

4376

T. C.  
EGE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
ASTRONOMİ VE UZAY BİLİMLERİ ANABİLİM DALI

BAZI HOMOJEN VE İZOTROP RELATİVİSTİK EVREN  
MODELLERİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN : Can BATTAL  
DANIŞMAN : Prof. Dr. İhrami YAVUZ

Bornova — İZMİR  
1988

T. C.  
Yükseköğretim Kurulu  
Dokümantasyon Merkezi

## ÖNSÖZ

Relativistik uniform kozmolojilerde relativistik bazda gravitasyonel etkileşme gözönüne alınarak basit olan uniform ve uniform olmayan modeller oluşturulmakta ve bu modeller gözlemlerle karşılaştırılarak evrenin yapısı hakkında bilgi sağlanmaktadır.

Bu çalışmada-gök cisimlerinin hemen hemen tümü rotasyon yaptıklarından-özellikle rotasyon yapan evren modelleri incelenecektir.

## İÇİNDEKİLER

### GİRİŞ

I. GRAVİTASYON TEORİLERİ .....	1
I.1 KLASİK GRAVİTASYON TEORİSİ .....	2
I.2 RELATİVİSTİK GRAVİTASYON TEORİLERİ .....	5
I.2.1 ÖZEL RELATİVİTE TEORİSİ BAZINDA GRAVİTASYON TEORİSİ .....	5
I.2.2 GENEL RELATİVİTE TEORİSİ.....	7
II. RELATİVİSTİK EVREN MODELLERİ	
II.1 HOMOJEN -İZOTROP (UNİFORM) EVREN MODELLERİ...	11
II.1.1 DIŞ SCHWARZSCHILD ÇÖZÜMLERİ .....	18
II.1.2 İÇ SCHWARZSCHILD ÇÖZÜMLERİ .....	20
II.2 UNİFORM OLMAYAN EVREN MODELLERİ .....	23
II.2.1 HOMOJEN VE ANİZOTROP EVREN MODELLERİ	24
II.2.2 ROTASYON YAPAN EVREN İÇİN EİSTEİN DIŞ ALAN DENKLEMLERİ .....	25
II.2.3 KERR ÇÖZÜMÜ .....	30
II.2.4 ROTASYON YAPAN EVREN İÇİN EİNSTEİN İÇ ALAN DENLEMLERİ .....	33
II.2.5 VAN STOCKUM ÇÖZÜMÜ .....	37
III. SONUÇ .....	38
IV. ÖZET .....	39
V LİTERATÜR .....	42

## ABSTRAKT

İlk bölümde gravitasyonel teorilerinden klasik bazda Newton ve relativistik bazda Einstein Genel Relativite teorisi ele alınmıştır. İkinci bölümde önce uniform evren modelleri kısaca gözden geçirilip örnekler verilmiş daha sonra da, rotasyon yapan (uniform olmayan) evren modellerinin çözümleri üzerinde ayrıntılı olarak durulmuştur. Son kısımda ise bu modellerin incelenmesinin gözlemsel ve teorik gerekliliği vurgulanmıştır.

## ABSTRACT

In the first chapter, gravitational theories has been discussed. Newtonian theory as a classical and Einstein General Relativity theory as a relativistic are chosen for the base of this study. In the second chapter, first uniform universe models are reviewed. An interior and exterior Schwarzschild solution is given as a example. After, non-uniform universe modelles (rotating) has been studied in detail. At the end, rotational models has been eveluated on the observation and theoretical point of view.

## GİRİŞ

Bugün fizikte bilinen dört çeşit etkileşme vardır. Bunlar zayıf, kuvvetli, elektromagnetik ve gravitasyonel etkileşmelerdir. İlk ikisinin etki genişliği  $10^{-13}$  cm iken diğer ikisinin etki genişliği sonsuz boyutundadır. Burada, büyük boyuttaki etkileşmelerden, gravitasyonel etkileşme göz önüne alınacaktır.

### I. GRAVİTASYON TEORİLERİ

Gravitasyonel etkileşmeleri açıklamak için bir çok teori ortaya atılmıştır. Bu bölümde, klasik teorilerden en önemlisi olan Newton gravitasyon teorisi ile relativistik teorilerden Özel Relativite teorisi bazındaki gravitasyon teorileriyle, Einstein'ın Genel Relativite teorileri incelenecektir.

## I.1 KLASİK GRAVİTASYON TEORİSİ (NEWTON TEORİSİ)

Newton'un Gravitasyon Teorisi aşağıdaki temel kabuller üzerine kurulmuştur:

1. Etkileşme hızı sonsuzdur. Bunun sonucu olarak  $t$  zamanı her yerde mutlaktır. Yani  $t$  uzayın her yerinde aynı şekilde akar.
2. Üç boyutlu uzay da mutlak olup, Öklid (düz) yapıdadır. Yani Kartezyen koordinatlar kullanıldığında iki nokta arasındaki uzaklık bu uzayda,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

ifadesiyle verilir.

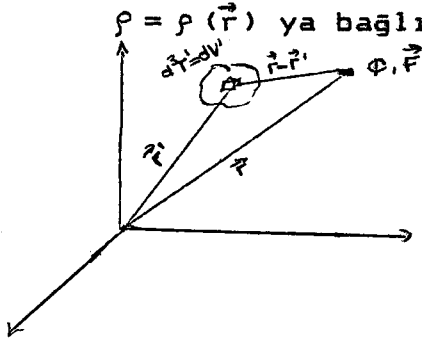
Bu iki kabulün matematik ifadesi, fizik kanunlarının Galileo dönüşümleri denilen,

$$\vec{r}' = \vec{r} + vt,$$

$$t' = t$$

dönüşümleri altında invariant kalmalarıdır. Newton gravitasyon teorisine göre bu temel kabuller altında her kütle civarında bir skaler ve bir de vektörel alan oluşturur ve bu alanlar yardımıyla birbirleriyle çekim etkileşmesinde bulunurlar. Bu alanlar,  $\Phi$  gravitasyon potansiyel alanı ile  $\vec{F}$  gravitasyon kuvvet alanıdır. Kütle dağılımı, madde yoğunluğu

$\rho = \rho(\vec{r})$  ya bağlıdır.



Böyle bir kütle dağılımının  $\Phi$  gravitasyon potansiyeli, madde nin içinde Poisson deklemleriyle verilir.

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = 4\pi G. \quad (1.1)$$

Buradaki

$\vec{\nabla}^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$  ifadesi kartezyen koordinatlardaki Laplace operatörüdür.  $G$  ise gravitasyon sabiti olup değeri  $6.67 * 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ sn}^{-2}$  dir. Poisson denklemini sağlayan  $\Phi$  ise ((1,1) rin bir çözümü ),

$$\Phi(\vec{r}, t) = -G \int \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (1.2)$$

ifadesini haizdir. Kaynaktan çok uzakta ( $|\vec{r}| = r > R$  için,  $R$  madde ile dolu bölgenin büyüklüğünü göstermek üzere  $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$  seriyeye açılır ve (1,2) de yerine konulursa),

$$\Phi(\vec{r}, t) = -\frac{GM}{r} + G \left( \frac{1}{r} \right)_{,a} \int x'_a \rho(x', t) d^3x' - \frac{1}{2} G \left( \frac{1}{r} \right)_{,ab} \int x'_a x'_b \rho(x', t) d^3x' + \dots \quad (1.3)$$

ifadesi elde edilir. Buradaki  $M = \int \rho d^3x$  dir, (bundan böyle  $a, b, c, \dots$  gibi latin indisleri 1, 2, 3 ;  $\alpha, \beta, \mu, \dots$  gibi yunan harfleri ise 0, 1, 2, 3 değerlerini alacaktır). (,) işareti ise o indise göre parçalı diferansiyel alınacaktır anlamına gelir (örneğin  $\Phi_{,a} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^a}$  ).

Maddenin dışındaki gravitasyon potansiyeli ise Laplace denklemleriyle verilir:

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = 0. \quad (1.4)$$

Bu denklemin çözümünde kolay bir yol harmonik fonksiyonlara başvuraktır.

Bir test parçacığının hareket denklemi de Newtonun 2. kanunundan bulunabilir ( $\vec{F} = m\vec{a}$  ,  $\vec{F} = -\vec{\nabla}\Phi$  ,  $\vec{a} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \ddot{\vec{x}}$  ,  
 .  $\equiv$  zamana göre türev ):

$$m\ddot{x}_\alpha = -m\Phi_{,\alpha} . \quad (1.5)$$

Gravitasyonal kütle ile eylemsiz kütlenin eşdeğerliliği sonucu gravitasyonel kuvvetlerle eylemsiz kuvvetler birbirinden (lokal olarak) ayırdedilemezler. Bir gravitasyonel alan genellikle inhomojen bir alandır. Dolayısıyla ivmeli bir referans sistemine geçildiğinde sadece keyfi bir eğri boyunca elimine edilebilir, (Demianski,1985,s.1).



## I.2 RELATİVİSTİK GRAVİTASYON TEORİLERİ

Newton'un klasik bazdaki gravitasyon teorisi, bazı olayları açıklamakta yetersiz kalmaktadır. Bu yüzden bu teori gerek içerik ve gerekse prensipler bakımından düzeltilip geliştirilmeye tabii tutulmuştur. Bu teorinin temel prensipler bakımından geliştirilip düzeltilmeleri denemelerinden biride onu Özel Relativite teorisi bazında yeniden inşa etmek olmuştur. Şimdi kısaca buna değineceğiz.

