YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİE GRUPLARI ÜZERİNDEKİ AFİN VE BİLİNEER KONTROL SİSTEMLERİNİN KONTROL EDİLEBİLİRLİK BAĞLANTISI

Elif Esra ARIKAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Doç.Dr.Ayşe KARA

İSTANBUL, 2009

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ i

SİMGE LİSTESİ ii

ŞEKİL LİSTESİ iii

ÖZET iv

ABSTRACT v

GİRİŞ 1

1. LİE GRUPLARI 2

    1.1 Manifoldlar 2
    1.2 Lie Grupları 9
    1.3 Lie Cebiri 13
    1.4 Üstel Tasvir 15
    1.5 Adjoint Gösterilim 18

2. Genel Kontrol Sistemleri 20

    2.1. Lie Grubu Üzerinde Afin Kontrol Sistemleri 21

KAYNAKLAR 29

ÖZGEÇMİŞ 30

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmamda sağlamış olduğu imkanlardan ve bulunmuş olduğu katkılarından dolayı kıymetli tez danışmanım Doç.Dr.Ayşe KARA' ya teşekkürlerimi borç bilirim.

SİMGE LİSTESİ

A^{-1}	A matrisinin tersi
A^{t}	A matrisinin transpozesi
$\overline{A}$	A matrisinin kompleks eşleniği
Ad	Adjoint tasvir
$Af(G)$	G grubunun afini
$Aut(g)$	g'den g'ye otomorfizmalar kümesi
C^{∞}	Her mertebeden türevi olan fonksiyonlar ailesi
$\det A$	A matrisinin determinantı
$\dim M$	M uzayının boyutu
$domain(X)$	X fonksiyonunun tanım kümesi
$f \circ g$	f ve g fonksiyonlarının bileşkesi
f^{-1}	f fonksiyonunun tersi
G	Lie grubu
$G \times G$	G ile G'nin kartezyen çarpımı
Id	Birim tasvir
$L(G)$	G Lie grubunun Lie cebiri
M	Manifold
R^{n}	Öklit uzayı
$[,]$	Lie parantezi
Σ	Kontrol edilebilirlik fonksiyonu
$\dot{\gamma}$	γ fonksiyonunun türevi
$\cong$	izomorf

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

1.1. Diferansiyellenebilir Manifold 3
1.2. Tanjant Vektör Uzayı 7

ÖZET

Lie Grubu Üzerindeki Afin Kontrol Sistemleri incelenmiş ve genelleştirilmiş Heisenberg Lie grubu üzerinde Afin kontrol sistemi örneklendirilmiştir.

Bu çalışma 2 bölümden oluşmaktadır

Birinci bölümde, manifold, Lie grubu, Lie cebiri, onların üstel tasviri ve adjoint gösterilimi gibi kontrol edilebilirlik için gerekli olan temel kavramlar örnekleriyle birlikte yer almıştır.

İkinci bölümde ise Lie grubu üzerindeki Afin kontrol sistemleri incelenmiş ve, lineer ve bilineer kontrol sistemleri durumları irdelenmiştir. Genelleştirilmiş Heisenberg Lie grubu üzerinde afin kontrol sistemi örneğine yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lie grubu, Lie cebiri, kontrol edilebilirlik, afin cebir, otomorfizma, türev, semi-direkt çarpım.

ABSTRACT

Affine Control System on Lie groups are studied and illustrated on the generalized Heisenberg Lie Group.

This work consists of two chapters.

In the first chapter, preliminaries which are necessary for controllability such as manifold, Lie group, Lie algebra, their connection via exponential map and adjoint representation with examples are contained.

In the second chapter, Affine Control Systems on Lie groups are studied and, linear and bilinear control systems cases are considered. An illustrative example of affine control system on the generalized Heisenberg Lie group is given.

Key Words: Lie group, Lie algebra, contollability, affine algebra, automorphism, derivation, semi-direct product.

GİRİŞ

Afin kontrol sistemi, genelleştirilmiş Heisenberg Lie grubu üzerinde incelenmek üzere ele alınmıştır. Bu sebeple gerekli olan Manifold, tanjant vektör uzayı, tanjant demeti, Lie grubu, Lie cebiri, onların üstel tasviri ve adjoint gösterilimi temel konuların tanımları ve örnekleri verilmiştir. Bu tanımlar ve incelemeler tamamlandıktan sonra afin kontrol sistemi ile lineer ve bilineer kontrol sistemleri arasındaki bağlantı incelenmiş özel olarak genelleştirilmiş Heisenberg Lie grubu üzerinde çalışılmıştır. Genelleştirilmiş Heisenberg Lie grubu, nilpotent basit bağlantılı Lie gruplarının önemli bir modelidir. Bununla birlikte, genelleştirilmiş Heisenberg Lie grubunun otomorfizmasının varlığı gösterilmiş ve Aut(H)-yörüngesinin yoğunluğu incelenmiştir.

Bölüm 1

1. Lie Grupları

1.1 Manifold

Tanım:

n boyutlu M yerel Öklit uzayının her bir noktasının komşuluğu, R^n Öklit uzayının açık bir alt kümesine homeomorfik olan Hausdorff topolojik uzayıdır.

φ, bağlantılı açık $U \subset M$ alt kümesinden R^n nin açık alt kümesi üzerine bir homeomorfizma olsun. O taktirde φ ye koordinat tasviri denir.

$r_i : R^n \to R$ fonksiyonu, $(a = (a_1,...,a_n) \in R^n)$ olmak üzere $r_i(a) = a_i$ şeklinde tanımlı olup, $x_i = r_i \circ \varphi$ fonksiyonlarına koordinat fonksiyonları ve (U,φ) çiftine de koordinat sistemi denir.

Tanım

M lokal Öklit uzayı üzerindeki C^∞ sınıfından bir Ғ diferansiyellenebilir yapısı Ғ=$\{(U_\alpha,\varphi_\alpha),\alpha \in I\}$ koordinat sistemlerinin bir topluluğu olup aşağıdaki koşulları sağlar:

- $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha = M$
- $\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} \in C^\infty, \quad \forall \alpha,\beta \in I$
- Ғ topluluğu maksimaldir

Şimdi de bir manifold üzerindeki diferansiyellenebilir yapıyı gösterelim:
M topolojik n . dereceden diferansiyellenebilir bir manifold ve bir p$\in$M noktasının açık komşulukları U_α ve U_β olsun. $U_\alpha \cap U_\beta \neq Ø$ olmasından dolayı $U_\alpha \cap U_\beta$ nin her noktasında $(x_\alpha{}^1,...,x_\alpha{}^n)$ ve $(x_\beta{}^1,...,x_\beta{}^n)$ gibi iki koordinat sistemi tanımlıdır. R^n de $U_\alpha$ya bir φ_α homeomorfizması altında homeomorf olan açık cümle E_α olsun. Bu durumda
$\psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset E_\alpha \subset R^n$ ve $\psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset E_\beta \subset R^n$ birer açık cümlelerdir.

$$\psi_\beta \circ \psi_\alpha{}^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

