

İspat : $\mu=1,\ldots,m$, $\upsilon=1,\ldots,n$ olmak üzere h modüler fonksiyonunun $\overline{\Gamma}$ da eşdeğer olmayan r_μ mertebeli α_μ sıfırları ve s_υ mertebeli β_υ kutupları olduğunu kabul edelim. O taktirde $r_1+\ldots+r_m=s_1+\ldots+s_n$ olur.

α_μ veya β_υ nün $i\infty$ a eşit olması durumunda $J(\tau)-J(\alpha_\mu)$ veya $J(\tau)-J(\beta_v)$ yerine çarpan olarak 1 kabul edip

$$Q(\tau)=\frac{\prod\limits_{\mu=1}^{m}\left(J(\tau)-J(\alpha_\mu)\right)^{r_\mu}}{\prod\limits_{\upsilon=1}^{n}\left(J(\tau)-J(\beta_\upsilon)\right)^{s_\upsilon}} \qquad (2.13)$$

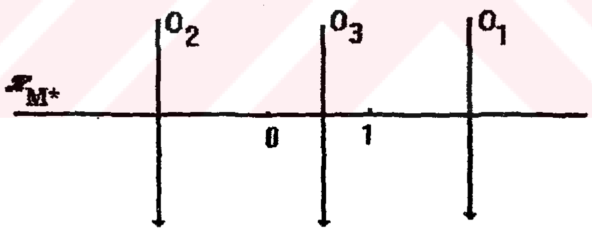
alalım. Bu taktirde Q, h ile aynı katlı sıfır ve kutuplara sahip bir modüler fonksiyon olur. Sonuçta Q/h, her yerde düzenlidir, yani hiçbir sıfır ve kutbu yoktur ve dolayısıyla bir sabittir. Bu ise h ın J nin bir rasyonel fonksiyonu olduğunu gösterir.

2.3.3. J nin Tersinin Riemann Yüzeyi

J fonksiyonu Γ^* grubunun $\mathcal{F}^*$ temel bölgesini, kapalı w-düzleminde $\mathcal{H}\cup\mathbb{R}\cup\{\infty\}$a üzerine ve birebir dönüştürür. Aynı şekilde J, $A\in\overline{\Gamma}$ olmak üzere her $A(\mathcal{F}^*)$ imajını $\mathcal{H}\cup\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ a üzerine ve birebir dönüştürür. Bununla beraber $A\in\overline{\Gamma}$ olmak üzere ve $-\mathcal{H}$ alt yarı düzlemi göstermek üzere J, $O_1A(\mathcal{F}^*)$ ın imajlarını $-\mathcal{H}\cup\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ a, üzerine ve birebir dönüştürür. Böylece J nin tersinin Riemann yüzeyi, $i\infty$ noktasının ve rasyonel noktaların görüntüleri dahil olmak üzere, üst yarı w-düzleminin sonsuz çokluktaki kopyeleri ve alt yarı w-düzleminin sonsuz çokluktaki kopyeleri ile birlikte bunların sınırlarından oluşur. $M^*(\mathcal{F}^*)$ J altında karşılık gelen ön görüntüleri göstermek üzere, yarı düzlemlerin dalları Γ^* da M* ile indekslenebilir. Böylece M* altında σ_3 ün görüntüsü olan $\mathscr{H}_{M^*}$ daki reel eksenin [0,1] parçası, M^*O_3 altında σ_3 ün görüntüsü olan $\mathscr{H}_{M^*O_3}$ deki [0,1] parçası ile tanımlanacaktır. Benzer olarak $M^*O_1(\sigma_1)$ ile $M^*(\sigma_1)$ ve $M^*O_2(\sigma_2)$ ile $M^*(\sigma_2)$ yi tanımlarız. i ye denk olan bir nokta olarak $\hat{i}$ nın görüntüsü w=1 üzerinde 1 mertebeli bir dallanma noktasıdır. Bu ise $c_1 \neq 0$ olmak üzere $w = J(\tau) = 1 + c_1\left(\dfrac{\tau - \hat{i}}{\tau + \hat{i}}\right)^2 + \ldots$ açılımının ters dönüşümünden çıkar. Benzer olarak ρ ya denk olan bir noktanın görüntüsü w=0 üzerinde 2 mertebeli bir dallanma noktasıdır. i ∞ noktası için $b_1 \neq 0$ ve $q = e^{2\pi i\tau}$ olmak üzere $J(\tau) = w = \dfrac{b_{-1}}{q} + b_0 + b_1 q + \ldots$ açılımının $d_1 \neq 0$ olacak şekilde yeterince büyük $|w|$ için $q = \dfrac{1}{w}\left(d_1 + \dfrac{d_2}{w} + \ldots\right)$ şeklindeki tersini göz önüne alalım. Logaritmanın esas dalı kullanılarak,

$$\tau = -\frac{1}{2\pi i}\log w + \frac{1}{w} \text{ değişkenli kuvvet serisi} + k\,,\ k \in \mathbb{Z}$$

elde ederiz. Burada k, J altında sıralı farklı ön görüntüleri gösteriyor.



Şekil 8.

Yukarıda, i∞ un bir komşuluğunun bir ön görüntüsü olarak gözönüne alınan ∞ un bir komşuluğunda J^{-1} in durumunu ifade ettik. J^{-1}, rasyonel -d/c noktasının bir komşuluğunun bir ön-görüntüsü olarak gözönüne alınan ∞ un bir komşulunda benzer durum gösterir. Yani, J^{-1}, ön-görüntüleri bir rasyonel -d/c kasplarına sahip olan Riemann yüzeyinin bu yaprakları üzerinde ∞ a yaklaşıldığında benzer durum gösterir. J^{-1}, w=∞ üzerinde sonsuz logaritmik dallanma noktalarına sahiptir. Bu ise w=0,1 ve ∞ da J^{-1} in durumunun ne şekilde olacağını bize tamamıyla gösteriyor. Bu noktaların civarındaki devreler bir modüler dönüşümün dallarına bağlıdır.

Şimdi ana teoremin ikinci bir ispatını verebiliriz:

f bir modüler fonksiyon olsun; w, $\overline{\Gamma}$ altında τ nun denklik sınıfını belirlediğinden f, w nin tek değerli fonksiyonu olur. Ayrıca, $w=0,1,\infty$ dan faklı bütün noktalarda τ ve w aynı analitik durumu gösterir. Bu noktalarda fonksiyon bir limite sahiptir ve böylece $w=J(\tau)$ da rasyonel olur.

2.4. Modüler Formlar

Modüler formlar, eliptik modüler fonksiyonlar teorisinin gelişmesinde fonksiyonların önemli bir sınıfını teşkil eder.

2.4.1.Tanım

Değişkenleri ω_1,ω_2 olan $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathscr{H}$ için tanımlanan kompleks değerleri bir h fonksiyonuna aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $-k \in \mathbb{Z}$ boyutlu bir homojen modüler form denir.

a) Her kompleks $\lambda \neq 0$ için $h(\lambda\omega_1,\lambda\omega_2)=\lambda^{-k}h(\omega_1\omega_2)$,

b) Her $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ için $h(a\omega_1+b\omega_2,c\omega_1+d\omega_2)=h(\omega_1,\omega_2)$,

c) $h(\tau,1)$ üst yarı düzlemde kutuplar dışında bir holomorf fonksiyon tanımlar,

d) $i\infty$ un bir $\{\tau | \operatorname{Im}\tau < \alpha\}$ komşuluğunda $h(\tau,1)=\sum\limits_{\upsilon\geq\upsilon_0} b_\upsilon e^{2\pi i\tau\upsilon}$.

Eğer $\omega_2^{-k} f\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)$ bir homojen modüler form tanımlıyor ise o zaman değişkeni kompleks τ olan f fonksiyonuna, inhomojen modüler form denir.

Özel olarak, $h(\tau,1)$ ın inhomojen modüler formdur. Çünkü $h(\omega_1,\omega_2)$ homojen modüler fonksiyon olduğundan $h(\omega_1,\omega_2)=h\left(\omega_2.\frac{\omega_1}{\omega_2},\omega_2.1\right)=\omega_2^{-k}h\left(\frac{\omega_1}{\omega_2},1\right)=$ $\omega_2^{-k}h(\tau,1)$ çıkar. Bu ise $h(\tau,1)$ inhomojen modüler fonksiyon olduğunu gösterir. $\tau \to A(\tau)=\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}$ modüler dönüşümü altında inhomojen f modüler formunun durumu a) ve b) koşullarından şöyle çıkar :

$$\omega_2^{-k} f\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) = (c\omega_1 + d\omega_2)^{-k} f\left(\frac{a\omega_1 + b\omega_2}{c\omega_1 + d\omega_2}\right)$$ (b) koşulundan) ve

$$\omega_2^{-k} f\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) = \omega_2^{-k}\left[\left(c\frac{\omega_1}{\omega_2} + d\right)^{-k} f\left(\frac{a\frac{\omega_1}{\omega_2} + b}{c\frac{\omega_1}{\omega_2} + d}\right)\right]$$ (a) koşulundan) olur. Buradan,

$$f(\tau) = (c\tau + d)^{-k} f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)$$ ve

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^{k} f(\tau) \tag{2.14}$$

çıkar. Karşıt olarak, eğer $h(\omega_1,\omega_2) = \omega_2^{-k} f\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)$ ise (2.14) ün bir sonucu olarak b) şöyle elde edilir :

$$h(a\omega_1 + b\omega_2, c\omega_1 + d\omega_2) = (c\omega_1 + d\omega_2)^{-k} f\left(\frac{a\omega_1 + b\omega_2}{c\omega_1 + d\omega_2}\right) = \omega_2^{-k}\left[(c\tau + d)^{-k} f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)\right]$$

olur. (2.14) ü kullanarak

$h(a\omega_1 + b\omega_2, c\omega_1 + d\omega_2) = \omega_2^{-k} f(\tau) = \omega_2^{-k} f\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) = h(\omega_1,\omega_2)$ bulunur. a) ise

$h(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = (\lambda\omega_2)^{-k} f\left(\frac{\lambda\omega_1}{\lambda\omega_2}\right) = \lambda^{-k} h(\omega_1,\omega_2)$ şeklinde çıkar.

$k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\mathscr{H}$ üzerinde keyfi f fonksiyonları için ve $|A| = ad - bc > 0$ koşuluyla keyfi reel $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ için $f|_k A$ fonksiyonlarını

$(f|_k A)(\tau) = |A|^{1/2} (c\tau + d)^{-k} f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)$ şeklinde tanımlayalım. $A \in \Gamma$ olmak üzere (2.14) denklemini şu formda elde ederiz : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ olmak üzere ,

$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d) f(\tau)$ dan $(f|_k A)(\tau) = |A|^{1/2} (c\tau + d)^{-k} (c\tau + d) f(\tau) = |A|^{1/2} f(\tau)$ olur. $A \in \Gamma$ ise $|A| = ad - bc = 1$ ve $|A|^{1/2} = 1$ den (2.14) denklemini $(f|_k A)(\tau) = f(\tau)$ olarak elde ederiz. Determinantları pozitif olan reel A,B matrisleri için $\left(f|_k A\right)\big|_k B = f|_k(AB)$ olduğunu gösterelim. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d'\end{pmatrix}$ ve $|A|,|B|>0$ olsun. Buna göre,

$$\left(\left(f|_k A\right)\big|_k B\right)(\tau)=|B|^{1/2}(c'\tau+d')^{-k}\left(f|_k A\right)\left(\frac{a'\tau+b'}{c'\tau+d'}\right)$$

$$=|B|^{1/2}(c'\tau+d')^{-k}|A|^{1/2}\left(c.\frac{a'\tau+b'}{c'\tau+d'}+d\right)^{-k} f\left(\frac{a\dfrac{a'\tau+b'}{c'\tau+d'}+b}{c\dfrac{a'\tau+b'}{c'\tau+d'}+d}\right)$$

olur. İşleme devam edelim ;

$$\left(\left(f|_k A\right)\big|_k B\right)(\tau)=|A|^{1/2}|B|^{1/2}\left((ca'+dc')\tau+cb'+dd'\right)^{-k} f\left(\frac{(aa'+bc')\tau+ab'+bd'}{(ca'+dc')\tau+cb'+dd'}\right)$$

olur. $|A||B|=|AB|$ olduğunu gösterelim.

$$AB=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd'\end{pmatrix} \text{ den}$$

$$|AB|=(aa'+bc')(cb'+dd')-(ca'+dc')(ab'+bd')$$

$$|AB|=ad(a'd'-b'c')+bc(b'c'-a'd')=ad(a'd'-b'c')-bc(a'd'-b'c')=(ad-bc)(a'd'-b'c')$$

çıkar. $|A|=ad-bc$, $|B|=a'd'-b'c' \Rightarrow |A||B|=(ad-bc)(a'd'-b'c')=|AB|$ bulunur.

Buradan $\left(|A|.|B|\right)^{1/2}=|A|^{1/2}|B|^{1/2}=|AB|^{1/2}$ bulunur. Böylece ;

$$\left(\left(f|_k A\right)\big|_k B\right)(\tau)=|AB|^{1/2}\left((ca'\tau+cb')\tau+dc'\tau+dd'\right)^{-k} f\left(\frac{(aa'+bc')\tau+ab'+bd'}{(ca'+dc')\tau+cb'+dd'}\right)$$

çıkar. Ayrıca, yine tanımdan

$$\left(f|_k(AB)\right)(\tau)=|AB|^{1/2}\left((ca'+dc')\tau+cb'+dd'\right)^{-k} f\left(\frac{(aa'+bc')\tau+ab'+bd'}{(ca'+dc')\tau+cb'+dd'}\right)$$

çıkar. Görüldüğü gibi $\left(\left(f|_k A\right)\Big|_k B\right)(\tau) = \left(f|_k (AB)\right)(\tau)$ olur. Dolayısıyla bu eşitlik eğer üreteçler için doğru ise (2.14) eşitliği her $A \in \Gamma$ için gerçekleşir. Çünkü her $A \in \Gamma$ matrisini U ve T cinsinden çarpımsal olarak ifade edebiliyoruz. Örneğin, $A = U^{\alpha_1} T^{\beta_1} \ldots U^{\alpha_n} T^{\beta_n}$ şeklinde ifade edilsin. $\left(\left(f|_k T\right)\Big|_k U\right)(\tau) = \left(f|_k (TU)\right)(\tau) = \left(f|_k R\right)(\tau)$ olur. T ve R de üreteçler olduğundan $\left(\left(f|_k T\right)\Big|_k R\right)(\tau) = \left(f|_k (TR)\right)(\tau) = \left(f|_k TTU\right)(\tau) = \left(f|_k T^2 U\right)(\tau)$ çıkar. T^2U ve U da üreteç olduklarından

$\left(\left(f|_k T^2 U\right)\Big|_k U\right)(\tau) = \left(f|_k (T^2 UU)\right) = \left(f|_k (T^2 U^2)\right)(\tau)$ çıkar. Bu şekilde devam ederek

$$\left(\left(f|_k U^{\alpha_1} T^{\beta_1} \ldots U^{\alpha_n} T^{\beta_n^{-1}}\right)\Bigg|_k T\right)(\tau) = \left(f|_k (U^{\alpha_1} T^{\beta_1} \ldots U^{\alpha_n} T^{\beta_n})\right)(\tau) = \left(f|_k A\right)(\tau)$$

bulunur.

$\left(f|_k A\right)(\tau) = f(\tau)$ ve $\left(f|_k A\right)(\tau) = 1^{1/2}(c\tau + d)^{-k} f\left(\dfrac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)$ dan $f(\tau) = (c\tau + d)^{-k} f\left(\dfrac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)$ şeklinde (2.14) denklemi gerçekleşmiş olur.

Homojen ve inhomojen modüler tanımlar için tanımlanmış özelliklerin bir sonucu olarak aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 9: Aynı boyutlu modüler formlar $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı oluşturur. Modüler formların bir çarpımının boyutu onların boyutlarının toplamıdır. Aynı boyutlu iki modüler formun bölümü, eğer payda 0-fonksiyon değilse, o boyutlu bir modüler formdur ve eğer rasyonel noktalardaki değerler uygun seçilirse bir modüler fonksiyon olur.

