YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SERİ ÇÖZÜMLERİ

Matematikçi Duygu ÜÇÜNCÜ

FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Erdal GÜL

İSTANBUL,2009

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SERİ ÇÖZÜMLERİ

Matematikçi Duygu ÜÇÜNCÜ

FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Erdal GÜL

Yard. Doç. Dr. Erdal Gül

Doç. Dr. Ayşe Kara

Doç. Dr. Meral Tosun

İSTANBUL,2009

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ

$\sum$	Toplam Sembolü
$\| \|$	Mutlak Değer
$R = 1/L$	Yakınsaklık Yarıçapı
a_n	Serinin katsayıları
x_0	Serinin yakınsaklık merkezi
$H_n(x)$	Hermite polinomu
$L[y]$	Cauchy-Euler denklemi
J_0	Sıfırıncı mertebeden 1. çeşit Bessel fonksiyonu
Y_0	Sıfırıncı mertebeden Bessel denkleminin 2. çözümü
γ	Euler- Mascheroni sabiti
$J_{1/2}$	$1/2$-inci mertebeden birinci çeşit Bessel fonksiyonu
$J_{-1/2}$	$1/2$-inci mertebeden Bessel denkleminin ikinci lineer bağımsız çözümü
J_1	1-inci mertebeden birinci çeşit Bessel fonksiyonu
Y_1	1. mertebeden ikinci tür Bessel fonksiyonu

ŞEKİL LİSTESİ

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasındaki yardımlarından dolayı değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Erdal GÜL'e teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca, her zaman yanımda olan ve üzerimdeki emekleri için aileme ve manevi desteklerinden dolayı ise arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.

Duygu ÜÇÜNCÜ
İSTANBUL,2009

ÖZET

Bir lineer diferansiyel denklemin genel çözümünün bulunması homojen denklemin temel çözümlerinin belirlenmesine bağlıdır. Eğer denklem sabit katsayılı ise temel çözümlerin elde edilmesi sistematik işlemlerle mümkündür. Değişken katsayılı denklemlerin temel çözümlerine ulaşmak için verilen bir fonksiyonun bir kuvvet serisi ile gösteriliminden yararlanılır.

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş olup, ikinci bölümde ön bilgiler adı altında kuvvet serileri hakkında bilgi verilmiştir. Üçüncü bölümde bir adi nokta civarında seri çözümü ele alınmıştır. Burada katsayıları bağımsız değişkenlere bağlı fonksiyonlar olan ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde düzgün tekil nokta tanımlanarak Euler denklemine yer verilmiştir. Euler denkleminin köklerinin gerçel ve farklı, eşit ve komleks eşlenikli olduğu durumlar ele alınmıştır. Beşinci bölümde düzgün tekil nokta civarındaki seri çözümlerine yer verilmiş olup bu bölümde de bir önceki bölüme benzer olarak indisel denklemin köklerinin durumları ele alınmıştır. Burada köklerin eşit ve farklarının tamsayı olduğu durumlar incelenmiştir. Son olarak altıncı bölümde ise Bessel denklemine yer verilmiş, sırasıyla sıfırıncı mertebeden, ½ -inci mertebeden ve birinci mertebeden Bessel denklemleri incelenmiştir.

ABSTRACT

Finding the general solution of a linear differential equation depends on determining a fundamental set of solutions of the homogeneous equation. It is possible to use a systematic procedure for constructing fundamental solutions only if the equation has constant coefficients. We can use power series expansions of a function to reach fundamental sets of solutions of equations that have variable coefficients.

This thesis contains 6 sections. First section is named as introduction, second section is named as preliminaries and it gives introduction of power series. We consider series solutions near an ordinary point on the third section. Here we discuss the solution methods of second order linear differential equations whose coefficiants are functions of the independent variables. On the fourth section we define regular singular point and we discuss Euler equation. Then we consider separetely the cases in which the roots are real and distinct, real but equal and complex conjugates.

In fifth section, we discuss series solutions near a regular singular point and as preceding section we consider the cases of the roots of indicial equation in which are equal or differ by a positive integer.

Finally on the sixth section we consider Bessel equation and three special cases of Bessel equation which are respectively Besssel equation of order zero, Bessel equation of order one-half and Bessel equation of order one.

1. GİRİŞ

Bu tez çalışmasında, elemanter fonksiyonlar cinsinden çözülemeyen değişken katsayılı diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için kuvvet serilerini kullanacağız. Ana fikir belirsiz katsayılar metoduna benzer olup burada amaç verilen diferansiyel denklemin kuvvet serisi açılımı olduğunu kabul edip diferansiyel denklemi sağlayan katsayıları belirlemektir.

Kuvvet serilerini kullanacağımız için analizde bilinen bazı özellikleri ikinci bölümde ön bilgiler adı altında hatırlatılacaktır. Üçüncü bölümde bir adi nokta civarında seri çözümü ele alınacaktır. Burada katsayıları bağımsız değişkenlere bağlı fonksiyonlar olan ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemleri incelenecektir. Dördüncü bölümde düzgün tekil nokta tanımlanarak Euler denklemine yer verilecek ve Euler denkleminin köklerinin gerçel ve farklı, eşit ve kompleks eşlenikli olduğu durumlar ele alınacaktır. Beşinci bölümde düzgün tekil nokta civarındaki seri çözümlerine yer verilecek olup bu bölümde de bir önceki bölüme benzer olarak indisel denklemin köklerinin durumları ele alınacaktır. Bunlar ise köklerin eşit olduğu ve farklarının tamsayı olduğu durumlardır. Son olarak altıncı bölümde ise Bessel denklemine ve üç özel durumuna yer verilecektir. Bunlar ise sırasıyla sıfırıncı mertebeden, ½ -inci mertebeden ve birinci mertebeden Bessel denklemleri olacaktır.

2. ÖN BİLGİLER

Bir kuvvet serisi,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

biçimindedir. Burada a_n $(n=0,1,2,...)$ serinin katsayıları , x_0 ise serinin yakınsaklık merkezidir.

2.1 Kuvvet Serilerinin Bazı Özellikleri

1. Eğer herhangi bir x için $\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m} a_n (x-x_0)^n$ mevcut ise o halde $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ kuvvet serisi bu x noktasında yakınsaktır denir. $x=x_0$ yakınsaklık merkezi noktasında kuvvet serisi daima yakınsaktır. Yine bu seri bazı x'ler için yakınsak ve bazı x'ler için de ıraksak olabilir.

2. Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n (x-x_0)^n\right| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x-x_0|^n$ serisi yakınsak ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ serisine x noktasında mutlak yakınsaktır denir. Bir seri mutlak yakınsak ise bu serinin yakınsak olduğu gösterilebilir. Fakat bunun tersi doğru olmayabilir.

3. Kuvvet serilerinin mutlak yakınsaklığını göstermek için oran testi kullanılır. Eğer $a_n \neq 0$ ve herhangi bir x değeri için

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n (x-x_0)^n}\right| = |x-x_0|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x-x_0|L$$

ise o zaman kuvvet serisi $|x-x_0|L<1$ olduğunda mutlak yakınsak ve $|x-x_0|L>1$ olduğunda ise ıraksak olur. $|x-x_0|L=1$ için ise test sonuçsuz olur.

Örnek 1. $\sum_{n=1}^{\infty}(1)^{n+1}n(x-2)^n$

kuvvet serisinin hangi x değerleri için yakınsadığını oran testini kullanarak gösterelim.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(1)^{n+2}(n+1)(x-2)^{n+1}}{(1)^{n+1}n(x-2)^n}\right|=|x-2|\lim_{n\to\infty}\tfrac{n+1}{n}=|x-2|$$

olup böylece $|x-2|<1$ ya da $1<x<3$ için mutlak yakınsak ve $|x-2|>1$ için ıraksaktır. $|x-2|=1$ için x değerleri $x=1$ ve $x=3$ olur. $n\to\infty$ iken serinin genel teriminin limiti sıfıra yaklaşmadığından bu değerlerde seri ıraksaktır.

4. Eğer $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$ kuvvet serisi $x=x_1$ noktasında yakınsak ise bu seri $|x-x_0|<|x_1-x_0|$ için mutlak yakınsak olur ve eğer $x=x_1$ için ıraksak ise $|x-x_0|>|x_1-x_0|$ için de ıraksak olur.

5. $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$ kuvvet serisinin $|x-x_0|<\rho$ için yakınsak , $|x-x_0|>\rho$ için ıraksak olacak şekilde bir ρ sayısı varsa ρ ya bu serinin **yakınsaklık yarıçapı** denir. Sadece x_0 noktasında yakınsak olan seriler için $\rho=0$, her x noktasında yakınsak olan seriler için $\rho=\infty$ olarak tanımlanır. Eğer $\rho>0$ ise bu durumda $|x-x_0|<\rho$ aralığına **yakınsaklık aralığı** denir. $|x-x_0|=\rho$ için ise seri yakınsakta olabilir, ıraksakta olabilir.

Örnek 2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(x+1\right)^n}{n2^n}$

kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapını belirleyelim.

Oran testinden

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(x+1\right)^{n+1}}{\left(n+1\right)2^{n+1}}\frac{n2^n}{\left(x+1\right)^n}\right|=\frac{|x+1|}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{2}|x+1|$$

olup seri $|x+1|<2$ için mutlak yakınsak (yani $-3<x<1$ için) ve $|x+1|>2$ için ıraksaktır. Bu serinin yakınsaklık yarıçapı $\rho=2$ 'dir. Son olarak aralığın uç noktaları için yakınsaklığı inceleyelim.

$x=1$ noktasında serimiz $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ harmonik seri olup, ıraksaktır.

$x=-3$ noktasında ise serimiz $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3+1)}{n2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ olur ve bu seri yakınsaktır ancak mutlak yakınsak değildir. Özetle, verilen kuvvet serisi $-3\le x<1$ için yakınsak, diğer durumlarda ıraksak , $-3<x<1$ için mutlak yakınsak olur ve yakınsaklık yarıçapı 2'dir.

6. Eğer $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$ ve $\sum_{n=0}^{\infty}b_n\left(x-x_0\right)^n$ kuvvet serileri aynı bir $|x-x_0|<\rho$ aralığında yakınsak iseler $\left(\rho>0\right)$ bu seriler terim terim toplanıp çıkarılabilirler. Birinci seri $f\left(x\right)$'e ve ikinci seri de $g\left(x\right)$'e yakınsıyor olsun. Bu durumda

$$f\left(x\right)\pm g\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\pm b_n\right)\left(x-x_0\right)^n$$

dir. Bu seriler yine çarpılabilirler;

$$\left(fg\right)(x)=f\left(x\right)g\left(x\right)=\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}b_n\left(x-x_0\right)^n\right]=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(x-x_0\right)^n$$

olup burada $c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0$'dır. Oluşan seri $|x-x_0|<\rho$ aralığında yakınsar.

Ayrıca , $g(x)\neq 0$ ise seriler bölünebilir; Bölüm ifadesi yine

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}d_n(x-x_0)^n$$

şeklinde bir kuvvet serisi olur. Çoğu kez d_n katsayısı aşağıdaki eşitlik ile kolayca hesaplanabilir:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=\left[\sum_{n=0}^{\infty}d_n(x-x_0)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}d_kb_{n-k}\right)(x-x_0)^n$$

Bölme işlemi ile oluşan son seride yakınsaklık yarıçapı ρ'dan küçük olabilir.

7. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ kuvvet serisi $|x-x_0|<\rho$ için yakınsak ve $f(x)$'e yakınsıyorsa $f(x)$, $|x-x_0|<\rho$ aralığında sürekli ve türevlenebilirdir. Ayrıca , $f', f'',...$ türevleri serinin terim terim türevi alınarak elde edilir. Yani

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + \cdots + na_n(x-x_0)^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x-x_0) + \cdots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2} + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

olup her bir seri $|x-x_0|<\rho$ için mutlak yakınsaktır.

8. a_n değeri $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ ile bulunur. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ serisi $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ komşuluğundaki Taylor serisi olarak adlandırılır.

9. Eğer her x_0 merkezli açık aralığındaki x'ler için $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ ise o zaman $n = 0,1,2,...$ için $a_n = b_n$ olur. Özel olarak her böyle x için $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = 0$ ise $a_0 = 0,... = a_n = ... = 0$ 'dır.

2.1.1 Tanım: Eğer bir $f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktası komşuluğundaki Taylor serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

var ve bu komşuluktaki her x için bu seri $f(x)$ e yakınsıyorsa $f(x)$'e x_0 noktasında analitiktir denir. Polinom fonksiyonları her noktada analitiktir. Rasyonel fonksiyonlar paydayı sıfır kılan noktalar dışında analitiktirler. Örneğin , $\sin x$ ve e^x her yerde analitik , $\frac{1}{x}$ ise $x=0$ haricinde analitik ve $\tan x$ $\frac{\pi}{2}$'nin tek katları hariç analitiktir.

Toplamda İndis Değişimi

Sonsuz seri toplamındaki indis, tıpkı belirli integralde ki değişken değişimi gibi bir takma parametredir. Yani, toplamın indisinde hangi harfin kullanıldığı önemsizdir. Örneğin,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n!}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^j x^j}{j!}.$$

Tıpkı belirli integralde integrasyon değişkeninde yapılan değişiklikler gibi, diferansiyel denklemin seri çözümlerini hesaplarken toplamdaki indisleri değiştirmek de kullanışlıdır. Birkaç örnekle bu işlemi nasıl yaptığımızı gösterelim.

Örnek 3. $\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$ serisini ilk terimi $n=0$'dan başlayan bir seri haline getirelim.

$m=n-2$ olsun; bu durumda $n=m+2$ olur ve $m=0$ 'a $n=2$ karşılık gelir. Böylece

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2} x^{m+2} \tag{2.1}$$

olur. Bu serilerin ilk birkaç terimini açarsak tam olarak aynı terimleri içerdiklerini görürüz. Son olarak, (2.1) denkleminin sağ tarafındaki seride, takma indis m, n ile değiştirilirse;

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} \tag{2.2}$$

olur. Sonuçta, indisi sıfır ile değiştirdik ve saymaya orjinalden iki seviye yüksekten başlayarak dengeledik.

Örnek 4. $$\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_n\left(x-x_0\right)^{n-2} \tag{2.3}$$

serisini genel terimi $\left(x-x_0\right)^n$ olan bir seri şeklinde yazalım.

Yine , n yerine $n+2$ koyarak indisi değiştiriyoruz ve 2 aşağıdan saymaya başlıyoruz. Bu durumda,

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n+4)(n+3)a_{n+2}\left(x-x_0\right)^n \tag{2.4}$$

elde edilir. (2.3) ve (2.4) serilerinin terimlerinin tamamen aynı olduğu kolayca doğrulanabilir.

Örnek 5. $x^2\sum_{n=o}^{\infty}(r+n)a_n x^{r+n-1}$ (2.5)

ifadesini genel terimi x^{r+n} ’yi içeren bir seri şeklinde yazalım.

İlk olarak, x^2 ’yi toplamın içine atalım, böylece

$$\sum_{n=o}^{\infty}(r+n)a_n x^{r+n+1} \tag{2.6}$$

elde edilir. Daha sonra, indisi 1 azaltalım ve saymaya 1 yüksekten başlayalım. Böylece

$$\sum_{n=o}^{\infty}(r+n)a_n x^{r+n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(r+n-1)a_{n-1}x^{r+n} \tag{2.7}$$

olur. Yine, (2.7) denkleminde serilerin özdeş ve her iki serinin (2.5) ifadesi ile aynı olduğu kolayca doğrulanabilir.

Örnek 6. Her x için

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \tag{2.8}$$

olduğunu farz edelim ve bunun a_n kaysayıları için ne anlama geldiğini bulalım.

İki serideki uygun katsayıları hesaplamak için özellik 9’u kullanalım. Bunu yapmak için, öncelikle (2.8) denklemini yeniden yazmamız gerekir ki böylece genel terimlerinde aynı x kuvvetlerini göstersinler. Örneğin, (2.8) denkleminin soldaki serisinde, n yerine $n+1$ yazıp 1 aşağıdan saymaya başlarız. Böylece (2.8) denklemi,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \tag{2.9}$$

şekline gelir. Özellik 9'a göre aşağıdaki sonuca varırız:

$(n+1)a_{n+1} = a_n$, n=0, 1, 2, 3,..
ya da (2.10)
$a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n+1}$, n=0 ,1 , 2 , 3 ,...

Böylece, (2.10) denkleminde ardışık n değerlerini seçerek,

$$a_1 = a_0,\ \ a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2},\ \ a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{3!}\ ,$$

vs. olur. Genel olarak,

$$a_n = \frac{a_0}{n!},\quad n = 1,2,3,.... \tag{2.11}$$

şeklinde ifade edilir. Böylece (2.8) bağıntısı aşağıdaki a_0 teriminin tüm katsayılarını belirler. Sonuç olarak , (2.11) denklemi ile verilen katsayıları kullanarak

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = a_0 e^x$$

elde edilir. ($0! = 1$ olduğu göz önüne alındı)

2.1.2 Çözümlü Örnekler

1. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ serisinin yakınsaklık aralığını ve yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

$$a_n = 2^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}}{2^n}\right| = 2 = L \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{L} = \frac{1}{2}$$

Buna göre $|x| < \frac{1}{2}$ ise seri yakınsak , $|x| > \frac{1}{2}$ ise seri ıraksak olur.

$x = \frac{1}{2}$ olsun.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \quad \Rightarrow \text{seri ıraksaktır}$$

$x = -\frac{1}{2}$ olsun.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\text{n}} \quad \Rightarrow \text{seri ıraksaktır}$$

O halde yakınsaklık yarıçapı $R = \frac{1}{2}$, yakınsaklık aralığı $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$’dir.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n (n+1)^2}$ serisinin yakınsaklık aralığını ve yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

$$a_n = \frac{1}{5^n (n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 5^n}{5^{n+1} (n+2)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5} \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} = \frac{1}{5} = L \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{L} = 5$$

Buna göre $|x| < 5$ ise seri yakınsak , $|x| > 5$ ise seri ıraksak olur. $|x| = 5$ için şüpheli hal vardır.

$x = 5$ olsun.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n (n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{5^n (n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \quad \Rightarrow \text{ seri yakınsaktır.}$$

$x = -5$ olsun.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n (n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n}{5^n (n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} \quad \Rightarrow \text{ seri yakınsaktır.}$$

O halde yakınsaklık yarıçapı $R = 5$, yakınsaklık aralığı $[-5, 5]$’dir.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$ serisinin yakınsaklık aralığını ve yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

$a_n = n!$

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty \quad \Rightarrow$ x = 0 dışındaki tüm x değerleri için seri ıraksaktır.

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$ serisinin yakınsaklık aralığını ve yakınsaklık yarıçapını bulunuz.

$a_n = \frac{1}{n!}$ ve

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$ olup seri tüm x değerleri için yakınsaktır.

5. Aşağıdaki problemlerde verilen fonksiyonların verilen x_0 komşuluğunda Taylor serilerini belirleyiniz ve serilerin yakınsaklık yarıçaplarını bulunuz.

a) e^x , $x_0 = 0$

$$f'(x) = e^x\ , f''(x) = e^x\ , f'''(x) = e^x\ ,\ \cdots\ , f^{(n)}(x) = e^x \ \Rightarrow\ f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

$a_n = \frac{1}{n!} \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 \ \Rightarrow$ seri tüm x değerleri için yakınsaktır.

b) $\frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$

$$f'(x)=(1-x)^{-2}\ ,\ f''(x)=2(1-x)^{-3}\ ,\ \cdots\ ,\ f^{(n)}(x)=n!(1-x)^{-(n+1)}\ \Rightarrow\ f^{(n)}(0)=n!$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

Bu seri $|x|<1$ için yakınsaktır.

$$x=1\ \Rightarrow\ \sum_{n=0}^{\infty}(1)^n\ \Rightarrow\ \text{seri ıraksaktır}$$

$$x=-1\ \Rightarrow\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ \Rightarrow\ \text{seri ıraksaktır}$$

Bu durumda yakınsaklık aralığı $(-1,1)$ ’dir.

6. Aşağıdaki problemlerin doğruluklarını gösteriniz.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}(x-1)^n$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^{n+1}$ serisinde n yerine $n+1$yazarsak(yani indis değişimi) ;

$\displaystyle\sum_{n-1=0}^{\infty}a_{n-1}(x-1)^{n-1+1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}(x-1)^n$ elde edilir.