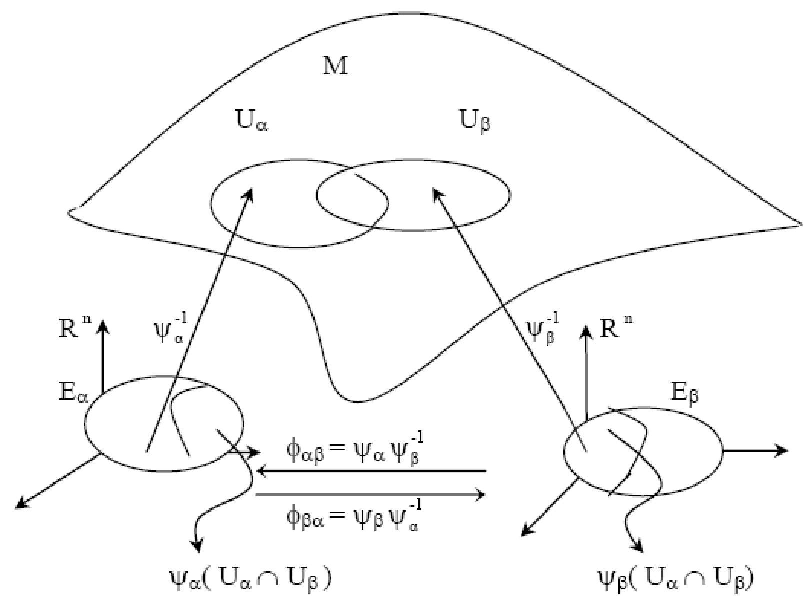
fonksiyonu iki homeomorfizmasının bileşkesi olduğundan bir homeomorfizmasıdır.

$\phi = \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ olsun. O taktirde her $u \in \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ noktası için

$$\phi_{\beta\alpha}(u) = \psi_\beta(\psi_\alpha^{-1}(u))$$

yazılabilir. Bir $p \in M$ noktasının komşuluklarından biri U_α olmak üzere bir $f : U_\alpha \subset M \to R$ fonksiyonu sürekli olsun. p nin bir açık komşuluğu U_α nın noktaları, kendilerinin lokal koordinatları ile belirtilirler. Dolayısıyla f fonksiyonu n değişkenin bir sürekli fonksiyonudur. Eğer bu fonksiyon $(x_\alpha^1(p),...,x_\alpha^n(p))$ noktasında diferansiyellenebilir ise f $p \in M$ noktasında diferansiyellenebilirdir.

Eğer $\phi_{\alpha\beta}$ nın tüm $\phi^i{}_{\alpha\beta}$, $1 \le i \le n$, bileşenleri diferansiyellenebilir ise $\phi_{\alpha\beta}$ de diferansiyellenebilirdir. Aynı şekilde tersi de geçerlidir.



Diferansiyellenebilir manifold

Örnek:

$S^2 = \{x \in R^3 : \| x \| = 1\}$ birim küre yüzeyinin manifold olduğunu gösterelim.

R^3 ün bir alt uzayı olarak, S^2 yi kendi topolojisi ile birlikte ele alalım. Bazı açık $\widetilde{U} \subset R^3$ için $U = \widetilde{U} \cap S^2$ ise U S^2 de açıktır. Bu durumda S^2 sayılabilir bir tabana sahip bir Hausdorff tur. Şimdi lokal öklit uzayı olduğunu gösterelim. İ=1,2 ya da 3 için $\widetilde{U}_i^+ = \{(x^1, x^2, x^3) : x^i > 0\}$

ve $\widetilde{U}_i^- = \{(x^1, x^2, x^3) : x^i < 0\}$ olsun, $\widetilde{U}_i^{\pm}$ iki açık kümeleri $x_i = 0$ hiperdüzlem koordinatı ile

R^3 ü böler.Açık kümeler arasındaki ilişki $U_i^{\pm} = \widetilde{U}_i^{\pm} \cap S^2$ olup , i=1,2,3; S^2 yi örter. İzdüşümleri ile birlikte

$\varphi_i^{\pm} : U_i^{\pm} \to R^2$

tasvirini tanımlayalım.

$\varphi_1^{\pm}(x^1, x^2, x^3) = (x^2, x^3),$

$\varphi_2^{\pm}(x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^3),$

$\varphi_3^{\pm}(x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^2),$

Kolayca görüldüğü gibi bu tasvirlerden $W = \{x \in R^2 : \|x\| < 1\}$ açık kümelerine homeomorfizma vardır. Böylece S^2 lokal Öklit ve topolojik bir manifold dur.

Ancak koordinatların değişimi için formül C^∞ dur, ve böylece bu koordinat komşulukları da C^∞ olur. Örneğin $\varphi_1^+ \circ (\varphi_2^-)^{-1}$ tasviri, $(\varphi_2^-)^{-1}$ ve φ_1^+ tasvirlerinin birleşmesiyle $U_1^+ \cap U_2^-$ üzerinde verilir.

$$(x^1, x^3) \xrightarrow{(\varphi_2^-)^{-1}} (x^1, -(1-(x^1)^2-(x^3)^2)^{1/2}, x^3)$$

$$(x^1, -(1-(x^1)^2-(x^3)^2)^{1/2}, x^3) \xrightarrow{\varphi_1^+} (-(1-(x^1)^2-(x^3)^2)^{1/2}, x^3).$$

O taktirde gösterimin değiştirilmesiyle, U_2^- koordinatı için (x^1, x^3) yerine (u^1, u^2); U_1^+ koordinatı için (x^2, x^3) yerine (v^1, v^2) kullanılarak,

$$v^1 = -(1-(u^1)^2-(u^2)^2)^{1/2}, \quad u^2 = v^2 \text{ olur.}$$

$\{(u^1,u^2):(u^1)^2+(u^2)^2<1\}$ üzerinde terimin kare kökü hiçbir zaman 0 olmadığından dolayı u^i nin C^∞ (sonsuz mertebeden türetilebilir) fonksiyonları v^i dir.

Benzer hesaplamalarla, $\varphi_2^- \circ (\varphi_1^+)^{-1}$ $\{(v^1,v^2):(v^1)^2+(v^2)^2<1\}$ üzerinde C^∞ dur. Böylece (U_1^+,φ_1^+) ve (U_2^-,φ_2^-) koordinat komşulukları da C^∞ dur. Paralel argumanlar diğer durumlar için de uygulanır. Doğal olarak bu durum, sekiz koordinat komşuluğunun tek bir C^∞ yapısını belirlemesi ile S^2 örtüsü tanımlar.

Böylece S^2, R^3 manifoldunun bir alt kümesi olarak manifolda bir örnektir ve de diğer koşulları da sağlamasından dolayı S^2 bir manifolddur.

Örnek

$SU(2,\mathbb{C})=\{A\in GL(2,\mathbb{C}):\overline{A}^t=A^{-1},\det A=1\}$ kümesinin diferansiyellenebilir bir manifold olduğunu gösterelim. Bu küme 2x2 lik tersi transpozesinin kompleks eşleniğine eşit ve determinantı 1 olan kompleks elemanlı matrislerin kümesidir ve Özel Üniter grup olarak adlandırılır.

$z,w\in\mathbb{C}$ olmak üzere $|z|^2+|w|^2=1$ olsun. Bu durumda

$$A=\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z}\end{pmatrix}\in SU(2,\mathbb{C}) \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

Ayrıca herhangi bir $A\in SU(2,\mathbb{C})$ için, $x^2+y^2+u^2+v^2=1$ olacak şekilde z=x+iy ve w=u+iv kompleks sayıları bulunabilir. $SU(2,\mathbb{C})$ nin açık alt kümelerini ve koordinat tasvirlerini inceleyelim.

