

4332

T. C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

İNDİRGENMİŞ DEĞİŞMELİ OLMAYAN HALKALAR ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN : Alev KISIR

DANIŞMAN : Prof. Dr. Arif KAYA

Bornova — İZMİR

1988

T. C.
Yükseköğretim Kurulu
Dokümantasyon Merkezi

ÖNSÖZ

Bu tez, esas olarak beş bölümden oluşmaktadır.

Giriş bölümünde, daha sonraki bölümlerde gerekli olan kavramların tanımları ile kullanılacak bazı özellikler alındıkları kaynaklarla birlikte verilmiştir. Sonunda tezde geçen gösterimler başvuru kolaylığı için bir arada yazılmıştır.

Birinci bölümde, değişmeli olmayan indirgenmiş halkaların sahip olduğu bir takım özellikler incelenmiş ayrıca bir halkanın hangi şartlar altında indirgenmiş halka olduğu ile ilgili özellikler ispat edilmiştir.

İkinci bölümde bazı ek şartlar altında genel indirgenmiş halkaların sağladığı ve [3] te bulunmayan özelliklere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, bir indirgenmiş halkada geçerli olan denk şartlar ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde, yeni özellik ve ispatlarla birlikte $[(xy)^n - x^n y^n, z] = 0$ polinom özdeşliğini sağlayan yarı asal halkaların değişmeli ve indirgenmiş olması ile ilgili bir özelliğin kısa bir ispatı ve ayrıca bir indirgenmiş halkada geçerli olan denk şartlara ait iki yeni sonuç yer almaktadır.

İspatların sonunda "ispat bitti" anlamında q.e.d simgesi kullanılmıştır.

Tez konumu veren ve bu konuların tümünü seminer olarak anlatırken önemli açıklamalarda bulunan ve kıymetli destek, teşvik ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Prof.Dr.Arif KAYA'ya minnet ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca tezin yazımındaki yardımlarından dolayı Öğten GÜRER'e teşekkürü bir borç bilirim.

Bornova, İZMİR, 1988

Alev KISIR

İÇİNDEKİLER

SAYFA NO

ABSTRAKT	1
§ 0. GİRİŞ	1
§ 1. İNDİRGENMİŞ HALKALARIN BASİT ÖZELLİKLERİ	9
§ 2. İNDİRGENMİŞ HALKALARIN DİĞER ÖZELLİKLERİ	32
§ 3. İNDİRGENMİŞ HALKALARDA DENK İFADELER	44
§ 4. YENİ ÖZELLİKLER VE İSPATLAR	60
SONUÇ	72
ÖZET	73
SUMMARY	75
KAYNAKLAR	77

ABSTRAKT

Bu tezde değişmeli olmayan indirgenmiş halkaların özellikleri çeşitli kaynaklardan taranarak derlenip incelenmiş ve toplu olarak bir arada verilmeye çalışılmıştır. Ayrıca $[(xy)^n - x^n y^n, z] = 0$ polinom özdeşliğini sağlayan yarı asal halkaların değişmeli ve indirgenmiş olması ile ilgili bir özelliğin kısa bir ispatı ve bir indirgenmiş halkada geçerli olan denk şartlara ait iki yeni sonuç yer almaktadır. [3] te bulunan özellikler bu alışmada ele alınmamıştır.

ABSTRACT

In this paper, the properties of non-commutative reduced rings are studied making use of different sources, and they are tried to be presented as a whole. Besides are a short proof of the property of the semi-prime rings satisfying the polynomial identity $[(xy)^n - x^n y^n, z] = 0$ to make them commutative and reduced and two new results having the equivalent conditions in a reduced ring. The properties in [3] are not studied in this paper.

§ 0. GİRİŞ

Sıfırdan farklı nilpotent elemanı olmayan bir halkaya indirgenmiş (reduced) halka denir. Bu tez, genel indirgenmiş halkalarla ilgili yayınlanan son gelişmeleri derlemek ve onları bir arada vermek amacıyla yazılmıştır. Değişmeli ve indirgenmiş halkalar ile ilgili özellikler ağırlıklı olmak üzere bu konuda [3] te yer almış olanlar dışında kalan özellikler hipotezlerine göre sınıflandırılmak suretiyle tez 5 bölümde gruplanmıştır. Bu arada okuduğum makalelerde verilmeyen bazı ispatları tamamlamış [Özellik 4.1, 4.3, 4.4], Özellik 4.2 nin ifadesi ve ispatı tarafımızdan yapılmıştır. Özellik 4.5 in ise çok kısa bir ispatı ve bir uyarı verilmiştir. Ayrıca tezimizde ilk kez yayınlanan özellikler de yer almıştır. [Özellik 4.7, 4.8] .

İlk olarak, özel bazı kavramları tanımlayıp, ispatlar sırasında gerekli olan ama indirgenmiş halkalarla doğrudan ilgili olmayan özellikler başvuru kolaylığı için alındıkları kaynaklarla birlikte verilmiştir.

I herhangi bir indeks kümesi ve $\{ R_i \}_{i \in I}$ halkaların bir ailesi ve

$$\prod_{i \in I} R_i = \{ f: I \longrightarrow \cup R_i \mid f(i) \in R_i, \text{ her } i \in I \}$$

ve

$$\pi_i: \prod_{i \in I} R_i \longrightarrow R_i$$

bir projeksiyon olsun. Eğer her bir $i \in I$ için

$$\pi_i \phi R_i = R_i$$

olacak şekilde bir

$$\phi: R \longrightarrow \prod_{i \in I} R_i$$

monomorfizması varsa R ye $\{R_i\}_{i \in I}$ halkalarının bir alt direk toplamı denir.

(0.1) Özellik [27, p.123, Corollary] R herhangi bir halka olsun. Eğer $\{A_i \mid i \in I\}$ R deki ara kesitleri sıfır olan ideallerin kümesi ise o zaman $R, R/A_i$ halkalarının alt direk toplamına izomorftur.

R herhangi bir halka ve P R de bir has ideal olsun. Eğer $ab \in P$ olduğunda ya $a \in P$ veya $b \in P$ oluyorsa P idealine R de **tam olarak asal** (completely prime) ideal denir.

Q R de herhangi bir has ideal olsun. Eğer bir $n \in \mathbb{Z}$ için $a^n \in Q$ olduğunda $a \in Q$ oluyorsa Q ya R de **tam olarak yarı asal** (semi-completely prime) ideal denir.

(0.2) Özellik [1, lemma on existence of completely simple ideals]. Eğer Q tam olarak yarı asal ideal ve $B \supset Q$ olacak şekilde herhangi bir ideal ise o zaman $P \supset Q$ fakat $P \not\subseteq B$ olacak şekilde bir P tam olarak asal ideali vardır.

(0.3) Özellik [12, p.194, Lemma 3.8] R birimli bir halka, J üniter R -modül olsun. O zaman J nin injektif olması için gerekli ve yeterli şart R nin her L sol ideal için L den J ye her R -modül homomorfizması R den J ye bir R -modül homomorfizmasına genişletilebilir olmasıdır.

R herhangi bir halka olsun. M ve N $M \subset N$ olacak şekilde iki sağ R -modül olsun. N nin sıfırdan farklı her alt modülü ile M nin ara kesiti sıfırdan farklı ise N ye M nin **"essential" genişlemesi** denir.

Eğer N M nin "essential" genişlemesi ve N nin has genişlemesi yoksa N ye M nin **maksimal "essential" genişlemesi** denir.

(0.4) Özellik [25, p.92, Proposition 10] $N M$ nin bir genişlemesi olsun. O zaman aşağıdakiler birbirine denktirler.

- (1) $N M$ nin maksimal "essential" genişlemesidir.
- (2) $N M$ nin "essential" genişlemesi ve injektiftir.
- (3) $N M$ nin minimal injektif genişlemesidir.

N ye M nin injektif "hull"ı denir.

(0.5) Özellik [22, Proposition 2.21, Proposition 2.24] R bir halka, $A \rightarrow AR=A$ olacak şekilde R nin bir idealı olsun. O zaman aşağıdakiler birbirine denktirler.

- i) R nin her has sağ idealı maksimal sağ ideallerin bir ara kesitidir.
- ii) Eğer M basit R -modül ise $\hat{M}$, M nin injektif "hull"ı, olmak üzere $M = \hat{M}R$ dir.
- iii) Eğer M basit R -modül ise M injektiftir.

(0.6) Özellik [22, Proposition 2.26] R bir halka olsun. I , $N(I)/I$ çarpmaya göre yarı grup olacak şekilde R nin bir sağ idealı ve J , $I \subsetneq J$ olacak şekilde R nin bir sağ idealı ise o zaman

$$\{ m \in (\hat{R}/I) \mid mR=0 \} = 0 \text{ dir.}$$

(0.7) Özellik [22, Proposition 2.27] R , $a \in R$ için $A(ca) \subseteq A(a)$ olacak şekilde $c \in R$ vardır şartını sağlayan bir halka olsun. I , $N(I)/I$ çarpmaya göre yarı grup olacak şekilde R nin bir sağ idealı ve J , $I \subsetneq J$ olacak şekilde R nin bir sağ idealı ise

$$J \cap N(I)/I \neq \emptyset$$

olduğunu kabul edelim.

O zaman,

$\Lambda(R/I) = \{ r \in R \mid \text{her bir } x \in R \text{ için } rxy_x = 0 \text{ olacak}$
 $\text{şekilde } y_x \notin I \text{ vardır.} \}$

R herhangi bir halka olsun. $\forall a \in R$ için $a = axa$ olacak şekilde bir $x \in R$ varsa R ye **regüler halka** denir.

(0.8) Özellik [22, Proposition 2.29] R bir regüler halka ve I R nin bir maksimal sağ ideali olsun. O zaman I nin modüler olması için gerekli ve yeterli şart $N(I)/I \neq \emptyset$ olmasıdır.

S birimli bir halka, R S nin birim elemanını içeren S nin bir alt-halkası olsun. Eğer $\forall s \in S$ için

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

olacak şekilde $a_{n-1}, \dots, a_0 \in R$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ varsa S ye R nin **integral genişlemesi** veya **R üzerinde integraldir** denir.

(0.9) Özellik [33, Theorem 4] S R nin bir integral genişlemesi olsun. Eğer R regüler ise o zaman S deki her Q tam olarak asal ideali S de maksimal sağ idealdir.

(0.10) Özellik [28, p.66, {x.11}] R ve S herhangi iki halka, θ R den S üzerine çekirdeği K olan bir homomorfizma ise aşağıdakiler sağlanır.

- i) P K yı içeren bir asal ideal ise θP , S de bir asal idealdir.

- ii) U S de bir asal ideal ise $S^{-1}U, R$ de K yı içeren bir asal idealdir.
- iii) R deki K yı içeren bütün asal ideallerin kümesinden S deki bütün asal ideallerin kümesi üzerine $P \rightarrow S.P$ dönüşümü 1-1 bir dönüşümdür.

R birimli bir halka, P R den farklı bir ideal olsun. $\forall P$ asal ideali ve $a \notin P$ için $ax \in C \setminus P$ olacak şekilde $x \in R$ varsa R ye **hemen hemen değişmeli** halka (AC -halka) denir.

R birimli bir halka, I R de bir ideal olsun. $\forall I$ ideali ve $a \notin I$ için $ax \in C \setminus I$ olacak şekilde $x \in R$ varsa R ye **kuvvetli AC -halka** (SAC -halka) denir.

(0.11) Özellik [34, Theorem 4] R bir AC halka ise aşağıdakiler birbirine denktirler.

- (1) R regüler halkadır.
- (2) R de her ideal yarı asaldır.
- (3) R indirgenmiş ve R nin her P asal ideali için R/P regüler halka (gerçekten bölüm halkası).dir.

(0.12) Özellik [34, Theorem 7] Eğer P R de bir asal ideal ve P', R' de $M=R \setminus P$ ile arakesiti sıfır olan idealler içinde maksimal olan bir ideal ise o zaman P', R' de bir asal ideal ve $P' \cap R = P$ dir.

(0.13) Özellik [34, Corollary 4] P', R' de tam olarak asal bir ideal olsun. O zaman P' 'nin R' de maksimal sol ideal olması için gerekli ve yeterli şart $P' \cap R$ nin R de bir maksimal ideal olmasıdır.

R herhangi bir halka olsun. Eğer $\forall x \in R$ için $x^n = x^m$ olacak şekilde farklı n, m pozitif tam sayıları varsa R ye **"periodic" halka** denir.

(0.14) Özellik [7, Lemma 1] R bir "periodic" halka olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır.

- (a) $\forall x \in R$ için x in bir kuvveti idempotenttir.
- (b) $\forall x \in R$ için $x - x^{n(x)}$ nilpotent olacak şekilde bir $n(x) > 1$ vardır.
- (c) $\forall x \in R$, bir $n = n(y) > 1$ için $y^n = y$ ve w nilpotent olmak üzere $y + w$ şeklinde yazılabilir.
- (d) Eğer I R de bir ideal ve $x + I$, R/I nin sıfırdan farklı nilpotent elemanı ise R , $x \equiv u \pmod{I}$ olacak şekilde bir u nilpotent elemanı vardır.

R herhangi bir halka olsun.

a) R nin bir Q idealinin indirgenmiş ideal olması için gerekli ve yeterli şart R/Q nun indirgenmiş halka olmasıdır.

b) A R nin bir alt halkası olsun. Eğer

$$\forall x \in R \text{ için } r^n \in R$$

olacak şekilde $n = n(r) \geq 1$ varsa R ye bir A -radikal halka denir.

c) R nin iki yanlı nil ideallerinin bileşimine R nin "upper" nil radicali denir.

d) $\forall x \in R$ için

$$\{x\}^r = \{r \in R \mid xr = 0\}$$

kümesine x in sağ sıfırlayanı denir. Benzer şekilde

$$\{x\}^1 = \{r \in R \mid rx = 0\}$$

kümesine x in sol sıfırlayanı denir.

e) R bir halka ve $\forall a \in R$ için $a^n x a^n = a^n$ olacak şekilde bir $n(a) \geq 1$ ve $x \in R$ varsa R ye Π - regüler halka denir.

f) R nin sıfırdan farklı her J ideali için $J \cap I \neq (0)$ olacak şekilde R nin bir I sağ idealine R nin "**essential**" sağ ideali denir. Benzer şekilde R nin "**essential**" sol ideali de tanımlanır.

g) $Z_R(R) = \{ a \in R \mid \{a\}^I \subseteq R \text{ nin "essential" sağ ideali kümesine} \}$ R nin sağ singüler ideali denir. Benzer şekilde R nin sol singüler ideali tanımlanır.

h) $\forall x \in R$ için $x = x^2 a$ olacak şekilde R nin bir $a = a(x)$ elemanı varsa R ye **kuvvetli regüler** (strongly regüler) halka denir.