### I.2.1 ÖZEL RELATİVİTE TEORİSİ

Özel Relativite teorisinin dayandığı temel varsayımlar şunlardır:

1. Etkileşme hızı sonludur ve tabiattaki maximum değeri de ışığın boşluktaki hızı olan  $c = 2.997975 * 10^{10}$  cm/sn dir.
2. Bunun sonucu olarak uzay ve zaman birbirinden bağımsız ve de mutlak değildirler. Uzayın değişik bölgelerindeki zaman akışı aynı değildir. Olaylar, koordinatlarından 3-ü uzaysal 1-ride zamansal olan 4-boyutlu bir Minkowski uzayında oluşur. Minkowski uzayı, kartezyen koordinatlar- da yay elamanı,  
$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$
 veya  $ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$  ifadesi ile verilen bir Pseudo öklidel uzaydır.
3. Bu iki temel kabulün matematik ifadesi de fizik kanunlarının, Lorentz dönüşümleri denilen,

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v} \left\{ \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{v^2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right\},$$

$$t' = \frac{t - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{|\vec{v}|}{c},$$

dönüşümleri altında invariant kalmalarıdır, (Richard, 1959, s 111).

Gravitasyon etkileşmelerin Özel Relativite teorisi çerçevesinde incelenmesiyle ilgili pek çok çalışma yapılmıştır. Ancak kesin bir başarı elde edilememiştir. Bunların bazıları bazı gravitasyonel etkileşmeleri izah edebilmelerine karşın diğer bazı gravitasyonel etkileşmeleri izah edememektedirler. Bu nedenle köklü değişiklikler içeren teorilere ihtiyaç duyulmuştur. Böyle bir teori Einstein'nın Genel Relativite teorisidir. Bugün bilinen en mükemmel teoridir.

### I.2.2 EINSTEIN GENEL RELATIVİTE TEORİSİ

Gravitasyonel etkileşmeleri en güzel, en tutarlı bir biçimde açıklayan teori Einstein'ın Genel Relativite Teorisi'dir.

Genel Relativite Teorisi iki önemli ilkeye dayanmaktadır:

Birincisi genel kovaryans ilkesi, ikincisi ise eşdeğerlilik prensibidir. Genel kovaryans ilkesi, fizik kanunlarının keyfi bir uzay - zaman koordinat dönüşümünde invariant kalacak şekilde formüle edilebileceklerini ifade eder. Diğer bir deyişle, fizik kanunlarını belirleyen denklemlerin, birinden diğerine Jakobiyeni sıfırdan farklı, sürekli ve türevlenebilen,

$$x'_\mu = f_\mu (x_0, x_1, x_2, x_3)$$

şeklindeki koordinat dönüşümüyle geçilen koordinat sistemlerin de aynı kaldıklarını ifade eder.

İkinci ilke olan Eşdeğerlilik ilkesi ise bazı gravitasyon alanlarına eğrilikli fiziksel (matematiksel) uzayların eşdeğer olduğunu ifade eder (sınırlı uzay bölgeleri bahis konusu olduğunda bazı eylemsiz olmayan-ivmeli - sistemler, eylemsiz sistemdeki bazı gravitasyon alanlarına denktir. Örneğin sabit ivmeli bir sistem, eylemsiz bir sistemdeki homojen sabit gravitasyon alanına denktir, buna bazen zayıf eşdeğerlilik ilkesi de denir). Homojen olmayan ve karmaşık bir şekilde değişen gravitasyon alanlarının varlığında veya büyük yük uzay parçaları bahis konusu olduğunda kütlelerin için-

de buldukları uzay-zamana yeni bir özellik kazandırıp onu eğrilikli bir uzay yaptıkları varsayılır. Böyle eğrilikli uzaylara Riemann uzayı denir. Buna göre gravitasyon kökenli olayların Riemann uzayında incelenmesi gerektiği sonucuna varılır. Böyle bir uzayda iki nokta arasındaki uzaklık (=metrik) şu denklemle,

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x^\mu) dx^\alpha dx^\beta \quad (1.6)$$

verilir. (Alt ve Üste aynı zamanda ortaya çıkan indisler üzerinden Einstein Toplam kuralına göre toplam alınacaktır).

Bu kabuller altında Einstein'nın gravitasyonel potansiyel dağılımıyla ilgili denklemleri,

$$\begin{aligned} R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R &= -\kappa T^{\mu\nu} && \text{Kontravaryant ifadesi} \\ \text{veya} &&& \\ R^\mu_\nu - \frac{1}{2} \delta^\mu_\nu R &= -\kappa T^\mu_\nu && \text{Karışık tensörel ifadesi} \end{aligned} \quad (1.7)$$

dürler. Burada  $R^{\mu\nu}$ , kontravaryant eğrilik tensörü,  $g^{\mu\nu}$ , kontravaryant metrik tensör bileşenleri  $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$  sabit,  $R$ , eğrilik skaleri,  $T^{\mu\nu}$ , kontravaryant enerji momentum tensörü,  $\delta^\mu_\nu$ , karışık birim tensörüdür. Bu denklemlerin sol tarafı uzayın geometrisini sağ tarafı ise enerji-momentum dağılımını ifade etmektedir. Bu denklemler  $\Lambda$  kozmolojik sabitini de içerecek şekilde genişletilerek yazıldığında (kovaryant şekilde),

$$R_{\mu\nu} + (\Lambda - \frac{1}{2} R) g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \quad (1.8)$$

ifadesine dönüşürler.

Buradaki eğrilik tensörü,  $\Gamma_{\mu\nu}^\beta$  Christoffel sembolleri

cinsinden ifade edilirse,

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\beta}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\beta} \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} \Gamma_{\nu\alpha}^{\beta} \quad (1.9)$$

elde edilir.

$\Gamma_{\mu\nu}^{\beta}$  Christoffel sembolleri ise metrik tensör bileşenleri ri cinsinden aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} \left( \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} \right) \quad (1.10)$$

Kovaryant ve kontravaryant metrik tensör bileşenleri arasında,

$$g^{\mu\nu} = \frac{\text{Cofaktor } g_{\mu\nu}}{|g|} \quad (1.11)$$

bağıntısı mevcuttur.

R, eğrilik skaleri de,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \quad (1.12)$$

ifadesini haizdir.

$T_{\nu}^{\mu}$  enerji - momentum tensörünün en genel şekli ise,

$$T_{\nu}^{\mu} = \sum_{\alpha} q_{,\nu}^{\alpha} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,\mu}^{\alpha}} - \delta_{\nu}^{\mu} \Lambda \quad (1.13)$$

dir, (Landau, 1975, s.85). Burada

$$q_{,\nu} = \frac{\partial q}{\partial x^{\nu}} \quad ; \quad q_{,\nu}^{\mu} = \frac{\partial q^{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\beta\nu}^{\mu} q^{\beta} \quad , \quad (\text{kovaryant türev})$$

anlamına gelirler.

(1.13) denklemindeki  $\Lambda$  , sistemi karakterize eden q niceliklerinin ve bunların koordinatlara göre birinci türevlerinin fonksiyonudur. Yani  $\Lambda = \Lambda\left(q, \frac{\partial q}{\partial x^{\mu}}\right)$  dir (bu q ifadesi örneğin elektromagnetik alan için 4-lü potansiyeldir).

İdeal akışkan için enerji-momentum tensörü,

$$T_{\mu\nu} = (p + \epsilon) U_{\mu} U_{\nu} - p \cdot g_{\mu\nu} \quad (1.14)$$

olarak verilir.  $p$ , basınç ,  $\epsilon$  , enerji yoğunluğu,  $U_\mu$  , ler ise 4-lü hız bileşenleri olup,

$$U^\nu = \frac{dx^\nu}{ds} \quad (1.15)$$

ifadesini haizdirler.

Gravitasyonel alanda bir parçacığın hareket denklemi bu gösterimlerle,

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0 \quad (1.16)$$

ifadesini haiz olur.

## II RELATİVİSTİK EVREN MODELLERİ

Einstein Genel Relativite teorisinde uniform evren modelleri önemli bir yer tutar. Zira, nispeten kolay matematiklerine rağmen gözlenen evren koşullarına oldukça iyi uyum sağlarlar. Bu nedenle bunları ayrıntılı olarak özetlemek istiyoruz.

### II.1 HOMOJEN VE İZOTROP (UNIFORM) EVREN MODELLERİ

Homojen ve izotrop evren modellerinin ayrıntılarına girmeden önce homojenliğin ve izotropinin tanımını yapmak ve bundan önce de bu tanımlarda kullanılacak olan bazı terim ve deyimleri açıklamak yararlı olacaktır.

Bir  $g_{\mu\nu}(x)$  metriği, bir  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$  koordinat dönüşümünde - dönüştürülmüş metrik  $g'_{\mu\nu}(x')$  olmak üzere -

$$g'_{\mu\nu}(y) = g_{\mu\nu}(y), \quad \forall y \quad (2.1)$$

koşuluna uyuyorsa bu metriğin bu koordinat dönüşümü altında invariant kaldığı söylenir [ $g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x)$  koşulunun varlığı ise  $g_{\mu\nu}(x)$  in skaler olmasını gerektirir].

