YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BÜZÜLME YOLUYLA $GL_h(2|1)$ KUANTUM SÜPER GRUBU

Matematikçi Meltem ARIKAN

FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Salih ÇELİK (YTÜ)

İSTANBUL, 2010

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ

$K\{x,y,\theta\}$	Serbest cebir
I_h	$(\ldots)$ ile oluşturulan $K\{x,y,\theta\}$ serbest cebirinin iki taraflı ideali
$K_h[x,y,\theta]=K\{x,y,\theta\}/I_h$	Bölüm Cebiri: Kuantum süper uzay
$K_h^*[\psi,\varphi,z]$	Kuantum süper uzayın duali
$GL_h(2\|1)$	Kuantum süper grubu
$D_h(T)$	T 'nin kuantum süper determinantı
$\otimes$	Tensör çarpım
$\dot{\otimes}$	Matris-tensörel çarpım
$[\ ]$	Lie parantezi
Δ	Ko-çarpım operatörü
ε	Ko-birim operatörü
S	Ko-ters operatörü

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasında, tez konumu belirleyip, yardımlarını esirgemeyen ve beni yönlendirerek ufkumun açılmasını sağlayan saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr.Salih ÇELİK'e teşekkürlerimi sunarım. Bununla birlikte, öğrenim sürem boyunca desteğini esirgemeyen TÜBİTAK' a ve her zaman yanımda olan aileme, arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

ÖZET

Bu çalışmada, singüler bir g matrisi ile Manin tarafından verilen (2+1)-boyutlu süper uzayın q-deformasyonu kullanılarak, onun h-deformasyonu olarak adlandıracağımız yeni bir kuantum h-süper uzay elde edilmiş ve bu uzaya etki eden tersi mevcut süper matrislerin oluşturduğu $GL_h(2|1)$ kuantum süper grubunun yapısı ortaya konmuştur. Bir $T \in GL_h(2|1)$ süper matrisinin matris elemanları arasında sağlanan komutasyon bağıntıları hesaplanmıştır. Matrisin süper tersinin matris elemanları arasında sağlanan bağıntılar, (9×9) tipinde yeni bulunan bir R matrisi yardımıyla elde edilmiştir. Kuantum süper matrisi T'nin h-süper determinantı hesaplanmıştır. $GL_h(2|1)$ süper grubun Hopf cebir yapısı elde edilmiş ve çalışma T süper matrisinin Gauss ayrışımı yapılıp, oluşan matrislerin(alt üçgensel, köşegen ve üst üçgensel), matris elemanları arasındaki bağıntılar bulunarak bitirilmiştir.

Anahtar kelimeler: q-deformasyon, Gauss ayrışımı, Kuantum h-süper uzay, h-deformasyon, R matris yaklaşımı.

ABSTRACT

In this work, a new quantum h-superspace is obtained with a singular g matrix, using (2+1)-dimensional q-deformed superspace, and structure of quantum super group $GL_h(2|1)$ which is formed by inversible super matrices that effect this space, is produced. For a $T \in GL_h(2|1)$ super matrix, commutation relations between matrix elements is calculated. Relations between elements of super-inverse matrix , is obtained by using new found (9×9) type R matrix. h-super determinant of quantum super matrix T , is calculated. Hopf algebra structure of super group $GL_h(2|1)$ is formed and work is finalized, by Gauss decomposition of T super matrix is acquired and commutation relations between matrix elements are found(lower-triangular, diagonal, upper-triangular).

Keywords: q-deformation, Gauss decomposition, Quantum h-superspace, h-deformation, R matrix method.

1. GİRİŞ

Grup kavramının bir genelleştirilmesi olan kuantum grupları; matematikte ve teorik fizikte önemli yer tutar. Entegre edilebilir sistemlerin ele alınmasıyla değişmeli olmayan Hopf cebirlerinin bir sınıfı elde edilir. Bu Hopf cebirleri, bilinen klasik grupların q-deforme fonksiyonlarının cebiridir. İşte klasik grupların bu q-deforme yapısına kuantum grubu denir. Farklı bir ifadeyle; bir kuantum grubu, deformesi olduğu grup ile deformasyon parametresinin özel değerleri için özdeşleşir.

İlk olarak Drinfeld (1985) ve Jimbo (1985)' nun bağımsız olarak yaptıkları çalışmalarda şekillenen kuantum grupları, bir q parametresine bağlı Hopf Cebirleri(Abe 1977) olarak ortaya çıkmıştır. Geniş olarak bakılırsa; Drinfeld, iki ranklı bir kuantum grubunu oluştururken $SL(2)$ özel lineer grubunun Lie cebirinden hareketle, deformasyon parametresi olarak adlandırılacak olan bir $q=e^{-\tau}$ kompleks sayısıyla SL(2)'deki bir matrisin matris elemanlarını birer koordinat fonksiyonu olarak düşünerek onlar arasında sağlanan bağıntıları örneğin $ab=-q^{-1}ba$ vb. şeklinde ortaya koymuştur. Görüldüğü üzere; matris elemanları ancak q un özel değer(ler)i için değişmeli olacaktır. Sonra Faddeev (1987) bu konuyu Lie grup ve Lie cebiri teorisine sistematik bir şekilde adapte etmiştir. Woronowicz (1987) ve Manin (1988) bu konuya farklı yorumlar getirmiştir.

Manin, bir kuantum matris grubunu elde ederken, grubun elemanlarını uygun bir uzaya etki ettirmiş ve elemanları q parametresine bağlı bağıntıları sağlayan bu uzaya; Kuantum (Süper) Uzayları adını vermiştir.

Diğer yandan, Jordanian deformasyonu olarak bilinen klasik grupların h-deformasyonu da vardır. Aghamohammadi vd (1995) düzlemin q-deformasyonundan hareketle, bir singüler g matrisini kullanarak singularity (benzerlik) transformasyonu yardımıyla h-deformasyonuna geçiş yapmışlardır.

Bu çalışmamızda, temel kavramlar başlığı altında verilen ikinci bölümde, tezin ilerleyen kısımlarında kullanacağımız bazı tanımlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Kuantum h-süper uzayına, Manin'in(1987) yaptığı q-deformasyon tanımı kullanılarak geçilmiştir. Bu geçiş, daha önce kullanılmamış olan ve singülerliği sağlayan uygun bir g matrisi ile yapılmıştır. Böylece yeni bir h-deformasyonu elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, tezin önemli kısmını oluşturan $GL_h(2|1)$ Kuantum süper grubunun yapısı oluşturulmuştur. Süper grubun elemanı olan bir T süper matrisinin elemanları arasında sağlanan bağıntılar elde edilmiştir. $T \in GL_h(2|1)$ süper matrisinin, süper tersinin matris elemanları arasındaki bağıntılar bulunarak, $T^{-1} \in GL_{-h}(2|1)$ olduğu görülmüştür. Daha sonra ise $sD_h(T) = ABC^{-1}$ eşitliğinden h-süper determinantı hesaplanmıştır.

Beşinci bölümde, $GL_h(2|1)$ Kuantum süper grubunun Hopf cebir yapısı ortaya konmuştur.

Son kısım olan altıncı bölümde ise, T süper matrisinin Gauss ayrışımı yapılmış ve matrisimiz; alt üçgensel, köşegen ve üst üçgensel matris olmak üzere üç matris şeklinde yazılıp, bu matrislerin matris elemanları arasındaki komutasyon bağıntıları elde edilmiştir.

2.TEMEL KAVRAMLAR

Tezde kullanacağımız bazı temel kavramları, bu bölümde tanımlayacağız.

2.1 Tanım: H boş olmayan bir küme ve $*$, bu küme üzerinde tanımlanmış bir ikili işlem olsun. Eğer aşağıdaki üç aksiyomu sağlıyorsa, H kümesine $*$ işlemine göre bir grup denir ve (H, $*$) ile gösterilir.

$*$: HxH $\rightarrow$ H , (x,y)$\rightarrow$(x$*$y)

(i) $*$ işlemi kapalı yani $\forall\, x, y \in$ H için $(x*y) \in$ H dir.

(ii) $*$ işlemi birleşmeli yani $\forall\, x, y, z \in$ H için $(x * (y*z)) = ((x*y) * z)$ dir.

(iii) Birim eleman: $\forall\, x \in$ H için;

$(e*x) = x = (x*e)$

olacak şekilde bir e $\in$ H elemanı vardır.