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+1}x^k+\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+1}=a_1+\sum_{k=1}^{\infty}(a_{k+1}+a_{k-1})x^k$

Birinci seride ilk terimi açıp daha sonra ikinci seride k yerine $k+1$ (yani indis değişimi) yazalım.

$$a_1+\sum_{k=1}^{\infty}a_{k+1}x^k+\sum_{k-1=0}^{\infty}a_{k-1}x^{k-1+1}=a_1+\sum_{k=1}^{\infty}a_{k+1}x^k+\sum_{k=1}^{\infty}a_{k-1}x^k=a_1+\sum_{k=1}^{\infty}(a_{k+1}+a_{k-1})x^k$$

3. ADİ NOKTA KOMŞULUĞUNDA SERİ ÇÖZÜMÜ

3.1 I.Kısım

Burada katsayıları bağımsız değişkenlere bağlı fonksiyonlar olan ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemlerini inceleyeceğiz. Bu bölümde bağımsız değişkenleri x ile göstereceğiz. Homojen denklemi

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\frac{dy}{dx}+R(x)y=0 \tag{3.1}$$

şeklinde göstermek yeterlidir. Çünkü yöntem homojen olmayan denklemlerin yöntemi ile benzerdir. Matematiksel fizikteki birçok problemde (3.1) denklemindeki gibi polinom katsayıları vardır. Örneğin,

Bessel denklemi ; $x^2y''+xy'+(x^2-v^2)y=0,\quad v$ sabit

Legendre denklemi ; $(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0,\quad \alpha$ sabit

Bu sebepten, cebirsel hesaplamayı basitleştirmek için P,Q ve R 'nin polinom olduğu durumu ele alıyoruz. Bununla beraber, çözüm yöntemi P,Q ve R genel analitik fonksiyonlar iken de geçerlidir.

P,Q ve R fonksiyonlarının polinom olduğunu ve ortak çarpanlarının olmadığını varsayalım. Ayrıca (3.1) denkleminin bir x_0 noktası komşuluğundaki çözümünü bulmak isteyelim. x_0 noktasını içeren bir aralıkta (3.1) denkleminin çözümü bu aralıkta P nin davranışı ile ilişkilidir.

$P(x_0)\neq 0$ olacak şekilde bir x_0 noktası **adi nokta** olarak adlandırılır. P sürekli olduğundan $P(x)$' in asla sıfır olmadığı x_0 civarında bir aralık vardır. Bu aralık da (3.1) denklemini $P(x)$'e bölerek

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{3.2}$$

elde edilebilir. Burada $p(x)=Q(x)/P(x)$ ve $q(x)=R(x)/P(x)$ sürekli fonksiyonlardır. Böylece varlık ve teklik teoremine göre, bu aralık da (3.1) denkleminin bir tek çözümü vardır ve bu çözüm y_0 ve y_0' keyfi değerleri için $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ başlangıç koşullarını sağlar.

Diğer taraftan, eğer $P(x_0) = 0$ ise o zaman x_0 (3.1) denkleminin **tekil noktası** olarak adlandırılır. Bu durumda $Q(x_0)$ ve $R(x_0)$ 'dan en az biri sıfırdan farklıdır. Bu nedenle, (3.2) denklemindeki p ve q katsayılarından en az biri $x \to x_0$ iken sınırsız olur ve böylece varlık ve teklik teoremi bu durumda kullanılamaz.

(3.1) denklemini x_0 adi noktası komşuluğunda çözmeyi ele alalım. Çözümleri

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \tag{3.3}$$

formunda arıyoruz ve serinin $|x - x_0| < \rho, \rho > 0$ aralığında yakınsak olduğunu varsayıyoruz. Her ne kadar ilk bakışta kuvvet serisi formunda bir çözüm aramak pek çekici gelmese de, aslında bu yöntem çözüm için uygun ve kullanışlıdır. Yakınsaklık aralıkları içinde, kuvvet serileri polinomlara çok benzer davranırlar ve hem analitik olarak hem de nümerik olarak kolayca kullanılabilirler. Gerçekten, üssel veya trigonometrik fonksiyonlar gibi temel fonksiyonlar cinsinden bir çözüm elde edebilsek de yinede onları nümerik olarak ele almak ya da grafiklerini çizmek için kuvvet serisi ya da eşdeğer bir ifadeye ihtiyacımız vardır. a_n katsayılarını belirlemenin en pratik yolu (3.3) serisini ve türevlerini (yani y, y' ve y'') (3.1) denkleminde yerlerine koymaktır. Aşağıdaki örnek ile bu aşamayı gösterelim.

Örnek 1. $y'' + y = 0, \qquad -\infty < x < \infty$ (3.4)

denkleminin seri çözümünü bulunuz.

Bu sabit katsayılı denklemin genel çözümü

$$y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$$

şeklindedir. $\sin x$ ve $\cos x$ lineer bağımsız çözümlerdir. Bu çözümü kuvvet serisi kullanarak elde edebiliriz. (3.4) denklemi için , $P(x) = 1, Q(x) = 0$ ve $R(x) = 1$ dir; böylece her nokta bir adi noktadır. Kuvvet serisinin çözümünü $x_0 = 0$ adi noktası komşuluğunda arayacağız,

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{3.5}$$

ve serinin $|x| < \rho$ aralığında yakınsak olduğunu farz edelim.

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \tag{3.6}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \tag{3.7}$$

olur. (3.5) ve (3.7) serileri (3.4) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

elde edilir. ilk toplamda indisi n yerine $n+2$ yazarak değiştirirsek

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{(n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n\right\} x^n = 0$$

elde edilir. Bu denklemin her x noktasında sağlanması için x'in tüm kuvvetlerinin katsayıları sıfır olmalıdır; böylece

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n = 0 \ , \ n = 0,1,2... \tag{3.8}$$

elde edilir. (3.8) denklemi **tekrarlı bağıntı** olarak adlandırılır. Ardışık katsayılar tekrarlı bağıntıda önce $n = 0$ sonra $n = 1,2,3,...$ şeklinde yazılarak teker teker hesaplanır. Bu örnekte, (3.8) denklemindeki katsayılar bir öncekinin 2 fazlası şeklindedir. Böylece çift katsayılar ($a_0, a_2, a_4, ...$) ve tek katsayılar ($a_1, a_3, a_5, ...$) ayrı ayrı belirlenir. Çift katsayılar için bağıntı;

$$a_2 = -\frac{a_0}{2.1} = -\frac{a_0}{2!}, a_4 = -\frac{a_2}{4.3} = +\frac{a_0}{4!}, a_6 = -\frac{a_4}{6.5} = -\frac{a_0}{6!}, \cdots$$

olur. Sonuç olarak, eğer $n = 2k$ ise o zaman

$$a_n = a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_0, k = 1,2,3,\cdots \tag{3.9}$$

olur. (3.9) denklemini tümevarım ile ispatlayabiliriz. İlk olarak denklemin $k = 1$ için doğru olduğunu görelim. Daha sonra, k keyfi değeri için doğru olduğunu farz edelim ve $k+1$ durumunu ele alalım. Böylece

$$a_{2k+2} = -\frac{a_{2k}}{(2k+2)(2k+1)} = -\frac{(-1)^k}{(2k+2)(2k+1)(2k)!}a_0 = -\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!}a_0$$

elde edilir. Böylece (3.9) denklemi $k+1$ için de doğru olur. Bunun sonucunda (3.9) denklemi tüm k pozitif değerleri için doğru olur.

Benzer olarak tek katsayılar için;

$$a_3 = -\frac{a_1}{2.3} = -\frac{a_1}{3!}, a_5 = -\frac{a_3}{5.4} = \frac{a_1}{5!}, a_7 = -\frac{a_5}{7.6} = -\frac{a_1}{7!}, ...$$

ya da $n = 2k+1$ için

$$a_n = a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}a_1, k = 1,2,3,... \tag{3.10}$$

olur. Bu katsayıları (3.5) denkleminde yerlerine yazarsak,

$$y = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!}x^2 - \frac{a_1}{3!}x^3 + \frac{a_0}{4!}x^4 + \frac{a_1}{5!}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}x^{2n} + \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$$

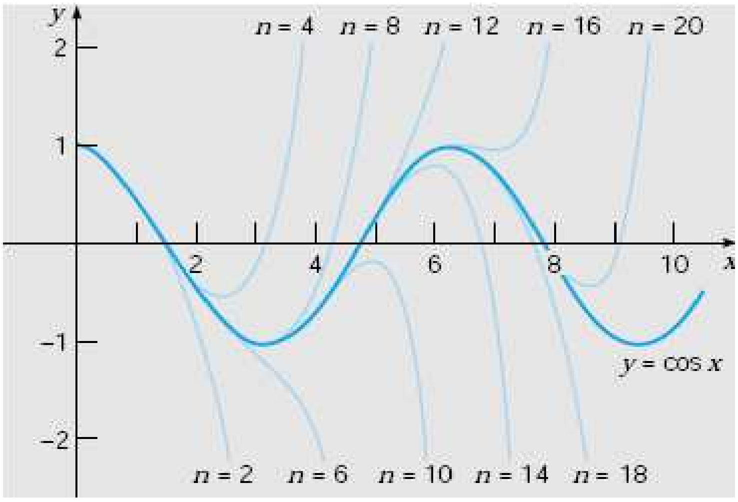
$$\text{y} = a_0\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots - \frac{(-1)^{2n}}{(2n)!}x^{2n} + \cdots\right] + a_1\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots\right]$$

$$y = a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \tag{3.11}$$

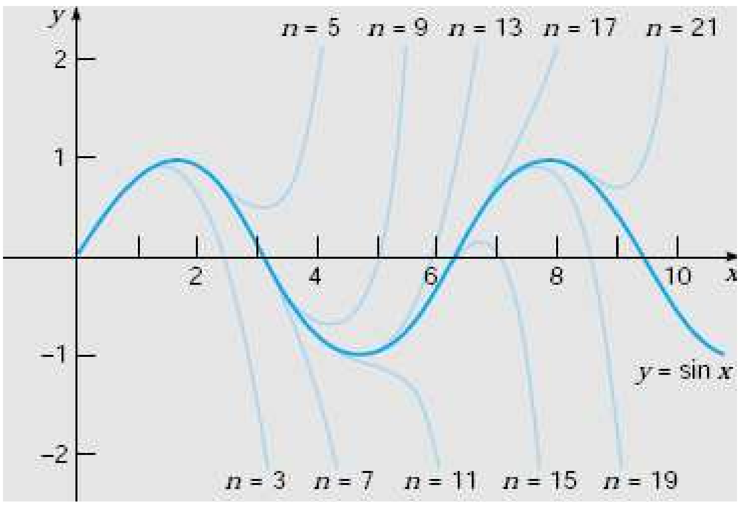
elde edilir. Böylece (3.4) denkleminin iki seri çözümünü elde etmiş oluruz. Oran testini kullanarak (3.11) denklemindeki her iki serinin de her x için yakınsak olduğunu görmek kolaydır. Gerçekten, ilk serinin $x = 0$'da ki $\cos x$ için Taylor açılımı ikinci serinin ise $x = 0$'da ki $\sin x$ için Taylor açılımı olduğu görülüyor. Böylece $y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$ çözümü elde edilir.

Görüldüğü gibi a_0 ve a_1 üzerinde hiçbir koşul yoktur; böylece bunlar keyfi olur. $y(0)$ ve $y'(0)$ başlangıç koşulları keyfi seçilebildiğine göre özel bir başlangıç koşulu belirtilmedikçe a_0 ve a_1 de keyfi olmalıdır.

Şekil 3.1.1 ve 3.1.2, (3.11) denklemindeki kısmi toplamlar serisinin $\cos x$ ve $\sin x$ fonksiyonlarına nasıl yaklaştığını gösterir. Terim sayısı arttıkça aralık üzerindeki yaklaşımda o kadar düzgün olur. Buna rağmen, daha az terimli bir kuvvet serisi $x = 0$ başlangıç noktası komşuluğunda çözümün sadece yerel bir yaklaşımını sağlar; daha büyük $|x|$ için uygun bir çözümü temsil etmez.



ŞEKİL 3.1.1 $\cos x$'e polinom yaklaşımı. n değerleri polinom yaklaşım dereceleridir.



ŞEKİL 3.1.2 $\sin x$'e polinom yaklaşımı. n değerleri polinom yaklaşım dereceleridir.

Örnek 1'de $\cos x$ ve $\sin x$ fonksiyonlarının (3.4) denkleminin temel çözüm kümesi olduğu biliniyordu. Bununla beraber seri metodunu kullanarak da bu çözümler bulunabilir ve yine

(3.11) çözümü elde edilirdi. (3.4) diferansiyel denklemi karşımıza çok sık çıktığından (3.11) denklemindeki iki çözüme özel isimler verebiliriz, örneğin

$$c(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \quad , \quad s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

olabilir. Sonrada bu fonksiyonların özelliklerini inceleyebiliriz, örneğin,

$c(0)=1, \quad s(0)=0, \quad c(-x)=c(x)$ ve $s(-x)=-s(x)$

Ayrıca , $s'(x)=c(x), \quad c'(x)=-s(x)$ olduğu kolayca gösterilebilir.

Bundan başka, sonsuz serileri hesaplayarak $c(x)$ ve $s(x)$ fonksiyonlarının kosinüs ve sinüs fonksiyonlarının tüm cebirsel ve analitik özelliklerine sahip olduğunu gösterebiliriz. Bu fonksiyonların belli bir ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemin kesin çözümü olarak tanımlanabilir olması çok ilginçtir. Özetle, $\sin x$ fonksiyonu $y''+y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$ başlangıç değer probleminin tek çözümü olarak tanımlanabilir; benzer şekilde, $\cos x$ fonksiyonu $y''+y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$ başlangıç değer problemin tek çözümü olarak belirlenebilir. Matematiksel fizikte önemli birçok fonksiyon belli bir başlangıç değer probleminin çözümü olarak göz önüne alınabilir. Bu fonksiyonların çoğu için onlara yaklaşmanın daha basit ya da temel bir yolu yoktur.

Örnek 2. $y''-xy=0, -\infty<x<\infty$ (3.12)

Airy denkleminin x'in kuvvetlerine göre olan seri çözümü bulunuz.

Bu denklem için $P(x)=1, Q(x)=0$ ve $R(x)=-x$ 'dir; böylece her nokta adi noktadır.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \tag{3.13}$$

olsun ve bu seri $|x|<\rho$ aralığında yakınsar. y'' için seri (3.7) denkleminde verilmişti; bir önceki örnekte açıklandığı gibi,

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n \tag{3.14}$$

yazabiliriz. (3.13) ve (3.14) serilerini (3.12) denkleminde y ve y'' yerlerine yazarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = x\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+1} \tag{3.15}$$

elde edilir. Daha sonra, sağ taraftaki seride n yerine $n-1$ yazılarak indis değişimi yapıp ve toplamları 0 yerine 1 den başlatırsak,

$$2.1.a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n$$

elde edilir. Tekrar, bu denklemin her x noktasında sağlanması için x'in kuvvetlerinin katsayılarının eşit olması gerekir; böylece $a_2 = 0$ olur ve aşağıdaki tekrarlı bağıntı elde edilir.

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = a_{n-1}\ , \qquad n = 1,2,3,.... \tag{3.16}$$

Buna göre katsayılar üçer atlayarak belirtilmektedir. $a_0, a_3, a_6, \cdots$ ve $a_1, a_4, a_7, \cdots$ gibi $a_2 = 0$ olduğundan $a_5 = a_8 = a_{11} = ... = 0$ olur. Bu katsayıları bulalım.

$$a_3 = \frac{a_0}{3.2}\ ,\ a_6 = \frac{a_3}{6.5} = \frac{a_0}{(6.5)(3.2)}\ ,\ a_9 = \frac{a_6}{9.8} = \frac{a_0}{(9.8)(6.5)(3.2)}, \cdots$$

Buna göre formül,

$$a_{3n} = \frac{a_0}{2.3.5.6.....(3n-1)(3n)}\ ,\quad n \geq 4$$

olur.

$$a_4 = \frac{a_1}{3.4}\ ,\ a_7 = \frac{a_4}{76.7} = \frac{a_1}{3.4.6.7}\ ,\ a_{10} = \frac{a_1}{3.4.6.7.9.10}, \cdots$$

olur ve genel olarak,

$$a_{3n+1} = \frac{a_1}{3.4.6.7.....(3n)(3n+1)}\ ,\ n \geq 4$$

olur. Böylece Airy denkleminin genel çözümü;

$$y = a_0\left[1 + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^6}{2.3.5.6} + \cdots + \frac{x^{3n}}{2.3...(3n-1)(3n)} + \cdots\right]$$

$$+a_1\left[x + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^7}{3.4.6.7} + \cdots + \frac{x^{3n+1}}{3.4...(3n)(3n+1)} + \cdots\right] \tag{3.17}$$

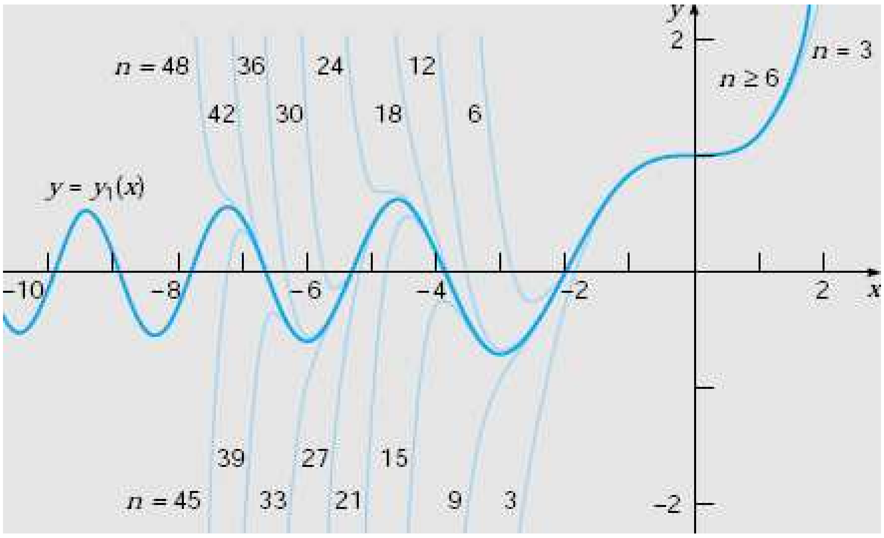
olur. Bu iki seri çözümünü elde ettiğimize göre, şimdi onların yakınsaklıklarını araştırabiliriz. (3.17) serisinde paydalardaki terimlerin hızlı artışı sebebiyle serilerin geniş bir yakınsaklık yarıçapına sahip olmasını bekleyebiliriz. Gerçekten, oran testi ile her iki serinin de her x için yakınsadığı görülebilir. Her x için serinin yakınsak olduğunu kabul edelim.(3.17) denkleminde birinci paranteze $y_1(x)$, ikinci parantez içine $y_2(x)$ dersek ve ilk olarak $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ ve sonrada $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ olarak seçersek y_1 ve y_2'nin (3.12) denkleminin çözümleri olduğunu görürüz. Dikkat edilirse y_1, $y_1(0) = 1$ ve $y_1'(0) = 0$ başlangıç koşullarını sağlar ve y_2, $y_2(0) = 0$ ve $y_2'(0) = 1$ başlangıç koşullarını sağlar. O halde $W(y_1, y_2)(0) = 1 \neq 0$ olup y_1 ve y_2 lineer bağımsızdır. Böylece Airy denkleminin genel çözümü

$$y = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x), \qquad -\infty < x < \infty$$

olur.

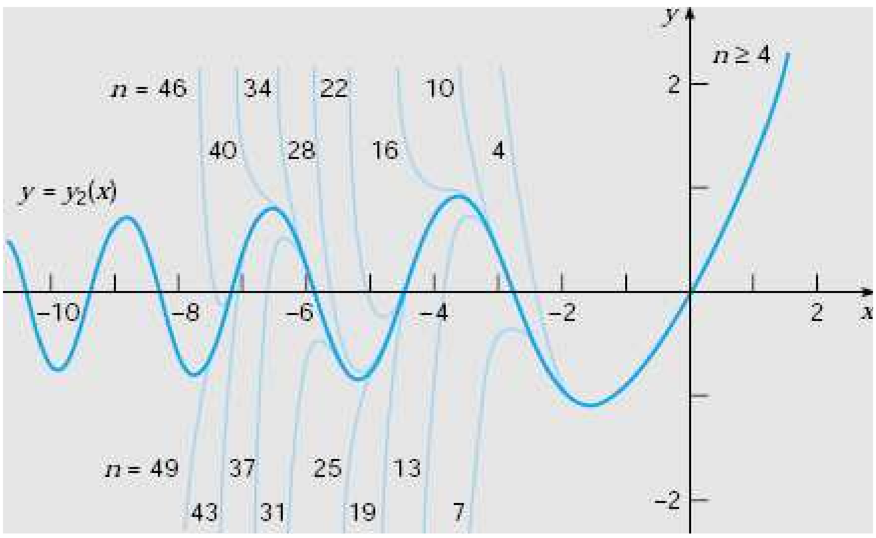
Şekil 3.1.3 ve 3.1.4 de, sırasıyla, Airy denkleminin y_1 ve y_2 çözümlerinin grafikleri ve de (3.17) denklemindeki iki serinin birçok kısmi toplamlarının grafikleri gösteriliyor. Kısmi toplamlar orijin komşuluğunda çözüme yerel yaklaşımlar sağlar. Yaklaşımın kalitesi terimlerin sayısı arttıkça gelişiyor olsa da, hiçbir polinom büyük $|x|$'ler için y_1 ve y_2'yi yeteri kadar temsil etmez.