$x^\mu \rightarrow x'^\mu$  koordinat dönüşümü altında, tensörlerin genel dönüşüm kuralına göre verilen herhangi bir noktada dönüştürülmüş metrik ile ilk metrik arasında şu bağıntı vardır:

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x) \quad \text{veya,}$$

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g'_{\rho\sigma}(x')$$

(2.1) bağıntısı geçerli olduğunda  $g'_{\rho\sigma}(x')$  ile  $g_{\rho\sigma}(x)$  yer değiştirebilirler. Böylece,

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} g_{\rho\sigma}(x') \quad (2.2)$$

elde edilir. (2.2) bağıntısını sağlayan  $x' \rightarrow x''$  dönüşümüne izometrik dönüşüm veya izometri denir.

$$x'' \rightarrow x'' \text{ dönüşümü,}$$

$$x''^{\mu} = x'^{\mu} + \epsilon \xi^{\mu}(x) \quad |\epsilon| \ll 1 \quad (2.3)$$

şeklinde özel bir izometri ise bu dönüşüme bir infinitezimal hareket denir. Böyle bir dönüşüm, varsayım gereği bir izometri olduğundan,

$$g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x') \implies ds = ds' \text{ koşulu sağlanır. Buradaki}$$

$\xi^{\mu}(x)$  vektörlerine  $g_{\mu\nu}(x)$  metriğine ait Killing vektör-

leri denir. Killing vektörlerinin (2.3) dönüşümü altında

hangi koşulu sağlamaları gerektiğini bulabilmek için (2.3)

bağıntısının (2.2) de yerine konulması yeterlidir. Böylece

$$0 = \frac{\partial \xi^{\mu}(x)}{\partial x^{\rho}} g_{\mu\nu}(x) + \frac{\partial \xi^{\nu}(x)}{\partial x^{\rho}} g_{\rho\nu}(x) + \xi^{\mu}(x) \frac{\partial g_{\rho\sigma}(x)}{\partial x^{\rho}} \quad (2.4)$$

elde edilir. Bu ifade kompakt biçimde,

$$0 = \xi^{\sigma}{}_{;\rho} + \xi^{\rho}{}_{;\sigma} \quad (2.5)$$

olarak yazılabilir. (2.5) bağıntısını sağlayan her dörtlü

vektör alanı  $\xi^{\rho}(x)$ 'in  $g_{\mu\nu}(x)$  metriğinin bir Killing vektör

formunu oluşturduğu söylenir. Böylece bir metriğin bütün

sonsuz küçük eşmetrikli dönüşümlerini tayin etme problemi

metriğin Killing vektörlerini tayin etme problemine indir-

genmiş olur, (Weinberg,1972,s.245).

N boyutlu bir metrik uzayın en fazla  $N(N+1)/2$  bağımsız Killing vektörü olabilir.



Bu ön tanımları yaptıktan sonra homojenlik ve izotropi tanımlarına geçilebiliriz:

Homojenlik, "evrenin fiziksel özelliklerinin verilen belirli bir zamanda her yerde aynı olması" veyahutta "evrendeki her bir noktadan, üzerinde bütün olayların fiziksel özelliklerinin özdeş olduğu bir hiperyüzeyin geçmesidir" şeklinde tanımlanabilir, (Misner e.t. ,1973,s.713).

Homojenlik hareket dönüşümleri yardımıyla ifade edilebilir. Bir metrik uzay bir  $x^\mu$  noktasını, komşuluğundaki bir  $x'^\mu$  noktasına dönüştüren  $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$  şeklindeki izometri dönüşümlerine sahipse bu metrik uzaya homojendir denir. Bu durum metrik uzayın metriğinin, verilen bir noktada her değeri alabilen Killing vektörlerine sahip olduğu anlamına gelir. Özel halde N boyutlu bir metrik uzayda N tane  $\xi^\mu_\lambda(x)$  Killing vektörünü,

$$\xi^\mu_\lambda(x) = \delta^\mu_\lambda$$

koşulunu sağlayacak şekilde seçmek mümkündür (verilen bir nokta  $(X)$  her değeri alabildiğinden vektörleri birim vektörler olarak seçmek mümkündür).

Izotropi de (yönden bağımsız olmak) şöyle ifade edilebilir: Belirli bir uzaysal hiperyüzeyde bulunan bir gözlemci kendi hızını bu hiperyüzeyin hızından ayırt edemiyorsa, uzaydaki yönlerden herhangi birini de diğerinden ayırt edemeyecektir. Bu durum matematiksel olarak şöyle ifade edile-

bilir, (Misner e.t. ,1973, s.714).

Bir metrik uzay, Killing vektörlerinin kendilerininin sıfır ( $\xi^\lambda(X)=0$ ) ve onların birinci türevleri  $\xi_{\lambda;\mu}(X)$ 'lerin de her değeri aldığı sabit bir X noktasında  $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$  şeklinde izometri dönüşümüne sahipse bu metrik uzaya izotrop tur denir. Özel halde N boyutlu bir metrik uzayda  $N(N-1)/2$  tane

$\xi_\lambda^{(\mu\nu)}(x)$  Killing vektörünü

$$\xi_\lambda^{(\mu\nu)}(x) = -\xi_\lambda^{(\nu\mu)}(x),$$

$$\xi_\lambda^{(\mu\mu)}(x) = 0,$$

$$\xi_{\lambda;\rho}^{(\mu\nu)}(x) = \left[ \frac{\partial}{\partial x^\rho} \xi_\lambda^{(\mu\nu)}(x) \right] = \delta_\lambda^\mu \delta_\rho^\nu - \delta_\rho^\mu \delta_\lambda^\nu$$

şeklinde seçmek mümkündür.

N boyutlu bir metrik uzay maximum  $N(N+1)/2$  Killing vektörüne sahipse bu metrik uzayın maximum simetrik olduğu söylenir. Özellikle bir X noktası civarında homojen ve izotrop olan bir uzayın  $N(N+1)/2$  tane  $\xi_\lambda^{(\mu)}$ (x) ve  $\xi_\lambda^{(\mu\nu)}$ (x) Killing vektörü vardır. Bu nedenle bir nokta civarında homojen ve izotropik bir uzay, maximum simetriktir. Bunun terside doğrudur. Yani maximum simetrik bir uzayın bütün noktalar civarında homojen ve izotrop olması gereklidir.

Fakat bir çok olayda tüm uzay maximum simetrik değildir. Ancak maximum simetrik olmayan bir uzay bazı koşullarda maximum simetrik alt uzaylara ayrılabilir.

Uygun koordinat sistemleri seçilerek N boyutlu bir uzay M boyutlu maximum simetrik alt uzaylara ayrılabilir. N-M u-

zayı  $V^0$  koordinatlarıyla, M alt uzayıda  $U^i$  koordinatlarıyla ifade edildiğinde maximum simetrik alt uzaylara ayrılabilen maximum simetrik olmayan bir uzayın metriği,

$$d\zeta^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{ab}(v) dv^a dv^b + f(v) g_{ij}(u) du^i du^j$$

şeklinde yada,

$$d\zeta^2 = g_{ab} dv^a dv^b + f(v) \left\{ du^2 + \frac{k(udu)^2}{1-kU^2} \right\} \quad (2.6)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $f(v)$  pozitiftir ve  $k$

$$k = \begin{cases} +1, & \text{eğer max. sim. alt uzay } K > 0 \text{ sahipse} \\ -1, & \text{eğer max. sim. alt uzay } K < 0 \text{ sahipse} \\ 0, & \text{eğer max. sim. alt uzay } K = 0 \text{ sahipse} \end{cases}$$

değeri haizdir. Burada  $K$  alt uzayın eğrilik skaleridir.

4-Boyutlu Riemann Uzayının maximum simetrik alt uzayları ve bu alt uzaylara ait koordinatlardan bazıları şunlardır.

maximum simetrik alt uzay	U koordinatı	V koordinatı
a) Küresel simetrik uzay	r	$\theta, \phi$
b) Küresel simetrik uzay-zaman	r, t	$\theta, \phi$
c) Küresel simetrik ve homojen uzay-zaman	t	r, $\theta, \phi$

Yukarıda verilen örneklerdeki maximum simetrik alt uzaylara ait metrikler aşağıdaki şekilleri haizdirler :

a. Küresel Simetrik Uzay : Uzayın boyutu  $N = 3$  ve metriğin tüm özdeğerleri pozitiftir. Bunlardan biri V koordinatı,

(bu r ile gösterilmiştir) ikincisi ise U dur ve  $\theta$  ve  $\phi$  açılarının fonksiyonudur.

$$U^1 = \sin\theta\cos\phi \quad U^2 = \sin\theta\sin\phi$$

k = 1 olmak üzere (2.6) metriği,

$$ds^2 = g(r)dr^2 + f(r) \left\{ d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \right\}$$

olur. f(r) ve g(r), r' nin pozitif fonksiyonlarıdır.

- b. Küresel Simetrik Uzay-Zaman : Uzayın boyutu N = 4 tür ve özvektörlerinin 3-ü pozitif 1-i negatiftir. 2 boyutlu maximum simetrik alt uzaya ayrılabilir. Bu uzay pozitif eğrilikli olup pozitif özdeğerlidir. İki V koordinatı (birisi r, diğeri t), iki U koordinatı (biri  $\theta$ , diğeri  $\phi$ ) vardır. k = 1 alındığında (2.6) metriği,

$$d\tau^2 = g_{tt}(r,t) dt^2 + 2 g_{rt}(r,t) dr dt + g_{rr}(r,t) dr^2 + f(r,t) \left\{ d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2 \right\}$$

olur. Buradaki f(r,t) pozitif bir fonksiyonudur.  $g_{ij}(r,t)$  ise 2\*2 lik bir matris olup biri pozitif, diğeri negatif iki özdeğere sahiptir.