(iv) Ters eleman: $\forall\, x \in$ H için;

$(x * x') = (x' * x) = e$

olacak şekilde bir $x' \in$H elemanı vardır.
Eğer (i) ve (ii) aksiyomları sağlanıyorsa, (H, $*$) yapısına bir yarı grup denir. Eğer $\forall\, x, y \in$ H için $(x*y) = (y*x)$ ise (H, $*$) grubuna abel grup ya da değişmeli grup denir.
2.2 Tanım: H kümesi üzerinde $*$ ve $\circ$ işlemlerini tanımlayalım;

(i) (H, $\circ$) değişmeli bir grup,

(ii) Her $x, y, z \in$H için;

$x*(y*z) = (x*y)*z$,

(iii) Her $x, y, z \in$H için;

$x*(y\circ z) = x*y\circ x*z$ ve $(x\circ y)*z = x*z\circ y*z$,

(iv) Her $x \in$H için $x*1 = 1*x$ olacak şekilde $1\in$H elemanı vardır,

Özellikleri sağlandığı takdirde; (H, $*$, $\circ$) sistemine bir halka denir, Her $x, y \in$H iken $x*y = y*x$ oluyorsa H' ye değişmeli bir halka denir.

2.3 Tanım: $(G,+,.)$ yapısı bir halka ve $(G,+)$ grubunun birim elemanı 0 olsun. Bir G cismi, her bir $a\neq 0$ elemanı için, $a^{-1}.a=1$ denklemini gerçekleyecek şekilde bir a^{-1} ters elemanını içeren değişmeli bir halkadır.

Aşağıda verilen aksiyomlar sağlanıyorsa $(G,+,.)$ sistemi bir cisimdir:

(i) $(G,+)$ yapısı değişmeli gruptur.

(ii) Her $x,y,z\in G$ için,

$x.(y+z)=x.y+x.z$,

(iii) $(G-\{0\},.)$ yapısı değişmeli gruptur.

2.4 Tanım: U ve V ; K cismi üzerinde birer vektör uzayı olsunlar;

$T:U\to V$ tasviri,

her $u^1,u^2\in U$ ve $x,y\in K$ için,

$T(xu^1+yu^2)=xT(u^1)+yT(u^2)$ şartını sağlıyorsa, lineer tasvir adını alır.

2.5 Tanım : U,V ve W; K cimi üzerinde birer vektör uzayı olmak üzere,

$u^1,u^2\in U$; $v^1,v^2\in V$ ve $\alpha,\beta\in K$ için,

(i) $\psi(\alpha u^1+\beta u^2,v^1)=\alpha\psi(u^1,v^1)+\beta\psi(u^2,v^1)$,

(ii) $\psi(u^1,\alpha v^1+\beta v^2)=\alpha\psi(u^1,v^1)+\beta\psi(u^1,v^2)$,

$\psi:U\times V\to W$ tasviri yukarıdaki iki şartı sağlıyorsa ψ ’ye bi-lineer tasvir denir.

U ve V ’yi sırasıyla m ve n-boyutlu birer vektör uzayları olarak kabul edelim;

$\left\{\overrightarrow{u^i}\right\}_{i=1}^{m}$,U ’nun ve $\left\{\overrightarrow{v^j}\right\}_{j=1}^{n}$,V ’nin taban elemanlarının kümesidir, bu takdirde $1\le i\le m$ ve $1\le j\le n$ olmak üzere mn tane (i,j) indisi mevcut olduğundan bu indis çiftleri W da ki bir $\left\{\overrightarrow{w^{ij}}\right\}_{i=1,j=1}^{m,n}$ tabanını indislemek için kullanılabilir. Böyle yapınca;

$\psi:U\times V\to W$ tasvirini,

$\vec{x}=x_i\overrightarrow{u^i}$ ve $\vec{y}=y_j\overrightarrow{v^j}$ olmak üzere

$\psi(\vec{x},\vec{y})=x_iy_j\overrightarrow{w^{ij}}$ şeklinde tanımlarız. Aşikar olarak ψ bir bi-lineer tasvirdir ve $\psi(U,V)\subseteq W$ kümesi, $\left\{\overrightarrow{w^{ij}}\right\}$ tabanını ihtiva eder, böylelikle ψ,W uzayını gerer.

Sonuç olarak söyleyebiliriz ki; U ve V iki vektör uzayı olmak üzere bir W vektör uzayı için aşağıdaki iki şart sağlanırsa W'ya, U ve V uzaylarının tensör çarpımı denir ve $U\otimes V$ şeklinde gösterilir.

(i) $\psi(U\times V)$, W'yu gerer.

(ii) $\varphi: U\times V\to W'$ herhangi bir lineer tasvir ise $\varphi=\Phi\circ\psi$ olacak şekilde bir

$\Phi: W\to W'$ lineer tasviri mevcuttur.

2.6 Tanım : $T_1:U_1\to V_1$, $T_2:U_2\to V_2$ birer lineer tasvir olsunlar. Bu durumda,

$F:U_1\otimes U_2\to V_1\otimes V_2,\quad F(u_1\otimes u_2)=T_1(u_1)\otimes T_2(u_2),\quad u_1\in U_1,\ u_2\in U_2$

şeklinde tanımlanan bir lineer tasvir mevcuttur . Buradaki F'ye T_1 ve T_2'nin tensör çarpımı denir ve $F=T_1\otimes T_2$ ile gösterilir.

2.7 Tanım: L, bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere;

$[,]:L\times L\to L$ bi-lineer tasviri aşağıdaki özellikleri sağlarsa; L'ye bir Lie cebiri denir.

Her $x,y,z\in L$ ve $a,b\in K$ için;

(i) $[ax+by,z]=a[x,z]+b[y,z]$ ve $[x,ay+bz]=a[x,y]+b[x,z]$ (bi-lineerlik)

(ii) $[x,y]=-[y,x]$ (anti-simetri)

(iii) $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$ (jacobi özdeşliği)

2.8 Tanım: H bir grup ve K bir cisim olmak üzere, H'den K' ya olan tasvirlerin kümesi;

$\mathcal{A}=Map(H,K)=\{f\mid f:H\to K\}$ olsun. Eğer $\mathcal{A}$ kümesi aşağıdaki aksiyomları sağlıyor ise, $\mathcal{A}$'ya bir K-cebiri denir:

$f,g\in\mathcal{A},\ \alpha\in K,\ x\in H$

(i) $(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$,

(ii) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$,

(iii) $(fg)(x)=f(x)g(x)$.

Eğer bir lineer $T:A\to A$ tasviri

$T(f.g) = T(f).T(g)$

Eşitliğini sağlarsa, T'ye bir lineer homomorfizm veya cebir homomorfizmi denir.

K-cebirini genel olarak aşağıdaki şekilde tanımlayacağız. Bir cebir, iki adet lineer tasvir ile birlikte bir K-vektör uzayı olarak düşünülür:

$m : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \quad m(a \otimes b) = a.b$ (2.1)

η: K→ $\mathcal{A}$ η(k)=k.I

Burada I, $\mathcal{A}$' nın birim elemanıdır. Bu tasvirler için

$m \circ (\mathrm{id} \otimes m) = m \circ (m \otimes \mathrm{id})$ (Ass)

$m \circ (\mathrm{id} \otimes \eta) = m \circ (\eta \otimes \mathrm{id})$ (Uni)

özellikleri geçerlidir. (Ass) aksiyomu, *m çarpma* tasvirinin asosyatifliğini ifade ederken, (Uni) aksiyomu, η (1) 'in $\mathcal{A}$ 'nın hem sağ hem de sol birim elamanı olduğunu ifade etmektedir.

Böylece ortaya çıkan ($\mathcal{A}$,*m*,η) üçlüsüne bir cebir denir.

Eğer $\mathcal{A}$ = *Map*(*H* ,K) ve $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ = *Map*($H \times H$,K) olduğu kabul edilirse, H deki işlemi kullanarak aşağıdaki lineer homomorfizmleri tanımlayabiliriz:

Her $x, y \in H$ için;

$\Delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, $\Delta f(x \otimes y) = f(x.y)$,

$\varepsilon : \mathcal{A} \rightarrow$ K, $\varepsilon(f) = f(e)$

Burada *e*, H nin birim elemanıdır. Δ'ya cebirin bir ko-çarpması ve ε tasvirine de cebirin ko-birimi denmektedir. Δ ve ε cebir homomorfizmleri, sırasıyla *m* ve *η* tasvirleri için verilen (Ass) ve (Uni) özelliklerine (denklem (2.1)) dual olan özelliklere sahiptir. Yani,

$(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta$ (coass)

$m \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = m \circ (\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta$ (counit) (2.2)

dır. Genel olarak, K üzerindeki bir lineer $\mathcal{A}$ uzayına, yukarıda tanımlanan *m*,η,Δ K-lineer tasvirleriyle birlikte bir K-ko-cebir (kısaca ko-cebir) ve $\mathcal{A}$ lineer uzayına *m*,η,Δ,ε K-lineer tasvirleriyle birlikte bir K-bicebir (kısaca bicebir) denir. Ek olarak, $f \in \mathcal{A}$, $x \in H$ için

$S : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, $Sf(x) = f(x^{-1})$

şeklinde tanımlanan ve

$$m \circ (S \otimes id) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon = m \circ (id \otimes S) \circ \Delta \qquad (2.3)$$

özelliğini sağlayan bir S cebir anti-homomorfizm ile ($\mathcal{A}$, m,η,Δ,ε , S) altılısına bir Hopf cebiri denir(Abe,1977). Bundan sonra, kısalığı bakımından bir Hopf cebiri için, ($\mathcal{A}$,m,η,Δ,ε , S) altılısını değil sadece $\mathcal{A}$ kullanılacaktır.