ı) Eğer R nin her esas ideali bir merkezi idempotent tarafından doğurulmuş ise R ye **biregüler halka** denir.

i) Eğer $\forall x \in R$ için

$$x^n = kx^m \quad \text{ve} \quad n > m > 0$$

olacak şekilde x e bağlı k, n, m tamsayıları varsa R ye "**quasi-periodic**" halka denir.

j) Eğer $\forall x \in R$ için $x^n = kx$ olacak şekilde bir k tamsayısı ve $n > 1$ tamsayısı varsa R ye bir **C-halka** denir.

k) Eğer $\forall x \in R$ için $x^{n(x)} = x$ olacak şekilde $n(x) > 1$ varsa R ye bir **J-halka** denir.

l) $T = \{ t \in R \mid tx^n = x^n t, n = n(xt) \geq 1, \forall x \in R \}$ kümesine R nin "**hyper**" merkezi denir.

GÖSTERİMLER

SAYFA NO

T	: R nin " hyper " merkezi	13
N	: R nin nilpotent elemanlarının kümesi	14
S^I	: R nin boş kümeder farklı bir S alt kümesinin sağ sıfırlayanı	28

S^1 : R nin boş kümeden farklı bir S alt kümesinin sol sıfırlayanı	26
$\{x\}^r$: R nin bir x elemanının sağ sıfırlayanı ..	14
$\{x\}^1$: " " " " sol " ..	14
$S^r = S^1 = A(S)$: S nin sıfırlayanı (R değişmeli iken)	28
$\{x\}^r = \{x\}^1 = A(x)$: x in sıfırlayanı (R değişmeli iken)	15
$Z_r(R)$: R nin sağ singüler ideali	17
$Z_l(R)$: R nin sol singüler ideali	17
$Z(R)$: R nin singüler ideali (R değişmeli iken) ...	17
$O_p = \{x \in R \mid \text{bir } y \notin M \text{ için } xy = 0\}$	15
$O(P) = \{x \in R \mid \text{bir } y \notin M \text{ için } xRy = 0\}$	15
$A(xR) = \{y \in R \mid xr \neq 0, (xr)y = 0 \text{ olacak şekilde } r \in R \text{ vardır}\}$	15
$Z(x) = \{I \mid I \text{ R de bir ideal, } x \notin I, rx \in I \text{ ise } r \in I \text{ ve } R/I \text{ indirgenmiş halka}\}$	15
$\hat{R}$: R nin injektif "hull" ı	28
(a) : R nin bir a elemanı tarafından doğurulan ideal	33
$X(R)$: R nin bütün asal ideallerinin kümesi	51
$\text{Supp}(A) = \{P \in X(R) \mid A \not\subseteq P\}$	50
$\text{rad}(R)$: R nin asal radikali	52
C : R nin merkezi	5
q.e.d. : "ispat bitti".	9

§ 1. İNDİRGENMİŞ HALKALARIN BASİT ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde bir indirgenmiş halkanın sağladığı bir takım özellikler yer alacaktır.

İlk olarak bir halkanın hangi şartlar altında indirgenmiş halka olduğu ile ilgili özellikleri görelim.

Özellik 1.1. [1, Theorem 2]. Sıfırdan farklı bir R halkası sıfır bölensiz halkaların alt direk toplamına izomorf ise bir indirgenmiş halkadır.

İspat. R , sıfır bölensiz S_i halkalarının alt direk toplamı olsun. S, S_i lerin tam direk toplamı ve T S nin herhangi bir alt halkası olsun.

$$t = (t_1, t_2, \dots) \in T \text{ ve } t^n = (t_1^n, t_2^n, \dots) = 0$$

ise

$$t_1^n = 0, \quad t_2^n = 0, \quad \dots \quad \text{dır.}$$

S_i ler sıfır bölensiz halkalar olduğundan

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 0, \quad \dots \quad \text{dir.}$$

$$\Rightarrow t = (t_1, t_2, \dots) = (0, 0, \dots) = 0$$

Buradan T , indirgenmiş bir halkadır. Öyleyse R de indirgenmiş bir halkadır. q.e.d.

Özellik 1.2. [21, Proposition]. Q , herhangi bir R halkasının bir indirgenmiş ideali, S R nin herhangi bir alt kümesi ve

$$A = \{ r \in R \mid rS \subset Q \}$$

kümesi S nin $\text{mod } Q$ ya göre sol (sağ) sıfırlayanı ise o zaman A bir indirgenmiş idealdir.

İspat. Q_i indirgenmiş ideal ise $\bigcap_{i \in I} Q_i$ de indirgenmiş idealdir. Çünkü;

$$\bar{y} \in R / \bigcap_{i \in I} Q_i \quad \text{ve} \quad \bar{y}^m = 0$$

olsun. O zaman

$$\begin{aligned} y^m \in \bigcap_{i \in I} Q_i &\Rightarrow \forall i \in I \quad \text{için} \quad y^m \in Q_i \\ &\Rightarrow (y + Q_i)^m = y^m + Q_i = 0 \\ &\Rightarrow y + Q_i, R/Q_i \text{ de nilpotenttir.} \\ &\Rightarrow y + Q_i = 0 \quad (Q_i \text{ indirgenmiş ideal}) \\ &\Rightarrow \forall i \in I \quad \text{için} \quad y \in Q_i \\ &\Rightarrow y \in \bigcap_{i \in I} Q_i \\ &\Rightarrow \bar{y} = 0 \end{aligned}$$

Şimdi S nin birden fazla elemandan oluştuğunu kabul edelim.

$$\bigcap_{s \in S} \{ r \in R \mid rs \in Q \} = L$$

diyelim. Eğer

$$\begin{aligned} a \in A &\Rightarrow aS \subseteq Q \Rightarrow \forall s \in S \quad \text{için} \quad as \in Q \\ &\Rightarrow a \in L \Rightarrow A \subseteq L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \in L &\Rightarrow \forall s \in S \text{ için } 1s \in Q \Rightarrow 1s \in Q \\ &\Rightarrow 1 \in A \Rightarrow L \subseteq A \end{aligned}$$

Buradan $A = L$ bulunur. Öyleyse $S = \{s\}$ kabul edebiliriz.

Şimdi de A nın bir indirgenmiş ideal olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} a_1, a_2 \in A &\Rightarrow a_1s, a_2s \in Q \\ &\Rightarrow (a_1 - a_2)s = a_1s - a_2s \in Q \\ &\Rightarrow a_1 - a_2 \in Q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall r \in R \text{ ve } a \in A \text{ için } (ra)s &= r(as) \in Q \quad (as \in Q) \\ &\Rightarrow ra \in A \end{aligned}$$

Öyleyse A sol idealdir.

$$\begin{aligned} a \in A &\Rightarrow as \in Q \Rightarrow sa \in Q \Rightarrow (sa)r \in Q \quad (Q \text{ ideal}) \\ &\Rightarrow s(ar) \in Q \Rightarrow (ar)s \in Q \Rightarrow ar \in A \end{aligned}$$

Buradan A bir sağ idealdir. Yani bir idealdir.

$$\bar{r} \in R/A \text{ ve } \bar{r}^2 = 0 \quad \text{olsun.}$$

$$\begin{aligned} \bar{r}^2 = 0 &\Rightarrow r^2 \in A \Rightarrow r^2s \in Q \Rightarrow rsr \in Q \\ &\Rightarrow rsrs \in Q \Rightarrow (rs)^2 \in Q \Rightarrow rs \in Q \\ &\Rightarrow r \in A \Rightarrow \bar{r} = 0 \end{aligned}$$

Böylece R/A bir indirgenmiş halkadır. Yani A bir indirgenmiş idealdir. q.e.d.

Özellik 1.3. [10, Theorem 6] . R sıfırdan farklı nil ideali olmayan ve A - radikal bir halka olsun. 0 zaman A indirgenmiş ise R de indirgenmiş bir halkadır.

İspat. Önce R nin sıfırdan farklı nil sağ ideali-
nin olmadığını göstermeye çalışalım. $\mathcal{J}$, R nin sıfırdan
farklı nil sağ ideali ve $0 \neq a \in \mathcal{J}$ için $a^2 = 0$ olsun.
Eğer, $r \in R$ ise bir n için

$$r^n \in A \text{ ve } ((1+a)r(1-a))^n \in A \quad \text{dır.}$$

$$((1+a)r(1-a))^n = (1+a)r^n(1-a)$$

$$= r^n + ar^n - r^na - ar^na$$

$$\Rightarrow b = ar^n - r^na - ar^na \in A .$$

Şimdi,

$$b^2 = (ar^n)^2 + (r^na)^2 - ar^{2n}a$$

ve tümevarımla $c_t \in R$ olmak üzere

$$b^{2t} = (ar^n)^{2t} + (r^na)^{2t} + ac_t a$$

bulunur. $a \in \mathcal{J}$ olduğundan

$$ar^n \text{ ve } r^na$$

nilpotenttir. Öyleyse

$$(ar^n)^{2t_0} = (r^na)^{2t_0} = 0$$

olacak şekilde bir t_0 vardır.

Buradan,

$$b^{2t_0+1} = (a c_{t_0} a)^2 = 0$$

ve A üzerindeki hipotezden $b=0$ alabiliriz. Buradan,

$$0 = ba = ar^n a \quad \text{dır.}$$

$$\Rightarrow 0 = b = ar^{n-r^n} a$$

$$\Rightarrow a \in T \quad (T \text{ R'nin hyper merkezi})$$

Buradan R nin sıfırdan farklı nil ideali olmadığından a R nin merkezine aittir. Fakat R yarıasal ve a nil-potent eleman olduğundan $a=0$ olmalıdır. Bu ise $a \neq 0$ olmasına çelişir.

Şimdi $a \in R$ için $a^2=0$ olsun. Eğer $r \in R$ ise uygun bir n için

$$(ar)^n \in A \quad \text{ve} \quad ((1+a)(ar)(1-a))^n \in A \quad \text{dır.}$$

Fakat

$$\begin{aligned} ((1+a)(ar)(1-a))^n &= (1+a)(ar)^n(1-a) \\ &= (ar)^n - (ar)^n a \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (ar)^n a = b \in A.$$

$b^2=0$ ve A indirgenmiş olduğundan $b=0$ dır. Bundan

dolayı $(ar)^{n+1} = 0$ dır. Buradan aR nil sağ ideal ve dolayısı ile $a=0$ dır. Öyleyse $\bar{R}$ indirgenmiş bir halkadır.

Yukarıdaki Özelliğe denk olarak şunu söyleyebiliriz:

"R A-radikal ve A indirgenmiş halka ise R nin nilpotent elemanları bir ideal oluşturur."

Bunu şöyle ispatlayabiliriz:

$N(R)$ R nin "upper" nil radikali

ve $\bar{R} = R/N(R)$ olsun.

$$\bar{A} = A+N(R)/N(R) \cong A/A \cap N(R) \cong A$$

ve A indirgenmiş olduğundan $\bar{R}$ A-radikaldir. Buradan R indirgenmiş ve R nin her nilpotent elemanı $N(R)$ ye aittir. Yani,

$$N(R) = N \quad \text{dır.} \quad \text{q.e.d.}$$

Özellik 1.4. [[23] , Proposition 2.1, Proposition 2.2, Proposition 2.3 [29] , Lemma 3.1, Proposition 3.1, Remark [24] , Proposition 4.2, [21] , Theorem, [1] , Theorem 2 [33] , Theorem 1, [32], Theorem 2.1, Lemma 2.2]
R bir indirgenmiş halka, $x \in R$ ve $P \subset R$ de bir asal ideal olsun. O zaman aşağıdakiler geçerlidir:

(1) i) $\{x\}^T$, R nin iki yanlı bir idealidir.

ii) $x \notin \{x\}^1$

iii) $R/A(x)$ bir indirgenmiş halka

iv) $r \in R$ ve $rx \in \{x\}^1$ ise $r \in \{x\}^1$

- (2) $Rx \cap \{x\}^1 = (0)$,
- (3) R singüler ideali sıfır olan bir halkadır.
- (4) R nin idempotentleri merkeze aittir.
- (5) $D_P = D(P)$
- (6) i) $D_P \subseteq P$
ii) R/D_P bir indirgenmiş halkadır.
- (7) R sıfır bölensiz halkaların alt direk toplamıdır.
- (8) P , üstelik $\forall x \neq 0 \in R$ için $A(x) \subset P$ olacak şekilde minimal tam olarak asal ideal olsun. O zaman

$$P \subset A(xR) \text{ dir.}$$

- (9) $x \neq 0$ olmak üzere

$Z(x)$ in her maksimal elemanı tam olarak asal bir idealdir. Özel olarak, $A(x)$ tam olarak asal bir idealde kapsanır.

Uyarı 1.5. Her ne kadar yukarıdaki özelliğin (8). kısmında P nin tam olarak asal olma şartı koyulmuşsa da bu şarta Özellik 3.1.1. e göre gerek yoktur.

İspat (1). $x \neq 0$ olsun.

- i) Eğer $a \in R$ ve $ax = 0$ ise o zaman

$(xa)^2 = xaxa = 0 \Rightarrow xa = 0$ (R indirgenmiş halka olduğundan). Benzer şekilde $xa = 0$ ise $ax = 0$ olduğu da görülür. Öyleyse

$$\{x\}^1 = \{x\}^r \text{ dir.}$$

ii) $x \in \{x\}^1$ olsa, $x^2 = 0$ olur. Buradan R indirgenmiş halka olduğundan $x = 0$ olur. Hipotezden $x \neq 0$ idi. Öyleyse $x \notin \{x\}^1$ dir.

$$\text{iv) } a, b \in R \quad \text{ve} \quad ab^2 = 0 \Rightarrow (bab)^2 = bab^2ab = 0$$

$$\Rightarrow bab = 0$$

$$\Rightarrow (ab)^2 = abab = 0$$

$$\Rightarrow ab = 0$$

$$r \in R \quad \text{ve} \quad rx \in \{x\}^1 \Rightarrow (rx)x = 0$$

$$\Rightarrow rx = 0$$

$$\Rightarrow r \in \{x\}^1$$

iii) $\bar{a} \in R/A(x) = \bar{R}$ ve bir $n \in \mathbb{Z}$ için $\bar{a}^n = 0$ olsun. $n = 1$ ise, ispatlanacak bir şey yoktur.

$$n > 1 \text{ ise, } a^n \in A(x) \text{ ve } 0 = xa^n = xa^{n-2} a.a$$

$$\Rightarrow xa^{n-2} a = 0$$

$$\Rightarrow xa^{n-1} = 0$$

Öyleyse,

$$xa^n = 0 \Rightarrow xa^{n-1} = 0 \quad \text{dir.}$$

n üzerindeki tümevarımdan $xa=0$ bulunur. Bundan dolayı

$$a \in A(x) \quad \text{ve} \quad \text{dolayısıyla} \quad \bar{a} = 0 \quad \text{dir.}$$

$$(2) \quad y \in Rx \cap \{x\}^1 \quad \text{olsun. } 0 \text{ zaman,}$$

bir $u \in R$ için $y=ux$ ve $yx=0$ dir.

$$\Rightarrow xy=0 \Rightarrow y^2=uxy=0 \Rightarrow y=0 \text{ dir.}$$

Öyleyse,

$$Rx \cap \{x\}^1 = (0) \text{ dir.}$$

(3) x , R nin singüler idealine ait ise yani $x \in Z(R)$ ise (2) den

$$\{x\}^1 \cap Rx = (0)$$

ve buradan $x = 0$ dir.