Uygun doğruluk da verilen kısmi toplamdaki aralığı ifade etmenin en pratik yolu kısmi toplama bir terim daha eklenerek, bu kısmi toplamın ve bir sonrakinin grafiklerini karşılaştırmaktır.



ŞEKİL 3.1.3 Airy denkleminin $y_1(x)$ çözümünün polinom yaklaşımları. n değerleri polinom yaklaşım dereceleridir.

Grafikler görünebilir şekilde ayrılmaya başladığında, asıl kısmi toplamın artık kesin olmadığına emin olabiliriz. Örneğin, şekil 3.1.3 deki $n = 24$ ve $n = 27$ için $x = -9/2$ civarında ayrılmaya başlar. Böylece, bu noktanın dışında, 24 üncü derecedeki kısmi toplam çözüme yaklaşım olarak etkisiz kalır.



ŞEKİL 3.1.4 Airy denkleminin $y_2(x)$ çözümünün polinom yaklaşımları. n değerleri polinom yaklaşım dereceleridir.

Buradan y_1 ve y_2 'nin her ikisi de $x>0$ için monoton ve $x<0$ için salınımlı olduğu görülür. Salınım düzgün olmadığı halde genlikteki bozulma ve orijinden uzaklıkça da frekanstaki artış şekillerden açıkça görülür. Örnek 1'in aksine, Airy denkleminin y_1 ve y_2 çözümleri analizde karşılaşılan temel fonksiyonlar değildir.

Örnek 3. Airy denkleminin $(x-1)$'in kuvvetlerine göre seri çözümünü bulalım.

$x=1$ noktası (3.12) denklemi için bir adi noktadır, bu yüzden çözümü

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-1\right)^n$$

formunda arayalım ve serinin $\left|x-1\right|<\rho$ aralığında yakınsadığını varsayalım.

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty} na_n\left(x-1\right)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+1\right)a_{n+1}\left(x-1\right)^n$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n\left(x-1\right)^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)\left(n+1\right)a_{n+2}\left(x-1\right)^n$$

y ve y'' (12) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)\left(n+1\right)a_{n+2}\left(x-1\right)^n=x\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-1\right)^n \tag{3.18}$$

elde edilir.

Katsayıları eşitleyebilmek için $x=1+(x-1)$ yazmalıyız. Görüldüğü gibi bu da $x=1$ de Taylor serisidir. Böylece (3.18) denklemi

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)\left(n+1\right)a_{n+2}\left(x-1\right)^n &= \left[1+(x-1)\right]\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-1\right)^n\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-1\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-1\right)^{n+1}\end{aligned}$$

şekline dönüşür. Sağ taraftaki ikinci serinin toplam indisini değiştirirsek,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)\left(n+1\right)a_{n+2}\left(x-1\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(x-1\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}\left(x-1\right)^n$$

olur. $(x-1)$ katsayılarını hesaplarsak,

$$\begin{aligned} 2a_2 &= a_0 \\ (3.2)a_3 &= a_1 + a_0 \\ (4.3)a_4 &= a_2 + a_1 \\ (5.4)a_5 &= a_3 + a_2 \\ &\cdots \end{aligned}$$

elde edilir. Genel bağıntı ise,

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = a_n + a_{n-1}, \quad n \geq 1 \tag{3.19}$$

olur. İlk birkaç katsayıyı çözersek,

$$a_2 = \frac{a_0}{2},\; a_3 = \frac{a_1}{6} + \frac{a_0}{6},\; a_4 = \frac{a_2}{12} + \frac{a_1}{12} = \frac{a_0}{24} + \frac{a_1}{12},\, a_5 = \frac{a_3}{20} + \frac{a_2}{20} = \frac{a_0}{30} + \frac{a_1}{120}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} y &= a_0\left[1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{24} + \frac{(x-1)^5}{30} + \cdots\right] \\ &\quad + a_1\left[(x-1) + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{12} + \frac{(x-1)^5}{120} + \cdots\right] \end{aligned} \tag{3.20}$$

elde edilir. Genelde tekrarlı bağıntının ikiden fazla terimi olduğunda ,(3.19) denklemindeki gibi, a_n formülünün a_0 ve a_1 terimlerinde belirlenmesi oldukça zordur. Bu formüldeki eksiklikle, (3.20) denklemindeki iki serinin yakınsaklığını oran testi gibi direk bir metotla arayamayız. Buna rağmen, ileride göreceğimiz gibi a_n için formül bilinmese de (3.20) denklemindeki serilerin her x için yakınsadığını görmek mümkündür. Dahası , y_3 ve y_4 olarak tanımlanan bu fonksiyonlar (3.12) Airy denkleminin lineer bağımsız çözümleridir. Yani, Airy denkleminin genel çözümü

$$y = a_0 y_3(x) + a_1 y_4(x), \quad -\infty < x < \infty$$

olur. Burada vurgulanması gereken, örnek 3'de gördüğümüz gibi, (3.1) denklemi için $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ formunda bir çözüm ararsak o zaman (3.1) denklemindeki $P(x), Q(x)$ ve $R(x)$ katsayıları da $(x-x_0)$'ın kuvveti şeklinde ifade edilmelidir. Bunun yerine, $x-x_0=t$ yazarak y’nin t fonksiyonu cinsinden yazılmış yeni bir fonksiyon elde edilir ve çözüm de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ şeklinde aranır. Hesaplamalar bittiğinde t yerine $(x-x_0)$ yazılır. Örnek 2 ve 3’de Airy denkleminin iki çözüm kümesini bulduk. (3.17) denklemindeki serilerle tanımlanan y_1 ve y_2 fonksiyonları her x için (3.12) denkleminin lineer bağımsız çözümleri ve aynı şekilde (3.20) denklemindeki serilerle tanımlanan y_3 ve y_4 fonksiyonları ikinci mertebeden lineer denklemlerin genel teorisine göre her bir ilk iki fonksiyon sonraki iki fonksiyonun lineer kombinasyonu şeklinde ifade edilebilir ve tersine bu, serileri yalnız olarak incelemeyle elde edilemeyecek bir sonuçtur.

Sonuç olarak, eğer örnek 3’deki gibi genel katsayı a_n ’ i a_0 ve a_1 terimleri cinsinden ifade etmedikçe bunun önemli olmadığını belirtelim. Asıl önemli olan istediğimiz kadar çok katsayı tanımlayabilmemizdir. Böylece genel terimi tanımlayamasak da seride istediğimiz kadar terim bulabiliriz. Kuvvet serisi çözümünde birçok katsayıyı hesaplamak zor olmasa da çok usandırıcıdır.

3.1.1 Örnekler

1. $y''+xy'+\left(x^2+2\right)y=0$

denkleminin x’in kuvvet serisi şeklinde (yani $x_0=0$ noktası komşuluğunda) ki kuvvet serisi çözümünü buluruz.

$x=0$ verilen denklemin bir adi noktasıdır. Bu nokta komşuluğunda doğrusal bağımsız iki kuvvet serisi çözümü vardır. Bu iki çözümü bir kerede bulalım.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

olup denklemde yerine yazılırsa

$$y'' + xy' + \left(x^2+2\right)y = \sum_{n=2}^{\infty} n\left(n-1\right)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \left(x^2+2\right)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

olur. Toplama işlemi n üzerinden olduğundan x toplama işleminden bağımsız olur ve bunu şöyle yazabiliriz.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\left(n-1\right)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Şimdi yapacağımız iş denklemi ortak bir toplam işlemi altında toplamaktır. Bunun için de x in kuvvetlerini eşit kılmak, sonrada toplam değişkenlerinin ortak aralığını belirtmek olacaktır. Önce birinci ve üçüncü terimlerdeki x in üslerini aynı kılalım. İlk terim için

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\left(n-1\right)a_n x^{n-2}$$

serisinde $n-2=m$ diyelim. $n=m+2$ olur. $n=2$ olması $m=0$ olmasını gerektirdiğinden

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\left(n-1\right)a_n x^{n-2} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(m+2\right)\left(m+1\right)a_{m+2} x^m$$

şeklini alır. Toplam değişkeni göstermelik bir değişken olduğundan, bunu

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(m+2\right)\left(m+1\right)a_{m+2} x^m = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n+2\right)\left(n+1\right)a_{n+2} x^n$$

diye yazabiliriz. Yine üçüncü terim için aynı yolu izleyerek $n+2=m$ diyelim. $n=m-2$ olup $n=0$ olması $m=2$ olmasını gerektirir ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = \sum_{m=2}^{\infty} a_{m-2} x^m = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

olur. Böylece

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(n+2\right)\left(n+1\right)a_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

olur. x’lerin üstleri aynı olmasına karşın değişkenlerin alacağı değerler hepsinde aynı değildir. Hepsinde, ortak aralık 2’den ∞’a kadar olan aralıktır. O zaman her terimde bu ortak aralığa ait olmayan terimleri ayıralım. İlk terimde $n=0$ ve $n=1$ için karşılık gelen toplamı yazarsak bu $2a_2 + 6a_3 x$ olup ilk terim

$$2a_2 + 6a_3 x + \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

şeklini girer. Yine

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^n \quad \text{ve} \quad 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 2a_0 + 2a_1 x + 2\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

olup yerlerine yazılırsa

$$2a_0 + 2a_2 + (3a_1 + 6a_3)x + \sum_{n=2}^{\infty}\{(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+2)a_n + a_{n-2}\}x^n = 0$$

özdeşliği bize $a_0, a_1, ...,$ katsayılarını belirleyecek eşitlikleri verir.

$$2a_0 + 2a_2 = 0$$

$$3a_1 + 6a_3 = 0$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+2)a_n + a_{n-2} = 0 \qquad n \geq 2$$

olur. Buradan

$$a_2 = -a_0, \; a_3 = -\frac{1}{2}a_1 \text{ ve}$$

$$a_{n+2} = -\frac{(n+2)a_n + a_{n-2}}{(n+2)(n+1)} \qquad n \geq 2$$

elde edilir. Bu formül her a_{n+2} katsayısını a_0 ve a_1 cinsinden verir.

$$a_4 = -\frac{4a_2 - a_0}{12} = -\frac{4(-a_0) + a_0}{12} = \frac{1}{4}a_0, \quad a_5 = -\frac{5a_3 + a_1}{20} = \frac{3}{40}a_1,$$

ve öteki terimlerde aynı yoldan bulunup yerlerine yazılırsa

$$y = a_0 + a_1 x - a_0 x^2 - \frac{1}{2}a_1 x^3 + \frac{1}{4}a_0 x^4 + \frac{3}{40}a_1 x^5 + ...$$

$$= a_0\left(1 - x^2 + \frac{1}{4}x^4 + ...\right) + a_1\left(x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + ...\right)$$

bulunur. Parantez içindeki kuvvet serileri denklemin doğrusal bağımsız çözümleridir. Bu serilerin yakınsaklık durumları ve yakınsaklık yarıçapları ile doğrusal bağımsız olup olmadıklarını şimdilik geçiyoruz.

2. $y'' + xy' + y = 0$ denkleminin $x_0 = 0$ noktası komşuluğundaki kuvvet serisi çözümünü bulunuz.

$x_0 = 0$ adi noktası komşuluğunda denklemin $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şeklinde çözümü olsun.

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

yerine yazılırsa

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

olur. Yine ilk terim için $n-2=m$ dersek $n=m+2$ olup $n=2$ için $m=0$ ve

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) a_{m+2} x^m = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv 0 \text{ veya}$$

$$2a_2 + a_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ a_{n+2} (n+2)(n+1) + n a_n + a_n \right\} x^n \equiv 0$$

$$a_2 = -\frac{1}{2} a_0 \text{ ve } (n+1)\left[(n+2) a_{n+2} + a_n\right] = 0 \qquad\qquad n \geq 1$$

$$a_2 = -\frac{1}{2} a_0 \text{ ve } a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2}, \ (n \geq 1)$$

bulunur.

$$a_2 = -\frac{1}{2} a_0, \ a_4 = -\frac{a_2}{4} = \frac{a_0}{2.4}, \ a_6 = -\frac{a_0}{2.4.6}, \cdots$$

$$a_3 = -\frac{a_1}{3}, \ a_5 = \frac{a_1}{3.5}, \cdots, a_7 = -\frac{a_1}{3.5.7}$$

ve denklemin çözümü

$$y=a_0\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2\cdot 4}x^4-\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}x^{2n}\right)$$
$$+a_1\left(x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}x^5+\cdots+(-1)^{2n+1}\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}x^{2n-1}\right)$$

veya

$$y=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2.4.6....(2n)}+a_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{1.3.5.7...(2n-1)}$$

şeklinde yazılırsa her iki serinin de yakınsaklığı oran testi ile kolayca gösterilebilir.

3. $y''+(\sin x)y=e^{x^2}$ denkleminin $x_0=0$ adi noktası komşuluğundaki kuvvet serisi çözümünü bulalım.

Görüldüğü gibi denklemde katsayılar x'in polinomları değil. Bu durumda yapılacak iş $\sin x$ ve e^{x^2}'nin seri eşitliklerini almaktır.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},\ y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

olup $\sin x$ ve e^{x^2}'nin $x=0$'daki Taylor açılımları da:

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots$$

$$e^{x^2}=1+x^2+\frac{1}{2!}x^4+\frac{1}{3!}x^6+\cdots$$

olup yerlerine yazılırsa

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots\right)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=1+x^2+\frac{1}{2!}x^4+\frac{1}{3!}x^6+\cdots$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + a_0 x + a_1 x^2 + \left(a_2 - \frac{1}{3!}a_0\right)x^3 + \cdots = 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \cdots$$

$$2a_2 = 1, 6a_3 = -a_0, 12a_4 + a_1 = 0, 20a_5 + a_2 + a_0(-1)\frac{1}{3!} = 0, ...$$

$$a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = -\frac{1}{6}a_0, a_4 = -\frac{1}{12}a_1, a_5 = \frac{1}{20}\left(\frac{1}{6}a_0 - a_2\right), \cdots$$

$$y = a_0 + a_1 x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}a_0 x^3 + \left(\frac{1}{12} - \frac{a_1}{12}\right)x^4 + \left(\frac{a_0}{120} - \frac{1}{40}\right)x^5 + \cdots$$

$$= a_0\left(1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{1}{12}x^4 + \cdots\right) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \cdots$$

$y = a_0 y_1(x) + a_2 y_2(x) + u(x)$ (özel çözüm)

şeklindedir. Görüldüğü gibi seriler için genel terimi yazmak oldukça güç olduğundan ilk birkaç terimini yazmakla yetindik.

Katsayıların polinom olmaması durumunda nasıl hareket edilmesi gerektiğini göstermesi bakımından bu örneği verdik.

4. $(x^3+1)y'' + x^2 y' - 4xy = 0$ denkleminin $x = 0$ komşuluğundaki kuvvet serisi çözümünü bulunuz.

$x = 0$ denklemin adi noktası olup yine çözümü $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şeklinde alacağız.

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

$$(x^3+1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 4x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

veya

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n+1} - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

n yerine $n-1$ yazılarak ilk seri $\sum_{n=3}^{\infty}(n-1)(n-2)a_{n-1}x^n$

n yerine $n+2$ yazılarak ikinci seri $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$

olur.

$$\sum_{n=3}^{\infty}(n-1)(n-2)a_{n-1}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^n-4\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=0 \text{ veya}$$

$$2a_2+(6a_3-4a_0)x+(12a_4+a_1-4a_1)x^2+\sum_{n=3}^{\infty}\{(n+2)(n+1)a_{n+2}+(n+1)(n-3)a_{n-1}\}x^n=0$$

$$a_2=0,\ 6a_3-4a_0=0,\ 12a_4-3a_1=0 \text{ ve } a_{n+2}=-\frac{n-3}{n+2}a_{n-1}, \qquad n\geq 3$$

olup yine katsayılar üçer atlayarak hesaplanacak ve $a_2=a_5=a_8=...=0$ olacaktır.

$$a_3=\frac{2}{3}a_0,\ a_6=-\frac{1.2}{6.3}a_0,\ a_9=-\frac{4}{9}a_6=\frac{2.4.1}{9.6.3}a_0 \text{ olup genel terim}$$

$$a_{3n}=(-1)^n\frac{(3n-5)(3n-8)...1(-2)}{(3n)(3n-3)...6.3}a_0 \text{ 'dır. } n=1,2,...$$

$$a_{3n+1}=(-1)^n\frac{(3n-4)(3n-7)...2(-1)}{(3n+1)(3n-2)...7.4}a_1 \text{ olup aranılan çözüm}$$

$$y=a_0\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(3n-5)(3n-8)...1(-2)}{(3n)(3n-3)...6.3}x^{3n}\right)+a_1\left(x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(3n-4)(3n-7)...2(-1)}{(3n+1)(3n-2)...7.4}x^{3n+1}\right)$$

bulunur. Bu işlemler polinom katsayılı denklemlere uygulanır. Dönüşüm formülünde iki katsayılı bir denklem bulursak burada genel terime ulaşmak kolaydır. İkiden çok katsayıya bağlı dönüşüm formülünde serilerin genel terimlerini bulmak zordur.

5. $(x^2-1)y''+3xy'+xy=0$, $y(0)=4$, $y'(0)=6$ denkleminin x in kuvvet serisi çözümünü bulunuz.

$x=\pm 1$ noktaları dışında bütün noktalar adi noktalardır. Başlangıç koşulu $x=0$ olduğundan $x=0$ komşuluğunda bir çözüm arayalım.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,,\; y'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\,,\; y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

$$\left(x^2-1\right)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}+3x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}+x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n-\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}+3\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}=0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+3\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n+\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}x^n=0$$

$$-2a_2+\left(a_0+3a_1-6a_3\right)x+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{-(n+2)(n+1)a_{n+2}+n(n+2)a_n+a_{n-1}\right\}x^n\equiv 0$$

$$a_2=0\,,\; a_0+3a_1-6a_3=0 \text{ ve } (n+2)(n+1)a_{n+2}=n(n+2)a_n+a_{n-1}$$

$$a_2=0\,,\; a_3=\frac{1}{6}a_0+\frac{1}{2}a_1 \text{ ve } a_{n+2}=\frac{n(n+2)a_n+a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}\,, \qquad n\geq 2$$

Dönüşüm(tekrar bağıntısı) formülü ikiden çok katsayıya bağlıdır.

$$a_2=0\,,\; a_3=\frac{1}{6}a_0+\frac{1}{2}a_1\,,\; a_4=\frac{1}{12}a_1\,,\; a_5=\frac{1}{8}a_0+\frac{3}{8}a_1,\cdots \text{ ve çözüm}$$

$$y=a_0+a_1x+\left(\frac{1}{6}a_0+\frac{1}{2}a_1\right)x^3+\frac{1}{12}a_1x^4+\left(\frac{1}{8}a_0+\frac{3}{8}a_1\right)x^5+\cdots$$

$$y=a_0\left(1+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{8}x^5+\cdots\right)+a_1\left(x+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{12}x^4+\frac{3}{8}x^5+\cdots\right)$$

$x=0$ için $y=4$ olduğundan $a_0=4$ çıkar. Yine

$$y'=a_0\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{8}x^4+\cdots\right)+a_1\left(1+\frac{3}{2}x^2+\frac{4}{12}x^3+\frac{15}{8}x^4+\cdots\right)$$

olup $x=0$ için $y'=6$ olduğundan $a_1=6$ çıkar. Aranan çözüm

$$y(x)=4\left(1+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{8}x^5+\cdots\right)+6\left(x+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{12}x^4+\frac{3}{8}x^5+\cdots\right)$$

dir.

NOT: Yukarıdaki örnekte başlangıç koşulundaki $x=0$ yerine $x=2$ alınsaydı. O zaman $(x-2)$'nin kuvvet serisi şeklinde çözüm arayacaktık yani $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-2)^n$ alacaktık. Bu tür kuvvet serisi şeklinde çözüm ararken en kolay işlem $t=x-2$ dönüşümü yapıp başlangıç değer sorusunu

$\left(t^2+4t+3\right)\dfrac{d^2y}{dt^2}+\left(3t+6\right)\dfrac{dy}{dt}+\left(t+2\right)y=0 \quad y(0)=4, \quad y'(0)=6$ şekline dönüştürürüz. Böylece $t=0$ komşuluğunda çözüm aranmış olur. O zaman $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$ şeklinde t'nin kuvvet serisi çözüm aranır.

6. $y''-2xy'+\lambda y=0,-\infty<x<\infty$

Hermite denkleminin çözümünü bulunuz. (λ bir sabit)

Denklemin $x=0$ da ki bir çözümünü arayalım.