3. 3D-SÜPER UZAYIN BİR h-DEFORMASYONU

Bu kısımda, başlangıç olarak Aghamohammadi vd.(1995) tarafından kuantum düzlem için yapılana benzer bir singüler benzerlik tranformasyonu kullanarak; süper uzayın deforme yapısı elde edilecektir.

3.1. $K_q[x',y',\theta']$ Cebiri

$K\{x,y,\theta\}$, bir serbest cebir olsun. Buradaki x ve y nin birer çift eleman, θ nın da bir tek eleman olduğu kabul edilmektedir. Tek ve çift koordinat fonksiyonlarının özelliği; çift koordinat fonksiyonları, tüm fonksiyonlarla komutatif ; tek koordinat fonksiyonları ise tek olan fonksiyonlarla anti-komutatif, çift olanlarla komutatif olacaktır:

1) $x\theta=\theta x$ ve $\theta_1\theta_2=-\theta_2\theta_1$

2) θ koordinat fonksiyonu tek ise;

$\theta^2=0$ ‘dır.

Manin(1987), kuantum süper uzayı, $q\neq 0$ bir kompleks sayı olmak üzere, x' ve y' çift, θ' tek koordinat fonksiyonları ve,

$$\begin{aligned} x'y' &= qy'x' \\ x'\theta' &= q\theta'x' \\ y'\theta' &= q\theta'y' \\ \theta'^2 &= 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

komutasyon bağıntıları ile tanımlanmıştır. Biz, kuantum süper uzayı; I_q, $x'y'-qy'x'$, $x'\theta'-q\theta'x'$, $y'\theta'-q\theta'y'$, θ'^2 elemanları ile oluşturulmuş $K\{x',y',\theta'\}$ serbest cebirinin iki taraflı ideali olmak üzere $K_q[x',y',\theta']=K\{x',y',\theta'\}/I_q$ bölüm cebiri olarak tanımlıyoruz. Cebirin dualini de $K_q^*[\psi',\varphi',z']$ ile gösterirsek, ψ', φ' tek ve z' çift koordinat fonksiyonları arasındaki komutasyon bağıntıları;

$$\begin{aligned} \psi'\varphi' &= -q^{-1}\varphi'\psi' \\ \psi'z' &= q^{-1}z'\psi' \\ \varphi'z' &= q^{-1}z'\varphi' \\ \varphi'^2 &= 0 \\ \psi'^2 &= 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

şeklindedir. (3.1) ve (3.2) de belirtilen komutasyon bağıntılarından yararlanarak $K_{q,h}\left[x,y,\theta\right]$ ve onun duali olan $K_{q,h}^{*}\left[\psi,\varphi,z\right]$ cebirinin jeneratörleri arasındaki komutasyon bağıntılarını elde edeceğiz.

Belirtmek gerekir ki; q-deforme yapıları $x^{'},y^{'},\theta^{'}$ şeklinde üslü olarak, h-deforme yapıları ise x,y,θ olarak göstereceğiz. (3.1) komutasyon bağıntılarından görüleceği üzere, $q\to 1$ limitinde üç boyutlu klasik süper uzaya döneriz.

Amacımız, (q,h)-deforme yapıyı elde etmek olduğundan tersi olan uygun bir g matrisi bulalım:

A,B,C,D; h ve q parametrelerini içeren, $q\to 1$ limitinde tanımlı olmayan kompleks sayılar olmak üzere,

$$g=\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ B & 1 & 0 \\ C & D & 1 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Harflendirdiğimiz bu matrisin elemanlarını, h ve/veya q cinsinden elde etmek amacıyla;

$$X^{'}=gX \tag{3.4}$$

transformasyonunu tanımlayalım:

$$\begin{pmatrix} x^{'} \\ y^{'} \\ \theta^{'} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ B & 1 & 0 \\ C & D & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix}$$

$X^{'}$ nün bileşenleri, (3.1) ile verilen q-deforme bağıntıları sağlamaktadır, X in bileşenlerinin ise, (q,h)-deforme bağıntıları sağlamasını bekliyoruz. (3.4) deki eşitlik açık yazılırsa,

$$x'=Ax$$

$$y'=Bx+y$$

$$\theta^{'}=Cx+Dy+\theta \tag{3.5}$$

elde edilir. Dikkat edilmelidir ki; tek koordinat fonksiyonu oluşundan dolayı $\theta^{'}$ nün eşitliğinden C ve D sayılarının tek oldukları görülür. A ve B sayıları ise çifttir. (3.5)deki $x^{'}$, $y^{'}$, $\theta^{'}$ nü (3.1) komutasyon bağıntılarında kullanırsak, örneğin ; $0 = x'y' - qy'x'$

$$0 = Ax(Bx+y) - q(Bx+y)Ax$$

$$0 = AxBx + Axy - qBxAx - qyAx$$

$$0 = ABx^2 - qBAx^2 + Axy - qAyx$$

$$0 = AB(1-q)x^2 + A(xy - qyx)$$ elde edilir.

Diğerleri de kullanılırsa,

1) $0 = AB(1-q)x^2 + A(xy - qyx)$

2) $0 = AC(1-q)x^2 + AD(xy - qyx) + A(x\theta - q\theta x)$

3) $0 = BC(1-q)x^2 + BD(xy - qyx) + B(x\theta - q\theta x) + C(yx - qxy) + D(1-q)y^2 + y\theta - q\theta y$

4) $0 = C^2x^2 + D^2y^2 + \theta^2 + CD(xy - yx) + C(x\theta - \theta x) + D(y\theta - \theta y)$

olup, işlemlerin neticesinde A, B, C, D sayıları bulunur. Birçok uygun matris bulunabilir. Biz, daha önce yapılan bir çalışmada alınan g matrisinden de farklı olarak;

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{h}{q-1} & 1 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

matrisini kullanacağız. Buna göre (3.5) eşitlikleri;

$$x' = x$$

$$y' = y$$

$$\theta' = \frac{h}{q-1}y + \theta \tag{3.7}$$

şeklini alır.

Aynı şekilde cebirin dualinin yapısını bulmak için, (3.4) transformasyonunu kullanırsak;

$$\begin{pmatrix} \psi' \\ \varphi' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{h}{q-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

eşitliğinden,

$$\psi' = \psi$$

$$\varphi' = \varphi$$

$$z' = \frac{h}{q-1}\varphi + z \tag{3.9}$$

elde edilir.

3.2 Kuantum Süper Uzay Ve Dualinin (q,h)-Deforme Yapısı

Yukarıda bir g matrisi yardımıyla, $K_q[x', y', \theta']$ cebirinin jeneratörleri yeni jeneratörler olan x, y ve θ cinsinden (3.7) de ortaya konmuştur. Burada amaç, (3.1) bağıntılarını kullanarak $K_{q,h}[x, y, \theta]$ cebirini ve yeni jeneratörler arasında sağlanan komutasyon bağıntılarını ortaya koymaktır. (3.1) deki bağıntılar, sırasıyla kullanıldığında,

1) $0 = x'y' - qy'x'$

$$0 = xy - qyx$$

2) $0 = x'\theta' - q\theta'x'$

$$0 = x(\frac{h}{q-1}y + \theta) - q(\frac{h}{q-1}y + \theta)x$$

$$0 = \frac{h}{q-1}xy + x\theta - q\frac{h}{q-1}yx - q\theta x$$

$$0 = x\theta - q\theta x$$

3) $0 = y'\theta' - q\theta'y'$

$$0 = y(\frac{h}{q-1}y+\theta) - q(\frac{h}{q-1}y+\theta)y$$

$$0 = \frac{h}{q-1}y^2 + y\theta - q\frac{h}{q-1}y^2 - q\theta y$$

$$0 = y\theta - q\theta y - hy^2$$

4) $0 = \theta'^2$

$$0 = (\frac{h}{q-1}y+\theta)(\frac{h}{q-1}y+\theta)$$

$$0 = \left(\frac{h}{q-1}\right)^2 y^2 + \frac{h}{q-1}y\theta + \theta\frac{h}{q-1}y + \theta^2$$

olur. Burada değinilmesi gereken nokta, y elemanı çift olduğundan h sayısı ile komutatif olacaktır, fakat θ elemanı ile h nin komutatif ya da anti-komutatif olacağını bilemediğimizden h ile θ yer değiştirirken $(-1)^{\hat{h}}$ yazarız.