(4) $e \in R$ bir idempotent olsun.

$$\begin{aligned} [(1-e).xe]^2 &= (xe-exe)^2 \\ &= xexe - xe^2xe - exexe + exe^2xe \\ &= xexe - xexe - exexe + exexe \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (1-e)xe = 0.$$

Benzer şekilde $ex(1-e)=0$ olduğu da görülür.

Öyleyse,

$$ex=xe=exe \text{ dir.}$$

$$(5) \quad x \in O(P) \Rightarrow \forall r \in R \quad \text{ve bir } y \notin P \quad \text{için} \quad xry = 0$$

$$\Rightarrow \exists r_0 \in R \quad \text{için} \quad r_0 y \notin P$$

$$\Rightarrow x r_0 y = 0$$

$$\Rightarrow x \in O_P$$

$$\Rightarrow O(P) \subseteq O_P$$

$$x \in O_P \Rightarrow \text{bir } y \notin P \quad \text{için} \quad xy = 0$$

$$\Rightarrow yx = 0$$

$$\Rightarrow (xry)^2 = xryxry = 0$$

$$\Rightarrow \forall r \in R \quad \text{için} \quad xry = 0$$

$$\Rightarrow O_P \subseteq O(P)$$

(6) i) Önce O_P nin bir ideal olduğunu gösterelim.

Eğer $r_1, r_2 \in O_P$ ise o zaman

$$r_1 a_1 = 0 = r_2 a_2$$

olacak şekilde $a_1, a_2 \in R/P$ vardır. (1) den

$$r_1 R a_1 = 0 = r_2 R a_2$$

Uygun bir $r \in R$ için $a_1 r a_2 \notin P$ dir. O zaman

$$(r_1 - r_2) a_1 r a_2 = r_1 a_1 r a_2 - r_2 (a_1 r) a_2 = 0$$

Bundan dolayı

$$r_1 - r_2 \in \mathcal{O}_P$$

Eğer $r \in \mathcal{O}_P$ ve $x \in R$ ise $ra_1 = 0$ olacak şekilde bir $a_1 \notin P$ vardır.

$$\Rightarrow xra_1 = 0 \Rightarrow xr \in \mathcal{O}_P$$

Yine

$$ra_1 = 0 \Rightarrow a_1 r = 0 \Rightarrow a_1 rx = 0$$

$$\Rightarrow rxa_1 = 0 \Rightarrow rx \in \mathcal{O}_P$$

Öyleyse $\mathcal{O}_P$ bir idealdir. Şimdi de $\mathcal{O}_P \subseteq P$ olduğunu gösterelim.

$$r \in \mathcal{O}_P \Rightarrow \text{Bir } a \notin P \text{ için } ra = 0$$

$$\Rightarrow \forall y \in R \text{ için } ray = 0$$

$$\Rightarrow ayr = 0$$

$$\Rightarrow aRr = 0$$

$$\Rightarrow \bar{a}\bar{R}\bar{r} = 0 \quad (\bar{R} = R/P)$$

$$\Rightarrow \bar{a} = 0 \text{ veya } \bar{r} = 0$$

$$\Rightarrow r \in P \quad (a \notin P)$$

ii) Bir n tamsayısı için $a^n \in \mathcal{O}_P$ olacak şekilde $a \in R$ varsa o zaman

bir $y \notin P$ için $a^n y = 0$ dir.

(1) den,

$$(ay)^n = 0 \quad \text{ve} \quad ay = 0 \quad \text{dir.}$$

Dolayısı ile $a \in O_P$ dir. Yani R/O_P bir indirgenmiş halkadır.

(7) $0 \neq x \in R$ olsun. Şimdi bir S kümesi tanımlayalım.

$$S = \{ I \subseteq R \mid I, R \text{ nin indirgenmiş ideali,} \\ x \notin I \}$$

$0 \in S$ dir. Dolayısı ile $S \neq \emptyset$ dir. S kümesi kapsamaya göre kısmi sıralıdır. S nin herhangi bir zinciri

$$C = \{ I_i \}_{i \in I} \quad \text{ve} \quad U = \bigcup_{i \in I} I_i$$

olsun. O zaman

$$x \notin U \quad \text{ve} \quad U \text{ bir idealdir.}$$

$$\bar{y} \in R/U \quad \text{ve} \quad \bar{y}^m = 0$$

olsun.

$$\bar{y}^m = 0 \Rightarrow \overline{y^m} = 0$$

$$\Rightarrow y^m \in U$$

$$\Rightarrow \text{En az bir } i \in I \text{ için } y^m \in I_i$$

$$\Rightarrow 0 = y^m + I_i = (y + I_i)^m$$

$$\Rightarrow y + I_i, R/I_i \text{ de nilpotenttir.}$$

$$\Rightarrow y \in I_i \quad (I_i \text{ ler indirgenmiş ideal})$$

$$\Rightarrow y \in U$$

$$\Rightarrow \bar{y} = 0$$

Öyleyse U indirgenmiş bir idealdir ve $U \in S$ olur. Dolayısı ile S kümesine Zorn Lemma'sını uygulayabiliriz. Buradan S kümesinin x i içermeyen bir Q_x maksimal indirgenmiş ideali vardır.

$$\bar{a} \neq 0, \bar{b} \neq 0 \in R/Q_x \quad \text{ve} \quad \bar{a}\bar{b} = 0$$

olsun. 0 zaman

$$ab \in Q_x \quad \text{ve} \quad a \notin Q_x, \quad b \in Q_x \quad \text{dir.}$$

$$A = \{ r \in R \mid rb \in Q_x \} \quad (\Rightarrow (Ab \subset Q_x) \Rightarrow b \in B)$$

$$B = \{ r \in R \mid Ar \subset Q_x \} \quad (\Rightarrow (AB \subset Q_x) \Rightarrow a \in A)$$

kümelerin tanımlayalım. Özellik 1.2. den A ve B indirgenmiş ideallerdir.

$$Q_x \subseteq A, \quad Q_x \subseteq B \quad \text{ve} \quad AB \subset Q_x \quad \text{dir.}$$

Ayrıca,

$$a \in A \quad \text{ve} \quad a \notin Q_x \Rightarrow A \neq Q_x$$

$$b \in B \quad \text{ve} \quad b \notin Q_x \Rightarrow B \neq Q_x \quad \text{dir.}$$

0 zaman Q_x in maksimalliğinden $x \in A$ ve $x \in B$ dir.

$$\Rightarrow x^2 \in ABC \subseteq Q_x$$

$$\Rightarrow x^2 \in Q_x$$

$$\Rightarrow x \in Q_x \quad (Q_x \text{ indirgenmiş ideal})$$

Halbuki $x \notin Q_x$ idi.

Öyleyse R/Q_x in sıfırdan farklı sıfır bölene yoktur.
Son olarak,

$$\bigcap_{0 \neq x \in R} Q_x = 0$$

olduğunu gösterelim. $y \in \bigcap_{0 \neq x \in R} Q_x$ olsun. 0 zaman

$$\forall 0 \neq x \in R \text{ için } y \in Q_x \text{ dir.}$$

$y \neq 0$ olsa, Q_x lerin seçiminden $y \notin Q_y$ olurdu.

Bu ise $\forall 0 \neq x \in R$ için $y \in Q_x$ olması ile çelişir.

Öyleyse $y = 0$ olmak zorundadır. Yani,

$$\bigcap_{0 \neq x \in R} Q_x = 0 \text{ dir.}$$

Dolayısı ile (0.1) den R , sıfırdan farklı sıfır bölene olmayan R/Q_x halkalarının alt direk toplamıdır.

Bu özelliğin ispatı Andrunakievič ve Rjabuhin tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir: [1]

$Q \subseteq R$ nin sıfır ideali olmak üzere $a^n \in Q$ ise o zaman $a^n = 0$ dır. Buradan $a = 0$ ve $a \in Q$ dur. Öyleyse sıfır ideali tam olarak yarı asal idealdir.

P_α , R nin tam olarak asal ideali olmak üzere

$$0 = \bigcap_{\alpha} P_{\alpha} \quad \text{dır. (0.1)}$$

$\bar{R}_\alpha = R/P_\alpha$ olsun. $\bar{R}_\alpha$ sıfır bölensiz bir halkadır.

(8) Bu ispata geçmeden bize burada gerekli aşağıdaki özelliği verelim:

Özellik 1.6. [30, Lemma 1.] R indirgenmiş bir halka ve $a_1, a_2, \dots, a_n, x \in R$ olsun. P $a_1, a_2, \dots, a_n$ nin herhangi sırada bir çarpımı; P_i $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ nin bir çarpımı ve P_x $a_1, \dots, a_n, x$ in bir çarpımı olsun.

$$(i) \quad P = 0 \iff a_1 \dots a_n = 0$$

$$(ii) \quad i \neq j \quad \text{için} \quad a_i = a_j \quad \text{ise o zaman}$$

$$P = 0 \iff P_i = 0$$

$$(iii) \quad P = 0 \iff P_x = 0$$

İspat. Eğer R bir bölge ise her bir durum açıktır. Diğer taraftan R indirgenmiş halka olduğundan (7) den sıfır bölensiz halkaların alt direkt toplamıdır. Dolayısı ile şartların her biri indirgenmiş bir halka için de sağlanır.

Buradan eğer

$$abx = 0 \text{ ise } bax = 0 \text{ olur ve}$$

$$a^n x = 0 \implies (ax)^n = 0$$

$$\implies ax = 0$$

$$\implies a \in A(x). \quad \text{q.e.d.}$$

Buradan aşağıdaki sonucu yazabiliriz:

Sonuç 1.7. R indirgenmiş bir halka olsun. 0 zaman $A(x)$ tam olarak yarı- asal idealdir ve

$ab \in A(x)$ olması $ba \in A(x)$ olmasını gerektirir.

Şimdi esas özelliğimizin 8.kısımının ispatına geçelim.

$$M = \{ (a_1 m_1) \dots (a_n m_n) \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in P, m_i \in A(xR) \}$$

olsun. M çarpmaya göre kapalı bir kümedir ve $(R \setminus P) \subset M$ ve $R \setminus (A(xR)) \subset M$ dir.

$$M \cap A(x) = \emptyset \quad \text{dir.}$$

Çünkü; eğer

$$(a_1 m_1) \dots (a_{n-1} m_{n-1}) (a_n m_n) \in M \cap A(x)$$

ve $n > 1$ ise

$$x \cdot (a_1 m_1) \dots (a_{n-1} m_{n-1}) \cdot (a_n m_n) = 0 \quad \text{dir.}$$

$$\Rightarrow x [(a_1 m_1) \dots (a_{n-1} m_{n-1}) a_n] m_n = 0$$

$$\Rightarrow x [(a_1 m_1) \dots (a_{n-1} m_{n-1}) a_n] = 0 \quad (m_n \notin A(xR))$$

$$\Rightarrow (a_1 m_1) \dots (a_{n-1} m_{n-1}) a_n \in A(x)$$

$$\Rightarrow (a_n a_1) m_1 \dots (a_{n-1} m_{n-1}) \in A(x) \quad (\text{Sonuç 1.7})$$

P tam olarak asal olduğundan $a_n a_1 \notin P$ dir. Böyle devam edildiğinde sonunda $a \notin P$ olmak üzere

$$a m_1 \in A(x) \cap M$$

bulunur. Fakat bu mümkün değildir. Çünkü;

$$a m_1 \in M \cap A(x) \Rightarrow a m_1 \in M \quad \text{ve} \quad (x a) m_1 = 0$$

$$\Rightarrow x a = 0 \quad (m_1 \notin A(xR))$$

$$\Rightarrow a \in A(x) \subset P$$

$$\Rightarrow a \in P$$

Bu ise $a \notin P$ olması ile çelişir. Öyleyse

$$M \cap A(x) = \emptyset$$

olmalıdır.

$$M^*, M^* M^* \quad \text{ve} \quad M^* \cap A(x) = \emptyset \quad \text{olacak şekilde}$$

bir maksimal m -sistem olsun. (0.2) nin ispatından $R \setminus M^* = P^*$ tam olarak asal bir idealdir. Ve

$$A(x) \subset P^* \subset P \quad \text{ve} \quad P^* \subset A(xR) \quad \text{olur.}$$

P nin minimalliğinden

$$P = P^* \subset A(xR)$$

olur.

(9) (1) (i) den $A(x) \in Z(x)$ ve $Z(x) \neq \emptyset$ tur.
 $Z(x)$ de artan bir zincirin bileşimi yine $Z(x)$ tedir:

U , $Z(x)$ de bir artan zincirin bir bileşimi olsun.
Eğer

$$\bar{a} \in R/U \quad \text{ve} \quad \bar{a}^n = 0 \quad \text{ise} \quad \overline{a^n} = 0 \quad \text{dır.}$$

$$\Rightarrow a^n \in U$$

$$\Rightarrow \text{En az bir } i \text{ için } a^n \in U_i \quad (U = \bigcup U_i)$$

$$\Rightarrow R/U_i \text{ de } \tilde{a}^n = \tilde{a^n} = 0 \quad \text{dır.}$$

$$\Rightarrow R/U_i \text{ de } \tilde{a} = 0$$

$$\Rightarrow \text{En az bir } i \text{ için } a \in U_i$$

$$\Rightarrow a \in U$$

$$\Rightarrow \bar{a} = 0$$

Buradan Zorn Lemma'sına göre $Z(x)$ de bir $I(x)$ maksimal ideali seçebiliriz. Eğer $a \in R$ ve $a \notin I(x)$ ise

$$J = \{ y \in R \mid ay \in I(x) \}$$

alabiliriz. Anlaşıldığı gibi,

$$J \supseteq I(x) \quad \text{dir.}$$

0 zaman

$$R/I(x) \quad \text{de}$$

$$J/I(x) = \{ a+I(x) \}^r \quad \text{dir:}$$

$$\bar{y} \in J/I(x) \Rightarrow (a+I(x))(y+I(x)) = ay + I(x) = 0$$

$$\Rightarrow J/I(x) \subseteq \{ a+I(x) \}^r$$

Tersine olarak,

$$\bar{z} \in \{ a+I(x) \}^r \Rightarrow (a+I(x))(z+I(x)) = 0$$

$$\Rightarrow az+I(x) = 0$$

$$\Rightarrow az \in I(x)$$

$$\Rightarrow z \in J$$

$$\Rightarrow \bar{z} \in J/I(x)$$

ve Özellik 1.3 (1) (i) den

$$\{ a+I(x) \}^1 = \{ a+I(x) \}^r, \quad R/I(x) \quad \text{de bir idealdir.}$$

$$a \notin I(x) \quad \text{olduğundan.}$$

$$ax \notin I(x) \quad \text{ve bundan dolayı} \quad x \notin J \quad \text{dir.}$$

Eğer $rx \in J$ ise $arx \in I(x)$ dir. Buradan $ar \in I(x)$ ve dolayısı ile $r \in J$ dir.