$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$, $y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$ olup

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-2x\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\lambda\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}2na_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}\lambda a_nx^n=0$$

$$\left(2a_2+\lambda a_0\right)+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+2)(n+1)a_{n+2}-2na_n+\lambda a_n\right\}x^n\equiv 0$$

$a_2=-\dfrac{\lambda}{2}a_0$ olup dönüşüm formülü $a_{n+2}=\dfrac{2n-\lambda}{(n+2)(n+1)}a_n$, $n\geq 1$ bulunur.

$$a_2 = -\frac{\lambda}{2}a_0\,,\; a_4 = -\frac{(4-\lambda)\lambda}{4!},\; a_6 = -\frac{(8-\lambda)(4-\lambda)\lambda}{6!},\cdots$$

$$a_3 = \frac{2-\lambda}{3!},\; a_5 = \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!},\; a_7 = \frac{(10-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda)}{7!},\cdots$$

$$y(x) = a_0\left(1-\frac{\lambda}{2!}x^2 - \frac{(4-\lambda)\lambda}{4!}x^4 - \frac{(8-\lambda)(4-\lambda)\lambda}{6!}x^6 - \cdots\right)$$
$$+a_1\left(x+\frac{2-\lambda}{3!}x^3 + \frac{(6-\lambda)(2-\lambda)}{5!}x^5 + \cdots\right)$$

Bu serinin her x için yakınsaklığı yukarıdaki sonuçlardan söylenebilir. Eğer λ negatif olmayan çift bir tamsayı ise bu serilerden biri veya öteki sona erer. Özellikle $\lambda = 0, 2, 4, 6$ olursa sırayla, Hermite denklemin bir çözümü sırayla 1, x ,$1-2x^2$ ve $x-\frac{2}{3}x^3$ olur. $\lambda = 2n$ ’e karşılık gelen polinom çözüm ise, özel bir sabitle çarpıldıktan sonra Hermite Polinomu adını alır ve $H_n(x)$ ile gösterilir.

7. $xy' - y - x - 1 = 0$ denkleminin $(x-1)$ in kuvvet serisi şeklindeki çözümünü bulunuz.

$z = x-1$ dersek $x = z+1$ olur. Ve denklem ise

$(z+1)y' - y - z - 2 = 0$

şeklinde dönüşür. $z = 0$ komşuluğunda çözüm arayacağız.

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ yerlerine yazılırsa

$$(1+z)\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = z+2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = z+2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = z+2$$

$$\left(a_1-a_0\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(n+1\right)a_{n+1}+\left(n-1\right)a_n\right\}z^n \equiv z+2$$

olup

$a_1-a_0=2$, $2a_2+0.a_1=1$ ve $\left(n+1\right)a_{n+1}+\left(n-1\right)a_n=0$, $\quad n\geq 2$

$a_1=2+a_0$, $a_2=\dfrac{1}{2}$ ve $a_{n+1}=-\dfrac{n-1}{n+1}a_n=\left(-1\right)^n\dfrac{\left(n-1\right)\left(n-2\right)...3.2.1}{\left(n+1\right)\left(n\right)\left(n-1\right)...3}a_2$

$a_{n+1}=\left(-1\right)^n\dfrac{1}{n\left(n+1\right)}a_2$ bulunur. Öyleyse

$$y\left(x\right)=a_0+\left(2+a_0\right)z+\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{6}z^3+\cdots+\left(-1\right)^n\frac{1}{n\left(n+1\right)}z^{n+1}+\cdots$$

ve $z=x-1$ yazarak aranan çözüm:

$$y\left(x\right)=a_0+\left(2+a_0\right)\left(x-1\right)+\frac{1}{2}\left(x-1\right)^2-\frac{1}{6}\left(x-1\right)^3+\cdots+\left(-1\right)^n\frac{1}{n\left(n+1\right)}\left(x-1\right)^{n+1}+\cdots$$

bulunur. Daha kısa yazarsak

$$y=a_0x+2\left(x-1\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\left(-1\right)^n\frac{1}{n\left(n+1\right)}\left(x-1\right)^{n+1}$$

olur. Oran testini uygularsak

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(x-1\right)^{n+2}}{(n+1)\left(n+2\right)}\frac{n\left(n+1\right)}{\left(x-1\right)^{n+1}}\right|=\left|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}\right|\left|x-1\right|=\left|x-1\right|<1$$

yani $0<x<2$ aralığında yakınsaktır.

8. $\left(x^2+1\right)y''+xy'-y=0$ denkleminin x in kuvvet serisi şeklindeki çözümünü bulunuz.

$x=0$ adi noktadır.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\ y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},\ y''=\sum_{n=2}^{\infty}n\left(n-1\right)a_nx^{n-2}$$

$$\left(x^2+1\right)\sum_{n=2}^{\infty} n\left(n-1\right)a_n x^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+2\right)\left(n+1\right)a_{n+2}x^n+\sum_{n=2}^{\infty} n\left(n-1\right)a_n x^n+\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\equiv 0$$

$$\left(2a_2-a_0\right)+\left(6a_3-a_1+a_1\right)x+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\left(n+2\right)\left(n+1\right)a_{n+2}+\left(n^2-1\right)a_n\right\}x^n\equiv 0$$

$a_2=\dfrac{1}{2}a_0$, $a_3=0$ ve $a_{n+2}=-\dfrac{n-1}{n+2}a_n$ bulunur. Katsayılar ikişer adım atlayarak hesaplanacak ve $a_3=a_5=a_7=\cdots=0$ olacaktır. Buna göre n çift ise $n=2k$ yazarak $a_{2k}=-\dfrac{2k-3}{2k}a_{2k-2}$ dönüşüm formülü(tekrar bağıntısı) olur.

$$a_{2k}=\left(-1\right)^2\frac{2k-3}{2k}.\frac{2k-5}{2k-2}a_{2k-4}=...=\left(-1\right)^k\frac{1.3.5....\left(2k-3\right)}{2^k.k!}a_0$$

olup a_1 keyfi sabit alınarak

$$y\left(x\right)=a_0\left(1+\frac{1}{2}x^2-\sum_{k=2}^{\infty}\left(-1\right)^k\frac{1.3.5....\left(2k-3\right)}{2^k.k!}x^{2k}\right)+a_1x$$

bulunur. Serinin yakınsaklık aralığı $|x|<1$'dir.

9. $y''-2x^2y'+4xy=x^2+2x+2$ denkleminin x'in kuvvet serisi şeklindeki çözümünü bulunuz.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\ y'=\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1},\ y''=\sum_{n=2}^{\infty} n\left(n-1\right)a_n x^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\left(n-1\right)a_n x^{n-2}-2\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^{n+1}=x^2+2x+2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+2\right)\left(n+1\right)a_{n+2}x^n-2\sum_{n=2}^{\infty}\left(n-1\right)a_{n-1}x^n+\sum_{n=1}^{\infty} 4a_{n-1}x^n\equiv x^2+2x+2$$

$$2a_2+\left(6a_3+4a_0\right)x+\left(12a_4+2a_1\right)x^2+\sum_{n=3}^{\infty}\left\{\left(n+2\right)\left(n+1\right)a_{n+2}-2\left(n-3\right)a_{n-1}\right\}x^n=x^2+2x+2$$

$$a_2 = 2\,,\ 6a_3 + 4a_0 = 2\,,\ 12a_4 + 2a_1 = 1 \text{ ve } a_{n+2} = \frac{2(n-3)}{(n+2)(n+1)} a_{n-1}\,,\ n \ge 3$$

$$a_2 = 1,\ a_3 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} a_0\,,\ a_4 = \frac{1}{12} - \frac{1}{6} a_1\,,\ a_5 = 0\,,\ a_6 = \frac{2}{45} a_0 + \frac{1}{45}, \cdots$$

$$y(x) = a_0 \left(1 - \frac{2}{3} x^2 - \frac{2}{45} x^6 - \frac{2}{405} x^9 - \cdots \right) + a_1 \left(x - \frac{1}{6} x^4 - \frac{1}{63} x^7 - \frac{1}{576} x^{10} - \cdots \right)$$

$$+ x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{45} x^6 + \frac{1}{126} x^7 + \frac{1}{405} x^9 + \frac{1}{1134} x^{10} + \cdots$$

bulunur. Keyfi parametre bulundurmayan kısmı özel çözümdür.

3.2 II. Kısım

Bir önceki kısımda P, Q ve R ’nin polinom olduğu

$$P(x)\, y'' + Q(x)\, y' + R(x)\, y = 0 \tag{3.21}$$

denkleminin x_0 adi noktası komşuluğunda çözümlerini bulma problemini inceledik. (3.21) denkleminin $y = \Phi(x)$ şeklinde bir çözümü olduğunu ve Φ ’nin $\rho > 0, |x - x_0| < \rho,$ aralığında yakınsayan

$$y = \Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{3.22}$$

Taylor serisi olduğunu kabul edelim. Bu durumda a_n, (3.22) serisinin (3.21) denkleminde y yerine yazılması ile direk olarak bulunur.

Şimdi ifadenin doğruluğunu x_0 ’ın (3.21) denkleminin adi bir noktası olduğunda nasıl kanıtlayacağımızı ve (3.22) çözümünün var olduğunu nasıl göstereceğimizi inceleyelim. Ayrıca böyle bir serinin yakınsaklık yarıçapını da belirleyelim. Bunu yaparak adi nokta tanımı için bir genelleştirme elde ederiz. (3.21) denkleminin (3.22) formunda bir çözümü olduğunu kabul edelim. (3.22) denkleminin m defa türevini alarak ve $x = x_0$ yazarak

$m!a_m = \Phi^{(m)}(x_0)$ elde edilir. Böylece (3.22) serisindeki a_n ’i hesaplamak için, (3.21) diferansiyel denkleminden $n = 0,1,2,...$ için $\Phi^{(n)}(x_0)$ ’ı tanımlayabileceğimizi göstermeliyiz.

$y = \Phi(x)$ ’in (3.21) denkleminin $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$ başlangıç koşullarını sağlayan bir çözümü olduğunu kabul edelim. Bu durumda $a_0 = y_0$ ve $a_1 = y'_0$ olur. Eğer herhangi bir başlangıç koşulu belirtmeden sadece (3.21) denkleminin çözümünü bulmak ile ilgileniyorsak o zaman a_0 ve a_1 keyfi kalır. $\Phi^{(n)}(x_0)$ ve $n = 2,3,...$ ’e karşılık gelen a_n ’leri belirlemek için , (3.21) denklemine dönelim. Φ , (3.21) denkleminin çözümü olduğu için

$$P(x)\Phi''(x) + Q(x)\Phi'(x) + R(x)\Phi(x) = 0$$

olur. $p(x) = Q(x)/P(x)$ ve $q(x) = R(x)/P(x)$ olduğunda P ’nin sıfır olmadığı x_0 civarındaki aralık için bu denklemi

$$\Phi''(x) = -p(x)\Phi'(x) - q(x)\Phi(x) \tag{3.23}$$

şeklinde yazabiliriz. (3.23) denkleminde $x = x_0$ yazarsak

$$\Phi''(x_0) = -p(x_0)\Phi'(x_0) - q(x_0)\Phi(x_0)$$

olur. Böylece a_2 ,

$$2!a_2 = \Phi''(x_0) = -p(x_0)a_1 - q(x_0)a_0 \tag{3.24}$$

bağıntısından elde edilir. a_3 ’ü belirlemek için (3.23) denkleminin türevini alalım ve $x = x_0$ yazalım. Böylece,

$$\begin{aligned} 3!a_3 = \Phi'''(x_0) &= -[p\Phi'' + (p' + q)\Phi' + q'\Phi]\big|_{x=x_0} \\ &= 2!\,p(x_0)a_2 - [p'(x_0) + q(x_0)]a_1 - q'(x_0)a_0 \end{aligned} \tag{3.25}$$

elde edilir.

(3.24) denkleminden a_2 ’yi yerine yazarak a_3 ’ü a_0 ve a_1 terimleri cinsinden buluruz. P, Q ve R polinom olduğu için ve $P(x_0) \neq 0$ olduğu için p ve q ’nun tüm türevleri x_0 noktasında mevcuttur. Böylece (3.23) denklemini sonsuz türevleyerek ve $x = x_0$ yazarak her bir ardışık $a_4, a_5,...$ katsayılarını belirlemeye devam ederiz.

Dikkat edilirse a_n 'i belirlemede kullandığımız önemli özellik p ve q 'nun sonsuza gidecek şekilde türevlerini hesaplamaktır. p ve q fonksiyonlarının polinom katsayılı olması ve x_0 komşuluğunda sonsuz türevlenebilir olması iddiamızı destekler. Ne yazık ki, bu durum $y=\Phi(x_0)$ için sonuç serisinin yakınsaklığının ispatını sağlamak için oldukça zayıftır. p ve q fonksiyonlarının x_0 noktasında analitik olduğunu farz etmemiz için gerekli olan onların x_0 noktası komşuluğunda bir aralıkta yakınsadıkları Taylor serisi açılımları olmasıdır. Yani,

$$p(x)=p_0+p_1(x-x_0)+\cdots+p_n(x-x_0)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x-x_0)^n, \qquad (3.26)$$

$$q(x)=q_0+q_1(x-x_0)+\cdots+q_n(x-x_0)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}q_n(x-x_0)^n \qquad (3.27)$$

Bu fikirle (3.21) denklemi için bir adi nokta ve tekil nokta tanımlarını genelleştirebiliriz:

Eğer $p=Q/P$ ve $q=R/P$ x_0 noktasında analitik ise, o zaman x_0 noktası (3.21) denkleminin bir **adi noktasıdır** denir; aksi halde bir **tekil noktasıdır**.

Artık seri çözümünün yakınsaklık aralığını inceleyebiliriz. Bunun için her problemin seri çözümünü hesaplamak ve daha sonra onun yakınsaklık yarıçapını bulmak için yakınsaklık testlerinden birini uygulamak olası yöntemlerden biridir. Bununla beraber, aşağıdaki teorem problemlerin geniş bir sınıfına cevap verebilir.

3.2.1 Teorem: Eğer x_0 noktası (3.21) diferansiyel denkleminin bir adi noktası ise,

$$P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0,$$

yani, eğer $p=Q/P$ ve $q=R/P$ x_0 noktasında analitik ise o zaman (3.21) denkleminin genel çözümü,

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0y_1(x)+a_1y_2(x) \qquad (3.28)$$

olur. Burada a_0 ve a_1 keyfi, y_1 ve y_2 x_0 'da analitik olan lineer bağımsız seri çözümleridir. Ayrıca , y_1 ve y_2 seri çözümlerinin her biri için yakınsaklık yarıçapı en az p ve q serilerinin yakınsaklık yarıçapının minimumu kadar geniştir.

Seri çözümü formunda dikkat dilmesi gereken $y_1(x)=1+b_2(x-x_0)^2+\cdots$ ve $y_2(x)=(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\cdots$ 'dır. Böylece y_1 , $y_1(\mathrm{x}_0)$=1 $y_1'(\mathrm{x}_0)$=0 başlangıç koşullarını sağlayan bir çözümdür ve y_2 de $y_2(\mathrm{x}_0)$=0 $y_2'(\mathrm{x}_0)$=1 başlangıç koşullarını sağlayan bir çözümdür. Ayrıca, katsayıları diferansiyel denklemi ardışık türevleyerek hesaplamak teoride mükemmel olsa da, genelde pratik bir hesaplama yöntemi değildir. Bunun yerine, (3.22) serisi (3.21) denkleminde yerine konulmalı ve katsayılar belirlenmelidir. Böylece diferansiyel denklem sağlanır.

Örnek 1. $x=0$ komşuluğunda $(1+x^2)^{-1}$ için Taylor serisinin yakınsaklık yarıçapı nedir?

Bir yaklaşım sorudaki Taylor serisini yazmaktır;

$$\frac{1}{(1+x^2)}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots$$

Oran testi ile $\rho=1$'dir.

Diğer bir yaklaşım ise $(1+x^2)$'nin köklerini bulmak ki bunlar $x=\pm i$'dir. Kompleks düzlemde 0 ile i ve $-i$ arasındaki uzaklık 1'dir, kuvvet serisinin $x=0$ komşuluğundaki yakınsaklık yarıçapı 1'dir.

Örnek 2. $x=0$ komşuluğunda $(x^2-2x+2)^{-1}$ için Taylor serisinin yakınsaklık yarıçapı nedir?

İlk olarak görüldüğü gibi $x^2-2x+2=0$'ın çözümleri $x=1\pm i$'dir. Kompleks düzlemde $x=0$ ile $x=1+i$ ya da $x=0$ ile $x=1-i$ arasındaki uzaklık $\sqrt{2}$'dir; böylece $x=0$ komşuluğunda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ Taylor serisi açılımının yakınsaklık yarıçapı $\sqrt{2}$'dir. Kompleks düzlemde $x=1$ ile $x=1+i$ ya da $x=1$ ile $x=1-i$ arasındaki uzaklık 1'dir; böylece $x=1$ komşuluğunda $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-1)^n$ Taylor serisi açılımının yakınsaklık yarıçapı 1'dir.

3.2.1 Teoremine göre bir önceki bölümdeki ikinci ve üçüncü örneklerde, sırasıyla, her bir problemde $P(x)=1$olduğu ve böylece hiçbir zaman sıfır olmadığı için Airy denkleminin seri çözümü x ve $x-1$ 'in tüm değerleri için yakınsar. Bu seri çözümü, 3.2.1 teoreminde gösterilmiş olandan daha geniş bir x alanı için yakınsayabiliyor. Böylece teorem sadece seri çözümünün yakınsaklık yarıçapında alt sınırı verir. Şimdi Legendre denkleminin Legendre polinom çözümü ile bu anlatılanı görelim.

Örnek 3. $(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0, \alpha$ sabit

Legendre denkleminin $x=0$ için seri çözümünün yakınsaklık yarıçapının alt sınırını belirleyiniz.

$P(x)=1-x^2, Q(x)=-2x$ ve $R(x)=\alpha(\alpha+1)$

dır ve bunlar polinomdur. P nin kökleri $x=\pm 1$'dir ve $x=0$ dan uzaklılığı 1'dir. Böylece $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ formundaki seri çözümü en az $|x|<1$için yakınsar ve muhtemelen x'in büyük değerleri için de yakınsar. Gerçekten, gösterilebilir ki eğer α pozitif tamsayı ise seri çözümlerinden biri sonlu sayıda terimden sonra sınırlanır ve böylece sadece $|x|<1$için değil her x için yakınsar. Örneğin, eğer $\alpha=1$ ise polinom çözümü $y=x$'dir.

Örnek 4. $x=0$ komşuluğunda ve $x=-\frac{1}{2}$ komşuluğunda

$$(1+x^2)y''+2xy'+4x^2y=0 \tag{3.29}$$

diferansiyel denkleminin seri çözümünün yakınsaklık yarıçapının alt sınırını belirleyiniz.

Yine P, Q ve R polinom ve P nin kökleri $x \pm i$'dir. Kompleks düzlemde olan 0 ile $\pm i$ arasındaki uzaklık 1 ve -$\frac{1}{2}$ ile $\pm i$ arsındaki uzaklık $\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$'dir. Böylece ilk durumdaki $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisi en az $|x|<1$ için yakınsak ve ikinci durumda $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x+\frac{1}{2})^n$ serisi en az $\left|x+\frac{1}{2}\right|<\frac{\sqrt{5}}{2}$ için yakınsaktır.

(9) denklemi için 3.2.1 Teoremine bağlı olarak ilginç bir gözlem yapılabilir. Farz edelim ki $y(0)=y_0$ ve $y'(0)=y'_0$ başlangıç koşulları verilsin. Her x için $(1+x^2)\neq 0$ olduğu için (3.2.1

teoreminden bilindiği üzere) $-\infty < x < \infty$ aralığında başlangıç değer probleminin tek çözümü mevcuttur. Diğer bir taraftan, 3.2.1 teoremi sadece $-1 < x < 1$ için $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \; (a_0 = y_0, a_1 = y_0')$ formunda bir seri çözümünü garanti eder. $-\infty < x < \infty$ aralığındaki tek çözüm her x için yakınsayan $x = 0$ komşuluğunda bir kuvvet serisine sahip olmayabilir.

Örnek 5. $y'' + (\sin x) y' + (1 + x^2) y = 0$

diferansiyel denklemi için $x = 0$ da bir seri çözümü bulabilir miyiz ve eğer bulunabilirse yakınsaklık yarıçapı nedir?

Bu diferansiyel denklemde $p(x) = \sin x, q(x) = 1 + x^2$ 'dir. Analizden hatırlanacağı gibi $\sin x$ fonksiyonunun her x için yakınsayan $x = 0$ için Taylor seri açılımı vardır. Dahası q'nun da $x = 0$ için Taylor seri açılımı vardır ki $q(x) = 1 + x^2$'dir ve her x için yakınsar. Böylece $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ formunda bir seri çözümü vardır, a_0 ve a_1 keyfidir ve seri her x için yakınsaktır.