$U_1=\{A\in SU(2,\mathbb{C}):x<0\}$
$U_2=\{A\in SU(2,\mathbb{C}):x>0\}$
$U_3=\{A\in SU(2,\mathbb{C}):y<0\}$
$U_4=\{A\in SU(2,\mathbb{C}):y>0\}$
$U_5=\{A\in SU(2,\mathbb{C}):u<0\}$
$U_6=\{A\in SU(2,\mathbb{C}):u>0\}$
$U_7=\{A\in SU(2,\mathbb{C}):v<0\}$
$U_8=\{A\in SU(2,\mathbb{C}):v>0\}$

kümeleri $SU(2,\mathbb{C})$ nin açık alt kümeleri olup $SU(2,\mathbb{C})=\sum_{i=1}^{8}\cup U_i$ dir.

Açık kümeleri taşıyan koordinat tasvirleri ise aşağıdaki şekilde verilebilirler;

$\varphi_1(A)=(y,u,v)$, $\varphi_2(A)=(y,u,v)$

$\varphi_3(A)=(x,u,v)$, $\varphi_4(A)=(x,u,v)$

$\varphi_5(A)=(x,y,v)$, $\varphi_6(A)=(x,y,v)$

$\varphi_7(A)=(x,y,u)$, $\varphi_8(A)=(x,y,u)$

Sonuç olarak $SU(2,\mathbb{C})$, $\widetilde{F}=\{(U_i,\varphi_i):i=1,2,3,...,8\}$ diferansiyellenebilir yapısı ile birlikte 3-boyutlu bir diferansiyellenebilir manifold olur.

Tanım

v , R^n öklit uzayında bir p noktasında $v_1,...,v_n$ bileşenleri ile bir vektör olup diferansiyellenebilir fonksiyonlar üzerinde bir operatör olarak düşünülebilir. Özellikle f , p nin bir komşuluğunda diferansiyellenebilir ise p noktasında v yönünde f nin yönlü türevi olarak $v(f)$ reel sayısı aşağıdaki şekilde hesaplanır;

$$v(f)=v_1\frac{\partial f}{\partial r_1}\Big|_p+...+v_n\frac{\partial f}{\partial r_n}\Big|_p$$

(1)

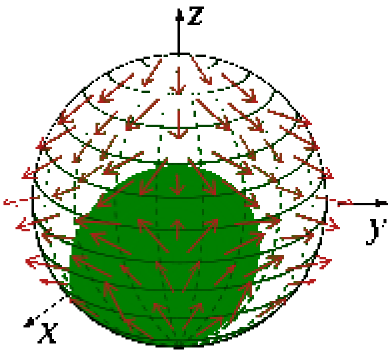
Diferansiyellenebilir fonksiyonlar üzerinde v vektörünün bu operatörü iki önemli özelliği sağlar;

$v(f+\lambda g)=v(f)+\lambda v(g),$

$v(f.g)=f(p)v(g)+g(p)v(f),$

(2)

burada f ve g p noktası komşuluğunda diferansiyellenebilir fonksiyonlar ve λ reel bir sayıdır. İlk özellik v nin lineer fonksiyon görevi gördüğünü ikinci özellik ise bir türev operatörü işlevi gördüğünü belirtmektedir. Bu özelliklerden dolayı v manifoldun p noktasındaki tanjant vektörüdür.



$p \in M$ (manifold) noktasında bir v tanjant vektörü $\widetilde{F}_p$ cebirinin bir lineer türevi olsun. $\forall f, g \in \widetilde{F}_p$ ve $\lambda \in R$ için özellik (2) sağlanır.

Dolayısıyla M_p tanjant vektörlerinin p noktasındaki kümesini temsil eder.

v ve $v' \in M_p$, $\lambda \in R$ için

$$(v+v')(f) = v(f) + V'(f),$$
$$(\lambda v(f) = \lambda(v(f)) \qquad f \in \widetilde{F}(p)$$

vektör uzayı yapısı sağlanıyorsa, manifoldun p noktasındaki tanjant uzayı elde edilir ve $T_p(M)$ ile gösterilir.

$\dim(M) = \dim T_p(M)$ dir.

Tanım

M bir analitik manifold olmak üzere $p \in M$ için

$T(M) = \cup_{p \in M} T_p(M)$

kümesine tanjant demeti denir ve diferansiyellenebilir manifold yapısındadır.

Aynı zamanda dim(TM)=2dim(M)

Tanım

M bir manifold olmak üzere $domain(X) \subset M$ nin açık alt kümesinden $T(M)$ teğet demetine tanımlı olan $X : domain(X) \subset M \rightarrow T(M)$ sürekli fonksiyonuna vektör alanı denir.

$\forall p \in domain(X)$ için $X(p) \in T_p(M)$ dir.

Not

$X(p) = X_p$ şeklinde gösterilebilir. Eğer f, $domain(X)$ üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise $X(f)$, $domain(X)$ üzerinde bir fonksiyon olup $p \in domain(X)$ deki değeri

$$X(f)(p) = X_p(f)$$

şeklindedir.

Tanım

M bir manifold ve X, $domain(X) \subset M$ üzerinde tanımlı bir vektör alanı olsun. Her $p \in M$ noktası için, diferansiyel denklemlerin varlık ve teklik teoreminden dolayı, mümkün olan her t noktası için

$$X_{\gamma(X,p,t)} = \dot{\gamma}(X,p,t)$$

olacak şekilde X ' in $\gamma(X,p,t)$ integral eğrisi vardır.

Özel olarak t=0 alındığında,

$$\gamma(X,p,0) = p$$

elde edilir.

Tanım

X ve Y, M üzerinde diferansiyellenebilir vektör alanları olsunlar. $[X,Y]$ de bir diferansiyellenebilir vektör alanı olup $m \in M$ ve $f \in C^\infty$ için

$$[X,Y]_m(f) = X_m(Yf) - Y_m(Xf)$$

şeklinde tanımlıdır.

Lie Parantezinin Özellikleri

1. $[X,X] = 0$
2. $[X,Y] = -[Y,X]$ ters simetri özelliği
3. $[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] = 0$ jakobi özelliği

$[X,Y] = xy - yx$ işlemi ile temsil edilir.

Tanım

- M ve N birer manifold olmak üzere, eğer $\varphi(p)$ de diferansiyellenebilen

$$
\begin{array}{ccc}
U \subset M & \xrightarrow{f} & N \\
\varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\
\varphi(U) & \xrightarrow{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}} & \psi(V)
\end{array}
$$

ve yukarıdaki şekilde ola fonsiyonu n, p için (U,φ) ve $f(p)$ için (V,ψ) koordinat sistemleri varsa

$f: M \to N$ $p \in M$ de diferansiyellenebilir olduğu söylenir.

- M ve N iki manifold ve $f: M \to N$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun.

f in türevi $df: TM \to TN$ tasviri

$df(X)(g) = X(g \circ f), \quad \forall X \in TM$ ve her bir $g \in C^{\infty}(N)$

şeklinde tanımlıdır.

1.2 Lie Grupları

- G bir diferansiyellenebilir manifold
- $(G, .)$ bir grup
- $G \times G \to G$, $(\sigma,\tau) \to \sigma\tau^{-1}$ diferansiyellenebilir bir tasvir ise

G bir Lie grubudur.

Örnek

$SU(2,\mathbb{C}) = \{A \in GL(2,\mathbb{C}) : \overline{A}^t = A^{-1}, \det A = 1\}$ manifoldu aynı zamanda grup yapısına sahiptir.

- $A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \in SU(2,\mathbb{C})$ dir

$\det A = z^2 + w^2 = 1$. Ayrıca lineer cebirden biliyoruz ki bir kare matrisin adjointini determinantına bölerek tersini buluruz ki bu da aldığımız kümenin tanımında yer almaktadır.