$h_1, h_2, \ldots, h_m$ ler sırasıyla $-k_1, -k_2, \ldots, -k_m$ boyutlu modüler formlar olsun. $h_1 . h_2 . \ldots . h_m = h$ diyelim.

$$h_1(\omega_1, \omega_2) = \lambda^{k_1} h_1(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2),\ h_2(\omega_1, \omega_2) = \lambda^{k_2} h_2(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2), \ldots, h_m(\omega_1, \omega_2) = \lambda^{k_m} h_m(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2)$$

olur. Buradan

$$h_1(\omega_1,\omega_2)h_2(\omega_1,\omega_2)\dots h_m(\omega_1,\omega_2)=\lambda^{k_1}h_1(\lambda\omega_1,\lambda\omega_2)\lambda^{k_2}h_2(\lambda\omega_1,\lambda\omega_2)\dots\lambda^{k_m}h_m(\lambda\omega_1,\lambda\omega_2)$$

$$\Rightarrow h_1.h_2\dots h_m=h=\lambda^{(k_1+k_2\dots+k_m)}h_1(\lambda\omega_1,\lambda\omega_2)h_2(\lambda\omega_1,\lambda\omega_2)\dots h_m(\lambda\omega_1,\lambda\omega_2)$$

$$=\lambda^{(k_1+k_2\dots+k_m)}h(\lambda\omega_1,\lambda\omega_2) \quad \text{ve} \quad h(\omega_1,\omega_2)=\lambda^{(k_1+k_2\dots+k_m)}h(\lambda\omega_1,\lambda\omega_2) \quad \text{ve}$$

$h(\lambda\omega_1,\lambda\omega_2)=\lambda^{-(k_1+k_2\dots+k_m)}h(\omega_1,\omega_2)$ bulunur. Bu ise modüler formların bir çarpımının boyutunun onların boyutlarının toplamı olduğunu gösterir.

Şimdiye kadar modüler formların varlığı hakkında hiç bir şey söylemedik. Aşağıdaki teoremi ispatlayalım :

Teorem 10 : 0-fonksiyonun dışında tek boyutlu modüler form yoktur.

İspat: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \Gamma$ olduğundan

$h((-1)\omega_1+0.\omega_2,0.\omega_1+(-1).\omega_2)=h(-\omega_1,-\omega_2)=h(\omega_1,\omega_2)$ dir. Aynı zamanda $h(-\omega_1,-\omega_2)=(-1)^{-k}h(\omega_1,\omega_2)$ dir. Buradan $\frac{1}{(-1)^k}h(\omega_1,\omega_2)=h(\omega_1,\omega_2)$ çıkar. Bu durumda ya h=0 ya da k çift olmalıdır. Sonuçta k tek olduğu zaman h=0 olmak zorunda olduğundan 0-fonksiyonun dışında tek boyutlu modüler form yoktur.

2.4.2.Kuvvet Serilerine Açılımlar

$c\neq 0$, $(c,d)=1$ olmak üzere $r=-\frac{d}{c}$ bir rasyonel nokta olsun ve ad-bc=1 olacak şekilde a ve b seçelim. Modüler formların tanımındaki d) şıkkında $\alpha>0$ olmak üzere $\operatorname{Im}\tau>\alpha$ için $h(\tau,1)=\sum\limits_{\upsilon\geq\upsilon_0} b_\upsilon e^{2\pi i\tau\upsilon}$ idi. $h(\tau,1)=f(\tau)$ dersek $f(\tau)=\sum\limits_{\upsilon\geq\upsilon_0} b_\upsilon e^{2\pi i\tau\upsilon}$ olur. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\Gamma$ ve yeterince büyük $\operatorname{Im}\frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ için $\left(\text{yani } \operatorname{Im}\frac{a\tau+b}{c\tau+d}>\alpha>0 \text{ için}\right)$

$f(\tau)=f(A(\tau))=f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=\sum_{\upsilon\geq\upsilon_0}b_\upsilon e^{2\pi i\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)\upsilon}$ elde ederiz. (2.14) formülünden

$(c\tau+d)^k f(\tau)=\sum_{\upsilon\geq\upsilon_0}b_\upsilon e^{2\pi i\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)\upsilon}$ çıkar. Buradan

$c^k\left(\tau+\frac{d}{c}\right)^k f(\tau)=\sum_{\upsilon\geq\upsilon_0}b_\upsilon e^{2\pi i\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)\upsilon}$ ve $\frac{d}{c}=-r$ olduğundan

$$c^k(\tau-r)^k f(\tau)=\sum_{\upsilon\geq\upsilon_0}b_\upsilon e^{2\pi i\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)\upsilon} \tag{2.15}$$

açılımını elde ederiz. Eğer $\tau_0\in\mathscr{H}$ keyfi bir nokta ise, o zaman

$$(\tau-\bar{\tau}_0)^k f(\tau)=\sum_{\upsilon\geq\upsilon_0}a_\upsilon\left(\frac{\tau-\tau_0}{\tau-\bar{\tau}_0}\right)^\upsilon$$

açılımıyla başlarız ve, bu, τ_0 ın bir komşuluğunda doğrudur. Özel olarak, $\tau_0=\tau_\rho$ nun 3 mertebeli $\overline{R}_1:\tau\to\tau'=R_1(\tau)=\frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ dönüşümünün bir sabit noktası olduğunu kabul edelim ve bunu yukarıdaki denklemin her iki tarafina uygulayalım. $\tau_0=\tau_\rho$ iken $(\tau-\bar{\tau}_\rho)^k f(\tau)=\sum_{\upsilon\geq\upsilon_0}a_\upsilon\left(\frac{\tau-\tau_\rho}{\tau-\bar{\tau}_\rho}\right)^\upsilon$ olur. $R_1(\tau)=\tau'$ iken

$R_1(\tau_0)=\tau_0'$ ve $\tau_0'=\tau_\rho'$ den $(\tau'-\bar{\tau}_\rho')^k f(\tau')=\sum_{\upsilon\geq\upsilon_0}a_\upsilon\left(\frac{\tau'-\tau_\rho'}{\tau'-\bar{\tau}_\rho'}\right)^\upsilon$ elde ederiz. (2.7) den dolayı

$\tau'-\bar{\tau}_\rho'=\frac{\tau-\bar{\tau}_\rho}{(c\tau+d)(c\bar{\tau}_\rho+d)}$ ve $\frac{\tau'-\tau_\rho'}{\tau'-\bar{\tau}_\rho'}=\frac{c\bar{\tau}_\rho+d}{c\tau_\rho+d}\frac{\tau-\tau_\rho}{\tau-\bar{\tau}_\rho}$ olur. Bu durumda

$\left(\frac{\tau-\bar{\tau}_\rho}{(c\tau+d)(c\bar{\tau}_\rho+d)}\right)^k f(\tau')=\sum_{\upsilon\geq\upsilon_0}a_\upsilon\left(\frac{c\bar{\tau}_\rho+d}{c\tau_\rho+d}\frac{\tau-\tau_\rho}{\tau-\bar{\tau}_\rho}\right)^\upsilon$ olur. $\tau'=\frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ olduğundan

$$\frac{1}{(c\tau+d)^k}(c\bar{\tau}_\rho+d)^{-k}(\tau-\bar{\tau}_\rho)^k f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=\sum_{\upsilon\geq\upsilon_0}a_\upsilon\left(\frac{c\bar{\tau}_\rho+d}{c\tau_\rho+d}\right)^\upsilon\left(\frac{\tau-\tau_\rho}{\tau-\bar{\tau}_\rho}\right)^\upsilon$$

olur. (2.14) den dolayı

$$\frac{1}{(c\tau+d)^k}(c\bar{\tau}_\rho+d)^{-k}(\tau-\bar{\tau}_\rho)^k(c\tau+d)^k f(\tau)=\sum_{\upsilon\geq\upsilon_0}a_\upsilon\left(\frac{c\bar{\tau}_\rho+d}{c\tau_\rho+d}\right)^\upsilon\left(\frac{\tau-\tau_\rho}{\tau-\bar{\tau}_\rho}\right)^\upsilon \text{ ve}$$

$(c\bar{\tau}_\rho+d)^{-k}(\tau-\bar{\tau}_\rho)^k f(\tau)=\sum_{\upsilon\geq\upsilon_0}a_\upsilon\left(\frac{c\bar{\tau}_\rho+d}{c\tau_\rho+d}\right)^\upsilon\left(\frac{\tau-\tau_\rho}{\tau-\bar{\tau}_\rho}\right)^\upsilon$ elde edilir. Ayrıca $\lambda_1=\pm\rho^{\pm 1}$ ve $\lambda=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ olmak üzere (1.9) dan dolayı $(\tau-\bar{\tau}_\rho)^k f(\tau)=\sum_{\upsilon\geq\upsilon_0}a_\upsilon\lambda^{\upsilon-k}\left(\frac{\tau-\tau_\rho}{\tau-\bar{\tau}_\rho}\right)^\upsilon$ olduğunu gösterelim: Burada (1.9) eşitlikleri υ=1,2 olmak üzere $\lambda_\upsilon=a+\frac{b}{\tau_\upsilon}$ ve $\lambda_\upsilon=c\tau_\upsilon+d$ şeklini alır. $\lambda_\upsilon=c\tau_\upsilon+d$ eşitliğini kullanalım. $\lambda_1=c\tau_1+d$ ve $\lambda_2=c\tau_2+d$ olur. Ayrıca $\tau_1=\tau_\rho$, $\tau_2=\bar{\tau}_\rho$ alalım. $\lambda=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{c\bar{\tau}_\rho+d}{c\tau_\rho+d}$ olduğundan

$\lambda_2^{-k}(\tau-\bar{\tau}_\rho)^k f(\tau)=\sum_{\upsilon\geq\upsilon_0}a_\upsilon\lambda^\upsilon\left(\frac{\tau-\tau_\rho}{\tau-\bar{\tau}_\rho}\right)^\upsilon$ olur. Buradan

$(\tau-\bar{\tau}_\rho)^k f(\tau)=\sum_{\upsilon\geq\upsilon_0}a_\upsilon\lambda^\upsilon\lambda_2^k\left(\frac{\tau-\tau_\rho}{\tau-\bar{\tau}_\rho}\right)^\upsilon$ olur. $\lambda_1=\pm\rho^{\pm 1}$ verildiğinden $\lambda_1=\rho$ seçersek $\lambda_1^3=\rho^3=1$ den λ_1^{-3k}=1 olur. Dolayısıyla $(\tau-\bar{\tau}_\rho)^k f(\tau)=\sum_{\upsilon\geq\upsilon_0}a_\upsilon\lambda^\upsilon\frac{\lambda_2^k}{\lambda_1^{-3k}}\left(\frac{\tau-\tau_\rho}{\tau-\bar{\tau}_\rho}\right)^\upsilon$ yazabiliriz. Böylece

$$(\tau-\bar{\tau}_\rho)^k f(\tau)=\sum_{\upsilon\geq\upsilon_0}a_\upsilon\lambda^\upsilon\left(\frac{\lambda_2^{-1}}{\lambda_1^3}\right)^{-k}\left(\frac{\tau-\tau_\rho}{\tau-\bar{\tau}_\rho}\right)^\upsilon=\sum_{\upsilon\geq\upsilon_0}a_\upsilon\lambda^\upsilon\left(\frac{\lambda_2^{-1}\lambda_1^{-2}}{\lambda_1}\right)^{-k}\left(\frac{\tau-\tau_\rho}{\tau-\bar{\tau}_\rho}\right)^\upsilon \text{ olur.}$$

$\lambda_1\lambda_2=1$ olduğundan $\lambda_2=\lambda_1^{-1}$ ve $\lambda_2^2=\lambda_1^{-2}$ olur. Bu durumda

$$(\tau-\bar{\tau}_\rho)^k f(\tau)=\sum_{\upsilon\geq\upsilon_0} a_\upsilon\lambda^\upsilon\left(\frac{\lambda_2^{-1}\lambda_2^2}{\lambda_1}\right)^{-k}\left(\frac{\tau-\tau_\rho}{\tau-\bar{\tau}_\rho}\right)^\upsilon=\sum_{\upsilon\geq\upsilon_0} a_\upsilon\lambda^\upsilon\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{-k}\left(\frac{\tau-\tau_\rho}{\tau-\bar{\tau}_\rho}\right)^\upsilon=$$

$\sum_{\upsilon\geq\upsilon_0} a_\upsilon\lambda^\upsilon\lambda^{-k}\left(\frac{\tau-\tau_\rho}{\tau-\bar{\tau}_\rho}\right)^\upsilon$. Böylece $(\tau-\bar{\tau}_\rho)^k f(\tau)=\sum_{\upsilon\geq\upsilon_0} a_\upsilon\lambda^{\upsilon-k}\left(\frac{\tau-\tau_\rho}{\tau-\bar{\tau}_\rho}\right)^\upsilon$ elde edilir.

Diğer taraftan $(\tau-\bar{\tau}_\rho)^k f(\tau)=\sum_{\upsilon\geq\upsilon_0} a_\upsilon\left(\frac{\tau-\tau_\rho}{\tau-\bar{\tau}_\rho}\right)^\upsilon$ olduğundan

$\sum_{\upsilon\geq\upsilon_0} a_\upsilon\left(\frac{\tau-\tau_\rho}{\tau-\bar{\tau}_\rho}\right)^\upsilon=\sum_{\upsilon\geq\upsilon_0} a_\upsilon\lambda^{\upsilon-k}\left(\frac{\tau-\tau_\rho}{\tau-\bar{\tau}_\rho}\right)^\upsilon$ olur. Bu ise $a_\upsilon=a_\upsilon\lambda^{\upsilon-k}$ olmasını gerektirir.

Eğer $\upsilon-k\equiv 0 \bmod 3$ ise $\lambda^{\upsilon-k}=1$ olur.Bu durumda $a_\upsilon=a_\upsilon$ olur. Eğer $\upsilon-k\not\equiv 0 \bmod 3$ yani $\upsilon\not\equiv k \bmod 3$ ise $\lambda^{\upsilon-k}\neq 1$ olacağından $a_\upsilon=a_\upsilon\lambda^{\upsilon-k}$ olması için $a_\upsilon=0$ olmak zorundadır. Yerel değişken $t_{\tau_\rho}=\left(\frac{\tau-\tau_\rho}{\tau-\bar{\tau}_\rho}\right)^3$ ün terimleri ile $(\tau-\bar{\tau}_\rho)f(\tau)=\sum_{\upsilon\geq\upsilon_0} a_\upsilon\lambda^{\upsilon-k}\left(t_{\tau_\rho}^{1/3}\right)^\upsilon=\sum_{\upsilon\geq\upsilon_0} a_\upsilon\lambda^{\upsilon-k}\left(t_{\tau_\rho}\right)^{\upsilon/3}$ olur. $0\leq k_3<3$ iken $k\equiv k_3 \bmod 3$ olmak üzere $(\tau-\bar{\tau}_\rho)^k f(\tau)=\sum_{\upsilon\geq\upsilon_3} c_\upsilon\left(t_{\tau_\rho}\right)^{\upsilon+\frac{k}{3}}$ elde ederiz. Benzer şekilde $t_{\tau_i}=\left(\frac{\tau-\tau_i}{\tau-\bar{\tau}_i}\right)^2$ ve $\lambda=-1$ ile Γ altında i ye denk olan τ_i de, $0\leq k_2<2$ iken $k_2\equiv\frac{k}{2} \bmod 2$ olmak üzere $(\tau-\bar{\tau}_\rho)^k f(\tau)=\sum_{\upsilon\geq\upsilon_2} d_\upsilon\left(t_{\tau_i}\right)^{\upsilon+\frac{k_2}{2}}$ açılımını elde ederiz.

Daha önce 2.1.3 de yapıldığı gibi yukarıda kullanılan yerel değişkeni $t_{\tilde{\tau}}$ ile gösterirsek, tüm $\tilde{\tau}\in\mathscr{H}^*$ lar için düzgün bir gösteriş elde ederiz. Dolayısıyla aşağıdaki teoremi formüle edebiliriz.

