

**T.C.  
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SICAKLIK ETKİSİ ALTINDAKİ FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ  
KİRİŞLERİN BURKULMA SONRASI DAVRANIŞLARININ İNCELENMESİ**

**ŞEREF DOĞUŞCAN AKBAŞ**

**DOKTORA TEZİ  
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI  
MEKANİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN  
PROF. DR. TURGUT KOCATÜRK**

**İSTANBUL, 2012**

**T.C.**  
**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SICAKLIK ETKİSİ ALTINDAKİ FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ**  
**KİRİŞLERİN BURKULMA SONRASI DAVRANIŞLARININ İNCELENMESİ**

Şeref Doğuşcan AKBAŞ tarafından hazırlanan tez çalışması 11.09.2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Tez Danışmanı**

Prof. Dr. Turgut KOATÜRK  
Yıldız Teknik Üniversitesi

**Jüri Üyeleri**

Prof. Dr. Turgut KOCATÜRK  
Yıldız Teknik Üniversitesi

\_\_\_\_\_

Prof. Dr. R. Faruk YÜKSELER  
Yıldız Teknik Üniversitesi

\_\_\_\_\_

Prof. Dr. M. HAKKI OMURTAG  
İstanbul Teknik Üniversitesi

\_\_\_\_\_

Prof. Dr. İRFAN ÇOŞKUN  
Yıldız Teknik Üniversitesi

\_\_\_\_\_

Prof. Dr. ÜNAL ALDEMİR  
İstanbul Teknik Üniversitesi

\_\_\_\_\_

## ÖNSÖZ

---

Bu tez çalışmasının hazırlanmasında, her türlü destek ve ilgisini esirgemeyen tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Turgut KOCATÜRK'e teşekkür ederim.

Görüşlerinden istifade ettiğim değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Mehmet H. OMURTAG ve Sayın Prof. Dr. R. Faruk YÜKSELER'e teşekkür ederim.

Hayatım boyunca, desteklerini arkamda hissettiğim sevgili anne ve babama en içten teşekkürlerimi sunarım.

Temmuz, 2012

Şeref Doğuşcan AKBAŞ

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	vi
ŞEKİL LİSTESİ.....	vii
ÖZET.....	xi
ABSTRACT .....	xiii
BÖLÜM 1.....	1
GİRİŞ .....	1
1.1    Literatür Özeti	1
1.2    Tezin Amacı	3
1.3    Orijinal Katkı	4
BÖLÜM 2.....	6
KURAMSAL ÇALIŞMA.....	6
2.1    Problemin Geometrisi	6
2.2    Doğrusal Olmayan Problemlerin Genel Çözüm Yolu	8
2.3    Fonksiyonel Derecelendirilmiş Kirişlerin Timoshenko Kiriş Teorisi Çerçevesinde Toplam Lagrangian Sonlu Elemanlar Formülasyonları	10
2.4    Sürekli Ortamlar Modeli kullanılarak Toplam Langragian Sonlu Elemanlar Formülasyonları	21
2.4.1    Sürekli Ortamın Toplam Langragian Formülasyonları.....	21
2.4.1.1    Virtüel Yer Değiştirmeler Prensibi	21
2.4.1.2    Toplam Langragian Formülasyonu	22
2.4.2    Fonksiyonel Derecelendirilmiş Kirişlerin İki Boyutlu Sürekli Ortam Modeli Çerçevesinde Toplam Lagrangian Sonlu Elemanlar Formülasyonları .....	25
2.4.3    Fonksiyonel Derecelendirilmiş Kirişlerin Üç Boyutlu Sürekli Ortam Modeli Çerçevesinde Toplam Lagrangian Sonlu Elemanlar Formülasyonları .....	30
2.4.3.1    Üç Boyutlu Sürekli Ortam Modeli	30
2.4.3.2    Toplam Langragian Formülasyonu	30