Adjoint: Kompleks eşleniğini alıp transpoze edildiğinde oluşan matristir.

$$\begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ -\overline{w_1} & \overline{z_1} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} z_2 & w_2 \\ -\overline{w_2} & \overline{z_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_3 & w_3 \\ -\overline{w_3} & \overline{z_3} \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ -\overline{w_1} & \overline{z_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_2 & w_2 \\ -\overline{w_2} & \overline{z_2} \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} z_3 & w_3 \\ -\overline{w_3} & \overline{z_3} \end{pmatrix}$$

olduğu gereken işlemler yapıldığında görülür.

- $\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$ olduğundan

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SU(2,\mathbb{C})$ olur.

- Küme tanımında matrisin tersi, kendinin transpozesinin eşleniğine eşit

olduğundan

$\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z} & -w \\ \overline{w} & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{z} & -w \\ \overline{w} & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olduğu görülür ve dolayısıyla $\begin{pmatrix} \overline{z} & -w \\ \overline{w} & z \end{pmatrix} \in SU(2,\mathbb{C})$ dir

Böylece $SU(2,\mathbb{C})$ çarpma işlemine göre bir gruptur.

$$\varphi : SU(2,\mathbb{C}) \rightarrow R^4$$
$$\varphi(A) = (x, y, u, v)$$

tasvirini ele alalım. Burada z=x+iy ve w=u+iv olmak üzere

$A = \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \in SU(2,\mathbb{C})$ dir.

$A_1 = \begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ -\overline{w_1} & \overline{z_1} \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} z_2 & w_2 \\ -\overline{w_2} & \overline{z_2} \end{pmatrix} \in SU(2,\mathbb{C})$ matrislerini ele alalım.

$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{z_2} & -w_2 \\ \overline{w_2} & z_2 \end{pmatrix}$ olup $A_1 A_2^{-1}$ çarpımına bakalım.

$A_1 A_2^{-1} = A_3 \begin{pmatrix} z_3 & w_3 \\ -\overline{w_3} & \overline{z_3} \end{pmatrix}$, $z_3 = x_3 + iy_3$, $w_3 = u_3 + iv_3$ olsun.

Bu iki matirisin çarpımı sonucunda

$$x_3 = x_1x_2 + y_1y_2 + u_1u_2 + v_1v_2$$
$$y_3 = -x_1y_2 + y_1x_2 - u_1v_2 + v_1u_2$$
$$u_3 = -x_1u_2 + y_1v_2 + u_1x_2 - v_1y_2$$
$$v_3 = -x_1v_2 - y_1u_2 + u_1y_2 + v_1x_2$$

elde edilir. Buradan $\varphi(A_1A_2^{-1}) = \varphi(A_3) = (x_3, y_3, u_3, v_3)$ olup matris çarpımı diferansiyellenebilirdir. Sonuç olarak $SU(2,\mathbb{C})$ bir Lie grubudur.

Önerme:

Bir G Lie grubu için,

$\varphi : G \times G \to G$

$(\sigma, \tau) \to \sigma\tau^{-1}$

tasvirinin diferansiyellenebilir olması için gerek ve yeter koşul

$\varphi_1 :\ G \times G \to G$

$\varphi_1(\sigma, \tau) \to \sigma\tau$

ve

$\varphi_2 :\ G \to G$

$\varphi_2(\tau) \to \tau^{-1}$

tasvirlerinin diferansiyellenebilir olması gerekir

İspat:

φ diferansiyellenebilir bir tasvir olsun.

$G \xrightarrow{exId} \{e\} \times G \xrightarrow{\varphi} G$

$\tau \mapsto (e\tau) \mapsto \tau^{-1}$

şeklinde $\varphi_2 = \varphi \circ (e \times Id)$ alınırsa diferansiyellenebilir tasvirlerin bileşiminin diferansiyellenebilir olmasından

$\varphi_2 :\ G \to G$

$\varphi_2(\tau) \to \tau^{-1}$

tasviri de diferansiyellenebilirdir.

Benzer şekilde,

$$G\times G \xrightarrow{Id\times\varphi_2} G\times G \xrightarrow{\varphi} G$$

$$(\sigma,\tau)\mapsto(\sigma,\tau^{-1})\mapsto\sigma\tau$$

şeklinde $\varphi_1=\varphi\circ(Id\times\varphi_2)$ alınırsa diferansiyellenebilir tasvirlerin bileşiminin diferansiyellenebilir olmasından

$$\varphi: G\times G\to G$$

$$(\sigma,\tau)\to\sigma\tau^{-1}$$

tasviri de diferansiyellenebilirdir.

Bu kez ϕ_1 ve φ_2 tasvirleri diferansiyellenebilir olsun.

$$G\times G \xrightarrow{Id\times\varphi_2} G\times G \xrightarrow{\varphi_1} G$$

$$(\sigma,\tau)\mapsto(\sigma,\tau^{-1})\mapsto\sigma\tau^{-1}$$

şeklinde $\varphi=\varphi_1\circ(Id\times\varphi_2)$ alınırsa diferansiyellenebilir tasvirlerin bileşiminin diferansiyellenebilir olmasından

$$\varphi: G\times G\to G$$

$$(\sigma,\tau)\to\sigma\tau^{-1}$$

tasviri de diferansiyellenebilirdir.

Tanım

$\sigma\in G$ olmak üzere

$l_\sigma : G\to G$

$l_\sigma(\tau)=\sigma\tau$

tasvirine σ nın sol ötelemesi denir. l_σ nın türevi

$dl_\sigma : TG\to TG$ şeklindedir ve $dl_\sigma(T_{\sigma\tau}G)\subset T_{\sigma\tau}G$ dir.

Tanım

X bir vektör alanı olmak üzere $\forall\sigma\in G$ için $X\circ l_\sigma = dl_\sigma\circ X$ oluyorsa X e G üzerinde sol invaryanttır denir.

Teorem

G bir Lie grubu ve g, G nin sol invaryant vektör alanlarının bir kümesi olsun. Bu durumda g bir reel vektör uzayıdır.

$$\alpha : g \to T_e G$$
$$\alpha(X) = X_e$$

şeklinde tanımlanan α tasviri bir izomorfizmadır.

Sonuç olarak $\dim g = \dim T_e G = \dim G$ olur.

İspat

g nin reel vektör uzayı olduğu sol invaryant vektör alanlarının bir kümesi olmasından aşikardır.

$X, Y \in g$ ve $a, b \in R$ için

vektör alanı özelliğinden

$\alpha(aX + bY) = (aX + bY)(e) = aX(e) + bY(e) = a\alpha(X) + b\alpha(Y)$

elde edilir ve dolayısıyla α lineerdir.

$\forall \sigma \in G$ için $\alpha(X) = \alpha(Y)$ olsun. Sol invaryant tanımından

$$X(\sigma) = (X \circ l_\sigma)(e) = (dl_\sigma \circ X)(e) = dl_\sigma(X(e)) = dl_\sigma(Y(e)) = ((dl_\sigma \circ Y)(e) = (Y \circ l_\sigma)(e) = Y(\sigma)$$

olup $X = Y$ dir ve α 1-1 dir.

Bununla beraber $\forall \sigma \in G$ ve $X \in T_e G$ için $X(\sigma) = dl_\sigma(x)$ sağlanıyor ise α örtendir. O taktirde $\alpha(X) = X$ olur ve X sol invaryanttır.