Teorem 11: Eğer f, -k boyutlu bir modüler form ve $\tilde{\tau}\in\mathscr{H}^*$ ise o taktirde $\tilde{\tau}$ nun bir komşuluğunda

$$(\tau-\bar{\tilde{\tau}})^k f(\tau)=\sum_{\upsilon\geq\tilde{\upsilon}} a_\upsilon t_{\tilde{\tau}}^{\upsilon+\tilde{K}} \qquad (2.16)$$

elde ederiz. Burada $\tilde{K}$, $\tilde{\tau}$, i veya ρ ya denk olduğu zaman $\frac{k}{4}$ veya $\frac{k}{3}$ ün mod 1 e göre negatif olmayan en küçük kalanıdır, aksi taktirde $\tilde{K}$ sıfırdır. Eğer $\tilde{\tau}=i\infty$ ise $(\tau-\tilde{\tau})^k$ çarpanı alınmaz. Gerçekten de, eğer $\tilde{\tau}$ nun ρ ya denk olduğunu kabul edersek $(\tau-\tilde{\tau})f(\tau)=\sum_{\upsilon\geq\tilde{\upsilon}} a_\upsilon t_{\tilde{\tau}}^{\upsilon+\tilde{K}}$ dan $(\tau-\tilde{\tau}_\rho)f(\tau)=\sum_{\upsilon\geq\upsilon_3} c_\upsilon t_{\tau_\rho}^{\upsilon+\frac{k}{3}}$ olur. Burada $\tilde{\upsilon}=\upsilon_3, \tilde{K}=\frac{k_3}{3}$ ve $\tilde{\tau}=\tau_\rho$ olur. Ayrıca $k_3\equiv k \bmod 3$ ve $0\leq k_3<3$ idi. Bu durumda $3|k-k_3$ olur ve $\frac{k-k_3}{3}=a$ olacak şekilde $a\in\mathbb{Z}$ vardır. Buradan $\frac{k}{3}=a.1+\frac{k_3}{3}$ mod 1 ve dolayısıyla $\frac{k}{3}\equiv\frac{k_3}{3}$ mod 1 olur. Sonuçta $\frac{k}{3}\equiv\tilde{K} \bmod 1$ olduğu görülür. Ayrıca $0\leq k_3<3$ olduğundan $\tilde{K}=\frac{0}{3}, \frac{1}{3}$ veya $\frac{2}{3}$ dür. Eğer $\tilde{\tau}$, i ye denk ise $(\tau-\tilde{\tau}_i)f(\tau)=\sum_{\upsilon\geq\upsilon_2} d_\upsilon\left(t_{\tau_i}\right)^{\upsilon+\frac{k_2}{2}}$ ve $k_2\equiv\frac{k}{2}$ mod 2, $0\leq k_2<2$ den aynı şekilde $\frac{k}{4}\equiv\frac{k_2}{2}$ (mod 1) dolayısıyla $\frac{k}{4}\equiv\tilde{K}$(mod 1) olduğu görülür. Bu durumda $\tilde{K}=\frac{0}{2}$ veya $\frac{1}{2}$ dir. Eğer $\tilde{\tau}$, i veya ρ ya denk değil ise $\tilde{\tau}=\tau_0\in\mathscr{H}^*$ olur. Bu durumda $(\tau-\tilde{\tau}_0)f(\tau)=\sum_{\upsilon\geq\upsilon_0} a_\upsilon\left(t_{\tau_0}\right)^{\upsilon+\tilde{K}}$ olur. Ayrıca, $(\tau-\tilde{\tau}_0)f(\tau)=\sum_{\upsilon\geq\upsilon_0} a_\upsilon\left(t_{\tau_0}\right)^{\upsilon}$ idi. Bu ise $\tilde{K}=0$ olmasını gerektirir.

2.4.3.Sıfırlar ve Kutuplar

Eğer (2.16) daki $a_{\tilde{\upsilon}}$ katsayısı sıfırdan farklı ve $\tilde{\upsilon}\geq 0$ ise o zaman f in $\tilde{\tau}$ da $\tilde{\upsilon}+\tilde{K}$ mertebeli bir sıfıra sahip olduğuu söyleriz. Çünkü $\tilde{\tau}$ da $t_{\tilde{\tau}}=0$ dır. Eğer $\tilde{\upsilon}<0$ ise f in $\tilde{\tau}$ da $-(\tilde{\upsilon}+\tilde{k})$ mertebeli bir kutbu olduğunu söyleriz. Çünkü negatif kuvvetler için $t_{\tilde{\tau}}=\infty$ dur. Bu mertebeler için aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 12: Bir modüler form, denk noktalarda aynı mertebeli sıfırlara ve kutuplara sahiptir.

İspat : Önce rasyonel noktalar için teoremi ispatlayalım. Bunun için (2.15) denklemini kullanacağız. (2.15) denklemi $c^k(\tau-r)^k f(\tau)=\sum_{\upsilon\geq\upsilon_0} b_\upsilon e^{2\pi i\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\upsilon}$ şeklinde idi. Modüler fonksiyonların tanımından dolayı $b_{\upsilon_0} \neq 0$ dır. İlk olarak $\upsilon \geq 0$ kabul edelim. $r = -\frac{d}{c}$ rasyonel noktası için $\left(e^{2\pi i \frac{a(-d/c)+b}{c(-d/c)+d}}\right)^{\upsilon} = \left(e^{\frac{2\pi i}{0}}\right)^{\upsilon} = e^{-\infty\upsilon} = e^{-\infty} = 0$ olduğundan biraz önceki tanımdan dolayı f in tüm rasyonel noktalarda aynı mertebeli sıfırlara sahip olduğunu söyleriz. Eğer $\upsilon < 0$ olsaydı $e^{-\infty\upsilon} = e^{\infty} = \infty$ olacağından f bu kez rasyonel noktalarda aynı mertebeli kutuplara sahip olurdu. Yukarıda sözü edilen $\tilde{\tau}$ burada $-\frac{d}{c}$ dir. $-\frac{d}{c}$, i veya ρ ya denk olmadığından $\tilde{K} = 0$ dır. Dolayısıyla eğer $\upsilon \geq 0$ ise f, $\tilde{\upsilon} = \upsilon_0$ mertebeli sıfıra, $\upsilon < 0$ ise f, $-(\tilde{\upsilon}) = -\upsilon_0$ mertebeli kutba sahiptir. Bu kez $\tau_0 \in \mathscr{H}$ herhangi bir nokta olsun. (2.6) denklemlerinde f(τ) ve f(τ') yerine $(\tau - \bar{\bar{\tau}})f(\tau)$ ve $(\tau' - \bar{\bar{\tau}}')^k f(\tau')$ alalım. Böylece $(\tau - \bar{\bar{\tau}})^k f(\tau) = \sum_{\upsilon \geq \upsilon_0} a_\upsilon \left(\frac{\tau - \tau_0}{\tau - \bar{\tau}_0}\right)^{\upsilon}$ ve $(\tau' - \bar{\bar{\tau}}')^k f(\tau') = \sum_{\upsilon \geq \tilde{\upsilon}_0'} a'_\upsilon \left(\frac{\tau' - \tau_0'}{\tau' - \bar{\tau}_0'}\right)^{\upsilon}$ olur. f modüler fonksiyon olduğundan $a_{\upsilon_0}, a'_{\upsilon_0'} \neq 0$ dır.

Eğer $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ ve $\tau' = S(\tau)$, $\tau_0' = S(\tau_0)$ ise $\tau' - \tau_0' = \frac{\tau - \tau_0}{(c\tau + d)(c\tau_0 + d)}$ ve

$\frac{\tau' - \tau_0'}{\tau' - \bar{\tau}_0'} = \frac{c\bar{\tau}_0 + d}{c\tau_0 + d} \cdot \frac{\tau - \tau_0}{\tau - \bar{\tau}_0}$ olacağından f in değişmezliği $\upsilon \geq \upsilon_0 = \upsilon_0'$ için

$$\sum_{\upsilon \geq \upsilon_0 = \upsilon_0'} (\tau - \bar{\bar{\tau}})^{-k} a_\upsilon \left(\frac{\tau - \tau_0}{\tau - \bar{\tau}_0}\right)^{\upsilon} = \sum_{\upsilon \geq \upsilon_0' = \upsilon_0} (\tau' - \bar{\bar{\tau}}')^{-k} a'_\upsilon \left(\frac{c\bar{\tau}_0 + d}{c\tau_0 + d}\right)^{\upsilon} \left(\frac{\tau - \tau_0}{\tau - \bar{\tau}_0}\right)^{\upsilon} \text{ olmasını}$$

gerektirir. Buradan $(\tau - \bar{\bar{\tau}})^{-k} a_\upsilon = (\tau' - \bar{\bar{\tau}}')^{-k} a'_\upsilon \left(\frac{c\bar{\tau}_0 + d}{c\tau_0 + d}\right)$ çıkar. $a_\upsilon = a'_\upsilon \left(\frac{c\bar{\tau}_0 + d}{c\tau_0 + d}\right)$ olduğundan $(\tau - \bar{\bar{\tau}})^{-k} = (\tau' - \bar{\bar{\tau}}')^{-k}$ bulunur. Bu ise denk noktalarda f modüler formunun aynı mertebeli sıfır ve kutuplara sahip olduğunu gösterir.

$0 \neq k$ boyutlu bir modüler formun $c \neq 0, \infty$ olan c-noktalarını gözönüne almak kullanışlı değildir. Çünkü bu noktalar $\bar{\Gamma}$ altında değişmez değildirler.

Şimdi Teorem 2 ye benzer olarak modüler formlar için bir teorem ispatlamak istiyoruz. Denk olmayan sıfırların bir maksimal sistemi üzerinde sıfırların mertebelerinin (doğal olarak sonlu) toplamı olarak toplam sıfır mertebeyi N(0) ile ve kutupların mertebelerinin toplamı olarak buna karşılık gelen toplam kutup mertebeyi N(∞) ile gösterelim. Şimdi teoremi verelim.

Teorem 13: -k boyutlu bir modüler form için toplam sıfır mertebe ve toplam kutup mertebesinin farkı

$$N(0)-N(\infty)=\frac{k}{12}. \tag{2.17}$$

dir. İlk olarak aşağıdaki işlemleri yapalım $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=S\in\Gamma$ olmak üzere -k boyutlu bir modüler formun $f\left(\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=(c\tau+d)^k f(\tau)$ dönüşüm formülünde eğer $\tau'=S(\tau)$ olursa, τ ya göre

$$\frac{df(\tau')}{d\tau'}\frac{d\tau'}{d\tau}=kc(c\tau+d)^{k-1}f(\tau)+(c\tau+d)^k f'(\tau) \tag{2.18}$$

üst diferansiyellemesini elde ederiz. Buradan

$\dfrac{df(\tau')}{d\tau'}=\left(kc(c\tau+d)^{k-1}f(\tau)+(c\tau+d)^k f'(\tau)\right)\dfrac{d\tau}{d\tau'}$ olur. $\tau'=S(\tau)$ olduğundan $\tau'=\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}$ olur. Her iki tarafın τ' ne göre türevlerini alarak $\dfrac{d\tau}{d\tau'}$ nün değerini bulalım.

$$1=\frac{a\dfrac{d\tau}{d\tau'}(c\tau+d)-(a\tau+b)c\dfrac{d\tau}{d\tau'}}{(c\tau+d)^2}\Rightarrow\frac{d\tau}{d\tau'}\left[ac\tau+ad-ac\tau-bc\right]=(c\tau+d)^2 \text{ den}$$

$\dfrac{d\tau}{d\tau'}=(c\tau+d)^2$ bulunur. Bunu yukarıdaki eşitlikte yerine yazalım.

$$\frac{df(\tau')}{d\tau'}=\left(kc(c\tau+d)^{k-1}f(\tau)+(c\tau+d)^k f'(\tau)\right)(c\tau+d)^2=kc(c\tau+d)^{k+1}f(\tau)+(c\tau+d)^{k+2}f'(\tau)$$

olur. $f(\tau')=(c\tau+d)^k f(\tau)$ olduğundan

$\dfrac{df(\tau')}{d\tau'}.\dfrac{1}{f(\tau')}=\dfrac{1}{(c\tau+d)^k f(\tau)}\left(kc(c\tau+d)^{k+1}f(\tau)+(c\tau+d)^{k+2}f'(\tau)\right)$. Buradan

$\dfrac{f'(\tau')}{f(\tau')}=kc(c\tau+d)+(c\tau+d)^2\dfrac{f'(\tau)}{f(\tau)}$ bulunur. Böylece f in sıfırları ve kutuplarından

geçmeyen keyfi bir $\omega \subset \mathscr{H}$ yolu için, $\dfrac{f'(\tau')}{f(\tau')(c\tau+d)^2}=\dfrac{kc}{(c\tau+d)}+\dfrac{f'(\tau)}{f(\tau)}$ ve $(c\tau+d)^2=\dfrac{d\tau}{d\tau'}$

den $\dfrac{f'(\tau')}{f(\tau')\dfrac{d\tau}{d\tau'}}=\dfrac{kc}{(c\tau+d)}+\dfrac{f'(\tau)}{f(\tau)}$ olur. Buradan $\dfrac{df(\tau')}{d\tau' f(\tau')\dfrac{d\tau}{d\tau'}}=\dfrac{df(\tau')}{f(\tau')d\tau}=\dfrac{kc}{c\tau+d}+\dfrac{f'(\tau)}{f(\tau)}$

çıkar. Her iki tarafı ω yolu üzerindeki τ ya göre integre edelim.

$\displaystyle\int_{\omega}\frac{df(\tau')}{f(\tau')d\tau}d\tau=\int_{\omega}\frac{kc}{c\tau+d}d\tau+\int_{\omega}\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau$ olur.

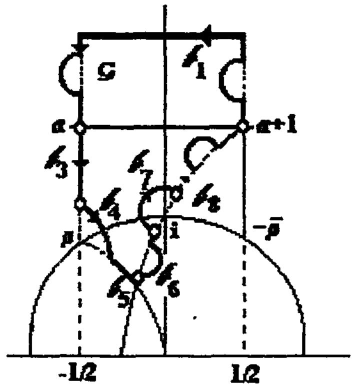
$S\in\Gamma$ olduğundan $f(S(\tau))=f(\tau')=f(\tau)$ dan dolayı

$\displaystyle\int_{\omega}\frac{df(\tau')}{f(\tau')d\tau}d\tau=\int_{S(\omega)}\frac{df(\tau)}{f(\tau)d\tau}d\tau=\int_{S(\omega)}\frac{f'(\tau)}{f(\tau)d\tau}d\tau$ olur. Sonuçta

$$\int_{S(\omega)}\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau=\int_{\omega}\frac{kc}{(c\tau+d)}d\tau+\int_{\omega}\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau \qquad (2.19)$$

elde ederiz.

Teoremin İspatı : Teorem 2 nin ispatında kullanılan Şekil 4 deki gibi ℓ yolunu seçelim. $f(\tau)$ nun -k boyutlu bir modüler form olduğunu ve $N_0(0)$ ve $N_0(\infty)$ sırasıyla ℓ eğrisi içindeki f in sıfırları ve kutuplarının sayısını gösterdiğini kabul edelim. O taktirde $N_0(0)-N_0(\infty)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\ell}\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau$ olur. Şimdi bu integrali ℓ_1 den ℓ_9 a olan yollar boyunca integrallerin toplamı olarak yazalım. ρ civarındaki ℓ_4 ve i civarındaki ℓ_7 dairesel yaylarının yarıçapları sıfıra gidecektir. Bu taktirde (2.19) kullanılarak ve



Şekil 9.

$R=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ den ℓ_5=-R(ℓ_3) olduğu gözönüne alınarak $\int_{\ell_3} + \int_{\ell_5} = -\int_{\ell_3} \frac{k d\tau}{\tau+1}$ olduğunu

gösterelim ve toplamın yakınsadığı değeri bulalım.

Önce -R(ℓ_3) $=\ell_5$ olduğunu gösterelim. $-R=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ ve $-R(\ell_3)=\dfrac{1}{-\ell_3-1}$ olur.

$0<r\in\mathbb{R}$ olmak üzere $\ell_3=[\alpha,\rho+ri]$ olur. ℓ_3 üzerindeki herhangibir nokta $\rho+ri$ ise

$$-R(\rho+ri)=\frac{-1}{-\rho+ri+1}=\frac{-1}{\frac{1}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+r\right)i}=\frac{-1\left(\frac{1}{2}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+r\right)i\right)}{\frac{1}{4}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+r\right)^2}=\frac{-\frac{1}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+r\right)i}{1+\sqrt{3}r+r^2}$$ böylece

$$-R(\ell_3)=\frac{-1}{2(1+\sqrt{3}r+r^2)}=\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+r}{1+\sqrt{3}r+r^2}\right)i$$ olur. Bu ise -R(ℓ_3) ün 2.bölgede olduğunu

gösterir. Ayrıca $|-R(\ell_3)|=\sqrt{\dfrac{1}{4(1+\sqrt{3}r+r^2)^2}+\dfrac{\frac{3}{4}+\sqrt{3}r+r^2}{\left(1+\sqrt{3}r+r^2\right)^2}}=\sqrt{\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\sqrt{3}r+r^2}{\left(1+\sqrt{3}r+r^2\right)^2}}$

den $\left|-R(\ell_3)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{3}r+r^2}} < 1$ olur. Dolayısıyla $-R(\ell_3)$ birim çemberinin içine düşer.

