T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİKSEL SOYUTLAMA VE SOYUTLAMANIN İNDİRGENMESİ

MEHMET CAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. HASAN ÜNAL

İSTANBUL, 2011

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİKSEL SOYUTLAMA VE SOYUTLAMANIN İNDİRGENMESİ

Mehmet CAN tarafından hazırlanan tez çalışması 11.11.2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Hasan ÜNAL

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Hasan ÜNAL

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Doç. Dr. Ahmet Şükrü ÖZDEMİR

Marmara Üniversitesi ________________________

Yrd. Doç. Dr. E. Mehmet ÖZKAN

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Bu çalışma, Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü’ nün 29-01-03-KAP02 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Bu çalışmada matematik eğitimimiz boyunca önemli bir yer teşkil eden soyutlama teması üzerinde durulmuştur. Matematiksel soyutlama, matematiksel yapının inşa edilmesi, kavramlar arasındaki matematiksel geçişin sağlanması ve en önemlisi ezbersel değil kavramsal anlamanın sağlanması gibi özelliklerin kazanılmasında önemli bir faktördür.

Araştırmada İstanbul iline ait 6 anadolu lisesinde okuyan öğrencilerle çalışılmıştır. Sorulan sorularla öğrencilerin soyutlama seviyeleri incelenmiştir. Gözlemlemeler esnasında öğrencilerin girdikleri merkezi sınavlardan (LYS gibi) dolayı test tekniğine olan yatkınlıkları sebebiyle sorulan sorulara ezbersel yaklaşımları fark edilmiştir.

Çalışmamda devamlı yanımda olan ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen tez danışmanım Yrd. Doç. Dr. Hasan ÜNAL’ a, desteğini hiç bir zaman eksik etmeyen hocam Yrd. Doç. Dr. Kürşat Hakan ORAL’ a, tez yazım sürecinde fikirlerini hiçbir zaman eksik etmeyen arkadaşım Rabia Nagehan ÜREGEN’ e ve maddi-manevi desteklerini her zaman yanımda hissettiğim değerli annem Aysel CAN’ a teşekkürlerimi sunarım.

Mayıs, 2011

Mehmet CAN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KISALTMA LİSTESİ

RBC	Recognizing- Building with- Construction

ÖZET

MATEMATİKSEL SOYUTLAMA VE SOYUTLAMANIN İNDİRGENMESİ

Mehmet CAN

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Hasan ÜNAL

Bu çalışmanın amacı, farklı liselerdeki dokuz, on ve on birinci sınıflardaki öğrencilerin matematiksel soyutlama seviyelerini incelemektir. Ayrıca bu öğrencilerin soyutlama yaparken karşılaştıkları güçlükleri belirlemek ve bu süreçte soyutlama seviyesini indirgeyip indirgemediklerini analiz etmektir.

Bu amaçla kendi hazırladığımız sorular ve Hazzan ve Zazkis' in yaptığı çalışmadan belli sorular alınarak öğrencilere sorulmuştur. Yapılan çalışma nitel bir çalışma olup yarı yapılandırılmış mülakat yöntemi kullanılmıştır. Görüşmelerde ses kaydı yapılmıştır, sonra dökümleri hazırlanıp, çalışma yaprakları ile data analizi yapılmıştır. Katılımcıların çalışmalarına yer verilmiştir. Yapılan bu çalışma büyük bir çalışmanın bir parçasını oluşturmaktadır. Bu kapsamda 6 anadolu lisesindeki dokuz, on ve on birinci sınıflardan 18' er öğrenci olmak üzere toplam 54 öğrenci ile görüşülmüştür.

Çalışma kağıtları ve görüşmelerden elde edilen veriler genel olarak öğrencilerin soyut düşünmede zorlandıklarını ve hangi durumlarda soyutlama seviyelerini indirgediklerini göstermiştir.

Sonuç olarak matematiksel soyutlama,

1- genelleştirme,

2- ilişkilendirme boyutunda ele alınmıştır.

Soyutlamanın indirgenmesi ise aritmetik işlemlerle gözlemlenmiştir. Kavramsal ve işlemsel anlamanın soyutlama ve soyutlamanın indirgenmesine yansıması incelenmiştir.

Matematiksel soyutlamanın önemini anlatabilmek için bu konuyla ilgili daha fazla çalışmaya ihtiyaç vardır.

Anahtar Kelimeler: matematiksel soyutlama, soyutlamanın indirgenmesi

ABSTRACT

MATHEMATICAL ABSTRACTION AND REDUCING ABSTRACTION

Mehmet CAN

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Hasan ÜNAL

The purpose of this study was to investigate the abstraction levels of 9th, 10th and 11th students in different of schools. Furthermore, the difficulties that students encounter during the process of abstraction and reducing abstraction.

The questions were selected from Zazkis and Hazzan's study and we created our own questions. The study was qualitative in nature. Semi-structured interviews were used. The interviews were audio-taped and transcribed. Students' artifacts were included. This study is part of a larger project. The participants were from 6 different Anatolian high schools and total 54 students.

The results were revealed that mathematical abstraction

1- generalization,

2- relations.

The reducing abstraction was observed with arithmetic calculations. Relational v.s. instrumental understanding reflected in abstraction and reducing abstraction in order.

Given the importance of mathematical abstraction we needed further studies related to mathematical abstraction.

Key words: mathematical abstraction, reducing abstraction

BÖLÜM 1

GİRİŞ

İnsanlığın bilinen geçmişinden günümüze değin yapılan birçok araştırma ve bu araştırmalardan elde edilen sonuçlar, bireylerin eğitiminde verimliliğin en üst düzeye çıkarılmasının gerekliliğini vurgulamaktadır. Eğitim alanında gerçekleştirilen araştırmaların ortak bulgusu, gelişim ve ilerleme için eğitim ve öğretimin vazgeçilmez olduğu olgusudur. Gerçekten toplumların sosyal, ekonomik, kültürel ve demokratik yönden gelişiminde eğitim, yaşamsal bir öneme sahiptir. Bilginin üretimi, kullanımı ve toplumsal gelişmeye olan katkısı göz önünde bulundurulduğunda eğitim, toplumların öncelikli konularının başında yer alır. Öte yandan eğitimin bilinen en önemli işlevleri arasında bilginin öğrenilmesi, bireyin yaşama hazırlanması, toplumsal değerlerin gelecek kuşaklara aktarılması da vardır. Bunlara ek olarak, eğitimin, bireyleri, toplumun istediği niteliklerle donatması da aynı düzeyde önemlidir. Söz konusu beklentinin içeriğinde özet olarak, genelleme yapabilme, keşfedebilme, doğru tahmin edebilme, bilgiye ulaşabilme, bilgiden bilgi üretebilme, matematiksel düşünebilme, matematiksel güç kazanma, iletişim kurabilme, problem çözebilme ve benzeri nitelikler yer alır [1], [2], [3].

Eğitim, hem insanın gelişimi için hem de toplumların gelişimi için en önemli unsurdur. Çünkü bir şeyler üretebilmek ve yaşamaya dair değerler ortaya koyabilmek için herkesin iyi bir eğitime ihtiyacı vardır. Eğitimli insan, üretebilme yeteneğine sahiptir. Eğitimli insan olaylara farklı bakış açılarından bakabilir. Günümüzde gelişen ülkelerde eğitim ön safhadadır. Çünkü bir ülkenin gelişmişlik düzeyi doğrudan ülke insanlarının sahip olduğu kaliteli eğitime bağlıdır.

Toplumdaki bireylerin eğitim düzeyleri yükseldikçe toplumun kalkınmasının da o nispette artacağından hiç kuşku yoktur. Bunu yaparken kişinin üretken olması hedef alınmalıdır. Tüm bu çalışmalar yapılırken özellikle bilgi toplumunun oluşturulması hedeflenmelidir. Bilgi toplumu, çağdaş, günün teknolojisini kullanmayı daha kolay kılan bir uygulama alanı oluşturmayı hedeflemelidir. Bilgi toplumu olmanın bir gereği de eğitim kurumlarında etkin ve verimli matematik öğrenimi ortamı oluşturmaktır [4].

Günümüzde toplumun eğitim kurumlarınca yetiştirilecek insan modelinin şekillenmesinde en önemli argümanlardan biri olarak matematik önemli bir yer tutmaktadır. Çünkü bilgi çağını yakalayabilmek veya en azından takip edebilmek için iyi yetişmiş teknisyen, mühendis ve bilim adamlarına ihtiyaç vardır. Bu kadroları yetiştirmek için eğitim sisteminde matematik kültürünün ve matematiksel soyutlama yeteneğinin kazandırıldığı bir matematik eğitimine ihtiyaç vardır.

Matematiksel eğitiminin süreci diğer bilim dallarından biraz daha zorlu bir sistematik yapı içermektedir. Bu zorlu sistematik içerisinde, bilgi bankamız olan beynimize sürekli yeni bilgiler kazandırıp eski bilgilerimizin ise canlılığının korunmasını sağlamak matematik eğitiminin olmazsa olmaz şartıdır. Bu nedenle soyutlama teması özellikle matematik eğitimimiz boyunca önemli bir yer teşkil etmektedir. Çünkü matematik derslerinde veya hayatın matematik içeren kısımlarında başarılı olabilmemiz soyut düşünebilme yeteneğimizle doğru orantılıdır. Aynı zamanda matematiksel soyutlama, matematiksel yapının inşa edilmesi, kavramlar arasındaki matematiksel geçişin sağlanması (ilişkilendirme) ve en önemlisi ezbersel değil kavramsal anlamanın sağlanması gibi özellikleri kazandırır. Aksi halde kazanılan başarılar kısa vadeli ve gelip geçici olmaktadır.

Matematikteki ve matematik öğrenimindeki soyutlama fikri son yıllarda matematik eğitim ve araştırma komitelerinin de dikkatini çekmiştir. Bu konunun önemine 2002 yılında yapılan Araştırma Forumunda, Matematik Eğitimi Psikolojisi (PME) Konferansında değinilmiştir [5]. Ayrıca literatür taraması yapıldığında dünyanın birçok yerinde bu konuda çalışma yapan araştırmacılar olduğu görülmektedir. Hollanda' lı Van Oers ve Poland, İsrail' li Rina Hershkowitz, Baruch B. Schwarz ve Tommy Dreyfus, Avustralya' lı Michael Mitchelmore ve Paul White bunlardan sadece birkaç tanesidir.

Ülkemizde ise bu konuyla ilgili çalışma yapan araştırmacı sayısı pek fazla değildir. Mehmet Fatih Özmantar, Hasan Ünal ve Sibel Yeşildere'nin bu konuda yapmış oldukları çalışmalar mevcuttur.

Soyutlama fikrine olan ilgi büyüdükçe bu konu "soyutlamanın indirgenmesi" ni de tartışılır hale getirmiştir. İnsan beyni bir problemle karşılaştığında, daha önceden denenmiş veya tecrübe edilmiş bir yöntemin benimsenmesi eğilimindedir. Bununla beraber, özellikle öğrencilik yıllarında karşılaşılan problemleri çözme zorunluluğunun getirdiği baskıyla zihindeki resimlerin aynısı olmayan resimlerle karşılaşıldığında, durumun üstesinden gelebilmek için soyutlama indirgenir. Yani bir problemi çözebilmek için metot geliştirebilecekken (yani matematiksel soyutlama yapabilecekken) veya verili bir metodu kullanıp çözebilecekken sırf çözüm yapmak adına kalite seviyesi düşük bir çözüm üretilmiş olur.

Matematiksel soyutlama ile ilgili dünya literatüründe birçok çalışma yapılmıştır ve yapılmaya da devam edilmektedir. Fakat ülkemizde bu konuyla ilgili yapılan çalışma sayısı sınırlı sayıdadır. Bu nedenle yapılan bu çalışma bu açıdan önemlidir. Ayrıca özellikle ülkemizde yapılan araştırmalara bakıldığında soyutlama, RBC soyutlama teorisi temel alınarak incelenmiş ve bu çerçevede araştırılmıştır. Fakat bu çalışmada ise soyutlamanın genelleme ve ilişkilendirme boyutları ele alınmıştır. Bunun yanında soyutlamanın indirgenmesi de paralel olarak incelenmiştir.

1.1 Literatür Özeti

Matematik eğitiminin tarihi eskilere dayanmasa da, bilgi kazanımının doğası ile ilgilenen epistemolojiyle, psikolojiyle ve sosyal bilimlerin diğer başka alanlarıyla olan ilişkisi matematik öğrenme ile ilgili teorik tartışmaların yapılabilmesini ve gelişmelerin yaşanmasını sağlamaktadır. Bu durum matematik eğitiminde araştırma konularının zaman içinde hızla yön değiştirebilmelerine neden olmaktadır. Örneğin yakın geçmişte matematik eğitimine yönelik yapılan araştırmalar öğrencilerin bireysel olarak matematiksel kavrayışları ve öğrenme yollarını önemsemekteyken, günümüzdeki araştırmalar matematik öğrenmenin sosyokültürel yönünü de dikkate almaktadır [6].

Bu hızlı değişim içerisinde sosyal bilimler alanında merak edilen ve üzerinde araştırma yapılan konulardan bazılarının insanların nasıl düşündüğünü, nasıl öğrendiğini, düşünme ve öğrenmenin sınırlarının ne olduğunu anlamlandırma üzerine olduğu görülmektedir. Filozoflar bu soruları felsefi yönden ele alırken, matematik eğitimcileri soruların ve yanıtlarının nasıl yorumlanabileceği üzerinde durmuşlardır. Öğrencilerin matematiksel bilgi, anlama ve becerilerinin hangi seviyede olması gerektiği ve hangi amaçların gerçekleştirilmesinin uygun olduğu tartışılmıştır. Öğrencilerden beklenen bilgi, anlama veya beceri düzeyi ne olursa olsun, "matematik eğitimi süreci soyutlama kavramını içermeli ve hatta soyutlama bu sürecin en önemli bileşeni olmalıdır" [7].

1.1.1 Soyutlama

Soyutlama Aristo ve Plato' dan beri çeşitli filozoflar ve araştırmacılar tarafından ele alınan ve tartışılan bir konudur. Aristo'nun çalışmalarında alıp götürmek anlamıyla karşımıza çıkan soyutlama, daha sonra İngiliz filozoflar tarafından ele alınmıştır [8].

Bu filozoflar soyutlama ile ilgili klasik bir bakış açısı oluşmasını sağlamışlar ve şu görüşleri ortaya atmışlardır [8]:

1. Soyutlamalar, nesnelerin kategorilerle temsil edilmesiyle oluşmaktadır.
2. Soyutlamalar, bağlamdan (ortamı çevreleyen koşullardan) bağımsız temsillerdir.
3. Soyut düşünme, düşünce gelişiminin daha ileri adımlarının ayırt edici bir özelliğidir.

Burada dikkati çeken en önemli düşünce soyutlamanın, öğrenmenin gerçekleştiği zamandan, mekandan ve ortamdan bağımsız gerçekleşebileceğine inanılmasıdır [9].

Daha sonraları soyutlama ile ilgili çalışmalar artarak devam etmiştir. 20. yüzyılda soyutlama ile ilgili çalışmaların yukarıda ifade edilen klasik soyutlama fikrinin iddia ettiği görüşlere dayalı olarak ilerlemeye devam edildiği görülmektedir [9]. Russell, soyut düşüncenin insan zekasının en üst düzey başarısı ve en güçlü aracı olduğunu belirtmektedir [10]. Cassier, bir süreç sonunda ulaşılan genel bir ifadenin soyutlamanın en son noktası olmadığını, hatta bazı genel ilkelerin sürekli olarak başlamaya hazır olduğunu vurgulamıştır [11],[12]. Sierpinska ise soyutlamayı kısaca "bir kavramdan belli özelliklerin ayrılması eylemi" olarak açıklamaktadır [13].

Günümüze gelindiğinde ise özelikle matematik alanında soyutlama fikrinin iki değişik bakış açısıyla yorumlandığı görülmektedir. Deneyimsel soyutlama görüşü ve teorik soyutlama görüşü.

Soyutlamayı deneyimsel bakış açısıyla ele alan araştırmacılar, öğrenmenin konuyla ilgili verilen örneklerdeki benzerliklerden hareketle gerçekleşeceğine inanmışlardır. Bu alandaki en önemli isimlerin başında da Piaget ve Skemp geliyor. Piaget soyutlamayı deneyimsel soyutlama olarak ele almıştır. Deneyimsel soyutlama, kavramlar arasındaki yüzeysel benzerliklere dayanmaktadır. Daha yalın bir ifadeyle deneyimsel soyutlamanın, günlük yaşamdaki kavramları oluşturmaya yönelik bir soyutlama tipi olduğu söylenebilir [14].

Skemp'in soyutlama anlayışı yeni zihinsel bir nesnenin benzerliğinin somutlaştırılması tarafından takip edilen benzerlik tanımlamasından oluşur. Skemp'in soyutlama ile ilgili bazı ifadeleri şöyledir:

Soyutlayış (abstracting) deneyimlerimiz arasından benzerlikleri fark ettiğimiz bir aktivitedir. Sınıflama, bu benzerlikler temel alınarak deneyimlerimizin bir araya toplanması demektir. Soyutlama (abstraction) önceden oluşturulan bir sınıflamadaki benzerlikleri fark etme gibi yeni deneyimleri tanımamızı sağlayan bir çeşit sürekli değişimdir. Bir etkinlik olarak soyutlayış ve bir son-ürün olarak soyutlama arasındaki farkı ayırt etmek için soyutlama kavram olarak anılmaktadır [15].

Deneyimlere dayandığından dolayı Skemp'in kavramı deneyimsel soyutlama olarak adlandırılır. Ayrıca burada bahsedilen benzerlik rastgele bir tanımlama değil nesneler arasında bilinçli, seçici bir açıdan yapılmaktadır [15].

Soyutlamayı deneyimsel bakış açısından değerlendiren bir diğer önemli isim ise Dianes' dir. Dianes, soyutlamayı bir grup farklı durumdan ortak özellik çıkarma süreci olarak tanımlamaktadır [16]. Kısaca özetlenecek olursa; deneyimsel bakış açısından soyutlamayı değerlendiren araştırmacıların üzerinde durdukları üç önemli ifade vardır [17]:

1. Çok sayıdaki belli örneklerin ortak noktalarının tanınmasıyla ulaşılan genelleme

2. Düşük somut seviyelerden soyut düşüncenin yüksek seviyelerine geçiş

3. Ortamı çevreleyen koşullardan bağımsız olarak gerçekleşen bir süreç

Teorik soyutlama görüşüne sahip araştırmacılar ise öğrenmenin çevreden, araç kullanımından, sosyal etkileşimden ve ortamı çevreleyen koşullardan ayrı gerçekleşemeyeceğini düşünürler. Bu kapsamda soyutlamaya yaklaşan çeşitli araştırmacılar bulunmaktadır. Bunlar içinde önemli isimler olan Noss ve Hoyles'un, Van Oers'in, Ohlsson ve Lehtinen'ın ve Hershkowitz, Schwarz ve Dreyfus'un bakış açılarından bahsedilecektir.

Hoyles ve Noss' a göre öğrenciler aktiviteleri başarılı olarak gerçekleştirerek ilerlediklerinde, bir önceki aktivitelerle yenileri birleştirmeyi öğrenirler. Onlar soyutlamayı öğrencilerin sahip oldukları kavramsal bilgileri ilişkilendirmeleri boyutunda ele almışlar ve durumsal soyutlama fikrini (situated abstraction) üretmişlerdir [18].

Durumsal soyutlama kavramsallaştırılmış bir matematiksel bilginin nasıl hem durumsal hem de soyut olabileceğini araştırmaktadır… Durumsal soyutlama öğrencilerin kullandıkları materyallerden ve bir ortamdaki dağınık (tutarsız) bileşenlerinden sonuç çıkararak matematiksel fikirleri nasıl oluşturduklarını anlamaya yardım eden bir araçtır [19].

Van Oers, 'soyut' un bir kavramın yeni, daha önce fark edilmemiş bir özelliği değil, düşünmemize katkı sağlayan bir özellik olduğunu ifade ederek soyutlamayı "belli bir bakış açısından hareketle ilişkilerin oluşturulması süreci" olarak tanımlamıştır [8].

Ohlosson ve Lehtinen, soyutlamanın bilişsel fonksiyonunu, daha büyük ve daha karmaşık bilgi yapılarını bir araya getirmeyi kolaylaştırmak olarak belirtmiştir. Onlara göre öğrenme bilgilerin özetlenmesi değil, genişletilmesidir. Araştırmacılar deneyimsel soyutlamaya gönderme yaparak, soyutlamanın bir bilgi yapısının niteliği olduğunu ve bu niteliğin uygun örneklerin sayısıyla ilişkili olmadığını ifade etmektedirler [20].

Hershkowitz, Schwarz ve Dreyfus ise soyutlamayı daha önce oluşturulmuş matematiksel bilgilerin dikey olarak yeniden düzenlenerek yeni bir matematiksel yapı oluşturulması aktivitesi olarak görmektedirler. Öğrenmenin gerçekleştirildiği ortamdaki koşullardan bağımsız olarak soyutlamanın gerçekleşemeyeceğini ve soyutlama sürecinin soyut düşünceden hareketle meydana geldiğini belirtmektedirler [21].

Soyutlama ile ilgili bugüne kadar yapılan araştırmaların ortak özelliği, araştırmacılar tarafından bir süreç bağlamında ele alınmış olmasıdır. Pek çok araştırmacı, bu sürecin adımlarını tanımlama girişiminde bulunmuşlardır. Örneğin Sfard soyut kavramların işlemsel ve yapısal yolla algılanacağını iddia ettiği teorik yapıda tanımladığı soyutlamanın, içselleştirme (interiorization), yoğunlaştırma (condensation) ve somutlaştırma (reification) adımlarından oluştuğunu belirtmektedir [22]. Dubinsky, APOS ismiyle geliştirdiği teoride, öğrencilerin bir kavramı anlamalarını sağlayacak zihinsel yapıları tanımlamaktadır. Buna göre bir matematiksel kavramın bir çeşit yansıtıcı soyutlama yoluyla bir sürece dönüşmesi içselleştirme olarak adlandırılır. Sonuç olarak süreç, bir nesne olarak muhafaza edilir. Şemalar söz konusu süreçlerin koordine edilmesi ile oluşturulurlar. Bu teoride, eylemler (action), süreçler (process), nesneler (object) ve şemalar (schemas) aşamaları önemlidir. Soyutlama süreci içselleştirme (interiorization), muhafaza etme (encapsulasiation), genelleme yapma (generalization) ve tersten gitme (reversal) adımlarından oluşmaktadır [23].