$\forall \sigma, \tau \in G$ için

$X(\sigma\tau) = dl_{\sigma\tau}(X) = dl_\sigma dl_\tau(X) = dl_\sigma(X(\tau))$ elde edilir. Böylece $g \cong T_e G$ dir ve sonuç olarak

$\dim g = \dim T_e G = \dim G$ dir.

1.3 Lie Cebiri

g, bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere

$$g \times g \to g$$
$$(X,Y) \to [X,Y]$$

Tasviri aşağıdaki özelliklere sahip ise g ye Lie cebiri denir.

1. K üzerinde bilineer (ikili-lineer)

$$[\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, Y] = \alpha_1 [X_1, Y] + \alpha_2 [X_2, Y]$$
$$[X, \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2] = \alpha_1 [X, Y_1] + \alpha_2 [X, Y_2]$$

$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in K$

2. $[X,Y] = -[Y,X]$ ters simetri özelliği

3. $[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] = 0$ (jakobi özelliği)

G Lie grubunun Lie cebiri, G üzerindeki sol invaryant vektör alanlarının Lie cebiri olarak ta tanımlanır.

Ayrıca, G nin Lie cebirinin birimindeki $T_e(G)$ tanjant uzayı olarak da verilir.

Örnek

3- BOYUTLU HEİSİNBERG GRUBU

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in R \right\}$$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

$\forall t \in R$ için G de bir noktaya sahiptir ve $\gamma(t)$, G üzerinde bir eğridir.

$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = e$$

$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = X \in T_e(G)$$

$$\alpha(t)=\begin{pmatrix}1 & t & 0\\ 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in G$$

Benzer şekilde $\forall t\in R$ için G de bir noktaya sahiptir ve $\alpha(t)$, G üzerinde bir eğridir.

$$\alpha(0)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=e$$

$$\alpha(0)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=Y\in T_e(G)$$

$$\beta(t)=\begin{pmatrix}1 & 0 & t\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in G$$

Benzer şekilde $\forall t\in R$ için G de bir noktaya sahiptir ve $\beta(t)$, G üzerinde bir eğridir.

$$\beta(0)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=e$$

$$\beta(0)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=Z\in T_e(G)$$

$$T_e(G)=span\left\{\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\left[X,Y\right]=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=Z,$$

$\left[X,Z\right]=0$ ve $\left[Y,Z\right]=0$.

1.4 Üstel tasvir

Tanım

$\varphi:R\to G$ homomorfizması G nin bir parametreli alt grubudur.

Tanım

G bir Lie grubu , g onun bir Lie cebiri olsun ve $X \in g$ olsun. O taktirde

$\lambda \dfrac{d}{dr} \mapsto \lambda X$ tasviri R nin Lie cebirinin g nin içine bir homomorfizmadır.

Reel eksen basit bağlantılı olduğundan (yani temel grubu aşikar olan bağlantılı topolojik uzay)

$$d\exp_X\left(\lambda \frac{d}{dr}\right) = \lambda X$$

olacak şekilde

$$\exp : R \to G$$

tek bir 1-parametreli alt grubu vardır.

Başka bir deyişle $t \mapsto \exp_X(t)$ $_G$ nin tek bir 1-parametreli alt grubudur ve G nin 0 daki tanjant vektörü $X(e)$ dir.

$\exp : g \to G$ tasviri $\exp(X) = \exp_X(1)$ ile tanımlıdır.

Teorem

G bir lie grubu ve g de onun lie cebiri olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

1. $\exp(tX) = \exp_X(t) \qquad \forall\ t \in R$
2. $\exp(t_1 + t_2)X = (\exp t_1 X)(\exp t_2 X) \quad \forall t_1, t_2 \in R$
3. $\exp(-tX) = (\exp tX)^{-1} \qquad \forall t \in R$

Teorem

$\varphi : H \to G$ bir homomorfizma olsun, o taktirde aşağıdaki diyagram değişmelidir.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\varphi"] & G \\ h \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "d\varphi"] & g \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd} \qquad (2)$$

İspat

$X \in h$ olsun. O halde $t \mapsto \varphi(\exp tX)$ G de bir pürüzsüz eğridir ve 0 daki tanjant vektörü $d\varphi(X(e))$ dir. Aynı zamanda φ bir homomorfizma olmasından dolayı G'nin 1-parametreli bir alt grubudur. Ancak $t \mapsto \exp t(d\varphi(X))$ G nin tek 1-parametreli alt grubu olmasından dolayı onun 0 daki tanjant vektörü $(d\varphi(X))(e)$ olur. Böylece $\varphi(\exp tX) = \exp t(d\varphi(X))$,

böylece

$$\varphi(\exp X) = \exp(d\varphi(X)) \text{ olur.}$$

Örnek

$$\exp : gl(n,\mathbb{C}) \to Gl(n,\mathbb{C})$$

üstel tasviri kompleks genel lineer grup için üssel matris ile verilmiştir. e birim elemanı burada $Gl(n,\mathbb{C})$ de I birim matrisi olarak verilmiştir.

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^j}{j!} + \ldots$$

burada $A \in gl(n,\mathbb{C})$ dir.

$Gl(n,\mathbb{C})$ nin alt grupları:

(a) *Üniter grup* $U(n) = \{A \in Gl(n,\mathbb{C}) : A^{-1} = \overline{A}^t\}$,

(b) *Özel üniter grup* $Sl(n,\mathbb{C}) = \{A \in Gl(n,\mathbb{C}) : \det A = 1\}$,

(c) *Kompleks ortogonal grup* $O(n,\mathbb{C}) = \{A \in Gl(n,\mathbb{C}) : A^{-1} = A^t\}$.

Gösterdiğimiz alt grupların her biri, $Gl(n,\mathbb{C})$ nin bir öz alt grubu ve de kapalı alt kümesi, aynı zamanda Lie alt grubudur. Bu Lie grupların Lie cebirleri ise aşağıdaki gibidir.

(a') *Skew − Hermit matrisleri* $u(n) = \{A \in gl(n,\mathbb{C}) : \overline{A} + A^t = 0\}$,

(b') *İzi 0 olan matrislerin uzayı* $sl(n,\mathbb{C}) = \{A \in gl(n,\mathbb{C}) : izA = 0\}$,

(c') *Ters simetrik matrislerin uzayı* $o(n,\mathbb{C}) = \{A \in gl(n,\mathbb{C}) : A + A^t = 0\}$.

Örnek

3-boyutlu Heisenberg grubunun Lie cebiri g olsun.

$\exp : g \to G$ üstel tasviri için $\exp(X)$ e bakalım. $X \in g$ için

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ idi.}$$

$$\exp(X) = I + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \ldots$$

şeklinde olup $0 = X^2 = X^3 = \ldots\ldots$ olduğundan

$$\exp(X) = I + X + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \text{ olur.}$$

Benzer şekilde $Y, Z \in g$ için de $\exp(Y)$, $\exp(Z)$ üstel tasvirler bulunabilir.

1.5 Adjoint Gösterilim

Tanım

M bir diferansiyellenebilir manifold ve G bir Lie grubu olsun.

$\mu : G \times M \to M$

$\mu(\sigma\tau, m) = \mu(\sigma, \mu(\tau, m))$, $\mu(e, m) = m$ $(\forall \sigma, \tau \in G, \forall m \in M)$

şeklinde diferansiyellenebilir tasvire G nin M üzerindeki sol etkisi denir. Böyle bir durumda sabit bir $\sigma \in G$ noktası için $m \to \mu(\sigma, m)$ tasviri M nin bir difeomorfizmasıdır ve μ_α şeklinde gösterilir.