4. DÜZGÜN TEKİL NOKTALAR VE EULER DENKLEMLERİ

4.1 Düzgün Tekil Noktalar

Bu bölümde önce x_0 tekil noktası komşuluğunda

$$P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0 \tag{4.1}$$

denklemini inceleyeceğiz. Hatırlanacağı gibi eğer P,Q ve R fonksiyonları polinom ise ve hiçbir ortak çarpanları yoksa (4.1) denkleminin tekil noktaları $P(x)=0$ olan noktalardır.

Örnek 1. $x^2y''+xy'+(x^2-v^2)y=0$ (4.2)

dereceden Bessel denkleminin tekil ve adi noktalarını belirleyelim.

$p(x)=x^2=0$ olduğundan $x=0$ noktası tekil noktadır çünkü (4.2) denkleminin diğer tüm noktaları adi noktadır.

Örnek 2. $(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0, \alpha$ sabit (4.3)

Legendre denkleminin tekil ve adi noktalarını belirleyelim.

$p(x)=1-x^2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x\pm1$ tekil noktalardır, diğer tüm noktalar ise adi noktadır.

Örnek 3. $x^2y''-2y=0$ (4.4)

Diferansiyel denkleminde $x=0$ tekil noktadır. Kolayca görüleceği gibi $y_1(x)=x^2$ ve $y_2(x)=1/x$, $x>0$ yada $x<0$ için (4) denkleminin genel çözümü $y=c_1x^2+c_2x^{-1}$'dir. (4.4) denklemi $y''-(2/x^2)y=0$ standart formunda iken bile bu çözüm orijinde analitiktir. $q(x)=-2/x^2$ $x=0$ 'da analitik değildir ve böylece 3.2.1 teoremi uygulanamaz. Diğer taraftan

$y_2(x) = x^{-1}$ in orijin komşuluğunda Taylor seri açılımı yoktur; böylece 3. bölümümdeki metot geçerli olmaz.

Bizim hedefimiz adi nokta komşuluğunda (4.1) denklemini çözen metodu genişletmektir. Böylece x_0 tekil noktasının komşuluğunda da uygulanabilir olacaktır. Çözüm yöntemi genişledikçe göreceğiz ki **'zayıf tekilliği'** ayırmak için uygun koşullar

$$\lim_{x \to x_o} (x - x_0) \frac{Q(x)}{p(x)} \quad \text{sonlu} \tag{4.5}$$

ve

$$\lim_{x \to x_o} (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{p(x)} \quad \text{sonlu} \tag{4.6}$$

olmasıdır. Bunun anlamı ise Q/P 'deki tekilliğin $(x - x_0)^{-1}$ dekinden daha kötü olamaması ve R/P 'deki tekilliğin $(x - x_0)^{-2}$ dekinden daha kötü olamamasıdır. (4.1) denkleminin böyle noktaları **düzgün tekil nokta** olarak adlandırılır. (4.1) denkleminin herhangi tekil noktalarından düzgün tekil olmayan noktalara **düzgün olmayan tekil nokta** denir.

Şimdi ise (4.1) denklemini bir düzgün tekil nokta civarında nasıl çözeceğimizi inceleyeceğiz.

Örnek 4. Örnek 2 de $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$ Legendre denkleminin tekil noktalarının $x \pm 1$ olduğunu gördük. Bu tekil noktaların düzgün olup olmadıklarını görelim.

İlk olarak $x = 1$ noktasını ele alalım. Denklemi $(1 - x^2)$ ye böldüğümüzde;

$$y'' - \frac{2x}{(1 - x^2)} y' + \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(1 - x^2)} y = 0$$

olur. Böylece,

$$\lim_{x \to 1} (x - 1) \frac{-2x}{1 - x^2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(-2x)}{1 - x^2} = \lim_{x \to 1} \frac{2x}{1 + x} = 1$$

ve

$$\lim_{x \to 1} (x - 1)^2 \frac{\alpha(\alpha + 1)}{1 - x^2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)^2 \alpha(\alpha + 1))}{1 - x^2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(-\alpha)(\alpha + 1)}{1 + x} = 0$$

Bu limitler sonlu olduğu için , $x=1$ noktası düzgün tekil noktadır.

$x=-1$ noktasının da aynı şekilde düzgün tekil nokta olduğunu gösterelim.

Benzer şekilde,

$$\lim_{x\to -1}(x+1)\frac{-2x}{1-x^2}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(-2x)}{1-x^2}=\lim_{x\to -1}\frac{2x}{x-1}=-1$$

$$\lim_{x\to -1}(x+1)^2\frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)^2\alpha(\alpha+1)}{1-x^2}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(\alpha)(\alpha+1)}{1-x}=0$$

olur. Limitler sonlu olduğu için $x=-1$ noktası düzgün tekil noktadır.

4.2 Euler Denklemleri

Düzgün tekil noktalar içeren bir diferansiyel denklem

$$L[y]=x^2y''+\alpha xy'+\beta y=0 \tag{4.7}$$

Cauchy-Euler denklemidir. Burada α ve β gerçel sabittir. $x=0$ noktasının (4.7) denkleminin düzgün tekil noktası olduğunu göstermek kolaydır. Euler denkleminin çözümü düzgün tekil noktalı tüm diferansiyel denklemlerin çözümünün bir tipi olduğu için, daha genel problemlere geçmeden önce bu denklemi detayları ile incelemek yararlı olacaktır. Orijini içeren herhangi bir aralıkta, (4.7) denkleminin y_1 ve y_2 'nin lineer bağımsız olduğu $y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ formunda bir genel çözümü vardır. Basitlik için ilk olarak $x>0$ aralığını ele alalım. Daha sonra sonucu $x<0$ aralığı için genişletelim. Öncelikle $\left(x^r\right)'=rx^{r-1}$ ve $\left(x^r\right)''=r(r-1)x^{r-2}$ olur. Böylece, eğer (4.7) denkleminin

$$y=x^r \tag{4.8}$$

formunda bir çözümü olduğunu varsayarsak

$$\begin{aligned} L\left[x^r\right]&=x^2\left(x^r\right)''+\alpha x\left(x^r\right)'+\beta x^r \\ &=x^r\left[r(r-1)+\alpha r+\beta\right] \end{aligned} \tag{4.9}$$

elde edilir. Eğer r ,

$$F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta = 0 \tag{4.10}$$

kuadratik denkleminin bir kökü ise o zaman $L\left[x^r\right]$ sıfırdır ve $y = x^r$ (4.7) denkleminin bir çözümüdür. (4.10) denkleminin kökleri,

$$r_1, r_2 = \frac{-(\alpha-1) \pm \sqrt{(\alpha-1)^2 - 4\beta}}{2} \tag{4.11}$$

dir ve $F(r) = (r-r_1)(r-r_2)$ ’dir. İkinci mertebeden sabit katsayılı lineer denklemlerde olduğu gibi, köklerin gerçel ve farklı, gerçel ve aynı ve kompleks eşlenikli olduğu durumları ayrı ayrı incelemek gerekir.

Gerçel, farklı Kökler:

$r_1 \neq r_2$ olmak üzere eğer $F(r) = 0$ ’ın r_1 ve r_2 kökleri varsa o zaman $y_1(x) = x^{r_1}$ ve $y_2(x) = x^{r_2}$ (4.7) denkleminin çözümleridir. $r_1 \neq r_2$ ve $x > 0$ için $W(x^{r_1}, x^{r_2}) = (r_2 - r_1)x^{r_1+r_2-1}$ sıfır olmadığı için (4.7) denkleminin genel çözümü

$$y = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}, x > 0 \tag{4.12}$$

şeklindedir. Eğer r rasyonel sayı değilse, o zaman x^r, $x^r = e^{r \ln x}$ tarafından belirlenir.

Örnek 1. $2x^2 y'' + 3xy' - y = 0, x > 0$ (4.13)

denklemini çözünüz.

$y = x^r$ ’yi (4.13) denkleminde yerine yazarsak,

$$x^r\left[2r(r-1) + 3r - 1\right] = x^r(2r^2 + r - 1) = x^r(2r-1)(r+1) = 0$$

elde ederiz. Böylece $r_1 = \dfrac{1}{2}$ ve $r_2 = -1$ olur. Bu durumda (4.13) denkleminin genel çözümü

$$y = c_1 x^{1/2} + c_2 x^{-1}, x > 0 \tag{4.14}$$

olur.

Eşit Kökler:

Eğer r_1 ve r_2 eşit ise o zaman $y_1(x)=x^{r_1}$ şeklinde sadece bir çözüm elde ederiz. İkinci bir çözüm mertebe düşürme yöntemi ile elde edilebilir.(fakat farklı bir yol izlenecek) $r_1=r_2$ olduğunda $F(r)=(r-r_1)^2$ olur. Yani bu durumda hem $F(r_1)=0$ hem de $F'(r_1)=0$'dır. Bu yüzden (4.9) denkleminin r'ye göre türevini alıp daha sonra r yerine r_1 yazarız. (4.9) denkleminin r'ye bağlı türevini alarak,

$$\frac{\partial}{\partial r}L\left[x^r\right]=\frac{\partial}{\partial r}\left[x^r F(r)\right]$$

elde edilir.

$F(r)$'yi yerine koyduğumuzda, x'e göre ve r'ye göre türevleri değiştirdiğimizde ve $\partial\left(x^r\right)/\partial r=x^r\ln x$ olduğunu dikkate aldığımızda

$$L\left[x^r\ln x\right]=(r-r_1)^2x^r\ln x+2(r-r_1)x^r \qquad (4.15)$$

elde ederiz. (4.15) denkleminin sağ tarafı $r=r_1$ için sıfırdır; sonuç olarak

$$y_2(x)=x^{r_1}\ln x,\ x>0 \qquad (4.16)$$

(4.7) denkleminin ikinci çözümüdür. Kolayca görüleceği gibi $W(x^{r_1},x^{r_1}\ln x)=x^{2r_1-1}$'dir. Böylece x^{r_1} ve $x^{r_1}\ln x$ $x>0$ için lineer bağımsız olur ve (4.7) denkleminin genel çözümü

$$y=(c_1+c_2\ln x)x^{r_1},\ x>0 \qquad (4.17)$$

olur.

Örnek 2. $x^2y''+5xy'+4y=0,x>0$ (4.18)

denklemini çözünüz.

(4.18) denkleminde $y = x^r$ yazılırsa $x^r\left[r(r-1)+5r+4\right] = x^r(r^2+4r+4) = 0$ elde edilir. Böylece $r_1 = r_2 = -2$ 'dir ve

$$y = x^{-2}(c_1 + c_2 \ln x), x > 0 \tag{4.19}$$

olur.

Kompleks Kökler:

Son olarak, r_1 ve r_2 köklerinin kompleks eşlenikli olduğunu kabul edelim. Örneğin, $r_1 = \lambda + \mathrm{i}\mu$ ve $r_2 = \lambda - \mathrm{i}\mu, \mu \neq 0$. r kompleks iken x^r 'nin ne anlam ifade ettiğini açıklamalıyız. Hatırlanacağı gibi $x > 0$ ve r gerçel iken

$$x^r = e^{r \ln x} \tag{4.20}$$

idi. Bu denklemi r kompleks iken x^r 'yi tanımlamak için kullanabiliriz. O zaman

$$x^{\lambda+\mathrm{i}\mu} = \mathrm{e}^{(\lambda+\mathrm{i}\mu)\ln x} = \mathrm{e}^{\lambda \ln x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu \ln x} = x^{\lambda}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu\ln x} = x^{\lambda}\left[\cos(\mu \ln x) + i\sin(\mu \ln x)\right], x > 0 \tag{4.21}$$

dır. r 'nin kompeks değerleri için olan bu tanımla, x^{r_1} ve x^{r_2} gerçekten (4.7) denkleminin çözümleridir. Bu genel cebir kuralları ve diferansiyel hesaplamalara dayanarak doğrulanabilir. (4.7) denkleminin genel çözümü ise

$$y = c_1 x^{\lambda+i\mu} + c_2 x^{\lambda-i\mu} \tag{4.22}$$

dır. Bu ifadenin dezavantajı $x^{\lambda+i\mu}$ ve $x^{\lambda-i\mu}$ fonksiyonlarının kompleks değerli oluşudur. Benzer bir durumla ikinci mertebeden sabit katsayılı diferansiyel denklemin karakteristik denkleminin kökleri kompleks olduğunda karşılaşmıştık. Orda olduğu gibi, $x^{\lambda+i\mu}$ 'in gerçel ve sanal kısımlarını inceleyeceğiz yani

$$x^{\lambda}\cos(\mu \ln x) \quad \text{ve} \quad x^{\lambda}\sin(\mu \ln x) \tag{4.23}$$

da (4.7) denkleminin çözümleridir. Düzgün bir hesapla

$$W\left[x^{\lambda}\cos(\mu \ln x), x^{\lambda}\sin(\mu \ln x)\right] = \mu x^{2\lambda-1}$$

olduğu görülür. Böylece bu çözümler de $x>0$ için lineer bağımsız olur ve (4.7) denkleminin genel çözümü

$$y = c_1 x^{\lambda}\cos(\mu \ln x) + c_2 x^{\lambda}\sin(\mu \ln x), x>0 \tag{4.24}$$

dır.

Örnek 3. $x^2 y'' + xy' + y = 0$ (4.25)

denklemini çözünüz.

(4.25) denkleminde $y = x^r$ yazılırsa

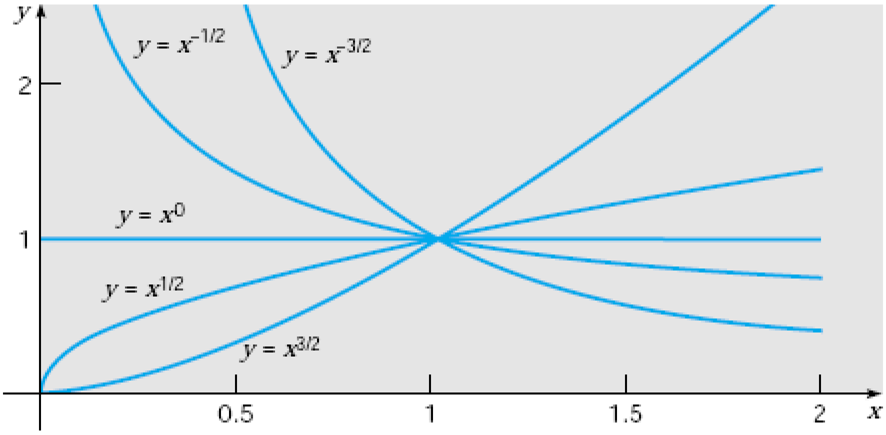
$$x^r\left[r(r-1)+r+1\right] = x^r(r^2+1) = 0$$

olur. Böylece $r = \pm i$ 'dır ve genel çözüm

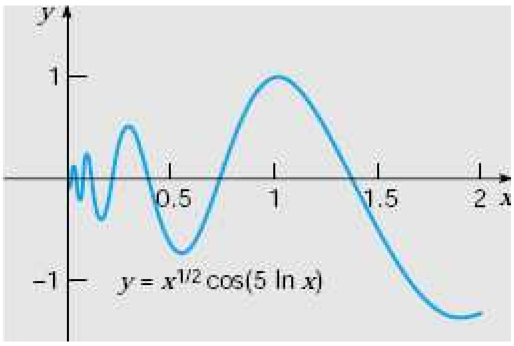
$$y = c_1\cos(\ln x) + c_2\sin(\ln x), x>0 \tag{4.26}$$

dır.

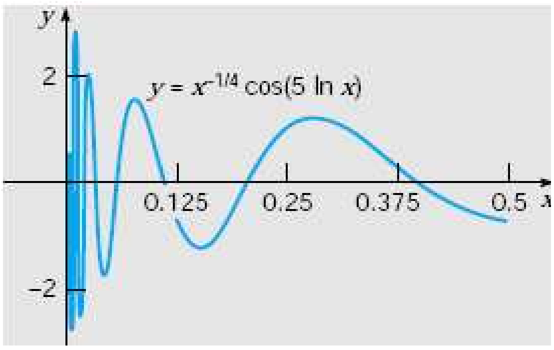
$x=0$ tekil nokta civarında (4.7) denkleminin çözümünün nitel davranışını inceleyeceğiz. Bu tamamen r_1 ve r_2 köklerinin davranışına bağlıdır. İlk olarak, eğer r gerçel ve pozitif ise o zaman x pozitif değerlerden sıfıra giderken $x^r \to 0$ olur. Diğer taraftan, eğer r gerçel ve negatif ise x^r sınırsız olur. Son olarak eğer $r=0$ ise o zaman $x^r = 1$ olur. Şekil 4.2.1 r 'nin değerleri için bu ihtimali gösterir. Eğer r negatif ise o zaman tipik bir çözüm $x^{\lambda}\cos(\mu \ln x)$ olur. Bu fonksiyon λ negatif iken sınırsız olur, λ pozitif iken ise sıfıra yaklaşır ve ayrıca fonksiyon $x \to 0$ iken fazla salınır. Bu davranış da seçilmiş λ ve μ değerleri için şekil 4.2.2 ve 4.2.3'de gözükür. Eğer $\lambda = 0$ ise salınım sabitin genliği olur. Son olarak eğer tekrar eden kökler varsa, o zaman bir çözüm $x^r \ln x$ formunda olur ve $r>0$ iken sıfıra yaklaşır, $r \le 0$ iken ise sınırsız olur. Bu durumlara bir örnek ise şekil 4.2.4 'de gösteriliyor.



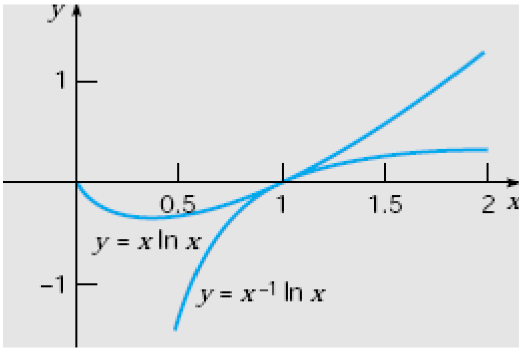
ŞEKİL 4.2.1 Euler denkleminin kökleri reel iken çözümü



ŞEKİL 4.2.2 Euler denkleminin kökleri kompleks ve reel kısımları negatif iken çözümü



ŞEKİL 4.2.3 Euler denkleminin kökleri kompleks ve reel kısımları pozitif iken çözümü



ŞEKİL 4.2.4 Euler denkleminin kökleri tekrarlı iken çözümü

$x<0$ aralığında ki (4.7) denkleminin genişlemesi nispeten doğru bir anlama gelebilir. İşin zorluğu x negatif ve r tamsayı olmadığında x^r 'nin ne anlam ifade ettiğini anlamaktadır. Benzer şekilde, $\ln x$, $x<0$ için tanımlanmamıştır. $x>0$ için verilen Euler denkleminin çözümünün, $x<0$ için de geçerli olduğu gösterilebilir ama genelde onlar kompleks değildir. Yani örnek 1'de $x^{1/2}$ çözümü $x<0$ için sanaldır.

Her zaman, aşağıdaki değişken dönüşümü ile $x<0$ aralığında (4.7) Euler denkleminin reel değerli çözümünü elde etmek mümkündür.

$\xi>0$ iken $x=-\xi$ olsun ve $y=u(\xi)$ diyelim. Bu durumda

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}=-\frac{du}{d\xi},\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{d\xi}\left(-\frac{du}{d\xi}\right)\frac{d\xi}{dx}=\frac{d^2u}{d\xi^2} \tag{4.27}$$

olur. Böylece (4.7) denklemi $x<0$ için

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}=-\frac{du}{d\xi},\qquad \xi^2\frac{d^2u}{d\xi^2}+\alpha\xi\frac{du}{d\xi}+\beta u=0, \xi>0 \tag{4.28}$$

formunu alır.

Bu ise daha önce çözdüğümüz problemin aynısıdır; (4.12), (4.17) ve (4.24) denklemlerinden

$$u(\xi)=\begin{cases} c_1\xi^{r_1}+c_2\xi^{r_2} \\ (c_1+c_2\ln\xi)\xi^{r_1} \\ c_1\xi^{\lambda}\cos(\mu\ln\xi)+c_2\xi^{\lambda}\sin(\mu\ln\xi) \end{cases} \tag{4.29}$$

elde edilir. Bu da $F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta$ 'nın köklerinin reel ve farklı, reel ve eşit yada kompleks eşlenikli olmasına bağlıdır. x 'e bağlı bir u elde etmek için (4.29) denkleminde ξ yerine $(-x)$ yazarız.