Hershkowitz, Schwarz ve Dreyfus da soyutlama sürecini açıklamak için matematiksel soyutlama teorisi olan RBC teorisini üretmişlerdir. Bugün de birçok araştırmacı tarafından kullanılan RBC teorisi Tanıma (Recognizing), Kullanma (Building with) ve Oluşturma (Constructing) epistemik eylemlerinin ilk harflerinin bir araya getirilmesiyle isimlendirilmiştir [21].

RBC kuramı kendisine temel olarak bir takım sosyokültürel ve epistemolojik ilkeler tayin etmiştir. Bunlar ise Davydov'un [24] de verilen bilgi oluşturma felsefesine dayalı ve Leont'ev in [25] te bahsedilen aktivite teorisine dayanmaktadır. Aktivite teorisine göre aktiviteler davranışlar zincirinin oluşmasını sağlar. Bu yazarlar, aktivite teorisinden yola çıkarak matematiksel soyutlama sürecinin gelişiminde fiziksel, sembolik ve semiyotik araçların matematiksel bilginin oluşumuna olan etkilerini özellikle vurgulamışlardır. Bunun yanı sıra soyutlama sürecinde aktiviteye katılanların kişisel geçmişlerinin, aktivitenin gerçekleşmiş olduğu sosyokültürel ve fiziksel koşulların bu gelişim sürecini etkilediğini ve çoğu zaman da belirlediğini örneklerle göstermeye çalışmışlardır [21].

Davydov' a göre bilinç iki seviyede çalışmaktadır: deneye dayalı düşünce seviyesi ve teorik düşünce seviyesi. Deneye dayalı düşüncede bir kişinin amacı gerçekler arasındaki belirleyici nitelikleri ilişkilendirmek iken, teorik düşüncede kavramların genel şekillerinin ve kurallarının yeniden üretilmesi söz konusudur. Davydov' a göre günlük yaşamdaki kavram ve görüşler deneye dayalı düşünce ile bilimsel kavram ve görüşler ise teorik düşünce ile elde edilir [21].

Bu açıklamalardan sonra, RBC teorisinin temel olarak dayanmış olduğu ve matematiksel soyutlama sürecinin temel ilkeleri olarak görülen beş madde vardır [9]:

1. Soyutlama, "aktivite teorisi" perspektifinde ele alınmaktadır. Soyutlama, bir birey veya grup tarafından ele alınan ve belli bir amaca yönelik olarak devam ettirilen eylemler zinciridir.

2. Soyutlama süreci, çevresel koşulların, öğrencinin sosyal ve kişisel geçmişini ve sosyal etkileşimini içeren kişisel ve sosyal yapısına bağlıdır.

3. Soyutlama süreci, Davydov bağlamında teorik düşünceyi gerektirir fakat matematiksel yapılar arasındaki benzerlikler ve farklılıkların belirlenmesinde Davydov'un kullandığı şekli ile deneye dayalı düşünceyi de ayrıca içerebilir.

4. Soyutlama süreci ilk arıtılmamış soyut varlıktan, yeni yapıya doğru ilerlemektedir.

5. Yeni yapı, matematiksel elementler/yapılar/ilişkiler/objeler arasında bir takım iç bağlantıların ve yeni ilişkilerin kurulmasına dayalı yeniden bir organizeyi içerir.

RBC soyutlama teorisi üç epistemik eylemden oluşuyordu (epistemik eylemler, bilginin oluşturulması ve kullanılması ile ilgili eylemler olarak ifade edilebilir). Bu eylemler tanıma, kullanma ve oluşturmadır.

Tanıma, daha önce oluşturulan bir yapının kullanılmasıdır. Tanıdık bir matematiksel yapının farkına varılması, bu yapının karşılaşılan matematiksel bir ortamda fark edildiğinde gerçekleşir [21]. Burada bahsedilen "yapı", matematiksel bir aktivite sonucunda ortaya çıkan kavram, yöntem ve/veya stratejiler olabilir [26]. Tanıma, öğrencinin konu ile ilgili geçmiş aktivitelerin sonuçlarını açıklayabilmesi 'tanıdık bir matematiksel yapının varlığını fark etmesi' dir [27]. Tanımanın gerçekleştiği an, söz konusu tanıdık yapının öğrencinin zihnine girdiği ilk an değildir ve çoğu zaman deneysel düşünme seviyesinde gerçekleşir [28].

Kullanma, verilen bir hedefi gerçekleştirmek için eskiden oluşturulan matematiksel yapıların kullanılmasıdır [28]. Bikner- Ahsbahs'a göre ise [28] te benzer bilgilerin bir araya getirilerek bir amacı gerçekleştirmek üzere kullanılmasını ifade eder. Kullanma sürecinde öğrenci yeni ve daha karmaşık yapısal bilgi ile zenginleşmez, problemde uygulanabilir bir çözümü oluşturmak için mevcut yapısal bilgisini kullanır. Kullanma genellikle bir problem çözme, bir matematiksel durumu anlama ve bu durumu açıklama veya bir süreç üzerinde dikkatle düşünme gibi bir hedefi başarmaya odaklanıldığında gerçekleşir. Bu hedefi gerçekleştirmek için öğrenciler stratejilerin, kuralların veya teoremlerin yardımına başvurabilir. Öğrenciler bir hedefi başarmak için daha önceki aktiviteler aracılığıyla farkına vardıkları yapıları kullanırlar. Kullanma, öğrenciye ipucu verilmesi gibi bir kaynağın öğrenciye hatırlatılması ile de gerçekleşebilir [28].

Oluşturma, 'var olan matematiksel bilgi bileşenlerinin bir araya getirilmesi ile bu bilgiler arasında yeniden bir düzenlemeye gidilmesi neticesinde yeni bir anlam oluşturulması süreci' dir [27]. RBC soyutlama teorisinin merkezi 'oluşturma' dır. Öyle ki, bu epistemik eylem olmadan soyutlama gerçekleşemez.

Oluşturma, kullanma ve tanıma eylemlerini de içerir. Diğer bir deyişle tanıma; diğer iki eylemin, kullanma; oluşturma eyleminin içinde yer alırken oluşturma eylemi bu üç epistemik eylemi de içerir. Öğrenciler standart bir matematiksel problemi çözerken tanıma ve kullanma eylemleri değişimli olarak gerçekleşebilir. Ancak standart olmayan bir problem çözerken kendileri için yeni olan bir olayı bularak, bu olayın içsel yapısı üzerinde dikkatle düşünerek ve zihinlerindeki diğer bilgilerle ilişkilendirerek oluşturma eylemini gerçekleştirebilirler. Böylece oluşturmanın, tanıma ve kullanmadan bağımsız olmadığı görülmektedir [21].

Soyutlama için, deneysel düşünmenin kullanıldığı 'tanıma' gereklidir, ancak teorik düşünmeyi gerektiren oluşturma gerçekleşmeden soyutlama da gerçekleşemez. Soyutlama sürecinde öğrenci, öğrenme geçmişinde yer alan matematiksel yapıların farkına varır ve etkinliğin gereklerini gerçekleştirmek için yeni bir yapı oluşturmak üzere bunları yeniden düzenler. Bu süreçte öğrencinin zihninde gerçekleşen eylemler bir zincir şeklinde değil iç içe geçmiş şekildedir. İç içe geçmiş bu eylemler tanıma, kullanma ve oluşturmadır [9].

Soyutlamanın oluşumu üç aşamadan geçerek ortaya çıkar [21]:

1. Yeni bir yapıya gereksinim duyulması.

2. Yeni bir soyut varlığın oluşturulması ki bu süreçte tanıma ve kullanma eylemleri iç içe geçmiş olarak var olan yapılardır.

3. Kişinin tanıma eylemini kolaylaştıracak şekilde soyutlamanın pekiştirilmesi.

Soyutlama ancak öğrencinin yeni bir yöntem veya strateji kullanarak oluşturma eylemini gerçekleştirdiği bir problem çözme sürecinde meydana gelir [21].

Pekiştirme, daha önce oluşturulmuş matematiksel bilginin öğrenciye daha tanıdık gelmesi sürecidir. Yeni oluşturulmuş yapılar, oluşturmanın devamında gelen pekiştirme süreci yardımıyla öğrencinin kullanılabilir bilgisinin en önemli bölümü haline gelebilir. Pekiştirilmeyen bilgi, kırılgan bir yapıya sahiptir [26], [29]. Pekiştirme ile öğrenci matematiksel yapının daha kolay farkına varır. Yeni oluşturulmuş bir yapının pekiştirilmesi öğrencinin daha sonraki aktivitelerde bu yapıyı tanımasına ve kolaylıkla kullanmasına imkân verir [29].

1.1.2 Matematiksel Soyutlama

Buraya kadar soyutlamanın tarihsel sürecinden bahsedildi. Araştırmacıların soyutlama ile ilgili görüşlerine yer verildi ve matematiksel soyutlama hakkında bilgi verildi. Araştırmacıların görüşlere bakıldığında soyutlama ile ilgili kesin bir tanımın olmadığı görülmektedir. Fakat yapılan çalışmalardan yola çıkarak matematiksel soyutlama daha sade bir şekilde şöyle tanımlanabilir:

Matematiksel bir kavramın başlangıçta ilişkili olabileceği herhangi bir nesneye olan bağımlılığını ortadan kaldırıp genelleştirerek daha geniş bir uygulama alanına sahip olmasıdır.

Ayrıca genel bir matematiksel soyutlama teorisi aşağıdaki özelliklere sahip olmalıdır [30]:

- farklı okul seviyelerinde matematik öğrenme ve öğretmede karşılaşılan tüm soyutlama çeşitlerini içermeli,

- matematiksel bilgiye yaklaşımlarında öğrencilerin soyutlama yapmada karşılaştıkları güçlükleri yorumlayabilmeli,

- ilgili olunan eğitimsel konularla ilişkin değişkenlere işaret edebilmeli,

- matematiğin epistemolojisi ve bilişsel bilimler alanındaki araştırmaları göz önüne almalı.

1.1.3 Soyutlamanın İndirgenmesi Teması

Soyutlamanın indirgenmesi teması Hazzan' ın [31] te verilen bilgiye göre öğrencilerin soyut cebire olan bakış açısına bir inceleme olarak geliştirilmiştir. Soyut cebir, öğrencilerin "az sayıdaki temanın (problemin) çok sayıda varyasyonu bulunan çözümleri taklit etmenin ötesine geçtiği ilk üniversite matematiği dersidir [32]. Gerçekten, öğrencilerden soyut olarak tanıştırıldıkları kavramlarla uğraşmaları özellikle soyut cebir dersinde yoğun olarak istenir. Bunun yanında, kavramlar kendi özellikleri ile tanımlanır ve sunulur. Bu yeni matematiksel sunum tarzı öğrencilerin yeni mantıksal süreçleri, yeni matematiksel objelerle ve yeni bir yaklaşım tarzıyla algılamaları gerekliliğini doğurur [32].

Soyutlamanın indirgenmesi teması öğrencilerin soyut cebir kavramları hakkındaki düşünce biçimlerini açıklama girişiminden doğar. Aşağıdaki soyutlamanın indirgenmesi teması tanımı büyük ölçüde Hazzan' ın [31] te ki görüşlerini temel alır.

Soyutlamanın indirgenmesi teması soyutlama seviyesinin literatürde geçen üç farklı yorumunu temel alır:

1. Düşünülen nesne ve düşünen insan arasındaki ilişki kalitesindeki soyutlama seviyesi,
2. Süreç-nesne ikilisinin yansıması olarak soyutlama seviyesi,
3. Düşünce kavramının karmaşıklığının derecesi olarak soyutlama seviyesi.

1.Düşünülen nesne ve düşünen insan arasındaki ilişki kalitesindeki soyutlama seviyesi;

Bu kavramın yorumu, Wilensky' in [33] te bahsettiği gibi herhangi bir şeyin soyut ya da somut olması o şeyin doğal bir özelliği olmadığını, bilakis, bunun kişi ile nesne arasındaki ilişkinin özelliğinden kaynaklandığını iddia etmesinden kaynaklanır. Diğer bir deyişle, her kavram ve her kişi için önceki iki deneyim arasındaki ilişkiyi yansıtan farklı soyutlama seviyeleri elde edebilir. Bir kişi bir konuya ne kadar yakın olursa ve konuyla ne kadar çok bağ kurmuşsa, bu konuyu daha somut (ve daha az soyut) hisseder. Bu bakış açısının temelinde, bazı öğrencilerin yürüttüğü mantıksal süreçlerin bilinmeyen konuyu daha tanıdık hale getirme çabaları, diğer deyişle soyut olanı somutlaştırma çabaları yatabilir. Bu görüş Hershkowitz, Schwarz ve Dreyfus'un [21] de belirttiği, soyutlama sürecinde öğrencinin rolüne olan bakış açısı ile birbirlerini doğrulamaktadır. Bu araştırmacılar soyutlamanın, problemi çözenin kişisel tarihine bağlı olduğunu iddia ederler. Özel olarak Davydov' un teorisi temel alınırsa "yeni bir yapı oluşturulduğunda, basit bir formdan oluşur ve öğrenci diğer yapıları oluşturdukça gelişir" [24]. Buna bağlı olarak soyutlama "önceden yapılandırılmış matematiğin, yeni matematiksel yapı oluşturacak şekilde dikey olarak düzenlenmesi hareketi" olarak tanımlanır. Dikey matematikselleştirme, matematiksel elementlerin aktivite sürecinde bir araya getirilmeleri, aralarında bağlantılar kurulmaları, yeni ilişkiler kurularak elementlerin (bileşenlerin) orijinal hallerine göre daha soyut olacak şekilde düzenlenmesi anlamına gelmektedir [21].

2. Süreç-nesne ikilisinin yansıması olarak soyutlama seviyesi;

Bu ifadenin yorumu matematik eğitiminde kavram gelişimindeki bazı teorilerde önerilen süreç-nesne ikilisine dayanır [23], [34], [35]. Bu teorilerin bazıları, APOS (uygulama, süreç, nesne ve plan) gibi, daha ayrıntılı bir yapıyı önerir [23]. Yine de tartışmak için süreç-nesne ikilisine odaklanmak yeterlidir. Bu ikiliye dayanan teoriler matematiksel düşüncedeki süreç kavramını ve nesne kavramını birbirinden ayırırlar ve matematiksel bir kavramın öğrenildiği zaman, süreç önceliği kavramının nesne önceliği kavramından daha az soyut olduğunu söylerler. Böylece, matematiksel kavramın süreç kavramı, nesnel kavramından daha düşük bir soyutlama seviyesinde olarak yorumlanabilir.

3. Düşünce kavramının karmaşıklığının derecesi olarak soyutlama seviyesi;

Bu kavram da bir örnekle açıklanacak olursa, elemanların bir grubu (küme) o gruptaki herhangi bir elemandan daha karmaşık bir matematiksel yapıdadır. Bu otomatik olarak bir şey ifade etmez, çünkü karmaşık nesneler açısından düşünmek daha zor olmalıdır. Burada kabul gören yaklaşım ise bir yapı ne kadar karmaşık ise o kadar soyut olduğudur. Çünkü daha fazla detay, varlık bir bütün olarak analiz edildiğinde göz ardı edilir [36].

1.1.4 Okul Matematiğinde Soyutlamanın İndirgenmesi

Bu bölümde lise matematiğindeki bazı konular soyutlamanın indirgenmesinin üç yorumuna dayanarak örneklerle açıklanacaktır. Örnek 6 da ise soyutlamanın indirgenmesinde kullanılan üç farklı perspektif beraber anlatılacaktır.

1.1.4.1 Düşünen İnsan ve Düşünülen Nesne Arasındaki İlişkinin Kalitesi

Örnek 1: Lineer fonksiyonlar [37]

Karsenty [37] de bulunan bu soruda yetişkinlerin lise matematiğinden hatırladıklarını inceler. Karsenty, bu soruyu lineer fonksiyonlara odaklanarak irdeler. Cevaplar y=2x gibi lineer fonksiyonların grafiğini çizme işine dayanarak belgelendirilmiş ve kategorize edilmiştir. Oysa sonunda, bu cevapların birçoğunda lineer grafiklerin matematiksel fikri yerini kişisel fikirler alır. Karsenty’ nin makalesinde sunulan analiz, yeniden yapılandırmaya karşı yeniden üretimi hatırlatmaya yarayan mekanizmayı açıklayan teorilere dayanır. Karsenty’ nin araştırmasından elde edilen veriler, soyutlanmanın indirgenmesi açısından bakıldığında uygundur. Karsenty’ nin araştırmasında yer alan birkaç yetişkin, kendilerine sunulan soruları tam olarak anlamadılar; bu nedenle, yapabildikleri her şey verilen soruda buldukları tanıdık fikirlere dayanıyordu, yani, buldukları çözümler tanıdık oldukları objeyi baz almakta idi.

Karsenty, Dov adlı katılımcıdan y=x fonksiyonunu çizmesini ister. Dov bir grafik çizme yerine birbirine paralel ve eşit iki çizgi çizer [37].

Karsenty bu yanıtı doğrudan “şekiller ve çizgi parçaları arasındaki eşitliğe dayanan fonksiyonu tanımlama” şeklinde kategorize eder. Dov’ un kendisine verilen soruyu anlamadığı açıkça görülmektedir ve buna bağlı olarak, üretebildiği tek şey bazı eşitlik fikirlerini yansıtan çizimler olur. Dov iki paralel eşit doğru parçası fikri hakkında bir şeyler yorumlamıştır. Bu nedenle, tanıdık bir durumdan yola çıkarak, Dov tanıdık olmadığı bir objeyi (y = x grafiğini) terk etti ve bir şeyler yorumlayabileceği tanıdık bir duruma (iki eşit parça) yönlendiğini görülür. Bu nedenle soyutlama seviyesi indirgenmiştir [31].

Örnek 2: Farklı tabanlar (Kişisel deneyim)

Bu örnek bir ilkokul öğretmeni olan, 10' dan farklı sayı tabanları kullanarak hesap yapma fikri ile tanışan Sue ile olan bir röportajdan alınmıştır [36].

Int: Sayı tabanı olarak 5' i kullanmaktayız. 12 ve 14' ü 5 sayı tabanına göre toplayabilir misin? (bir-iki ve bir-dört şeklinde okunur)

Sue: 12 (bir-iki) 5 sayı tabanında nedir? 7, evet, 5, 6, 7 ve 14 (bir-dört) 9 olmalı, yani birlikte 16.

Int: Bu 5 sayı tabanında mı?

Sue: Ah-hayır, bunu tekrar 5 tabanına koymalıyım. Böylece 10 (bir-sıfır) eşittir 5, ve 11, 12 (bir-bir, bir-iki) diye devam eder 13, 14, 20…. Yani 20 (iki-sıfır) eşittir 10 ve 30 (üç-sıfır) 15 olacak, böylece 16 eşittir 31 (üç-bir)

Sue' nun aşikar olmadığı tabandaki bir problem sorulduğunda göstermiş olduğu tanıdık olan 10 sayı tabanına dönme eğilimi soyutlama seviyesinde indirgenmeye bir örnektir. 10 sayı tabanı öğrencilerin tüm okul yaşamları boyunca kullandıkları taban olduğu için alışılmıştır, bu örnek düşünülen nesne ve öğrenci arasındaki ilişkiye dayanır. İlkokul öğretmenleri için farklı sayı tabanları bazen çok basamaklı toplama ve çıkarma işlemlerindeki alışılmış algoritmayı güçlendirmek için kullanılır. Bunun yanında, yukarıdaki alıntıda örneklendiği gibi, Sue 5 sayı tabanını kullanarak toplama yapmaktan kaçındı, bunun yerine önce sayıları 10 tabanına çevirdi, topladı ve sonucu 5 tabanına tekrar çevirip söyledi. Sue' nun çözümünü tanıdık olmayan 5 sayı tabanından tanıdık olduğu 10 sayı tabanına sayıları sayarak ve eşleştirerek dönüştürmesi soyutlamanın indirgenmesi olarak yorumlanabilir. Bu bölüm de soyutlamanın perspektifinden gösterdi ki, soyutlama seviyesi indirgenmiştir [31].

1.1.4.2 Süreç-Nesne İkiliği

Süreç–nesne ikiliği hakkında devam eden tartışmalar hakkında Hazzan [31] de iki ifadeye dikkat çekiyor:

i. Öğrencilerin, birinci şahıs dili kullanarak mantıklı tartışmaları ve resmi kavramları şahsileştirmesi,

ii. Öğrencilerin, problem çözme durumlarında kabul edilmiş prosedürleri kullanma eğilimi.

Burada, ikinci ifade okul matematiğine uyarlanarak örnekle açıklanmıştır.

Örnek 3: Temel Sayı Teorisi [38]

Zazkis ve Campbell [38] de bulunan örneklerinde öğreticilerin doğal sayıları anlayışını, bölünebilme ve çarpım yapılarının özelliklerine odaklanışlarını araştırır. Aşağıdaki alıntıda öğretici bölünebilme kavramını anlatıyor.

Int: Yandaki sayıyı düşün $3^2 x 5^2$x 7. Bunun üzerinde biraz konuşacağız, buna M diyelim. M 7 ile bölünür mü, ne düşünüyorsun?

Mia: Tamam problemi çözeceğim. . . [biraz bekler] Evet bölünür.

Int: Lütfen açıkla, hesap makinen ile ne yapıyordun?

Mia: Çözdüm ve bu 1575 dir ve 7 ile bölünürse 225'i verir. Ya da böldüğünde ondalık vermez böylece tam bölünür.

Öğrencilerin sayıların ayrışımını dikkate almak yerine hesaplama yolunu seçmeleri Zazkis ve Campbell tarafından incelendi. Buna göre, M'nin yapısı itibariyle bölünebilirliğini en küçük çarpanla (3,5 ve 7) sonuca varabilen öğrenciler, çarpan olmayan sayılar (11) veya bileşik çarpanlar (15 ve 63) sorulduğunda hesaplamaya yönelirler. Süreç-nesne ikiliği bakış açısından, bu öğrenciler bölünebilirliğin sürecini düşünerek soyutlamanın seviyesini indirgemiştir. Bölünebilirliği analiz etmektense bütün bir sayıya ulaşarak bölmeyi yapmışlardır.