Benzer şekilde,

$\mu : M \times G \to M$

$\mu(m, \sigma\tau) = \mu(\mu(m, \sigma), \tau)$, $\mu(m, e) = m$ $(\forall \sigma, \tau \in G, \forall m \in M)$ olmasına ise G nin M üzerindeki sağ etkisi denir.

Tanım

Bir G Lie grubunun kendi üzerinde sol etkisi ile oluşan iç otomorfizması

$i : G \times G \to G$

$i(\sigma, \tau) = \sigma\tau\sigma^{-1} = i_\sigma(\tau)$

şeklindedir.

Birim bu etkinin sabit bir noktasıdır. Böylece $\forall \sigma \in G$ için $i_\sigma(e) = e$ olur. O zaman

$\sigma \mapsto di_\sigma\big|_e T_e G \cong g$ tasviri G nin $Aut(g)$ içine bir gösterimidir.

Bu gösterim, adjoint gösterilim olarak adlandırılır ve

$Ad : G \to Aut(g)$

şeklinde belirtilir. Adjoint gösterilimin diferansiyeli

$d(Ad) = ad$

şeklinde gösterilir.

Böylece

$Ad(\sigma) = Ad_\sigma$, $ad(X) = ad_X$

gösterilebilinir. (2) deki değişmeli diyagramdan aşağıdaki değişmeli iki diyagram elde edilir.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{Ad} & Aut(g) \\ \exp\uparrow & & \uparrow\exp \\ g & \xrightarrow{ad} & End(g) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{i_\sigma} & G \\ \exp\uparrow & & \uparrow\exp \\ g & \xrightarrow{Ad_\sigma} & g \end{array}$$

Başka bir deyişle,

$\exp t(Ad_\sigma(X) = \sigma(\exp tX)\sigma^{-1}$.

Özel olarak $G = Aut(V)$ alırsak, diagramlar $B \in Aut(V)$ için

$$\begin{array}{ccc} Aut(V) & \xrightarrow{Ad} & Aut(EndV) \\ \exp\uparrow & & \uparrow\exp \\ End(V) & \xrightarrow{ad} & End(EndV) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} Aut(V) & \xrightarrow{a_B} & Aut(V) \\ \exp\uparrow & & \uparrow\exp \\ End(V) & \xrightarrow{Ad_B} & End(V) \end{array}$$

haline gelir.

Eğer ek olarak $C \in End(V)$ alınırsa, o taktirde

$Ad_B(C) = B \circ C \circ B^{-1}$

olur.

Bölüm 2

2. Genel Kontrol Sistemleri

M bir diferansiyellenebilir manifold ve $X(M)$ ile M ' nin açık alt kümeleri üzerinde tanımlı olan tüm diferansiyellenebilir vektör alanlarının bir kümesi gösterilsin. Her bir $X \in X(M)$, M üzerinde yerel difeomorfizmlerin 1-parametreli bir grubunu tanımlar. Yani mümkün olan tüm X vektör alanları her bir $t \in R$ için manifold üzerindeki vektör alanları tarafından üretilmiş adi diferansiyel denklemlerin varlık ve teklik teoreminden dolayı

$X_t : domain(X_t) \subset M \to M$ nin yerel bir difeomorfizma olduğu elde edilir.

Tanım

$\Sigma(M, D)$ sıralı ikilisine bir kontrol sistemi denir. Burada M bir diferansiyellenebilir manifold ve $D \subset X(M)$ dir.

Burada M durum uzayı D ise dinamiktir.

Σ kontrol sistemi,

$G_\Sigma = \left\{ z_{t_1}^1 \circ z_{t_2}^2 \circ ... \circ z_{t_r}^r : z^j \in D, t_j \in R, j \in N \right\}$

yerel difeomorfizmaların pseudo grubunu üretir.l

Σ kontrol sistemi,

$S_\Sigma = \left\{ z_{t_1}^1 \circ z_{t_2}^2 \circ ... \circ z_{t_r}^r : z^j \in D, t_j \geq 0, j \in N \right\}$

yerel difeomorfizmaların pseudo yarı grubunu üretir.

$G_\Sigma = \left\{ \phi(x) : \phi \in G_\Sigma \right\}$ kümesine Σ ' nın x'in yörüngesi ve

$S_\Sigma = \left\{ \phi(x) : \phi \in S_\Sigma \right\}$ kümesine Σ nın x' deki pozitif yörüngesi denir.

Genel olarak, $S_\Sigma \subset G_\Sigma \subset M$ ' dir. Kontrol edilebilirlik problemi, durum uzayı M, durum elemanları x' ler ve dinamik D ,zerindeki hangi koşullar altında $S_\Sigma = M$ 'dir.

2.1 Lie Grubu Üzerinde Afin Kontrol Sistemleri

Lie cebiri L(G) olan G, bağlantılı bir Lie grubu olsun. G nin Afin grubu Af(G), G ile Aut(g) nin semi-direct çarpımlarıdır. Yani,
$Af(G) = Aut(G) \times_s G$ olur.

Af(G) de çarpım aşağıdaki gibi tanımlıdır.
$(\phi, g_1) \cdot (\psi, g_2) = (\phi \circ \psi, g_1 \phi(g_2))$.
e ve 1 sırasıyla G ve Aut(G) nin birim elemanlarıdır. Af(G) nin birim elemanı $(1, e)$ ve $(\phi, g) \in Af(G)$ nin tersi ise $(\phi^{-1}, \phi^{-1}(g^{-1}))$ dir.
Tamın grup yapısını sağladığını gösterelim:

Kapalılık

$$(\phi_1, g_1).(\phi_2, g_2) = (\underbrace{\phi_1 \circ \phi_2}_{\in Aut(G)}, \underbrace{g_1 \phi_1(g_2)}_{\in G})$$

Birleşme

$$\begin{aligned}
[(\phi_1, g_1),(\phi_2, g_2)](\phi_3, g_3) &= [\phi_1 \circ \phi_2, g_1 \phi_1(g_2)](\phi_3, g_3) \\
&= (\phi_1 \circ \phi_2 \circ \phi_3, g_1 \phi_1(g_2).\phi_1 \circ \phi_2(g_3)) \\
(\phi_1, g_1)[(\phi_2, g_2),(\phi_3, g_3)] &= (\phi_1, g_1)[\phi_2 \circ \phi_3, g_2 \phi_2(g_3)] \\
&= (\phi_1 \circ \phi_2 \circ \phi_3, g_1 \phi_1(g_2).\phi_1 \circ \phi_2(g_3))
\end{aligned}$$

Ters eleman

$$(\phi, g)(\psi, h) = (\phi \circ \psi, g\phi(h)) = (1, e)$$

$$\phi \circ \psi = 1 \Rightarrow \phi^{-1} = \psi$$
$$g\phi(h) = e \quad \Rightarrow \phi(h) = g^{-1} \quad \Rightarrow \phi^{-1}(g^{-1}) = h$$

Dolayısıyla
$(\phi, g) \in Af(G)$ nin tersini $(\phi^{-1}, \phi^{-1}(g^{-1}))$ şeklinde bulmuş olduk.

O halde sırasıyla G ve Aut(G), $g \to (1,g)$ ve $\phi \to (\phi,e)$ tasvirleri için Af(g) nin içine gömülüdürler. Böylece G ve Aut(G) , Af(G) nin alt grubu olurlar.