Ek olarak $1+\sqrt{3}r+r^2>1$ den $-\dfrac{1}{2} < \dfrac{-1}{2\left(1+\sqrt{3}r+r^2\right)}$ olduğu ve $\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}+r}{1+\sqrt{3}r+r^2} < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ olduğu

görülür. Tüm bu sonuçlar $-R(\ell_3)=\ell_5$ olduğunu gösterir. $\omega=\ell_3$ ve $S=-R$

olsun. (2.19) dan dolayı $\displaystyle\int_{-R(\ell_3)} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau = \int_{\ell_3} \frac{kc}{(c\tau+d)}d\tau + \int_{\ell_3} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau$ yazabiliriz.

$S=-R=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ise $\displaystyle\int_{-R(\ell_3)} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau = \int_{\ell_3} \frac{k(-1)}{(-1)\tau-1}d\tau + \int_{\ell_3} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau$ ve

$\displaystyle -\int_{-R(\ell_3)} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau + \int_{\ell_3} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau = -\int_{\ell_3} \frac{k}{\tau+1}d\tau$ olur. $\displaystyle -\int_{-R(\ell_3)} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau = \int_{R(\ell_3)} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau$ ve aynı

zamanda $R(\ell_3)=\ell_5$ olduğundan $\displaystyle\int_{\ell_5} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau + \int_{\ell_3} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau = -\int_{\ell_3} \frac{k}{\tau+1}d\tau$ çıkar. Böylece

$\displaystyle\int_{\ell_5} + \int_{\ell_3} = -k\left(\log(\tau+1)\Big|_{\ell_3}\right)$ olur. $r\to 0$ olmak üzere $\ell_3=[\alpha,\rho+ri]$ olduğundan

$\displaystyle\int_{\ell_5} + \int_{\ell_3} = \lim_{r\to 0} -k-\left(\log(\tau+1)\Big|_{\alpha}^{\rho+ri}\right)$ olur. Bu durumda

$\displaystyle\int_{\ell_5} + \int_{\ell_3} = \lim_{r\to 0} -k\,\log\frac{\rho+1+ri}{\alpha+1}$ den $\displaystyle\int_{\ell_5} + \int_{\ell_3} = -k\,\log\frac{\rho+1}{\alpha+1}$ bulunur. Şimdi yine

(2.19) kullanılarak ve $T=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dan $\ell_8=-T(\ell_6)$ olduğu gözönüne alarak $\displaystyle\int_{\ell_6} + \int_{\ell_8} = -k\int_{\ell_6}\frac{kd\tau}{\tau}$ olduğunu gösterelim ve toplamın yakınsadığı değeri bulalım: Önce $-T(\ell_6)=\ell_8$ olduğunu gösterelim. Bunun için $-T(\ell_6)=\ell_8$ olmak üzere $T(T(\tau))=\tau$

olduğundan ℓ_6 = T(ℓ_8) olduğunu göstermek yeterlidir. $\xi = m+ni$ ve $|\xi| \to 0$ olmak üzere $\ell_8 = [i+\xi, \alpha+1]$ olur.

$T(i+\xi) = \dfrac{-1}{i+\xi} = \dfrac{-1}{i+m+ni} = \dfrac{-1}{m+(n+1)i} = \dfrac{-[m-(n+1)i]}{m^2+(n+1)^2} = \dfrac{-m+(n+1)i}{m+(n+1)^2}$ olur $|\xi| \to 0$ iken $m,n \to 0$ olduğundan $T(i+0) = \dfrac{0+i}{0+1}$ ve dolayısıyla $\lim\limits_{|\xi|\to 0} T(i+\xi) \to i$ olur. Ayrıca $T(\alpha+1) = \dfrac{-1}{\alpha+1}$ olur. Burada $\alpha = \dfrac{1}{2}+iy$ şeklindeki bir sayıdır. Buna göre

$$T(\alpha+1) = \frac{-1}{\frac{1}{2}+iy+1} = \frac{-1}{\frac{3}{2}+iy} = \frac{-1\left(\frac{3}{2}-iy\right)}{\frac{9}{4}+y^2} = \frac{-\frac{3}{2}+iy}{\frac{9}{4}+y^2} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{9}{4}+y^2} + \frac{y}{\frac{9}{4}+y^2}i$$ olur. Bu ise

$T(\alpha+1)$ in 2.bölgede olduğunu gösterir. Ayrıca

$$|T(\alpha+1)| = \sqrt{\frac{-\frac{9}{4}}{\left(\frac{9}{4}+y^2\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{9}{4}+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4}+y^2}} < 1$$ olur. Dolayısıyla $T(\alpha+1)$ birim çemberinin içine düşer. Ek olarak y>1 olduğundan $2 < \frac{3}{2}+\frac{2}{3}y^2$ olduğundan

$$-\frac{1}{2} < \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{9}{4}y^2} = \frac{-1}{\frac{3}{2}+\frac{2}{3}y^2}$$ çıkar. Tüm bu sonuçlar T(ℓ_8) $=\ell_6$ olduğunu gösterir. Buradan ℓ_8 = T(ℓ_6) ve dolayısıyla ℓ_8 = -T(ℓ_6) elde ederiz. $\omega = \ell_6$ ve S= -T olsun. (2.19) dan dolayı

$$\int\limits_{-T(\ell_6)} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau = \int\limits_{\ell_6} \frac{kc}{c\tau+d}d\tau + \int\limits_{\ell_6} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau$$ yazabiliriz. $S = -T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ise

$$\int\limits_{-T(\ell_6)} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau = \int\limits_{\ell_6} \frac{k(-1)}{(-1)\tau+0}d\tau + \int\limits_{\ell_6} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau \quad \text{ve} \quad -\int\limits_{-T(\ell_6)} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau + \int\limits_{\ell_6} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau = -\int\limits_{\ell_6} \frac{k}{\tau}d\tau$$

olur. $-\int\limits_{-T(\ell_6)} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau = \int\limits_{T(\ell_6)} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau$ ve aynı zamanda T(ℓ_6)=ℓ_8 olduğundan

$\int\limits_{\ell_8} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau + \int\limits_{\ell_6} \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} d\tau = -\int\limits_{\ell_6} \frac{k}{\tau} d\tau$ çıkar. Böylece $\int\limits_{\ell_6} + \int\limits_{\ell_8} = -k\left(\log \tau\big|_{\ell_6}\right)$ olur. $|\xi| \to 0$ olmak üzere $\ell_6 = [T(\alpha+1), i+\xi]$ olduğundan $\int\limits_{\ell_6} + \int\limits_{\ell_8} = \lim\limits_{|\xi|\to 0} -k.\log \tau\big|_{T(\alpha+1)}^{i+\xi}$ olur. Bu durumda $\int\limits_{\ell_6} + \int\limits_{\ell_8} = \lim\limits_{|\xi|\to 0} -k.\log \frac{i+\xi}{T(\alpha+1)}$ den $|\xi| \to 0$ iken $\xi \to 0$ olduğundan

$$\int\limits_{\ell_6} + \int\limits_{\ell_8} = \lim_{|\xi|\to 0} -k.\log \frac{i}{\frac{-1}{\alpha+1}} = -k \log \frac{-i(\alpha+1)}{1} = -k \log \frac{\alpha+1}{i}$$ ve dolayısıyla

$$\int\limits_{\ell_6} + \int\limits_{\ell_8} = -k \log \frac{\alpha+1}{i}$$ çıkar. Böylece dört integralin toplamı

$$\int\limits_{\ell_3} + \int\limits_{\ell_5} + \int\limits_{\ell_6} + \int\limits_{\ell_8} = -k \log \frac{\rho+1}{\alpha+1} - k \log \frac{\alpha+1}{i} = -k \log \frac{\rho+1}{i}$$ olur. Burada

$$-k \log \frac{\rho+1}{i} = -k \log \left(\frac{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i + 1}{i} \right) = -k \log\left(-\frac{1}{2} i + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = k \log \left(-\frac{1}{2} i + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{-1} =$$

$k \log \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right)$ olur. Buradan $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i = e^{i\frac{\pi}{6} + 2n\pi}$, n=0,1,... olduğundan $n = 0$ için

$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i = e^{i\frac{\pi}{6}}$ olur.Dolayısıyla $-k \log \frac{\rho+1}{i} = k \log e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi i k}{6}$ ve $-k \log \frac{\rho+1}{i} = \frac{2\pi i k}{12}$ olarak bulunur.

n_ρ, τ nun terimleri ile ölçülen ρ daki sıfırın mertebesi veya $-n_\rho$, τ nun terimleri ile ölçülen ρ daki kutbun mertebesi olmak üzere ℓ_4 üzerinde integralin $-\frac{2\pi i n\rho}{3}$ e yakınsadığını gösterelim. ρ noktası civarında $g_1(\rho) \neq 0$ olmak üzere $f(\tau) = \left(\frac{\tau-\rho}{\tau-\bar{\rho}} \right)^{n_\rho} g_1(\tau)$ yazabiliriz. Eğer $f(\tau)$ ρ da sıfıra sahip ise n_ρ pozitif, kutba sahip n_ρ negatifdir. $f(\tau)$ yu $f(\tau) = (\tau-\rho)^{n_\rho} (\tau-\bar{\rho})^{-n_\rho} g_1(\tau)$ şeklinde yazıp

$(\tau-\bar{\rho})^{-n_\rho} g_1(\tau)=g(\tau)$ diyelim. Bu durumda ρ da $g(\rho)\neq 0$ olmak üzere $f(\tau)=(\tau-\rho)^{n_\rho} g(\tau)$ elde ederiz. ℓ_4 yolu üzerinde; r sabit bir sayı, α ise r ye bağlı bir açı ve $\alpha \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $(\tau-\rho)=re^{i\theta}$ şeklinde yazalım. Bu durumda, $\log f(\tau)=n_\rho \log(\tau-\rho)+\log g(\tau)$ dan

$$\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}=\frac{n_\rho}{\tau-\rho}+\frac{g'(\tau)}{g(\tau)} \text{ olmak üzere } \frac{1}{2\pi i}\int_{\ell_4}\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int_{\ell_4'}\left(\frac{n_\rho}{re^{i\theta}}+\frac{g'(\rho+re^{i\theta})}{g(\rho+re^{i\theta})}\right)rie^{i\theta}d\theta$$

elde ederiz. Buradaki ℓ_4', r yarıçaplı $\tau=\rho$ merkezli, her iki ucu limit durumunda $\frac{2\pi}{3}$ lük bir açı yapan dairesel yaydır. Buradan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\ell_4}\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int_{\pi/2}^{\alpha}\left(\frac{n_\rho}{re^{i\theta}}+\frac{g'(\rho+re^{i\theta})}{g(\rho+re^{i\theta})}\right)re^{i\theta}id\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{\pi/2}^{\alpha}n_\rho d\theta+\frac{r}{2\pi}\int_{\pi/2}^{\alpha}\frac{e^{i\theta}g'(\rho+re^{i\theta})}{g(\rho+re^{i\theta})}d\theta$$

$$=\frac{n_\rho}{2\pi}\left(\theta\Big|_{\pi/2}^{\alpha}\right)+\frac{r}{2\pi}\int_{\pi/2}^{\alpha}\frac{e^{i\theta}g'(\rho+re^{i\theta})}{g(\rho+re^{i\theta})}d\theta=\frac{-n_\rho}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\frac{r}{2\pi}\int_{\pi/2}^{\alpha}\frac{e^{i\theta}g'(\rho+re^{i\theta})}{g(\rho+re^{i\theta})}d\theta$$

olur. $r\to 0$ iken görüldüğü gibi son terim sıfır olur. Ayrıca $r\to 0$ iken $\frac{\pi}{2}-\alpha\to\frac{2\pi}{3}$ olur.

Bu durumda; $\frac{1}{2\pi i}\int_{\ell_4}\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau=\frac{-n_\rho\frac{2\pi}{3}}{2\pi}+0=\frac{-n_\rho}{3}$ ve dolayısıyla $\int_{\ell_4}\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau=\frac{-2\pi i n_\rho}{3}$ bulunur.

Şimdi ise yine aynı şekilde ℓ_7 boyunca olan integralin $\frac{-2\pi i n_i}{3}$ ye yakınsadığını gösterelim. Burada n_i, τ nun terimleri ile ölçülen i deki sıfırın mertebesi veya $-n_i$, τ nun terimleri ile ölçülen i deki kutbun mertebesidir. Yani, eğer $f(\tau)$, i de sıfıra sahip ise n_i pozitif, kutba sahip ise n_i negatifdir. i civarında $h_1(i)\neq 0$ olmak üzere $f(\tau)=\left(\frac{\tau-i}{\tau-\bar{i}}\right)^{n_i}h_1(\tau)$ yazabiliriz. Burada $(\tau-\bar{i})^{-n_i}h_1(\tau)=h(\tau)$ dersek $h(i)\neq 0$ olacak şekilde $f(\tau)=(\tau-i)^{n_i}h(\tau)$ elde ederiz. ℓ_7 yolu üzerinde, r sabit bir sayı, α ise r ye bağlı bir açı ve $-\alpha \le \theta \le \pi+\alpha$ olmak üzere $(\tau-i)=re^{i\theta}$ şeklinde yazalım. Bu durumda $\dfrac{f'(\tau)}{f(\tau)}=\dfrac{n_i}{\tau-i}+\dfrac{h'(\tau)}{h(\tau)}$ dan $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\mathscr{C}_1}\dfrac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau=\dfrac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}_1'}\left(\dfrac{n_i}{re^{i\theta}}+\dfrac{h'(i+re^{i\theta})}{h(i+re^{i\theta})}\right)rie^{i\theta}d\theta$

elde ederiz. Buradaki $\mathscr{C}_1'$, r yarıçaplı τ=i merkezli, her iki ucu limit durumunda π lik bir açı yapan dairesel yaydır. Buradan $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\mathscr{C}_1}\dfrac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau=\dfrac{1}{2\pi i}\int_{\pi+\alpha}^{-\alpha}\left(\dfrac{n_i}{re^{i\theta}}+\dfrac{h'(i+re^{i\theta})}{h(i+re^{i\theta})}\right)re^{i\theta}id\theta$

$$=\frac{n_i}{2\pi}\left(\theta\Big|_{\pi+\alpha}^{-\alpha}\right)+\frac{r}{2\pi}\int_{\pi+\alpha}^{-\alpha}\frac{e^{i\theta}h'(i+re^{i\theta})}{h(\rho+re^{i\theta})}d\theta \quad \text{ve}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}_1}\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau=-\frac{n_i}{2\pi}(\pi+2\alpha)+\frac{r}{2\pi}\int_{\pi+\alpha}^{-\alpha}\left(\frac{h'(i+re^{i\theta})}{h(i+re^{i\theta})}\right)e^{i\theta}d\theta$$

olur. r$\to$0 iken son terim sıfır olur ayrıca $\pi+2\alpha \to \pi$ olur. Bu durumda

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{C}_1}\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau=-\frac{n_i}{2} \quad \text{ve dolayısıyla} \quad \int_{\mathscr{C}_1}\frac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau=-\frac{2\pi i n_i}{2} \quad \text{bulunur.}$$

$\mathscr{C}_2$ ve $\mathscr{C}_5$ boyunca olan integrallerin toplamı, yollar ters yönlü olduklarından sıfırdır.