$x > 0$ iken $|x| = x$ ve $x < 0$ iken $|x| = -x$ olduğunu dikkate alarak $x > 0$ ve $x < 0$ için sonuçları birleştirebiliriz. Böylece orijin hariç her aralıkta geçerli reel değerli çözümler elde etmek için yapılması gereken tek şey (4.12), (4.17), ve (4.24) denklemlerinde x yerine $|x|$ yazmaktır. Bu sonuçlar aşağıdaki teoremle özetlenir.

4.2.1 Teorem: (4.7) Euler denkleminin genel çözümü

$$, x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0,$$

orjini içermeyen her aralıkta

$$F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta = 0$$

denkleminin r_1 ve r_2 kökleri tarafından belirlenir. Eğer kökler reel ve farklı ise o zaman

$$y = c_1 |x|^{r_1} + c_2 |x|^{r_2} \tag{4.30}$$

olur. Eğer kökler reel ve eşit ise o zaman

$$y = (c_1 + c_2 \ln|x|)|x|^{r_1} \tag{4.31}$$

olur. Eğer kökler kompleks ise o zaman

$$y = |x|^r \left[c_1 \cos(\mu \ln|x|) + c_2 \sin(\mu \ln|x|) \right] \tag{4.32}$$

olur ve $r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$ 'dır.

$$(x - x_0)^2 y'' + \alpha (x - x_0) y' + \beta y = 0 \tag{4.33}$$

formundaki Euler denkleminin çözümleri 4.2.1 teoreminde verilenlere benzerdir. $y = (x - x_0)^r$ formundaki çözümlere bakarsak, genel çözümün (4.30), (4.31) yada (4.32) denklemlerinde x yerine $(x-x_0)$ yazmakla verildiğini görürüz. Ayrıca $t=x-x_0$ değişken dönüşümü ile de (4.33) denklemini (4.7) denklemine dönüştürebiliriz.

5. DÜZGÜN TEKİL NOKTA CİVARINDA SERİ ÇÖZÜMLERİ

5.1 I. Kısım

$x = x_0$ düzgün tekil nokta komşuluğunda

$$P(x)\,y'' + Q(x)\,y' + R(x)\,y = 0 \tag{5.1}$$

ikinci mertebeden genel lineer denklemi çözme sorusunu inceleyelim. Yakınsaklık için $x_0 = 0$ olduğunu kabul edelim. Eğer $x_0 \neq 0$ ise $x - x_0 = t$ yazarak denklemi, düzgün tekil noktanın orijinde olduğu denkleme dönüştürebiliriz. İşin gerçeği $x = 0$ (5.1) denkleminin bir düzgün tekil noktasıdır. Bunun anlamı ise $xQ(x)/P(x) = xp(x)$ ve $x^2R(x)/P(x) = x^2q(x)$ 'nın $x \to 0$ iken sonlu limitleri olması ve $x = 0$ 'da analitik olmalarıdır. Böylece $\rho > 0$ iken orijin komşuluğunda bir $|x| < \rho$ aralığında,

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\,, \qquad x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \tag{5.2}$$

formunda yakınsak kuvvet serisi açılımlarına sahip olurlar.

$xp(x)$ ve $x^2q(x)$ değerlerini (5.1) denkleminde meydana çıkarmak için (5.1) denklemini önce $P(x)$ 'e bölüp daha sonra x^2 ile çarpmak gerekir. Bu durumda

$$x^2y'' + x\left[xp(x)\right]y' + \left[x^2q(x)\right]y = 0 \tag{5.3}$$

ya da

$$\begin{aligned} x^2y'' &+ x\left[p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n + \cdots\right]y' \\ &+ \left[q_0 + q_1x + q_2x^2 + \cdots + q_nx^n + \cdots\right]y = 0 \end{aligned} \tag{5.4}$$

elde edilir.

$$p_0 = \lim_{x\to 0}\frac{xQ(x)}{P(x)} \quad \text{ve} \quad q_0 = \lim_{x\to 0}\frac{x^2R(x)}{P(x)} \tag{5.5}$$

den başka tüm p_n ve q_n katsayıları sıfır ise o zaman (5.4) denklemi daha önce incelenen

$$x^2 y'' + p_0 x y' + q_0 y = 0 \tag{5.6}$$

Euler denklemine indirgenir. Genel olarak, tabi ki, bazı p_n ve q_n'ler ($n \geq 1$) sıfırdan farklıdır. Bununla beraber (5.4) denkleminin esas özelliği (5.6) Euler denkleminin çözümlerininki ile özdeştir. Yalnız, $p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + ... + p_n x^n + ...$ ve $q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + ... + q_n x^n + ...$ terimlerinin varlığı hesaplamaları karıştırır.

İncelememizi $x > 0$ aralığı ile sınırlıyoruz. Çünkü $x < 0$ aralığında $x = -\xi$ değişken dönüşümü ile Euler denklemi gibi davranılabilinir ve sonra en son oluşan denklem $\xi > 0$ için çözülür.

(5.4) denklemindeki katsayılar **Euler katsayıları** çarpı kuvvet serisi şeklinde olduğundan çözümü de **Euler çözümleri** çarpı kuvvet serisi şeklinde aramak gayet doğaldır. Böylece, $a_0 \neq 0$ iken

$$y = x^r (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \tag{5.7}$$

olduğunu kabul ediyoruz. Diğer bir deyişle, r serideki ilk terimin kuvveti ve a_0'da onun katsayısıdır. Çözüm için aşağıdakileri belirlemeliyiz:

1. (5.7) formunda çözümleri olan (5.1) denklemi için r değerlerini
2. a_n katsayıları için tekrarlı bağıntı
3. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı

Genel teori Frobenius tarafından kurulmuştur ve oldukça karışıktır. Bu teoriyi açıklamaya çalışmak yerine belirtilen formda bir çözümün var olduğunu kabul ederiz. Özellikle, çözüm ifadesindeki herhangi bir kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapının sıfırdan farklı olduğunu varsayacağız ve böyle bir serideki katsayıları nasıl belirleyeceğimize karar vereceğiz.

Frobenius metodunu açıklamak için önce bir örnek inceleyelim.

Örnek 1. $2x^2 y'' - x y' + (1 + x) y = 0$ (5.8)

diferansiyel denklemini çözelim.

$x=0$ denklemin düzgün tekil noktasıdır. Ayrıca $xp(x)=-1/2$ ve $x^2q(x)=(1+x)/2$ 'dir. Böylece $p_0=-1/2$ ve $q_0=1/2$, $q_1=1/2$ ve diğer tüm p ve q 'lar sıfırdır. (5.6) denkleminden (5.8) denklemine uygun

$$2x^2y''-xy'+y=0 \tag{5.9}$$

Euler denklemi elde edilir.

(5.8) denklemini çözmek için (5.7) formunda bir çözüm olduğunu kabul ediyoruz.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r},\ a_0\neq 0$$

Böylece ,

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)x^{n+r-1} \tag{5.10}$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2} \tag{5.11}$$

olup yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}2x^2y''-xy'+(1+x)y&=\sum_{n=0}^{\infty}2a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r}\\&-\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r+1}\end{aligned} \tag{5.12}$$

olur. Yine (5.12) denkleminde son terim $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^{n+r}$ şeklinde yazılabilir. Böylece (5.12) denkleminde terimler birleştirilerek

$$\begin{aligned}2x^2y''-xy'+(1+x)y&=a_0\left[2r(r-1)-r+1\right]x^r\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[2(n+r)(n+r-1)-(n+r)+1\right]a_n+a_{n-1}\right\}x^{n+r}=0\end{aligned}$$

(5.13)

elde edilir.(5.13) denkleminin her x için sağlanması için x 'in her kuvvetinin katsayıları sıfır olmalıdır. $a_0\neq 0$ olduğunda

$$2r(r-1)-r+1=2r^2-3r+1=(r-1)(2r-1)=0 \tag{5.14}$$

olur ve (5.14) denklemi (5.8) denklemi için **indisel denklem** olarak adlandırılır. Dikkat edilirse denklem (5.8) denklemine bağlı (5.9) Euler denklemi için elde edilebilecek polinom denklemidir. İndisel denklemin kökleri ise

$$r_1 = 1,\ r_2 = \frac{1}{2} \tag{5.15}$$

dir.

r değerlerine $x = 0$ düzgün tekil noktası için **tekillikteki üsler** denir.

Bunlar (5.7) çözümünün tekil nokta komşuluğundaki davranışına göre belirlenir.

(5.13) denklemine dönerek x^{r+n}'nin katsayılarını sıfıra eşitleyelim. Bu bize aşağıdaki bağıntıyı verir.

$$\left[2(n+r)(n+r-1)-(n+r)+1\right]a_n + a_{n-1} = 0 \tag{5.16}$$

yada

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{a_{n-1}}{2(n+r)^2-3(n+r)+1} = \\ &= -\frac{a_{n-1}}{\left[2(n+r)-1\right]-\left[(n+r)-1\right]}, n \geq 1 \end{aligned} \tag{5.17}$$

dir.

$r = r_1 = 1$ için (5.17) denklemi

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{(2n+1)n} \quad n \geq 1$$

şeklinde olur. Yani,

$$a_1 = -\frac{a_0}{3.1}, a_2 = -\frac{a_1}{5.2} = +\frac{a_0}{(3.5)(1.2)}, a_3 = -\frac{a_2}{7.3} = -\frac{a_0}{(3.5.7)(1.2.3)}, \ldots$$

ve genel olarak

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\left[3.5.7....(2n+1)\right]n!}a_0,\ \ (n \geq 4) \tag{5.18}$$

olur. (5.18) denkleminin sağ tarafında pay ve paydayı $2.4.6....2n = 2^n n!$ ile çarparak denklemi

$$a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n+1)!} a_0, n \geq 1$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece a_0 sabit çarpanını atlarsak (5.8) denkleminin bir çözümü

$$y_1(x) = x\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^n}{(2n+1)!}\right], x > 0 \tag{5.19}$$

olur. (5.19) denkleminin yakınsaklık yarıçapı için oran testi uygulanabilir.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2|x|}{(2n+2)(2n+3)} = 0$$

olup her x için yakınsaktır.

$r_2 = \dfrac{1}{2}$ için benzer işlemler yapılır.

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{2n\left(n - \frac{1}{2}\right)} = -\frac{a_{n-1}}{n(2n-1)}, \quad n \geq 1$$

elde edilir. Genel olarak,

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\left[1.3.5.....(2n-1)\right]n!} a_0 \quad n \geq 4 \tag{5.20}$$

olur. Payı ve paydayı $2.4.6....2n = 2^n n!$ ile çarparsak,

$$a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n)!} a_0, n \geq 1$$

olur ve yine a_0 sabit çarpanını atarsak, ikinci çözüm elde edilir.

$$y_2(x) = x^{\frac{1}{2}}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(2n)!} x^n\right], x > 0 \tag{5.21}$$

olup oran testinden her x için yakınsak olduğu gösterilebilir. $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ seri çözümlerinde baş terimler sırasıyla x ve $x^{1/2}$ olduğu için çözümler lineer bağımsızdır. Bu durumda (5.8) denkleminin çözümü

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), x > 0$$

dir.

Bir önceki örnek eğer $x = 0$ düzgün tekil nokta ise bazen bu nokta komşuluğunda (5.7) formunda iki çözüm olduğunu gösterir. Benzer şekilde $x = x_0$ bir düzgün tekil nokta ise o zaman $x = x_0$ civarında geçerli

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{5.22}$$

formunda iki çözüm olabilir. Bununla beraber, sadece Euler denklemi olarak $y = x^r$ şeklinde iki çözümü olmayabilir. Bu yüzden düzgün tekil noktası daha genel bir denklemin (5.7) ve ya (5.22) şeklinde iki çözümü olmayabilir. Özellikle, eğer indisel denklemdeki r_1 ve r_2 kökleri eşitse ya da farkları tamsayı ise o zaman ikinci çözümün daha karmaşık bir yapısı olur.

Her durumda, (5.7) veya (5.22) formunda en az bir çözüm bulmak mümkündür; eğer r_1 ve r_2 'nin farkı bir tamsayı ise bu çözüm daha büyük r değerleri için uygundur. Eğer böyle sadece bir tek çözüm varsa o taktirde tıpkı Euler denkleminin karakteristik denklemindeki eşit kökler durumuna benzer ikinci çözüm bir logaritmik terim içerir. Böyle durumlarda ikinci denklemi belirlemek için mertebe düşürme yöntemi veya başka bazı yöntemler kullanılabilir.

İndisel denklemin kökleri kompleks ise o zaman kökler eşit olamaz yada köklerin farkları tamsayı olamaz, böylece her zaman (5.7) yada (5.22) formunda çözümler bulunur. Bununla beraber, Euler denklemindeki gibi, kompleks çözümlerin reel ve sanal bölümlerini ayırarak reel-değerli çözümler elde etmek mümkündür.

Son olarak, pratik bir noktadan bahsedelim. Eğer P, Q ve R birer polinom ise genellikle (5.3) denklemi yerine direk olarak (5.1) denklemi ile çalışmak daha iyidir. Böylece $xQ(x)/P(x) = xp(x)$ ve $x^2R(x)/P(x) = x^2q(x)$ terimlerini kuvvet serilerinde ifade etmeye gerek kalmaz. Örneğin, denklemi

$$x^2 y'' + \frac{2x}{1+x} y' + \frac{x^2}{1+x} y = 0$$

formunda yazarak $2x/(1+x)$ ve $x^2/(1+x)$ ifadelerini kuvvet serilerinde açmak yerine

$$x(1+x)y'' + 2y' + xy = 0$$

formunda düşünmek daha kullanışlıdır.

5.2 II. Kısım

$$L[y] = x^2 y'' + x[xp(x)]y' + [x^2 q(x)]y = 0 \tag{5.23}$$

denkleminin çözümünü belirlemeyi inceleyelim. Burada $\rho > 0$ için $|x| < \rho$ aralığında yakınsak olan

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad \text{ve} \quad x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \tag{5.24}$$

serilerini göz önüne alalım. $x = 0$ noktası düzgün tekil noktadır ve buna karşılık gelen Euler denklemi ise

$$x^2 y'' + p_0 x y' + q_0 y = 0 \tag{5.25}$$

olur. $x > 0$ için (5.23) denkleminin çözümünü arayalım ve çözümün $a_0 \neq 0$ olmak üzere,

$$y = \phi(r,x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \tag{5.26}$$

şeklinde olduğunu varsayalım. $y = \phi(r,x)$ yazmamızın nedeni ϕ'nin hem r'ye hem de x'e bağlı olduğunu vurgulamaktır. Daha sonra,

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{n+r-1}, \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1) a_n x^{n+r-2} \tag{5.27}$$

bulunur ve (5.24),(5.26) ve (5.27) denklemleri (5.23) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &a_0 r(r-1)x^r + a_1 r(r+1)x^{r+1} + \cdots + a_n (r+n)(r+n-1)x^{r+n} + \cdots \\ &\quad + (p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n + \cdots) \\ &\qquad \text{x}\left[a_0 r x^r + a_1 (r+1)x^{r+1} + \cdots + a_n (r+n)x^{r+n} + \cdots\right] \\ &\quad + (q_0 + q_1 x + \cdots + q_n x^n + \cdots) \\ &\qquad \text{x}(a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + \cdots + a_n x^{r+n} + \cdots) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Sonsuz serileri beraber çarpıp serileri düzenlediğimizde

$$
\begin{aligned}
a_0F(r)x^r &+[a_1F(r+1)+a_0(p_1r+q_1)]x^{r+1} \\
&+\left\{a_1F(r+2)+a_0(p_2r+q_2)+a_1\left[p_1(r+1)+q_1\right]\right\}x^{r+2} \\
&+\cdots+\left\{a_nF(r+n)+a_0(p_nr+q_n)+a_1[p_{n-1}(r+1)+q_{n-1}]\right. \\
&\left.+\cdots+a_{n-1}[p_1(r+n-1)+q_1]\right\}x^{r+n}+\cdots=0
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Bunun daha kısa ifadesi ise

$$
\begin{aligned}
L\left[\phi\right](r,x) &= a_0F(r)x^r \\
&+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{F(r+n)a_n+\sum_{k=o}^{n-1}a_k\left[(r+k)p_{n-k}+q_{n-k}\right]\right\}x^{r+n}=0
\end{aligned}
\tag{5.28}
$$

şeklindedir. Burada

$$
F(r)=r(r-1)+p_0r+q_0 \tag{5.29}
$$

dir. (5.28) denkleminin özdeş olarak sağlanması için her x kuvvetinin sıfır olması gerekir. $a_0 \neq 0$ olduğundan x^r'yi içeren terim $F(r)=0$ denklemini verir. Bu denkleme **indisel denklem** denir. Ayrıca görüldüğü gibi bu denklem (5.25) Euler denklemi için $y=x^r$ şeklinde çözümler arandığında elde edilecek denklemdir. İndisel denklemin reel köklerini $r_1 \geq r_2$ olmak üzere r_1 ve r_2 ile gösterelim. Eğer kökler kompleks ise köklerin seçimi önemsizdir. r'nin sadece bu değerleri için (5.23) denkleminin (5.26) formunda çözümlerini bulmak beklenebilir. r_1 ve r_2 köklerine **tekillikteki üsler** denir; tekil nokta komşuluğunda çözümün nitel karakterini belirlerler.

(5.28) denkleminde x^{r+n}'in katsayıları sıfıra eşitlenerek

$$
F(r+n)a_n+\sum_{k=0}^{n-1}a_k\left[(r+k)p_{n-k}+q_{n-k}\right]=0, n \geq 1 \tag{5.30}
$$

tekrarlı bağıntısı elde edilir.

(5.30) denklemi genelde $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ katsayılarının r'nin değerlerine bağlı olduğunu gösterir. Ayrıca, $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$, a_0 terimi cinsinden ve $F(r+1), F(r+2), \cdots, F(r+n), \cdots$ sıfır olmayacak şekilde $xp(x)$ ve $x^2q(x)$ için serideki katsayılar hesaplanabilir. $F(r)=0$ olan tek r değeri $r=r_1$ ve $r=r_2$'dir. $r_1 \geq r_2$ olduğundan $n \geq 1$ için r_1+n, r_1 ya da r_2'ye eşit olamaz. Sonuç olarak $n \geq 1$ için $F(r_1+n) \neq 0$'dır. Böylece her zaman (5.23) denkleminin (5.26) formundaki bir çözümünü elde edebiliriz, yani

$$y_1(x) = x^{r_1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\right], x>0 \tag{5.31}$$

Burada a_n 'in (5.30) denkleminden $r = r_1$ ile belirlendiğini göstermek için $a_n(r_1)$ notasyonunu kullandık. Çözümdeki keyfi sabitleri belirlemek için $a_0 = 1$ aldık.

Eğer r_2, r_1 'e eşit değil ve $r_1 - r_2$ pozitif tamsayı değil ise, o zaman herhangi $n \geq 1$ değeri için $r_2 + n$ r_1 'e eşit olmaz. Böylece $F(r_2 + n) \neq 0$ olur ve ikinci çözümde elde edilmiş olur;

$$y_2(x) = x^{r_2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n\right], x>0 \tag{5.32}$$

Daha önce görülen adi nokta civarındaki seri çözümleri gibi $xp(x)$ ve $x^2q(x)$ için iki seride yakınsadığında (5.31) ve (5.32) denklemlerindeki serilerde en azından $|x| < \rho$ aralığında yakınsar. Yakınsaklık yarıçapları ile beraber $1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n$ ve $1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n$ kuvvet serileri $x = 0$ noktasında analitik fonksiyonları belirtir. Böylece, eğer varsa, y_1 ve y_2 çözümlerinin tekil davranışı bu iki analitik fonksiyonun çarpımı olan x^{r_1} ve x^{r_2} için olacaktır. Daha sonra, $x < 0$ için reel değerli çözümler elde etmek için $\xi > 0$ için $x = -\xi$ yazılır. Euler denklemindeki çalışmadan beklendiği üzere, yapılması gereken sadece sırasıyla (5.31) denklemindeki x^{r_1} ve (5.32) denklemindeki x^{r_2} yerine $|x|^{r_1}$ ve $|x|^{r_2}$ yazmaktır. Son olarak, eğer r_1 ve r_2 kompleks sayılar ise o zaman bunlar kompleks eşlenik olmak zorundadır ve $r_2 \neq r_1 + N$ 'dir. Bu nedenle böyle bir durumda her zaman (5.26) formunda iki çözüm bulunabilir; buna rağmen bunlar x 'in kompleks değerli fonksiyonlarıdır. Reel-değerli çözümler, kompleks değerli çözümlerin reel ve sanal kısımlarını ayırarak elde edilir. $r_1 = r_2$ ya da $r_1 - r_2 = N$, N pozitif tamsayı olan istisnai durum daha fazla çalışma gerektirir.