$Af(G) \times G \to G$

var olan doğal etki,

$(\phi,g_1) \in Af(G)$ ve $g \in G$ için

$(\phi,g_1) \cdot g_2 \to g_1\phi(g_2)$

şeklinde tanımlıdır. İşlem yaparsak,

$\mu : Af(G) \times G \to G \qquad (\phi,g_1) \in Af(G)$

$(\phi,g_1).g_2 \to g_1\phi(g_2) \qquad g_2 \in G$

$\mu((\phi,g_1).(\psi,g_1'),g_2) = \mu((\phi,g_1),\mu(\psi,g_1'),g_2)$

$\mu((\phi \circ \psi, g_1\phi(g_1'),g_2)) = g_1\phi(g_1').\phi \circ \psi(g_2) \in G$

elde edilir.

Diğer taraftan,

$\mu((\phi,g_1),g_1'\psi(g_2)) = g_1\phi(g_1'\psi(g_2))$

$= g_1\phi(g_1').\phi \circ \psi(g_2) \in G$

elde edilir.

$\mu(e,m) = m$ olduğunu gösterelim;

$e = (1,e) \qquad e \in Af(G), \quad g_2 \in G$

$\mu((1,e),g_2) = e.Id(g_2) = g_2$

Dolayısıyla $Af(G) \times G \to G$ üzerindeki etkiyi göstermiş olduk.

Bu etki geçişlidir. Gerçekten, eğer $g_2 = e$ alınırsa, $\phi(g_2) = e$ olduğundan $(\phi,g_1) \cdot e = g_1$ olur.

G ve Aut(G), Af(G) nin kapalı alt gruplarıdır. L(G) Lie cebirinin otomorfizması Aut(L(G)) ile gösterilir ve onun da Lie cebiri Der(L(G)) dir, yani L(G) nin türevi onun Lie cebiridir. Eğer G basit bağlantılı ise, Aut(G) ve Aut(L(G)) izomorfiktir. Aslında G nin $d\phi|_1$ birimdeki diferansiyelinin her bir ϕ otomorfizmasına denk Φ otomorfizması vardır. L(G) nin herhangi bir otomorfizması G nin bir otomorfizmasına genişler. Dolayısıyla Φ, Aut(G) ile Aut(L(G)) arasında bir otomorfizmadır. Böylece Aut(G) nin Lie cebiri $Der(L(G))$ dir.

Af(G) nin Lie cebiri af(G), $Der(L(G))\times_s L(G)$ nin semi-direct çarpımıdır. Lie parantezi ise aşağıdaki gibi tanımlıdır,

$$[(D_1X_1),(D_2,X_2)]=([D_1,D_2],D_1X_2-D_2X_1+[X_1,X_2])$$

$G\subset Af(G)$ Lie grubu üzerindeki $\Sigma=(G,D)$ afin kontrol sistem aşağıdaki gibi diferansiyel denklemlerin ailesi ile belirlenir:

$$\dot{x}=(D+X)(x)+\sum_{j=1}^{d}u_j(t)(D^j+Y^j)(x)$$

burada $x\in G;D,D^1,...,D^d\in Der(L(G))$ ve $X,Y^1,...,Y^d\in L(G)$ için denklem U ile parametremize edilmiştir ve U parçalı sabit reel değerli fonksiyonların ailesidir. O taktirde dinamik aşağıdaki gibi verilir.

$$D=\left\{D+X+\sum_{j=1}^{d}u_j(D^j+Y^j)\,|u\in R^d\right\}.$$

Eğer afin kontrol sistem değişmeli bir Lie grubu üzerinde düşünülürse, lineer kontrol sistem oluşur. Gerçekte değişmeli Lie grubunu için, her bir Lie cebirinin elemanlarının parantezde sıfır olmasından dolayı, afin kontrol sistemin elemanları lineer kontrol sistemin elemanları formuna dönüşür. Lie grubu abelyen ise

$$[(D_1X_1),(D_2,X_2)]=\left([D_1,D_2],D_1X_2-D_2X_1+\underbrace{[X_1,X_2]}_{=0}\right)$$

$$=\left(\underbrace{[D_1,D_2]}_{\in Der(g)(g)},\underbrace{[D,X]}_{\in L(g)}\right)$$

lineer kontrol sistemi elde edilir.

Eğer Lie grubu üzerinde afin kontrol sistem için $X=0$ ve $Y^1=Y^2=...=Y^d=0$ olduğu düşünülürse, bilineer kontrol sistemi ortaya çıkar.Genel olarak afin kontrol ailesi bilineer kontrol ailesinden daha zengin aile olarak tanımlanır ve genelleştirilmiş Heisenberg Lie grubu üzerindeki kontrol edilebilirlik özellikleri esasen bilineer kısımları $D, D^1, ..., D^d$ üzerinde bina edilir.

Genelleştirilmiş Heisenberg Lie Grubu

V ve Z sonlu boyutlu reel vektör uzayları ve $\beta : V \times V \to Z$ simplektik tasvir olsun. $V \times Z$ vektör uzayı, $[(v_1, z_1), (v_2, z_2)] = (0, \beta(v_1, v_2))$ Lie parantezi ile $L(H) =: h(V, Z, \beta)$ şeklinde bir Lie cebiri olur. Buna karşılık basit bağlantılı Lie grubu $H =: H(V, Z, \beta)$, $V \times Z$ nin Campbell-Hausdorff çarpımına sahiptir

$$(v_1, z_1) * (v_2, z_2) = (v_1 + v_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2}\beta(v_1, v_2)).$$

Kontrol edilebilirliğin ispatı için aşağıdaki yardımcı teoreme gereksinim vardır.

Yardımcı Teorem 1: $H =: H(V, Z, \beta)$ genelleştirilmiş Heisenberg Lie grubu için $\phi_\lambda = \sqrt{\lambda} Id \times \lambda Id$ tasviri için örneğin $\phi_\lambda(v, z) = (\sqrt{\lambda} v, \lambda z)$ tanımı bir izomorfizmadır.

İspat: ϕ_λ tasvirinin 1-1 ve örten olduğu açıktır. ϕ_λ nin homomorfizma olup olmadığına bakalım.

$$\phi_\lambda\ (v_1, z_1) * (v_2, z_2) = \phi_\lambda (v_1 + v_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2}\beta(v_1, v_2))$$

$$= (\sqrt{\lambda} Idv_1 + \sqrt{\lambda} Idv_2, \lambda Idz_1 + \lambda Idz_2 + \frac{\lambda Id}{2}\beta(v_1, v_2))$$

β nın lineer olmasından,

$$= (\sqrt{\lambda} Idv_1 + \sqrt{\lambda} Idv_2, \lambda Idz_1 + \lambda Idz_2 + \frac{1}{2}\beta(\sqrt{\lambda} v_1, \sqrt{\lambda} v_2))$$

$$= (\sqrt{\lambda} Idv_1, \lambda Idz_1) * (\sqrt{\lambda} Idv_2, \lambda Idz_2)$$

$$= \phi_\lambda (v_1, z_1) * \phi_\lambda (v_2, z_2)$$

homomorfizma olduğu görülür.

Sonuç

H de $\lambda \to 0$ iken $\phi_\lambda(v,z) \to 0$ olacak şekilde ϕ_λ otomorfizmalarının 1-parametreli bir ailesi vardır.

Tanım

(a) g Lie cebirinin merkezi $g = \{x \in g : [X,Y] = 0, \forall Y \in g\}$

(b) G Lie grubunun merkezi $G = \{\sigma \in G : \sigma\tau = \tau\sigma, \forall \tau \in G\}$

şeklindedir.

Örnek

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a,b,c \in R \right\}$$

Heisenberg Lie grubunu göz önüne alalım.