Son olarak Özellik 1.4 (1) (iii) ten

$$R/J \cong R/I(x)/J/I(x)$$

indirgenmiş bir halkadır. Öyleyse $J \in Z(x)$ dir.

Bundan dolayı $J = I(x)$ dir. Öyleyse $R/I(x)$ in sıfırdan farklı sıfır böleni yoktur. Buradan $I(x)$ tam olarak asal idealdir.

Özel olarak, $A(x) \in Z(x)$ olduğundan, $A(x)$ tam olarak asal bir idealdir. q.e.d.

Özellik 1.8 [23, Proposition 2.8] R birimli indirgenmiş bir halka olsun. P R de bir asal ideal ve $\widehat{R/P}$, R/P sağ R -modülünün bir injektif hull'ı olsun. D zaman

$$D_P = A(\widehat{R/P}) \quad \text{dir.}$$

İspat. Eğer $A(\widehat{R/P}) \not\subseteq D_P$ ise o zaman

$$\forall y \in R \quad \text{için} \quad r_0 y \neq 0 \quad \text{ve} \quad r_0 \notin D_P$$

olacak şekilde $r_0 \in A(\widehat{R/P})$ vardır. Burada

$$\forall y \in R \quad \text{için} \quad A(r_0 y) \subseteq P \quad \text{dir.}$$

Şimdi bir K kümesi tanımlayalım.

$$K = \{ x \in \widehat{R/P} \mid xA(r_0) = 0 \}$$

Her bir $y \in T$ için

$$f_y : r_0 R \longrightarrow \widehat{R/P}$$
$$r_0 x \longmapsto yx$$

şeklinde tanımlı f_y bağıntısı,

i) İyi tanımlıdır: $r_0 x = r_0 x_1 \Rightarrow r_0 (x - x_1) = 0$

$$\Rightarrow x - x_1 \in A(r_0)$$

$$\Rightarrow y(x - x_1) = 0$$

$$\Rightarrow yx = yx_1$$

ii) Toplamayı korur: $\forall x, x_1 \in R$ için

$$f_y(r_0 x + r_0 x_1) = y(x + x_1)$$

$$= yx + yx_1$$

$$= f_y(r_0 x) + f_y(r_0 x_1)$$

iii) Modül işlemini korur: $\forall a \in R$ için

$$f_y((r_0 x)a) = f_y(r_0(xa))$$

$$= y(xa)$$

$$= (yx)a$$

$$= f_y((r_0 x)a)$$

Bundan dolayı, f_y , $r_0 R$ den $\widehat{R/P}$ ye bir R -homomorfizmasıdır.

$\bar{f}_y, f_y$ nin R ye bir genişlemesi olsun.(0.3).

0 zaman

$$y=f_y(r_0.1) = \bar{f}_y(r_0) = \bar{f}_y(1.r_0) = \bar{f}_y(1) r_0 = 0 \quad \text{dir.}$$

Çünkü,

$$\bar{f}_y(1) \in R/\hat{p} \quad \text{ve} \quad r_0 \in A(R/\hat{p}) \quad \text{dir.}$$

Buradan, $K = \{0\}$ dir. $b \in R/\hat{p}$ olsun. 0 zaman

$$A(r_0) \subseteq P \quad \text{olduğundan} \quad bA(r_0) \subseteq P \quad \text{dir.}$$

ve $0 \neq \bar{b} = b+P$ için

$$\bar{b}(A(r_0)) = \overline{b(A(r_0))} = 0$$

Bundan dolayı, $\bar{b} \in K$ ve dolayısı ile $\bar{b}=0$ dir. Bu ise $\bar{b} \neq 0$ ile çelişir. Öyleyse

$$A(R/\hat{p}) \subseteq 0_p$$

olmalıdır. Tersine olarak,

$$0_p \not\subseteq A(R/\hat{p})$$

olduğunu kabul edelim. 0 zaman

$$(R/\hat{p})0_p \neq 0$$

ve $xa \neq 0$ olacak şekilde $a \in 0_p$ ve $x \in R/\hat{p}$ vardır.

$R/\hat{p}$, $R/\hat{p}$ nin bir "essential" genişlemesi olduğundan (0.4) ten

$$x \in R \cap R/p = N$$

$\hat{R}/p$ nin sıfırdan farklı bir alt modülüdür.

Bundan dolayı

$$J \neq P \quad \text{ve} \quad J/p = N$$

olacak şekilde R nin bir J sağ ideali vardır.

Burada

$$J = \{ r \in R \mid r+p \in N \} \quad \text{yazılabilir.}$$

$a \in O_p$ olduğundan, $ab=0$ olacak şekilde $b \notin P$ vardır.

Özellik 1.4. (1) den $aRb = 0$ dir.

Buradan $Nb = 0$ dir:

$$\forall n = j+p \in N = x \in R \quad R/p \quad \text{ve} \quad \forall s \in R \quad \text{için}$$

$$n = j+p = xas \quad \text{yazılabilir.}$$

$$\Rightarrow nb = (xas)b = x(asb) = 0$$

$$\Rightarrow Nb = 0$$

P asal ideal olduğundan bu mümkün değildir:

$$Nb=0 \Rightarrow (j+p)b = 0, \quad \forall j \in J$$

$$\Rightarrow jb \in P, \quad \forall j \in J$$

$$\Rightarrow Jb \subseteq P$$

$$\Rightarrow JRb \subseteq P$$

$$\Rightarrow J \subseteq P \quad (b \notin P)$$

Fakat $J \neq P$ ve $J \supset P$ dir. Buradan,

$$A(\hat{R}/p) \subseteq O_p \subseteq A(\hat{R}/p) \quad \text{dir.}$$

q.e.d.

§ 2. İNDİRGENMİŞ HALKALARIN DİĞER ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde indirgenmiş bir halkanın bazı ek şartlar altında sağladığı özellikler yer alacaktır.

Özellik 2.1 [[9] , Theorem 5.3, [13], p.210, Proposition 1] R indirgenmiş ve π -regüler bir halka olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır.

- i) R kuvvetli regüler bir halkadır.
- ii) R biregüler bir halkadır.

İspat. i) Her bir $x \in R$ için

$$(x - x^{s+1}b)^s = x^s + x^s d$$

olacak şekilde $d \in R$ vardır. Buradan

$$(x - x^{s+1}b)^{s+1} = (x - x^{s+1}b)x^s + (x - x^{s+1}b)x^s d$$

yazılabilir. Eğer

$$x^s = x^s b x^s \quad \text{ise, o zaman}$$

$$(x - x^{s+1}b)x^s = x^{s+1} - x^{s+1}b x^s$$

$$= x^{s+1} - x x^s$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow (x - x^{s+1}b)^{s+1} = 0 \cdot x^s + 0 \cdot d = 0$$

R indirgenmiş bir halka olduğundan

$$x - x^{s+1}b = 0 \quad \text{dır.}$$

$$\Rightarrow x = x^2(x^{s-1}b) .$$

Öyleyse R kuvvetli regüler bir halkadır.

ii) Özellik 1.4 (4) ten R nin her e idempotenti merkeze aittir. Eğer $a^n x a^n = a^n$ ise, o zaman $e = a^n x$ idempotenttir:

$$e^2 = (a^n x)(a^n x) = (a^n x a^n) x = a^n x = e \in (a) \quad \text{ve}$$

$$ea^n = a^n x a^n = a^n \quad \text{dir.}$$

Yani, $ea^n = a^n$ dir. n minimal ve $n > 1$ olsun. O zaman e merkeze ait olduğundan

$$\begin{aligned} (ea^{n-1} - a^{n-1})^2 &= ea^{2n-2} - 2ea^{2n-2} + a^{2n-2} \\ &= a^{2n-2} - ea^{2n-2} \\ &= a^{2n-2} - ea^n \cdot a^{n-2} \\ &= a^{2n-2} - a^{2n-2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Bundan dolayı $ea^{n-1} = a^{n-1}$ dir. Buradan $ea = a$ dir.

Şimdi $(a) = (e)$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} x \in (a) &\Rightarrow x = ma + at + sa + \sum_{i=1}^n s_i a t_i, \quad m \in \mathbb{Z}, t, s, t_i, s_i \in R \\ &= m(ea) + (ea)t + s(ea) + \sum_{i=1}^n s_i (ea)t_i \\ &= e(ma + at + sa + \sum_{i=1}^n s_i t_i) \\ &\Rightarrow x \in (e) \end{aligned}$$

Öyleyse

$$(a) \subseteq (e) \quad \text{dir.}$$

Tersine olarak,

$$y \in (e) \Rightarrow y = me + et + se + \sum_{j=1}^n s_i e t_i$$

$$= me + e(t+s + \sum_{j=1}^n s_i t_i)$$

$$= me + eu; u = t+s + \sum_{j=1}^n s_i t_i$$

$$= ma^n x + a^n x u$$

$$= a(ma^{n-1} x + a^{n-1} x u)$$

$$\Rightarrow y \in (a)$$

Öyleyse

$$(e) \subseteq (a) \quad \text{dir.}$$

Dolayısı ile

$$(e) = (a) \quad \text{dir.} \quad \text{q.e.d.}$$

Özellik 2.2. R indirgenmiş ve asal bir halka olsun. 0 zaman R nin sıfırdan farklı sıfır bölenei yoktur.

İspat. $ab = 0$ olsun.

$$(ba)^2 = b(ab)a = 0$$

$$\Rightarrow ba = 0$$

Buradan, eğer $ab=0$ ise $\forall x \in R$ için $abx=0$ dır.

$$\Rightarrow bxa = 0$$

$$\Rightarrow bRa = 0$$

$$\Rightarrow b=0 \text{ veya } a=0 \text{ (R asal) } \quad \text{q.e.d.}$$

Özellik 2.3. [22, p.362, Proposition 2.30] R indirgenmiş ve regüler bir halka olsun. O zaman her basit R -modül injektiftir.

İspat. R/I basit R -modül olsun. (0,7) den

$$0_I = \widehat{R/I} \text{ dır. Burada}$$

$$0_I = \{ r \in R \mid \forall r \in R \text{ için } rxy_x = 0 \text{ olacak şekilde } y_x \notin I \text{ vardır.} \}$$

$$0_I \subseteq I \text{ dır. Yani, } \widehat{R/I} \subseteq I \text{ dır:}$$

$$r \in A(\widehat{R/I}) \Rightarrow r(\widehat{R/I}) = 0$$

$$\Rightarrow rR \subseteq I$$

$$\Rightarrow rRr \subseteq I \quad (I \text{ bir ideal})$$

$$\Rightarrow r \in I \quad (R \text{ regüler halka})$$

$x \in I$ olsun. $x \notin 0_I$ ise, o zaman

$$A(xr_0) \subseteq I$$

olacak şekilde bir $r_0 \in R$ vardır. Aksi halde $y \notin I$ için

$xR_y = 0$ olur ve $x \in 0_I$ çıkar.

R regüler halka olduğundan

$$xr_0 y x r_0 = x r_0$$

olacak şekilde bir $y \in R$ vardır. $e = y x r_0$ olsun. I bir ideal olduğundan

$$e \in I \quad \text{ve} \quad x r_0 e = x r_0 \quad \text{dır.}$$

Bundan dolayı

$$\{ea - a \mid a \in R\} \subseteq A(xr_0) \subseteq I \quad \text{ve} \quad R \subseteq I \quad \text{dır:}$$

$$\begin{aligned} x r_0 (ea - a) &= x r_0 ea - x r_0 a \\ &= x r_0 y x r_0 a - x r_0 a \\ &= x r_0 a - x r_0 a \\ &= 0 \end{aligned}$$

$ea \in I$ ve $ea - a \in I$ olduğundan $a \in I$ ve $R \subseteq I$ dır. I maksimal olduğundan bu mümkün değildir. Öyleyse

$$0_I = I$$

olmalıdır. (0.7) den $0_I = \widehat{A(R/I)}$ olduğundan

$$\widehat{A(R/I)} = I \quad \text{dır.}$$

Buradan,

$$0 \neq m \in \widehat{R/I}$$

ise mR basit R -modüldür:

$$0 \neq L \subseteq mR$$

olacak şekilde bir L alt modülü olsun. (0.6) dan

$$mR \neq 0 \quad \text{dir.}$$

Şimdi bir J kümesi tanımlayalım.

$$J = \{ r \in R \mid mr \in L \}$$

olsun. $mI = 0 \subseteq L$ dir. $I \subseteq J$ olsa I maksimal olduğundan ya $J = I$ veya $J = R$ olmalıdır. $J = R$ ise $mR \subseteq L$ olur. Buradan $L = mR$ ve mR basit R -modüldür.

Diğer taraftan $L = mJ$ dir :

$$l = mr \in L \implies r \in J$$

$$\implies mr \in mJ$$

$$\implies L \subseteq mJ$$

ve $mJ \subseteq L$ olduğundan $L = mJ$ dir.