İfademizi şu şekilde düzenleyelim,

$$0 = \left(\left(\frac{h}{q-1}\right)^2 + \frac{h^2}{q-1}\right)y^2 + (q+(-1)^{\hat{h}})\frac{h}{q-1}\theta y + \theta^2$$

görüyoruz ki h sayımız tek olmalıdır o zaman $h^2 = 0$ olur. h bir Grassmann sayısıdır.

$$0 = (q-1)\frac{h}{q-1}\theta y + \theta^2$$

$$0 = \theta^2 + h\theta y$$

Netice itibariyle, $K_{q,h}\left[x, y, \theta\right]$ cebirinin jeneratörler arasında sağlanan komutasyon bağıntıları,

$$xy = qyx$$

$$x\theta = q\theta x$$

$$y\theta = q\theta y + hy^2 \tag{3.10}$$

$$\theta^2 = -h\theta y$$

olacaktır. Cebirin dualinin bağıntıları da; cebirin bağıntıları bulunurken yapıldığı gibi (3.9) eşitlikleri, (3.2) bağıntılarında kullanılarak elde edilir. Gerekli işlemler yapıldığında,

$$\psi\varphi = -q^{-1}\varphi\psi$$

$$\psi z = q^{-1} z\psi$$

$$\varphi z = q^{-1} z\varphi$$

$$\varphi^2 = 0 \quad , \quad \psi^2 = 0 \qquad (3.11)$$

bulunur. Elde edilen bu bağıntılarda $q \to 1$ limitini kullanarak $K_h[x, y, \theta]$ ve duali olan $K_h^*[\psi, \varphi, z]$ cebirine ulaşmış olacağız.

3.3 $K_h[x, y, \theta]$ Cebiri

Önceki kısımda elde ettiğimiz (3.10) ve (3.11) bağıntılarında $q \to 1$ iken limit alırsak, amacımız olan h-deforme bağıntılarını elde ederiz.

$$xy = yx$$

$$x\theta = \theta x$$

$$y\theta = \theta y + hy^2$$

$$\theta^2 = -h\theta y \qquad (3.12)$$

3.3.1 Tanım: $K\{x, y, \theta\}$, bir serbest cebir ve I_h, onun $xy - yx$, $x\theta - \theta x$, $y\theta - \theta y - hy^2$, $\theta^2 + h\theta y$ elemanları ile oluşturulmuş iki taraflı ideali olsun. $K_h[x, y, \theta]$ kuantum süper uzayı $K\{x, y, \theta\}/I_h$ bölüm cebiri olarak tanımlanır.

$K_h^*[\psi, \varphi, z]$ ile gösterilen dualinin deforme bağıntıları ise;

$$\psi\varphi = -\varphi\psi$$

$$\psi z = z\psi$$

$$\varphi z = z\varphi$$

$$\varphi^2 = 0 \quad , \quad \psi^2 = 0 \qquad (3.13)$$

şeklindedir.

$K_h\left[x, y, \theta\right]$ kuantum süper uzayının diferensiyel geometrisini elde etmekte mümkün görünmektedir. Bu bir sonraki çalışmada ele alınacaktır.

4. $GL_h(2|1)$ SÜPER GRUBU

A, herhangi bir cebir olmak üzere $M_{2|1}(A)$ ile elemanları A dan alınan $(2+1)\times(2+1)$-matrislerin cebirini gösterelim. Bir küme olarak $M_{2|1}(A)$, A nın q-katlısının A^q kümesi ile bijeksiyondadır ve $M(2|1)$, $k[a,b,c,d,e;\alpha,\beta,\gamma,\delta]$ polinom cebiri olarak tanımlanmış olmak üzere, herhangi bir (anti-)komutatif A cebiri için bir doğal,

$$Hom_{\mathrm{Alg}}(M(2|1),A)\cong M_{2|1}(A)$$

bijeksiyonu mevcuttur. Bu bijeksiyon, bir $f:M(2|1)\to A$ cebir morfizmini

$$\begin{pmatrix} f(a) & f(b) & f(\alpha) \\ f(c) & f(d) & f(\beta) \\ f(\gamma) & f(\delta) & f(e) \end{pmatrix}$$

matrisine tasvir eder.

Şimdi, $M_{2|1}(A)$ matris cebirindeki tersi mevcut matrislerin grubunu düşünelim. Bu grubu $GL_{2|1}(A)$ ile göstereceğiz. Bilindiği üzere, eğer A cebiri komutatif ise, bir matrisin tersinin mevcut olması için gerek ve yeter şart, onun determinantının A da tersinin mevcut olmasıdır:

$$GL_{2|1}(A)=\left\{\ T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \alpha_1 \\ a_{21} & a_{22} & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & a_{33} \end{pmatrix}\in M_{2|1}(A): sDet(T)\neq 0\ \right\}$$

4.1 Tanım: $GL(2|1)$ (anti-)komutatif cebiri, $M(2|1)[t]/(sDet(T)t-1)$ bölüm cebiri olarak tanımlanır.

Not olarak, herhangi bir komutatif A cebiri için, $Hom_{\mathrm{Alg}}(GL(2|1),A)\cong GL_{2|1}(A)$ bijeksiyonu mevcuttur ki o, bir f cebir morfizmini

$$\begin{pmatrix} f(a) & f(b) & f(\alpha) \\ f(c) & f(d) & f(\beta) \\ f(\gamma) & f(\delta) & f(e) \end{pmatrix}$$

matrisine tasvir eder.

Bu bölümde, öncelikle $GL_h(2|1)$ kuantum süper grubundaki bir süper matrisin, matris elemanları arasında sağlanan h-(anti-)komutasyon bağıntıları; üçüncü bölümde bulunan (3.12) ve (3.13) de verilen h-deforme bağıntıları yardımıyla elde edilecek. Daha sonra bir süper matrisin, süper tersini ve süper determinantını elde edip, grubun yapısını ortaya koyacağız.

4.1 Matris Elemanları Arasında Sağlanan h-Deforme Bağıntılar

Bu kısımda, 3×3-tipindeki süper matrislerin elemanı olduğu $GL(2|1)$ süper grubunun tek parametreli deformasyonu yapılacaktır.

$GL(2|1)$ süper grubundaki bir T süper matrisinin matris elemanlarının 5 tanesi çift ve 4 tanesi de tektir, latin harfler çift elemanları ve grek harfler tek elemanları göstermek üzere,

$$T=\begin{pmatrix} a & b & \alpha \\ c & d & \beta \\ \gamma & \delta & e \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

şeklinde sıralanmaktadır. Yine doğal yapısı itibariyle çift elemanlar her şeyle komutatif iken, tek elemanlar kendi aralarında anti-komutatiftir ve kareleri sıfırdır. Bu kısımda amacımız, bu T matrisinin matris elemanları arasında sağlanan h-deforme bağıntıları elde etmektir. Ancak önce, bazı kabuller yapmamız gerekecektir.

Kabul edelim ki, T matrisin çift matris elemanları $K_h\left[x,y,\theta\right]$ ve $K_h^*\left[\psi,\varphi,z\right]$ süper cebirlerinin elemanları ile komutatif, fakat T matrisinin tek matris elemanları süper cebirlerin tek olan elemanları ile anti-komutatiftir.

Klasik teoriden bilinir ki, $GL(2|1)$ in bir elemanı bir lineer transformasyon olarak $R(2|1)$ süper uzayına etki ettiğinde, yine bu uzayın bir elemanını verir. Bu durumu, sembolik olarak,

$$T: R(2|1)\to R(2|1) \quad , \quad TX=\hat{X}$$

şeklinde yazarız. Kuantum teoride de durum aynıdır. Eğer $X=(x,y,\theta)^t$ dersek, X in bileşenleri (3.12) bağıntılarını sağladığında

$$\hat{X}=TX \tag{4.2}$$

eşitliğinin bileşenleri de (3.12) bağıntılarını sağlayacaktır. Benzer şekilde, eğer $\tilde{X}=(\psi,\varphi,z)$ dersek, $\tilde{X}$ nın bileşenleri (3.13) bağıntılarını sağladığında

$$\tilde{\tilde{X}} = T\tilde{X} \tag{4.3}$$

eşitliğinin bileşenleri de (3.13) bağıntılarını sağlar.