Eğer $a,b,c \in Z$ ise, abelyen olmayan nilpotent diskrit Heisenberg grubu oluşur $H_3(Z)$.

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde iki üretece sahiptir.

Bunların arasındaki ilişki;

$$z = xyx^{-1}y^{-1}, \quad xz = zx, \quad yz = zy$$

dir**.**

Burada z , $H_3(Z)$ 'ün merkezinin üreteci olup

$$z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir

$$G = \left\{ g = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a,b,c \in R \right\}$$

$$L(G) = span\left\{ Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ burada } [Y_1, Y_2] = Y_3 \text{ tür.}$$

Heisenberg Lie grubu

$$\psi : \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (a,b,c)$$

tasviri üzerinde R^3 ' e difeomorfiktir.

Eğer R^3 üzerinde $\rho = \left(\sum_{i=1}^{3} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}$ metriği düşünülürse, $\psi^{-1}(\rho)$ G üzerinde bir metriktir.

Eğer G üzerinde Σ afin kontrol sistemi düşünülürse dinamik

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : u \in U, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in Der(L(G)) \; ve \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in L(G) \right\}$$

şeklinde olur.

Burada

$$Der(L(G)) = \{ D \in End(L(G)) : D[X,Y] = [D(X),Y] + [X,D(Y)], \forall X,Y \in L(G) \}$$

dır.

Yardımcı Teorem 2

H bir genelleştirilmiş Heisenberg Lie grubu olsun. O taktirde yoğun bir Aut(H)-orbit vardır.

İspat:

$O =: \exp((L(H) - [L(H), L(H)]) = H - [H,H]$ kümesi H nin bir Aut(H)-orbit dir. Aslında basit bağlantılı nilpotent Lie grubu için üstel tasvir bir global difeomorfizmdir. Dahası, $X, Y \in O$ şeklinde alınan herhangi iki eleman, $|XY|$ doğru parçası $[H,H]$ ye paralel olacak şekilde, başlangıç noktasının bir defa X te alınmasıyla bir doğru parçası üzerinde bağlanabilirler. Böylece $t_1, t_2 \in R$ için $X \rightarrow t_1 X + t_2 = Y$ ile tanımlanan $f_p : O \rightarrow O$ bağlantı fonksiyonu bir izomorfizmadır. Aslında bu barçaları aynı yol üzerinde bir dikmeyle birbirlerine bağlamak mümkündür. Dolayısıyla H nin $Aut(H) - orbit$ i olan

O açıktır. Hatta eğer $\dim Z = 1$ ise, $[H,H]$ merkezi bir doğru oluşturur. Gerçekten de herhangi Heisenberg grubu $[X,Y] = Z, X,Y,Z \in L(H)$ dir. Yoğunluğa baktığımızda herhangi
$x \in [H,H]$ için her δ komşuluğundaki $B(x,\delta)$ birim yuvar göz önüne alındığında

$$B(x,\delta) \cap H - [H,H] \neq \emptyset$$

olduğu görülür. Böylece $\overline{H - [H,H]} = H$ dir.

Teorem

Genelleştirilmiş Heisenberg Lie grubu H üzerindki afin kontrol sistemi, eğer Σ singüler bir noktaya sahip değilse ve ilişik $\Sigma_b = (H, D_b)$ edilebilirdir ve bilineer kontrol sistemi H' nin $Aut(H)$-yörüngesinde kontrol edilebilir ise kontrol edilebilirdir, burada

$$D_b = \left\{ D + \sum_{j=1}^{d} u_j D^j : D, D^j \in Der(L(H)); u \in R^d \right\}$$

dır.

İspat: Afin sistemde, sabit bir bir noktadan erişilebilir noktaların kümesi tek bir noktayı oluşturduğundan singüler bir noktanın olmaması kontrol edilebilirlik için gerek şarttır. $\phi_\lambda = (\sqrt{\lambda} Id, \lambda Id)$ için $\xi_\lambda(D + X) = D + \phi_\lambda(X)$ olacak şekilde otomorfizma $\xi_\lambda : af(H) \to af(H)$ biçiminde tanımlıdır ve dolayısıyla her $X \in L(H)$ için $\lambda \to 0$ iken $\phi_\lambda(X) \to 0$ olur. O halde , $\lambda \to 0$ iken $\xi_\lambda(D) \to D_b$ olur. Sonuç olarak, $\lambda \to 0$ iken $\xi_\lambda(\Sigma) \to \Sigma_b$ olur. Hipotez gereği Σ_b, H nin Aut(H)-orbiti üzerinde kontrol edilebilirdir ve yardımcı teorem 2 den dolayı H nin Aut(H)-orbiti yoğundur. Böylece Σ_b, her orbit üzerinde kontrol edilebilirdir.

1 merkezli birim yuvar B(1,1) ile sınırlandırılmış 1 merkezli S(1,1) birim küreyi düşünelim. Yeteri kadar küçük λ için, tam kontrol edilebilirlik en ufak pertürbasyon altında korunduğundan, $\xi_\lambda(\Sigma)$, S(1,1)-[H,H] üzerinde kontrol edilebilirdir [Susman]. O halde $\xi_\lambda(\Sigma)$, B(1,1)-[H,H] üzerinde de kontrol edilebilirdir. Gerçekten, normalde S(1,1) üzerinde kontrol edilebilen sonlu sistemler açıktır [Susman]. Böylece $1_{\phi^{-1}} = \left(1, \left(\frac{Id}{\sqrt{\lambda}} e, \frac{Id}{\lambda} e\right)\right)$ için Σ, $B(1_{\phi^{-1}}, 1) - [H,H]$ üzerinde kontrol edilebilirdir. O halde,

afin sistemin pozitif orbiti $\left(1,\left(\frac{Id}{\sqrt{\lambda}}e,\frac{Id}{\lambda}e\right)\right)$ boyunca açıktır ve içi $B(1_{\phi^{-1}},1)-[H,H]$ içerdiğinden dolayı boş değildir. Dolayısıyla genelde $1_{\phi^{-1}}$ den ulaşılabilinir. Durum uzayı, bağlantılı olduğundan, Σ H üzerinde kontrol edilebilirdir.

KAYNAKLAR

Boothby, William M. (2002), An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry 2/E, Academic Press

Halmos, P. R. , (1974), Finite-Dimensional Vector Spaces, Springer-Verlag.

Kara, A.&San Martin, L. A. B., (2006), Controllability of Affine System for The Generalized Heisenberg Lie Groups, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 29, No.1, pp. 1-6.

Kobayashi & Nomizu, (1996), Foundations of Differential Geometry, Vol. 2, Wiley Classics Library.

Munkres, J., (1999), Topology 2/E, Prentice Hall.

Samelson, H.,(1990), Notes on Lie Algebras, Springer-Verlag.

Warner, F. W., (1971), Foundation of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Scott, Foresman and Company.

ÖZGEÇMİŞ

Ad, Soyad : Elif ARIKAN

Adres : Bagcilar/İSTANBUL

Telefon : 2124332714

Doğum Tarihi: 29.10.1983

E-mail :arikanee@gmail.com

Doğum yeri :İZMİR

EĞİTİM

2007-2009 Yıldız Teknik Üniversitesi Yüksek Lisans Programı

2007-2010 Yıldız Teknik Üniversitesi Lisans Programı

BİGİSAYAR BİLGİLERİ

Temel seviyede C, Fortran

İleri Seviyede Mapple 11

YABANCI DİL BİLGİLERİ

İleri seviyede İngilizce