$J = I$ ise

$$mJ = mI = L = 0$$

olur. Bu ise $L \neq 0$ olmasına çelişir. Öyleyse mR basit R -modüldür. Şimdi de

$$R/I \cong mR$$

olduğunu gösterelim. Schur Lemma'sından

$$R/I \longrightarrow mR$$

$$b+I \longmapsto mb$$

dönüşümü ya sıfır dönüşümü veya bir izomorfizmadır. $mR \neq 0$ olduğundan sıfır dönüşümü değildir. Öyleyse

$$R/I \cong mR$$

olmalıdır.

$$(\widehat{R/I})R \longrightarrow R/I$$

$$m_1 r_1 + \dots + m_n r_n \longmapsto (r_1 + I) + \dots + (r_n + I)$$

dönüşümü bir izomorfizmadır. Çünkü,

$$i = 1, \dots, n \quad \text{için} \quad m_i r_i \in m_i R \cong R/I \quad \text{dır.}$$

Öyleyse

$$\widehat{R/I} R = R/I$$

alabiliriz.

(0.8) den her maksimal sağ ideal modüler olduğundan

$$R/I = \widehat{R/I}$$

ve (0.5) ten R/I bir injektif R -modüldür. q.e.d.

Özellik 2.4 [33, Lemma 2, Theorem 2, Theorem 3]

R birimli indirgenmiş bir halka ve R nin her tam olarak asal idealde bir maksimal sağ ideal olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır:

i) R nin tersinir olmayan her elemanı tam olarak asal bir idealde kapsanır.

ii) R nin sıfır bölen olmayan her elemanı bir tersinir elemandır.

iii) R regüler bir halkadır. Üstelik,

$$\forall x \in R \quad \text{için} \quad x^2 u = x$$

olacak şekilde bir u tersiniri vardır.

İspat. i) $x \in R$ tersinir değilse $xR \neq R$ dir:

$xR = R$ olsa $1 = xy$ yazılabilir. Buradan x sağ tersinir olur.

$$(yx)^2 = yxyx = yx \Rightarrow yx \text{ idempotent}$$

$$\Rightarrow yx \in C$$

$$\Rightarrow y = yxy = yyx = y^2x$$

$$\Rightarrow 1 = xy = xy^2x = yx$$

$$\Rightarrow x \text{ sol tersinir olur.}$$

Bu ise x in tersinir olmaması ile çelişir. Öyleyse $xR \neq R$ olmalıdır. Şimdi bir M kümesi tanımlayalım:

$$M = \{ xr+1 \mid r \in R \}$$

olsun.

M çarpmaya göre kapalı bir kümedir ve x tersinir olmadığından $0 \notin M$ dir. Sıfır ideali tam olarak yarı asal bir ideal olduğundan (0.2) nin ispatından $P \cap M = \emptyset$ olacak şekilde bir P tam olarak asal ideali vardır ve hipotezden P maksimal sağ idealdir.

Eğer $xR \not\subset P$ ise $xR + P = R$ dir.

$\Rightarrow r \in R$ ve $p \in P$ için $xr + p = 1$ dir.

$\Rightarrow p = x(-r) + 1 \in M$

$\Rightarrow p \in M$

Halbuki $P \cap M = \emptyset$ idi. Öyleyse $xR \subset P$ olmalıdır ve buradan $x \in P$ bulunur.

ii) $A(x) = 0$ olacak şekilde $x \in R$ varsa Özellik 1.3. (8) den her tam olarak asal ideal sıfır bölenlerden oluşur. (i) den x tersinir olmak zorundadır.

iii) $I, R/A(x)$ de tam olarak asal bir ideal olsun.

$\bar{I} = I/A(x)$ dir.

$\bar{I} \subseteq \bar{J} \subset \bar{R} = R/A(x)$

olacak şekilde bir $\bar{J}$ idealinin olduğunu kabul edelim. Burada,

$$J = \{ r \in R \mid r + A(x) \in \bar{J} \}$$

ve

$$I \subset J \subset R$$

dir.

$$ab \in I \Rightarrow \bar{a}\bar{b} \in \bar{I}$$

$$\Rightarrow \bar{a} \in \bar{I} \quad \text{veya} \quad \bar{b} \in \bar{I}$$

$$\bar{a} \in \bar{I} \Rightarrow \bar{a} = \bar{c} \in \bar{I} \Rightarrow a - c \in A(x) \subset I \Rightarrow a \in I$$

$$\bar{b} \in \bar{I} \Rightarrow \bar{b} = \bar{d} \in \bar{I} \Rightarrow b - d \in A(x) \subset I \Rightarrow b \in I$$

Öyleyse

I tam olarak asal idealdir.

Buradan I maksimal sağ ideal ve dolayısı ile $\bar{I}$ maksimal sağ idealdir.

$$\bar{x}\bar{b} = 0 \Rightarrow xb \in A(x)$$

$$\Rightarrow bx \in A(x) \quad \text{ve} \quad (xb)^2 = xbx b = 0$$

$$\Rightarrow xb = 0$$

$$\Rightarrow b \in A(x)$$

$$\Rightarrow \bar{b} = 0$$

Öyleyse $\bar{x} = x + A(x)$, $R/A(x)$ de bir sıfır bölen değildir.

(ii) den $\bar{x}$ tersinirdir.

$$xr + p = 1 \quad \text{ve} \quad xrx = x^2 r = x$$

olacak şekilde $p \in A(x)$ ve $r \in R$ vardır. Öyleyse R bir regüler halkadır. Özellik 1.4 (4) ten bir indirgenmiş halkada her idempotent merkeze aittir. Buradan

$$e = xr \quad \text{ve} \quad u = (1-e) + er$$

olsun. Şimdi de $A(u) = 0$ ve $x^2u = x$ olduğunu gösterelim:

$$b \in A(u) \Rightarrow bu=0 \Rightarrow ub=0$$

$$\Rightarrow (1-e)b+erb=0$$

$$\Rightarrow b-xrb+xr^2b=0$$

$$\Rightarrow xb-x^2rb+x^2r^2b=0$$

$$\Rightarrow xb-xb+x^2r^2b=0$$

$$\Rightarrow x^2r^2b=0$$

$$\Rightarrow xrb = 0$$

$$\Rightarrow eb = 0$$

$$(1-e)b+erb=0 \Rightarrow b-eb+erb=0$$

$$\Rightarrow b = 0 \quad (eb = 0)$$

Öyleyse $A(u) = 0$ dir.

$$x^2u = x^2(1-e)+x^2er$$

$$= x^2-x^2e+x^2er$$

$$= x^2-x^2xr+x^2xr r$$

$$= x^2-xx^2r+xx^2rr$$

$$= x^2-x^2+x^2r \quad (x^2r = x)$$

$$= x$$

olur ve (ii) den u tersinirdir.

q.e.d.

Özellik 2.5 [33, Corollary 1] R birimli indirgenmiş bir halka olsun. R deki her P asal ideali için R/P regüler halka ise R de regüler halkadır.

İspat. Q R de tam olarak asal bir ideal olsun. R birimli olduğundan Q asal idealdir. R/Q regülerdir ve sıfırdan farklı bölüneni olmadığından R/Q bölüm halkasıdır:

$\bar{x} \neq 0 \in R/Q$ olsun. O zaman R regüler olduğundan

$\forall x \in R$ için $xyx = x$ olacak şekilde $y \in R$ vardır.

$$\Rightarrow xyx - x = 0 \in Q$$

$$\Rightarrow (xy - 1)x \in Q$$

$$\Rightarrow xy - 1 \in Q \quad (x \notin Q)$$

$$\Rightarrow xy + Q = 1 + Q$$

$$\Rightarrow \bar{x}\bar{y} = 1$$

Öyleyse R/Q bölüm halkasıdır.

Buradan (0.3) ten Q R de maksimal sağ (sol) idealdir ve dolayısı ile Özellik 4.3 den R regüler bir halkadır.

q.e.d.

Özellik 2.6. [33, Theorem 5] R regüler bir halka S, R nin bir integral genişlemesi ve S indirgenmiş bir halka olsun. O zaman S regülerdir.

İspat. S, R nin integral genişlemesi ve R regüler olduğundan (0.9) dan S deki her tam olarak asal ideal bir maksimal sağ idealdir. Özellik 2.4 (iii) den de S regüler bir halkadır.

q.e.d.

§ 3. İNDİRGENMİŞ HALKALARDA DENK İFADELER

Bu bölümde bir indirgenmiş halkada geçerli olan bir takım denk ifadeler verilecektir.

Özellik 3.1 [[23], Theorem 2.4, Proposition 3.0, [30], Lemma 2]. R indirgenmiş bir halka olsun.

I. Aşağıdakiler birbirine denktirler:

- i) P minimal asal idealdir.
- ii) $P = 0_P$ dir. Bu durumda P tam olarak asal idealdir.

II. $r, s \in R$ olsun. O zaman aşağıdakiler birbirine denktirler:

- i) $\forall P \in \text{supp}((s))$ için $r \in 0_P$ dir.
- ii) $(s) \subset A(r)$

III. I, R de bir ideal olmak üzere aşağıdakiler birbirine denktirler:

- i) $A(I)$ R nin maksimal sıfırlayanıdır.
- ii) $R/A(I)$ bir bölgedir.
- iii) I bir bölgedir.

İspat I.i) $\iff$ ii). P minimal asal ideal olsun. $P = 0_P$ olduğunu gösterelim. Bunun için $P \neq 0_P$ olduğunu kabul edelim. O zaman Özellik 1.4 (6) i) den $0_P \subseteq P$ olduğundan $a \notin 0_P$ olacak şekilde $a \in P$ vardır. $M = R \setminus P$ olsun. O zaman M bir π -sistemdir:

$$xRy \subseteq P \implies x \in P \quad \text{veya} \quad y \in P$$

Fakat $x, y \notin P$ dir. Bundan dolayı bir $r \in R$ için $xry \notin P$ ve dolayısı ile $xry \in M$ dir.

$$S = \{a, a^2, a^3, \dots\}$$

ve $T = \{r \in R \mid r \neq 0, j=0,1,2,\dots \text{ için } x_j \in M \text{ ve}$

$i_0, i_{n+1} \notin \mathbb{Z}_- \text{ ve } i_1, \dots, i_n \in \mathbb{Z}_+ \text{ olmak}$

üzere bir $n \in \mathbb{Z}_- \text{ için } r = a^{i_0} x_0 a^{i_1} x_1 \dots a^{i_n} x_n a^{i_{n+1}}\}$

olsun. $\forall r \in R \text{ için } ra^0 = r = a^0 r \text{ olduğunu kabul edelim.}$

0 zaman

$$\Gamma = M \cup S \cup T$$

nin bir m-sistem olduğunu göstermeğe çalışalım:

$x, y \in \Gamma \text{ ve } x \in M \text{ olsun. Eğer } y \in M \text{ veya } y \in S$
ise M m-sistem olduğundan $xry \in \Gamma$ olacak şekilde $r \in R$
vardır ve her n için

$$A(a^n) \subseteq P \quad \text{dir:}$$

Bir n için $z \in A(a^n)$ fakat $z \notin P$ olsa

$$0 = za^n = \underbrace{(za)(za) \dots (za)}_{n \text{ tane}} \quad (\text{Özellik 1.4.(1)i))$$

$$\Rightarrow za = 0 = az$$

$$\Rightarrow a \in \mathcal{O}_p \quad (z \notin \mathcal{O}_p)$$

Bu ise mümkün değildir. Öyleyse her n için

$$A(a^n) \subseteq P$$

olmalıdır. Buradan her n için $xa^n \neq 0$ dir. Öyleyse

$$xa^n \in T \subset \Gamma$$

Şimdi $y \in T$ olsun. O zaman,

$$x_i \in M \quad \text{ve} \quad i=0,1,\dots,n \quad \text{için} \quad y = a^{i_0} x_0 a^{i_1} x_1 \dots a^{i_n} x_n a^{i_{n+1}}$$

yazılabilir.

M m -sistem olduğundan

$$x r_0 x_0 r_1 x_1 r_2 x_2 \dots r_n x_n \in M$$

olacak şekilde $r_0, r_1, \dots, r_n$ vardır:

$$x, x_0 \in M \Rightarrow \text{bir } r_0 \text{ için } x r_0 x_0 \in M$$

$$x r_0 x_0, x_1 \in M \Rightarrow \text{bir } r_1 \text{ için } x r_0 x_0 r_1 x_1 \in M$$

$$\dots \Rightarrow x r_0 x_0 r_1 x_1 \dots r_n x_n \in M$$

$$w = x r_0 x_0 r_1 x_1 r_2 x_2 \dots r_n x_n$$

ve

$$i = i_0 + i_1 + \dots + i_{n+1}$$

olsun. Eğer $wy \neq 0$ ise $wy \in T$ ve buradan $xRy \cap \Gamma \neq \emptyset$ dir. Öyleyse $wy = 0$ olsun. O zaman Özellik 1.4 (1)(i) den

$$0 = wy = x r_0 x_0 r_1 x_1 r_2 x_2 \dots r_n x_n a^{i_0} x_0 a^{i_1} x_1 \dots a^{i_n} x_n a^{i_{n+1}}$$

$$= a^{i_0 + i_1 + \dots + i_{n+1}} x r_0 x_0 r_1 x_1 r_2 x_2 \dots r_n x_n \cdot x_0 x_1 \dots x_n$$

$$= (a^i w) (a^i w)$$

$$\Rightarrow a^i w = 0 \Rightarrow wa^i = 0$$

$$\Rightarrow w \in A(a^i).$$

Fakat $w \in M = R \setminus P$ dir. Öyleyse $A(a^i) \not\subseteq P$ dir.

Diğer taraftan

$$0 = wa^i = wa^{i-1} a = wa^{i-1} a^{i-1}$$

$$\Rightarrow wa^{i-1} = 0$$

$$\Rightarrow wa = 0 = aw$$

$$\Rightarrow a \in D_p \quad (w \in M)$$

Bu ise mümkün değildir. Öyleyse $A(a^i) \subseteq P$ dir.

Şimdi $x \in S$ olsun. Eğer $y \in M$ ise o zaman her n için $A(a^n) \subseteq P$ olduğundan $a^n y \neq 0$ dir. Öyleyse $a^n y \in T \subseteq \Gamma$ dir.

$$x = a^i \Rightarrow a^i a y = a^{i+1} y \in \Gamma$$

Eğer $y \in S$ ise $y = a^1$ olsun. O zaman

$$a^i a a^1 = a^{i+1+1} \in S \subseteq \Gamma \quad \text{dir.}$$

Eğer $y \in T$ ise, o zaman bir $x_i \in M$ ve $i = 0, 1, \dots, n$ için

$$y = a^{i_0} x_0 a^{i_1} x_1 \dots a^{i_n} x_n a^{i_{n+1}} \quad \text{dir.}$$

M m -sistem olduğundan

$$w = x_0 r_0 x_1 r_1 x_2 r_2 \dots x_{n-1} r_{n-1} x_n \in M$$

olacak şekilde $r_0, r_1, \dots, r_{n-1}$ vardır. Eğer $wy \neq 0$

ise o zaman $wy \in T$ ve buradan $xRy \cap \Gamma \neq \emptyset$ dir.