Bu iki gerçeği kullanarak, birçok işlem yaptıktan sonra T süper matrisinin matris elemanları arasındaki sağlanan komutasyon bağıntıları,

$ab = ba$ $\qquad$ $ac = ca$

$ad = da$ $\qquad$ $ae = ea$

$a\alpha = \alpha a$ $\qquad$ $a\beta = \beta a$

$a\gamma = \gamma a$ $\qquad$ $a\delta = \delta a$

$bc = cb$ $\qquad$ $bd = db + h(b\beta - d\alpha)$

$be = eb - he\alpha$ $\qquad$ $b\alpha = \alpha b$

$b\beta = \beta b + h\beta\alpha$ $\qquad$ $b\gamma = \gamma b$

$b\delta = \delta b + h(\delta\alpha - be)$ $\qquad$ $cd = dc$

$ce = ec + h\beta c$ $\qquad$ $c\alpha = \alpha c$

$c\beta = \beta c$ $\qquad$ $c\gamma = \gamma c + hc^2$

$c\delta = \delta c + hdc$ $\qquad$ $de = ed + h\beta(d - e)$

$d\alpha = \alpha d - h\beta\alpha$ $\qquad$ $d\beta = \beta d$

$d\gamma = \gamma d + hdc$ $\qquad$ $d\delta = \delta d + h(\delta\beta - de + d^2)$

$e\alpha = \alpha e$ $\qquad$ $e\beta = \beta e$

$e\gamma = \gamma e + h(ec + \gamma\beta)$ $\qquad$ $e\delta = \delta e + h(ed + \delta\beta - e^2)$

$\alpha\beta = -\beta\alpha$ $\qquad$ $\alpha\gamma = -\gamma\alpha$

$\alpha\delta = -\delta\alpha + h\alpha e$ $\qquad$ $\beta\gamma = -\gamma\beta - h\beta c$

$\beta\delta = -\delta\beta + h\beta(e - d)$ $\qquad$ $\gamma\delta = -\delta\gamma - h(\delta c + \gamma d)$

$\alpha^2 = 0$ $\qquad$ $\beta^2 = 0$

$$\gamma^2 = -h\gamma c \qquad \delta^2 = h\delta(e-d) \tag{4.4}$$

olarak bulunur. Yukarıda elde edilen (4.4) bağıntılarını süper tensör çarpım kurallarından yararlanarak bir R matrisi ile de bulabiliriz. Not olarak, $h \to 0$ iken her şey klasik duruma dönmektedir. Aizawa, N. ve Chakrabarti, R. (2004)' nin makalesinde (4.1) de verilen T süper matrisinden farklı olarak alınan bir süper matrisle yapılan işlemler neticesinde, (4.4) de verilen bağıntılardan farklı olan bağıntılar bulunmuştur ve makalede, bu çalışmada alınanın aksine h deformasyon parametresi tek değildir yani $h^2 \neq 0$ dır.

4.2 Kapalılık Özelliği

Matris elemanları (4.4) şeklindeki bağıntıları sağlayan iki kuantum süper matris T_1 ve T_2 olsun. Amacımız, matris çarpımı işleminin korunduğunu yani T_1T_2 matrisinin matris elemanlarının da (4.4) şeklindeki bağıntıları sağladığını göstermektir. T_1 matrisinin çift elemanları ile T_2 matrisinin tüm elemanlarının komutatif; T_1 matrisinin tek elemanları ile T_2 matrisinin çift elemanlarının komutatif, tek elemanlarının ise anti-komutatif olduğu kabul edilmektedir. Bu kabuller altında, T_1T_2 nin matris elemanları

$$T^i_j = (T_1)^i_k (T_2)^k_j$$

şeklinde olup, uzunca işlemler yapılarak (4.4) bağıntılarının sağlandığı görülebilir.

4.3 Kuantum Süper Matrisin Süper Tersi

Bu kısımda, T süper matrisinin süper tersinin matris elemanları arasındaki bağıntıları elde edeceğiz ancak süper tersini açık olarak vermeyeceğiz. (Zira, ters matrisin matris elemanları, son derece uzun işlemler yapılarak bulunmakta ve hepsi de çok uzun formüllerle verilmektedir). Bununla birlikte, ters matrisin matris elemanları arasında sağlanan h-deforme bağıntıları

$$R_h T_1 T_2 = T_2 T_1 R_h \tag{4.5}$$

şeklindeki kuantum grup bağıntısı kullanılarak elde edilecektir.

Eğer A ve B iki süper matris ise, bu matrislerin (süper) tensör-matris çarpımları aşağıda verilen şekildedir:

$A = (A^i_j)$ ve $B = (B^i_j)$ olarak alalım. Bu durumda, $A \otimes B$ nin matris elemanları,

$$(A \otimes B)^{ij}_{kl} = (-1)^{k(j+l)} A^i_k B^j_l \tag{4.6}$$

şeklinde olur. $(-1)^{k(j+l)}$ ifadesi B matrisinin tek olan elemanları için dikkate alınacaktır.

$$T_1 = T \otimes I \tag{4.7}$$

olsun. Tanımlanan bu T_1 matrisinin elemanlarını (4.8) de verilen tensör çarpımına göre şekillendirdiğimizde,

$$(T_1)_{kl}^{ij} = (T \otimes I)_{kl}^{ij} = (-1)^{k(j+l)} T_k^i \delta_l^j = T_k^i \delta_l^j \tag{4.8}$$

bulunur. Aynı şekilde bir,

$$T_2 = I \otimes T \tag{4.9}$$

tanımladığımızda, T_2 nin matris elemanları,

$$(T_2)_{kl}^{ij} = (I \otimes T)_{kl}^{ij} = (-1)^{k(j+l)} T_l^j \delta_k^i \tag{4.10}$$

olur. Bu tanımlamalar altında, T_1 ve T_2 matrislerinin açık şekli şöyle olacaktır:

$$T_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & b & 0 & 0 & \alpha \\ c & 0 & 0 & d & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & d & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & d & 0 & 0 & \beta \\ \gamma & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & e \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} a & b & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & d & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \delta & e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & d & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & \delta & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & d & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma & -\delta & e \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

R_h matrisini ise, bir $K \in End(C \otimes C)$ matrisi yardımıyla süper cebirin koordinat fonksiyonları ile diferensiyellerinin arasındaki komutasyon bağıntılarının bulunmasından yola çıkarak aşağıdaki gibi

$$R_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -h & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h & 0 & h & 1 \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

elde ettik.

Şimdi (4.5) bağıntısı ile biraz oynayarak

$$T_2^{-1}T_1^{-1}R_h^{-1} = R_h^{-1}T_1^{-1}T_2^{-1} \tag{4.14}$$

yazalım. Burada,

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} K & L & \Lambda \\ M & N & \Omega \\ \Gamma & \Pi & E \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

dir. Dolayısıyla T_1^{-1} ve T_2^{-1} matrislerine ihtiyacımız var ki onlar

$$T_1^{-1} = \begin{pmatrix} K & 0 & 0 & L & 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 & 0 & L & 0 & 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & K & 0 & 0 & L & 0 & 0 & \Lambda \\ M & 0 & 0 & N & 0 & 0 & \Omega & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 & N & 0 & 0 & \Omega & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 & 0 & N & 0 & 0 & \Omega \\ \Gamma & 0 & 0 & \Pi & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma & 0 & 0 & \Pi & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma & 0 & 0 & \Pi & 0 & 0 & E \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

ve

$$T_2^{-1}=\begin{pmatrix} K & L & \Lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M & N & \Omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma & \Pi & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K & L & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M & N & \Omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma & \Pi & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K & L & -\Lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M & N & -\Omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Gamma & -\Pi & E \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

şeklindedir. R_h^{-1} matrisi de basit işlemlerle

$$R_h^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -h & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -h & 0 & -h & 1 \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

olarak bulunur.