- c. Küresel Simetrik Homogen Uzay-Zaman : Uzay 4-boyutludur. Özvektörlerin üçü pozitif biri negatiftir. 3-boyutlu maximum simetrik alt uzaya ayrılabilir. Bu uzay keyfi eğriliği haizdir ve metriğin özdeğeri pozitiftir. Bir V koordinatı, üç U koordinatı olduğundan (2.6) metriği şöyle yazılabilir,

$$d\tau^2 = g(v)dV^2 + f(v) \left\{ dU^2 + \frac{k(udU)^2}{1-kU^2} \right\}$$

Burada  $f(V)$ ,  $V$  nin pozitif ve  $g(V)$  de  $V$  nin negatif fonksiyonlarıdır. Koordinatları

$$\int (-g(V))^{1/2} dV \equiv t,$$

$$U^1 = r \sin \theta \cos \phi,$$

$$U^2 = r \sin \theta \sin \phi,$$

$$U^3 = r \cos \theta$$

olmak üzere bu metrik,

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right\}$$

şeklini alır. Buradaki  $R(t) = \sqrt{f(V)}$  dir, (Weingberg, 1972, s.245).

Bu ön hazırlıklardan sonra uniform uzaylarda Einstein Alan Denklemlerinin çözümlerini irdeleyebiliriz.

Homojen ve izotrop (uniform) evren modellerinden en iyi bilinenler Schwarzschild çözümleridirler. Bu çözümler küresel simetrik bir kütle dağılımının içinde (iç çözümler) ve dışında (dış çözümler) elde edilen çözümlerdir.

### II.1.1 DIŞ SCHWARZSCHILD ÇÖZÜMLERİ

Küresel simetrisinin varlığında metrik, bundan önceki ke-  
simde yaptığımız irdellemelere göre,

$\{x^0, x^1, x^2, x^3\} \rightarrow \{t, r, \theta, \phi\}$  ye karşılık gelmek  
üzere,

$$ds^2 = e^{\nu} dt^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - e^{\lambda} dr^2 \quad (2.7)$$

şeklini alır. Buradaki  $\lambda = \lambda(r, t)$ ,  $\nu = \nu(r, t)$  dir. Sta-  
tik halde  $\lambda = \lambda(r)$ ,  $\nu = \nu(r)$  olur. Bu fonksiyonları belir-  
liyelemek için Einstein Alan denklemleri kullanılır. Bu  
 $ds^2$  yay elamanına karşılık gelen metrik tensör ve Chris-  
toffel sembolleri hesaplandıktan sonra Einstein Alan denk-  
lemlerinde yerine konulduğunda,

$$\begin{aligned} 8\pi T_1^1 &= -e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda, \\ 8\pi T_2^2 &= 8\pi T_3^3 = -e^{-\lambda} \left( \frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'-\lambda'}{2r} \right) - \Lambda, \\ 8\pi T_0^0 &= e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} - \Lambda, \end{aligned} \quad (2.8)$$

denklemleri elde edilir (buradaki  $\lambda'$  ifadesi  $\lambda'$  nin  $r$  ye göre  
türevini göstermektedir). Diğer bileşenler ise sıfırdır. Mad-  
denin dışında yani vakumda çözüm yapıldığından enerji-momen-  
tum tensörü  $T_{\nu}^{\mu} = 0$  olacaktır. Bundan dolayı bu denklemler  
aşağıdaki hale indirgenirler:

$$\begin{aligned} -e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda &= 0, \\ -e^{-\lambda} \left( \frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda'\nu'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'-\lambda'}{2r} \right) - \Lambda &= 0, \\ e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Bu üç difransiyel denklemin çözülmesiyle elde edilen  $e^{\nu}$  ve

$e^\lambda$  fonksiyonları (2.7) metriğinde yerine konulunca metrik,  
$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) dt^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}}$$
şeklini alır, (Tolman, 1966, s.243). Burada  $2m$  sabittir. Böylece küresel simetrik bir kütle dağılımının kütlenin dışında yarattığı alana ait  $g_{\mu\nu}(x^\rho)$  potansiyelleri hesaplanmış olur.

## II.1.2 İÇ SCHWARZSCHILD ÇÖZÜMÜ

İç çözümleri de dış çözümlere benzer şekilde elde edilirler. Ancak iç çözümlerde kütle dağılımı içinde  $T_{\mu\nu}$  enerji momentum tensörünün sıfır olmadığı olgusu gözönüne alınmalıdır.

Bu durumda küresel simetrik kütle dağılımı içindeki gravitasyon alanını temsil eden metriği Einstein alan denklemlerinden elde etmek öncelikle  $T_{\mu\nu}$  enerji momentum tensörünün sekline bağlıdır.

Hesapları kolaylaştırmak açısından gravitasyon alanı yaratan kütlenin bir ideal akışkan olduğunu varsayalım: Bu durumda  $T^{\mu\nu}$  enerji momentum tensörü,

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) U^\mu U^\nu - p g^{\mu\nu}$$

ifadesi haiz olacaktır. Burada  $\rho$  = makroskopik yoğunluk,  $p$  = basınç,  $U^\mu$  de 4- lü hızdır.

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) g_{\alpha\mu} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - g^{\mu\nu} p$$

elde edilir. Statik problemle çalışıldığından, akışkanın hızı için,

$$\frac{dr}{ds} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\phi}{ds} = 0 \quad \frac{dt}{ds} = e^{-\frac{1}{2}\nu}$$

elde edilir. Bu ifadeler  $T^{\mu\nu}$  ifadelesinde yerine konulduğunda,

$$T^1_1 = T^2_2 = T^3_3 = -p, \quad T^0_0 = \rho$$

elde edilir.

Bunlar yardımıyla bulunan Einstein alan denklemleri,

$$8\pi p = e^{-\lambda} \left( \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} + \Delta, \quad (2.10)$$



$$8\pi\rho = e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda, \quad (2.11)$$

$$\frac{d\rho}{dr} = - \left( \frac{\rho + p}{2} \right) \nu', \quad (2.12)$$

dirler. Bu denklemler kürenin sınırlarında basıncın sıfır olduğu ve bu sınırın iç taraflarında yoğunluğunun sabit olduğu şartlarda çözülecektir.

$\rho$  ve  $\Lambda$  nın sabit olması kabulü altında (2.11) denkleminin integrali alınır,

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{\Lambda + 8\pi\rho}{3} r^2 - \frac{C}{r}$$

elde edilir. C integrasyon sabitidir ve sıfır olarak seçilebilir. Böylece bu denklem,

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{r^2}{R^2}, \quad R^2 = \frac{3}{\Lambda + 8\pi\rho} \quad (2.13)$$

şekline indirgenmiş olur.  $\nu$  yükü bulmak için (2.12) denklemini integre edilir ( $\rho$ 'nun sabitliği göz önüne alınarak).

$$(\rho + p) = \text{sbt } e^{-\frac{1}{2}\nu}.$$

(2.10) ve (2.11) denklemleriyle verilen  $p$  ve  $\rho$  ifadeleri birleştirildiğinde,

$$e^{\frac{1}{2}\nu} e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda'}{r} + \frac{\nu'}{r} \right) = \text{sbt},$$

elde edilir. (2.13) denklemleri ile verilen  $e^{-\lambda}$  ifadeside yerine konulursa,

$$e^{\frac{1}{2}\nu} \left( \frac{2}{r^2} + \frac{\nu'}{r} - \frac{r\nu'}{R^2} \right) = \text{sbt},$$

ve bu ifade çözülürse de,

$$e^{\frac{1}{2}\nu} = A - B \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}, \quad (2.14)$$

elde edilir. Burada A ve B iki integrasyon sabitidir.

(2.13) ve (2.14) ifadeleri kullanılarak  $\rho$  sabit yoğun-

luklu akışkan bir kürenin içinde Schwarzschild çözümü için

$$ds^2 = - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 - [A - B \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}]^2 dt^2 \quad (2.15a)$$

veya  $\sin \lambda = \frac{r}{R}$  konumu yapılırsa

$$ds^2 = - R^2 (d\lambda^2 + \sin^2 \lambda d\theta^2 + \sin^2 \lambda \sin^2 \theta d\phi^2) + (A - B \cos \lambda)^2 dt^2 \quad (2.15b)$$

ifadesi elde edilir. (2.10) denkleminin yardımıyla (2.15a)

yay elamanına ait basınc,

$$8\pi p = \frac{1}{R^2} \frac{3B \sqrt{1 - r^2/R^2} - A}{A - B \sqrt{1 - r^2/R^2}} + \Lambda,$$

ile verilir.  $\Lambda$  ihmal edilirse (sadece orjinden büyük uzaklıklarda önemli olur)  $r = r_s$  kürenin sınırında, basınc sıfıra eşit olacak ve dış alan denklemi ile bu yarıçapta uyuşacaktır. Bu durumda sabitler,

$$R^2 = \frac{3}{8\pi p}, \quad A = \frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{r_s^2}{R^2}}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad m = \frac{4\pi}{3} \rho r_s^3$$

değerini alırlar, (Tolman, 1966, s.243).

## II.2 UNIFORM OLMAYAN EVREN MODELLERİ

Bölüm II.1 de sözü edilen homojen ve izotrop (uniform) evren modellerinden başka aşağıdaki teorik düşünceler nedeniyle uniform olmayan evren modelleride birçok bilim adamı tarafından incelenmiştir.