Öyleyse $wy = 0$ olsun. O zaman

$$0 = wy = a^i w \implies w \in A(a^i) \text{ fakat } w \notin P$$

$$\implies A(a^i) \not\subseteq P$$

Bu ise mümkün değildir.

$x \in T$ ve $y \in M, y \in S, y \in T$ olması durumlarında da benzer sonuçlar bulunur.

$A, \Gamma \cap A = \emptyset$ özelliğine göre maksimal olan R nin bir ideali olsun:

$$\mathcal{Y} = \{B \mid B, R \text{ de bir ideal ve } \Gamma \cap B = \emptyset\}$$

olsun. $0 \notin \Gamma$ olduğundan $\{0\} \cap \Gamma = \emptyset$ dir.

$\{0\} \in \mathcal{Y}$ olduğundan $\mathcal{Y} \neq \emptyset$ dir. $\mathcal{Y}$ kapsamaya göre kısmi sıralıdır.

$$C = \{C_i \mid C_i \in \mathcal{Y} . i \in I\}$$

gibi bir zincir alalım. O zaman $U = \bigcup_{i \in I} C_i$ bir idealdir.

ve $\Gamma \cap U = \emptyset$ dir. Diğer taraftan,

$x \in \Gamma$ ve $x \in U$ ise bir $i \in I$ için $x \in \Gamma \cap U_i = \emptyset$ dir.

Bu ise mümkün değildir. Buradan $U \in \Gamma$ dir. Zorn Lemma'sına göre $\Gamma \cap A = \emptyset$ özelliğine göre maksimal olan bir A

ideali seçebiliriz. O zaman A bir asal idealdir:

$$a \notin A \quad \text{ve} \quad b \notin A \quad \text{olsun}$$

$$A \subsetneq A+(a) \Rightarrow [A+(a)] \cap \Gamma = \emptyset \quad (A \text{ maksimal})$$

$$\Rightarrow \text{Öyle bir } r \in \Gamma \text{ ve } r \in A+(a) \text{ vardır.}$$

Benzer olarak öyle bir $s \in \Gamma$ ve $s \in A+(b)$ bulunabilir.

Γ m-sistem olduğundan $rus \in \Gamma$ ve $rus \in (A+(a))(A+(b))$ olacak şekilde $u \in R$ vardır. Şimdi $(a) \cdot (b) \subseteq A$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} rus \in (A+(a))(A+(b)) &\subseteq A \cdot A + A(b) + (a)A + (a)(b) \\ &\subseteq A \end{aligned}$$

$$\Rightarrow rus \in A \cap \Gamma = \emptyset$$

Buradan $(a)(b) \subseteq A$ ise ya $a \in A$ veya $b \in A$ dir. Yani A bir asal idealdir. $A \subseteq P$ ve $A \neq P$ dir. Çünkü,

$$a \in A \setminus P \Rightarrow a \in M \Rightarrow a \in \Gamma \Rightarrow a \in A \cap \Gamma = \emptyset \text{ dir.}$$

$$\text{ve } A = P \Rightarrow \Gamma \cap P = \emptyset \text{ fakat } 0 \neq s \in \Gamma \cap P \text{ dir.}$$

Bu ise P nin minimalliğine çelişir. Buradan $O_P = P$ dir.

ii) $\Rightarrow$ i) $O_P = P$ olsun. O zaman P nin minimal asal ideal olduğunu gösterelim. P', P de kapsanan bir asal ideal olsun. O zaman

$$\forall x \in P \quad \text{için} \quad xa = 0 \in P'$$

olacak şekilde $a \notin P$ vardır. Bu ise Özellik 1.4 (1)(i)

den $\forall x \in R$ için

$$0 = ax = axr \quad \text{demektir.}$$

$$\Rightarrow \forall r \in R \quad \text{için} \quad xra = 0$$

$$\Rightarrow xRa = 0 \subset P'$$

$$\Rightarrow x \in P' \quad (a \notin P')$$

Buradan $P' = P$, R nin bir minimal asal idealdir. Özellik 1.4. (6) (ii) den, R/O_p indirgenmiş bir halkadır. Buradan, R/O_p bir tamlık bölgesidir:

$$\bar{a}, \bar{b} \in R/O_p = R/p = \bar{R} \quad \text{ve} \quad \bar{a}\bar{b} = 0 \quad \text{olsun.}$$

0 zaman,

$$\bar{b}\bar{a} = 0 \quad \text{dır.}$$

Buradan, $\forall r \in R$ için

$$0 = \bar{a}\bar{b}r = \bar{b}\bar{r}\bar{a} \quad \text{dir.}$$

$$\Rightarrow \bar{b}\bar{R}\bar{a} = 0$$

$$\Rightarrow \bar{b} = 0 \quad \text{veya} \quad \bar{a} = 0 .$$

Öyleyse R bir tamlık bölgesidir.

Dolayısı ile P tam olarak asal bir idealdir.

II. Özellik 1.4.(1)(iii) den $R/A(r)$ bir indirgenmiş halkadır. $\forall p \in \text{supp}((s))$ için

$$r \in \mathcal{O}_P \iff P_\alpha \in X(R) \text{ olmak üzere } s \in \bigcap_{A(r) \subseteq P_\alpha} P_\alpha$$

olduğunu gösterelim. $\forall P \in \text{supp}(s)$ için

$r \in \mathcal{O}_P \Rightarrow \forall P \in \text{supp}((s))$ için $ra = 0$ olacak şekilde
öyle bir $a \notin P$ vardır.

$\Rightarrow (s) \not\subseteq P$ olacak şekildeki $\forall P$ için $ra = 0$ olacak
şekilde öyle bir $a \notin P$ vardır.

$\Rightarrow s \notin P$ olacak şekildeki $\forall P$ için $ra = 0$ olacak
şekilde öyle bir $a \notin P$ vardır.

$\Rightarrow s \notin P$ olacak şekildeki $\forall P$ için $a \in A(r)$ olacak
şekilde öyle bir $a \notin P$ vardır.

$\Rightarrow A(r) \subseteq P_\alpha$ olacak şekilde $s \in P_\alpha$ vardır.

$\Rightarrow s \in \bigcap_{A(r) \subseteq P_\alpha} P_\alpha$

Tersine olarak, $s \in \bigcap_{A(r) \subseteq P_\alpha} P_\alpha$ ve herhangi bir $P \in \text{supp}((s))$

alalım.

$$\Rightarrow s \notin P$$

$$\Rightarrow A(r) \not\subseteq P$$

$$\Rightarrow b \in A(r) \text{ fakat } b \notin P \text{ olacak şekilde}$$

bir b var.

$$\Rightarrow rb = 0 \quad \text{fakat} \quad b \notin P$$

$$\Rightarrow r \in \mathfrak{o}_P$$

$$\Rightarrow \forall P \in \text{supp}((s)) \quad \text{için} \quad r \in \mathfrak{o}_P.$$

Bundan dolayı,

$$s + A(r) \in \text{rad}(R/A(r)) \quad \text{dır:}$$

$$L = \{ P \mid P \text{ } R \text{ de asal ideal ve } P \supseteq A(r) \}$$

$$U = \{ P' \mid P' \text{ } R/A(r) \text{ de asal ideal} \} \quad \text{olsun.}$$

O zaman, (0.10) dan

$$B : L \longrightarrow U \quad 1-1 \text{ eşleme vardır.}$$

$$P \longmapsto P/A(r)$$

$$B^{-1}(P') \longleftarrow P'$$

Buradan, $(s) \subset A(r)$ olduğundan $s \in A(r)$ dir.

$R/A(r)$ indirgenmiş halka olduğundan

$$\text{rad}(R/A(r)) = 0$$

Şimdi de III. deki denk ifadelerin ispatına bakalım.

III. (i) $\implies$ (iii). I bir bölge olmasın. O zaman $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ için $ab = 0$ olacak şekilde $a, b \in I$ vardır. Eğer J R nin $A(I) \cup \{a\}$ ile doğurulmuş bir ideali ise

$$A(I) \subsetneq A(A(J)) \subsetneq R \quad \text{dır.}$$

Çünkü $a \in A(A(J)) \setminus A(I)$ ve $b \notin A(A(J))$ ($b \in A(A(I)) \cap A(a) = A(J)$)

Bu ise $A(I)$ nin maksimalliğine çelişir.

Öyleyse $A(I)$ R nin maksimal sıfırlayanı ise I bir bölgedir.

(iii) $\implies$ (ii) Biliniyor.

(ii) $\implies$ (i). $R/A(I)$ bir bölge olsun. O zaman

$$a \notin A(I) \text{ ise } A(a) \cap A(A(I)) = 0$$

$$\text{Buradan } A(A(\{a\} \cup A(I))) = A(A(a) \cap A(A(I))) = R$$

Öyleyse $A(I)$ maksimal sıfırlayan ve (ii) $\implies$ (i)

sağlanır.

q.e.d.

Özellik 3.2. [23, Corollary 2.5] Π R nin bütün minimal asal ideallerinden oluşan $X(R)$ nin bir alt uzayı olsun. O zaman Π bir bazı açık ve kapalı kümeler olan bir Hausdorff uzayıdır.

İspat. $P_1 \neq P_2$ ve $P_1, P_2 \in \Pi$ olsun. O zaman Özellik 3.1 in I. kısmından

$$i = 1, 2, \dots \text{ için } P_i = 0_{P_i} \quad \text{dir} \quad (1)$$

Bundan dolayı

$$0_{P_1} \not\subseteq P_2 \quad \text{dir:}$$

$P_1 = 0_{P_1} \subseteq P_2$ olsa $P_1 \subsetneq P_2$ olur. Bu ise P_2 nin minimalliğine çelişir. Öyleyse $0_{P_1} \not\subseteq P_2$ olmalıdır.

$x \notin P_2$ olacak şekilde $x \in 0_{P_1}$ ve $xs = 0$ olacak şekilde $s \in P_1$ olsun. O zaman, Özellik 1.4 (1)(i) den

$$RxRsR = 0 \quad \text{dır.}$$

Bundan dolayı,

$$\text{supp}(RxR) \cap \text{supp}(RsR) = \emptyset \quad \text{dir:}$$

$$B \in \text{supp}(RxR) \implies B \text{ asal ve } RxR \not\subseteq B$$

$$B \in \text{supp}(RsR) \implies B \text{ asal ve } RsR \not\subseteq B$$

Fakat,

$$(RxR)(RsR) \subseteq RxRsR = 0 \subseteq B \quad \text{dir.}$$

$$\implies (RxR)(RsR) \subseteq B$$

$$\implies RxR \subseteq B \quad \text{veya} \quad RsR \subseteq B \quad (B \text{ asal})$$

Bu ise mümkün değildir. Öyleyse $B = \emptyset$ dir.

Ayrıca,

$$P_1 \in \text{supp}(RsR) \quad \text{ve} \quad P_2 \in \text{supp}(RxR) \quad \text{dir:}$$

Eğer $R_s R \subseteq P_1$ ise $s \in P_1$ dir. Fakat,

$s \notin P_1$ ise $R_s R \not\subseteq P_1$ ve bundan dolayı

$P_1 \in \text{supp}(R_s R)$ dir.

Benzer şekilde

$P_2 \in \text{supp}(R_s R)$

olduğu da görülür. Şimdi $\forall a \in R$ için

$\text{supp}(R_a R) = \Pi \setminus \text{supp}(A(a))$ olduğunu görelim:

$P \in \text{supp}(R_a R) = \{ P \mid P \text{ minimal asal ideal ve } P \not\subseteq R_a R \}$

alalım. O zaman $a \notin P$ dir. Çünkü, aksi halde $R_a R \subseteq P$

olur. $\forall x \in A(a)$ için

$xa = 0 \in P \Rightarrow x \in P$ (Özellik 3.1.I den P tam olarak asal ideal)

$\Rightarrow A(a) \subseteq P$

$\Rightarrow P \notin \text{supp}(A(a))$

$\Rightarrow P \in \Pi \setminus \text{supp}(A(a))$

Tersine olarak, $P \in \Pi \setminus \text{supp}(A(a))$ alalım. O zaman

P minimal ve $P \supseteq A(a)$ dir.

Şimdi, $R_a R \subseteq P$ olsa $a^3 \in P$ ve buradan P tam olarak asal olduğundan $a \in P$ olur. Yine Özellik 3.1.I den

$P = 0_P$ olduğundan

$\forall a \in O_P$ için, bir $x \notin P$ olmak üzere $ax = 0$ dir.

Fakat o zaman $x \in A(a) \subseteq P$ olur. Bu ise mümkün değildir. Buradan $RaR \not\subseteq P$ dir. Öyleyse $P \in \text{supp}(RaR)$ dir. Buradan çıkan iddia doğrudur.

$\forall A \subseteq R$ için

$$\text{supp}(A) = \bigcup_{a \in A} \text{supp}(RaR) \quad \text{dir.}$$

q.e.d.

Özellik 3.3. [31,p.119, Proposition 21.1] Birimli bir R halkası için aşağıdakiler birbirine denktirler:

- (1) R indirgenmiş, regüler bir halkadır.
- (2) Her esas ideal bir merkezi idempotent tarafından doğrulanmıştır.
- (3) R regüler ve her sağ ideal iki yanlıdır.
- (4) $\forall a \in R$ için $a = a^2x$ olacak şekilde $x \in R$ vardır.

İspat. (1) $\implies$ (2). Bir $a \in R$ esas sağ ideali verilsin. $a = axa$ olacak şekilde x seçelim. O zaman

$$(ax)^2 = axax = ax \quad \text{olur.}$$

Yani ax idempotenttir ve $aR = axR$ dir ve ax , R nin merkezine aittir. Yani $ax \in C$ dir.

(2) $\implies$ (3). $a \in R$ ve $eR = aR$ olacak şekilde bir e idempotenti seçelim. O zaman bir $x \in R$ için

$$e = ax \quad \text{ve bir } s \in R \quad \text{için } a = es \quad \text{olur.}$$

Bundan dolayı,

$$a = es = e(es) = ea = axa \quad \text{dır.}$$

Öyleyse R regüler bir halkadır.

Yine, (2) den bütün esas sağ idealler iki yanlıdır:

$$aR = Re$$

Fakat o zaman her sağ ideal iki yanlıdır.