Elde ettiğimiz bu matrislerimizi (4.18) de kullanırsak, uzun işlemlerin ardından,

$KL = LK$ $\qquad$ $KM = MK$

$KN = NK$ $\qquad$ $KE = EK$

$K\Lambda = \Lambda K$ $\qquad$ $K\Omega = \Omega K$

$K\Gamma = \Gamma K$ $\qquad$ $K\Pi = \Pi K$

$LM = ML$ $\qquad$ $LN = NL - h(L\Omega - N\Lambda)$

$LE = EL + hE\Lambda$ $\qquad$ $L\Lambda = \Lambda L$

$L\Omega = \Omega L - h\Omega\Lambda$ $\qquad$ $L\Gamma = \Gamma L$

$L\Pi = \Pi L - h(\Pi\Lambda - LE)$ $\qquad$ $MN = NM$

$ME = EM - h\Omega M$ $\qquad$ $M\Lambda = \Lambda M$

$$M\Omega = \Omega M \qquad M\Gamma = \Gamma M - hM^2$$

$$M\Pi = \Pi M - hNM \qquad NE = EN - h\Omega(N - E)$$

$$N\Lambda = \Lambda N + h\Omega\Lambda \qquad N\Omega = \Omega N$$

$$N\Gamma = \Gamma N - hNM \qquad N\Pi = \Pi N - h(\Pi\Omega - NE + N^2)$$

$$E\Lambda = \Lambda E \qquad E\Omega = \Omega E$$

$$E\Gamma = \Gamma E - h(EM + \Gamma\Omega) \qquad E\Pi = \Pi E - h(EN + \Pi\Omega - E^2)$$

$$\Lambda\Omega = -\Omega\Lambda \qquad \Lambda\Gamma = -\Gamma\Lambda$$

$$\Lambda\Pi = -\Pi\Lambda - h\Lambda E \qquad \Omega\Gamma = -\Gamma\Omega + h\Omega M$$

$$\Omega\Pi = -\Pi\Omega - h\Omega(E - N) \qquad \Gamma\Pi = -\Pi\Gamma + h(\Pi M + \Gamma N)$$

$$\Lambda^2 = 0 \qquad \Omega^2 = 0$$

$$\Gamma^2 = h\Gamma M \qquad \Pi^2 = -h\Pi(E - N) \tag{4.19}$$

komutasyon bağıntıları elde edilir.

4.4 Kuantum Süper Matrisin Süper Determinantı

Matris elemanları (4.4) bağıntılarını sağlayan T süper matrisinin süper determinantı

$$A = a, \qquad B = d - ca^{-1}b, \qquad C = e - \gamma a^{-1}\alpha - (\delta - \gamma a^{-1}b)(d - ca^{-1}b)^{-1}(\beta - ca^{-1}\alpha) \tag{4.20}$$

olmak üzere

$$sD_h(T) = ABC^{-1} \tag{4.21}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Berezin ,1987). Açık olarak

$$sD_h(T) = ABC^{-1}$$

$$= a\ (d - ca^{-1}b)\ \left\{e - \gamma a^{-1}\alpha - (\delta - \gamma a^{-1}b)(d - ca^{-1}b)^{-1}(\beta - ca^{-1}\alpha)\right\}^{-1}$$

$$= a.(d - ca^{-1}b)\ \left\{(e - \gamma a^{-1}\alpha)(1 - (e - \gamma a^{-1}\alpha)^{-1}(\delta - \gamma a^{-1}b)(d - ca^{-1}b)^{-1}(\beta - ca^{-1}\alpha))\right\}^{-1}$$

$$= a.(d - ca^{-1}b)\ \left\{(1 - (e - \gamma a^{-1}\alpha)^{-1}(\delta - \gamma a^{-1}b)(d - ca^{-1}b)^{-1}(\beta - ca^{-1}\alpha)\right\}^{-1}(e - \gamma a^{-1}\alpha)^{-1}$$

$$= a.(d - ca^{-1}b)\left\{1 + (e^{-1} + e^{-1}\gamma a^{-1}\alpha e^{-1})(\delta - \gamma a^{-1}b)(d - ca^{-1}b)^{-1}(\beta - ca^{-1}\alpha) + ...\right\}(e^{-1} + e^{-1}\gamma a^{-1}\alpha e^{-1})$$
$$= a.(d - ca^{-1}b)\left\{1 + (e^{-1} + e^{-1}\gamma a^{-1}\alpha e^{-1})(\beta - ca^{-1}\alpha)(\gamma a^{-1}b - \delta + h(ca^{-1}b + e - d + \gamma a^{-1}\alpha))(d - ca^{-1}b)^{-1}\right\}$$
$$.(e^{-1} + e^{-1}\gamma a^{-1}\alpha e^{-1})$$

$$= \left\{a.(d - ca^{-1}b) + a.(d - ca^{-1}b)(e^{-1}\beta + e^{-1}\gamma a^{-1}\alpha e^{-1}\beta - e^{-1}ca^{-1}\alpha).\right.$$
$$\left. .(\gamma a^{-1}b - \delta + h(ca^{-1}b + e - d + \gamma a^{-1}\alpha))(d - ca^{-1}b)^{-1}\right\}.(e^{-1} + e^{-1}\gamma a^{-1}\alpha e^{-1})$$

$$= \left\{a.(d - ca^{-1}b) + a.(e^{-1}\beta + e^{-1}\gamma a^{-1}\alpha e^{-1}\beta - e^{-1}ca^{-1}\alpha).\right.$$

$$\left..\left[(\gamma a^{-1}b - \delta + 2h(ca^{-1}b + e - d + \gamma a^{-1}\alpha))(d - ca^{-1}b) + h(\beta - ca^{-1}\alpha)(\delta + \gamma a^{-1}b)\right](d - ca^{-1}b)^{-1}\right\}$$

$$.(e^{-1} + e^{-1}\gamma a^{-1}\alpha e^{-1})$$

$$= \left\{a.(d - ca^{-1}b) + a.(e^{-1}\beta + e^{-1}\gamma a^{-1}\alpha e^{-1}\beta - e^{-1}ca^{-1}\alpha)(\gamma a^{-1}b - \delta + 2h(ca^{-1}b + e - d + \gamma a^{-1}\alpha))\right\}$$
$$.(e^{-1} + e^{-1}\gamma a^{-1}\alpha e^{-1})$$

$$= ade^{-1}(1 + \gamma a^{-1}\alpha e^{-1}) + (e^{-1}\beta\gamma - c)be^{-1} - ae^{-1}\beta\delta(e^{-1} + 2e^{-1}\gamma a^{-1}\alpha e^{-1}) + e^{-1}c\alpha\delta e^{-1} +$$

$$h\left\{(4e^{-1}\beta\gamma\alpha e^{-1} + 2ae^{-1}\beta - 2e^{-1}c\alpha)(1 - de^{-1}) + e^{-1}\beta cbe^{-1}(2 + 3\gamma a^{-1}\alpha e^{-1}) - e^{-1}c\alpha(\beta\delta e^{-2} + 2ca^{-1}be^{-1})\right\} \tag{4.22}$$

Üçüncü satırda, $(e - \gamma a^{-1}\alpha)^{-1} = e^{-1} + e^{-1}\gamma a^{-1}\alpha e^{-1}$ eşitliğini kullanırız.

Dördüncü satırda, $\left\{1 + (e^{-1} + e^{-1}\gamma a^{-1}\alpha e^{-1})(\delta - \gamma a^{-1}b)(d - ca^{-1}b)^{-1}(\beta - ca^{-1}\alpha) + ...\right\}$ ifadesinde, ikinci terimden sonrası dikkat edilirse $(\beta - ca^{-1}\alpha)^2 = 0$ olduğundan sıfırlanır.

Beşinci satırda,

$$(d - ca^{-1}b)^{-1}(\beta - ca^{-1}\alpha) = (\beta - ca^{-1}\alpha)(d - ca^{-1}b)^{-1} ,$$

$$(\delta - \gamma a^{-1}b)(\beta - ca^{-1}\alpha) = (\beta - ca^{-1}\alpha)(\gamma a^{-1}b - \delta + h(ca^{-1}b + e - d + \gamma a^{-1}\alpha)) ,$$

şeklinde gösterdiğimiz, işlemlerin amacı $(\beta - ca^{-1}\alpha)$ ifademizi, $(e^{-1} + e^{-1}\gamma a^{-1}\alpha e^{-1})$ ifadesi ile çarpmaktır, böylece $\alpha^2 = 0$ oluşunu kullanarak kısaltma yapabileceğiz. (Dikkat edilmesi gereken nokta; $(\beta - ca^{-1}\alpha)$ ile işlem yapılırken süper matris elemanlarımızın aralarındaki komutasyon bağıntılarının(4.4) kullanılışıdır.)