1. Homojen ve izotropik modellerdeki istatistik dalgalanmalar bugünkü gözlenen galaksilerin şeklini oluşturacak kadar yeterince hızlı çökmemektedirler. Buda inhomojenliğin evrenin tüm aşamalarında varolmasını gerektirir. Yine uniform evren modellerinin bazı pertürbasyonları, geçmişte önemli olduğu düşünülen saçılma modlarını içerir.
2. Bazı singülerlik tipleri, uygun şartlar gerçekleşirse, kuvvetli bir şekilde belirginleşirler. Ancak bunlar uniform (homojen- izotrop) modellerdekilerden oldukça farklıdır.
3. Uniform modellerde neden-sebebe ilişkisiyle açıklanamayan bölgelerden oldukça homojen mikrodalga ışınımı alınmaktadır. Filozofik olarak tatmin edici olmayan bu durum kaotik kozmoloji çerçevesinde çalışılmasını gerektirir.

Uniform olmayan evren modellerini inhomojen ve anizotropik veya homojen ve anizotropik olmak üzere iki grupta incelemek mümkündür. Bu çalışmada biz, özellikle gök cisimlerinin rotasyon yapmaları nedeniyle homojen ve anizotropik modelleri inceleyeceğiz.

## II.2.1 HOMOJEN VE ANİZOTROPİK EVREN MODELLERİ

Homojen ve anizotropik yani rotasyon yapan evren modelleri incelenirken matematiksel rahatlık nedeniyle silindirik koordinatlar kullanılır. Bunlar  $(t, \rho, \phi, z)$  dir. Bu koordinatlarda rotasyon yapan evren modelinin metriği şu şekilde verilir.

$$ds^2 = f dt^2 - 2k dt d\phi - l d\phi^2 - e^\mu (d\rho^2 + dz^2) \quad (2.16)$$

Buradaki  $f, k, l$  ve  $\mu$  ler  $\rho$  nun ve  $z$  nin fonksiyonlarıdır. Metrik tensörün kovaryant ve kontravaryant bileşenleri aşağıdaki ifadeleri haizdirler.

$$\begin{aligned} g_{00} &= f, & g_{03} &= -k, & g_{11} &= g_{22} = -e^\mu, & g_{33} &= -1, \\ g^{\rho\rho} &= D^{-2} l, & g^{\phi\phi} &= -D^{-2} k, & g^{\rho\rho} &= g^{\phi\phi} = -e^{-\mu}, & g^{\rho z} &= -D^{-2} f. \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$D^2 \equiv f l + k^2$$

Bu metrik tensör bileşenleri yardımıyla hesaplanan sıfırdan farklı  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  Christoffel sembolleri ise şunlardır :

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2} D^{-2} (l f_\rho + k k_\rho), \quad \Gamma_{02}^0 = \frac{1}{2} D^{-2} (l f_z + k k_z), \quad (2.18a)$$

$$\Gamma_{13}^0 = \frac{1}{2} D^{-2} (k l_\rho - l k_\rho), \quad \Gamma_{23}^0 = \frac{1}{2} D^{-2} (k l_z - l k_z),$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} e^{-\mu} f_\rho, \quad \Gamma_{03}^1 = -\frac{1}{2} e^{-\mu} k_\rho, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \mu_\rho, \quad (2.18b)$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} \mu_z, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} \mu_\rho, \quad \Gamma_{33}^1 = -\frac{1}{2} e^{-\mu} l_\rho,$$

$$\Gamma_{00}^2 = \frac{1}{2} e^{-\mu} f_z, \quad \Gamma_{03}^2 = -\frac{1}{2} e^{-\mu} k_z, \quad \Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2} \mu_z, \quad (2.18c)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} \mu_\rho, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} \mu_z, \quad \Gamma_{33}^2 = -\frac{1}{2} e^{-\mu} l_z,$$

$$\Gamma_{01}^3 = \frac{1}{2} D^{-2} (f k_\rho - k f_\rho), \quad \Gamma_{02}^3 = \frac{1}{2} D^{-2} (f k_z - k f_z), \quad (2.18d)$$

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{2} D^{-2} (f l_\rho + k k_\rho), \quad \Gamma_{23}^3 = \frac{1}{2} D^{-2} (f l_z + k k_z).$$

Burada  $\frac{\partial f}{\partial \rho} = f_\rho$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z} = f_z$  ...vb. ifadelerini haizdirler,

(Islam, 1985,s.21).

Bu ifadeler (1.9) denkleminde yerine konularak  $R_{\mu\nu}$  eğrilik tensörü hesaplanır. R eğrilik skaleri de hesaplandıktan sonra (1.7) Einstein Alan denkleminin sol tarafı oluşturulur. Bu denklemin sağ tarafına bir defa sıfır koyarak dış alan denklemleri, bir defa da madde dağılımının içine ait enerji-momuntum tensörü konularak ta iç alan denklemleri elde edilir.

### II.2.2 BOŞLUKTA (DIŞ) ALAN DENKLEMLERİ

$T = 0$  konularak dış alan denklemleri oluşturulur.

$(x^0, x^1, x^2, x^3) \rightarrow (t, \rho, z, \phi)$  karşılık gelmek üzere alan denklemleri,

$$2e^{\mu} D^{-1} R_{00} = (D^{-1} f_{\rho})_{\rho} + (D^{-1} f_z)_{z} + D^{-3} f (f_{\rho} l_{\rho} + f_z l_z + k_{\rho}^2 + k_z^2) = 0, \quad (2.19a)$$

$$-2e^{\mu} D^{-1} R_{03} = (D^{-1} k_{\rho})_{\rho} + (D^{-1} k_z)_{z} + D^{-2} k (f_{\rho} l_{\rho} + f_z l_z + k_{\rho}^2 + k_z^2) = 0, \quad (2.19b)$$

$$-2e^{\mu} D^{-1} R_{33} = (D^{-1} l_{\rho})_{\rho} + (D^{-1} l_z)_{z} + D^{-3} l (f_{\rho} l_{\rho} + f_z l_z + k_{\rho}^2 + k_z^2) = 0.$$

dırlar. Bu denklemler şu halde yazılabilirler:

$$e^{\mu} D^{-1} (lR_{00} - 2kR_{03} - fR_{33}) = D_{\rho\rho}^2 + D_{zz}^2 = 0. \quad (2.20)$$

Böylece D ifadesi  $\rho$  ve  $z$  değişkenlerine bağlı iki boyutlu bir Laplace denklemi oluşturur.  $\Sigma (\rho + iz)$  analitik fonksiyonun reel kısmı olarak D ifadesi, imajiner kısmı olarak ta E, ifadesi alınarak çözüme gidilir.

$$\Sigma (\rho + iz) = D(\rho, z) + iE(\rho, z) \quad (2.21)$$

Cauchy-Riemann denklemlerinden,

$$D_\rho = E_z, \quad D_z = -E_\rho \quad (2.22)$$

eşitlikleri elde edilir.  $(\rho, z)$  den  $(\bar{\rho}, \bar{z})$  ne dönüşüm yapılırsa,

$$\bar{\rho} = D(\rho, z), \quad \bar{z} = E(\rho, z) \quad (2.23)$$

elde edilir. (2.22) den dolayı da,

$$(d\bar{\rho})^2 + (d\bar{z})^2 = (D_\rho^2 + E_z^2)(d\rho^2 + dz^2) \quad (2.24)$$

elde edilir. Bu dönüşüm (2.16) metriğinde yerine konulduğunda bir değişiklik olmaz. Bu nedenle,

$$e^{\bar{\rho}} = e^\rho (D_\rho^2 + iE_z^2)^{-1} \quad (2.25)$$

ile verilen yeni bir  $\mu$  fonksiyonu tanımlanabilir. Bütün  $f, k, l, \bar{\mu}$  fonksiyonları  $(\bar{\rho}, \bar{z})$  cinsinden ifade edilebilir. Bu ifadeler  $(\bar{\rho}, \bar{z})$  cinsinden yazılıp  $(-)$ ler atıldığında  $f, k, l$  arasında aşağıdaki cebirsel denklem elde edilir:

$$D^2 = fl + k^2 = \rho^2. \quad (2.26)$$

Diğer dış alan denklemleri ise şunlardır:

$$2R_n = -\mu_{\rho\rho} - \mu_{z\bar{z}} + \bar{\rho}^{-1} \mu_\rho + \rho^{-2}(f_\rho l_\rho + k_\rho^2) = 0, \quad (2.27a)$$

$$2R_{12} = \bar{\rho}^{-1} \mu_z + \frac{1}{2} \bar{\rho}^{-1}(f_\rho l_z + f_z l_\rho + 2k_\rho k_z) = 0, \quad (2.27b)$$

$$2R_{21} = -\mu_{\rho\rho} - \mu_{z\bar{z}} - \bar{\rho}^{-1} \mu_\rho + \rho^{-2}(f_z l_z + k_z^2) = 0. \quad (2.27)$$

$k$  yerine,

$$W = f^{-1} k \quad (2.28)$$

ile tanımlanan yeni  $W$  fonksiyonu kullanılırsa denklemler basitleşir. (2.19a) ve (2.19b) de  $k$  ve  $l$  elimine edilirse

$$f(f_{\rho\rho} + f_{zz} + \bar{f}^{-1} f_{\rho}) - f_{\rho}^2 - f_z^2 + \rho^{-2} f^4 (W_{\rho}^2 + W_z^2) = 0, \quad (2.29a)$$

$$f(W_{\rho\rho} + W_{zz} - \bar{f}^{-1} W_{\rho}) + 2f_{\rho} W_{\rho} + 2f_z W_z = 0, \quad (2.29b)$$

denklemleri elde edilir. (2.27a), (2.27b) ve (2.27c) de de

$\mu_{\rho}$  ve  $\mu_z$  ler  $f$  ve  $W$  lar cinsinden yazılırsa,

$$\mu_{\rho} = -f^{-1} f_{\rho} + \frac{1}{2} f^{-2} (f_{\rho}^2 - f_z^2) - \frac{1}{2} \bar{f}^{-1} f^2 (W_{\rho}^2 - W_z^2), \quad (2.30a)$$

$$\mu_z = -f^{-1} f_z + \bar{f} f^{-2} f_{\rho} f_z - \bar{f}^{-1} f^2 W_{\rho} W_z, \quad (2.20b)$$

ifadeleri elde edilirler. (3,29a) ve (3.29b) den  $f$  ve  $W$  lar

(2.30a) ve (2.30b) dende  $\mu$  ler integrasyonla bulunarak çözüme ulaşılır, (Islam ,1975,s.25).