1.1.4.3 Matematiksel Kavramların Karmaşıklığının Derecesi

Örnek 4: Temel Sayı Teorisi [38]

Aşağıdaki pasaj, ilköğretim öğretmen adaylarının doğal sayıların bölünebilme yapısını anlama şekilleri üzerine yapılan bir çalışmadır.

Int: 12358 ve 12368 arasında 7 ile bölünebilen bir sayı var mıdır?

Nicole: Bölündüğünden emin olmak için hepsini teker teker denemeliyim. Hesap makinesi kullanabilir miyim?

Int: Evet kullanabilirsin ama sadece bir dakika. Bölmelere başlamadan önce, tahminin ne?

Nicole: Gerçekten bilmiyorum. 3 veya 9 olsaydı basamakları toplardım fakat 7 için, buna benzer bir şey yapmadık. O yüzden hepsini tek tek bölmeliyim.

Bu kısımda ele alınan soyutlamanın indirgenmesi bakış açısından, şu gözlem belirtilebilir: Nicole, verilen iki sayı arasında, “bu sayının varlığını göstererek” 7 ile bölünebilen bir sayı bulmak ister. Görev, aralıkta ki 10 sayının göz önünde tutulmasını isterken, Nicole her sayının bölünebilmesini tek tek kontrol eder. Bu esnada o, daha karmaşık bir nesneden sayıların bir aralığı veya kümesinden ziyade, teker teker sayıları göz önünde tutmaktadır. Bu yüzden, soyutlama derecesi indirgenir; bir kümenin özelliği, elemanlarının her birinin özelliğinin karşılaştırılmasıyla incelenir [31].

Örnek 5: Lineer Fonksiyonlar [37]

Örnek 1, Karsenty tarafından [37] de “Şekiller ve doğru parçaları arasında eşitlik aracılığıyla fonksiyon tanımı” kategorisinde sınıflandırıyor. Bildik nesnelere güvenilerek soyutlamanın indirgenmesi yorumu alternatif bir analize dayandırılıyor. Burada ise Karsenty tarafından sınıflandırılan “Bir koordinat sisteminde sadece bir noktayı işaretlemek” kategorisinde diğer bir katılımcının yanıtı dikkate alınacak. Aşağıda bu örneğin, düşünce nesnesinin karmaşıklığını indirgeyerek nasıl soyutlama derecesinin indirgendiğini gösterilecek.

Katılımcıdan y = x fonksiyonunun çizilmesi istendi. ”Yanıt olarak bir kartezyen sistemi çizer ve (1, 1) noktasını işaretler.” Katılımcının cevabı şöyledir: “x ve y’nin eşit olduğunu söyledin ve eğer bu x ve bu da y ise ve bunlar pozitif noktalar ve bu 1 ve bu da 1 ise, o zaman ortada yaptığımı söyleyebilirim." Karsenty bu durumu şöyle açıklar; "cevaptan anlaşılıyor ki kartezyen düzlemde y'nin gerçekten x' e eşit olduğu bir noktanın bulunması, y = x grafiğini 'çözme' olarak yorumlanır. İşaretlenmiş nokta y=x denkleminin çözümünün keyfi seçilmiş bir değeridir [37].

Bu yorum bu bölümde tanımlanan soyutlamanın indirgenmesi bakış açısından açıklamak için eklendi. Bir fonksiyon verilen bağıntılara uyan sıralı ikililerin koleksiyonudur. Bu koleksiyon sonlu veya sonsuz olabilir (fonksiyon tanımına bağlı olarak). Bu örnekte (y = x) sıralı ikililerinin koleksiyonu sonsuzdur. Bu nedenle fonksiyonun grafik tasvirinin özünü anlamak için, sıralı ikililerin sonsuz bir kümesinin nesnesi zihinsel olarak oluşturulmalıdır.

Bu örnekte katılımcının lise matematiğinden çok az şey hatırladığı gözüküyor. Özellikle karşılaştığı problemin çözümünde kabul edilmiş algoritmalardan hiçbirini izleyememiştir. Böyle bir durumda, ya zihinsel yapının dayandığı ya da izleyeceği kabul edilmiş algoritmanın eksikliğinde, x ve y arasındaki ilişkiyi özel bir sıralı ikili ile belirtmiştir. Başka bir deyişle, sıralı ikililerin sonsuz kümesini (fonksiyonu gösteren) özel bir sıralı ikili ile göstermiştir. Bir sıralı ikili, sıralı ikililerin oluşturduğu sonsuz kümeden daha az karmaşık olmasından dolayı, bu bölümde anlatılan soyutlama tanımına göre, soyutlamanın derecesi indirgenir [31].

1.1.4.4 Soyutlamanın İndirgenmesinin Çok Yönlü İncelenmesi

Noss ve Hoyles soyutlamanın birden fazla çeşidi olduğunu ifade eder [18]. Sonuç olarak, bu bölümde soyutlama seviyesinin indirgenmesinin birden fazla yolu olduğu gösterilecektir. Öğrencilerin soyutlamayı indirgeme yollarının sınıflandırması ne ayrıntılıdır ne de birbirini dışlar. Aşağıdaki örnekte bu yorum anlatılıyor:

Örnek 6: Modelde 3 cm. lik uzunluk bir parkta 10 m.ye denk gelmektedir. Parktaki bir gölün alanı 3600 metrekaredir. Gölün modeldeki alanı nedir [31]?

Çözümde, bir katılımcı boyutları 90 × 40 olarak atadı, uzunlukları ayrı ayrı dönüştürdü ve sonra modelde gölün alanını hesapladı. Bazı arkadaşları gölü 36 × 100 dikdörtgen veya 60 × 60 kare aldı. Çoğu öğrenci için göl şeklinin rasgele sınırları kare ve dikdörtgen olmasına rağmen rasgele atamalar doğru cevap için yol gösterdi. Yine de, hiç kimse sonucun neden farklı şekil ve ölçü seçimlerinden etkilenmediğini açıklayamadı.

Bu örnekteki iş kare birimlerin dönüştürülmesi esnasında öğrencilerin yeteneklerinin test edilmesini hedefliyordu. Uzunluk ölçülerinin küçültülmesi birçok yönden soyutlamanın indirgenmesi olarak yorumlanabilir: düşünce kavramının karmaşıklığının derecesi olarak soyutlamanın indirgenmesi yorumuyla uyum içinde; uzunluk birimlerinin atanması, öğrenenlere düşünce nesnesinin karmaşıklık derecesinin daha da azaltılmasını sağlar. Bu verilen bir bölgede birçok nesne ile çalışmaktan ziyade belli bir nesne ile çalışma fırsatı sağlar. Düşünülen nesne ve düşünen insan arasındaki ilişki kalitesindeki soyutlama seviyesinin indirgenmesi yorumuyla uyum içinde; uzunluk ölçüleri daha tanıdık olarak algılanır ve bu nedenle daha az soyuttur. Süreç-nesne ikilisinin yansıması olarak soyutlamanın indirgenmesi ile uyum içinde; iki kenarın çarpımı olarak alan tanımı, bir şekle ölçüler atayarak oluşturulan bir nesneden ziyade, öğrencilerin bir yöntem olarak alan kavramını yorumlamasını sağlar. Aynı zamanda öğrencilerin uzunluk ölçülerini küçültmesi, taslakta sunulan soyutlama derecesiyle başa çıkmada bir yoldur [31].

1.2 Tezin Amacı

Eğitimde yapılan her çalışmanın temel amacı öğrencilerin başarısı daha üst seviyelere nasıl taşınabilir düşüncesi olmuştur. Bugüne kadar özellikle matematik eğitimi alanında bu yönde birçok çalışma yapılmıştır ve hayat boyunca da yapılmaya devam edecektir.

Bu araştırmanın da temel amacı öğrenci başarısını nasıl artırabiliriz düşüncesidir. Bu amaçla matematik eğitiminde önemli bir yer teşkil eden soyutlama kavramı ele alınmıştır. Araştırmanın amacı da öğrencilerin matematiksel soyutlama seviyelerini incelemektir.

1.3 Hipotez

1. Öğrencilerin genel olarak matematiksel soyutlama seviyeleri düşüktür.

2. Aynı okuldaki öğrencilerin sorular karşısındaki soyutlama seviyeleri paralellik gösterir.

3. Öğrenciler soyutlamayı indirgeme eğilimindedir.

4. Öğrenciler test sistemine yatkındır.
5. Kavramsal değil ezbersel anlama yoğunluktadır.
6. Öğrencilerin bir kısmında soru tipi ezberleme alışkanlığı vardır.

BÖLÜM 2

ARAŞTIRMANIN YÖNTEMİ

Bu bölümde araştırmanın modeli, araştırmanın evreni ve örneklemi, araştırmanın sayıltıları ve sınırlılıkları, veri toplama teknikleri ve toplanan verilerin analizi üzerinde durulmuştur.

2.1 Araştırmanın Modeli

Araştırma yöntemi, araştırmanın yöntemini gerçekleştirebilmek için kullandığı genel yöntemdir [40]. Yapılan bu araştırmada nitel araştırma deseni olan durum çalışması modeli kullanılmıştır.

2.1.1 Nitel Araştırma

Gözlem, görüşme, doküman analizi gibi nitel veri toplama yöntemlerini kullanır. Algıların ve olayların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konmasına yönelik nitel bir sürecin izlendiği araştırmadır [41].

Nitel araştırma orijinini betimsel analizden almaktadır. Nitel araştırmada özel bir durumdan genel bir sonuca ulaşmayı sağlayan tümevarımsal süreç esastır [42].

Nitel araştırma tekniklerinin özelliklerine bakılacak olunursa [41]:

•Doğal ortama duyarlılık sağlaması,

•Araştırmacının katılımcı rolü olması,

•Bütüncül bir yaklaşıma sahip olması,

•Algıların ortaya konmasının sağlanması,

•Araştırma deseninde esnekliğin olması ve

•Tümevarımcı bir analize sahip olmasıdır.

Nitel araştırmaların “nasıl” ve “niçin” sorularına cevap verebilme, araştırmacıya araştırma sürecinde ortaya çıkabilecek değişikliklere adapte olabilecek bir esneklik sağlama ve sosyal süreci anlamaya elverişli olma gibi avantajların yanında, veri toplamanın zaman alıcı olması, toplanan verinin analizinin oldukça zor olması gibi dezavantajları da vardır.

2.1.2 Durum Çalışması

Durum çalışmasında amaç belirli bir durumu aydınlatmadır. Nitel durum çalışmalarının en önemli özelliği bir ya da birkaç durumun derinlemesine araştırılmasıdır. Yani bir duruma ilişkin etkenler (ortam, bireyler, olaylar, süreçler vb.) bütüncül bir yaklaşımla araştırılır ve ilgili durumu nasıl etkiledikleri ve ilgili durumdan nasıl etkilendikleri üzerine odaklanılır.

Durum çalışması, kısa bir zaman içerisinde belirlenen bir problemin tüm yönü ile ele alıp ayrıntılı olarak inceleme olanağı sağlayan bir yöntem olarak düşünülmektedir. Durum çalışması araştırma yöntemlerinin tümünü kapsayabilen bir çalışma olarak tanımlanır [43].

2.2 Araştırmanın Evreni ve Örneklemi

Araştırmanın evrenini İstanbul ilinde yer alan SBS puanlarına göre puanı yüksek olan öğrencilerin yerleştiği 6 anadolu lisesi oluşturmaktadır.

Örneklem seçiminde, amaçlı örneklem yöntemlerinden “maksimum çeşitleme” kullanılmıştır. Maksimum çeşitlemede amaç göreli olarak küçük bir örneklem oluşturmak ve bu örneklemde çalışılan probleme taraf olabilecek bireylerin çeşitliliğini maksimum derecede yansıtmaktır [41].

Araştırmanın örneklemini 6 okulda öğrenim gören 18 dokuzuncu sınıf, 18 onuncu sınıf ve 18 on birinci sınıf olmak üzere 54 öğrenci oluşturmaktadır. Öğrencilerin seçiminde okuldaki başarı düzeyleri dikkate alınmıştır.

2.3 Araştırmanın Sayıltıları

•Araştırmada kullanılan problemlerin öğrencilerin matematiksel soyutlama süreçlerini yansıttıkları kabul edilmektedir.

•Araştırmaya katılan öğrencilerin başarı seviyelerinin arasında fazla bir fark olmadığı varsayılmaktadır.

•Araştırmaya katılan öğrencilerin sorulan soruları ciddiyetle çözdükleri kabul edilmektedir.

•Örneklemin evreni temsil ettiği varsayılmaktadır.

2.4 Araştırmanın sınırlılıkları

•Araştırma dokuz, on ve on birinci sınıflardan 18 er öğrenci olmak üzere 54 öğrenci ile sınırlıdır.

•Araştırma belli matematik konuları ile sınırlandırılmıştır.

•Elde edilen bulgular araştırmaya katılan öğrencilerden elde edilen verilerle sınırlıdır.

2.5 Veri Toplama Teknikleri

Bilimsel araştırmalarda bilgi veren, sorunu çözmemize ya da karar vermemize yardımcı olan her türlü bilgi veya olguya veri denir [44].

Birçok nitel araştırmada birden fazla veri toplama yöntemi beraber kullanılır. Bu duruma ‘veri çeşitlemesi’ (data triangulation) denir. Bu şekilde bir veri toplama yönteminin sınırlılığını, diğer bir veri toplama yöntemi telafi eder. Böylelikle araştırmada elde edilen bulguların geçerlik ve güvenirliğini artırmaya katkı sağlanır [41].

Veri toplama tekniklerini beş kategoride sınıflandırabilir:

A- Yazılı Kaynaklar (kitap, dergi, istatistik sonuçları, raporlar...)

B- Gözlem

C- İçerik Çözümlemesi

D- Görüşme (Mülakat)

E- Soru Kağıdı – Anket

Bu çalışmada araştırmanın yapısına uygun olması bakımından görüşme tekniğinden faydalanılmıştır.

2.5.1 Görüşme

Araştırmalarda yaygın kullanılan veri toplama tekniklerden biri olan görüşme ya da mülakat; önceden hazırlanmış soruları sorduğu ve karşısındaki kişinin sorulara yanıtlar verdiği amaçlı bir söyleşidir [45].

Görüşmenin diğer bir tanımı ise, önceden belirlenmiş ve ciddi bir hedefe yönelik yapılan, karşıdakine soru sorma yöntemiyle yanıtlar alan etkileşime dayalı bir iletişim sürecidir. Tanımda geçen belirtilen süreç, bu karşılıklı yapılacak iletişimin süreğen ve dinamik yapısını ifade eder. Bu dinamik yapı, karşılıklı bir etkileşime dayalı bir bağ kurmayı gerektirir. Görüşme sürecinin planlı ve amaçlı olması özelliği ise görüşme tekniğini, bir sohbet olmaktan farklı kılar ve onu hedeflere yönelik planlanmış bir veri toplama çabası yapar. Görüşmede kullanılan soru ve cevap yöntemi de veri toplarken bir ilişkiyi kurma ve veriye ulaşma yolu olarak nitelendirilebilir [41].

Görüşme, nitel araştırmada temel veri toplama araçlarındandır. Aynı zamanda başkalarını anlamak için kullanılan en güçlü yöntemlerdendir [46]. Görüşmelerin karşılıklı olarak görüşme yapılacak kişiyle aynı mekanda sözlü olarak yapılabileceği gibi ses ve resim iletebilen araçlarla, sağır ve dilsizlerin özel işaretleri kullanılarak da yapılabilir.

Görüşmeler sosyal bir ilişkinin kurulduğu ortamlar, girilen ilişki de sosyal bir etkileşimdir. Dolayısıyla görüşmelerde görüşmecinin yani görüşmeyi yürütecek, soruları yöneltecek kişinin görüşmenin sağlıklı yürütülmesi için dikkat etmesi gereken bazı noktalar vardır. Görüşmelerde görüşmeci hem görüşme sırasında işbirliğini sağlamalı hem doğal ve nesnel olmalı hem de yargılamalardan kaçınmalı ve kendi fikirlerini görüşme süresince beyan etmemelidir. Görüşmecinin rolü ilk olarak durumun tanımlanmasına yardım etmektir. Görüşmecinin bir diğer rolü ise görüşme yapacağı kişi ile işbirliği yaparak onu sorulara ciddiyetle cevap verme konusunda, karşısındaki kişinin kendisine yöneltilen soruları doğru anlamasını sağlayıp soru ile ilişkili cevaplar vermek üzere onu güdülemektir. Görüşmecinin; görüşme yapılacak kişi hazır olduğunda görüşmeye başlaması, ulaşılması zor kişilerle ilişki kurma konusunda yetenekli olması, görüşmenin gizlilik kuralına bağlı kalması, kişinin verdiği cevaplar üzerine herhangi bir oynama yapmaması ve görüşme sırasında kendi hakkında benzer bir olay anlatmaması gerekir. Bu alanda araştırmalar yapan Neuman, görüşmecilerden beklenen tüm bu niteliklerle ilgili olarak 'Eğer görüşmeci doğal ve nesnel olacaksa neden bir robot ya da makina kullanılmıyor?' diye sorgulamıştır. Bu soruya verilen yanıt görüşmecilerin sağladıkları güven ve dostça ilişkidir. Bir görüşmeci, görüşmedeki durumun tanımlanmasına yardım eder. Görüşme yaptığı kişinin, kendisinden istenen bilgiye sahip olup olmadığını, kendisinden beklenilen konuyu anlayıp anlamadığını ve karşısındakinin soruya uygun bir cevap verip vermediğini garantileme şansı vardır. Bu sebeple araştırma için uygun görüşmecinin seçilmesi özenle yapılması gereken bir iştir [45].

2.5.2 Görüşmenin Planlanması ve Yapılması

Balcı mülakatın planlanması sürecini şöyle açıklar [47]:

•Hazırlama; görüşmenin özel amaçlarının kararlaştırılması, yönteminin belirlenmesi, cevaplayıcı hakkında bilgilerin edinilmesidir.

•Düzenleme; görüşme için uygun bir ortamın sağlanması, soruların hazırlanması, görüşmede yer alacak cevaplayıcı ve görüşmecinin zihinsel olarak sürece hazır olmasıdır.

•Görüşmenin Yönetimi; görüşmecinin karşısındakine saygılı olması ve dikkatle dinlemesi, görüşmecinin cevaplayıcıyı güdülemesidir.

•Kapanış; görüşmecinin görüşmenin sonuna gelindiğini bildirmesidir.

•Değerlendirme; görüşmeci sıcağı sıcağına değerlendirilmesidir.

Rummel ise Balcı’dan farklı olarak görüşmenin planlama sürecindeki temel ilkelerden biri olarak görüşme planının daha önce görüşülecek asıl kişi dışında ona benzeyen diğer kimseler üzerinde denenmesini önerir [48]. Bunun dışında ilkeleri arasında yer alan diğer husus da değişik görüşme metotlarının öğrenilmesidir. Görüşmeci ile cevaplayıcı arasında bir ilişkinin kurulabilmesi için görüşmenin amacının net olarak anlatılması, kişinin kendini rahat hissetmesinin sağlaması, görüşmecinin aldığı cevapların güvenirliğini ve hassasiyetini kontrol etmesi, görüşmenin vurgulanan temel ilkeleri arasındadır [48].

2.5.3 Görüşme Tekniğinin Faydaları

Görüşme tekniği dışında kullanılan anket, form, soru listesi vb. araçlar hazırlayarak uygulanan tekniklerle kıyaslandığında görüşme tekniğinin bir takım üstünlükleri vardır:

•Görüşme yüz yüze yapılan bir veri toplama tekniğidir. Bu nedenle görüşmecinin cevaplayıcı ile kurduğu ilişki ne kadar güçlü ise cevaplayıcının verdiği bilgiler de o derece doğru ve ayrıntılı olur. Görüşmeci cevaplayıcıya daha derinlemesine yanıtlar alabilmek için ek sorular sorabilir [49].

•Görüşmede sorulan soruların sıralarının değiştirilebilmesi veya herhangi bir sıraya tabi tutulmadan sunulması açısından cevaplayıcıya bir esneklik de sağlar ve görüşmenin verimliliğini artıran bir katkısı olur [41].

•Yüz yüze görüşmede cevaplayıcının görüşme esnasında kullandığı dilin yanında jest ve mimikleri ile verdiği mesajlar da bilgi verici olabilir ve değerlendirilebilir. Dolayısıyla form ya da anketlere yansımayan ipuçları da görüşme sırasında edinilebilir [49].

•Cevaplayıcının başkalarına danışmadan cevap vermesinin sağlanması, cevaplarda bireyselliğin korunması açısından önemlidir. Bu da veri kaynağının teyit edilmesini sağlar, anket yoluyla elde edilen verilere göre geçerliği daha yüksektir. Aynı zamanda görüşme sırasında cevaplayıcının bulunduğu ortamın kontrol edilmesi açısından da önemlidir [50].

2.5.4 Görüşme Tekniğini Sınırlıkları

•En önemli sınırlılığı maliyetli bir yöntem olmasıdır. Anket gibi veri toplama yöntemleri ile kıyaslandığında sadece büyük değil küçük bir örneklemde bile kişilerle görüşmek için harcanacak yol masrafları, görüşme materyalleri, görüşme kayıtlarının yazıya geçirilmesi oldukça maliyetli olabilir [41].

•Görüşme yönteminde araştırmacı zamanının çoğunu görüşülecek kişiyi tespit etmek, onlarla iletişim kurmak, randevu ayarlamak, belirlenen yere seyahat etmek, görüşmeyi yapmak, görüşmeyle ilgili kayıt tutmak ve onları yazıya geçirmekle harcar. Bu sebeple anket ya da diğer tekniklere kıyasla daha zaman alıcıdır [41].

•En büyük sınırlılıklarından biri de görüşmeciden doğan hatalar olabilir. Görüşmeci, karşısındakinin yanıtlarını yanlış anlayabilir ya da kendi öznelliğini kullanarak yorumlayabilir. Görüşmeci, cevaplayıcının kişisel özelliklerinden (görünüş, cinsiyet, yaş, sosyal statü, tutum, tavır ya da aksan) olumlu ya da olumsuz etkilenebilir, bu durum da veri kaynağı için yanlılığa yol açabilir [41].

•Genellikle cevaplayıcı konu hakkında kayıtlı bir bilgi, yazılı bir kaynak üzerinden konuşmasını yapmaz. Bu sebeple de bu yolla elde edilen bilgiler büyük olasılıkla, cevaplayıcının öznel yargısını ve sadece hatırladıklarını kapsar [41].