(3) $\iff$ (4). $\forall a \in R$ için $a = axa$ olacak şekilde $x \in R$ vardır. Yine axR bir sol ideal olduğundan

$ax \in axR$ ise bir $b \in R$ için $bax \in axR$ dir.

$$\Rightarrow \text{bir } b \in R \text{ için } axa = bax$$

$$\Rightarrow a^2 = axa \cdot a = bax \cdot a = ba.$$

$$\Rightarrow a = a^2 x.$$

(4) $\iff$ (1). R açıkça indirgenmiştir. $a = a^2 x$ olduğundan $\forall n$ için $a = a^n x^{n-1}$ dir:

$$n = 2 \text{ için } a = a^2 x$$

$$n = k \text{ için } a = a^k x^{k-1} \text{ olduğunu kabul edelim.}$$

$$k > 2 \text{ ise } a^{k+1} x^k = a(a^k x^{k-1}) x = a^2 x = a$$

Öyleyse bir n için $a^n = 0$ ise $a = x^{n-1} a^n = 0$ dir.

Yine,

$$\begin{aligned}(a-axa)^2 &= a^2 + axa^2xa - a^2xa - axa^2 \\ &= a^2 + axa^2 - a^2 - axa^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

Öyleyse $a = axa$ ve R regüler bir halkadır. q.e.d.

Uyarı 3.4. Özellik 2.1 i) de R nin kuvvetli regüler olduğu gösterildi. Böylece yukarıdaki özelliğin (4). kısmı sağlanmış olur. Buradan $(4) \implies (1)$ ve (1) ve (2) nin ispatında birim eleman kullanılmadığından Özellik 2.1 ii) deki durum gerçekleşmiş olur.

Özellik 3.5. [34, Theorem 9] R birimli SAC - halka, R' R nin integral genişlemesi ve indirgenmiş bir halka olsun. O zaman aşağıdakiler birbirine denktirler:

- (i) R' regüler bir halkadır.
- (ii) R regüler bir halkadır.

İspat (ii) $\implies$ (i). R regüler ise (0.11) den R de her asal ideal maksimaldir.

$$aRb \subseteq P' \cap R \implies ab \in P' \cap R$$

$$\implies \text{ya } a \in P' \cap R \text{ veya } b \in P' \cap R$$

$$\implies P' \cap R \text{ } R \text{ de asal idealdir.}$$

$$\implies P' \cap R \text{ } R \text{ de maksimal idealdir.}$$

(R regüler)

$\Rightarrow P' R'$ de maksimal sol idealdir (0.13)

$\Rightarrow R'$ regüler halkadır (Özellik 2.4)

(i) $\iff$ (ii). R' regüler ise R' SAĞ-halkadır. (0.12) ye göre R nin $\forall P$ asal ideali için P' , $P = P' \cap R$ olacak şekilde R de bir asal ideal olsun. O zaman P' maksimal idealdir. (0.13) ten P, R de maksimal idealdir. (0.11) den R regüler bir halkadır. q.e.d.

§ 4. YENİ ÖZELLİKLER VE İSPATLAR

Bu bölümde önce bilinen ama ispatları bizim tarafımızdan verilen özellikler yer alacak. Sonra, Özellik 2.5 in ispatında kullanılan bir özelliğin kendimizce yapılan ispatı burada yapılacaktır.

Burada yer alan son iki özellik tez konuyla ilgili yeni sonuçlarıdır. Bu iki özellik [18] den alınmıştır.

Özellik 4.1 [9, Theorem 5.3] S ve R herhangi iki Π -regüler halka, $f: R \longrightarrow S$ örten bir halka homomorfizması olsun. O zaman, R indirgenmiş bir halka ise S de indirgenmiş bir halkadır.

İspat. $s = f(r) \in S$ için $s^2 = 0$ olsun. R Π -regüler halka olduğundan Özellik 2.1 i) ye göre $r = r^2 a$ olacak şekilde $a \in R$ vardır. O zaman

$$s = f(r) = f(r)^2 f(a) = s^2 f(a) \quad \text{dir.}$$

$$\Rightarrow s = s^2 f(a) = 0$$

$$\Rightarrow S \text{ indirgenmiş bir halkadır.}$$

q.e.d.

Şimdi de birimsiz indirgenmiş bir halkanın birimli indirgenmiş bir halka için gömülebileceğini gösterelim.

Özellik 4.2. R birimsiz indirgenmiş bir halka olsun. O zaman R , birimli indirgenmiş bir S halkası içine gömülebilir.

İspat. Birimsiz bir R halkasını birimli bir S halkası içine gömerken $S = \mathbb{Z} \times R$ alınabileceğini biliyoruz [12].

S aşağıdaki toplama ve çarpma işlemleri altında birimli bir halka teşkil eder. $m, n \in \mathbb{Z}$ ve $a, b \in R$ için

$$(m, a) + (n, b) = (m+n, a+b)$$

$$(m, a) \cdot (n, b) = (mn, mb+na+ab)$$

$(1, 0) \in S$ elemanı S nin birim elemanıdır. Şimdi S nin indirgenmiş halka olduğunu gösterelim:

$$(m, a) \in S \text{ için } (m, a)^2 = (0, 0) \text{ olsun.}$$

$$\Rightarrow (m, a)^2 = (m^2, 2ma+a^2) = (0, 0)$$

$$\Rightarrow m^2 = 0 \text{ ve } 2ma + a^2 = 0$$

$$\Rightarrow m^2 = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ dir. (} \mathbb{Z} \text{ tamlık bölgesi)}$$

$$2ma + a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = 0$$

$$\Rightarrow a = 0 \text{ (} R \text{ indirgenmiş halka)}$$

Öyleyse $(m, a) = (0, 0)$ dir. Ve buradan $S = \mathbb{Z} \times R$ halkası indirgenmiş bir halkadır. q.e.d.

Aşağıdaki özellikte R nin indirgenmiş olması gerekmez. Ancak ispatını kendimiz yaptığımız için bu bölümde veriyoruz.

Özellik 4.3. [33] Bir R regüler halkasında tam olarak asal her ideal bir maksimal sağ idealdir.

İspat. $P \subset R$ de tam olarak asal bir idealdir.

$M, P \subsetneq M \subset R$ olacak şekilde R de bir sağ ideal olsun.

$m \in M, m \notin P \Rightarrow m = mm' : \text{olacak şekilde öyle bir}$
 $m' \in R \text{ ve } m' \notin P \text{ vardır.}$

$$\Rightarrow \forall r \in R \text{ için } mr - mm'r = 0$$

$$\Rightarrow m(r - mm'r) = 0 \in P$$

$$\Rightarrow \forall r \in R \text{ için } r - mm'r \in P \quad (m \notin P)$$

$$\Rightarrow mr - mm'r \in P$$

$$\Rightarrow m'(r - mm'r) \in P$$

$$\Rightarrow r - mm'r \in P \subset M \quad (m' \notin P)$$

$$\Rightarrow R \subset M$$

$$\Rightarrow M = R$$

$$\Rightarrow P \text{ maksimal sağ idealdir.} \quad \text{q.e.d.}$$

Aşağıdaki özelliğin ispatı da yine kendimizce verilmiştir.

Özellik 4.4 [8, Lemma 1.1] R herhangi bir halka olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır:

(i) Eğer $x \in R$ ögesi $n > m > 0$ ve $k \in \mathbb{Z}$ için $x^n = kx^m$ eşitliğini sağlıyorsa o zaman $\forall j \in \mathbb{Z}_+$ ve $\forall s \gg m$ için

$$x^{s+j(n-m)} = k^j x^s \quad \text{dir.}$$

(ii) Eğer R "quasi-periodic" halka ve $\{x_1, \dots, x_s\}$ R nin sonlu bir alt kümesi ise, o zaman

$$n > m > 0 \quad \text{ve} \quad i=1,2,\dots,s \quad \text{için} \quad x_i^n = k_i x_i^m$$

olacak şekilde $n, m, k_1, k_2, \dots, k_s \in \mathbb{Z}$ vardır.

(iii) Eğer R "quasi-periodic" halka ve $x \in R$ ise

$$y = x^m, \quad y^2 = ky$$

denklemini sağlayacak şekilde $m \in \mathbb{Z}$ ve $k \in \mathbb{Z}$ vardır.

(iv) Eğer $x \in R$ ögesi $n > m > 0$ ve $k \in \mathbb{Z}$ için $x^n = kx^m$ denklemini sağlıyorsa o zaman

$$x^{n-m+1} - kx \in N$$

Özel olarak; bir indirgenmiş ve "quasi-periodic" halka C -halkadır ve bir indirgenmiş ve "periodic" halka J -halkadır.

İspat (i). İspat için j üzerinden tümevarım yapalım.

$$j=1 \quad \text{için} \quad x^{s+(n-m)} = x^{s-m+n}$$

$$= x^{s-m} \cdot x^n$$

$$= x^{s-m} \cdot kx^m$$

$$= kx^s$$

$$x^{s+j(n-m)} = k^j x^s \quad \text{olsun.}$$

$$\begin{aligned}
 x^{j+1}_x s &= k \cdot k^j x^s \\
 &= k \cdot x^{s+j(n-m)} \\
 &= k \cdot x^s \cdot x^{j(n-m)} \\
 &= x^{s+(n-m)} \cdot x^{j(n-m)} \\
 &= x^{s+(j+1)(n-m)}
 \end{aligned}$$

Öyleyse $\forall j \in \mathbb{Z}_+$ ve $\forall s \gg m$ için $x^{s+j(n-m)} = k^j x^s$ dir.

(iii) R "quasi-periodic" halka olduğundan (i) den

$\forall j \in \mathbb{Z}_+$ ve $\forall s \gg m$ için $x^{s+j(n-m)} = k^j x^s$ olur.

$j \gg \frac{m}{n-m}$ olacak şekilde $j \in \mathbb{Z}_+$ seçelim.

$s = j(n-m)$ alırsak $s \gg m$ olur. O zaman

$$x^{2s} = k^j x^s \text{ olur.}$$

(ii) (iii) den $\forall i = 1, \dots, s$ için

$$x_i^{2t_i} = k_i x_i^{t_i}$$

olacak şekilde $t_i \in \mathbb{Z}_+$ ve $k_i \in \mathbb{Z}$ vardır.

$$x_i^{2t_1 \dots t_i \dots t_s} = k_i x_i^{t_1 \dots t_i \dots t_s}$$

olur ve

$$n = 2t_1 \dots t_i \dots t_s > t_1 \dots t_s = m > 0 \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned}
 (iv) \quad (x^{n-m+1} - kx)^m &= \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (x^{n-m+1})^{m-i} (-kx)^i \\
 &= \binom{m}{0} (x^{n-m+1})^m - \binom{m}{1} k \cdot (x^{n-m+1})^{m-1} \cdot x + \binom{m}{2} k^2 \cdot (x^{n-m+1})^{m-2} \cdot x^2 \\
 &\quad + \dots + (-1)^i \binom{m}{i} k^i \cdot (x^{n-m+1})^{m-i} x^i + \dots + (-1)^m k^m (x^{n-m+1})^{m-m} x^m
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i=0 \quad \text{için} \quad (x^{n-m+1})^m &= x^{n-m-m^2+m} \\
 &= x^{m^2+mp-m^2+m} \quad (n=m, \quad n=m+p, \quad p \in \mathbb{Z}_+) \\
 &= x^{m+mp}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i=1 \quad \text{için} \quad k(x^{n-m+1})^{m-1} x &= k x^{nm-m^2+m-n+m-1} \cdot x \\
 &= x^{nm-m^2+m} \\
 &= x^{m+mp}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i=2 \quad \text{için} \quad k^2 (x^{n-m+1})^{m-2} x^2 &= k^2 x^{nm-m^2+m-2n+2m-2} \\
 &= k^2 x^{nm-m^2+m-2n+2m} \\
 &= x^{nm-m^2+m} \\
 &= x^{m+mp}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i \quad \text{için} \quad k^i (x^{n-m+1})^{m-i} x^i &= k^i x^{nm-m^2+m-in+im-i} x^i \\
 &= k^i x^{nm-m^2+m-in+im} \\
 &= x^{nm-m^2+m} \\
 &= x^{m+mp}
 \end{aligned}$$

$$i=m \text{ için } k^m(x^{n-m+1})^{m-m} x^m = k^m x^m$$

$$= k^{m-1} k x^m$$

$$= k^{m-1} x^n$$

$$= k^{m-1} x^{m+p}$$

$$= k^{m-2} x^{m+2p}$$

$$= \dots = x^{m+mp}$$

$$(x^{n-m+1} - kx)^m = x^{m+mp} \left[\binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \dots + (-1)^m \binom{m}{m} \right]$$

$$= 0$$

$$x^{n-m+1} - kx \in N$$

Özel olarak R indirgenmiş ve "quasi-periodic" halka ise (iv) ten

$$x^{n-m+1} - kx = 0 \text{ dır.}$$

$$\Rightarrow \forall x \in R \text{ için } x^{n-m+1} = kx.$$

Öyleyse R bir C -halkadır.

R indirgenmiş ve "periodic" halka ise (0.14) den

$$\forall x \in R \text{ için } x - x^{n(x)} \in N$$

olacak şekilde $n(x) > 1$ vardır. R indirgenmiş halka olduğundan

$$\forall x \in R \quad \text{için} \quad x^{n(x)} = x \quad \text{dir.}$$

Yani R bir J-halkadır.

q.e.d.

Bir halkanın asal radikalinde bulunan öğeler nilpotent olduğundan, indirgenmiş bir halka yarı asaldır. Karşıt olarak yarı asal bir halkanın indirgenmiş olması için yeterli şartlar birçok yazar tarafından verilmiştir. Bunlar arasında [6], [14], [15], [16], [17] sayılabilir. Biz şimdi bir örnek olarak M.A.Quadri ve M.Ashraf'ın [4] de verdiği Theorem A'nın ispatını çok kısa bir yoldan yapacağız.

Özellik 4.5. [4, Theorem A] $n > 1$ pozitif tamsayı ve R yarı asal halka olsun. $\forall x, y \in R$ ve $k = n, n+1$ için

$$(xy)^k - x^k y^k$$

R nin merkezine ait ise R değişmelidir.

İspat. e_{ij} ler matris birimleri olmak üzere,

$$x = e_{21} \quad \text{ve} \quad y = e_{12}$$

olsun. $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ için

$$x^n = 0, \quad y^n = 0, \quad (xy)^n = e_{22}$$

olduğundan

$$(xy)^n - x^n y^n = e_{22} - 0 = e_{22}$$

ve e_{22} R nin merkezine ait olmadığından Kezlan'ın teoreminden [20] R değişmeli olur.

Diğer yandan,

$$a \in R \quad \text{ve} \quad a^2 = 0 \quad \text{ise} \quad aRa = Ra^2 = 0$$

ve R yarı asal olduğundan $a = 0$ bulunur. Demek ki R indirgenmiştir. q.e.d.