Newton gravitasyon teorisinde sınırlı rotasyon yapan bir kaynak için iç ve dış çözümler iyi bilinmesine rağmen Genel Relativite de uniform rotasyon yapan sıvı kütleinin içinde veya dışında Einstein denkleminin tam çözümünü bulmak son derece zordur. Bu nedenle genellikle yaklaşık çözümler aranır.

Einstein denkleminin sınırlı rotasyon yapan bir kaynağın dışındaki ilk tam çözümü Kerr tarafından yapılmıştır. Bu çözümün özelliği asimtotik olarak düz çözüm olmasıdır. Yani kaynaktan uzaklaştıkça gravitasyon alanı sifıra gider. Kerr çözümünün başka önemli bir özelliğide kaynağın açısal momentumu sifıra yaklaştığında (rotasyon olmaması) çözümün, küresel simetrik bir kaynağın dış çözümü olan Schwarzschild çözümüne gitmesidir. Küresel simetriden ayrılışa rotasyon neden olduğu için bu gerçek bir yıldız için beklenen bir so-

nuçtur. Eğer rotasyon sıfırsa küresel simetrik bir yıldız mışmış olur, (Islam,1985,s.42).

Şimdi bu çözümü ve özelliklerini ayrıntılı bir biçimde ele alalım. Bunun için önce Einstein denklemlerinin Ernst formunu elde edelim.

#### ROTASYON YAPAN ALANLAR İÇİN EINSTEIN DENKLEMLERİNİN ERNST FORMU

(2.29b) denklemini aşağıdaki şekilde yazılabilir :

$$(\rho' f^2 W_\rho)_\rho + (\rho' f^2 W_z)_z = 0 \quad (2.31)$$

U fonksiyonu,

$$U_\rho = -\rho' f^2 W_z, \quad U_z = \rho' f^2 W_\rho \quad (2.32)$$

şeklinde seçilerek (2.29) f ve U lar cinsinden,

$$f \nabla^2 U - f_\rho^2 - f_z^2 + \mu_\rho^2 + \mu_z^2 = 0 \quad (2.33a)$$

şeklinde ifade edilebilir. (2.31) de W kısaltılırsa,

$$f \nabla^2 U = 2f_\rho U_\rho + 2f_z U_z \quad (2.33b)$$

elde edilir.

f ve U cinsinden (2.30a) ve (2.30b) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mu_\rho' = \frac{1}{2} \rho f^{-2} (f_\rho^2 - f_z^2) + \frac{1}{2} \rho f^{-2} (U_\rho^2 - U_z^2), \quad (2.34a)$$

$$\mu_z' = \rho f^{-2} f_\rho f_z + \rho f^{-2} \mu_\rho \mu_z \quad (2.34b)$$

buradaki  $\mu' = \mu + \log f$  dir.

$$E = f + iU \quad (2.35)$$

ifadesi yeni kompleks büyüklük olmak üzere (2.30a) ve

(2.30b) denklemleri bu ifadenin reel ve imajiner kısmı ola-



rak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$(\text{Re}E) \nabla^2 E = E_p^2 + E_z^2. \quad (2.36)$$

$\text{Re}E$ ,  $E$  nin reel kısmıdır.  $E$  yerine aşağıdaki dönüşümle  $\xi$  fonksiyonu kullanırsa (burada  $\xi$  kompleks değerli bir fonksiyonudur),

$$E = \frac{\xi^{-1}}{\xi+1}. \quad (2.37)$$

(2.36) denklemi,

$$(\xi \xi^* - 1) \nabla^2 \xi = 2 \xi^* (\xi_p^2 + \xi_z^2), \quad (2.38)$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradaki  $\xi^*$ ,  $\xi$  nin kompleks eşleniğidir. ( $\rho, z$ ) değişkenlerinden  $x$  ve  $y$  koordinatlarına geçildiğinde,

$$\rho = \sqrt{(x^2-1)} \sqrt{(1-y^2)}, \quad z = xy \quad \text{den} \quad (2.39)$$

$$x = \frac{1}{2} (R^{(+)} + R^{(-)}), \quad y = \frac{1}{2} (R^{(+)} - R^{(-)}), \quad (2.40)$$

$$R^{(\pm)} = \sqrt{[\rho^2 + (z \pm 1)]} \quad (2.41)$$

elde edilir. (2.38) de  $x$  ve  $y$  cinsinden yazılırsa,

$$\begin{aligned} & (\xi \xi^* - 1) [(x^2-1) \xi_{xx} + 2x \xi_x + (1-y^2) \xi_{yy} - 2y \xi_y] = \\ & 2 \xi^* [(x^2-1) \xi_x^2 + (1-y^2) \xi_y^2] \end{aligned} \quad (2.42)$$

ifadesi elde edilir. Denklem (2.38) ve (2.42), (2.29a) ve (2.29b) Einstein denkleminin Ernst formudur. (2.32) ve (2.34a) ve (2.34b) denklemleri  $x$  ve  $y$  değişkenleri cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilirler:

$$W_x = (1-y^2) f^{-2} U_y, \quad W_y = (1-x^2) f^{-2} U_x, \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \mu_y^1 = & \frac{(1-y^2) f^{-2}}{2(x^2-y^2)} [x(x^2-1)(f_x^2 + U_x^2 + x(y^2-1)(f_y^2 + U_y^2)) - \\ & 2y(x^2-1)(f_x f_y + U_x U_y)], \end{aligned} \quad (2.44a)$$

$$\mu'_y = \frac{(x^2-1)f^{-2}}{2(x^2-y^2)} [y(x^2-1)(f_x^2+u_x^2) - y(1-y^2)(f_y^2+u_y^2) + 2x(1-y^2)(f_x f_y + u_x u_y)]. \quad (2.44b)$$

(Islam, 1985, s.43).

### II.2.3 KERR ÇÖZÜMÜ

(2.42) Ernst denkleminin basit bir çözümü Kerr çözümüdür. ve

$$\xi = px - iqy \quad (2.45)$$

ifadesini haizdir. Burada p ve q lar  $p^2+q^2=1$  şartını sağlayan sabitlerdir. (2.35), (2.37), ve (2.45) den yararlanarak,

$$f = \frac{p^2x^2 + q^2y^2 - 1}{(px+1)^2 + q^2y^2}, \quad u = -\frac{2qy}{(px+1)^2 + q^2y^2}, \quad (2.46)$$

(2.43) den ve (2.46) dan yararlanılarak ta,

$$W = \frac{2qp^{-1}(1-y^2)(px+1)}{p^2x^2 + q^2y^2 - 1} + W_0, \quad (2.47)$$

ifadesi elde edilir. Burada W sabittir. (2.44a) ve (2.44b) denklemlerinden,

$$e^{\mu'} = \frac{A \cdot (x^2 + p^2 + q^2y^2 - 1)^2}{x^2 - y^2} \quad (2.48)$$

bulunur. Burada A keyfi bir sabittir. (2.48) denkleminde

ve  $\mu'$  nün  $e^{\mu'} = fe^{\mu}$  şeklindeki tanımından

$$e^{\mu} = \frac{A[(px+1)^2 + q^2y^2]}{x^2 - y^2}$$

ifadesine geçilir.

$$px+1 = pr, \quad y = \cos\theta \quad (2.49)$$

olmak üzere p ve q lara M ve a sabitleri karşılık gelir:

$$p^{-1} = m, \quad p^{-1}q = a, \quad m^2 - a^2 = 1. \quad (2.50)$$

Kerr çözümünde m kütleli, ma ise açısai momentumu gös-

terir. Kerr metriğini Boyer ve Lindquist koordinatlarıyla vermek için  $f, k(=fW), e^{\mu}$  leri  $r$  ler ve  $\theta$  lar cinsinden yazmak gerekir. (2.39), (2.49) ve (2.50) denklemlerinin kullanılmasıyla  $(\rho, z)$ ,  $r$  ve  $\theta$  cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\rho = \sqrt{(r^2 - 2mr + a^2)} \sin\theta, \quad z = (r - m)\cos\theta \quad (2.51)$$

(2.49)-(2.51) denklemlerinin kullanılmasıyla  $e^{\mu}$  de,

$$e^{\mu} = \frac{A}{m^2} \frac{r^2 + a^2 \cos^2\theta}{(r - m)^2 + (a^2 - m^2) \cos^2\theta} \quad (2.52)$$

şeklinde yazılabilir.