Altıncı satırda, köşeli parantez içinde kalan ifadenin, ikinci teriminde; $(d - ca^{-1}b)$ ile $(d - ca^{-1}b)^{-1}$ yi çarparak kısaltma yapmayı amaçlıyoruz, ara işlemleri verelim;

$$(d - ca^{-1}b)(e^{-1}\beta + e^{-1}\gamma a^{-1}\alpha e^{-1}\beta - e^{-1}ca^{-1}\alpha) = (e^{-1}\beta + e^{-1}\gamma a^{-1}\alpha e^{-1}\beta - e^{-1}ca^{-1}\alpha)(d - ca^{-1}b)$$

$$\begin{aligned}(d - ca^{-1}b)(\gamma a^{-1}b - \delta + h(ca^{-1}b + e - d + \gamma a^{-1}\alpha)) &= (\gamma a^{-1}b - \delta + 2h(ca^{-1}b + e - d + \gamma a^{-1}\alpha))(d - ca^{-1}b) \\ &\quad + h(\beta - ca^{-1}\alpha)(\delta + \gamma a^{-1}b)\end{aligned}$$

Böylece (4.22) de verilen kuantum süper matrisinin, süper determinantına ulaşılır.

4.4.1 Tanım: Dördüncü kısımda; elemanı olan bir T matrisinin matris elemanları arasındaki bağıntıları (4.4) de verilen, belirli kabuller altında kapalılık özelliği, birim eleman ve birleşme özelliği sağlayan, "Kuantum Süper Matrisin Süper Tersi" başlığı altında ters elemanın özellikleri verilen ve (4.22) de süper determinantı elde edilen grubu $GL_h(2|1)$ kuantum süper grubu olarak adlandırıyoruz.

Şu not edilmelidir ki, $T \in GL_h(2|1)$ iken $T^{-1} \in GL_{-h}(2|1)$ dır.

5. $GL_h(2|1)$ KUANTUM SÜPER GRUBUNUN HOPF CEBİR YAPISI

Bu bölümde, elemanları (3×3)-tipinde süper matrisler olan, $GL_h(2|1)$ kuantum süper grubunun, bir süper Hopf cebiri olduğunu göstereceğiz.

Bu nedenle, kuantum süper grubumuzun üzerinde, ko-çarpım Δ, ko-birim ε ve ko-ters S şeklinde operatörler tanımlayacağız;

- Ko-çarpma operatörü: Bir cebir homomorfizmi olarak

$$\Delta : GL_h(2|1) \to GL_h(2|1) \otimes GL_h(2|1)\ ,\ \Delta(T) = T\,\dot{\otimes}\,T \tag{5.1}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada $\dot{\otimes}$ sembolü, matris-tensörel çarpımını göstermektedir, daha açık ifade etmek gerekirse normal matris çarpımı yapılıp araya tensör işareti konacaktır.

Elemenların çarpımı ise,

$$(a\otimes b)(c\otimes d) = (-1)^{\hat{b}\hat{c}}(ac\otimes bd) \tag{5.2}$$

kuralına uyacaktır.

Δ ko-çarpımının $T\in GL_h(2|1)$ süper matrisinin elemanları üzerine etkisi, (5.1) ve (5.2) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&\Delta(a) = a\otimes a + b\otimes c + \alpha\otimes\gamma\ , && \Delta(b) = a\otimes b + b\otimes d + \alpha\otimes\delta \\
&\Delta(\alpha) = a\otimes\alpha + b\otimes\beta + \alpha\otimes e\,, && \Delta(c) = c\otimes a + d\otimes c + \beta\otimes\gamma \\
&\Delta(d) = c\otimes b + d\otimes d + \beta\otimes\delta\,, && \Delta(\beta) = c\otimes\alpha + d\otimes\beta + \beta\otimes e \\
&\Delta(\gamma) = \gamma\otimes a + \delta\otimes c + e\otimes\gamma\ , && \Delta(\delta) = \gamma\otimes b + \delta\otimes d + e\otimes\delta \\
&\Delta(e) = \gamma\otimes\alpha + \delta\otimes\beta + e\otimes e
\end{aligned} \tag{5.3}$$

şeklinde bulunur.

Δ operatörü, (4.4) bağıntılarını invaryant bırakır. Bir örnek olarak, $\Delta(ab-ba)=0$ olduğunu gösterelim. Δ nın bir cebir homomorfizmi olduğu kullanılarak

$$\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b) = (a\otimes a + b\otimes c + \alpha\otimes\gamma)\ (a\otimes b + b\otimes d + \alpha\otimes\delta)$$

$$= a^2\otimes ab + ab\otimes ad + a\alpha\otimes a\delta + ba\otimes cb + b^2\otimes cd + b\alpha\otimes c\delta + \alpha a\otimes\gamma b + \alpha b\otimes\gamma d - \alpha^2\otimes\gamma\delta$$

$$= a^2 \otimes ba + ba \otimes da + \alpha a \otimes \delta a + ab \otimes bc + b^2 \otimes dc + \alpha b \otimes (\delta c + hdc) + a\alpha \otimes b\gamma + b\alpha \otimes (d\gamma - hdc)$$
$$-\alpha^2 \otimes (-\delta\gamma - h(\delta c + \gamma d))$$

$$= (a \otimes b + b \otimes d + \alpha \otimes \delta)\ (a \otimes a + b \otimes c + \alpha \otimes \gamma)$$

$$= \Delta(b)\Delta(a) = \Delta(ba)$$

olduğu görülür.

- Ko-birim operatörü: Bir cebir homomorfizmi olarak

$$\varepsilon : GL_h(2\,|\,1) \to \mathbb{C}\,,\ \varepsilon(T) = I \tag{5.4}$$

şeklinde tanımlarız. ε ko-biriminin $T \in GL_h(2\,|\,1)$ süper matrisinin elemanları üzerine etkisi,

$$\varepsilon(a) = 1, \qquad \varepsilon(b) = 0, \qquad \varepsilon(\alpha) = 0, \qquad \varepsilon(c) = 0, \qquad \varepsilon(d) = 1,$$

$$\varepsilon(\beta) = 0, \qquad \varepsilon(\gamma) = 0, \qquad \varepsilon(\delta) = 0, \qquad \varepsilon(e) = 1 \tag{5.5}$$

şeklindedir. Ko-birim operatörü ε,

$$m \circ (\varepsilon \otimes id) \circ \Delta = m' \circ (id \otimes \varepsilon) \circ \Delta$$

ifadesini sağlayacak şekilde belirtildiği gibi bir cebir homomorfizmidir. m ve m' tasvirleri kanonik olarak izomorf olup,

$$m : \mathbb{C} \otimes GL_h(2\,|\,1) \to GL_h(2\,|\,1)\ , \qquad m' : GL_h(2\,|\,1) \otimes \mathbb{C} \to GL_h(2\,|\,1),$$

$$m(c \otimes a) = ca = m'(a \otimes c), \qquad \forall a \in GL_h(2\,|\,1),\ \forall c \in \mathbb{C}$$

şeklinde tanımlanmıştır. m çarpma tasviri,

$$m(a \otimes b) = ab \quad \text{ile} \quad m \circ (m \otimes id) = m \circ (id \otimes m)$$

şeklinde tanımlanmış birleşme aksiyomunu sağlayan bir tasvirdir.

- Ko-ters operatörü: Bir cebir anti-homomorfizmi olarak

$$S : GL_h(2\,|\,1) \to GL_h(2\,|\,1),\ \ S(T) = T^{-1} \tag{5.6}$$

şeklinde tanımlarız. S ko-ters operatörü de,

$$m \circ (S \otimes id) \circ \Delta = \varepsilon = m \circ (id \otimes S) \circ \Delta$$

bağıntısını sağlayan belirtildiği gibi bir cebir anti-homomorfizmidir. Böylece, $GL_h(2|1)$ kuantum süper grubunun Hopf cebir yapısı anlatılmış olur.

6. T KUANTUM SÜPER MATRİSİNİN GAUSS AYRIŞIMI

Bu bölümde de, $T \in GL_h(2|1)$ süper matrisimizi; T_A alt üçgensel matris, T_D köşegen matris, T_U üst üçgensel matris olmak üzere, $T = T_A T_D T_U$ yazarak bu üç matrisin, matris elemanları arasındaki bağıntıları elde edeceğiz.

$$T = \begin{pmatrix} a & b & \alpha \\ c & d & \beta \\ \gamma & \delta & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 \\ v & w & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & X & Y \\ 0 & 1 & Z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

şeklinde daha açık olarak yazalım. T süper matrisimizin elemanlarını, Gauss ayrışımının elemanları cinsinden ifade edelim.

$$a = A \qquad b = AX \qquad \alpha = AY$$

$$c = uA \qquad d = uAX + B \qquad \beta = uAY + BZ$$

$$\gamma = vA \qquad \delta = vAX + wB \qquad e = vAY + wBZ + C \tag{6.2}$$

Şimdi bu ifadelerimizi T süper matrisinin (4.4) komutasyon bağıntılarında yerlerine koyalım;

1) $ab = ba$

$A.AX = AX.A$

Dikkat edilirse, $a = A$ eşitliğinden fark edileceği üzere a çift olduğundan A da çifttir ve tersi mevcuttur, böylece eşitliğin iki tarafını da A^{-1} ile çarparsak,

$AX = XA$

olduğunu görürüz.