Tekil noktadaki kuvvetler r_1 ve r_2 'nin bulunmasının kolay olduğunu ve çözümün doğal davranışını belirlediklerini fark etmek önemlidir. r_1 ve r_2 'yi hesaplamak için sadece, katsayıları

$$p_0 = \lim_{x\to 0} xp(x), \qquad q_0 = \lim_{x\to 0} x^2q(x) \tag{5.33}$$

ile verilen

$$r(r-1)+p_0 r+q_0=0 \tag{5.34}$$

kuadratik indisel denklemi çözmek gerekir.

Bu limitlerin tekilliği düzgün tekil nokta olarak sınıflandırmak için hesaplanması gereken limitler olduğuna dikkat edelim. Böylece bunlar genelde araştırmanın erken aşamasında belirlenir.

Dahası eğer $x=0$, P,Q ve R fonksiyonlarının polinom olduğu

$$P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0 \tag{5.35}$$

denkleminde düzgün tekil nokta ise, o zaman $xp(x)=xQ(x)/P(x)$ ve $x^2q(x)=x^2R(x)/P(x)$ 'dir. Böylece,

$$p_0=\lim_{x\to 0} x\frac{Q(x)}{P(x)}, \qquad q_0=\lim_{x\to 0} x^2\frac{R(x)}{P(x)} \tag{5.36}$$

olur. Son olarak, (5.31) ve (5.32) denklemlerindeki serilerin yakınsaklık yarıçapı $x=0$ 'ın kendisinden başka en azından orijinden P 'nin en yakın köküne olan uzaklığına eşittir.

Örnek 1. $2x(1+x)y''+\left(3+x\right)y'-xy=0$

denkleminin çözümlerinin tekil nokta civarında karakterini inceleyin.

Bu denklem, (5.35) denkleminin $P(x)=2x(1+x), Q(x)=\left(3+x\right)$ ve R(x)=$-x$ olacak şekilde bir formudur. Tek tekil noktaları $x=0$ ve $x=-1$ noktalarıdır. $x=0$ noktası düzgün tekil noktadır çünkü,

$$\lim_{x\to 0} x\frac{Q(x)}{P(x)}=\lim_{x\to 0} x\frac{3+x}{2x(1+x)}=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} x^2\frac{R(x)}{P(x)}=\lim_{x\to 0} x^2\frac{(-x)}{2x(1+x)}=0$$

Ayrıca, (5.36) denkleminden $p_0 = \frac{3}{2}$ ve $q_0 = 0$ olur. Böylece indisel denklem $r(r-1) + \frac{3}{2}r = 0$ olur ve kökler $r_1 = 0, r_2 = -\frac{1}{2}$ 'dir. Bu kökler eşit olmadığından ve farkları tamsayı olmadığından $0 < |x| < \rho$ için

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)x^n \text{ ve } y_2(x) = |x|^{-1/2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\frac{-1}{2})x^n\right]$$

formunda iki lineer bağımsız çözüm mevcuttur.

Her bir seri için yakınsaklık yarıçapının alt sınırı 1'dir.($x = 0$' dan $x = -1$'e olan uzaklık) y_1 çözümünün $x \to 0$ ile sınırlı olduğuna ve hatta burada analitik olduğuna dikkat edelim. İkinci çözüm y_2 $x \to 0$ iken sınırsızdır.

$x = -1$ noktası da bir düzgün tekil noktadır çünkü,

$$\lim_{x \to -1}(x+1)\frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x \to -1}\frac{(x+1)(3+x)}{2x(1+x)} = -1$$

$$\lim_{x \to -1}(x+1)^2\frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x \to -1}\frac{(x+1)^2(-x)}{2x(1+x)} = 0$$

dır. Bu durumda $p_0 = -1$ ve $q_0 = 0$ olur. Böylece indisel denklem $r(r-1) - r = 0$ halini alır. İndisel denklemin kökleri $r_1 = 2, r_2 = 0$ 'dir.

Daha büyük köklere karşılık

$$y_1(x) = (x+1)^2\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(2)(x+1)^n\right]$$

şeklinde bir çözüm vardır. Seri en az $|x+1| < 1$ için yakınsar ve y_1 burada bir analitik fonksiyondur. İki kökün farkı bir pozitif tamsayı olduğu için

$$y_2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)(x+1)^n$$

şeklinde ikinci bir çözüm olabilir de, olmayabilirde. Daha geniş araştırma olmadan fazlası söylenemez.

Bu örnekte bulunan çözümler için hiçbir karmaşık hesaplamanın bulunması gerekmedi. Tek ihtiyacımız olan birkaç limiti hesaplamak ve iki kuadratik denklemi çözmekti.

Şimdi indisel denklemde köklerin eşit yada farklarının bir pozitif tamsayı, $r_1 - r_2 = N$ olduğu durumu inceleyelim. Daha önce gösterilen gibi, her zaman indisel denklemin büyük r_1 köküne karşılık (5.31) formunda bir çözüm vardır. Euler denklemine benzerlikten, eğer $r_1 = r_2$ ise o zaman ikinci çözümün bir logaritmik terim içermesini bekleyebiliriz. Bu köklerin farkının tamsayı olma durumunda da doğru olabilir.

İndisel denklemin köklerinin eşit olması durumu:

İkinci çözümü bulmak için kullanılan yöntem Euler denkleminde indisel denklemin köklerinin eşit olduğu durumda ikinci çözümü bulmak için kullanılan denklemin aynısıdır. r 'yi sürekli değişken kabul edelim ve (5.30) tekrarlı bağıntısını çözerek a_n 'i r 'nin bir fonksiyonu olarak belirleyelim. $n \geq 1$için bu $a_n(r)$ çözümü için (5.28) denklemi

$$L[\phi](r,x) = a_0 F(r) x^r = a_0 (r - r_1)^2 x^r \tag{5.37}$$

Denklemine indirgenir. Çünkü r_1, $F(r)$ 'nin tekrarlanan köküdür. (5.37) denkleminde $r = r_1$ alınarak $L[\phi](r,x) = 0$ olduğu bulunur; böylece, bildiğimiz gibi, (5.31) denklemi ile verilen $y_1(x)$ (5.23) denkleminin çözümüdür. Daha önemlisi, (5.37) denkleminden, Euler denkleminde olduğu gibi,

$$\begin{aligned} L\left[\frac{\partial\phi}{\partial m}\right](r_1,x) &= a_0 \frac{\partial}{\partial r}\left[x^r (r-r_1)^2\right]\Big|_{r=r_1} \\ &= a_0\left[(r-r_1)^2 x^r \ln x + 2(r-r_1)x^r\right]\Big|_{r=r_1} = 0 \end{aligned} \tag{5.38}$$

dır. Bu durumda, (5.23) denkleminin ikinci çözümü

$$y_2(x) = \left.\frac{\partial\phi(r,x)}{\partial r}\right|_{r=r_1} = \frac{\partial}{\partial r}\left.\left\{x^r\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r)x^n\right]\right\}\right|_{r=r_1}$$

$$= (x^r \ln x)\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r)x^n\right] + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(r_1)x^n \tag{5.39}$$

$$= y_1(x)\ln x + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(r_1)x^n \qquad , x > 0$$

olur. $a_n'(r_1)$ $r = r_1$ ’de hesaplanan da_n / dr ’yi gösterir.

(5.30) tekrarlı bağıntısında $a_n(r)$ ’yi r ’nin fonksiyonu gibi belirlemek ve daha sonra sonuç ifadelerinin r ’ye göre türevini almak zor olabilir. Alternatif olarak basitçe y ’nin (5.39) denklemi formunda olduğunu farz edelim. Bu ise,

$$y = y_1(x)\ln x + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n, \quad x > 0 \tag{5.40}$$

dır ve $y_1(x)$ bulunmuştur. b_n katsayıları ise genellikle diferansiyel denklemde yerlerine yazılıp terimleri toparlayıp her x ’in kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitlemek ile bulunur. Üçüncü bir yol ise $y_1(x)$ bilindikten sonra $y_2(x)$ ’i mertebe düşürme yöntemi ile bulmaktır.

İndisel denklemin köklerinin farkının tamsayı olma durumu:

Bu durumda ikinci çözümün türevi çok karmaşıktır ve burada verilmeyecektir. Bu çözüm formu bir sonraki teoremde (5.46) denklemi ile verilmiştir. (5.46) denklemindeki $c_n(r_2)$ katsayıları

$$c_n(r_2) = \frac{d}{dr}\left[(r - r_2)a_n(r)\right]\Big|_{r=r_2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{5.41}$$

ile belirlenir. Burada $a_n(r)$ (5.30) tekrarlı bağıntısında $a_0 = 1$ ile bulunur. Ayrıca, (5.46) denklemindeki a katsayısı

$$a = \lim_{r \to r_2}(r - r_2)a_N(r) \tag{5.42}$$

dır. Eğer $a_N(r_2)$ sonlu ise o zaman $a = 0$ ’dır ve y_2 ’de hiçbir logaritmik terim yoktur.

Pratikte, a'nın ikinci çözümünde sıfır olup olmadığını belirlemenin en iyi yolu uygun r_2 kökleri için a_n'i hesaplamaya çalışmak ve $a_N(r_2)$'nin bulunup bulunmayacağına bakmaktır. Bulunursa problem biter. Bulunamazsa (5.46) formu $a \neq 0$ ile kullanılmalıdır.

$r_1 - r_2 = N$ olduğunda yine ikinci çözüm için 3 yol vardır. Birincisi, y için (5.46) ifadesini (5.23) denkleminde yerine yazarak a ve $c_n(r_2)$'yi hesaplamaktır. İkincisi, (5.46) denklemindeki $c_n(r_2)$ ve a'yı (5.41) ve (5.42) formüllerini kullanarak hesaplamaktır. Eğer bu planlı bir işlemse, $r = r_1$'e göre hesaplanan çözümde $a_n(r_1)$'den ziyade $a_n(r)$ için bir genel formül elde edileceğinden emin olabiliriz. Üçüncü yol ise mertebe düşürme yöntemidir.

5.2.1 Teorem

$x = 0$ bir düzgün tekil nokta iken,

$$x^2 y'' + x\left[xp(x)\right]y' + \left[x^2 q(x)\right]y = 0, \tag{5.23}$$

diferansiyel denklemini ele alalım.

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \qquad x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

yakınsak kuvvet seri açılımlarında $\rho > 0$ serilerin yakınsaklık yarıçaplarının minimumu olduğunda $|x| < \rho$ için $xp(x)$ ve $x^2 q(x)$ $x = 0$'da analitiktir.

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$$

indisel denkleminin kökleri r_1 ve r_2 olsun ve eğer kökler eşitse $r_1 \geq r_2$ yazalım. O zaman ya $-p < x < 0$ aralığında ya da $0 < x < p$ aralığında

$$y_1(x) = |x|^{r_1}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n\right\} \tag{5.43}$$

formunda bir çözüm mevcuttur. Burada $a_n(r_1)$ (5.30) tekrarlı bağıntısında $a_0 = 1$ ve $r = r_1$ ile bulunur.

Eğer $r_1 - r_2$ sıfırdan farklı ya da bir pozitif tamsayı değil ise o zaman $-p < x < 0$ ya da $0 < x < p$ aralıklarının birinde

$$y_2(x) = |x|^{r_2}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n\right\} \tag{5.44}$$

formunda ikinci lineer bağımsız çözüm mevcuttur. $a_n(r_2)$ 'de (5.30) tekrarlı bağıntısında $a_0 = 1$ ve $r = r_2$ olması ile belirlenir.

(5.43) ve (5.44) denklemlerindeki kuvvet serileri en az $|x| < \rho$ için yakınsaktır.

Eğer $r_1 = r_2$ ise o zaman ikinci çözüm

$$y_2(x) = y_1(x)\ln|x| + |x|^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_1)x^n \tag{5.45}$$

olur. Eğer $r_1 - r_2 = N$, bir pozitif tamsayı, ise o zaman

$$y_2(x) = a y_1(x)\ln|x| + |x|^{r_2}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r_2)x^n\right\} \tag{5.46}$$

dır.

$a_n(r_1), b_n(r_1), c_n(r_2)$ katsayıları ve a sabiti y 'nin seri çözümlerinin formunun (5.23) denkleminde yerlerine konması ile belirlenebilir. (5.46) çözümünde hiçbir logaritmik terim olmaması durumunda a sabiti sıfır olabilir. (5.45) ve (5.46) denklemlerindeki her bir seri $|x| < \rho$ için yakınsar ve $x = 0$ 'ın bazı komşuluklarında analitik olan bir fonksiyon belirtir.

6. BESSEL DENKLEMİ

Bu bölümde, bir önceki bölümde incelediğimiz teoremi anlatan

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - v^2\right) y = 0, \; v \text{ sabit} \tag{6.1}$$

Bessel denklemi için üç özel durumu inceleyeceğiz. $x = 0$ noktasının bir düzgün tekil nokta olduğunu göstermek kolaydır. Basitlik için sadece $x > 0$ durumunu ele alalım.

6.1 Sıfırıncı Mertebeden Bessel Denklemi

Bu örnek indisel denklemde köklerin eşit olma durumunu anlatıyor. (6.1) denkleminde $v = 0$ yazarak

$$L[y] = x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0 \tag{6.2}$$

elde edilir.

$$y = \phi(r,x) = a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{r+n} \tag{6.3}$$

yerine yazılarak

$$\begin{aligned} L[\phi](r,x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[(r+n)(r+n-1) + (r+n)\right] x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+2} \\ &= a_0\left[r(r-1) + r\right] x^r + a_1\left[r(r+1) + (r+1)\right] x^{r+1} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ a_n \left[(r+n)(r+n-1) + (r+n)\right] + a_{n-2} \right\} x^{r+n} = 0 \end{aligned} \tag{6.4}$$

bulunur. $F(r) = r(r-1) + r = 0$ indisel denkleminin kökleri $r_1 = 0$ ve $r_2 = 0$ 'dır. Bu durumda kökler eşit olur. Tekrarlı bağıntı ise

$$a_n(r) = -\frac{a_{n-2}(r)}{(r+n)(r+n-1) + (r+n)} = -\frac{a_{n-2}(r)}{(r+n)^2}, \quad n \geq 2 \tag{6.5}$$

dır. $y_1(x)$ 'i bulmak için $r = 0$ alıyoruz. (6.4) denkleminden x^{r+1} 'in katsayılarının sıfır olması için $a_1 = 0$ seçmek zorundayız. Böylece, (6.5) denkleminden $a_3 = a_5 = a_7 = \cdots = 0$ olur. Ayrıca

$$a_n(0) = -a_{n-2}(0)/n^2, \quad n = 2,4,6,8,...$$

olur ya da $n = 2m$ alırsak

$$a_{2m}(0) = -a_{2m-2}(0)/(2m)^2, \quad \mathrm{m} = 1,2,3,...$$

elde edilir. Böylece

$$a_2(0) = -\frac{a_0}{2^2}, \; a_4(0) = \frac{a_0}{2^4 2^2}, \; a_6(0) = -\frac{a_0}{2^6(3.2)^2},$$

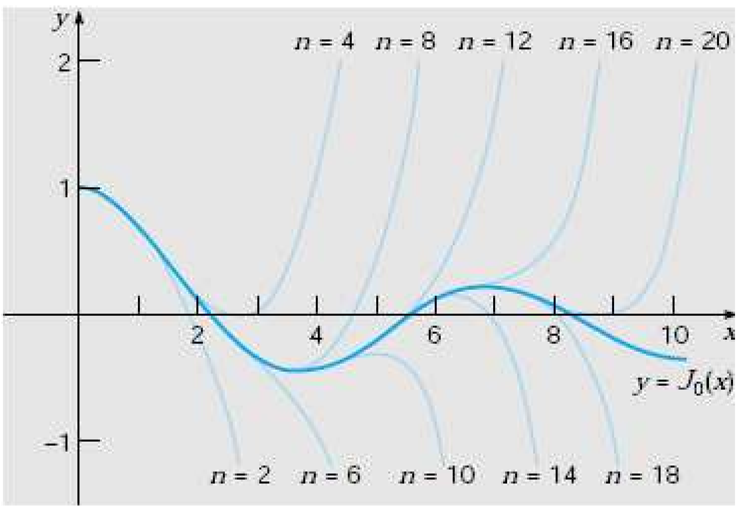
ve genel olarak,

$$a_{2m}(0) = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m!)^2}, \quad m = 1,2,3,... \tag{6.6}$$

bulunur. Bu durumda

$$y_1(x) = a_0\left\{1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}\right\}, \quad x > 0 \tag{6.7}$$

olur. Parantez içindeki fonksiyon **sıfırıncı mertebeden 1. çeşit Bessel fonksiyonu** olarak adlandırılır ve $J_0(x)$ ile gösterilir. 5.2.1 Teoremine dayanarak serinin her x için yakınsadığı ve J_0'ın $x = 0$'da analitik olduğu görülür. J_0'ın bazı önemli özellikleri sorularda bahsedildi. Şekil 6.1.1 $y = J_0(x)$'ın grafiğini ve (6.7) serisindeki bazı kısmi toplamları gösterir.



Şekil 6.1.1 $J_0(x)$'e polinom yaklaşımı. n değerleri polinom yaklaşım dereceleridir.

$y_2(x)$'i bulmak için $a_n'(0)$'ı hesaplamalıyız. İlk olarak, (6.4) denklemindeki x^{r+1}'ın katsayılarından $(r+1)^2 a_1(r)=0$ olduğunu görürüz. Buradan görülür ki sadece $a_1(0)=0$ değil aynı zamanda $a_1'(0)=0$'dır. (6.5) tekrarlı bağıntısından kolayca $a_3'(0)=a_5'(0)=\cdots=a_{2n+1}'(0)=\cdots=0$ sonucu çıkar; böylece sadece $a_{2m}'(0), m=1,2,3,...$ 'ın hesaplanması yeterlidir. (6.5) denkleminden

$$a_{2m}(r)=-a_{2m-2}(r)/(r+2m)^2, \quad m=1,2,3,...$$

vardır. Bu tekrarlı bağıntıyı çözerek

$$a_2(r)=-\frac{a_0}{(r+2)^2}, \quad a_4(r)=\frac{a_0}{(r+2)^2(r+4)^2},$$

ve genel olarak,

$$a_{2m}(r)=\frac{(-1)^m a_0}{(r+2)^2\cdots(r+2m)^2}, \quad m\geq 3 \tag{6.8}$$

elde edilir. $a_{2m}'(r)$ hesabı daha kullanışlı hale getirebilir. Bu ise aşağıdaki işlem dikkate alındığında gerçekleşir. Eğer

$$f(x)=(x-\alpha_1)^{\beta_1}(x-\alpha_2)^{\beta_2}(x-\alpha_3)^{\beta_3}\cdots(x-\alpha_n)^{\beta_n},$$

ise ve x $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$'den farlı ise o zaman,

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\beta_1}{(x-\alpha_1)}+\frac{\beta_2}{(x-\alpha_2)}+\cdots+\frac{\beta_n}{(x-\alpha_n)}$$

olur. Bu sonucu (6.8) denkleminden $a_{2m}(r)$'ye uyguladığımızda

$$\frac{a_{2m}'(r)}{a_{2m}(r)}=-2\left(\frac{1}{r+2}+\frac{1}{r+4}+\cdots+\frac{1}{r+2m}\right),$$

bulunur ve $r=0$ alarak

$$a_{2m}'(0)=-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m}\right)a_{2m}(0)$$

elde edilir. (6.6) denkleminde $a_{2m}(0)$ yerine yazılarak ve

$$H_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} \tag{6.9}$$

alınarak, sonuç olarak,

$$a'_{2m}(0) = -H_m \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m!)^2}, \quad m = 1,2,3,...$$

elde edilir. Sıfırıncı mertebeden Bessel denkleminin 2. çözümü $a_0 = 1$ alınarak ve 5.2 Bölümündeki (5.45) denkleminde $y_1(x)$ ve $a'_{2m}(0) = b_{2m}(0)$ yerlerine yazılarak bulunur.

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m H_m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m}, \quad x > 0 \tag{6.10}$$

y_2 'nin aksine, ikinci çözüm genellikle J_0 ve y_2 'nin belirli bir lineer kombinasyonuna göre seçilir ve Y_0 ile gösterilir.