•Görüşmecinin, konuşma arasına girmesi, ek sorular yöneltmesi ya da kişiye göre soruların soruluş şeklini değiştirmesi her ne kadar bir avantaj olarak değerlendirse de bu görüşmeciye bir güçlük de yaratabilir. Çünkü bu yolla toplanan verilerin standart olmaması, farklı bireylerden elde edilen bilgilerin karşılaştırılmasında zor ve güvenirliği olumsuz yönde etkileyici bir durum yaratabilir ve bu da bir avantaj olarak görülebilen esnekliğin dezavantaja dönüşmesine sebep olabilir [41].

Görüşme tekniği yapısı bakımından yapılandırılmamış görüşme, yapılandırılmış görüşme ve yarı yapılandırılmış görüşme olmak üzere üç gruba ayrılır:

<u>Yapılandırılmamış görüşmeler</u>: Görüşmeciye büyük hareket ve yargı serbestisi veren, esnek, kişisel görüş ve yargıların kökenlerine inmeyi sağlayan bir görüşme şeklidir. Bu görüşmeler daha çok, araştırmaların başlangıç aşamalarında soruna ilişkin önemli değişkenleri saptarken yararlı olurlar [50]. Bu görüşmelerin geleneksel türü, etnografik

görüşme olarak da adlandırılan standartlaştırılmamış, açık uçlu, derinlemesine görüşmedir [46].

Yapılandırılmış görüşmeler: Bu görüşme, daha çok, önceden yapılan ve ne tür soruların ne şekilde sorulup, hangi verilerin toplanacağını en ayrıntılı biçimde saptayan, görüşme planının aynen uygulandığı bir görüşmedir [50]. Bu türde yanıtlayıcıdan önceden belirlenmiş yanıt kategorileri içinde önceden belirlenmiş bir dizi soruyu yanıtlaması istenir. Görüşme formuna sorulacak tüm sorular yazıldığı için görüşme esnasında görüşmecinin verdiği bazı beklenmeyen cevaplara ya da açıklamalara göre görüşmenin seyri değişmez [44].

Yarı Yapılandırılmış Görüşmeler: Bu tür görüşme, yapılandırılmış ve yapılandırılmamış görüşmeden farklı olarak görüşme formunun yarısı yapılandırılmış, yarısı da yarı yapılandırılmış bir biçimde oluşur. Görüşmecinin, görüşme esnasında vereceği tepkilere bağlı olarak açık uçlu, başka seçenekler konularak görüşme formu esnek bir biçimde hazırlanmış olur. Bu görüşmede görüşmeci ile cevaplayıcı arasında kimse bulunmaz. Görüşme daha önce saptanan yer, tarih ve saatte iki kişi arasında yapılır. Kişiye özel bilgiler sadece bireysel görüşme ile alınabilir [44].

Bu araştırma için çalışma kağıtları önceden hazırlanmış ve önceden belirlenmiş öğrencilere verilmiştir. Öğrenciler soruları araştırmacı nezdinde çözmüştür. Bu görüşme esnasında öğrenciler yazılı olarak verdikleri cevapları sözel olarak da açıklamışlardır. Bu esnada verileri daha sonra incelemek için ses kaydı yapılmıştır. Öğrencilerin verdikleri cevaplara ve tepkilere göre araştırmacı tarafından bir takım sorular ilave edilmiştir.

Bu nedenle, yapılan bu çalışmada görüşmenin yarı yapılandırılmış mülakat olarak seçilmesi çalışmanın yapısına daha uygun görülmüştür.

2.6 Nitel Verilerin Analizi

Nitel araştırmaların en zor evrelerinden biri de toplanan verilerin analiz edilmesi sürecidir. Bu zorluk temelde, her nitel araştırmada elde edilen verilerin farklı özellikler taşımasından ve dolayısıyla standart bir veri analizi sürecini takip etmenin güçlüğünden kaynaklanmaktadır. Nitel araştırmalarda veri analizi çeşitlilik, yaratıcılık ve esneklik gerektirir. Her nitel araştırma farklı bir takım özellikler taşır ve veri analizinde bir takım yeni yaklaşımlar gerektirir, yani her araştırma kendine has bir üslupla analiz edilir [41].

Nitel veri analizinde 3 temel kavram vurgulanır [51]:

1.Betimleme: Bu yaklaşım ile "ne" sorusuna yanıt bulunabilir. Araştırmada toplanan verilerin araştırma problemine ilişkin olarak neleri söylediği ya da hangi sonuçları ortaya koyduğu ön plana çıkmaktadır.

2.Analiz: "Neden" ve "nasıl" sorularına yanıt aranır. Veri setinde doğrudan görülemeyen, ancak kavramsal kodlama ve sınıflama yoluyla temaların ve bu temalar arası anlamlı ilişkilerin ortaya çıkarılması temel işlevidir.

3.Yorumlama: "Bu söylenen ya da gözlenen ne anlama gelmektedir?" sorusuna yanıt arar.

Strauss ve Corbin göre nitel veri analizi için iki yöntem vardır [52]: Betimsel analiz ve içerik analizi.

Betimsel Analiz: Bu yaklaşıma göre, elde edilen veriler, daha önceden belirlenen temalara göre özetlenir ve yorumlanır. Veriler araştırma sorularının ortaya koyduğu temalara göre düzenlenebileceği gibi, görüşme ve gözlem süreçlerinde kullanılan sorular ya da boyutlar dikkate alınarak da sunulabilir. Betimsel analizde, görüşülen ya da gözlenen bireylerin görüşlerini çarpıcı bir biçimde yansıtmak amacıyla doğrudan alıntılara sık sık yer verilir. Bu tür analizde amaç, elde edilen bulguların düzenlenmiş ve yorumlanmış bir biçimde okuyucuya sunmaktır. Bu amaçla;

1. Elde edilen veriler mantıklı ve anlaşılır biçimde betimlenir.

2. Yapılan bu betimlemeler yorumlanır.

3. Neden-sonuç ilişkileri irdelenir ve birtakım sonuçlara ulaşılır.

4. Araştırmacının yapacağı yorumlar arasında ortaya çıkan temaların ilişkilendirilmesi, anlamlandırılması ve ileriye yönelik tahminlerde bulunulması işlemleri vardır [41]. Betimsel analiz dört aşamadan oluşur [41]:

•Betimsel analiz için bir çerçeve oluşturma; Veri analizi için araştırma sorularından, araştırmanın kavramsal çerçevesinden ya da görüşme veya gözlemde yer alan boyutlardan yola çıkarak veri analizi için bir çerçeve oluşturulur. Bu çerçeveye göre verilerin hangi temalar altında organize edileceği ve sunulacağı belirlenir.

•Tematik çerçeveye göre verilerin işlenmesi; Daha önce oluşturulan çerçeveye göre elde edilen veriler okunur ve organize edilir.

•Bulguların tanımlanması; Organize edilen veriler tanımlanır ve gerekli yerlerde doğrudan alıntılarla desteklenir.

•Bulguların yorumlanması; Tanımlanan bulguların açıklanması, ilişkilendirilmesi, anlamlandırılması bu aşamada yapılır.

İçerik Analizi: İçerik analizinde temel amaç, toplanan verileri açıklayabilecek kavramlara ve ilişkilere ulaşmaktır. Betimsel analizde özetlenen ve yorumlanan veriler, içerik analizinde daha derin bir işleme tabi tutulur ve betimsel bir yaklaşımla fark edilemeyen kavram ve temalar bu analiz sonucunda keşfedilebilir. İçerik analizinde temelde yapılan işlem, birbirine benzeyen verileri belirli kavramlar ve temalar çerçevesinde bir araya getirmek ve bunları okuyucunun anlayabileceği bir biçimde düzenleyerek yorumlamaktır [41].

Bu araştırmada, betimsel analiz yaklaşımı kullanılmıştır. Çünkü yapılan yarı yapılandırılmış mülakat yönteminde veri analizi için bu yöntem daha uygundur. Ayrıca bu yaklaşım, verilerin araştırma sorularının ortaya koyduğu temalara göre organize edilmesine ve görüşmede kullanılan sorular veya boyutlar dikkate alınarak sunulmasına imkan vermektedir.

BÖLÜM 3

BULGULAR VE YORUMLAR

Bu bölümde çalışma sorularına ve araştırmaya katılan öğrencilerden elde edilen bulgu ve yorumlara yer verilecektir.

3.1 Çalışma Soruları

Araştırmaya katılan öğrencilere sorulan sorular seçilirken hem müfredatlarına uygun olmasına hem de öğrencilerin soyutlama yapabilecekleri konular olmasına dikkat edildimiştir.

Soru Grubu 1

9. Sınıf soruları

1. $n^2 - n$ ifadesinin 2 ile bölündüğünü gösteriniz.

2. a+1, b+1, c+1 3 ile kalansız bölünüyor. O halde a+b+c 3 ile bölünür mü?

10.sınıf soruları

1. $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=?$ $|x_1 - x_2| = ?$

2. $A = 2x^2 + y^2 - 2xy + 4x + 7$ ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

11. Sınıf Soruları

1. $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = 1^2+3^2+5^2+.............+(2n-1)^2$

2. $\sum_{k=1}^{n}\frac{k.(k+1)}{2} = 1+3+6+..............+\frac{n.(n+1)}{2}$

3. $\sum_{k=1}^{n} f(k) = n^4 \Rightarrow f(k) = ?$

Soru Grubu 2

1. $(14)_6 + (15)_6 = (?)_6$

2. $3^2 x 5$ x 7^3 çarpımı M olsun. M 5,11 ve 21 ile bölünür mü?

3. 12485 ile 12495 arasında 7 ile bölünebilen sayı var mıdır?

3.2 Soru Grubu 1

Bu bölümde soru grubu 1 de sorulan sorulardan elde edilen cevaplara ve yorumlara yer verilmiştir.

3.2.1 9. Sınıf Öğrencilerine Ait Bulgular ve Yorumlar

9. sınıflara sorulan ilk soruda öğrencilerden $n^2 - n$ ifadesinin 2 ile bölündüğünün gösterilmesi istenmekteydi. Bu çalışmanın konusu olan soyutlama açısından bakacak olursak, n değeri doğal sayılar kümesinin herhangi bir elemanıdır. Öğrencilerden beklenen de bu kümenin özelliğini düşünerek soruyu çözmeleri, yani doğal sayılar kümesinde var olan tek-çift kümelerinin veya ardışık sayılar kümesinin özelliklerini göz önüne alarak soruya yaklaşmalarıdır.

Aşağıda yapılan çalışmadan elde edilen öğrenci cevaplarından bazıları verilerek bunlar üzerine daha detaylı analiz yapılmıştır:

1.

n^2-n

n; çift ise 2'ile bölünür

$n=4$

$16-4=12$

$n=90$

$8100-90=8010$

$n=3$

$9-3=6$

$n=5$

$25-5=20$

2.

n^2-n

$\frac{n(n-1)}{2}$

$n(n-1) \mid 2$

n=3 diyelim

$1 \quad \frac{9}{2}$

$2 \quad \frac{2}{2}$

$(49^2)-49$

$\frac{49(49-1)}{49}$

3.

n^2-n ifadesinin 2 ile bölündüğünü gösteriniz.

$n=4$ için

$16-4=12$

$\frac{12}{2}=6$

$n=5$ için

$25-5=20$

$\frac{20}{2}=10$

4.

n²-n ifadesinin 2 ile bölündüğünü gösteriniz.

$25 - 5 = 20 \div 2$
$36 - 6 = 30$
$49 - 7 = 42$
$81 - 9 =$

$n^2 - n \mid 2$

$n(n-1) \mid 2$

$7 . 6 = 56 \div 2 = 28$

$9 . 8 = 72 \div 2 = 36$

$3 . 2 = 6 \div 2 = 3$

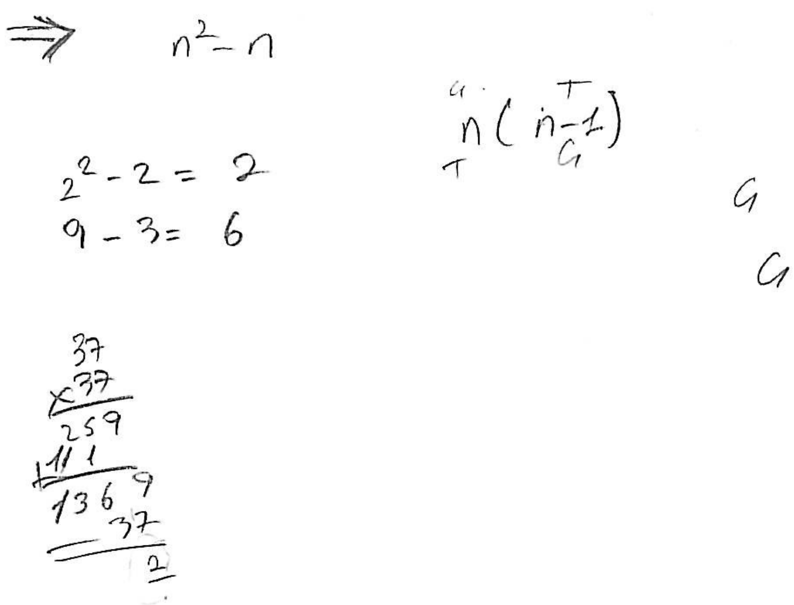
$18 . 17 = 306 \div 2 = 153$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 17 \\ \hline 126 \\ 18 \\ \hline 306 \end{array}$$

Bu örnekleri vermekte ki amaç okuyucularının da verilen cevapları detaylı bir şekilde görmeleridir. İlk 4 örnekte öğrenciler görüleceği üzere soruyu çözmek için doğal sayılar kümesinden tek tek eleman seçerek cevaba yaklaşmışlardır. Bazı öğrenciler ilk olarak tek sayılara bölünemez türünden cevaplar vermiş, bir kısmı asal sayılarla bir bağlantısı olduğunu düşünmüşlerdir. Fakat daha sonra sayısal değer verdiklerinde hep bölündüğünü görmüşlerdir. Bazı öğrenciler ifadeyi çarpanlarına ayırmalarına rağmen ardışık sayı olmalarını dikkate almamışlar ve sayısal değer vermişlerdir.

Burada öğrenciler soyutlama seviyesini indirgemişlerdir. Çünkü verilen soruda doğal sayılar kümesini göz önünde tutmaktan ziyade bu kümenin elemanlarını seçerek sonuca gitmeyi denemişlerdir. Yani daha karmaşık bir yapı olan doğal sayılar kümesi yerine bu kümenin elemanlarını teker teker denemeye çalışmışlardır. Sonuç olarak daha karmaşık bir yapı olarak doğal sayılar kümesi, kümenin elemanlarına göre daha soyut bir yapıya sahiptir.

5.



Bu cevap için öğrenci ile yaşanan diyalogu şöyledir:

Araştırmacı: $n^2 - \mathbf{n}$ ifadesinin 2 ile bölündüğünü gösterebilir misin?

Ayşegül: Değer vererek çözebilirim, tek sayılar veya çift sayılar koyarak

Araştırmacı: Peki istediğinin gibi yapabilirsin

Ayşegül: Değer vererek yapayım o zaman. 1 verdiğimde 1x1- 1=0 bölünür. 2 verirsem 2x2-2= 2 bölünür, bir de 3 için deneyeyim 3x3-3=6 bölünür. O halde ifade 2 ile tam bölünür.

Araştırmacı: Daha büyük bir değer için ne yapacaksın peki, mesela 37?

Ayşegül: Hmm…. 37 mi demiştiniz? Çarpardım herhalde yine, 37x37-37=…2 son basamağı iki oluyor o zaman bölünür.

Sorunun devamında öğrenci ile yapılan görüşmede daha genel bir ifadeyle yani sayısal değerler atfetmeden yapabilir misin diye sorduğumuzda tabi biraz yardımımızla ifadeyi çarpanlara ayırıp tek-çift kümelerinin özelliklerinden sonuca ulaşmıştır. Burada şunu da özellikle belirtmek gerekir belki de, öğrenci sorunun bu şekilde çözümünden daha çok mutluluk duymuştur.

Genel olarak çalışma yapılan öğrenciler soruya sayısal değerler vererek ulaşmayı denemişlerdir. Fakat doğal sayılar kümesinin özelliklerini dikkate alarak çözen öğrenciler de olmuştur.

6.

n^2-n ifadesinin 2 ile bölündüğünü gösteriniz.

$n = T \Rightarrow T^2 = T \quad T - T = Ç$

$n = Ç \Rightarrow Ç^2 = Ç \quad Ç - Ç = Ç$

Sonuç iki türlüde çift çıkıyor. Her çift sayı 2 ile bölünür.

$\boxed{\begin{array}{l} Ç = \text{Çift} \\ T = \text{Tek} \end{array}}$

7.

n^2-n ifadesinin 2 ile bölündüğünü gösteriniz

$n(n-1)$

Çiftse Tek
Tekse Çift olur her türlü bölünür

8.

n^2-n ifadesinin 2 ile bölündüğünü gösterin

$n^2 - n = n.(n-1)$ → Ardışık olduğu için n yada n−1 çift sayıdır.

6, 7 ve 8. örneklere bakıldığında ise öğrenciler doğal sayılar kümesini göz önünde tutmuşlar, tek-çift kümelerin ve ardışık sayılar kümesinin özelliklerini kullanarak sonuca gitmişlerdir. Öğrenciler burada elemanların özelliklerinden ziyade kümenin özelliklerini dikkate alarak soyut düşünme yeteneklerini göstermişlerdir.

Son olarak da öğrencilerin verilen sorudan bir genelleme yaparak sonuca gittiği örneklerden bazıları aşağıda verilmiştir.

9.

n^2-n ifadesinin 2 ile bölündüğünü gösteriniz

$n=2$ için n^2-n bölünür.

Çift sayının veya tek sayının karesi her zaman ~~çifttir~~. pozitiftir.

$n=10$ için ikiye bölünür

Bir sayının karesinden kendisi çıktığı zaman kalan sonuç çifttir.

21

10.

n^2-n ifadesinin 2 ile bölündüğünü gösteriniz

$n.n-n$

$n^2-n \,|\, 2$

Her sayının karesinden kendisini çıkardığımızda sonuç çift çıkar.

Örn: $3^2=9-3=6$

Örneklerden görüldüğü gibi özellikle bu iki öğrenci " bir sayının karesinden kendisini çıkardığımız zaman sonuç çift çıkar" genellemesi yaparak sonuca ulaşmışlardır ve eski bilgilerini kullanarak yeni bir matematiksel yapı inşa ederek matematiksel soyutlamaya güzel bir örnek sunmuşlardır.

9. sınıf öğrencilerine sorulan ikinci soruda ise,

a+1, b+1 ve c+1 ifadeleri 3 ile kalansız bölünüyor. O halde a+b+c ifadesi 3 ile bölünür mü?

sorusuna cevap arandı. Öğrencilere sorulan bu soruda onlardan beklenen verilen soruda bölünebilmenin özelliklerini kullanarak sonuca varmalarıydı.

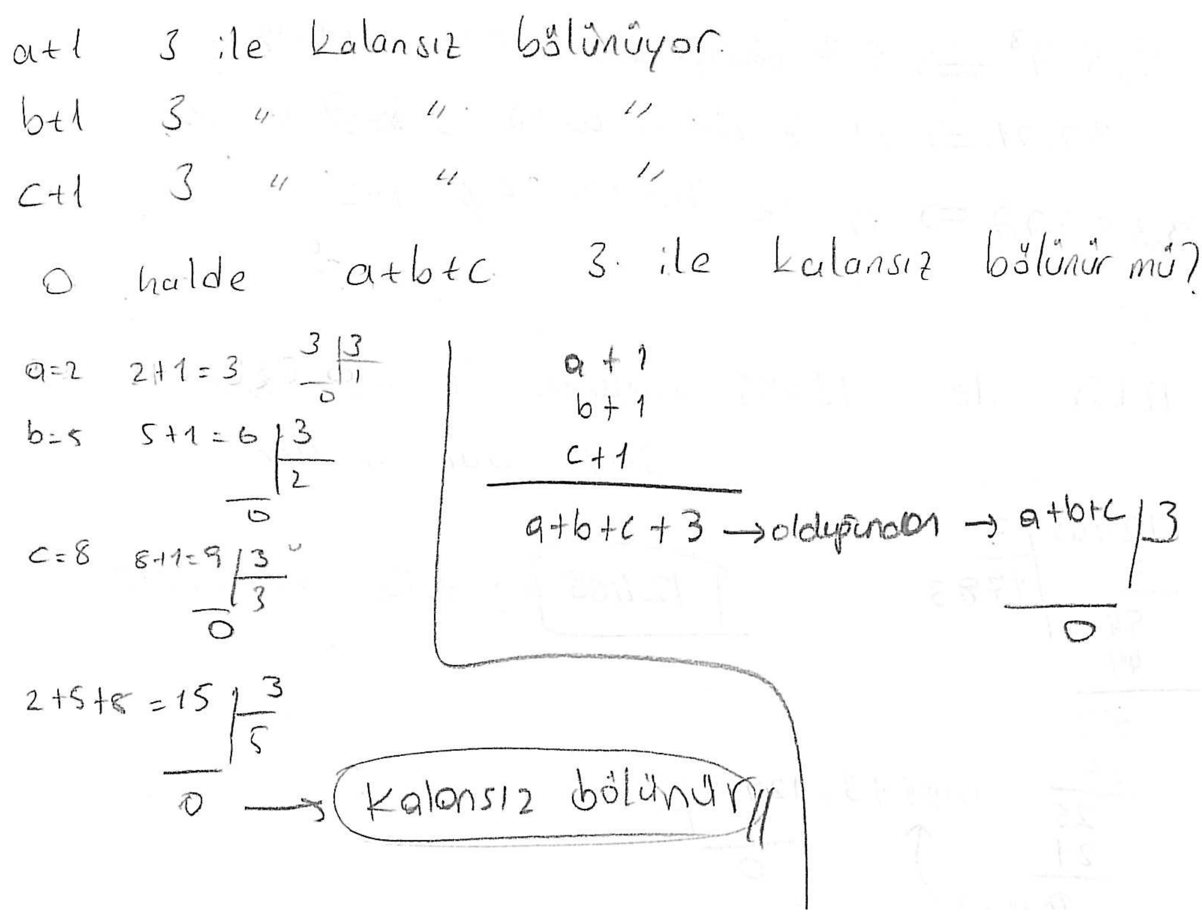
Çalışma kağıtlarına bakıldığında genel olarak iki çözüm göze batmaktadır.

i. Öğrencilerin sayısal değerler vererek sonuca gittikleri

ii. Modüler aritmetik ve bölünebilmenin özelliklerini kullanarak sonuca gittikleri

Çalışma kağıtlarından örnekler verilecek olursa;

1.



a+1 3 ile kalansız bölünüyor.
b+1 3 " " "
c+1 3 " " "
O halde a+b+c 3 ile kalansız bölünür mü?

a=2 2+1=3
b=5 5+1=6
c=8 8+1=9
2+5+8=15 → kalansız bölünür

a+1
b+1
c+1
a+b+c+3 → olduğundan → a+b+c | 3

2.

a+1 3 ile kalansız bölünüyor
b+1 3 " " "
c+1 3 " " "

O halde a+b+c 3 ile bölünür mü?

a=2 b=2 c=2 için
6, 3 ile bölünür.