2.5 Sıcaklığa Bağlı Malzeme Özelliği	43
BÖLÜM 3.....	46
SAYISAL UYGULAMALAR.....	46
3.1 Timoshenko Kiriş Teorisi Çerçevesinde Çözüm.....	46
3.2 İki Boyutlu Sürekli Ortam Modeli Çerçevesinde Çözüm	59
3.3 Üç Boyutlu Sürekli Ortam Modeli Çerçevesinde Çözüm	65
3.4 Sıcaklığın Malzeme Özelliklerine Olan Etkisinin İncelenmesi	72
BÖLÜM 4.....	83
SONUÇ VE ÖNERİLER.....	83
KAYNAKLAR.....	86
ÖZGEÇMİŞ.....	93

## SİMGE LİSTESİ

---

$h$	Kesit yüksekliği
$b$	Kesit genişliği
$L$	Kiriş boyu
$n$	Fonksiyonel derecelendirme katsayısı
$E$	Young Modülü
$\alpha$	Sıcaklık genleşme katsayısı
$k$	Isı iletim katsayısı
$\nu$	Poisson oranı
$T$	Ortam sıcaklığı
$\Delta T$	Sıcaklık artışı
$T_r$	Sıcaklık oranı (Kirişin üst yüzey sıcaklığı/Kirişin alt yüzey sıcaklığı)
$\sigma_{xx}$	Cauchy normal gerilmesi
$\sigma_{\max}$	En büyük Cauchy asal gerilmesi
$\sigma_{\min}$	En küçük Cauchy asal gerilmesi
$\bar{\sigma}_{\max}$	Boyutsuz en büyük Cauchy asal gerilme
$\bar{\sigma}_{\min}$	Boyutsuz en küçük Cauchy asal gerilme
$E_r$	Kirişin üst ve alt yüzeylerindeki elastisite modülü değerlerinin oranı
$P_H$	Boyutsuz yatay mesnet tepkisi, $P_V$ boyutsuz düşey mesnet tepkisi
$P_T$	Boyutsuz eksenel termal yük, $m_T$ boyutsuz termal eğilme momenti
$m$	Boyutsuz mesnet tepki momenti
$\Delta$	Boyutsuz toplam eksenel uzama
$S$	Kirişin şekil değişimi sonrası uzunluğu
$\lambda$	Boyutsuz termal yük
$u$	Yatay yer değiştirme
$v$	Düşey yer değiştirme

## ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1	Sıcaklık etkisi altında fonksiyonel derecelendirilmiş her iki ucu ankastre mesnetli bir kiriş .....	7
Şekil 2.2	Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemede elastisite modülünün kalınlık boyunca değişimi.....	8
Şekil 2.3	İki düğüm noktalı kiriş elemanı [82].....	11
Şekil 2.4	X doğrultusunda yönelmiş referans konumu ile birlikte olan $C_0$ kiriş elemanının Lagrangian kinematığı a) kirişin düzlemsel hareketi b) hareket tarifinin X koordinatlarıyla ölçülen bir boyuta indirgenmesi. Bu şekil Felippa [82] tarafından alınmıştır.....	11
Şekil 2.5	Keyfi yönlendirilmiş referans konumuyla birlikte verilen kiriş elemanı. Bu şekil Felippa [82] dan alınmıştır.....	16
Şekil 2.6	İki boyutlu, sekiz düğüm noktalı eleman.....	25
Şekil 2.7	Sekiz düğüm noktalı, üç boyutlu eleman.....	36
Şekil 3.1	$L/h=15$ , $\lambda = 2$ ve $T_r = 1,2,3$ değerleri için boyutsuz termal aksenal yük $P_r$ ile fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) arasındaki ilişki.....	48
Şekil 3.2	$L/h=15$ , $T_r = 15$ ve boyutsuz termal yük $\lambda = 2,3,5$ değerleri için kirişin orta noktasının boyutsuz düşey yer değiştirmesi $V(0.5)$ ile fonksiyonel derecelendirme katsayısı $n$ arasındaki ilişkisi.....	49
Şekil 3.3	$L/h=15$ , $T_r = 1,1.2,1.5,2,3$ ve boyutsuz termal yük $\lambda = 2$ değerleri için boyutsuz termal eğilme momenti $M_r$ ile fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) arasındaki ilişki.....	50
Şekil 3.4	Kirişin $T_r = 2$ , $L/h=15$ , $n=3$ , $\lambda = 4,6,8$ değerleri için burkulma sonrası Konumları.....	50
Şekil 3.5	$T_r = 3$ ve çeşitli fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) değerleri için boyutsuz kritik burkulma sıcaklığı ile kirişin uzunluk/yükseklik oranı arasındaki ilişki.....	51
Şekil 3.6	$T_r = 3$ ve $L/h=10$ için fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) ile boyutsuz kritik burkulma sıcaklığı arasındaki ilişki.....	52
Şekil 3.7	$L/h=20$ , $T_r = 3$ ve fonksiyonel derecelendirme katsayısı $n=0,0.8,2,6$ değerleri için kirişlerin orta noktasının boyutsuz düşey yer değiştirmesi	