2) $a\gamma = \gamma a$

$A.AY = AY.A$; Her iki taraf A^{-1} ile çarpılırsa,

$AY = YA$

olduğunu görürüz.

3) $\alpha^2 = 0$

$AY.AY = 0$; $[A,Y] = 0$ olduğunu biliyoruz.

$A^2Y^2 = 0$

Bu noktada şu yorumu yapabiliriz ki, A elemanımız çift olduğundan karesi sıfır olamaz, Y nin karesinin sıfır olması zorunluluğu oluşur:

$A^2 \neq 0 \;\Rightarrow\; Y^2 = 0$ olur.

4) $c\gamma = \gamma c + hc^2$

$uA.vA = vA.uA + h(uA.uA)$; Daha önceki denklemlerdeki gibi, basit şekilde $a\gamma = \gamma a$ ve $ac = ca$ bağıntılarından, $[A, v] = 0$ ve $[A, u] = 0$ bulunur. Yer değişimleri kolayca yaparak,

$uvA^2 = vuA^2 + hu^2A^2$; Şimdi de her iki tarafı A^{-2} ile çarparsak,

$uv = vu + hu^2$

olduğunu görürüz.

5) $bd = db + h(b\beta - d\alpha)$

$$AX(uAX + B) = (uAX + B)AX + h(AX(uAY + BZ) - (uAX + B)AY)$$

$$AXuAX = uAXAX - AXB + BAX + h(AXuAY - uAXAY + AXBZ - BAY)$$

Son yazılan ifade de, u, A ve X in aralarında ki komutasyon bağıntılarını uygulayıp, düzenlersek;

$$uA^2X^2 = uA^2X^2 - AXB + ABX + h(uAXAY - uAXAY + AXBZ - BAY)$$

$AXB - ABX = h(AXBZ - BAY)$;Her iki tarafı sağdan A^{-1} ile çarparsak,

$$XB - BX = h(XBZ - BY)$$

olduğunu görürüz.

İşte, bu şekilde işlemlerimize devam edersek; Gauss ayrışımının matris elemanlarının kendi aralarında sağladıkları bağıntıları,

$AX = XA$ $\qquad$ $Au = uA$

$AB = BA$ $\qquad$ $AC = CA$

$AY = YA$ $\qquad$ $Av = vA$

$Aw = wA$ $\qquad$ $AZ = ZA$

$Xu = uX$ $\qquad$ $XY = YX$

$Xv = vX$ $\qquad$ $uB = Bu$

$uZ = Zu$ $\qquad$ $uY = Yu$

$vY = -Yv$ $\qquad$ $uv = vu + hu^2$

$vB = Bv - hBu$ $\qquad$ $v^2 = -hvu$

$Y^2 = 0$ $\qquad$ $Z^2 = 0$

$BY = YB - hBZY$ $\qquad$ $YZ = -ZY$

$wv = -vw - h(2wu + v)$ $\qquad$ $uw = wu + hu$

$Zv = -vZ$ $\qquad$ $BZ = ZB$

$uC = Cu$ $\qquad$ $Cv = vC + hCu$

$CZ = ZC + hBCZ$ $\qquad$ $XZ = ZX + h(ZY + YZ)$

$YC = CY - hYCZ$ $\qquad$ $XB = BX + h(XBZ - BY)$

$Zw = -wZ + h(ZC - CZ)B^{-1}$ $\qquad$ $Yw = -wY + h((Yw - wY)Z + YCB^{-1})$

$XC = CX - h(CY + (wBY - XC)Z)$

$Xw = wX + h(2wY - (Xw + wX)Z - XCB^{-1})$

$Bw = wB + h(B - C - 2vAY + (2vAX + wB + Bw)Z)$

$CB = BC + h(wBuAZY + B^2(Z - C) + (BC - CB)Z)$

$Cw = wC + h((1+w)C + (3wC - Cw + wB + vAYw)Z - 2wuZAX + (4vAXCZ - 4vAYC - C^2)B^{-1})$

$$w^2 = h(2vAXCB^{-2} - 2w + w^2Z + 2wCB^{-1} + 4vw(AXZ - AY)B^{-1}) \qquad (6.3)$$

şeklinde buluruz.

Şüphesiz, yeni elde edilen yapı ile $GL_h(2|1)$ in Gauss ayrışımı yapılarak ortaya konan yeni cebirin bir Hopf cebiri olduğu da gösterilebilir.

7. SONUÇLAR

Bu çalışmada, $GL_h(2|1)$ kuantum süper grubunun yapısı ortaya konmuştur. Bu yapılırken önce, q-deforme kuantum süper uzay için yapılana benzer bir singüler benzerlik transformasyonu kullanılarak, kuantum süper uzayın h-deforme yapısı ortaya konmuş, uzayın koordinat fonksiyonları aralarındaki bağıntılar elde edilmiştir. Sonra uygun tanımlamalarla bir T süper matrisinin elemanları arasındaki komutasyon bağıntıları elde edilmiştir. Daha sonra ise, süper uzayın koordinat fonksiyonlarıyla bunların diferensiyelleri aralarındaki bağıntılardan yararlanarak yeni bir R matrisi bulunmuş ve bu matris T süper matrisinin süper tersinin elemanları arasındaki bağıntıların elde edilmesinde kullanılmıştır. Son olarak, h-süper determinant bulunmuştur. Böylece $GL_h(2|1)$ süper grubu elde edilmiştir. Şu not edilmelidir ki, $T \in GL_h(2|1)$ iken $T^{-1} \in GL_{-h}(2|1)$ dır. $GL_h(2|1)$ kuantum süper grubunun Hopf cebiri olduğu görülmüştür. Ayrıca, $GL_h(2|1)$ grubundaki bir matrisin Gauss ayrışımı yapılmış ve ayrışımın matris elemanları arasında sağlanan bağıntılar elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

Abe, E., (1977), “Hopf Algebras”

Aizawa, N., Chakrabarti, R., (2004) , “Noncommutative Geometry of Super-Jordanian $OSp_h(2|1)$ Covariant Quantum Space” , J.Math.Phys.45:1623-1638

Aghamohammadi, A., Khorromi, M., ve Sharati, A., (1995),“ h-Deformation as a Contraction of q-Deformation”, J.Phys. A28: L225

Berezin, F.A., (1987), Introduction to Superanalysis, D. Reidel Pub. Comp., Dordrecht-Holland.

Çelik, S., Çelik,S.A., ve Arık, M., (1998) , “Differential Calculus on the h-Superplane” , J. Math. Phys. 39:3426-3436

Çelik, S., ve Saltürk, E., (2008) , “A Differential Calculus on h-superspace” , Noncommutative Structures in Math. and Phys.

Dabrowski, L., and Parashar, P., (1996), Lett.Math.Phys. 38

Damaskinsky, E.V., Kulish, P.P., Lyakhovsky, V.D., Sokolov, M.A., (1995), “Gauss Decompositiıon for Quantum Groups and Duality”

Drinfeld, V. G., (1986) , “Quantum Groups”, in Proc.IMS Berkeley, 798.

Manin, Yu I., (1989) , “Multiparametric Quantum Deformation of the General Linear Supergroup” , Commun. Math. Phys. 123:163-175

Saltürk, E., (2007) , “ $R_h(2|1)$ Süper Uzayı Üzerine Bir Diferensiyel Hesap” , Yüksek Lisans Tezi, YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü

Wess, J., and Zumino, B., (1990), “Covariant Differential Calculus on the Quantum Hyper Plane” Nucl.Phys. B., 18:302-312

Woronowicz, S. L., (1989), “Differential Calculus on Compact Matrix Pseudogroups” Commun. Math. Phys., 122:125-170

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi	19.10.1987	
Doğum yeri	İzmit / Kocaeli	
Lise	2001-2005	Gölcük İhsaniye Anadolu Lisesi
Lisans	2005-2009	Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi / Matematik Bölümü