Bu kez yukarıdakilere benzer şekilde $\mathscr{C}_1$ üzerindeki integralin $-2\pi i n_\infty$ a yakınsadığını gösterelim. Burada, n_∞ pozitif ise, f in, $e^{2\pi i\tau}$ terimleri ile ölçülen $i\infty$ daki sıfırının mertebesidir. Eğer n_∞ negatif ise, $-n_\infty$, f in $e^{2\pi i\tau}$ terimleri ile ölçülen $i\infty$ daki kutbunun mertebesidir.

f(τ) modüler formunun $\{\tau|\operatorname{Im}\tau>a\}$ komşuluğundaki açılımı $f(\tau)=\sum_{\upsilon\ge\upsilon_0}a_\upsilon e^{2\pi i\tau\upsilon}$ şeklinde idi. $x=e^{2\pi i\tau}$ dönüştürmesi yapalım. Ayrıca $-\dfrac{1}{2}\le u\le\dfrac{1}{2}$ ve a yeterince büyük bir sayı olmak üzere doğrusal $\mathscr{C}_1$ yolunun sanal ekseni ia noktasında kestiğini kabul edelim. Bu durumda $\mathscr{C}_1$ yolu τ=u+ia şeklindeki noktalardan oluşur. Yaptığımız değişken dönüştürmesi sonucu üst yarı düzlemdeki her $\tau\in\mathscr{H}$ noktası bir birim çemberin iç noktalarına dönüşür. τ, u+ia parçası üzerinde değişirken, $x=e^{2\pi i\tau}$ dan $x=e^{2\pi i(u+ia)}=e^{-2\pi a}e^{2\pi iu}$ elde ederiz, dolayısıyla x değişkeni de x=0 civarında $e^{-2\pi a}$ yarıçaplı bir çember üzerinde negatif yönde değişir. Bu doğru parçasının üzerindeki noktalar ise bu çemberin içine dönüşür. Dolayısıyla f, $i\infty$ da yani x=0 dışında, bu birim dairede sıfır veya kutba sahip değildir. f(τ) nun Fourier açılımından $f(\tau)=\dfrac{a_{-\upsilon_0}}{x^{\upsilon_0}}+\ldots=F(x)$

elde ederiz. $f'(\tau)=F'(x)\dfrac{dx}{d\tau}$ dan $\dfrac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau=\dfrac{F'(x)}{F(x)}dx$ olur. Buradan

$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\ell_1}\dfrac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau=-\dfrac{1}{2\pi i}\oint_0^{2\pi}\dfrac{F'(x)}{F(x)}dx=-(N_F-P_F)=P_F-N_F$ olur. N_F ve P_F, F(x) in sözü edilen birim dairenin içindeki sıfır ve kutuplarının sayısıdır. Eğer F(x), x=0 da υ_0 mertebeli bir kutba sahip ise $\upsilon_0>0$ ve $N_F=0$, $P_F=\upsilon_0$ dan $P_F-N_F=\upsilon_0$ olur. Eğer F(x), x=0 da $\upsilon_0'>0$ mertebeli bir sıfıra sahip ise o zaman $\upsilon_0'=-\upsilon_0>0$ dan $P_F-N_F=-\upsilon_0'=\upsilon_0$ olur ve $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\ell_1}\dfrac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau=-\dfrac{1}{2\pi i}\oint_0^{2\pi}\dfrac{F'(x)}{F(x)}dx=\upsilon_0$ çıkar. Sonuçta F(x), x=0 da kutba sahip ise υ_0 pozitif, sıfıra sahip ise υ_0 negatiftir. Bu ise $\tau=i\infty$ da f(τ) nun $\upsilon_0=-n_\infty$ mertebeli bir sıfır veya kutbuna karşılık gelir. Dolayısıyla $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\ell_1}\dfrac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau=-n_\infty$ dan $\displaystyle\int_{\ell_1}\dfrac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau=-2\pi i n_\infty$ bulunur.

Bütün bu sonuçlardan sonra $N_0(0)-N_0(\infty)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\ell}\dfrac{f'(\tau)}{f(\tau)}d\tau$ dan

$$N_0(0)-N_0(\infty)=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\ell_1}+\int_{\ell_2}+\int_{\ell_3}+\int_{\ell_4}+\int_{\ell_5}+\int_{\ell_6}+\int_{\ell_7}+\int_{\ell_8}+\int_{\ell_9}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{2\pi ik}{12}-\frac{2\pi in_\rho}{3}-\frac{2\pi in_i}{2}-2\pi in_\infty\right]$$

ve $N_0(0)-N_0(\infty)=\dfrac{k}{12}-\dfrac{n_\rho}{3}-\dfrac{n_i}{2}-n_\infty$ elde ederiz. Buradaki $\dfrac{n_\rho}{3}$ ve $\dfrac{n_i}{2}$ bu alt bölümün başında tanımlandığı gibi sıfırların mertebesi veya kutupların mertebesinin negatifidir.

Ayrıca, $N(0)-N(\infty)=N_0(0)-N_0(\infty)+\frac{n_\rho}{3}+\frac{n_i}{2}+n_\infty$ olduğundan

$$N(0)-N(\infty)=N_0(0)-N_0(\infty)+\frac{n_\rho}{3}+\frac{n_i}{2}+n_\infty=\frac{k}{12} \qquad (2.20)$$

elde ederiz.

Yerel değişkenler cinsinden aynı olan iki modüler form sabit bir çarpana göre farklıdır. Aynı şekilde onların kutuplarının ve sıfırlarının mertebesi sabit bir çarpana göre farklıdır. Çünkü onların bölümü her yerde düzenlidir ve hiç sıfırı yoktur.

2.5.Tam Modüler Formlar

2.5.1.Tanım

İnhomojen f modüler formuna, eğer $\mathscr{H}$ da holomorf ve $i\infty$ daki açılımı $\upsilon_0 \geq 0$ olmak üzere $b\upsilon_0 \neq 0$ iken $f(\tau)=\sum_{\upsilon\geq\upsilon_0} b_\upsilon e^{2\pi i\upsilon\tau}$ ise tam modüler form denir.

Eğer $\upsilon_0 \geq 1$ ise tam modüler forma bir kasp form denir.

Eğer inhomojen $\omega_2^{-k}h(\omega_1,\omega_2)=h(\tau,1)$ modüler formu tam ise, homojen h modüler formuna tam modüler form denir.

Açıkça f=0 fonksiyonunu da içeren aynı boyutlu, homojen ya da inhomojen, tam modüler formlar, $\mathbb{C}$ üzerinde bir vektör uzayı oluşturur. Sırasıyla $-k_1$ ve $-k_2$ boyutlu iki tam modüler formun çarpımı $-(k_1+k_2)$ boyutlu bir tam modüler formdur.

(2.20) denklemi, tam modüler forma uygulandığı zaman -k boyutlu bir tam modüler formun sıfırların sayısının

$$N(0)=N_0(0)+\frac{n_\rho}{3}+\frac{n_i}{2}+n_\infty=\frac{k}{12} \qquad (2.21)$$

olduğunu görürüz. Çünkü tam modüler formlar kutuplara sahip olmadığından $N(\infty)=0$ $N_0(\infty)=0$ dır. Buradan $k=12N_0(0)+4n_\rho+6n_i+12n_\infty$ olur. Buradaki $N_0(0)$, n_ρ, n_i, n_∞ terimleri pozitif tam sayılar olduklarından k<0 ve k tek sayı olamaz. Ayrıca k=2 olamaz. Çünkü buradaki katsayıların en küçüğü 4 dür. Dolayısıyla (2.21) denklemi

$k \equiv 1 \bmod 2$, k=2 veya k<0 için çözülebilir değildir. Bu sonuçlardan sonra şu teoremi verelim.

Teorem 14: Tek boyutlu modüler formlar yoktur (Teorem 10); -2 boyutlu veya pozitif boyutlu tam modüler formlar yoktur.

2.5.2. Modüler Fonksiyonların Türevi

Modüler fonksiyonların varlığı, keyfi çift tam boyutlu modüler formların varlığını gerektirir.

Teorem 15: Eğer f bir modüler fonksiyon ise, o zaman $\frac{df}{d\tau}$, -2 boyutlu bir inhomojen modüler formdur.

İspat : Eğer f bir modüler fonksiyon, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = S \in \Gamma$ ve $\tau' = S(\tau)$ ise bu taktirde $\frac{df(\tau')}{d\tau'} = \frac{df(S\tau)}{d\tau}\frac{d\tau}{d\tau'} = \frac{df(\tau)}{d\tau}(c\tau+d)^2$ olur. Bu ise (2.18) denkleminin özel k=0 durumudur. Çünkü (2.18) denklemi $\frac{df(\tau')}{d\tau'}\frac{d\tau'}{d\tau} = kc(c\tau+d)^{k-1}f(\tau)+(c\tau+d)^k f'(\tau)$ olduğundan burada k=0 alırsak $\frac{df(\tau')}{d\tau'}\frac{1}{(c\tau+d)^2} = f'(\tau)$ ve $\frac{df(\tau')}{d\tau'} = f'(\tau)(c\tau+d)^2$ den $\frac{df(\tau')}{d\tau'} = \frac{df(\tau)}{d\tau}(c\tau+d)^2$ olduğu görülür. Şimdi $\frac{df}{d\tau}$ nun -2 boyutlu bir inhomojen modüler form olduğunu gösterelim. $\tau = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ olmak üzere

$$\frac{df\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)}{d\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)} = \frac{df(\tau)}{d\tau}(c\tau+d)^2 \quad \text{den} \quad \frac{df\left(\frac{a\frac{\omega_1}{\omega_2}+b}{c\frac{\omega_1}{\omega_2}+d}\right)}{d\left(\frac{a\frac{\omega_1}{\omega_2}+b}{c\frac{\omega_1}{\omega_2}+d}\right)} = \frac{df\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)}{d\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)}\left(c\frac{\omega_1}{\omega_2}+d\right)^2$$

ve buradan $(c\omega_1+d\omega_2)^{-2}\dfrac{df\left(\dfrac{a\omega_1+b\omega_2}{c\omega_1+d\omega_2}\right)}{d\left(\dfrac{a\omega_1+b\omega_2}{c\omega_1+d\omega_2}\right)}=\omega_2^{-2}\dfrac{df\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)}{d\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)}$ olur. Eğer burada sağ tarafın yani $\omega^{-2}\dfrac{df\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)}{d\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)}$ nın bir homojen modüler form olduğunu gösterirsek, tanıma göre $\dfrac{df\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)}{d\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)}$ inhomojen modüler form olur. $\omega^{-2}\dfrac{df\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)}{d\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)}=h(\omega_1,\omega_2)$ diyelim.

i) $h(\lambda\omega_1,\lambda\omega_2)=(\lambda\omega_2)^{-2}\dfrac{df\left(\dfrac{\lambda\omega_1}{\lambda\omega_2}\right)}{d\left(\dfrac{\lambda\omega_1}{\lambda\omega_2}\right)}=\lambda^{-2}\omega_2^{-2}\dfrac{df\left(\dfrac{\lambda\omega_1}{\lambda\omega_2}\right)}{d\left(\dfrac{\lambda\omega_1}{\lambda\omega_2}\right)}=\lambda^{-2}h(\lambda\omega_1,\lambda\omega_2)$

ii) $h(\omega_1,\omega_2)=\omega_2^{-2}\dfrac{df\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)}{d\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)}=(c\omega_1+d\omega_2)^{-2}\dfrac{df\left(\dfrac{a\omega_1+b\omega_2}{c\omega_1+d\omega_2}\right)}{d\left(\dfrac{a\omega_1+b\omega_2}{c\omega_1+d\omega_2}\right)}$

$$=h(a\omega_1+b\omega_2,c\omega_1+d\omega_2)$$

iii) $h(\omega_1,\omega_2)=h\left(\dfrac{\omega_2}{\omega_2}\omega_1,\omega_2\right)=\omega_2^{-2}h\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2},1\right)=\omega_2^{-2}h(\tau,1)$ ve ayrıca

$h(\omega_1,\omega_2)=\omega_2^{-2}\dfrac{df(\tau)}{d(\tau)}$ olduğundan $h(\tau,1)=\dfrac{df(\tau)}{d(\tau)}$ olur. $f(\tau)$ bir modüler fonksiyon olduğundan $\mathscr{H}$ da meromorftur. Aynı şekilde $f'(\tau)=\dfrac{df(\tau)}{d(\tau)}$ fonksiyonu da $\mathscr{H}$ da meromorftur. Dolayısıyla $h(\tau,1)$ üst yarı düzlemde meromorftur.

iv) f bir modüler fonksiyon olduğundan $\operatorname{Im}\tau > \alpha$ olacak şekilde bir $\alpha>0$ var ve $\upsilon_0 \in \mathbb{Z}$, $b_{\upsilon_0} \neq 0$ olmak üzere f fonksiyonu $f(\tau) = \sum_{\upsilon \geq \upsilon_0} b_\upsilon e^{2\pi i \upsilon \tau}$ açılımına sahiptir.

Buradan $f'(\tau) = \dfrac{df(\tau)}{d(\tau)} = h(\tau,1) = \sum_{\upsilon \geq \upsilon_0} 2\pi i \upsilon b_\upsilon e^{2\pi i \upsilon \tau} = \sum_{\upsilon \geq \upsilon_0} c_\upsilon e^{2\pi i \upsilon \tau}$ olur. Bu açılım $i\infty$ un $\{\tau | \operatorname{Im}\tau > \alpha\}$ komşuluğunda geçerlidir. Dolayısıyla, $h(\omega_1,\omega_2) = \omega_2^{-2} \dfrac{df\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)}{d\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)}$ fonksiyonu bir homojen modüler formdur. Buradan, inhomojen modüler formun tanımından dolayı $\dfrac{df\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)}{d\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)}$ nin ise -2 boyutlu bir inhomojen modüler form olduğu görülür.

Dolayısıyla, özel olarak, J bir modüler fonksiyon olduğundan, mutlak modüler değişmeksizin türevi J', -2 boyutlu bir modüler formdur. J' nün $\tau_0 \in \mathscr{H}^*$ noktası civarındaki açılımını gözönüne alalım. İlk olarak eğer, $\tau_0 \in \mathscr{H}$ ise o zaman $c_1(\tau_0) \neq 0$ olmak üzere $J(\tau) = \sum_{\upsilon \geq \upsilon_0} c_\upsilon(\tau_0) \left(\dfrac{\tau - \tau_0}{\tau - \bar{\tau}_0}\right)^{e_{\tau_0}\upsilon}$ olur. Burda, eğer $\bar{\Gamma}$ altında, $\tau_0 \sim i$ ise $e_{\tau_0} = 2$, $\tau_0 \sim \rho$ ise $e_{\tau_0} = 3$ ve diğer durumlarda $e_{\tau_0} = 1$ dir. Daha önceki sonuçlardan $J(\tau)$ nun üst yarı düzlemde holomorf olduğunu biliyoruz, dolayısıyla $\upsilon_0 \geq 0$ olur. Dolayısıyla bu noktaların civarındaki Fourier açılımları $J(\tau) = \sum_{\upsilon \geq 0} c_\upsilon(\tau_\rho) \left(\dfrac{\tau - \tau_\rho}{\tau - \bar{\tau}_\rho}\right)^{3\upsilon}$, $J(\tau) = \sum_{\upsilon \geq 0} c_\upsilon(\tau_i) \left(\dfrac{\tau - \tau_i}{\tau - \bar{\tau}_i}\right)^{2\upsilon}$, $J(\tau) = \sum_{\upsilon \geq 0} c_\upsilon(\tau_0) \left(\dfrac{\tau - \tau_0}{\tau - \bar{\tau}_0}\right)^{\upsilon}$ olur. Yerel değişkenler cinsinden $J(\tau) = \sum_{\upsilon \geq 0} c_\upsilon(\tau_\rho) t_{\tau_\rho}^\upsilon$, $J(\tau) = \sum_{\upsilon \geq 0} c_\upsilon(\tau_i) t_{\tau_i}^\upsilon$, $J(\tau) = \sum_{\upsilon \geq 0} c_\upsilon(\tau_0) t_{\tau_0}^\upsilon$ şeklinde yazabiliriz. Buradan $J'(\tau) = \sum_{\upsilon \geq 0} c_\upsilon(\tau_\rho) 3\upsilon \left(\dfrac{-\tau_\rho - \bar{\tau}_\rho}{(\tau - \bar{\tau}_\rho)^2}\right) t_{\tau_\rho}^{\upsilon - \frac{1}{3}}$,

$$J'(\tau)=\sum_{\upsilon\geq 0} c_\upsilon(\tau_i)2\upsilon\left(\frac{-\tau_i-\bar{\tau}_i}{(\tau-\bar{\tau}_i)^2}\right)t_{\tau_i}^{\upsilon-\frac{1}{2}},\ J'(\tau)=\sum_{\upsilon\geq 0} c_\upsilon(\tau_0)3\upsilon\left(\frac{-\tau_0-\bar{\tau}_0}{(\tau-\bar{\tau}_0)^2}\right)t_{\tau_0}^{\upsilon-1} \text{ olur.}$$

Yerel değişkenler cinsinden ifade edilen $J(\tau)$ fonksiyonu τ_ρ da 1 mertebeli bir sıfıra sahip olduğundan $J'(\tau)$, τ_ρ da $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ mertebeli bir sıfıra, aynı şekilde, τ_i de $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ mertebeli bir sıfıra ve 1-1=0 olduğundan geriye kalan noktalarda sıfırlara sahip değildir.