(2.26), (2.46), (2.47) ve (2.51) denklemlerinin kullanılmasıyla Kerr çözümü Boyer ve Lindquist koordinatları cinsinden,

$$ds^2 = (1 - 2mr\Sigma_1^{-1})dt^2 - 4amr\sin^2\theta \Sigma_1^{-1}d\phi dt - (2ma^2r\sin^2\theta \Sigma_1^{-1} + r^2 + a^2) \sin^2\theta d\phi^2 - \Sigma_1(\Sigma_2^{-1}dr^2 + d\theta^2), \quad (2.53)$$

olarak elde edilir. Burada  $\Sigma_1 \equiv r^2 + a^2 \cos^2\theta$ ,  $\Sigma_2 \equiv (r^2 - 2mr + a^2)$  dir.

Büyük  $r$  değerleri için (2.53) metriği,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{1/2} dr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - \frac{4am\sin^2\theta}{r} d\phi dt \quad (2.54)$$

haline indirgenir. Eger  $a = 0$  olursa (açısal momentum olmadığı durum) kaynak rotasyon yapmaz, bundan dolayı da (2.53) metriği Schwarzschild metriğine indirgenir.

(2.53) metriğinin metrik bileşenleri,

$$g^{\infty} = (\Sigma_1, \Sigma_2)^{-1} [(r^2 + a^2)^2 - \Sigma_1 a^2 \sin^2\theta],$$

$$g^{11} = -\Sigma_1^{-1} \Sigma_2, \quad g^{22} = -\Sigma_1^{-1}, \quad (2.55)$$

$$g^{33} = -(\Sigma_1 \Sigma_2 \sin^2 \theta) (\Sigma_1^{-1} - 2mr), \quad g^{03} = (\Sigma_1 \Sigma_2^{-1}) (2mar).$$

değerlerini haizdirler.



#### II.2.4 ROTASYON YAPAN EVREN İÇİN EINSTEIN ALAN DENKLEMLERİ

Rotasyon yapan evren için Einstein alan denklemlerini, madde dağılımının bir toz olduğu kabulü altında incelemek istiyoruz. Bunun için madde dağılımının içine ait enerji-momentum tensörünü bilmek gerekir. II.2.1 kesiminde belirtildiği gibi bir ideal akışkan için enerji-momentum tensörü

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p)U^\mu U^\nu - pg^{\mu\nu}, \quad (2.56)$$

idi. Basınç sıfır olduğunda kütle enerji yoğunluğu sadece parçacıkların yoğunluğunu içerecektir.  $m$  parçacıkların kütlesi,  $n$  parçacıkların sayısı olmak üzere parçacık yoğunluğu  $m.n$  olacaktır. Bundan dolayı inkohorent bir madde için enerji momentum tensörü

$$T^{\mu\nu} = mnU^\mu U^\nu, \quad (2.57)$$

ifadesine indirgenir. Bu durumda Einstein Alan Denklemleri,

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = 8\pi mnU^\mu U^\nu, \quad (2.58)$$

halini alır. Her iki tarafın diverjansını aldığımızda sol tarafın diverjansı sıfır olduğundan (2.58) ifadesi aşağıdaki hale indirgenir:

$$(n U^\mu U^\nu)_{;\nu} = (nU^\nu)_{;\nu} U^\mu + nU^\mu_{;\nu} U^\nu = 0. \quad (2.59)$$

Maddenin korunumundan  $(nU^\nu)_{;\nu} = 0$  olacaktır.  $U^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$  idi.

Bunlar göz önüne alındığında (2.59) denklemi

$$U^\mu_{;\nu} U^\nu = \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} = 0, \quad (2.60)$$

ifadesine dönüşür. Bu ifade ise toz parçacıklarının izlediği geodezik denklemdir. Rotasyon yapan tozun 4-lü hız e-

lamanları ise

$$U^0 = \frac{dt}{ds} = (f-2\Omega k-\Omega^2 l)^{1/2}, \quad U^1 = \frac{d\rho}{ds} = 0, \quad (2.61)$$

$$U^2 = \frac{dz}{ds} = 0, \quad U^3 = \frac{d\phi}{ds} = \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{ds} = \Omega U^0,$$

dır.  $\Omega = \Omega(\rho, z)$  açısal hızdır ve toz z eksenini etrafında bu açısal hızla rotasyon yapar. Toz parçacığının bu esnada sadece  $\phi$  koordinatları değişir ( $\rho$  ve  $z$  sabit kalır, bundan dolayı  $U_1 = U_2 = 0$ ,  $\frac{d\phi}{dt} = \Omega$  dır).

(2.58) denklemi

$$R_{\mu\nu} = 8\pi m n (U_\mu U_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}), \quad (2.62)$$

biçiminde yazılarak ve (2.16) metriği de göz önüne alınarak

iç alan denklemleri için

$$2e^\mu D^{-1} R_{00} = (D^{-1} f_\rho)_\rho + (D^{-1} f_z)_z + D^{-3} f \Sigma = 8\pi m n D^{-1} e^\mu (f-2\Omega k-\Omega^2 l)^{-1} * [2\Omega k(-f+\Omega k) + f(f+\Omega^2 l)], \quad (2.63a)$$

$$-2e^\mu D^{-1} R_{03} = (D^{-1} k_\rho)_\rho + (D^{-1} k_z)_z + D^{-3} k \Sigma = 8\pi m n D^{-1} e^\mu (f-2\Omega k-\Omega^2 l)^{-1} * (f l + 2\Omega f l - \Omega^2 k l), \quad (2.63b)$$

$$-2e^\mu D^{-1} R_{33} = (D^{-1} l_\rho)_\rho + (D^{-1} l_z)_z + D^{-3} l \Sigma = -8\pi m n D^{-1} e^\mu (f-2\Omega k-\Omega^2 l)^{-1} * (f l + 2k^2 - 2\Omega k l + \Omega^2 l^2), \quad (2.63c)$$

$$D^{-2} = f l + k^2 \text{ ve } \Sigma \equiv f_\rho l_\rho + f_z l_z + k_\rho^2 + k_z^2,$$

ifadeleri elde edilir. Bu üç denklem

$$e^\mu D^{-1} (1R_{00} - 2kR_{03} - fR_{33}) = D_{\rho\rho} + D_{zz} = 0,$$

şeklinde tek bir denklem olarak yazılabilir. Ayrıca (2.60)

denkleminde

$$f_\rho - 2\Omega k_\rho - \Omega^2 l_\rho = 0, \quad (2.64a)$$

$$f_z - 2\Omega k_z - \Omega^2 l_z = 0, \quad (2.64b)$$

ifadeleri de elde edilirler.

Şimdiye kadarki denklemlerde  $\Omega = \Omega(\rho, z)$  idi ve diferensiyel dönme geçerliydi.  $\Omega$  Sabit seçildiğinde katı dönme geçilebilir. Bunun için şu dönüşümler yapılır :

$$L = l \quad , \quad K = k + \Omega l \quad , \quad F = f - 2\Omega k - \Omega^2 l \quad . \quad (2.65)$$

(2.65a), (2.65b) ve (2.65c) birleştirildiğinde aşağıdaki 2 denklemler elde edilir:

$$\begin{aligned} -2e^{\mu} \rho^1 k [(k + \Omega l) R_{\infty} + (f + \Omega^2 l) R_{\infty 3} + \Omega(f - \Omega k) R_{33}] &= [\frac{1}{\rho} (FK_{\rho} - K_{\rho}^2)]_{\rho} \\ + [\frac{1}{\rho} (FK_z - K_z^2)]_z &= 0 \quad , \quad (2.66a) \end{aligned}$$

$$L_{\rho\rho} + L_{zz} - \frac{1}{\rho} L_{\rho} + \rho^{-2} L \Sigma = 8\pi m n e F^{-1} (-FL - 2K^2) \quad . \quad (2.66b)$$

Burada  $\Sigma = F_{\rho} L_{\rho} + K_{\rho}^2 + F_z L_z + K_z^2$  dir.

Denklemler (2.66a) ve (2.66b) de  $\Omega = \text{sabit}$  konulursa

$$f - 2\Omega k - \Omega^2 l = F = \text{sabit} = F_0 \quad , \quad (2.67)$$

elde edilir. Bu nedenle denklemler (2.66a) dan da,

$$\Delta K \equiv K_{\rho\rho} + K_{zz} - \frac{1}{\rho} K_{\rho} = 0 \quad , \quad (2.68)$$

elde edilir. Bu denklemin çözümünü veren fonksiyon ise,

$$K = \alpha \xi \quad , \quad \Delta \xi = 0 \quad , \quad \xi = \rho \eta_{\rho} \quad , \quad (2.69)$$

dir. Buradaki  $\eta$  ,  $\nabla^2 \eta = \eta_{\rho\rho} + \eta_{zz} + \rho^{-1} \eta_{\rho} = 0$  denklemini sağlayan harmonik bir fonksiyondur.  $\alpha$  ise keyfi bir sabittir ve-

gerektiğinde  $\xi$  nin tanımında kullanılmayabilir. Bu nedenle

(2.66b) denklemleri de,

$$\Delta L + \alpha^2 \rho^{-2} L (\xi_{\rho}^2 + \xi_z^2) = 8\pi m n (-L - \alpha^2 F_0^{-1} \xi^2) e^{\mu} \quad (2.70)$$

haline gelir. Diğer yandan,

$$L = F^{-1} (\rho^2 - K^2) = F_0^{-1} (\rho^2 - \alpha^2 \xi^2) \quad (2.71)$$

dir ve bu da,

$$\Delta L = -2F_3^{-1} \alpha^2 (\xi_p^2 + \xi_z^2), \quad (2.72)$$

olmasını gerektirir.