3.

$a+1/3$ $b+1/3$ $c+1/3$ $a+b+c/3$

$a=2$ $b=5$ $c=8$

Çalışma kağıtlarından bazıları verilen bu örneklerde görüldüğü gibi öğrenciler a, b ve c ye doğrudan sayısal değer vererek sonuca gitmeyi denemişlerdir. Daha çok test sorularında karşılaşılan bu çözüm yolu öğrencilere hem pratik bir çözüm gibi geliyor hem de soruda fazla vakit kaybetmemelerini sağlıyor. Fakat burada asıl dikkati çeken nokta öğrencilerin karşılaştıkları bu soruda direk olarak bu çözüm yolunu seçmeleridir. Onlar verilen soru için daha genel düşünmekten ziyade bilinmeyenlere sayısal değerler atfederek soruyu somutlaştırma yolunu seçmişlerdir. Bu açıdan bakıldığında bu örneklerde öğrenciler soyutlama seviyesini indirgemişlerdir.

Aşağıdaki öğrenci verilen soru için iki yöntem kullandı. İlkinde modüler aritmetiğin özelliğini kullanarak ifadelerden kalanları topladı ve sonucun 3 bölündüğünü gördü. İkinci çözümünde ise ifadeleri taraf tarafa toplayarak sonuca gitmeyi denedi. Sonuç olarak a+1, b+1 ve c+1 ifadeleri 3’ e bölünüyorsa toplamları da 3 bölünür. Daha sonra çıkan sonucu da yani a+b+c+3 ifadesini de 3 zaten 3 e bölünür, o halde a+b+c ifadesi de

3 e bölünür diyerek sonuca ulaştı. Öğrenci burada matematiksel soyut düşünceye güzel bir örnek veriyor; çünkü bilinmeyenlere herhangi bir sayısal değer yani özel bir değer vermiyor ve en önemlisi a, b ve c nin bulunduğu kümeyi daraltmadan sonuca gidiyor.

4.

a+1 3 ile kalansız bölünüyor
b+1 3 " " "
c+1 3 " " "
o halde a+b+c sayısı 3 ile bölünür mü?

I. yol
a+1 3 ile tam bölünüyorsa a'nın 3'e böl. kal. 2'dir
b+1 " " " " b'nin " " 2'dir.
c+1 " " " c'nin " " 2'dir.

$$a+b+c \equiv 2+2+2 \equiv 6 \equiv 0 \pmod 3$$

Cvp=0

II. yol

$$a+1+b+1+c+1 \equiv 0 \pmod 3$$

$$\underbrace{a+b+c}_{\text{3'e böl. kal. 0 olur.}} + \underbrace{3}_{\text{3'e böl. kal. 0}} \equiv 0 \pmod 3$$

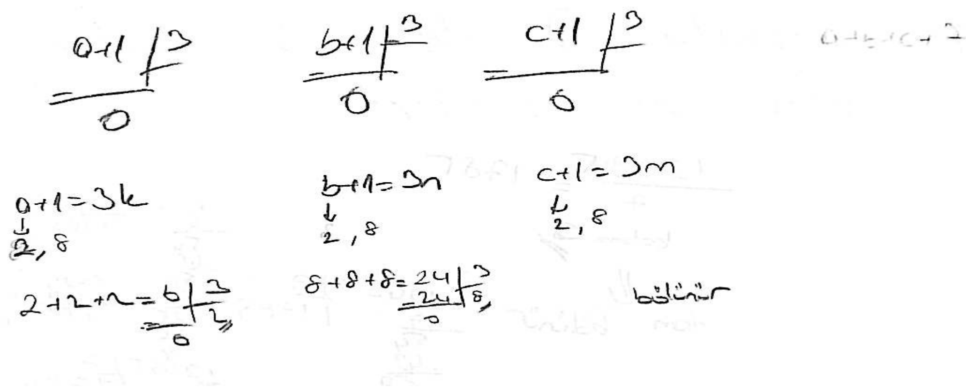
Başka bir örnek çözüm de ise öğrenci ile şu diyalog geçmiştir.

Araştırmacı: Bu soruya baktığında verilenlere göre a+b+c de 3 ile bölünür mü?

Berivan: Buna benzer bir soruyu sınıfta da çözmüştük aslında (öğrenci bölünebilme kurallarını uygulayarak ifadeleri 3 ün katları şeklinde yazar..) ama devamında ne yaptık hatırlamıyorum

Araştırmacı: Peki sen şimdi soruyu çözmeye devam etsen ne yapardın?

Berivan: Ya ne yaptığımızı tam hatırlamıyorum ama değer verirsem oluyor herhalde evet bölünüyor.



Öğrenci sorunun çözümüne başlarken bölünebilmenin özelliklerini kullanarak çözüme gitmeyi deniyordu fakat yaptığı bu yöntem sınıfta çözdüğü bir probleme benzediğinden onunla bire bir örtüştürerek çözmeye çalıştı. Sınıfta çözdüğü soruyu da tam olarak hatırlayamadığından sorunun yarısında ne yapacağını bilemedi ve sadece çözüm yapmak adına a, b ve c ifadelerine sayısal değerler vererek sonuca gitmeyi denemiştir.

3.2.2 10. Sınıf Öğrencilerine Ait Bulgular ve Yorumlar

10. sınıf öğrencileriyle yapılan çalışmada ilk olarak müfredatlarında bulunun 2. Dereceden denklemler ve çarpanlara ayırma konularından birer soru soruldu. Bu sorularda ki amaç öğrencilerin soruya bakış açılarını görmek ve yapabilecekleri çıkarımlar üzerine konuşmaktı. İlk olarak,

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir. O halde

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=?$ $|x_1 - x_2|= ?$

sorusuna cevap arandı. Öğrencilere ilk olarak kökler toplamı ve kökler çarpımından doğrudan sonuca ulaşabilecekleri daha tanıdık gelen bir yapı soruldu. Daha sonra çok fazla karşılaşmadıkları mutlak değer içinde kökler farkı soruldu.

Çalışma kağıtları incelendiğinde sorunun ilk kısmını hemen hemen bütün öğrenciler doğru bir şekilde yaptığı görüldü. Bu öğrenciler derslerde yaptıkları kökler toplamı ve kökler çarpımı formüllerinden doğrudan sonuca ulaştılar. Sorunun ikinci kısmı ise daha belirleyici oldu, bu kısımda soruya hiç cevap veremeyenler, ezberledikleri formülü doğrudan yazanlar ve verilen ifadeyi önceden bildikleri matematiksel bilgilerini kullanarak cevaplandıranlar oldu. Şimdi bu üç grubun cevaplarını örneklerle beraber incelenmiştir.

1.

$ax^2+bx+c=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=? \qquad |x_1-x_2|=?$$

$$x_1+x_2$$

$$\frac{x_1+x_2}{x_1 \cdot x_2} \qquad \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}$$

2.

$ax^2+bx+c=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 ise

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=? \qquad |x_1-x_2|=?$$

$$(x_2) \quad (x_1) \qquad -\frac{b}{a} \qquad \frac{b}{a}//$$

$$\frac{x_2+x_1}{x_1 \cdot x_2} \qquad \frac{-\frac{b}{\cancel{a}}}{\frac{c}{\cancel{a}}} \qquad -\frac{b}{c}//$$

Çalışma kağıtlarından verilen 1. ve 2. örneklerde görüldüğü gibi öğrenciler sorunun ilk kısmını ezberledikleri formüllerle doğrudan yaptılar. İkinci kısımda ise herhangi bir yorum da bulunamadılar. Burada ortaya çıkan fark belki de bize şunu gösteriyor ki; öğrenciler test sistemine yatkın olduklarından ve ilk kısımdaki soruyla çok karşılaştıklarından yapı tanıdık geliyor fakat sorunun diğer kısmında sorulan yapıyla ise pek karşılaşmadıklarından dolayı soruda herhengi bir işlem yapamadılar. Bu da bize öğrencilerin tanıdık olmadıkları bir yapıyla karşılaştıklarında daha önceden bildikleri matematiksel yapıyla ilişki kuramadıklarını yani soyutlama yapamadıklarını gösteriyor.

3.

$ax^2+bx+c=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir

$\Delta = b^2-4ac$

$|x_1-x_2| = ?$

$$|x_1-x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \boxed{\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}}$$

4.

$ax^2+bx+c=0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2} = ?$ $\quad |x_1-x_2| = ?$

$$\frac{x_2+x_1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{\frac{-b}{\cancel{a}}}{\frac{c}{\cancel{a}}} = -\frac{b}{c}$$

$$(x_1-x_2) = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{b^2-4ac}{|a|} =$$

3. ve 4. örneklerde ki öğrencilerin belki de ezber yetenekleri daha iyi olduklarından mutlak değerde kökler farkının değerini de hatırlıyorlardı. Fakat burada asıl dikkat çeken nokta öğrencilerin kavramsal değil ezbersel anlamayı gerçekleştiriyor olmalarıdır. Bir öğrenciyle aramızda geçen diyalog da şunlar geçmektedir:

Araştırmacı: Bu formüllerin nasıl oluştuklarını biliyor musun?

Öğrenci: Yok hayır bilmiyorum. Sınıfta böyle öğrendik

Araştırmacı: Peki merak edip hocanıza sordun mu?

Öğrenci: Yok sormadım

Bu konuşmadan anlaşılacağı üzere öğrenciler sınıfta ezberledikleri yapıları tamamen soruda uyguluyorlar. Hatırlayamadıklarında ise ilk kısımda ki öğrenciler gibi herhangi bir yorumda bulunamıyorlar.

5.

$$\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2} = \frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{-b}{c}$$

$$(x_1-x_2)^2 = x_1^2+x_2^2-2x_1\cdot x_2 \longrightarrow (x_1-x_2)^2 = \frac{b^2-2ac}{a^2} - \frac{2c}{a(a)}$$

$$(x_1+x_2)^2 = x_1^2+x_2^2+2x_1\cdot x_2 \qquad |x_1-x_2| = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{a^2}}$$

$$\frac{b^2}{a^2} = x_1^2+x_2^2+\frac{2c}{a}$$

$$\frac{b^2-2ac}{a^2} = x_1^2+x_2^2$$

6.

$$\frac{x_1+x_2}{x_1x_2} \qquad \frac{\frac{-b}{\cancel{a}}}{\frac{c}{\cancel{a}}} = \frac{-b}{c} \qquad \Delta = b^2-4ac \qquad \frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$|x_1-x_2|$$

$$\cancel{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

$$\cancel{\frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}} \qquad \cancel{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

$$\frac{-\cancel{b}+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{\cancel{b}+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\frac{2\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

$$\cancel{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

$$\cancel{\frac{b^2-\Delta}{4a^2} \qquad \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}}$$

$$\cancel{\frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{-b}{c}}$$

5. ve 6. örneklere bakıldığında ise iki farklı çözüm yöntemini tercih ediyorlardı öğrenciler. İlki daha önceden öğrendikleri kök değerlerini yerine yazarak sonuca ulaşanlar, diğerleri ise karşılaştıkları ifadeyi bildikleri yapılara yani kökler toplamı ve

kökler çarpımını içerecek bir ifadeye dönüştürerek sonuca ulaşanlardı. Burada öğrenciler kısmen de matematiksel soyutlama yaptılar. Çünkü daha önceden öğrenmiş oldukları yapıları verilen soruda nasıl kullanabilirim düşüncesiyle bir ilişki kurmuş ve sonuca ulaşarak yeni bir matematiksel yapı oluşturmuşlardır.

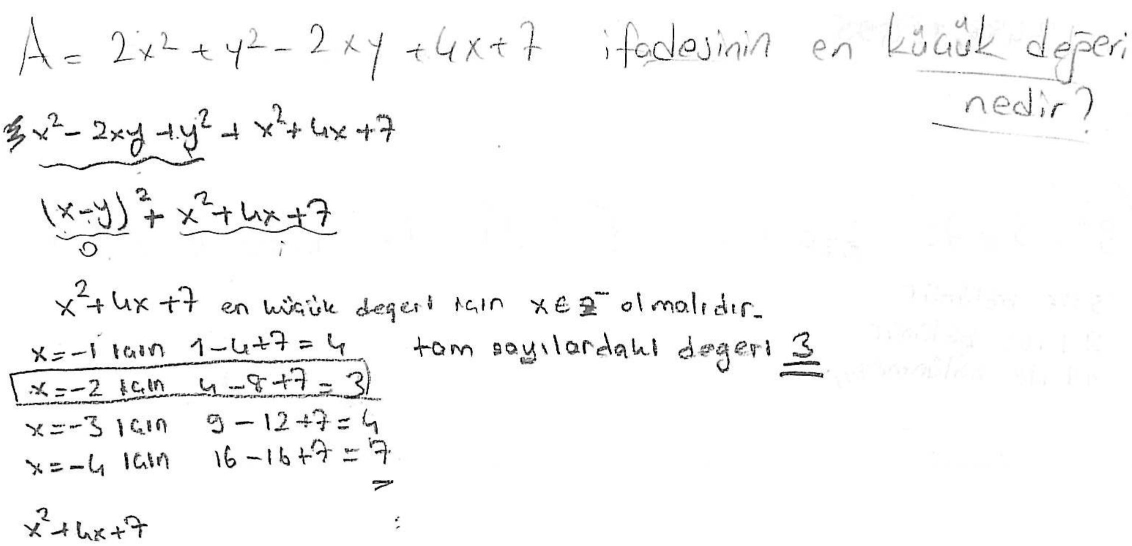
Tabi sorulara yanlış cevap veren öğrenciler de olmuşlardır. Bunlar özellikle ifadelerin formüllerini hatırlamayıp sadece çözün yapmak adına bir cevap veren öğrencilerdi ve sayıları çok azdı.

10. sınıf öğrencileriyle yapılan çalışmada ikinci olarak,

A= $2x^2 + y^2 - 2xy + 4x + 7$ ifadesinin alabileceği en küçük değer soruldu.

Soruda öğrencilerin çarpanlara ait bilgilerini kullanarak sonuca gitmeleri gerekiyordu. Tabii bunu yaparken "bir ifadenin karesi en küçük sıfırdır" genellemesini kullanmalarını veya bunu görmeleri bekleniyordu.

Öğrencilerin bir kısmı soru hakkında hiç yorum yapamadılar ve kalem dahi oynatmadılar. Bir kısmı ise değer vererek sonuca ulaşmayı denediler. Bunlardan bazıları başarılı da oldu. Aşağıdaki örnekte,


A = $2x^2+y^2-2xy+4x+7$ ifadesinin en küçük değeri nedir?

$\underbrace{x^2-2xy+y^2}+x^2+4x+7$

$\underbrace{(x-y)^2}_{0}+\underbrace{x^2+4x+7}$

x^2+4x+7 en küçük değeri için $x \in \mathbb{Z}^-$ olmalıdır.

$x=-1$ için $1-4+7=4$ tam sayılardaki değeri $\underline{3}$

$\boxed{x=-2 \text{ için } 4-8+7=3}$

$x=-3$ için $9-12+7=4$

$x=-4$ için $16-16+7=7$

x^2+4x+7

Öğrenci kendine tanıdık gelen (x-y) ifadesini karesini gördü, bunu sıfıra eşitledi ve geriye kalan yapıya değer vererek sonuca ulaşmayı hedefledi. Öğrenci ifadenin en küçük değerinin negatif tamsayılarda olduğunu varsayarak -1 den itibaren değerleri denemeye başladı ve -2 için sonucun en küçük olduğunu gördü. Aslında öğrenci bir ifadenin karesinin sıfır olduğunu belirterek çözüme başladı fakat $x^2 + 4x + 7$ ifadesine ulaştığında tam olarak ne yapacağını bilemedi ve değer vermeyi denemeye başladı. Öğrenci burada soyutlama seviyesini indirgedi. Çünkü ele aldığı negatif tam sayılar kümesinin elemanlarını teker teker deneyerek sonuca ulaşmayı denedi. Sonuçta kümenin elemanları sadece bir elemandır ve kümeden daha küçüktür ayrıca kümeye aittir ve en önemlisi kümeye göre daha az soyuttur.

Soyutlamanın indirgenmesi konusundan bahsederken Hazzan’ ın [21] de ele aldığı düşünülen nesne ve düşünen insan arasındaki soyutlama seviyesinin bir örneğine yapılan çalışmada rastlanmıştır. Hazzan burada soruyu çözen kişinin problemi tam olarak anlamayıp kendi bildiği bir çözümü yapmasından bahsediyordu. Öğrencinin çalışmasında bakıldığında ise;

$A = 2x + y^2 - 2xy + 4x + 7$ ifadesinin en küçük değeri kaçtır?

$$2xy - y^2 = 6x + 7$$

$$y^2 = 2xy - 6x - 7$$

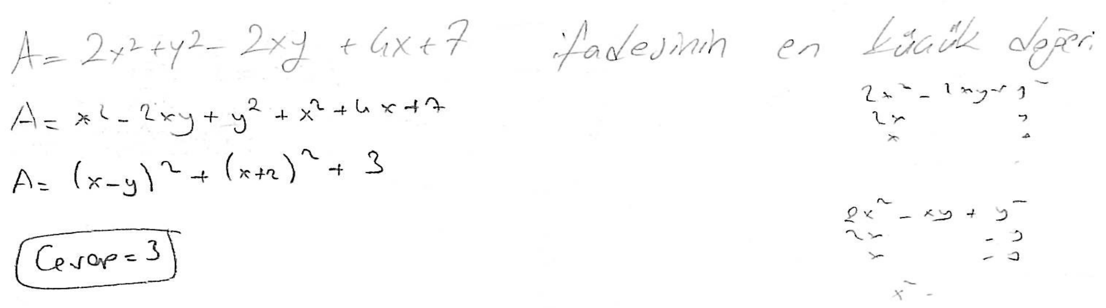
$$y^2 = x(2y-6) - 7$$

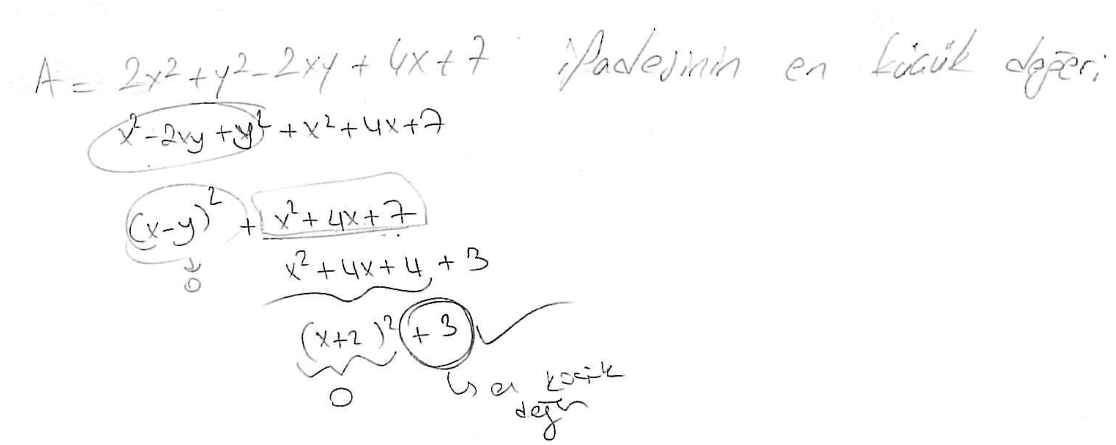
$$\frac{y^2 + 7}{2y-6} = x \qquad y_1 \; y_2 \text{ kökleri}$$

$$\frac{y^2}{2y-6} + \frac{7}{2y-6} = x$$

Öğrenci soruyu parabol konusundanmış gibi algılayıp buradan x ve ye değerlerini bulmaya çalıştı. Daha sonra tepe noktasını bularak çözüme gidecekti. Öğrencinin mantığı doğruydu, yani bir parabolde tepe noktaları bulunarak ifadenin alabileceği en küçük veya en büyük değer hakkında yorum yapılabilir. Fakat bu soru için doğru bir yol değildi. Burada öğrenci soruyu kendisine daha tanıdık bir hale getirdi ve soyutlama seviyesini indirgedi.

Son olarak da “bir ifadenin karesi sıfırdır” genellemesinden yola çıkarak çözüm yapan öğrencilerin çalışmalrı vardır.





Bu örneklere bakıldığında dikkati çeken iki nokta vardır. Öğrenciler çarpanlara ayırma konusuna hakimler ve karşılaştıkları problemde ifadelerin karesi olduğunu fark edip problemi çözmeyi deniyorlar. Çünkü öğrenciler şunu biliyorlar ki; bir ifadenin karesinin alabileceği en küçük değer sıfırdır. Soyutlama seviyesi açısından bakıldığında, öğrenciler burada daha önceden öğrenmiş oldukları matematiksel yapılar arasında ilişki kurarak matematiksel soyutlamayı gerçekleştirmişlerdir.