$J(\tau)$ nun $i\infty$ un bir komşuluğundaki açılımı $c_1\neq 0$ olmak üzere $J(\tau)=\sum_{\upsilon\geq -1} c_\upsilon e^{2\pi i\upsilon\tau}$ olduğundan $J'(\tau)=\sum_{\upsilon\geq -1} 2\pi i\upsilon c_\upsilon e^{2\pi i\upsilon\tau}\Rightarrow J'(i\infty)=-\infty$ ve $S=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ için $J'(\tau)=J'(S\tau)=\sum_{\upsilon\geq -1} 2\pi i\upsilon c_\upsilon e^{2\pi i\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)\upsilon}\Rightarrow r=-\frac{d}{c}$ rasyonel noktası için $J'(r)=-\infty$ olur. Böylece, $J'(\tau)$ -2 boyutlu bir modüler form olduğundan $N(0)-N(\infty)=\frac{k}{12}=\frac{1}{6}$ olur. $J'(\tau)$ nun açılımından, $k\in\mathbb{Z}$ olmak üzere, $(J'(\tau))^k$ içinde aynı sonuçları elde ederiz. $J'(\tau)$, -2 boyutlu olduğundan $(J'(\tau))^k$, -2k boyutlu bir modüler formdur. Buradan, aynı boyutlu iki modüler formun bölümü bir modüler fonksiyon olduğundan, Teorem 11 tekrar çıkar. Çünkü $J'(\tau)$ nun yerel değişkenler cinsinden ifadesi ;

$$(\tau-\bar{\tau}_\rho)^2 J'(\tau)=\sum_{\upsilon\geq 0} c_\upsilon(\tau_\rho)3\upsilon(-\tau_\rho-\bar{\tau}_\rho)t_{\tau_\rho}^{\upsilon-\frac{1}{3}},$$

$$(\tau-\bar{\tau}_i)^2 J'(\tau)=\sum_{\upsilon\geq 0} c_\upsilon(\tau_i)2\upsilon(-\tau_i-\bar{\tau}_i)t_{\tau_i}^{\upsilon-\frac{1}{2}},$$

$$(\tau-\bar{\tau}_0)^2 J'(\tau)=\sum_{\upsilon\geq 0} c_\upsilon(\tau_0)\upsilon(-\tau_0-\bar{\tau}_0)t_{\tau_0}^{\upsilon-1}$$

olduğundan, -2k boyutlu modüler formlar için $\tilde{\tau},\mathscr{H}^*$ da ise o zaman $\tilde{\tau}$ nin komşuluğunda $(\tau-\bar{\tilde{\tau}})^{2k}f(\tau)=\sum_{\upsilon\geq\tilde{\upsilon}} a_\upsilon t_{\tilde{\tau}}^{\upsilon+\tilde{K}}$ elde ederiz. Burada, eğer $\tilde{\tau}\sim\tau_\rho$ ise $a_\upsilon=c_\upsilon(\tau_\rho)3\upsilon(-\tau_\rho-\bar{\tau}_\rho)$ ve $\tilde{K}$, mod 1 e göre $\frac{2k}{3}$ ün en küçük kalanı , eğer $\tilde{\tau}\sim\tau_i$ ise

$a_\upsilon = c_\upsilon(\tau_i)2\upsilon(-\tau_i - \bar{\tau}_i)$ ve $\tilde{K}$, mod1 e göre $\frac{k}{2}$ nın en küçük kalanı, diğer durumlarda ise $a_\upsilon = c_\upsilon(\tau_0)\upsilon(-\tau_0 - \bar{\tau}_0)$ ve $\tilde{K}$ ise sıfırdır. $\tilde{\tau} = i\infty$ ise $(\tau - \bar{\tilde{\tau}})^{2k}$ çarpan alınmaz. Benzer olarak, $[J'(\tau)]^k$ için ve dolayısıyla -2k boyutlu her modüler form için $N(0) - N(\infty) = \frac{2k}{12} = \frac{k}{6}$ olduğu sonucu çıkar. Bu ise Teorem 13 ü tekrar kanıtlar.

2.5.3. Tam Modüler Formların Kuruluşu

$J'(\tau)$ yardımıyla tam modüler formları kuracağız. J, J-1, J' fonksiyonları için aynı zamanda negatif kutup mertebeleri olan sıfırların mertebelerinin şemasını göz önüne alalım. Buradan aşağıdaki teorem çıkar.

	ρ	i	i∞
J	1	0	-1
J-1	0	1	-1
J'	2/3	1/2	-1

Şekil 10.

Teorem 16: a, b, c, $\in \mathbb{Z}$ olmak üzere, eğer $a \geq 2, 2c \leq a, 3b \leq 2a, b + c \geq a$ ve dolayısıyla b, c>0 ise $f_{a,b,c}(\tau) = \frac{J'^a}{J^b (J-1)^c}$ fonksiyonu -2a boyutlu bir tam modüler formdur.

İspat: Önce b,c>0 olduğunu gösterelim. $a \geq 2$ ve $b + c \geq a$ dan $b + c \geq 2$ olur. Bu ise b veya c den en az birinin pozitif olduğunu gösterir. Önce b>0 iken $c \leq 0$ olduğunu kabul edelim. $3b \leq 2a$ idi. Dolayısıyla $\frac{3}{2}b \leq a$ olur. $c \leq 0$ ise $b + c \geq 2$ den $b \geq 2$ olmak zorundadır. Bu ise $\frac{3}{2}b \leq a$ olduğundan $3 \leq a$ olmasını gerektirir. Oysa $a \geq 2$ verilmiştir. Dolayısıyla b>0 iken c>0 olmak zorundadır. Şimdi ise c>0 iken $b \leq 0$ olduğunu kabul edelim. $b + c \geq 2$ den $c \geq 2$ olmak zorundadır. Ayrıca $2c \leq a$ idi. Oysa $c \geq 2$ olduğundan $2.2 \leq a$ dan $4 \leq a$ olur ki bu bir çelişkidir. Bu çelişki $b \leq 0$ alınmasından dolayı oluştu. Dolayısıyla b>0 olmak zorundadır. Sonuçta b,c>0 olur.

Şimdi ise $f_{a,b,c}(\tau)$ nin -2a boyutlu bir tam modüler form olduğunu gösterelim.

$f_{a,b,c}(\tau)=\dfrac{[J'(\tau)]^a}{[J(\tau)]^b[J(\tau)-1]^c}$ bir inhomojen modüler form mudur? Bunun için $\omega_2^{-2a}f_{a,b,c}\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)$ bir homojen modüler form olmalıdır. $\omega_2^{-2a}f_{a,b,c}\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)=h(\omega_1,\omega_2)$ olsun.

i) Herhangi $\lambda\in\mathbb{C}$ için $h(\lambda\omega_1,\lambda\omega_2)=(\lambda\omega_2)^{-2a}f_{a,b,c}\left(\dfrac{\lambda\omega_1}{\lambda\omega_2}\right)=\lambda^{-2a}\omega_2^{-2a}f_{a,b,c}\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)$

$=\lambda^{-2a}h(\omega_1,\omega_2)$

ii) $h(a\omega_1+b\omega_2,c\omega_1+d\omega_2)=(c\omega_1+d\omega_2)^{-2a}f_{a,b,c}\left(\dfrac{a\omega_1+b\omega_2}{c\omega_1+d\omega_2}\right)$

$$=(c\omega_1+d\omega_2)^{-2a}\frac{\left[J'\left(\dfrac{a\omega_1+b\omega_2}{c\omega_1+d\omega_2}\right)\right]^a}{\left[J\left(\dfrac{a\omega_1+b\omega_2}{c\omega_1+d\omega_2}\right)\right]^b\left[J\left(\dfrac{a\omega_1+b\omega_2}{c\omega_1+d\omega_2}\right)-1\right]^c}$$

$$=(c\omega_1+d\omega_2)^{-2a}\frac{\left[J'\left(\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)\right]^a}{\left[J\left(\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)\right]^b\left[J\left(\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)-1\right]^c}=\omega_2^{-2a}(c\tau+d)^{-2a}\frac{\left[(c\tau+d)^2J'(\tau)\right]^a}{[J(\tau)]^b[J(\tau)-1]^c}$$

yazabiliriz. Çünkü $J'(\tau)$, -2 boyutlu bir modüler fonksiyon olduğundan herhangi $S=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma$ için $J'\left(\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=(c\tau+d)^2J'(\tau)$ olur. Ayrıca $J(\tau)$ bir modüler fonksiyon olduğundan $J(S(\tau))=J(\tau)$ dır. Böylece

$$h(a\omega_1+b\omega_2,c\omega_1+d\omega_2)=\omega_2^{-2a}\frac{[J'(\tau)]^a}{[J(\tau)]^b[J(\tau)-1]^c}=\omega_2^{-2a}f_{a,b,c}(\tau)$$

Dolayısıyla $h(a\omega_1+b\omega_2,c\omega_1+d\omega_2)=\omega_2^{-2a}f_{a,b,c}\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)=h(\omega_1,\omega_2)$ olur.

iii) $h(\omega_1,\omega_2)=\omega_2^{-2a}f_{a,b,c}\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)$ ise $\omega_2^{-2a}h(\tau,1)=\omega_2^{-2a}f_{a,b,c}(\tau)$, $h(\tau,1)=f_{a,b}(\tau)$ ve

$h(\tau,1)=\dfrac{[J'(\tau)]^a}{[J(\tau)]^b[J(\tau)-1]^c}$ olur. $J(\tau), J(\tau)-1, J'(\tau)$ fonksiyonlarını üst yarı düzlemde kutuplar dışında holomorf fonksiyonlarıdır. Dolayısıyla $h(\tau,1)$, üst yarı düzlemde kutuplar dışında bir holomorf fonksiyondur.

iv) $i\infty$ un $\{\tau \mid \mathrm{Im}\,\tau>\alpha\}$ komşuluğu içinde $h(\tau,1)=\sum\limits_{\upsilon\geq\upsilon_0} b_\upsilon e^{2\pi i\tau\upsilon}$ şeklinde bir Fourier açılımına sahiptir. Dolayısıyla $h(\omega_1,\omega_2)=\omega_2^{-2a}f_{a,b,c}\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)$ -2a boyutlu bir homojen modüler formdur. Bu ise $f_{a,b,c}\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)=f_{a,b,c}(\tau)$ nun bir inhomojen modüler olmasını gerektirir. Ayrıca yine iii) şıkkından $f_{a,b,c}(\tau)$ nun $\mathscr{H}$ da holomorf olduğu ve iv) şıkkından $h(\tau,1)=\sum\limits_{\upsilon\geq\upsilon_0} b_\upsilon e^{2\pi i\tau\upsilon}$ şeklinde bir açılıma sahip olduğu sonucu çıkar. Burada

$\sum\limits_{\upsilon\geq\upsilon_0} b_\upsilon e^{2\pi i\tau\upsilon}=f_{a,b,c}(\tau)=h(\tau,1)=\dfrac{[J'(\tau)]^a}{[J(\tau)]^b[J(\tau)-1]^c}$ ifadesinde paydanın kutupları için fonksiyon sıfır olacağından ve paydanın sıfır olması durumunda derece olarak daha büyük olan payın sıfırı, kesri sıfır yapacağından dolayı $f_{a,b,c}(\tau)$ nun kutbu yoktur. Bu durumda $\upsilon_0\geq 0$ ve ayrıca $b_{\upsilon_0}\neq 0$ olmak üzere $f_{a,b,c}(\tau)$ fonksiyonu $f_{a,b,c}(\tau)=\sum\limits_{\upsilon\geq\upsilon_0} b_\upsilon e^{2\pi i\tau\upsilon}$ şeklinde bir açılıma sahiptir. Dolayısıyla

$f_{a,b,c}(\tau)=\dfrac{[J'(\tau)]^a}{[J(\tau)]^b[J(\tau)-1]^c}$ fonksiyonu -2a boyutlu tam modüler formdur.

Örnekler:

a=2, b=c=1 için $f_{2,1,1}(\tau)=\dfrac{[J'(\tau)]^2}{[J(\tau)][J(\tau)-1]}$ olur. $f_{2,1,1}(\tau)$, ρ da $2.\dfrac{2}{3}-(1+0)=\dfrac{4}{3}-1=\dfrac{1}{3}$ mertebeli bir sıfıra sahip ve -2.a = -2.2 = -4 boyutlu bir tam modüler formdur. $f_{2,1,1}$ tam modüler formu

$$G_4^*=\frac{J'^2}{J(J-1)} \tag{2.22}$$

şeklinde gösterilir. Aynı şekilde a=3, b=2, c=1 için $f_{3,2,1}(\tau)=\dfrac{[J'(\tau)]^3}{[J(\tau)]^2[J(\tau)-1]}$ olup bu fonksiyon i de $3.\frac{1}{2}-(0.2+1)=\frac{1}{2}$ mertebeli bir sıfıra sahip ve -2.a = -2.3 = -6 boyutlu bir tam modüler formdur. $f_{3,2,1}$ tam modüler formu

$$G_6^* = \frac{J'^3}{J^2(J-1)} \tag{2.23}$$

şeklinde gösterilir. Böylece, sırasıyla -8, -10 ve -14 boyutlu $G_8^* = G_4^{*2}$, $G_{10}^* = G_4^* G_6^*$ ve $G_{14}^* = G_4^{*2} G_6^*$ tam modüler formlarını elde ederiz. Ayrıca, -k boyutlu bir tam modüler formun sınıflarının sayısını veren (2.21) denklemi, k=4, 6, 8, 10 ve 14 durumlarında tam olarak tek çözüme sahiptir. Yani, aynı mertebeli aynı sıfırlara sahip böyle iki modüler formun bölümü bir sabit olduğundan, çarpımsal bir sabitten ayrı olarak, bu boyutlarda tam olarak bir tane tam modüler form vardır.

G_4^{*3} ve G_6^{*2} fonksiyonları sırasıyla ρ da ve i de 1 mertebeli sıfırlara sahip -12 boyutlu tam modüler formlardır. Böylece G_4^{*3} ve G_6^{*2} fonksiyonları lineer bağımsız fonksiyonlar olurlar. Gerçekten, α, β keyfi sabitler olmak üzere $\alpha G_4^{*3} + \beta G_6^{*2} = 0$ iken bu sabitlerden $\beta \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde $-\frac{\alpha}{\beta} = \frac{G_6^{*2}}{G_4^{*3}}$ den Teorem 9 a göre $-\frac{\alpha}{\beta}$ nın 0- boyutlu bir modüler form (veya bir modüler fonksiyon) olduğu sonucu çıkar. Bu ise çelişkidir. Aynı şekilde $\alpha \neq 0$ kabul edilirse yine çelişkiye varılır. Şu halde $\alpha G_4^{*3} + \beta G_6^{*2} = 0$ iken bu eşitliğin sağlanması için $\alpha = \beta = 0$ olmak zorundadır. Ayrıca G_4^{*3} ve G_6^{*2} fonksiyonları aynı anda sıfır olmaz. Dolayısıyla G_4^{*3} ve G_6^{*2} lineer bağımsız fonksiyonlardır.

$\Delta^* = G_4^{*3} - G_6^{*2}$ şeklinde tanımlayalım.

$$G_4^{*3} - G_6^{*2} = \frac{J'^6}{J^3(J-1)^3} - \frac{J'^6}{J^4(J-1)^2} = \frac{J'^6}{J^3(J-1)^2}\left[\frac{1}{J-1} - \frac{1}{J}\right]$$

$$G_4^{*3} - G_6^{*2} = \frac{J'^6}{J^3(J-1)^2}\left(\frac{J-J+1}{J(J-1)}\right) = \frac{J'^6}{J^4(J-1)^3} \text{ ve dolayısıyla}$$

$$\Delta^* = G_4^{*3} - G_6^{*2} = \frac{J'^6}{J^4(J-1)^3} \tag{2.24}$$

olur ve bu fonksiyon $-2.a = -2.6 = -12$ boyutlu tam modüler formdur. Δ^* $i\infty$ da $6(-1)-(4(-1)+3(-1))=1$ mertebeli bir sıfıra sahiptir. Ayrıca (2.21) deki $N(0) = \frac{k}{12}$ ifadesinden N(0)=1 bulunur. Bu ise Δ^* ın $\mathscr{H}$ da hiç sıfırı olmadığını gösterir. Buradaki Δ^* eliptik fonksiyonlar teorisinin diskriminantı Δ dan sabit bir çarpan kadar farklıdır ve burada buna da diskriminant diyeceğiz. Böylece aşağıdaki teoremi formüle edebiliriz.