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[y_2(x) + (\gamma - \ln 2)J_0(x)\right] \tag{6.11}$$

şeklinde ifade edilir. Burada γ Euler- Mascheroni sabiti olarak bilinir ve

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) \cong 0.5772 \tag{6.12}$$

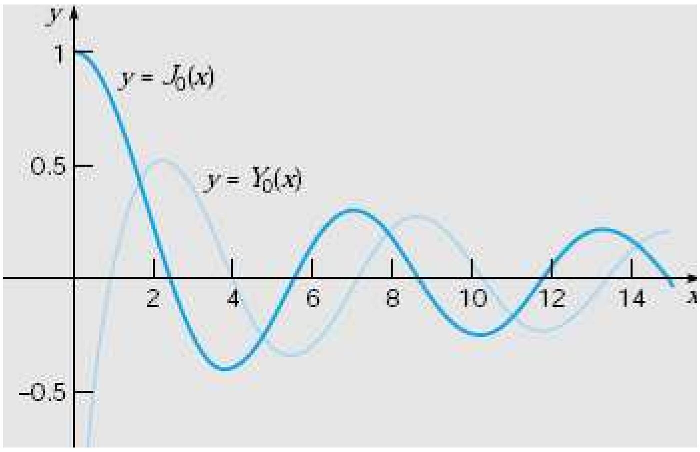
denklemi ile ifade edilir. $y_2(x)$ (6.11) denkleminde yerine konularak,

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[(\gamma + \ln\frac{x}{2})J_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} H_m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m}\right], \quad x > 0 \tag{6.13}$$

elde edilir. $x > 0$ için sıfırıncı mertebeden Bessel denkleminin genel çözümü

$$y = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x)$$

olur. Dikkat edilirse $x \to 0$ iken $J_0(x) \to 1$ olduğu görülür. Ayrıca $Y_0(x)$ 'in $x = 0$ 'da pozitif değerler arasından $x \to 0$ iken $(2/\pi)\ln x$ gibi davranan bir logaritmik tekilliği vardır. Böylece, eğer orijinde sonlu olan sıfırıncı dereceden Bessel denkleminin çözümleri ile ilgileniyorsak Y_0 'ı atmalıyız. J_0 ve Y_0 fonksiyonlarının grafiği şekil 6.1.2'de gösteriliyor.



Şekil 6.1.2 J_0 ve Y_0 Bessel fonksiyonları.

Şekil 6.1.2'den görüldüğü üzere büyük x değerleri için hem $J_0(x)$ hem de $Y_0(x)$ salınımlıdır. Böyle bir davranış orijinal denklemden beklenebilir; gerçekten bu v-inci mertebeden Bessel denkleminin çözümleri için doğrudur. (6.1) denklemini x^2'ye bölersek

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{v^2}{x^2}\right)y = 0$$

elde edilir. x'in çok büyük oluşu ile $(1/x)y'$ ve $(v^2/x^2)y$ terimleri çok küçük olur ve böylece ihmal edilebilirler. Böylece v-inci mertebeden Bessel denklemi

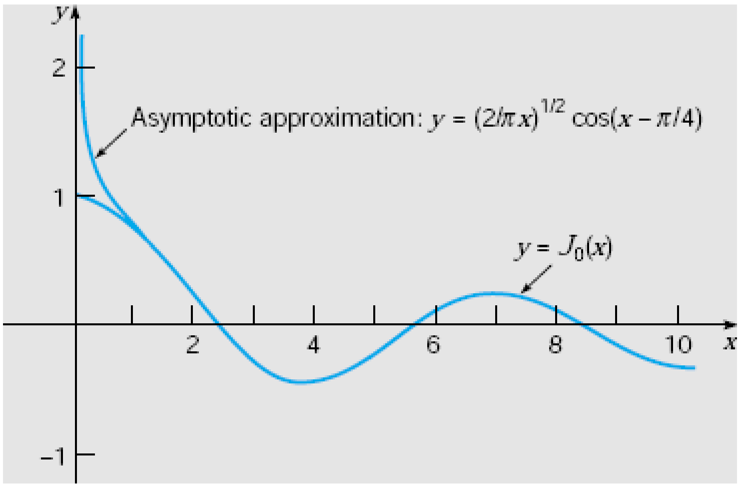
$$y'' + y = 0$$

denkleminden yaklaşık olarak elde edilir. Bu denklemin çözümleri $\sin x$ ve $\cos x$'dir; bu nedenle büyük x'ler için Bessel denkleminin çözümlerinin $\sin x$ ve $\cos x$'in lineer kombinasyonuna benzer olduğu belirlenebilir. Bessel fonksiyonlarının salınımlı olduğu bölüme kadar doğrudur; ama sadece bir bölümü doğrudur. Büyük x'ler için hem J_0 hem de Y_0 fonksiyonları da x arttıkça bozulur; bu nedenle $y'' + y = 0$ denklemi büyük x'ler için Bessel denklemine uygun yaklaşımı sağlamaz ve daha ince analizler gerekir. Aslında,

$$x \to \infty \text{ iken } \quad J_0(x) \cong \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \tag{6.14}$$

$$x \to \infty \text{ iken } \; Y_0(x) \cong \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) \tag{6.15}$$

olduğunu göstermek mümkündür. $x \to \infty$ iken bu asimptotik yaklaşımlar aslında çok iyidir. Örneğin, şekil 6.1.3 (6.14) asimptotik yaklaşımının her $x \geq 1$ için $J_0(x)$ 'e makul kesinliğini gösterir. Bu yüzden sıfırdan sonsuza kadar olan tüm alandaki $J_0(x)$ yaklaşımı için (6.7) serisinden $x \leq 1$ için iki ya da üç terim ve $x \geq 1$ için (6.14) asimptotik yaklaşımı kullanılabilir.



Şekil 6.1.3 $J_0(x)$ 'e asimptotik yaklaşım.

6.2 ½ -inci Mertebeden Bessel Denklemi

Bu örnek indisel denklemde köklerin farkının pozitif tamsayı olduğu durumu anlatıyor ama ikinci çözümde bir logaritmik çözüm yoktur.(6.1) denkleminde $v = \dfrac{1}{2}$ yazarak

$$L[y] = x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0 \tag{6.16}$$

elde edilir. $y = \phi(r, x)$ (6.3) serisinde düzenlendiğinde

$$L[\phi](r,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(r+n)(r+n-1)+(r+n)-\frac{1}{4}\right]a_n x^{r+n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{r+n+2}$$
$$=(\mathrm{r}^2-\frac{1}{4})a_0x^r+\left[(r+1)^2-\frac{1}{4}\right]a_1x^{r+1} \tag{6.17}$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\left[(r+n)^2-\frac{1}{4}\right]a_n+a_{n-2}\right\}x^{r+n}=0$$

elde edilir. İndisel denklemin kökleri $r_1=\frac{1}{2},\ r_2=-\frac{1}{2}$ ‘dir; böylece köklerin farkı bir tamsayıdır. Tekrar bağıntısı

$$\left[(r+n)^2-\frac{1}{4}\right]a_n=-a_{n-2},\qquad n\geq 2 \tag{6.18}$$

dır. (6.17) denklemindeki x^{r+1}’in katsayılarından daha büyük kök $r_1=\frac{1}{2}$’ye karşılık olarak $a_1=0$ olduğunu buluruz. Böylece, (6.18) denkleminden $a_3=a_5=\cdots=a_{2n+1}=\cdots=0$ olur. Dahası, $r=\frac{1}{2}$ için

$$a_n=-\frac{a_{n-2}}{n(n+1)},\quad n=2,4,6,...$$

olur yada $n=2m$ alırsak

$$a_{2m}=-\frac{a_{2m-2}}{2m(2m+1)},\quad \mathrm{m}=1,2,3,...$$

elde edilir. Bu tekrarlı bağıntıyı çözerek

$$a_2=-\frac{a_0}{3!},\ a_4=\frac{a_0}{5!},\cdots$$

ve genel olarak

$$a_{2m}=\frac{(-1)^m a_0}{(2m+1)!},\quad \mathrm{m}=1,2,3,...$$

elde edilir. Böylece, $a_0=1$ alarak

$$y_1(x)=x^{1/2}\left\{1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m+1)!}\right\}=x^{-1/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!},\ \ x>0 \tag{6.19}$$

elde edilir. (6.19) denklemindeki kuvvet serisi $\sin x$ için Taylor serisidir; bu durumda $1/2$-inci mertebeden Bessel denkleminin bir çözümü $x^{-1/2}\sin x$'dir. $1/2$**-inci mertebeden birinci çeşit Bessel fonksiyonu**, $J_{1/2}$, $(2/\pi)^{\frac{1}{2}} y_1$ olarak tanımlanır. Yani

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \sin x, \quad x > 0 \tag{6.20}$$

dır.

$r_2 = -\dfrac{1}{2}$ köküne karşılık, $N = r_1 - r_2 = 1$ olduğunda a_1'i hesaplamakta zorluk çekilebilir. Bununla beraber, (6.17) denkleminden $r_2 = -\dfrac{1}{2}$ için x^r ve x^{r+1}'in katsayılarının ikisi de a_0 ve a_1'in seçimine bakılmaksızın sıfırdır. Bu nedenle a_0 ve a_1 keyfi seçilebilir. (6.18) tekrarlı bağıntısından a_0'a karşılık çift sayılı katsayılar kümesi ve a_1'e karşılık tek sayılı katsayılar kümesi elde edilir. Böylece bu durumda ikinci çözüm için hiçbir logaritmik terim elde edilmesine gerek yoktur. $r_2 = -\dfrac{1}{2}$ için,

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}, \quad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!}, \quad \text{n} = 1, 2, 3, \ldots$$

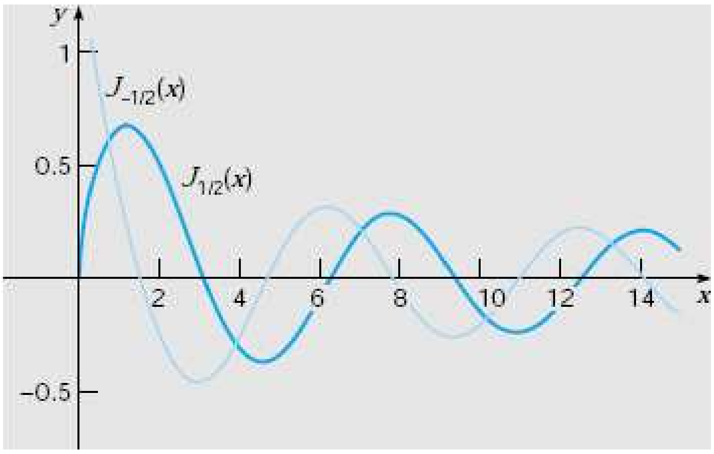
olduğu gösterilebilir. Bu nedenle

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x^{-1/2}\left\{ a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right\} \\ &= a_0 \frac{\cos x}{x^{1/2}} + a_1 \frac{\sin x}{x^{1/2}}, \quad x > 0 \end{aligned} \tag{6.21}$$

olur. a_1 sabiti basitçe $y_1(x)$'in bir katını tanıtıyor. $\dfrac{1}{2}$-inci mertebeden Bessel denkleminin ikinci lineer bağımsız çözümü genellikle $a_0 = (2/\pi)^{\frac{1}{2}}$ ve $a_1 = 0$ olan çözüm olarak alınır. $J_{-1/2}$ ile gösterilir. Yani,

$$J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \cos x, \quad x > 0 \tag{6.22}$$

(6.16) denkleminin genel çözümü $y = c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x)$ ‘dir. (6.20) ve (6.22) denklemlerini (6.14) ve (6.15) denklemleri ile karşılaştırarak, $\pi/4$’ün değişim evresi hariç büyük x’ler için $J_{-1/2}$ ve $J_{1/2}$ fonksiyonlarının sırasıyla J_0 ve Y_0’a benzediği görülür. $J_{-1/2}$ ve $J_{1/2}$ fonksiyonlarının grafikleri şekil 6.2.1’de gösteriliyor.



Şekil 6.2.1 $J_{-1/2}$ ve $J_{1/2}$ Bessel fonksiyonları

6.3 1-inci Mertebeden Bessel Denklemi

Bu örnek indisel denklemde köklerin farkının pozitif tamsayı olduğu ve ikinci çözümün bir logaritmik terim içerdiği durumu anlatıyor. (6.1) denkleminde $v = 1$ alarak

$$L[y] = x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0 \tag{6.23}$$

elde edilir. $y = \phi(r, x)$ (6.3) serisinde yerine yazılırsa ve bir önceki durumdaki gibi terimler toplanırsa,

$$\begin{aligned} L[\phi](r,x) &= (\mathrm{r}^2 - 1)a_0 x^r + \left[(r+1)^2 - 1\right]a_1 x^{r+1} \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty}\left\{\left[(r+n)^2 - 1\right]a_n + a_{n-2}\right\}x^{r+n} = 0 \end{aligned} \tag{6.24}$$

elde edilir. İndisel denklemin kökleri $r_1 = 1,\ r_2 = -1$ ‘dir. Tekrar bağıntısı

$$\left[(r+n)^2 - 1\right]a_n(r) = -a_{n-2}(r), \qquad n \geq 2 \tag{6.25}$$

dir. Daha büyük $r_1 = 1$ köküne karşılık gelen tekrar bağıntısı

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2)}, \quad n = 2, 3, 4, ...$$

olur. Ayrıca (6.24) denkleminde x^{r+1}’in katsayılarında $a_1 = 0$ olduğu bulunur. Bu nedenle tekrar bağıntısından $a_3 = a_5 = \cdots = 0$ olur. n’nin çift değerleri için $n = 2m$ olsun. Bu durumda,

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{2m(2m+2)} = -\frac{a_{2m-2}}{2^2 m(m+1)}, \quad \mathrm{m} = 1, 2, 3, ...$$

elde edilir. Bu tekrarlı bağıntıyı çözerek

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m+1)!m!}, \quad \mathrm{m} = 1, 2, 3, ... \tag{6.26}$$

bulunur. 1**-inci mertebeden birinci çeşit Bessel fonksiyonu** J_1 ile gösterilir ve $a_0 = 1/2$ olarak elde edilir. Yani,

$$J_1(x) = \frac{x}{2}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m+1)!m!} \tag{6.27}$$

Seri kesinlikle her x için yakınsar, bu yüzden J_1 fonksiyonu her yerde analitiktir. 1-inci mertebeden Bessel denkleminin ikinci çözümünü bulmak için direk yerine koyma yöntemi gösterilir. Aşağıdaki (6.28) denklemindeki genel terimin hesabı oldukça karmaşıktır ancak ilk birkaç terim basit şekilde bulunabilir. 5.2.1 Teoremine göre

$$y_2(x) = aJ_1(x)\ln x + x^{-1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right], \quad x > 0 \tag{6.28}$$

olduğunu varsayalım. $y_2'(x), y_2''(x)$ hesaplanıp (6.23) denkleminde yerine konularak ve J_1’in (6.23) denkleminin çözümü olduğu kullanılarak

$$2axJ_1'(x) + \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n-1)(n-2)c_n + (n-1)c_n - c_n\right]x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n-1} = 0, \ \ c_0 = 1 \tag{6.29}$$

elde edilir. (6.27) denkleminde $J_1(x)$ yerine konulup, iki serideki toplamların indisleri değiştirilip birkaç adım daha ileri götürülürse

$$\begin{aligned} -c_1 + \left[0.c_2 + c_0\right]x + \sum_{n=2}^{\infty}\left[(n^2-1)c_{n+1} + c_{n-1}\right]x^n \\ = -a\left[x + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m+1)x^{2m+1}}{2^2(m+1)!m!}\right] \end{aligned} \tag{6.30}$$

ortaya çıkar. (6.30) denkleminde ilk olarak $c_1 = 0$ ve $a = -c_0 = -1$ olduğunu gözlemleriz. Dahası, sağda yalnızca x'in tek kuvvetleri olduğu için sol tarafta x'in her çift kuvveti sıfır olmak zorundadır. Böylece, $c_1 = 0$ olduğu için $c_3 = c_5 = \cdots = 0$ olur. x'in tek kuvvetlerine karşılık gelen tekrar bağıntısı ((6.30) denklemindeki sol taraftaki seride $n = 2m+1$ olsun)

$$\left[(2m+1)^2 - 1\right]c_{2m+2} + c_{2m} = \frac{(-1)^m(2m+1)}{2^{2m}(m+1)!m!}, \quad m = 1,2,3,... \tag{6.31}$$

olarak elde edilir. (6.31) denkleminde $m = 1$ alırsak,

$$\left[3^2 - 1\right]c_4 + c_2 = (-1)3/(2^2 2!)$$

olur. c_2 keyfi seçilebilir ve bu denklem ile c_4 bulunur. Ayrıca denklemde x'in katsayısı olarak c_2 sıfırın katı olarak ortaya çıkar ve denklem a'yı belirlemek için kullanılır. c_2'nin keyfi olması şaşırtıcı değildir çünkü $x^{-1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right]$ ifadesinde c_2, x'in katsayısıdır. Buna göre, c_2 basitçe J_1'in bir çarpımını meydana getiriyor ve y_2 sadece J_1'in toplamsal çarpımına bağlı olarak belirleniyor. Genel pratiğe uygun olarak, $c_2 = 1/2^2$ şeklinde seçilir. Daha sonra,

$$\begin{aligned} c_4 &= \frac{-1}{2^4 \cdot 2}\left[\frac{3}{2} + 1\right] = \frac{-1}{2^4 \cdot 2!}\left[\left(1 + \frac{1}{2}\right) + 1\right] \\ &= \frac{-1}{2^4 \cdot 2!}(H_2 + H_1) \end{aligned}$$

elde edilir. (6.31) tekrarlı bağıntısının çözümünün $H_0 = 0$ olduğunu bilerek

$$c_{2m} = \frac{(-1)^{m+1}(H_m + H_{m-1})}{2^{2m} m!(m-1)!}, \quad m = 1,2,3,...$$

olduğunu göstermek mümkündür. Böylece,

$$y_2(x) = -J_1(x)\ln x + \frac{1}{x}\left[1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (H_m + H_{m-1})}{2^{2m} m!(m-1)!} x^{2m}\right], \quad x > 0 \tag{6.32}$$

olur.

$c_n(r_2)$'nin belirlendiği alternatif prosedür ile $y_2(x)$'in hesaplaması biraz daha kolaydır (5.2 Bölümünde (5.41) ve (5.42) denklemlerinden görülür). Özel olarak, son prosedür (6.31) formunda bir tekrarlı bağıntının çözülmesine gerek duymazsızın c_{2m} için genel formülün bulunmasını sağlar.

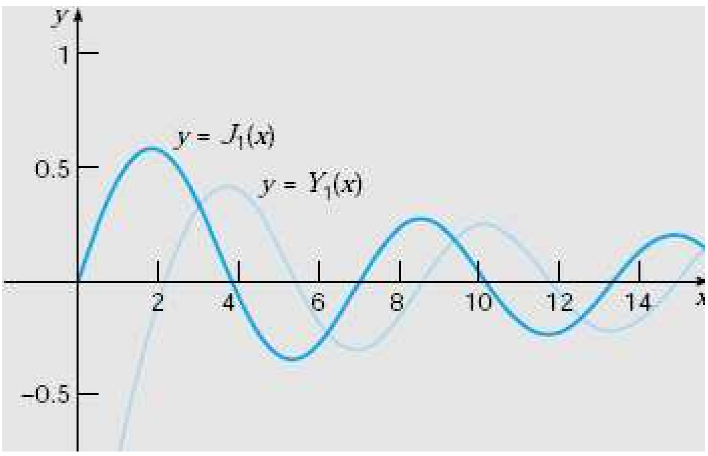
(6.23) denkleminin ikinci çözümü, 1. mertebeden ikinci tür Bessel fonksiyonu, Y_1, genellikle J_1 ve y_2'nin belirli bir lineer kombinasyonu şeklinde alınır. Y_1 aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$Y_1(x) = \frac{2}{\pi}[-y_2(x) + (\gamma - \ln 2)J_1(x)] \tag{6.33}$$

γ (12) denkleminde tanımlanmıştı. $x > 0$ için (6.23) denkleminin genel çözümü

$$y = c_1 J_1(x) + c_2 Y_1(x)$$

dır. Ayrıca, J_1'in $x = 0$'da analitik olmasına rağmen, ikinci çözüm Y_1, $x \to 0$ iken aynı durumda $\frac{1}{x}$ olarak sınırsız olur. J_1 ve Y_1'in grafikleri şekil 6.3.1'de gösterilir.



Şekil 6.3.1 J_1 ve Y_1 Bessel fonksiyonları

KAYNAKLAR

Boyce, W.E.; DiPrima, R.C. , (2005), ”Elementary Differential Equations And Boundary Value Problems”, John Wiley and Sons, Inc., Hoboken..

Rabenstein, A.L. , (1972), “Introduction to Differential Equations”, Academic Pres.

Redheffer, R. , (1991), “Differential Equations, Theory and Applications”, Jones and Baret Publischers, Boston.

Aksoy Y. , (2001), “Diferansiyel Denklemler”, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul.

Dernek, A.N; Dernek A. ,(2001), “Diferansiyel Denklemler”, Marmara Üniversitesi, İstanbul.

Adams, R.A. ,(2003), ” Calculus: A Complete Course”, Pearson Addison Wesley, Canada.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	08.08.1984	
Doğum yeri	Trabzon	
Lise	1998-2002	Halide Edip Adıvar Süper Lisesi
Lisans	2002-2006	Kocaeli Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Çalıştığı kurumlar

	2009-….	Fen Bilimleri Dershanesi