3.2.3 11. Sınıfa Ait Bulgular ve Yorumlar

11. sınıflara sorulan ilk iki soru dizilerle ilgiliydi. Sorular şöyleydi:

1. $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = 1^2+3^2+5^2+.............+(2n-1)^2$

2. $\sum_{k=1}^{n}\frac{k.(k+1)}{2} = 1+3+6+..............+\frac{n.(n+1)}{2}$

Bu sorular sorulurken ilk olarak dizilerin kısa hali sorulmuştur. Bu durumda öğrenciler sorunun cevabı işlemsel olarak yapabilirlerdi. Fakat daha sonra dizinin daha uzun hali soruldu. Tabi bu durumda öğrencilerin diziyi çözebilmek adına bir genelleme yapmasına ihtiyaç vardır yani matematiksel soyutlama yapmalarına. Genel olarak öğrenciler 1. soru için pek zorlanmadılar çünkü dizinin genel terimi daha net gözüküyordu fakat devamında 2. soru sorulduğunda çoğu öğrenci genel terimi bulamadı. Aşağıda çalışma kağıtlarından verilen örneklerle beraber cevaplara daha ayrıntılı bir şekilde bakılmıştır.

$$1+9+25+49=?\ 84$$

$$1+9+25+\ ---\ +225=?$$

$$\sum_{k=1}^{15} \cancel{k^2}\,(2k-1)^2 = \frac{15.16.31}{\cancel{6}}$$

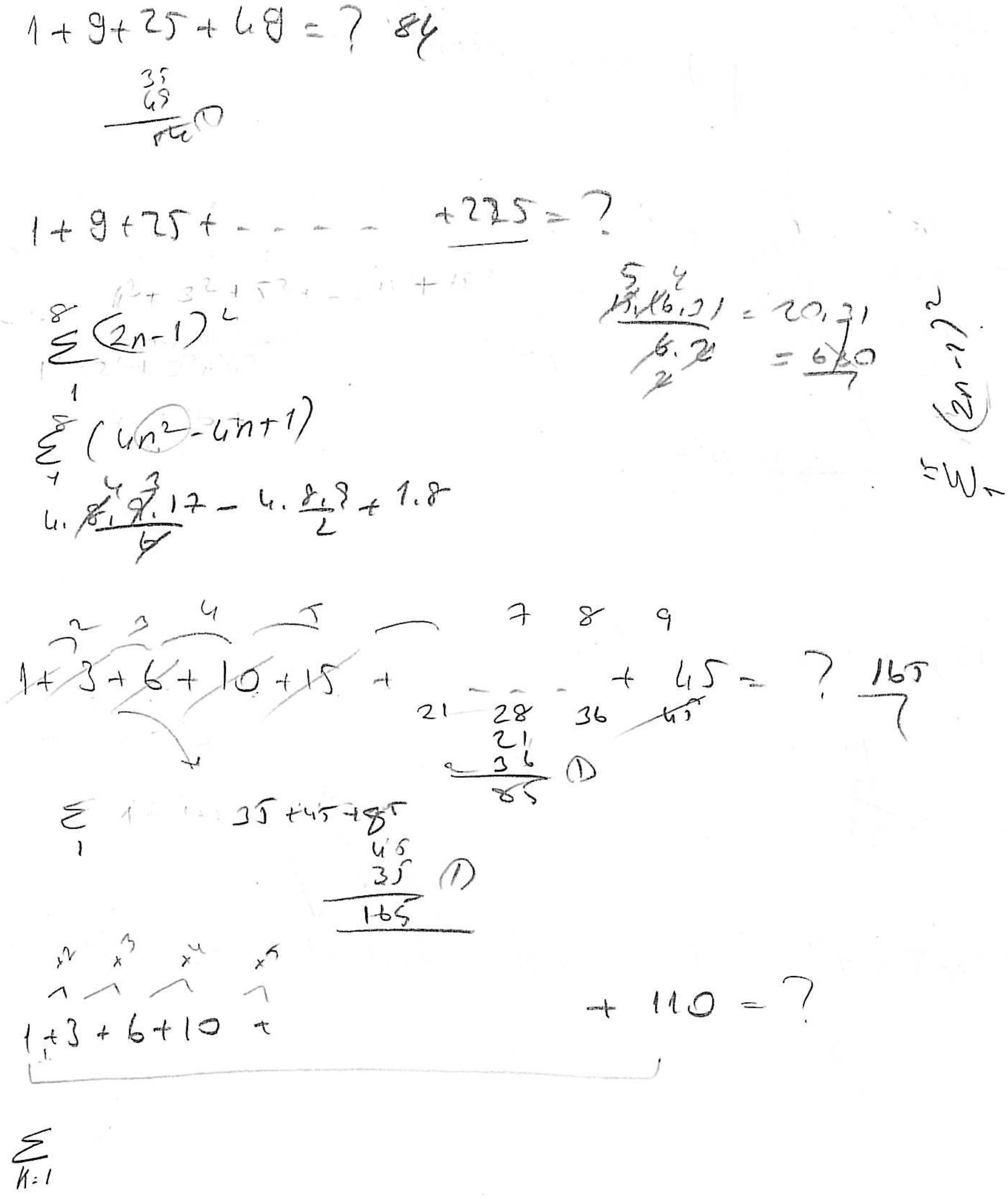
$$\sum_{k=1}^{\cancel{14}\ 15} 4k^2-4k+1$$

$$4\left(\frac{\cancel{15}.\cancel{16}.31}{\cancel{6}\,3} - 4.\frac{15.16}{2} + 15\right)$$

$$4$$

$$\underbrace{1+3}_{2}+\underbrace{6}_{3}+\underbrace{10}_{4}+\underbrace{15}_{5}+\underbrace{\ }_{6}\ ---\ +45=?$$

$$\sum_{k=1} \cancel{2k-1}$$



Art arda verilen iki örneğe bakıldığında öğrenciler ilk soru için genel terimi hemen yazmalarına karşın ikinci soruda yani daha önce pek karşılaşmadıkları bir dizi sorulduğunda bir şey yapamadılar. Öğrencilerden gelen genel tepki daha önce sınıfta böyle bir dizi çözmedikleri yönündeydi. İlk soruda sorulan dizi sınıfta ve test kağıtlarında sıklıkla karşılarına çıktığı için herhangi bir işlem yapmadan genel terimi gördüler fakat tanımadıkları bir yapıyla karşılaştıklarında ise herhangi bir işlem yapamadan soruyu bıraktılar. Çalışma kağıtları incelendiğinde bu öğrencilerin derslerde kavramsal anlama değil ezbersel anlama yaptıkları anlaşılıyor.

Çalışma kağıtlarında karşılaşılan bir diğer nokta ise birinci soruya dahi cevap veremeyen öğrencilerdi. Bu öğrencilerde şaşırtıcı olan nokta toplam formülleri hatırlamaları değil dizinin tek sayıların kareleri şeklinde ilerlediğini dahi görememeleriydi. Bunlar analiz edildiğinde şöyle bir yorum getirmek doğru olur herhalde; herhangi bir sebepten dolayı matematik derslerine ilgisiz veya konuyu sevmeyen öğrencilerdir. Aşağıda bu öğrencilerden ikisinin sorulara verdikleri cevaplar verilmektedir.

$1+9+25+49=84$

$1+9+25+ - - - - +225=?$

$225 = 2a_1+(n-1).d$ $\qquad$ $225=1+224d$

$2.1+\frac{n-1}{0}=$ $\qquad$ $d=1$

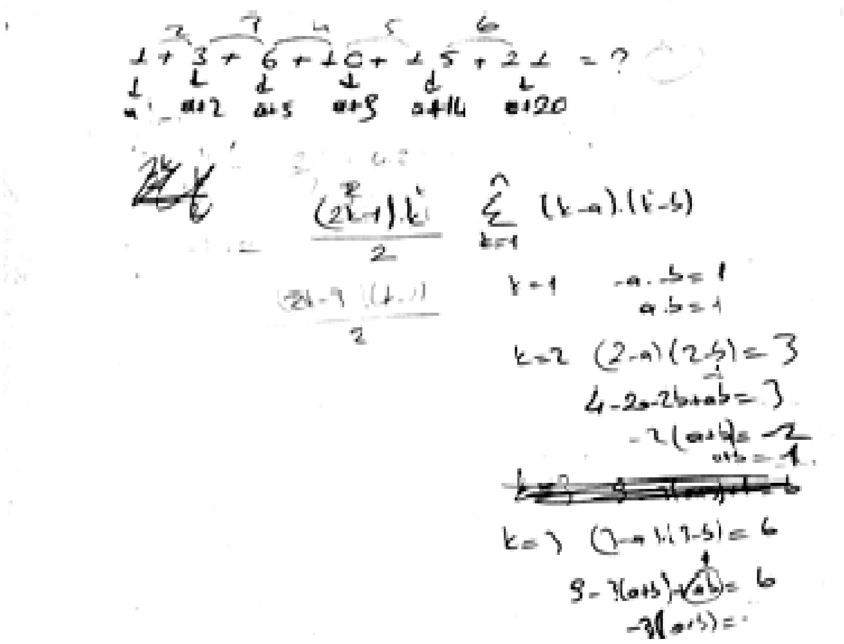
$1+9+25+49=86$

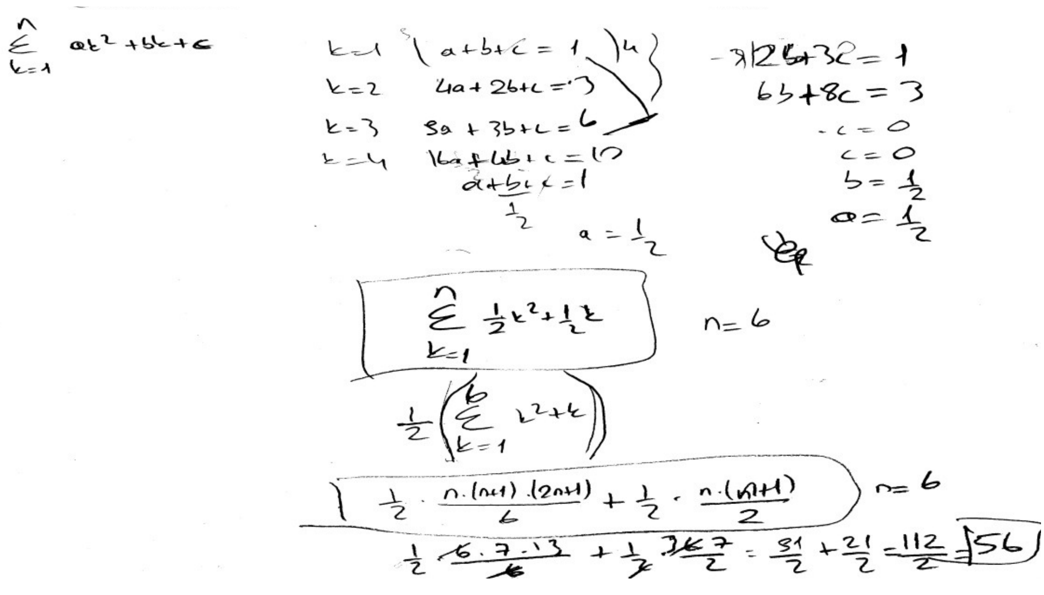
$1+9+25+ - - - +225=?$

$224 \div 2 = 112$

$\sum_{n=1}^{112} 2n+1$

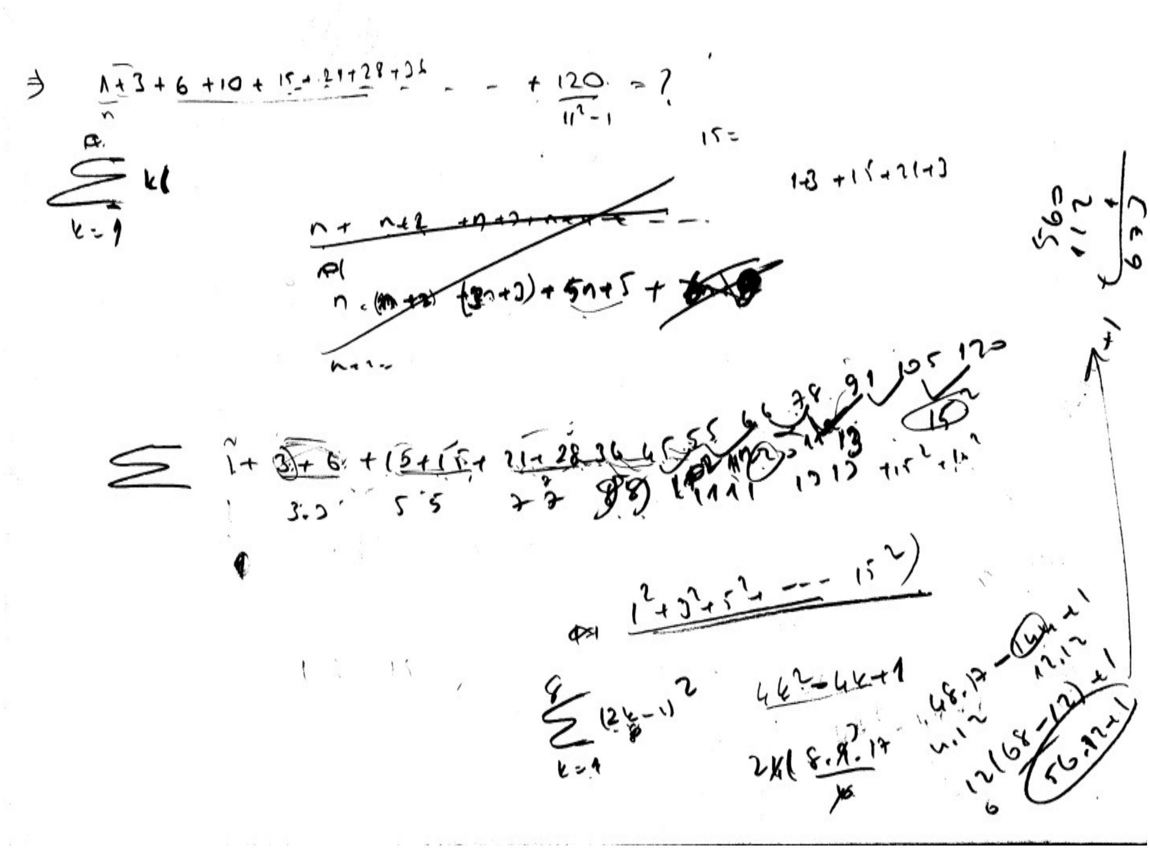
Bu sorulara başarılı bir şekilde cevap veren öğrencilerin çalışma kağıtları incelendiğinde ise farklı çözümler göze çarpmaktadır.





Öğrenci genel terimi bilmediğinden bunun ikinci dereceden bir denklem olduğunu düşünerek sonuca gitmeyi denedi. İkinci dereceden bir denklemde üç bilinmeyen olduğundan k’ ya üç değer vererek bir denklem sistemi kurdu ve bunun sonucunda dizinin genel terimine ulaştı. Burada öğrenci bildiği matematiksel yapının (ikinci dereceden denklemler) yardımıyla yeni bir matematiksel yapı inşa etti.

Bazı öğrenciler ise sayılar arsındaki ilişkiden yola çıkarak sorunun çözümüne ulaştılar.



Bu örneğe bakıldığında öğrenci soruyla bir süre uğraştıktan sonra sayılar arasındaki ilişkiyi dikkate aldı. Birden sonra art arda gelen her iki sayının tek sayıların karesi olduğunu fark etti. Daha sonra ilk soruda uyguladığı toplam fark formülleriyle sonuca ulaştı. Burada bakıldığında öğrenci matematik terimleri arasında bir ilişki kurdu ve matematiksel soyutlama yaparak bir genel terime ulaştı.

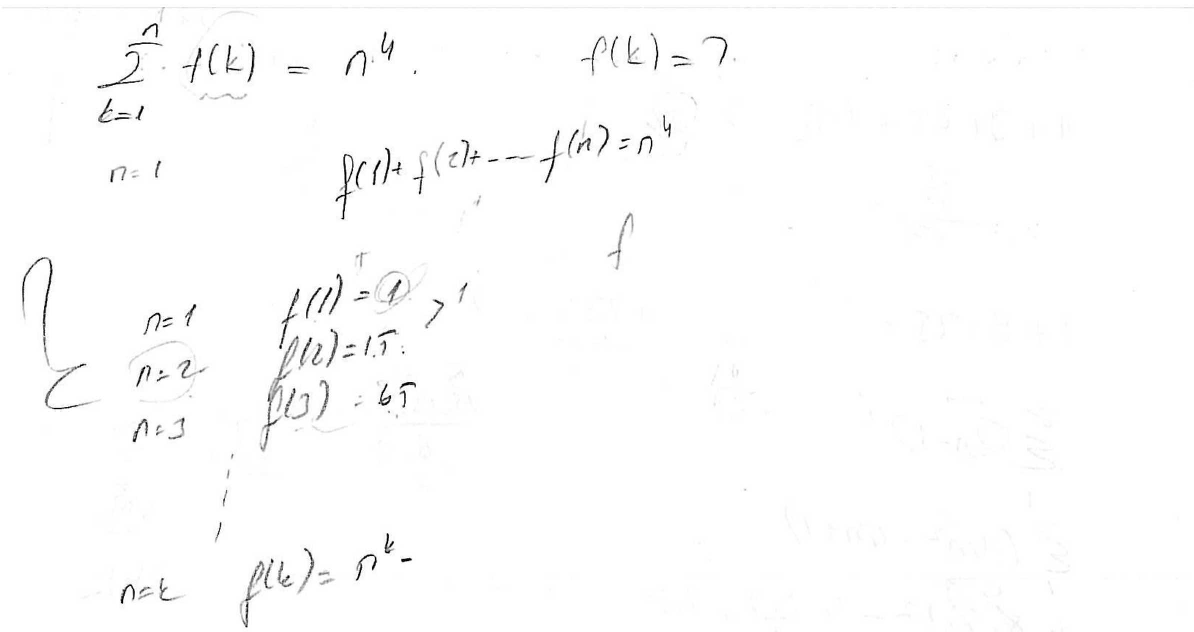
11. sınıflara sorulan üçüncü soru ise şu şekildeydi:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = n^4 \Rightarrow f(k) = ?$$

Dizilerde sorulan sorular genelde toplamı bulmaya yönelik oluyor yani genel terim verilip toplam isteniyor. Bu soruda toplam verildi ve öğrencilere genel terim soruldu.

Amaç öğrencilerin pek sık karşılaşmadıkları bu problem tipinde ne yaptıklarını ve ne düşündüklerini görmekti.

Öğrencilerin hemen hemen yarısı soru hakkında bir yorum yapamadılar. Hatta bir kısmı soruya şöyle bir baktığında kalem dahi oynatmadan yapamayacağını düşündü. Bir kısım öğrenci ise soruda sayılar arasında bir ilişki yakalamaya çalıştı, uğraştılar fakat soruyu tam olarak anlayamadıklarından belli bir yerde tıkandılar. Aşağıda çalışma kağıtlarından bir örnek verildi.



$\sum_{k=1}^{n} f(k) = n^4$. $f(k) = ?$

$n=1$ $f(1)+f(2)+\cdots f(n) = n^4$

$n=1$ $f(1) = 1$ >1

$n=2$ $f(2) = 15$

$n=3$ $f(3) = 65$

$n=k$ $f(k) = n^k -$

Burada öğrenci 1 den n ye kadar fonksiyonların toplamlarını yazmasına rağmen bulması gerekeni yani f(n) fonksiyonunu bulamadı. Öğrenci ilk defa böyle bir problemle karşılaştığından kafası karıştı ve yapması gerekeni tam olarak anlamadı. Hatta bulması gerekenin sayısal bir değer olduğunu düşündü. Yaptığı işlemleri de çözüm yapmak adına yapmış oldu.

Bu soruda başarı sağlayan öğrencilerin geneli de ilk başta tam olarak ne yapacaklarını anlamadılar. Fakat soruyu çözmeye başladıktan sonra biraz da yardımla sonuca ulaştılar. Bu öğrencilerden bazılarının cevaplarına bakıldığında:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = n^4 \qquad \underline{f(k)=?}$$

$$f(1)+f(2) = \cancel{16}\,2^4$$
$$f(1)+f(2)+f(3) = 3^4$$
$$\cancel{f(k)+f(k+1)} =$$
$$\underline{f(1) \ldots} \; f(k) = k^4$$
$$(k-1)^4 + f(k) = k^4$$

$$f(k) = k^4 - (k-1)^4$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = n^4 \qquad f(k)=? \quad f(1)+f(2)+ \ldots \; f(n) = n^4$$

$n=1 \qquad f(1)=1$

$n=2 \qquad f(1)+f(2)=16$

15

$n=3 \qquad f(3)=65 \qquad 5.13 \qquad \begin{array}{r} 81 \\ 16 \\ \hline 65 \end{array}$

$f(2)=15$

$$f(k) = n^4 - (n-1)^4 \qquad f(4) =$$
$$\cancel{n^4} - (\cancel{n^4} - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1)$$
$$= 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$$

Öğrencilerin genel olarak f(k) yı yani genel terimi bulamamalarının sebebi n ye sayısal değerler vererek problemi sağdan çözmeye çalışmalarıydı. Çünkü bunu yaparak sayılar arasında bir bağlantı kurmayı amaçlıyorlardı ama bunu yapmak zordu. Bunun farkına varan öğrenciler yukarıdaki örneklerde görüldüğü gibi k ya değerler vererek sonuca gittiler. Bu noktada biraz ipucu da aldılar.

Bu sorularda dikkati çeken nokta öğrencilerin diziler konusu öğrenirken soruları nasıl yaptıklarından veya genel terimi nasıl oluşturduklarından ziyade verileni alıp ezberlemeleridir. Böyle olunca da öğrenci farklı bir dizi veya soru yapısıyla karşılaştığında matematiksel soyutlama yapamıyor ve soruyu çözmek adına bildiği bazı yapıları soruya uygulamaya çalışıyor. Yani soyutlamanın indirgenmesine doğru bir eğilim gösteriyor.

3.3 Soru Grubu 2

Bu bölümde Zazkis ve Campell' ın [38] de ki çalışmasından alınan sorular sorulmuştur. Bu sorularda genel amaç öğrencilerin soyutlama seviyelerini görebilmek özellikle soyutlamayı indirgeyip-indirmediklerini incelemektir. Bu sorular bütün öğrencilere sorulmuştur.