Teorem 17: Δ^* diskriminantı $i\infty$ noktasında sıfıra giden -12 boyutlu bir tam modüler formdur. Bundan dolayı Δ^* çarpımsal bir sabite göre karekterize edilir. Δ^* üst yarı düzlemde asla sıfır olmaz.

-12 boyutlu bir tam modüler form olarak bir sıfıra sahip olduğundan, Δ^* ın bir mertebeli bir sıfıra sahip olması gereğine ihtiyacımız yok.

Eğer f_{12}, -12 boyutlu keyfi bir tam modüler form ise, o zaman $f_{12} - cG_4^{*3} - c'\Delta^*$, $i\infty$ da en azından 2 mertebeli bir sıfıra sahip olacak şekilde c ve c' sabitleri vardır. Bu fonksiyonlar da -12 boyutlu bir tam modüler formlar olduğundan (2.21) denkleminden N(0)=1 olur. Δ^*, $\mathscr{H}$ da holomorf ve $i\infty$ da 1 mertebeli bir sıfıra sahip, G_4^{*3} ise $i\infty$ da sıfırdan farklıdır. Şu halde $cG_4^{*3} + c'\Delta^*$ ancak ve ancak $c = c' = 0$ için sıfır olur. N(0)=1 den dolayı ya $c = c' = 0$ ve dolayısıyla $\tau = i\infty$ dan $f_{12}(\tau) = 0$ ya da $f_{12} - (cG_4^{*3} + c'\Delta^*) = 0$ dır. Buradan $f_{12} = cG_4^{*3} + c'\Delta^*$ bulunur. Görüldüğü gibi f_{12}, -12 boyutlu keyfi bir tam modüler form iken G_4^{*3} ve Δ^* ın lineer kombinezonu olarak ifade edilebildiğinden -12 boyutlu modüler formların oluşturduğu uzayın bazı $\{G_4^{*3}, \Delta^*\}$ dır. Sonuçta -12 boyutlu modüler formların oluşturduğu kompleks $\mathbb{C}$ üzerindeki vektör uzayın, C-boyutunun 2 olduğu görülür.

2.5.4. Tam Modüler Formlar İçin Baz

-k≡0 mod 2 boyutlu tam modüler formların oluşturduğu kompleks $\mathbb{C}$ üzerindeki vektör uzayı için bir baz vereceğiz. Baz oluşturma daha önce $4 \leq k \leq 14$ için yapılmıştı. Çünkü k=4,6,8,10,12,14 olmak üzere G_k^* tam modüler formları G_4^* ve G_6^* tam modüler formlarının lineer kombinezonu olarak ifade edilebiliyordu. İlk olarak 0<k≡mod 12 dolayısıyla k=12k' olduğunu kabul edelim. O taktirde $\upsilon = 0,1,2,\ldots,k' = \frac{k}{12}$ olmak üzere

$$G_4^{*3(k'-\upsilon)}\Delta^{*\upsilon} \tag{2.25}$$

fonksiyonları $-12(k'-\upsilon)+(-12\upsilon) = -12k'$ boyutlu tam modüler formlardır ve i∞ da $0.3(k'-\upsilon)+1.\upsilon = \upsilon$ mertebeli bir sıfıra sahiptirler. Ayrıca bu fonksiyonlar lineer bağımsızdırlar. Çünkü $\upsilon = 0,1,2,\ldots,k' = \frac{k}{12}$ olmak üzere $\alpha_\upsilon G_4^{*3(k'-\upsilon)}\Delta^{*\upsilon} = 0$ olması ancak ve ancak $\forall\, \upsilon$ için $\alpha_\upsilon = 0$ olmasıyla mümkündür. Bu sonuca Δ^* ve G_4^{*3} fonksiyonlarının aynı anda sıfır olmamalarından dolayı varıyoruz. Eğer $f_{12k'}, -12k'$ boyutlu bir tam modüler form ise o taktirde $\upsilon = 0,1,2,\ldots,k'$ olmak üzere uygun c_υ için $f_{12k'} - c_0 G_4^{*3k'} - c_1 G_4^{*3k'-3}\Delta^* - c_2 G_4^{*3k'-6}\Delta^{*2} - \ldots - c_{k-1} G_4^{*3}\Delta^{*k'-1} - c_k \Delta^{*k'}$ fonksiyonu i∞ da en azından k'+1 mertebeli bir sıfıra sahiptir. Fakat $N(0) = \frac{k}{12}$ den ve k=12k' den N(0)=k' olur, dolayısıyla yukarıdaki gibi burada da ya $\forall\, \upsilon$ için $c_\upsilon = 0$ ve dolayısıyla τ=i∞ dan $f_{12k'}(i\infty) = 0$ ya da

$$f_{12k'} - (c_0 G_4^{*3k'} + c_1 G_4^{*3k'-3}\Delta^* + \ldots + c_{k-1} G_4^{*3}\Delta^{*k'-1} + c_k \Delta^{*k'}) = 0$$

olur. Böylece

$$f_{12k'} = c_0 G_4^{*3k'} + c_1 G_4^{*3k'-3}\Delta^* + \ldots + c_{k-1} G_4^{*3}\Delta^{*k'-1} + c_k \Delta^{*k'}$$

olur. Bu ise keyfi -k=-12k' boyutlu tam modüler formların $\upsilon = 0,1,2,\ldots,k'$ olmak üzere $G_4^{*3(k'-\upsilon)}\Delta^{*\upsilon}$ fonksiyonlarının lineer kombinezonu olarak ifade edebildiğini, dolayısıyla bu fonksiyonların $k \equiv 0$ mod 12olduğu zaman k'+1 boyutlu bir uzay için bir baz teşkil ettiği sonucuna varılır.

Şimdi, $k \geq 4$ ve çift olsun.

$$k = 12k' + 4\alpha + 6\beta, \quad 12 \neq 4\alpha + 6\beta \leq 14 \tag{2.26}$$

sistemi sağlanacak şekilde negatif olmayan üç k', α, β tamsayısı belirleyelim. Bu ise her bir k için tek olarak mümkündür. Gerçekten de herbir k ya karşılık bu sistemi sağlayacak k', α, β sayılar belirlendiği zaman görülecektir ki ancak ve ancak birer tane k', α, β sayıları mevcuttur. k' sayısı 12 nin her katında bir artarken, α sayısı 0, 1 ve 2, β sayısı ise 0 ve 1 değerlerini alacaktır.

Eğer f_k, $-k$ boyutlu bir tam modüler form ise, o taktirde $0 \leq \gamma \in \mathbb{Z}$ olmak üzere Teorem 11 e göre ρ da $\gamma + \frac{\alpha}{3}$ mertebeli bir sıfıra sahiptir. Aynı şekilde $0 \leq \delta \in \mathbb{Z}$ olmak üzere i de $\delta + \frac{\beta}{3}$ mertebeli bir sıfıra sahiptir. G_4^{*3} ρ da 1 mertebeli bir sıfıra sahip olduğundan $\left[G_4^{*3}\right]^{\alpha/3} = G_4^{*\alpha}$, ρ da $\frac{\alpha}{3}$ mertebeli bir sıfıra sahiptir. Aynı şekilde G_6^{*2} i de 1 mertebeli bir sıfıra sahip olduğundan $\left[G_6^{*2}\right]^{\beta/2} = G_6^{*\beta}$, i de $\frac{\beta}{2}$ mertebeli bir sıfıra sahiptir. Dolayısıyla $f_k G_4^{*-\alpha} G_6^{*-\beta}$ fonksiyonu $k' = \frac{k - 4\alpha - 6\beta}{12}$ olmak üzere $-[k - 4\alpha - 6\beta]$ $= -[12k' + 4\alpha + 6\beta - 4\alpha - 6\beta] = -12k'$ boyutlu bir tam modüler formdur. Böylece bu fonksiyonda (2.25) deki fonksiyonların bir homojen lineer kombinezonu olarak tek bir biçimde ifade edilebilir. (2.26) sistemi için tanımlı olan k', α, β sabitlerini kullanarak aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 18: $-k \equiv 0 \mod 2$ boyutlu tüm modüler formların oluşturduğu kompleks $\mathbb{C}$ üzerindeki vektör uzayı $D = \begin{cases} [k/12], & \text{eğer } k \equiv 2 \bmod 12 \text{ ise,} \\ [k/12]+1, & \text{eğer } k \not\equiv 2 \bmod 12 \text{ ise,} \end{cases}$ $\mathbb{C}$-boyutuna ve

$$G_4^{*\alpha} G_6^{*\beta} G_4^{*3(k'-\upsilon)} \Delta^{*\upsilon} \qquad \upsilon = 0, 1, \ldots k' \tag{2.27}$$

bazına sahiptir.

İspat : $k \geq 4$ ve çift, k', α, $\beta \geq 0$ olmak üzere $k = 12k' + 4\alpha + 6\beta$, $12 \neq 4\alpha + 6\beta \leq 14$

sistemi sağlanacak şekilde k', α, β sayıları tanımlanmıştı. Ayrıca yukarıda -12k' boyutlu $f_k G_4^{*-\alpha} G_6^{*-\beta}$ fonksiyonunun (2.25) deki fonksiyonların homojen lineer kombinezonu olarak yazılabileceği ifade edilmişti. Buna göre $k' = \dfrac{k-4\alpha-6\beta}{12}$ olmak üzere $f_k G_4^{*-\alpha} G_6^{*-\beta} = \sum_{\upsilon=0}^{k'} G_4^{*3(k'-\upsilon)} \Delta^{*\upsilon}$ olur. Buradan $f_k = \sum_{\upsilon=0}^{k'} G_4^{*\alpha} G_6^{*\beta} G_4^{3(k'-\upsilon)} \Delta^{*\upsilon}$ bulunur. Burada $k = 12k' + 4\alpha + 6\beta$ olduğundan α ve β nın tanımından k<12 iken k'=0 olur. $k \geq 12$ ise $k' \geq 1$ olur. Yani sonuçta υ sayısı k' ne ulaşıncaya kadar 0,1,...,k'-1 sayılarını tarar. Böylece $k \equiv 0$ mod 12 durumu da kapsanmış olur. Çünkü $k \equiv 0$ mod 12olunca α=β=0 olur ve yukarıdaki sonucun aynısı elde edilmiş olur. Sonuçta υ=0,1,...k' olmak üzere $-k \equiv 0$ mod 2 boyutlu tüm modüler formların bazı olarak $G_4^{*\alpha} G_6^{*\beta} G_4^{*3(k'-\upsilon)} \Delta^{*\upsilon}$ fonksiyonları elde edilmiş olur.

Ayrıca k' nün tanımından da görüleceği gibi eğer $k \not\equiv 0$ mod 12 ise -k boyutlu tam modüler f_k formlarının oluşturduğu uzay k'+1 boyutlu olur. Eğer $k \equiv 2$ mod 12ise oluşan uzay $\mathbb{C}$ üzerinde k' boyutlu vektör uzayı olur. Çünkü, birinci durumda toplumda k'+1 terim varken, ikincisinde k' terim vardır. Buradaki k' sayısı $\left[\dfrac{k}{12}\right]$ ye karşılık geldiğinden teorem ispatlanmış olur. Şimdi aşağıdaki teoremi kanıtlayabiliriz.

Teorem 19 : -k boyutlu her f_k tam modüler formu tek olarak belirlenen $c_{\mu,\upsilon} \in \mathbb{C}$ katsayıları ile $f_k = \sum_{\substack{\mu,\upsilon \geq 0 \\ 4\mu+6\upsilon=k}}^{k'} c_{\mu,\upsilon} G_4^{*\mu} G_6^{*\upsilon}$ formunda ifade edilebilir.

İspat : Bir önceki teoremde $k = 12k' + 4\alpha + 6\beta$, $12 \neq 4\alpha + 6\beta \leq 14$ olmak üzere $-k \equiv 0$ mod 2 boyutlu bir tam modüler formun $f_k = \sum_{\upsilon=0}^{k'} G_4^{*\alpha} G_6^{*\beta} G_4^{*3(k'-\upsilon)} \Delta^{*\upsilon}$ şeklinde ifade edilebileceğini göstermiştik. Burada eğer $\Delta^* = G_4^{*3} - G_6^{*2}$ olduğu gözönüne alınırsa $f_k = \sum_{\upsilon=0}^{k'} G_4^{*\alpha} G_6^{*\beta} G_4^{*3(k'-\upsilon)} \left(G_4^{*3} - G_6^{*2}\right)^{\upsilon}$ elde edilir.

$$\left(G_4^{*3}-G_6^{*2}\right)^{\upsilon}=\binom{\upsilon}{0}G_4^{*3\upsilon}+(-1)^1\binom{\upsilon}{1}G_4^{*3(\upsilon-1)}G_6^{*2.1}+(-1)^2\binom{\upsilon}{2}G_4^{*3(\upsilon-2)}G_6^{*2.2}+\ldots$$
$$+(-1)^{\upsilon-1}\binom{\upsilon}{\upsilon-1}G_4^{*3(\upsilon(\upsilon-1))}G_6^{*2(\upsilon-1)}+(-1)^{\upsilon}\binom{\upsilon}{\upsilon}G_4^{*3(\upsilon-\upsilon)}G_6^{*2\upsilon}$$

açılımından yararlanarak

$$f_k=G_4^{*\alpha}G_6^{*\beta}\left[G_4^{*3(k'-0)}\left(\binom{0}{0}G_4^{*3(0)}\right)+G_4^{*3(k'-1)}\left(\binom{1}{0}G_4^{*3.1}+(-1)^1\binom{1}{1}G_4^{*3(1-1)}G_6^{*2.1}\right)\right.$$
$$+\ldots+G_4^{*3(k'-k')}\left(\binom{k'}{0}G_4^{*3k'}+(-1)^1\binom{k'}{1}G_4^{*3(k'-1)}G_6^{*2.1}\right.$$
$$\left.\left.+\ldots+(-1)^{k'-1}\binom{k'}{k'-1}G_4^{*3.1}G_6^{*2(k'-1)}+(-1)^{k'}\binom{k'}{k'}G_6^{*2k'}\right)\right]$$

buluruz. İfadenin parantez içerisindeki kısmını açarsak

$$f_k=G_4^{*\alpha}G_6^{*\beta}\left[G_4^{*3(k'-0)}+\left(\binom{1}{0}G_4^{*3(k'-0)}+(-1)^1\binom{1}{1}G_4^{*3(k'-1)}G_6^{*2.1}\right)\right.$$
$$+\ldots+\left(\binom{k'}{0}G_4^{*3(k'-0)}+(-1)^1\binom{k'}{1}G_4^{*3(k'-1)}G_6^{*2.1}+\ldots+(-1)^{k'-1}\binom{k'}{k'-1}G_4^{*3(k'-(k'-1))}G_6^{*2(k'-1)}\right.$$
$$\left.\left.+(-1)^{k'}\binom{k'}{k'}G_4^{*3(k'-k')}G_6^{*2k'}\right)\right]$$

elde ederiz. Bunu düzenlersek,

$$f_k=G_4^{*\alpha}G_6^{*\beta}\left[\left(\binom{0}{0}+\binom{1}{0}+\binom{2}{0}+\ldots+\binom{k'}{0}\right)G_4^{*3(k'-0)}G_6^{*2.0}+(-1)^1\left(\binom{1}{1}\binom{2}{1}+\ldots+\binom{k'}{1}\right)G_4^{*3(k'-1)}G_6^{*2.1}\right.$$
$$\left.+\ldots+(-1)^{k'-1}\left(\binom{k'-1}{k'-1}+\binom{k'}{k'-1}\right)G_4^{*3(k'-(k'-1))}G_6^{*2(k'-1)}+(-1)^{k'}\binom{k'}{k'}G_4^{*3(k'-k')}G_6^{*2k'}\right]$$

ve buradan

$$f_k=(-1)^0\left[\binom{0}{0}+\binom{1}{0}+\binom{2}{0}+\ldots+\binom{k'}{0}\right]G_4^{*\alpha+3(k'-0)}G_6^{*\beta+2.0}$$

$$+(-1)\left[\binom{1}{1}\binom{2}{1}+\ldots+\binom{k'}{1}\right]G_4^{*\alpha+3(k'-1)}G_6^{*\beta+2.1}$$

$$+\ldots+(-1)^{k'-1}\left[\binom{k'-1}{k'-1}+\binom{k'}{k'-1}\right]G_4^{*\alpha+3(k'-(k'-1))}G_6^{*\beta+2(k'-1)}$$

$$+(-1)^{k'}\left[\binom{k'}{k'}\right]G_4^{*\alpha+3(k'-k')}G_6^{*\beta+2k'}$$

bulunur. G_4^* ın kuvvetlerine μ ve G_6^* ın kuvvetlerine υ dersek açıkça görüldüğü gibi daima $4\mu+6\upsilon=12k'+4\alpha+6\beta$ dür. Böylece $4\mu+6\upsilon=k$ elde ederiz. Burada n=0,1,...,k' olmak üzere μ sayıları $\alpha+3(k'-n)$ ve υ sayıları ise $\beta+2n$ şeklindeki sayılar ve katsayılar ise $\left[(-1)^n\sum_{t=n}^{k'}\binom{t}{n}\right]$ şeklindeki sayılardır. Bu durumda f_k yı