	$V(0.5)$ ile boyutsuz termal yük $\lambda$ arasındaki ilişki.....	53
Şekil 3.8	$L/h=20$ , $T_r = 3$ fonksiyonel derecelendirme katsayısı $n=0, 0.8, 2, 6$ değerleri için kirişlerin toplam boyutsuz boy uzaması $\Delta$ ile boyutsuz termal yük $\lambda$ arasındaki ilişki.....	53
Şekil 3.9	$L/h=20$ , $T_r = 3$ fonksiyonel derecelendirme katsayısı $n=0, 0.8, 2, 6$ değerleri için boyutsuz mesnet tepkileri ile boyutsuz termal yük $\lambda$ arasındaki ilişki.....	54
Şekil 3.10	$L/h=20$ , $\lambda = 2$ ve çeşitli $T_r$ değerleri için kirişlerin orta noktasının boyutsuz düşey yer değiştirmesi $V(0.5)$ ile fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) arasındaki ilişki.....	55
Şekil 3.11	$L/h=20$ , $\lambda = 2$ ve çeşitli $T_r$ değerleri için kirişlerin toplam boyutsuz aksenal uzaması $\Delta$ ile fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) arasındaki ilişki.....	55
Şekil 3.12	$L/h=20$ , $\lambda = 2$ ve çeşitli $T_r$ değerleri için kirişlerin boyutsuz mesnet tepkileri ile fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) arasındaki ilişki.....	56
Şekil 3.13	$L/h=20$ , $T_r = 3$ fonksiyonel derecelendirme katsayısı $n=0, 0.8, 3, 10$ değerleri için kirişin orta kesitinin üst noktasında ( $\xi = 0.5, \eta = 0.5$ ), boyutsuz en büyük Cauchy asal gerilmeleri ile boyutsuz termal yük $\lambda$ arasındaki ilişki.....	57
Şekil 3.14	$L/h=20$ , $T_r = 3$ , fonksiyonel derecelendirme katsayısı $n=0, 0.8, 3, 10$ değerleri için kirişin orta kesitinin üst noktasında ( $\xi = 0.5, \eta = 0.5$ ), boyutsuz en küçük Cauchy asal gerilmeleri ile boyutsuz termal yük $\lambda$ arasındaki ilişki.....	57
Şekil 3.15	$L/h=20$ , $T_r = 3$ , $\lambda = 4$ için kirişin orta kesitinde boyutsuz en büyük Cauchy asal gerilmeleri.....	58
Şekil 3.16	$L/h=20$ , $T_r = 3$ , $\lambda = 4$ için kirişin orta kesitinde boyutsuz en küçük Cauchy asal gerilmeleri.....	58
Şekil 3.17	$L/h=15$ , $T_r = 15$ ve boyutsuz termal yük $\lambda = 2, 3, 5$ değerleri için kirişin orta noktasının boyutsuz düşey yer değiştirmesi $V(0.5)$ ile fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) arasındaki ilişkisi.....	61
Şekil 3.18	$L=80$ m, $b=1$ m, $n=0$ ve $\Delta T = 4000$ °C olması durumunda Timoshenko kiriş teorisi ve iki boyutlu sürekli ortam modeline göre kirişin burkulma sonrası yer değiştirmiş konumları. a) $h=1$ m b) $h=1.6$ m c) $h=2.667$ m d) $h=4$ m e) $h=5.33$ m f) $h=6.15$ m g) $h=7.27$ m.....	61
Şekil 3.19	$b=1$ m, $n=0$ ve $\Delta T = 4000$ °C olması durumunda Timoshenko kiriş teorisi ve iki boyutlu sürekli ortam modeline göre kirişin orta kesitindeki Cauchy normal gerilmelerinin yükseklik boyunca dağılımı. a) $L/h=50$ b) $L/h=30$ c) $L/h=20$ d) $L/h=15$ e) $L/h=13$ f) $L/h=11.42$ .....	63
Şekil 3.20	$L=80$ m, $b=1$ m, $h=1$ m ve $\Delta T = 4000$ °C olması durumunda Timoshenko kiriş teorisi ve iki boyutlu sürekli ortam modeline göre kirişin burkulma sonrası konumları. a) $n=0$ b) $n=0.5$ c) $n=1$ d) $n=3$ e) $n=5$ f) $n=10$ .....	64
Şekil 3.21	$L/h=15$ , $T_r = 15$ ve boyutsuz termal yük $\lambda = 2, 3, 5$ değerleri için kirişin orta noktasının boyutsuz düşey yer değiştirmesi $V(0.5)$ ile fonksiyonel	