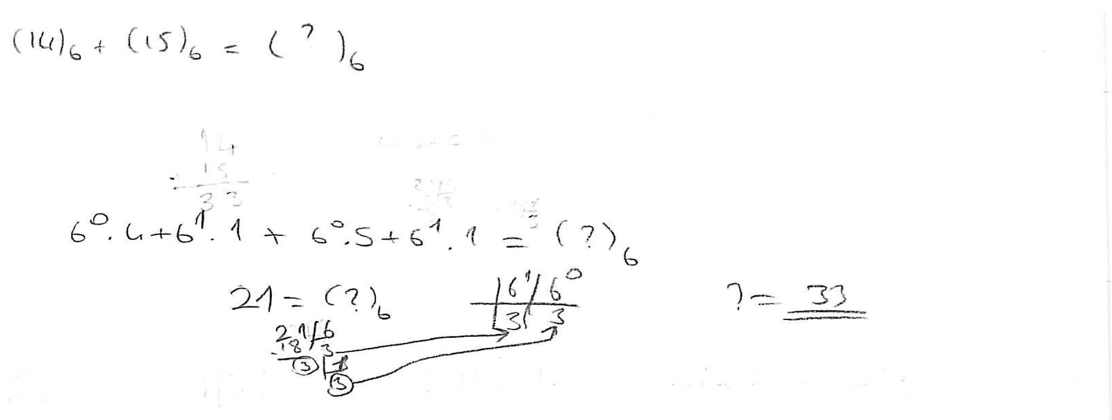
<u>Sorular</u>

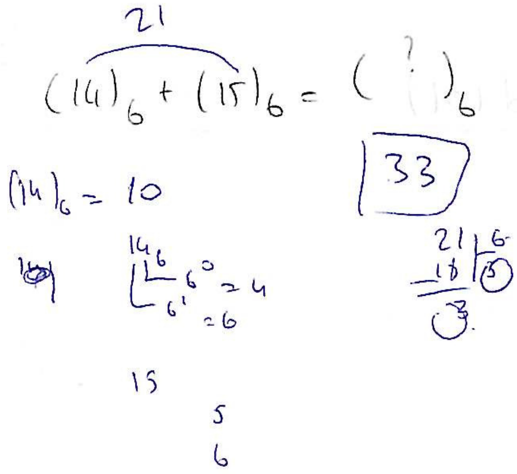
1. $(14)_6 + (15)_6 = (\ ?)_6$

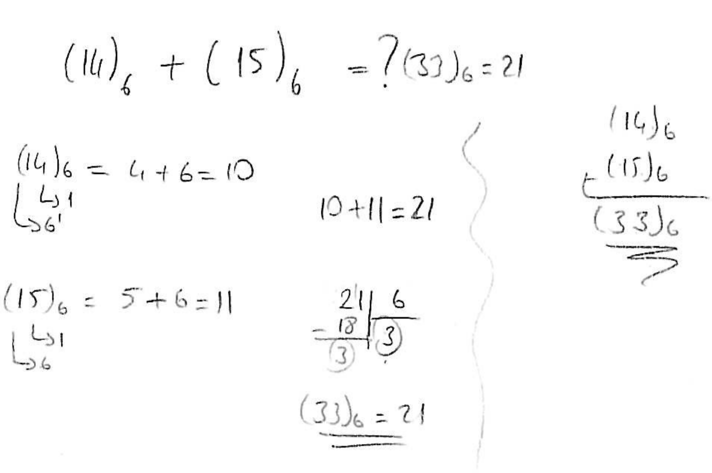
2. $3^2 x 5$ x 7^3 çarpımı M olsun. M 5,11 ve 21 ile bölünür mü?

3. 12485 ile 12495 arasında 7 ile bölünebilen sayı var mıdır?

Taban aritmetiğiyle ilgili sorulan ilk soruya öğrencilerden farklı cevaplar geldi. Bir kısmı konuyu hatırlamadığından hiç yorum yapamadılar veya yanlış çözüm yaptılar. Bunlar genellikle 10 ve 11. sınıflardaki öğrencilerdi. Zazkis ve Campbell' in [38] de üzerinde durdukları nokta öğrencilerin bu soruyu çözerken sayıları onluk tabana çevirip tekrar sorulan tabana çevirmeleriydi. Bunun nedeni olarak da onluk tabanın daha tanıdık geldiğini yani eğitim hayatımız boyunca gördüğümüz bir taban olduğu için kendimize daha yakın hissettiğimizi söylemişlerdir. Bunu da soyutlamanın indirgenmesi olarak yorumlarlar. Şimdi yapılan çalışmadan örnekler verilerek sorular analiz edilecektir.







Öğrenciler de onluk tabana çevirerek çözme eğilimin temel nedeni biraz öncede bahsedildiği gibi bu tabanın daha yakın yani tanıdık gelmesidir. Çünkü öğrencilere altılık tabanda çözemez misiniz diye sorulduğunda gelen tepkiler çözebilirdim oluyor ki bir öğrenci yukarıda gözüken örnekte her iki çözümü de yapmıştır. Peki neden altılık taban da değil da onluk taban da çözdünüz diye sorulduğunda iki cevap veriliyor. Ya böyle daha kolay ya da aklıma ilk olarak bu geldi. Bu cevaplarda bize şunu gösteriyor ki, öğrenciler soruyu somutlaştırma eğiliminde. Çünkü bir kişi konuya ne kadar yakınsa o ölçüde somut hisseder. Bu nedenle öğrenciler burada soyutlama seviyesini indirgemişlerdir.

Tabi altılık tabanda toplam yapan öğrenciler de az değildi. Özellikle dokuzuncu sınıflar konuyu bu eğitim döneminde gördüklerinden olsa gerek doğrudan altılık tabanda toplam yaptılar.

İkinci soruya bakıldığında ise bölünebilmenin süreci irdelenmiştir. Çünkü matematiksel bir kavramın süreç (işlem) önceliği kavramı nesne önceliği kavramından daha az soyuttur. Bu sorulara verilen cevaplara bakılacak olunursa:

1.

$3^2 \times 5 \times 7^3$ ifadesi 5, 11, 21 ile bölünür mü?

$9 \cdot 5 \cdot 7^3$ → 5 ile bölünür.

11 ile bölünmez.

$\underbrace{3 \cdot 3 \quad 7 \cdot 7 \cdot 7}$

21 ile bölünür

2.

$3^2 \times 5 \times 7^3$ 'ünü düşünelim. Bu sayı 5 ile bölünür mü? 11 ile bölünür mü? 21 ile bölünür mü?

$$\frac{3^2 \times 5 \times 7^3}{\cancel{5}} =$$ 5 ile tam bölünebilir.

$$\frac{3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7}{11} =$$ 11 ile tam bölünemez.

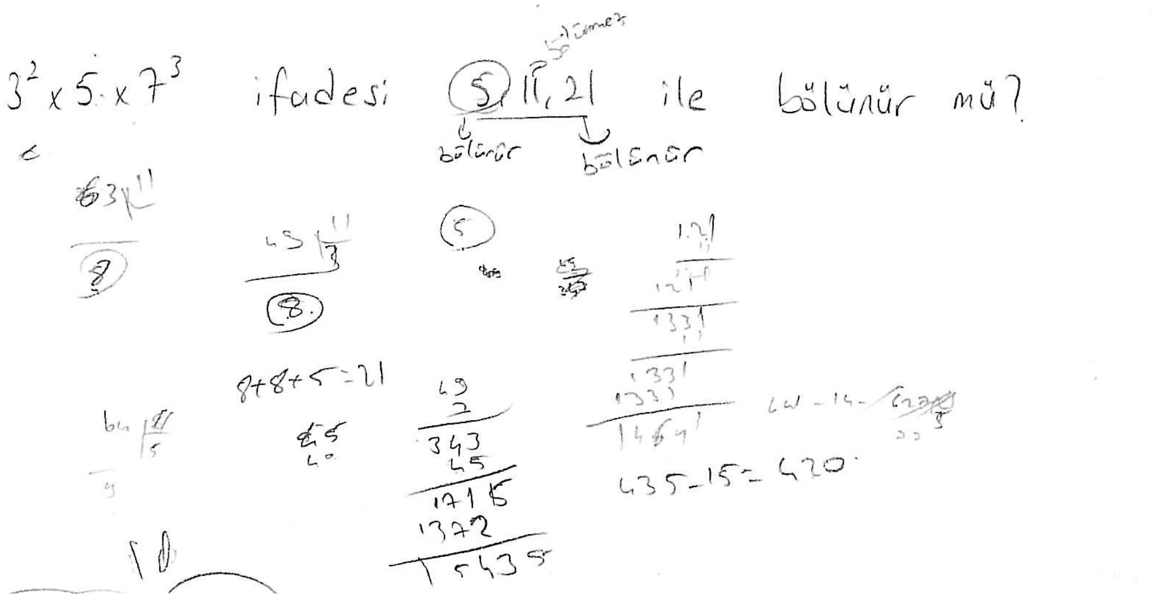
$$\frac{3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7}{21} = \frac{\cancel{3 \times 7} \times 3 \times 5 \times 7^2}{\cancel{3 \times 7}} =$$ 21 ile tam bölünür.

Öğrenciler 1 ve 2. örneklerde görüldüğü gibi çarpımda bulunan asal çarpanları dikkate alarak sonuca gitmişlerdir. Bir öğrenci ile soruyla ilgili şu diyalog geçmiştir:

Araştırmacı: M sayısı 5, 11 ve 21 ile bölünür mü?

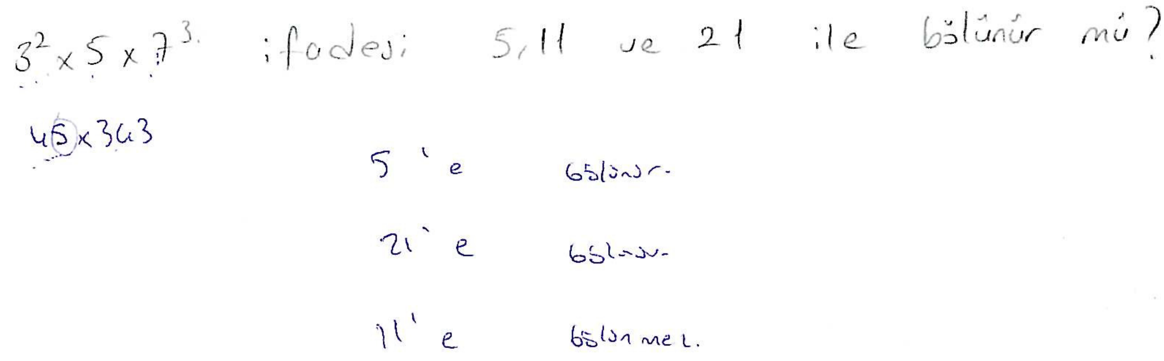
Miray: 5 ile bölünür çünkü 5 çarpanı var. 21 ile de bölünür çünkü 3 ile 7 çarpıldığında 21 i verir. 11 ile bölünmez 11 çarpanı yok.

Soruyu farklı cevaplandıran öğrencilere devam edecek olursak,



Bu soruda öğrenci 5 ve 21 ile bölündüğünü hemen söylemesine rağmen 11 ile bölünüp bölünmediğinden emin olamadı ve ifadeyi çarpıp bölmeyi denedi ve böylece sonuca ulaşarak bölünmediğini gösterdi.

Aşağıdaki örnekte öğrenci farklı bir çözüm yolu izledi.



Araştırmacı: Nasıl yaptığını anlatır mısın?

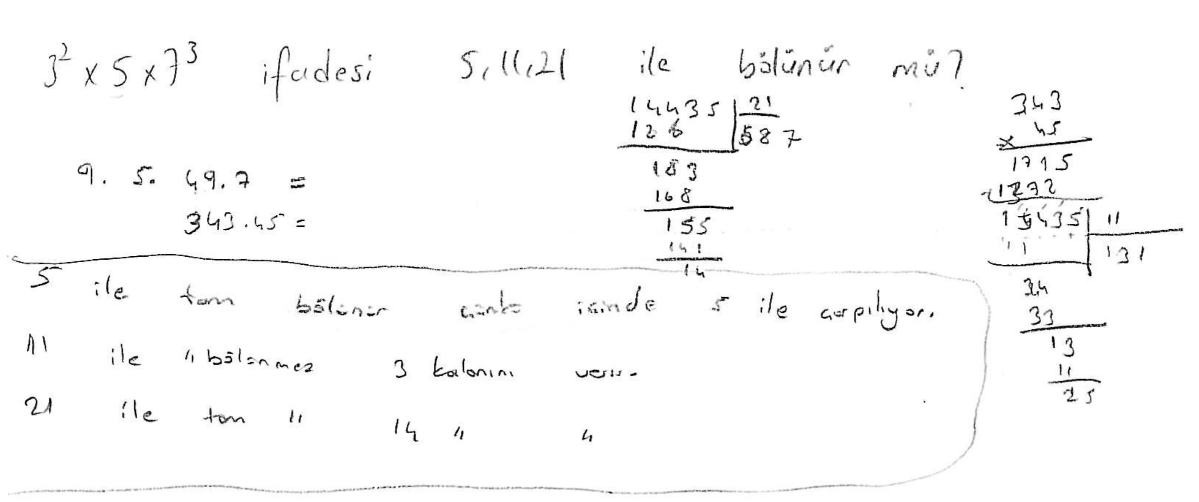
Eren: 5 e bölünür çünkü 45, 5' e bölünür. 21 ile de bölünür çünkü… 3x7, 21 yapıyor.

Araştırmacı: Hmm peki 11 ile bölünür mü?

Eren: 343' ü 11 e böldüm 2 kaldı sonra 2 ile 45' i çarpım 90 oldu. 90, 11 ile bölünmüyor, o halde 11 ile bölünmez.

Öğrenci soruya başlarken çarpanlara dikkat etmekten ziyade ilk olarak işlemleri yaparak ifadeyi 45x343 şekline getirdi. 5 ile bölündüğüne bakarken ifadede ki 5 çarpanını dikkate almaktansa 45' e baktı fakat 21 ile bölünmesine bakarken 3 ve 7 çarpanlarını fark etti. 11 ile bölünmesine bakarken ise ifadeleri 11 e bölüp kalanlar üzerinden işlem yaparak sonuca ulaştı. Burada öğrenci kendi içinde çelişti, 21 ile bölmeye bakarken asal çarpanları dikkate almasına rağmen diğerlerinde bunu düşünemedi. İşlem-nesne açısından bakıldığında öğrenci burada işlem önceliği kavramına öncelik verdi ve soyutlama seviyesini indirgedi.

Bazı öğrenciler ise ifadeyi çarpıp bölmesine rağmen yanlış yaptılar.



Bu örnekte öğrenci 5 çarpanı olduğundan dolayı 5 ile bölündüğünü gördüğü halde 21 ve 11 ifadeleri için çarpıp bölmeyi tercih etti.

Araştırmacı: 5 ile bölündüğünü görmüşsün fakat 11 ve 21 ile neden bölünmez

Yağmur: İfadeyi çarptım ve 14435 buldum 11 ile böldüğümde 3 kalanını verdi

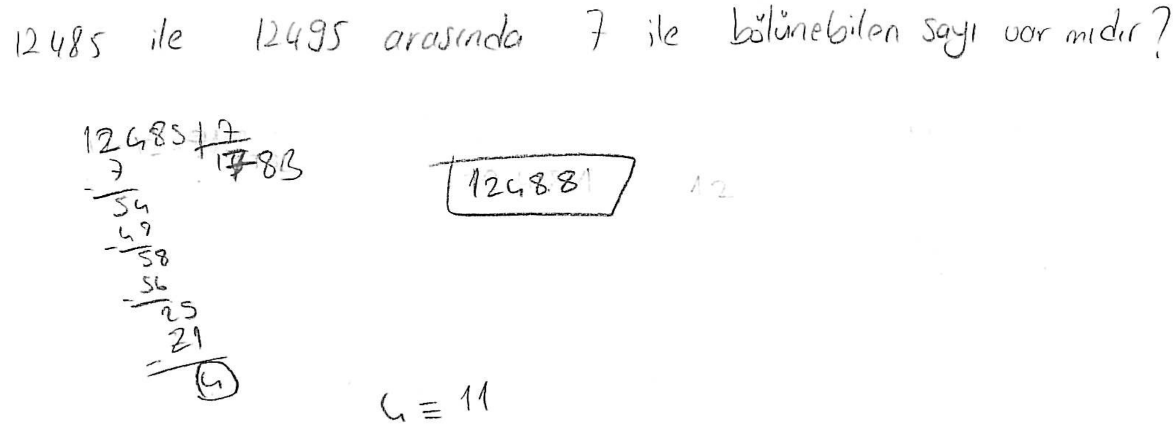
Araştırmacı: Peki 21 ile de bölünmez mi?

Yağmur: Sanırım orda bir yanlışlık yaptım çünkü 3 ve 7 çarpanı var 21 ile bölünmesi gerekirdi.

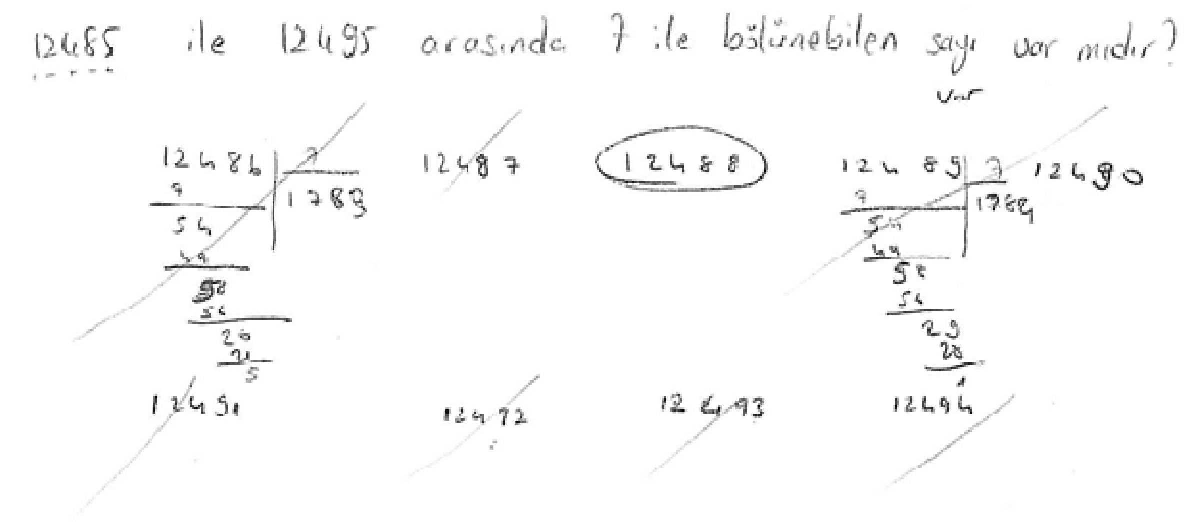
Öğrenci 21 in çarpanlarının 3 ve 7 olduğunu bilmesine rağmen çarpıp bölmeyi deniyor ve 11 için asal çarpanı dahi düşünmüyor. Burada da öğrenci işleme öncelik veriyor ve asal çarpanları dikkate almıyor.

Son soru verilen iki sayı arasında 7 ile bölünebilen bir sayı olup olmadığıydı. Bu soruya öğrencilerden farklı cevaplar geldi. Hemen hemen yarısı verilen sayıların arasındaki sayıları 7 e bölmeyi denediler. Aşağıda çalışma kağıtlarından bazı örnekler verilmiştir:

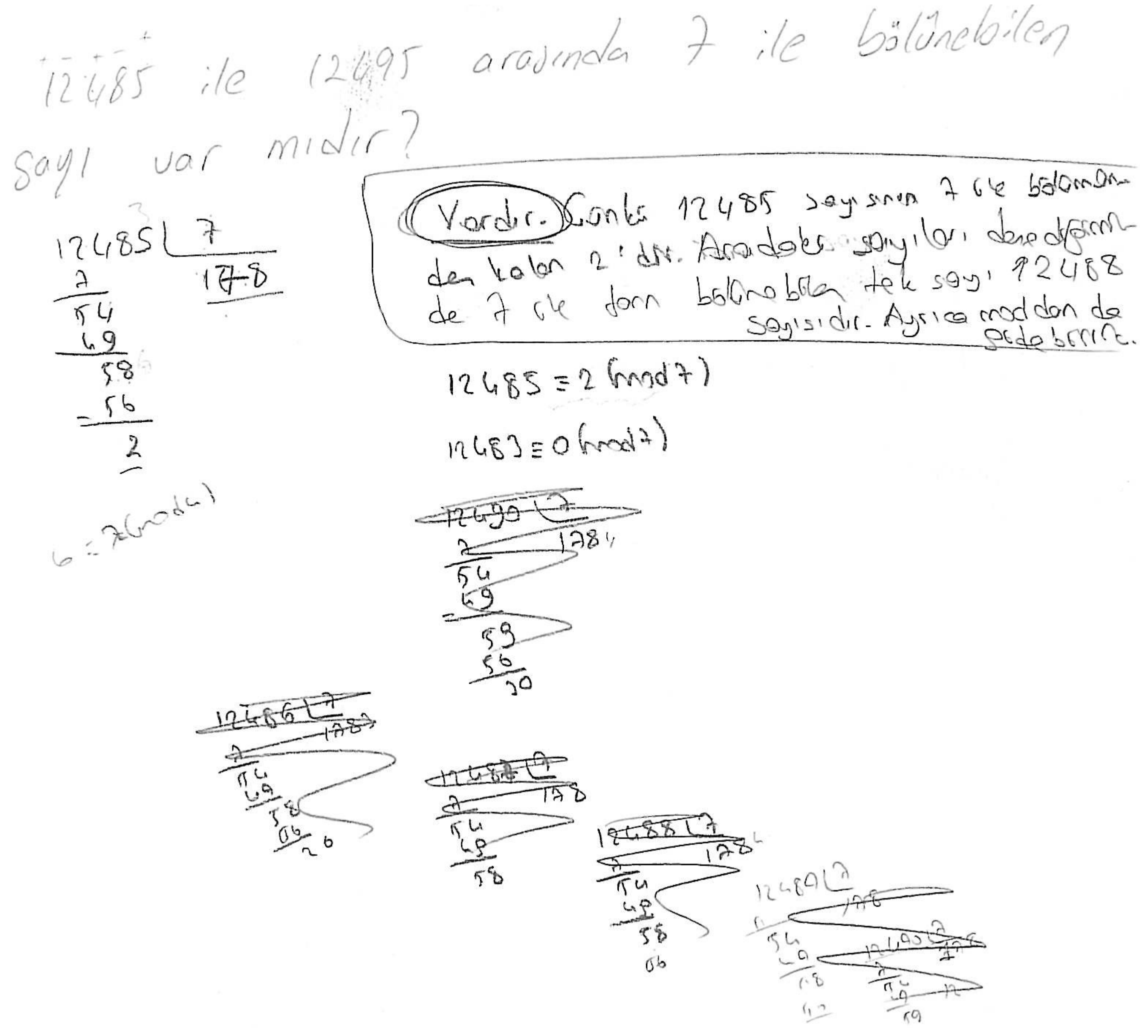
1.



2.