Uyarı 4.6. Bu özelliğin çok daha genel hali [15] de bulunabilir.

Yarı asal halka özel olarak asal ise, bu halkanın indirgenmiş olması için belli bir polinom özdeşliği sağlama şartı yerine, halkanın bazı şartlara bağlı bir türemeye (derivation'a) sahip olması da yeterlidir. Bununla ilgili olarak [26], [5], [11], [2] kaynaklarına bakılabilir.

Özellik 4.7. [18, Theorem 2] R birimli indirgenmiş bir halka $0 \neq x \in R$ ve P R de minimal asal ideal olsun. O zaman aşağıdakiler birbirine denktirler:

$$(1) \quad \{x\}^T \subseteq P$$

$$(2) \quad x \notin P$$

$$(3) \quad P \subseteq A(xR)$$

İspat $(1) \implies (2)$. $\{x\}^T \subseteq P$ olsun. $x \in P$ olduğunu kabul edelim. Özellik 3.1.I den $P = 0_P$ dir. Buradan, bir $a \notin P$ için $xa = 0$ dir. Fakat, o zaman

$a \in \{x\}^T \subseteq P$ olur. Bu ise mümkün değildir. Öyleyse $x \notin P$ olmak zorundadır.

$$(2) \implies (1). \quad x \notin P = 0_P \quad \text{olsun. O zaman}$$

her bir $a \notin P$ için $xa \neq 0$ dır.

Şimdi,

$$\{x\}^r \not\subseteq P$$

olduğunu kabul edelim.

$y \notin P$ olacak şekilde bir $y \in \{x\}^r$ varsa $xy = 0$ dır. Bu ise mümkün değildir. Öyleyse $\{x\}^r \subseteq P$ olmalıdır.

(2) $\implies$ (3). $x \notin P$ olsun. Özellik 3.1.I den P R nin tam olarak asal ideali olduğundan (0.2) Özelliğin ispatından

$$M^* \cap \{x\}^r = \emptyset$$

olacak şekilde M yi içeren bir M^* maksimal m -sistem ve tam olarak asal bir P^* ideali bulunabilir. Ayrıca

$$P^* \subseteq P \quad \text{ve} \quad P^* \subseteq A(xR)$$

olduğunu biliyoruz. Hipotezden P minimal olduğundan

$$P^* = P \quad \text{veya} \quad P^* = 0 \quad \text{dır.}$$

Eğer $P^* = 0$ ise o zaman $M^* = R - \{0\}$ dır.

Öyleyse

$$\emptyset = M^* \cap \{x\}^r = (R - \{0\}) \cap \{x\}^r \quad \text{dır.}$$

Bundan dolayı $\{x\}^r = 0$ dır. Şimdi $\{x\}^r = 0 \subseteq P$ olduğundan

Özellik 1.4 (B) den $P \subseteq A(xR)$ dir.

Eğer $P^* \neq 0$ ise, o zaman $P^* = P$ ve bundan dolayı

$$P^* = P \subseteq A(xR) \text{ dir.}$$

(3) $\implies$ (2). Önce her bir $x \in R$ için $x \notin A(xR)$ olduğunu görelim. $x \in A(xR)$ olduğunu kabul edelim. O zaman

$$xr \neq 0 \text{ ve } (xr)x = 0$$

olacak şekilde bir $r \in R$ vardır.

$$\implies (xr)^2 = 0 \implies xr = 0$$

Bu ise mümkün değildir. Öyleyse $x \notin A(xR)$ olmalıdır.

Buradan $x \in P$ olduğunu kabul edersek

$$x \in P \subseteq A(xR)$$

olur. Bu ise $x \notin A(xR)$ olmasına çelişir. Öyleyse $x \notin P$ olmalıdır. q.e.d.

Özellik 3.4.in denk şartlarına yenilerini ekleyebiliriz:

Özellik 4.8. [18, Theorem 3] R indirgenmiş bir halka ve P R de bir asal ideal olsun. O zaman aşağıdakiler birbirine denktirler:

- (1) P , O_p üzerinde radikal
- (2) P minimal asal ideal
- (3) $P = O_p$

$$(4) P = \bigcup_{r \in P} \{x\}^r$$

İspat (1) $\implies$ (3). Özellik 1.4 (6) (i) den $0_p \subseteq P$ olduğunu biliyoruz. $x \in P$ alalım. 0 zaman

bir m için $x^m \in 0_p$ dir.

$$\implies \text{bir } a \notin P \text{ için } x^m a = 0$$

$$\implies xa = 0$$

$$\implies x \in 0_p$$

Öyleyse $0_p = P$ dir.

(2) $\implies$ (3). Bu Özellik 3.1.I den açıktır.

(3) $\implies$ (4). $b \in \bigcup_{x \notin P} \{x\}^r$ olsun.

$$\implies \text{bir } a \notin P \text{ için } b \in \{a\}$$

$$\implies ab = ba = 0$$

$$\implies b \in 0_p$$

Öyleyse (3) $\implies$ (4) sağlanır. (4) $\implies$ (3) sağlandığı açıktır. Buradan (3) $\iff$ (4) olur. q.e.d.

SONUÇ

İndirgenmiş halkaların gerek halkalar ve gerekse modüller kuramında önemi büyüktür. Bu tezde toplu olarak vermeye çalıştığımız özellikler ile bu halkaların çeşitli genelleşmeleri arasında [19] de verilen şöyle bir genelleşme de vardır:

R bir halka olsun. Eğer R nin sıfırdan farklı bir idealinin içinde R nin nilpotent öğelerinin toplamı olarak yazılamayan en az bir öğe varsa R ye (A) şartını sağlıyor diyelim. Her indirgenmiş halka (A) şartını sağlar ve (A) şartını sağlayan değişmeli bir halka indirgenmiştir. [19] Onun için (A) şartını sağlayan ama değişmeli olmayan halkaların, indirgenmiş halkaların hangi özelliklerini taşıdığını araştırmak ilginç olacağını sanmaktayım.

Ö Z E T

Sunduğumuz bu tezin giriş bölümünde tez konusu belirtilildi ve daha sonraki bölümlerde kullanılacak tanımlar, teoremler verilip tezde geçen gösterimler toplu halde sunuldu.

Birinci bölümde, önce bir halkanın hangi şartlar altında indirgenmiş halka olduğu incelendi. Daha sonra indirgenmiş bir halkada, sağ sıfırlayanın iki yanlı ideal olduğu, singüler idealin sıfır olduğu, sıfır bölensiz halkaların alt direkt toplamı olduğu ve diğer özellikler verilmiştir. Ayrıca birimli indirgenmiş bir halkada bir asal ideale göre bölüm halkasının injektif "hull"ına ait bir özellik ele alınmıştır.

İkinci bölümde, ilk olarak indirgenmiş Π -regüler bir halkanın kuvvetli regüler ve biregüler olduğu, indirgenmiş asal bir halkanın sıfırdan farklı sıfır böleni olmadığı, indirgenmiş ve regüler bir halkada her basit R -modülün injektif olduğu ispatlanmıştır. Daha sonra, her tam olarak asal ideali bir maksimal sağ ideal olan birimli indirgenmiş bir halkanın sağladığı ifadeler, birimli indirgenmiş bir halkanın ne zaman regüler olduğu ve regüler bir halkanın integral genişlemesi indirgenmiş ise onun regüler olduğu verilmiştir.

Üçüncü bölümde, bir indirgenmiş halkada geçerli olan denk ifadeler ve minimal asal ideallerden oluşan bir topolojik uzayın bir bazı açık ve kapalı kümeler olan Hausdorff uzayı olduğunun ispatı verilmiştir. Daha sonra, birimli bir halkada, indirgenmiş ve regüler bir halkanın biregüler, kuvvetli regüler ve her sağ idealin iki yanlı olmasının birbirine denk olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, birimli SAC-halkanın regüler olmasının, integral genişlemesi indirgenmiş

olan halkanın regüler olmasına denk olduğu ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümde, incelediğimiz makalelerde ispatsız olarak verilen özellikler ispat edildikten sonra [4, s.427] de yer alan teoremin, Kezlan'ın [20] deki özelliği kullanılarak çok kısa bir ispatı verildi. Ayrıca birimsiz indirgenmiş bir halkanın birimli indirgenmiş bir halka içine gömülebileceği ve indirgenmiş bir halkada denk ifadeler verilmiştir.



S U M M A R Y

In the introduction part of this paper, the subject matter of the thesis has been described and in the latter parts the definitions, the theorems and the notations to be used throughout the paper have been presented as a whole.

In part one, first of all, the conditions for a ring to be a reduced ring has been studied. Later on, it has been introduced that a right annihilator is a two-sided ideal, a singular ideal is zero in a reduced ring which is a subdirect sum of rings with non-zero divisors, and also other properties have been explained. Additionally, a property of an injective hull of a quotient ring with respect to prime ideal, in a reduced ring with identity has been handled.

In part two, first of all it has been proved that a reduced regular ring is strongly regular and biregular and a reduced prime ring does not have a zero divisor other than zero, and also every simple R -module is injective in a regular reduced ring. After that, it has been introduced that the statements satisfied by a reduced ring with identity in which every completely prime ideal is a maximal right ideal, under what conditions a reduced ring with identity is regular and if an integral extension of a regular ring is reduced, then it is regular.

In part three, that the equivalent statements valid in a reduced ring and a topological space consisting of minimal prime ideals is a Hausdorff space with a base of open and closed sets has been proved. Later on, it has been shown that the cases in which a reduced and a regular ring in a ring with identity is biregular, strongly regular

and every right ideal is two-sided ideal are all equivalent to each other. In addition, it has been proven that the case in which a SAC-ring is regular is equivalent to the case in which the ring with a reduced integral extension is regular.

In part four, after all the properties presented without proof in the articles we had studied were proved, a very short proof of the theorem in [4, p.427] was given making use of Kezlan's property in [20]. That a reduced ring without identity can be embedded into a reduced ring with identity and equivalent statements in a reduced ring have also been presented.



KAYNAKLAR

- [1] ANDRUNAKIEVIC, V.A. and RJABUHIN, Ju.M., **Rings without nilpotent elements and completely simple ideals**, Soviet Math. Dokl., 9(1968), 565-567, MR37 # 6320.
- [2] ARGAÇ, N. and KAYA A. and KISIR, A., **(σ, τ) -Derivations in prime rings**, Math.J.Okayama Univ., 29(1987), 173-177.
- [3] ARGAÇ, N., **İndirgenmiş Değişmeli Halkalar Üzerine**, Yüksek Lisans Tezi, Ege Üniv., Fen Bilimleri Enstitüsü, 1988.
- [4] ASHRAF, Mohd. and QUADRİ, Murtaza A., **A note on commutativity of rings**, Common.Fac.Sci.Univ.Ank., Series A₁, 35(1986), 1-3.
- [5] AWTAR, R., **On a theorem of Posner**, Proc. Canad.Phil.Soc. 73(1973), 25-27.
- [6] BELL, H.E., **On a commutativity theorem of Herstein**, Arch.Math., 21(1970), 265-267.
- [7] _____, **A commutativity study for periodic rings**, Pasific J.Math.(1)70 (1977), 29-36.
- [8] _____, **On quasi-periodic rings**, Arch. Math. 36(1981), 502-509.
- [9] DRAZIN, M.P., **Algebraic and Diagonable rings**, Canad. J.Math. 8(1956), 341-354.
- [10] FELZENSWALB, B., **Rings radical over subrings**, Israel J. Math.(2)23 (1976), 156-164.
- [11] HONGAN, M. and RRZEPIZUR, A., **On generalization of a theorem of Posner**, Math.J.Okayama Univ., 27(1985), 19-23.

- [12] HUNGERFORD, T.W., **Algebra**, Holt, Rinehart-Winston, Inc., 1974.
- [13] JACOBSON, N., **Structure of Rings**, Amer. Math. Soc. Collog. Publ., 37, 1964.
- [14] KAYA, A. and KOÇ, C., **Remarks on some commutativity theorems**, Rev. Fac. Sci. Univ. of Istanbul, Ser A, 40 (1975), 1-3.
- [15] KAYA, A., **On rings satisfying some polynomial identities**, Math. J. Okayama Univ., 20 (1978), 17-20.
- [16] _____, **Notes on the commutativity of rings**, METU J. of Pure and Appl. Sci. (3) 9 (1976), 261-265.
- [17] _____, **A theorem on the commutativity of rings**, METU J. of Pure and Appl. Sci. (3) 10 (1977), 261-265.
- [18] _____, **On rings without nilpotent elements**, Algebra and Number Theory Sym. Istanbul Univ., 1988.
- [19] _____, **On rings with $(xy)^n = x^n y^n$** , Math. Japonica (4) 28 (1983), 475-478.
- [20] KEZLAN, Thomas P., **A note on commutativity of semiprime PI-rings**, Math. Japonica, (1983).
- [21] KLEIN, A.A., **A simple proof of a theorem on reduced rings**, Canad. Math. Bull. (4) 23 (1980).
- [22] KOH, K., **Quasisimple Modules and other Topics in Ring Theory**, Lectures Notes in Math. 49, Berlin, Heidelberg, New York, Springer, (1972) 343-428.
- [23] _____, **On functional representations of a ring without nilpotent elements**, Canad. Math. Bull. (3) 14 (1971), 349-352.

- [24] KOH, K., On a representation of a strongly harmonic ring by sheaves, Pacific J.Math. (2) 41 (1972).
- [25] LAMBEK, J., Lectures on Rings and Modules. Waltham, Mass. Blaisdell Publishing Company, 1966.
- [26] LEE, P.H. and LEE, T.K., On derivations of prime rings, Chinese J.Math.(2) 9 (1981), 107-110.
- [27] MCCOY, N.H., Rings and Ideals, Carus Monograph, Math. Assoc. of America, Buffalo, New York (1948).
- [28] _____, The Theory of Rings, The Macmillan Company, New York, 1964.
- [29] Renault, P.G., Anneaux reduits non comutatifs, J.Math. Pures et Appl., 46 (1967), 203-214.
- [30] STEINBERG, S.A., Rings of quotients of rings without nilpotent elements, Pacific J.Math. (2) 49 (1973), 493-506.
- [31] STENSTRÖM, B., Rings and Modules of Quotients, Lectures Notes in Math. 237, Berlin, Heidelberg, New York Springer, 1971.
- [32] STEWART, P.N., Semi-simple radical classes, Pacific J.Math (1) 32 (1970).
- [33] WONG, E.T., Regular rings and integral extension of a regular ring, Proceeding of the Amer.Math.Soc.(2) 32 (1972).
- [34] _____, Almost commutative rings and their integral extensions, Math.J.Okayama Univ.2 (18) (1976).