(2.71) ve (2.72) denklemleri (2.70) de yerine konulursa,

$$8\pi mn = \alpha^2 \bar{f}^2 (\xi_p^2 + \xi_z^2) e^{-t} \quad (2.73)$$

denklemine indirgenir. Buradanda n sayı yoğunluğu,  $\xi$  ve  $\mu$  lerin bir fonksiyonu olarak elde edilir.

$\mu$  fonksiyonu F,K,L ve n cinsinden aşağıdaki denklemlerle verilir:

$$-e^{\mu} R_1' = -\frac{1}{2}(\mu_{pp} + \mu_{zz}) + \frac{1}{2} \bar{f}^{-1} \mu_p + \frac{1}{2} \bar{f}^{-2} (F_p L_p + K_p^2) = 4\pi m n e^{\mu}, \quad (2.74a)$$

$$-e^{\mu} R_2' = \frac{1}{2}(\mu_{pp} + \mu_{zz}) - \frac{1}{2} \bar{f}^{-1} \mu_p + \frac{1}{2} \bar{f}^{-2} (F_z L_z + K_z^2) = 4\pi m n e^{\mu}, \quad (2.74b)$$

$$R_{12} = \frac{1}{2} \mu_z + \frac{1}{4} \bar{f}^{-2} (F_p L_z + F_z L_p + 2K_p K_z) = 0. \quad (2.74c)$$

(2.74a) ve (2.74b) den,

$$\mu_p = \frac{1}{2} \bar{f}^{-1} (F_z L_z + K_z^2 - F_p L_p - K_p^2) \quad (2.75)$$

elde edilir. (2.67), (2.69), (2.72), (2.74c) ve (2.75) denklemlerinden de  $\mu$  için,

$$\mu_p = \frac{1}{2} \bar{f}^{-1} \alpha^2 (\xi_z^2 - \xi_p^2), \quad \mu_z = -\alpha^2 \bar{f}^{-1} \xi_p \xi_z \quad (2.76)$$

cifti elde edilir. Bunlar ise  $\Delta \xi = 0$  şartını sağlarlar. Böylece (2.67), (2.69), (2.70), (2.72), (2.73) ve (2.76) denklemleri,  $\Delta \xi = 0$  koşulunu sağlayan  $\xi$  fonksiyonu cinsinden bir tam çözüm sınıfı oluştururlar.

Katı rotasyon yapan toz için böyle çözümler Van Stockum tarafından yapılmıştır, (Islam, 1985, s.53).



### II.2.5 VAN STOCKUM ÇÖZÜMÜ

Van stockum,  $z$  den bağımsız olarak (2.69) denklemindeki  $\xi$  fonksiyonunu katı rotasyon yapan bir toz silindir durumuna uygulamıştır.  $\Delta\xi = 0$  şartını sağlayan  $\xi$  yi şöyle elde etmiştir:

$$\xi = a\rho^2 + \xi_0 \quad (2.77)$$

Burada  $a$  ve  $\xi_0$  sabitlerdir. (2.77) den elde edilen bu çözümler silindirik simetrik dış çözümlerle sınırlarda uyumaktadır.

İç çözümler ( $\rho = \rho_0$  silindirin yüzeyini gösterir)  $\rho < \rho_0$  için aşağıdaki gibi bulunmuştur :

$$\begin{aligned} F &= 1 \quad , \quad K = \alpha \rho^2 \quad , \quad L = \rho^2(1 - \alpha^2 \rho^2) \quad , \quad e^\mu = e^{-\alpha^2 \rho^2} \\ n &= (2\pi)^{-1} \alpha^2 e^{-\alpha^2 \rho^2} \quad . \end{aligned} \quad (2.78)$$

$K$  fonksiyonu (2.77) de  $a = 1$  alınmasıyla (2.71) den;  $L$ , (2.72) den ;  $\mu$  ise (2,76)'nın ilk denkleminin integrasyonundan elde edilmiştir.

Bu çözümler  $\rho = \rho_0$  da dış çözümlerle uyumaktadır. Yani metrik tensör bileşenleri ve onların türevleri  $\rho = \rho_0$  sınırlarında tümüyle süreklidir, (Islam,1985,s.57).

### III. SONUÇ

Rotasyon yapan bir kaynağın dış alan denklemlerinin ilk tam çözümünü veren Kerr'dir. Kerr çözümü rotasyon yapan bir karaçukurun yapısını da açıklar. Ayrıca Kerr çözümünde alanı meydana getiren kaynağın açısal momentumu sıfıra yaklaştığında çözüm küresel simetrik bir kaynağın dış alanını gösteren Schwarzschild çözümüne indirgenir. Bu sonuç gerçek yıldız için beklenen durumdur. Küresel simetriden ayrılışa rotasyon neden olduğundan rotasyon sıfırsa küresel simetrik yıldız elde edilir.

Einstein alan denklemlerinin bir iç çözümünün bir dış çözümle sınırlarda uyuşması gerekir. Fiziksel iç çözümler son derece azdır. Bilinen iç çözümlerden biri Van Stockum çözümleridir. Van Stockum çözümleri, katı rotasyon yapan nötral toz için eksensel simetrik iç çözümlerdir ve bu çözümler sınırlarda dış çözümlerle uyusurlar. Rotasyon yapan küresel simetrik kütle dağılımlarının kütleinin içinde ve dışında yarattığı gravitasyonel potansiyelleri veren bu çözümler, rotasyon yapmayan gök cisimi modellerine nazaran daha gerçekçi modeldirler ve asıl önemleride buradan gelmektedir.

---

Yüksek lisans öğrenimimin her aşamasında ve bu çalışmada bana değerli önerileriyle yardımcı olan sayın tez hocam Prof.Dr. İlhami Yavuz'a içtenlikle teşekkür ederim.

#### IV. ÖZET

Model yapmanın nedeni, evrenin geometrisini ve kütle dağılımını teorik olarak bulup bu modelleri gözlemlerle karşılaştırarak evrenin yapısını en iyi yansıtan modeli tespit etmektir.

Relativistik bazda evrenin geometrisini ve kütle dağılımını bulmak için Einstein denklemi

$$R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R = -\kappa T_{\mu\nu} ,$$

kullanılır. Bu diferansiyel denklemler elde edildikten sonra çözüm aranır. Fakat bu denklemleri doğrudan çözmek güçtür. Bu nedenle uzaya bazı simetriler (gözlemlerle desteklenen) getirilmiştir. Simetriye göre en basit ayırım uniform ve uniform olmayan evren modelleridirler.

Evreni büyük ölçekte homojen ve izotrop kabul ederek küresel ve merkezci simetrik bir kütle dağılımı varsayımıyla Einstein denkleminin iç ve dış çözümleri ilk defa Schwarzschild tarafından elde edilmiştir. Böyle bir alanın metriği kısaca

$$ds^2 = e^{\gamma} dt^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - e^{\lambda} dr^2,$$

ile verilir.

Uniform olmayan (rotasyon yapan) modellerde ise metrik,

$$ds^2 = f dt^2 - 2k dt d\phi - l d\phi^2 - e^H (d\rho^2 + dz^2)$$

ifadesini haizdir. Bu metriğin dış çözümü Kerr tarafından iç çözümü de Van Stockum tarafından verilmiştir (Kütle da-

gılımı için bazı varsayımlar yapılarak).

#### SUMMARY

The reason of modelling is to find the geometry and the mass distribution of universe teoritically. The comparing of those models whit observations would help to choose the best model representing the real universe.

In the relativistic base, to find the geometry of the universe and the distribution of mass, the Einstein equation

$$R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} R = -\lambda T_{\mu\nu}$$

is used. After obtaining those differational equations, the solution is searched. But solving those equations directly is diffucult. For this reason , some symetries which is supported by observations is brought into space. The simplest classification depending of symetry are uniform and non-uniform space model.

Assuming homogen and izotropic universe in a large scale and a centrally symetric mass distribution, the interior and exterior solution of Einstein Equation is obtained firstly by Schwarzschild.

Such a metric can be shortly by the following

$$ds^2 = e^{\nu} dt^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - e^{\lambda} dr^2.$$

So the non-uniform models have this,

$$ds^2 = f dt^2 - 2k dt d\phi - l d\phi^2 - e^N (d\rho^2 + dz^2).$$

The exterior solution of this metric is given by Kerr and the interior solution by Van Stockum who assumed approximation for mass distribution.



## V. LİTERATÜR

- DEMIANSKI, M. , 1985, Relativistik Astrophysics, Böl.1,S.1
- HAWKING,S.W. AND ISRAEL,W. ,1979, General Relativity and  
Einstein Centenary Survey, Böl.11,S.536
- İSLAM,J.N. , 1985, Rotating Field in General Relativity,  
Böl.1,S.21 ; Böl.2,S.25 ; Böl.3,S.43 ; Böl.4,  
S.53 ve S.57
- LANDAU, L.D. AND LIFSHITZ E.M. ,1975, The Classical Theory  
of Fields ,Böl.4,S.79 ve s.85
- MISNER,C.W. ,THORNE,K. ,WHEELER,J.A. ,1973, Gravitasyon,  
Böl.6 ,S.713
- RICHARD,P.I. ,1959, Manual of Mathematical Physics, Böl.4,  
S.111
- TOLMAN ,R.C. ,1966, Relativity Thermodynamics and Cosmology,  
Böl.7, S.245
- WEINBERG,S. ,1972, Gravitation and Cosmology, Böl.13,S.375  
ve S.401