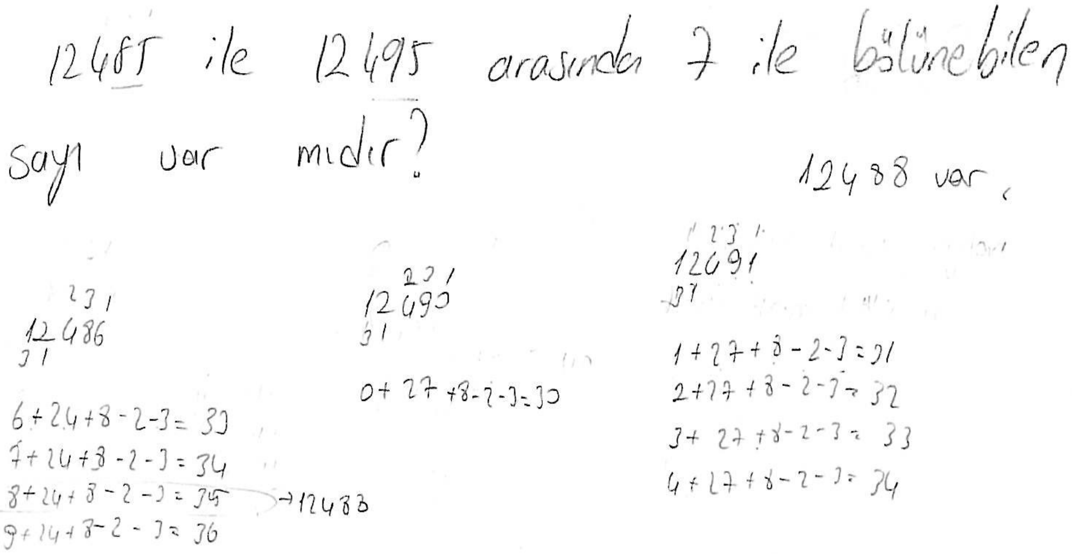


3.



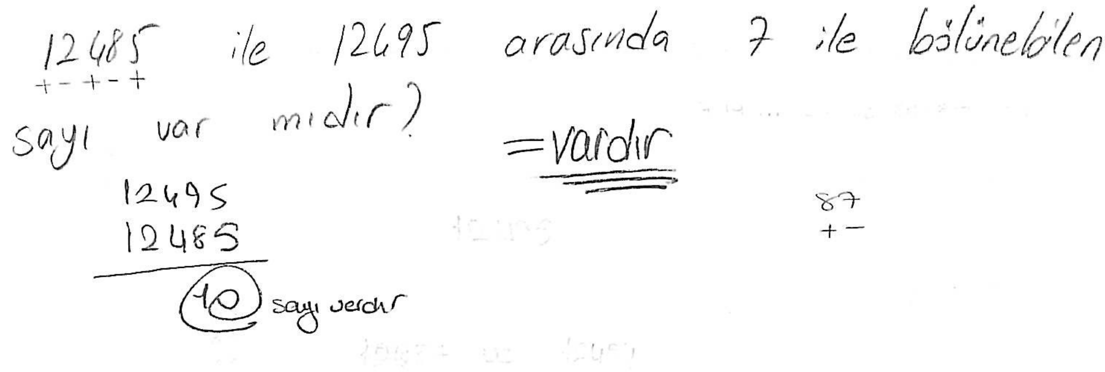
Bu üç örnekte de görüldüğü gibi öğrenciler genel olarak ilk sayıyı 7 ile bölüp kalan üzerinden 7 ile bölünebilen bir sayıya ulaşmayı denediler. Yani örneğin 12485 in 7 ile bölümünden kalan 4 olduğundan 3 daha eklenirse 7 in bir katı olur. Fakat öğrenciler iki sayı arasındaki farkı dikkate almadılar. Fark 7 den büyüktü ve mutlaka bir sayı olmalıydı 7 ile bölünebilen. Bunu soyutlama bakış açısından açıklayacak olursak; iki sayı arasındaki farkı küme olarak düşünürsek, öğrenciler kümenin özelliğini dikkate almaktansa kümenin elemanlarını incelemeye kalkışmışlardır. Küme bir elemanına göre daha soyuttur. Burada öğrenci elemanları incelemeye kalkarak soyutlama seviyesini indirgemiştir. Ayrıca sorulan soru sayının kendisi ile değil var olup-olmadığı ile ilgiliydi. Öğrenciler tam olarak bunu anlamadılar ve sayının kendisini bulmaya çalıştılar.

Birkaç öğrenci 7 ile bölünebilme kuralından sonuca gitmeyi denedi. Örneğin aşağıdaki öğrenci gibi;



Burada öğrenci öğrendiği 7 ile bölünebilme kuralını uyguladı ve sonucu buldu. Bu kuralı uygulayan öğrenciye araştırma sırasında pek rastlanmadı. Ya öğrenciler kural karışık olduğu için akıllarında tutamıyorlar ya da her öğretmen bu kuralı öğrencilerine anlatmıyor. Doğrusunu söylemek gerekirse böyle bir kuralla bende ilk defa karşılaştım.

Soruyu kümenin yani sayıların arasındaki farkı göz ününde bulundurarak çözen bazı öğrencilerin cevapları da aşağıda verilmiştir. Bu öğrenciler kümenin özelliğini dikkate alarak daha soyut düşünmüşlerdir.



12485 ile 12495 arasında 7 ile bölünebilen sayı var mıdır?

~~[illegible]~~

Vardır.
Arada 10 sayı var. 7 sayıda bir bölünmesi gerekir.

BÖLÜM 4

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez kapsamında orta öğretimde okuyan dokuz, on ve on birinci sınıflardaki öğrencilerin soyutlama seviyeleri incelenmiştir. Yapılan çalışma kapsamında, araştırma yapılan evrendeki öğrencilerin soyut düşünme yeteneklerini yetersiz olduğu görülmüştür.

Araştırmada dokuz, on ve on birinci sınıfların olması özellikle planlanmıştır. Çünkü çalışmanın sonucunda görülmek istenen noktalardan biri de soyut düşünebilme becerilerinin yaşlarıyla daha doğrusu eğitim seviyeleriyle ilişkilerini görmekti. Bu kapsamda dokuz, on ve on birinci sınıftaki öğrenciler karşılaştırıldığında dokuzuncu sınıfta bulunan öğrencilerin soyut düşünebilme becerilerinin on ve on birinci sınıftaki öğrencilere nazaran daha iyi olduğu görülmüştür. Dokuzuncu sınıfta bulunan öğrenciler LYS-LGS gibi sınavlara kendilerini uzak hissettiklerinden olsa gerek sorulara yaklaşımları genel olarak daha farklı olmuştur. Ezberci bir yaklaşımdan ziyade zihinlerindeki bilgiler arasında ilişkiler kurarak sonuca gitmeyi denemişlerdir. Buna karşın onuncu sınıftan itibaren sınav kaygısı hissetmeye başladıklarından ve aldıkları eğitime paralel olarak soyutlamayı indirgemeye yönelik bir eğilim oluşmaya başlamıştır.

Çalışma sırasındaki gözlemlerden ve daha sonra çalışma kağıtlarından yapılan analizlerde dikkati çeken en önemli nokta öğrencilerin ezberci bir yaklaşımla sorulara yaklaşmaları olmuştur. Öğrencilerin hazırlandıkları sınavlardan dolayı (LYS, YGS gibi) olsa gerek test tekniğine bir yatkınlıkları olduğu gözlemlenmiştir. Bu da onların soruları çözerken soyutlama yapmaktan ziyade ezberledikleri yöntemleri kullanmalarına veya verdikleri sayısal değerlerle soruları çözmelerine yol açmıştır. Çünkü sınavlarda aynı zamanda zamanla da yarıştıklarından dolayı soruyu en kısa çözebileceği yöntemi benimsemişlerdir. Bazı öğrenciler için bu yöntemler işe yaramıştır. Çünkü hiç cevaplayamayacakları sorulara hiç olmazsa bir cevap vermişlerdir. Fakat yine bu ezberlenmiş metotlar yüzünden çoğu yerde soyutlamayı indirgemişlerdir. Çünkü soruların kullandığı ifade öğrenciler için içinden çıkılmaz bir hal aldığı anda verdikleri tepki; soruda bahsi geçen ifadeyle belleklerine kazınmış olan soru çözme kalıpları arasında kendilerince bir ilişkilendirme yapıp soruyu, doğru veya yanlış olduğunu umursamaksızın çözme yoluna gitmek olmuştur. Bu durum öğrencilerin soru çözerken soyut düşünmeye değil soyutlamayı indirgemeye bilinçsizce eğilim gösterdiklerini açığa çıkarmıştır.

Bulgulardan elde edilen diğer bir sonuç ise aynı okulda ki öğrencilerin verdikleri cevapların birbirine yakın olmasıdır. Yani soru sorulan aynı okuldaki öğrencilerin verdikleri cevaplara bakıldığında soyutlama seviyeleri ve soyutlamayı indirgemeleri paralellik göstermiştir. Öğretmenin kullandığı öğretim yöntemlerinin öğrencilerin problem çözmedeki performanslarına yansımıştır. Bu da bize müfredatın aynı olmasına rağmen eğitimde öğretmenin rolünü göstermiştir.

Ayrıca bir okulda yapılan çalışmada seçilen üç öğrenciden ikisi diğer öğrenciye göre okul derslerinde başarılı olmasına rağmen soyut düşünme becerisi daha düşük bir seviyedeydi. Öğrenci okul derslerinde başarısız olmasına rağmen soyutlama yapabilme yeteneği diğerlerinden daha üst seviyedeydi. Burada öğrencilerin okuldaki başarı düzeyi (AGNO) ile matematiksel soyutlama seviyeleri arasında doğru bir orantı bulunmadığı görülmüştür.

Çalışma kağıtları analiz edilmeye devam edildiğinde karşılaşılan temel noktalar şunlar olmuştur:

• matematiksel kavramlar arasında ilişkilendirme sonucunda soyutlamanın yapıldığı,

• genelleme sonucunda matematiksel soyutlamanın yapıldığı,

• matematiksel soyutlamanın yapılamadığı durumda soyutlamanın indirgenmesi.

Çalışma sonucunda bazı öneriler belirtmek gerekirse;

1. Matematik eğitimimiz boyunca matematiksel soyutlama önemli bir yer teşkil etmektedir. Fakat bu süreç eğitim basamakları çıkıldıkça göz ardı edilmektedir. Ülkemizde yapılan merkezi sınavlardan olsa gerek öğrenciler matematiği eğitimini verimli bir şekilde öğrenmekten ve öğretilen bilgileri ilişkilendirmekten ziyade "soruyu en kısa nasıl çözebilirim" veya "bu soru hangi soruya benziyor" gibi düşüncelerle tek kaygıları daha fazla soruya cevap vermektir. Bu nedenle öğrencilerin soyutlama yapabilmeleri için bu kaygılarından olabildiğince uzaklaştırılmalı ve onların daha rahat eğitim alabileceği ortamlar sağlanmalıdır.

2. Matematiksel soyutlama ile ilgili daha fazla çalışma yapılıp gerekli önemin vurgulanmasına ihtiyaç vardır.

3. Okullarımızda uygulanan eğitim müfredatının içeriği, öğrenciye hazır bilgiyi vermek değil bu bilgiye kendilerinin ulaşmasını sağlamak olmalıdır. Diğer bir deyişle bir çin atasözünde dediği gibi "bana bin balık vereceğine balık tutmayı öğret" felsefesi oturtulmalıdır. Ülkemizde son yıllarda bu tarz bir eğitim sistemi üzerinde durmaktadır. Fakat şu an bir geçiş süreci olmasından da dolayı bu eğitim modeli tam olarak uygulanamamaktadır.

4. Eğitimde öğretmenin rolü büyüktür. Birçok öğrenci eğitim hayatı boyunca öğretmenlerini örnek almaya çalışmışlardır. Bu nedenle eğitim müfredatımızda matematiksel soyutlamanın varlığına özellikle dikkat edilmeli ve bu konuda öğretmenlerimiz yetiştirilmelidir. Gerekli olan eğitim özellikle üniversite hayatları boyunca verilmeli ve matematiksel soyutlama seviyelerinin gelişmesine önem verilmelidir.

5. Öğrencilerin ezbersel anlama değil kavramsal anlamayı öğrenmeleri sağlanmalıdır.

6. Öğrencilerin matematikteki kişisel geçmişleri, soyutlama sürecinde ve bu sürecin yorumlanmasında önemli rol oynamaktadır. Öğrencilerin soyutlama süreçlerinin veya seviyelerinin incelenmesin öncesinde, öğrencinin problemin çözümünde kullanılacak ön bilgilere sahip olup olmadığını belirlemek soyutlama seviyelerinin daha sağlıklı yorumlanmasına katkı sağlayacaktır.

7. Başarı düzeyi (AGNO) ile soyutlama arasındaki ilişkinin daha sağlıklı anlaşılması açısından araştırma istatiksel olarak genişletilerek, öğrencilerin demografik bilgileri, ebeveynlerinin meslekleri, matematiğe olan bakış açıları incelenerek daha kapsamlı bir çalışmaya ihtiyaç vardır.

8. Yapılabilecek çalışmalardan bir diğeri, matematiksel soyutlamayı etkileyen etmenlerin neler olduğu ve hangi yönlerde etkilediği olabilir. Ne tarz matematiksel etkinliklerin, problemlerin, araçların matematiksel soyutlamayı olumlu yönde etkilediği, matematiksel soyutlama gelişimini destekleyici öğretmen rolünün nasıl olabileceği, ölçme-değerlendirme yapısının süreci destekleyecek şekilde nasıl yapılandırılabileceği, teknoloji kullanımının bu yönde katkısının nasıl olabileceği araştırılabilecek konulardan bir kaçıdır.

9. Özellikle Eğitim Fakültelerinde verilen analiz, cebir, soyut matematik, sayılar teorisi gibi temel alan derslerinde verilmesi gereken teorem ve ispatların metodolojiye uygun ve ehil kişilerce verilmesinin sağlanmalıdır.

KAYNAKLAR

[1] National Council of Teachers of Mathematics, (2000). Principles and Standards for School Mathematics, Reston, VA: Author.

[2] Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı [TTKB], (2005). Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı, Ankara: Milli Eğitim Yayınları.

[3] Keser, Ö. F., (2003). Fizik Eğitimine Yönelik Bütünleştirici Bir Öğrenme Ortamı Tasarımı ve Uygulaması, Yayınlanmamış Doktora Tezi, KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

[4] Aydın, B., (2003). "Bilgi Toplumu Oluşumunda Bireylerin Yetiştirilmesi ve Matematik Öğretimi", Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi (2), Sayı:14.

[5] Dreyfus, T. and Gray, E., (2002). "Research Forum 1—Abstraction: Theories about the emergence of knowledge structures", in A.D. Cockburn and E. Nardi (eds.), Proceedings of the 26th Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. I, University of East Anglia, 113–138.

[6] Even, R. & Schwarz, B., (2003). "Implications of Competing Interpretations of Practice for Research and Theory in Mathematics Education", Educational Studies in Mathematics, 54: 283-313.

[7] Dubinsky, E., (2000). "Mathematical literacy and abstraction in the 21st century", School Science and Mathematics, 100(6): 289-297.

[8] Van Oers, B., (2001). "Contextualisation for abstraction", Cognitive Science Quarterly, 1(3): 279-305.

[9] Yeşildere, S., (2006). Farklı Matematiksel Güce Sahip İlköğretim 6, 7 ve 8. Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Düşünme ve Bilgiyi Oluşturma Süreçlerinin İncelenmesi, Doktora Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

[10] Russell, B., (1926). Education and Good Life, NY: Boni and Liveright.

[11] Cassier, E., (1923). Substance and function Einsteins theory of relavity, NY: Dover.

[12] Cassier, E., (1957). The philosophy of symbolic forms (Vol.3), The phenomenology of knowledge, London: Yale university Pres

[13] Sierpinska, A., (1994). Understanding in mathematics, London: Falmer.

[14] Mitchelmore, M., (2002). "The role of abstraction and generalization in the development of mathematical knowledge, East Asia Regional Conference on Mathematics Education", Singapore.

[15] Skemp, R., (1986). The Psychology of Learning Mathematics, Penguin: Harmondsworth.

[16] Dienes, Z.P., (1961). "On abstraction and generalization", Harward Educational Review, 31(3): 281-301.

[17] Özmantar, M., (2005). An Investigation of the Formation of Mathematical Abstractions through Scaffolding, Doktora Tezi, Leeds Üniversitesi, Egitim Fakültesi.

[18] Noss, R. ve Hoyles, C., (1996). Windows on Mathematical Meanings, Kluwer, Dordrecht: The Netherlands.

[19] Noss, R., (2002). Mathematical epistemologies at work, In Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, UK

[20] Ohlsson, S. and Lehtinen, E., (1997). "Abstraction and the acquisition of complex ideas", International Journal of Educational Research 27: 37–48.

[21] Hershkowitz, R., Schwarz, B., Dreyfus, T., (2001). "Abstraction in Context: Epistemic Actions", Journal for Research in Mathematics Education, 32(2): 195-222.

[22] Sfard, A., (1991). "On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin", Educational Studies in Mathematics, 22: 1-36.

[23] Dubinsky, E., (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, In Tall, Advanced Mathematical Thinking, Dordrecht: Kluwer.

[24] Davydov, V.V., (1990). Soviet Studies in Mathematics Education: Vol. 2, Types Generalization in Instruction: Logical and Psychological Problems in the Structuring of School Curricula, J. Kilpatrick (ed.) and J.Teller (Trans.), National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA (Original work published in 1972).

[25] Leont'ev, A.N., (1981). The problem of activity in psychology, in J.V. Wertsch (ed. And Trans.), The Concept of Activity in Soviet Psychology, M.E. Sharpe, Armonk, NY, 37–71.

[26] Tsamir, P., Dreyfus, T., (2005). "How Fragile Is Consolidated Knowledge? Ben's Comparisons of Infinite Sets", Journal of Mathematical Behavior, 24: 15-38.

[27] Bikner-Ahsbahs, A., (2004). “Towards the Emergence of Constructing Mathematical Meanings”, Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2: 119-126.

[28] Schwarz, B., Dreyfus, T., Hadas, N., Hershkowitz, R., (2004). “Teacher Guidance of Knowledge Construction”, Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4: 169-176.

[29] Monaghan, J. ve Ozmantar, M. F., (2006). “Abstraction and Consolidation. Educational Studies in Mathematics”, 62(3): 233-258.

[30] Boero, P., (2002). “Abstraction: What Theory Do We Need in Mathematics Education”, Proceedings of the 26th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, England.

[31] Hazzan, O., (1999). “Reducing Abstraction Level When Learning Abstract Algebra Concepts”, Educational Studies in Mathematics, 40(1): 71–90.

[32] Dubinsky, E. and Leron, U., (1994). Learning Abstract Algebra with Isetl, Springer-Verlag, New York/Berlin.

[33] Wilensky, U., (1991). Abstract Meditations on The Concrete and Concrete Implications for Mathematical Education, in I. Harel and S. Papert (eds.), Constructionism, Ablex Publishing Corporation, Norwood, NJ, 193–203.

[34] Beth, E. W. and Piaget, J., (1966). Mathematical Epistemology and Psychology, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, The Netherlands.

[35] Thompson, P. W., (1985). Experience, Problem Solving and Learning Mathematics: Considerations in Developing Mathematics Curricula, in E. A. Silver (ed.), Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspective, Hillsdale, NJ, 189–236.

[36] Hazzan, O. ve Zazkis, R., (2005). “Reducing Abstraction: The Case of School Mathematics”, Educational Studies in Mathematics, 58: 101-119

[37] Karsenty, R., (2002). “What do adult remember from high school mathematics? The case of linear functions”, Educational Studies in Mathematics, 51: 117–144

[38] Zazkis, R. and Campbell, S., (1996). “Divisibility and multiplicative structure of natural numbers: Preservice teachers’ understanding”, Journal for Research in Mathematics Education, 27(5): 540–563.

[39] Heirdsfield, A.M. and Cooper, T.J., (2002). “Flexibility and inflexibility in accurate mental addition and subtraction: Two case studies”, Journal of Mathematical Behavior, 21: 57–74.

[40] Türkdoğan, O., (2000). Bilimsel Araştırma Metodolojisi, Timaş Yayınları.

[41] Yıldırım, A. ve Şimşek, H., (2005). Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri, Ankara: Seçkin Yayıncılık.

[42] Wiersma, W., (2000). Research Methods in Education: An Introduction, USA: Allyn and Bacon.

[43] Çepni, S., (2001). Araştırma ve Proje Çalışmalarına Giriş, Erol Ofset Matbaacılık ve Ambalaj Sanayi.

[44] Tanrıöğen, A., (2009). Bilimsel Araştırma Yöntemleri, Ankara: Anı Yayıncılık.

[45] Kuş, E., (2003). Sosyal Bilimlerde Araştırma Teknikleri Nitel mi, Nicel mi? Ankara: Anı Yayıncılık.

[46] Punch, K.F., (1998). Introduction to Social Research–Quantitative&Qualitative Approaches, London.

[47] Balcı, A., (2001). Sosyal Bilimlerde Araştırma, Ankara: Pegem Yayıncılık.

[48] Rummel, J.F., (1968). Eğitimde Araştırmaya Giriş (Çev: R.Taşçıoğlu), Ankara: Ajans Türk Yayınları

[49] Pişkin, M. ve Öner, U., (1999). Görüşme İlkeleri ve Teknikleri, Ankara: Siyasal Yayıncılık

[50] Karasar, N., (2005). Bilimsel Araştırma Yöntemi, Ankara: Nobel Yayın Dağıtım

[51] Wolcott, H., (1994). Transforming qualitative data: Description, analysis, and interpretation, Sage publications

[52] Strauss, A. and Corbin, J., (1990). Basics of Qualitative Research Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory, Sage Publications: London

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Mehmet CAN
Doğum Tarihi ve Yeri	: 1986, İstanbul
Yabancı Dili	: İngilizce
E-posta	: canmehmett@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Y. Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	-
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2009
Lise		Cibali Lisesi	2004

Bildiri

1. Can, M. ve Ünal, H., (2011). "Ortaöğretim Öğrencilerinin Matematiksel Soyutlaması ve Soyutlamanın İndirgenmesi", III. International Congress of Educational Research, 4-7 Mayıs 2011, Girne.

Proje

1. Proje Ekibi; Prof. Dr. A. Göksel Ağargün, Hasan Ünal, Kürşar H. Oral, Mehmet Can, Rabia Nagihan Üregen. “Matematiksel Soyutlamanın Araştırılması”, Yıldız Teknik Üniversitesi, BAPK.