$f_k=\sum_{n=0}^{k'}\left[(-1)^n\sum_{t=n}^{k'}\binom{t}{n}\right]G_4^{*\alpha+3(k'-n)}G_6^{*\beta+2n}$ şeklinde formüle ederiz. Bu ifadede $\alpha+3(k'-n)=\mu$, $\beta+2n=\upsilon$ yazarsak, sabit katsayı da μ ve υ ye bağlı bir sayı olur. Buradan $f_k=\sum_{\substack{\mu,\upsilon\geq 0\\ 4\mu+6\upsilon=k}}c_{\mu,\upsilon}G_4^{*\mu}G_6^{*\upsilon}$ bulunur. Bu sonucu bulmak için yararlandığımız fonksiyonlar yani -k boyutlu tam modüler formlar için baz olan $G_4^{*\alpha}G_6^{*\beta}G_4^{*3(k'-\upsilon)}\Delta^{*\upsilon}$ $(\upsilon=0,1,\ldots k')$ fonksiyonlarının terimleri ile f_k tek olarak ifade edilebileceğinden; $c_{\mu,\upsilon}$ sayıları da tek olarak belirlenir. Burada $4\mu+6\upsilon=k$ olduğundan eğer $k\equiv 0 \bmod 6$ ise $\mu=0$, $k\equiv 0 \bmod 4$ ise $\upsilon=0$ olur. Diğer durumlarda $\mu=0$ veya $\upsilon=0$ olmaz. k≥16 olmak üzere 0 fonksiyonunun $\sum_{\substack{4\mu+6\upsilon=k\\ \mu,\upsilon\geq 0}}c_{\mu,\upsilon}G_4^{*\mu}G_6^{*\upsilon}=0$ formunda bir gösterimi olduğunu kabul edelim. Bu durumda $c_{0,\frac{k}{6}}=0$ veya $c_{\frac{k}{4},0}=0$ olur. k'<k koşulu ile her zaman sol

taraftan ya G_4^* ya da G_6^* ile çarparak 0-fonksiyonunun bir temsili yukarıdaki formda elde edilebilir.

2.5.5.Tam Modüler Formların Bölümleri Olarak Modüler Fonksiyonların Gösterilişi

f, sonlu τ_μ için $\tau-\tau_\mu$ de ve $\tau_\mu = i\infty$ için $e^{2\pi i\tau}$ da ölçülen $n_1, n_2, \ldots, n_m$ mertebeli denk olmayan $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$ kutuplu $\overline{\Gamma}$ ile bir modüler fonksiyon olsun. Şimdi, -k boyutlu tam modüler formların M_k uzayının R boyutu, kutupların mertebelerinin P toplamından daha büyük olacak şekilde büyük bir k seçelim. $f_1, f_2, \ldots, f_R, M_k$ nın bir bazı olsun. $f_\upsilon^{(\lambda)}$, τ_μ sonlu ise τ ya göre $\tau_\mu = i\infty$ ise $e^{2\pi i\tau}$ ya göre f_υ nün λ. türevini göstersin. O zaman $\mu = 1,2,\ldots,m$, $\lambda = 0,1,\ldots,n_\mu^{-1}$ olmak üzere $\sum_{\upsilon=1}^{R} x_\upsilon f_\upsilon^{(\lambda)}(\tau_m) = 0$ denklemleri aşikar olmayan bir $c_1, c_2, \ldots, c_R$ çözümüne sahiptir. Çünkü $\upsilon = 1,2,\ldots,R$ olmak üzere f_υ fonksiyonları M_k uzayının bir bazı olduğundan türevler için $(x_1, x_2, \ldots, x_R) = (c_1, c_2, \ldots, c_R)$ çözümüne sahiptir. Dolayısıyla $f(\tau) = \sum_{\upsilon=1} c_\upsilon f_\upsilon(\tau)$ fonksiyonu bir tam modüler formdur. Bunu göstermek için $h_1(\tau) = f(\tau)\sum_{\upsilon=1}^{R} c_\upsilon f_\upsilon(\tau)$ diyelim.

i) $h_1(\tau)$ inhomojen modüler form mudur? Bunun için $\omega_2^{-k} h_1(\tau) = \omega_2^{-k} h_1\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)$ nin homojen modüler form olduğunu gösterelim : $\omega_2^{-k} h_1\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) = h(\omega_1, \omega_2)$ olsun.

$$h(\omega_1,\omega_2) = \omega_2^{-k} f\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)\sum_{\upsilon=1}^{R} c_\upsilon f_\upsilon\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \text{ olur.}$$

a) $$h(\lambda\omega_1,\lambda\omega_2) = (\lambda\omega_2)^{-k} f\left(\frac{\lambda\omega_1}{\lambda\omega_2}\right)\sum_{\upsilon=1}^{R} c_\upsilon f_\upsilon\left(\frac{\lambda\omega_1}{\lambda\omega_2}\right)$$

$$= \lambda^{-k}\omega_2^{-k} f\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)\sum_{\upsilon=1}^{R} c_\upsilon f\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) = \lambda^{-k} h(\omega_1,\omega_2)$$

b) $S=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$,

$$h(a\omega_1+b\omega_2, c\omega_1+d\omega_2)=(c\omega_1+d\omega_2)^{-k} f\left(\frac{a\omega_1+b\omega_2}{c\omega_1+d\omega_2}\right)\sum_{\upsilon=1}^{R} c_\upsilon f_\upsilon\left(\frac{a\omega_1+b\omega_2}{c\omega_1+d\omega_2}\right),$$

$$h(a\omega_1+b\omega_2, c\omega_1+d\omega_2)=\omega_2^{-k}\left(c\frac{\omega_1}{\omega_2}+d\right)^{-k} f\left(\frac{a\frac{\omega_1}{\omega_2}+b}{c\frac{\omega_1}{\omega_2}+d}\right)\sum_{\upsilon=1}^{R} c_\upsilon f_\upsilon\left(\frac{a\frac{\omega_1}{\omega_2}+b}{c\frac{\omega_1}{\omega_2}+d}\right)$$

$$=\omega_2^{-k} f(c\tau+d)^{-k} f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)\sum_{\upsilon=1}^{R} c_\upsilon f_\upsilon\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)$$

çıkar. $S\in\Gamma$ ve f modüler fonksiyon olduğundan $f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=f(S(\tau))f(\tau)$ ve f_υ modüler form olduğundan (2.14) den dolayı $(c\tau+d)^{-k} f_\upsilon\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=f_\upsilon(\tau)$ olur. Buna göre

$$h(a\omega_1+b\omega_2, c\omega_1+d\omega_2)=\omega_2^{-k} f(\tau)\sum_{\upsilon=1}^{R} c_\upsilon f_\upsilon(\tau)=\omega_2^{-k} f\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)\sum_{\upsilon=1}^{R} c_\upsilon f_\upsilon\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)=h(\omega_1,\omega_2)$$

olur.

c) $h(\omega_1,\omega_2)=h\left(\omega_2\frac{\omega_1}{\omega_2},\omega_2\right)=\omega_2^{-k}h(\tau,1)$ den $\omega_2^{-k}h(\tau,1)=\omega_2^{-k} f\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)\sum_{\upsilon=1}^{R} c_\upsilon f_\upsilon\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)$ ise $h(\tau,1)=f(\tau)\sum_{\upsilon=1}^{R} c_\upsilon f_\upsilon(\tau)$ olur. Burada $f(\tau)$ modüler fonksiyon ve $f_\upsilon(\tau)$ ise tam modüler form olduğundan $h(\tau,1)=f(\tau)\sum_{\upsilon=1}^{R} c_\upsilon f_\upsilon(\tau)$ fonksiyonu üst yarı düzlemde meromorftur.

d) $f(\tau)$ modüler fonksiyon olduğundan $b_h\neq 0$ olmak üzere $f(\tau)=\sum_{\upsilon\geq h}^{R} b_\upsilon e^{2\pi i\upsilon\tau}$ ve $\upsilon=1,2,\ldots,R$ olmak üzere $f_\upsilon(\tau)$ lar tam modüler formlar olduğundan

$f_\upsilon(\tau)=\sum\limits_{n\geq 0} b_\upsilon e^{2\pi i\upsilon\tau}$ şeklinde bir açılıma sahiptir. Dolayısıyla $h(\tau,1)=\sum\limits_{m\geq 0} c_m e^{2\pi i m\tau}$ şeklinde bir açılıma sahiptir. Koşullar sağlandığından $h(\omega_1,\omega_2)=\omega_2^{-k}h_1\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)$ homojen modüler form ve dolayısıyla $h_1\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)=f\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)\sum\limits_{\upsilon=1}^{R} c_\upsilon f_\upsilon\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)$ den $h_1(\tau)=f(\tau)\sum\limits_{\upsilon=1}^{R} c_\upsilon f_\upsilon(\tau)$ bir inhomojen modüler formdur.

ii) i) deki c) şıkkından dolayı $h_1(\tau)=h(\tau,1)$ fonksiyonu üst yarı düzlemde meromorf ve i) deki d) şıkkından dolayı ise hiç kutbu olmadığından $h_1(\tau)=f(\tau)\sum\limits_{\upsilon=1}^{R} c_\upsilon f_\upsilon(\tau)$ üst yarı düzlemde holomorf olur.

iii) i) deki d) şıkkından dolayı $h_1(\tau)$ nun $i\infty$ un bir komşuluğunda $m\geq 0$ olmak üzere $b_m\neq 0$ iken $h_1(\tau)=h(\tau,1)$ den $\sum\limits_{m\geq 0} c_m e^{2\pi i m\tau}$ şeklinde bir açılıma sahip olduğu görülür. Dolayısıyla $h_1(\tau)=f(\tau)\sum\limits_{\upsilon=1}^{R} c_\upsilon f_\upsilon(\tau)$ fonksiyonu bir tam modüler formdur. Buna göre aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 20: Her modüler fonksiyon, tam modüler formların bir bölümüdür. Gerçekten de yukarıda elde ettiğimiz sonuca göre, $h(\tau)=f(\tau)\sum\limits_{\upsilon=1}^{R} c_\upsilon f_\upsilon(\tau)$ alırsak, $f(\tau)=\dfrac{h(\tau)}{\sum\limits_{\upsilon=1}^{R} c_\upsilon f_\upsilon(\tau)}$ olur. Burada $h(\tau)$ ve $\sum\limits_{\upsilon=1}^{R} c_\upsilon f_\upsilon(\tau)$ tam modüler form ve $f(\tau)$ ise herhangi bir modüler fonksiyon olduğundan teorem ispatlanmış olur.

Aşağıdaki gibi bir sonuç elde ederiz : G_{12}', G_{12}'' nün M_{12} için bir baz olduğunu kabul edelim. O zaman her $\tau_0\in\mathscr{H}^*$ için, τ_0 da 1 mertebeli tek bir sıfıra sahip bir $G_{12}(\tau;\tau_\upsilon)=c'G_{12}'(\tau)+c''G_{12}''(\tau)$ formu vardır. Böylece, c sabit olmak üzere f' i

$$f(\tau) = c\frac{\prod\limits_{\upsilon} G_{12}(\tau;\tau_{\upsilon})}{\prod\limits_{\upsilon} G_{12}(\tau;\tau'_{\upsilon})} \tag{2.28}$$

formunda elde ederiz. Bu ifade de sonsuz çarpımlar uygun katsayılı f(τ) nun tüm τ_{υ} sıfırları ve τ'_{υ} kutupları için sonsuz çarpma açılımı üzerinde yapılmıştır.

Özel olarak, (2.24) denklemi ve Teorem 8 e göre Teorem 20 tekrar kanıtlanır. Çünkü (2.24) denklemi $\Delta^* = G_4^{*3} - G_6^{*2} = \dfrac{J'^6}{J^4(J-1)^3}$ olduğundan $\Delta^* J = \dfrac{J'^6}{J^3(J-1)^3} = G_4^{*3}$ ve dolayısıyla $\Delta^* J = G_4^{*3}$ den

$$J = \frac{G_4^{*3}}{\Delta^*} = \frac{G_4^{*3}}{G_4^{*3} - G_6^{*2}} \tag{2.30}$$

elde edilir. Ayrıca Teorem 8 e göre her modüler fonksiyon J'nin bir rasyonel fonksiyonu olduğundan ve yukarıda görüldüğü gibi J ise tam modüler formların bir rasyonel fonksiyonu olduğundan sonuçta her modüler fonksiyon tam modüler formların bir bölümü yani rasyonel fonksiyonu olarak ifade edilebilir.

9, 10, 14, 18, 19, 20 teoremleri, bir modüler formun homojen veya inhomojen olmasından bağımsız olarak geçerlidir. Bu ise modüler formların iki türü arasındaki tanıma göre sabit bağlantıyla ifade edilir.

SONUÇ

Bu çalışmada modüler grup ve modüler fonksiyonlar başlıkları altında homojen ve inhomojen dönüşümler, modüler grup ve üreteçleri, temel bölge, modüler fonksiyonlar ve modüler formlar incelendi. Modüler grubun tanımı için gerekli olan homojen ve inhomojen dönüşümler ele alındı ve sabit noktalara göre sınıflama yapıldı. Modüler grup altında temel bölgenin görüntüleri ile üst yarı düzlem, eğrisel üçgenlerle örtülecek şekilde bölümlere ayrıldı. Ayrıca modüler grubun elemanları için değeri değişmeyen modüler fonksiyonlar ve modüler formlar üzerinde çalışıldı. Modüler fonksiyonların sıfır ve kutuplarının sayısı yardımı ile fonksiyonun temel bölgede her bir değeri eşit sayıda olduğu ispatlandı. Mutlak modüler J değişmezinin yardımı ile modüler fonksiyonların varlığı kanıtlandı. Modüler fonksiyonların varlığının ise modüler formları gerektirdiği gösterildi.

KAYNAKLAR

1- Apostol,T.M., 1976. Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory, Springer-Verlag. New York, Heidelberg, Berlin.

2- Lehner, 1966. A Short Course in Automorphic Functions, Holt, Rinehart and Winston, New York.

3- San,N., 1977. Analitik Fonksiyonlar Teorisi, Cilt II, Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi Baskı İşleri, Bornova-İzmir.

4- Shimura,G., 1971. Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions, Iwonami Shoten, Publishers and Princeton University Press.

5- Schoeneberg,B., 1974. Elliptic Modular Functions an Introduction. Translated from the German by J.R.Smit and E.A.Schuardt, Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Erhan ÇALIŞKAN

Doğum Tarihi : 14 Mayıs 1972

Doğum Yeri : Zara

İlköğrenim : 1977-1982 Dipsizgöl Köyü İlkokulu

Ortaöğrenim : 1982-1985 Kocasinan Lisesi
1985-1988 Mehmet Beyazıt Lisesi

Yüksek Öğrenim : 1990-1994 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Görevi : Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalı Araştırma Görevlisi