	derecelendirme katsayısı $n$ arasındaki ilişki.....	66
Şekil 3.22	$L=80$ m, $b=1$ m, $n=0$ ve $\Delta T = 4000$ °C olması durumunda üç boyutlu sürekli ortam modeline göre kirişin burkulma sonrası konumları. a) $h=1$ m b) $h=2$ m c) $h=4$ m d) $h=10$ m e) $h=15$ m.....	67
Şekil 3.23	$L=80$ m, $b=1$ m, $h=1$ m ve $\Delta T = 4000$ °C olması durumunda üç boyutlu sürekli ortam modeline göre kirişin burkulma sonrası konumları. a) $n=0$ b) $n=0.5$ c) $n=1$ d) $n=3$ e) $n=5$ f) $n=10$ g) $n=1000$ .....	69
Şekil 3.24	Östenitik paslanmaz çelik-316 ve saf molibdenin malzeme özellikleri ile sıcaklık artışı arasındaki ilişki. a) Elastisite modülü b) Sıcaklık genleşme katsayısı c) Akma gerilmesi d) Isı iletim katsayısı. ————— Östenitik Paslanmaz Çelik (316), - - - - - Saf Molibden.....	73
Şekil 3.25	Değişik üniform sıcaklık artışı ile birlikte Elastisite modülünün kiriş yüksekliği boyunca değişimi a) $n=0$ (Tümüyle Östenitik paslanmaz çelik-316) b) $n=0.5$ c) $n=3$ d) $n=\infty$ (Tümüyle saf Molibden). ————— $\Delta T = 0$ , - - - - - $\Delta T = 200$ K, - - - - - $\Delta T = 200$ K, + + + + + $\Delta T = 400$ K, - - - - - $\Delta T = 700$ K.....	74
Şekil 3.26	Değişik üniform sıcaklık artışı ile birlikte sıcaklık genleşme katsayısının kiriş yüksekliği boyunca değişimi a) $n=0$ (Tümüyle Östenitik paslanmaz çelik (316)) b) $n=0.5$ c) $n=3$ d) $n=\infty$ (Tümüyle saf Molibden). ————— $\Delta T = 0$ , - - - - - $\Delta T = 200$ K, - - - - - $\Delta T = 200$ K, + + + + + $\Delta T = 400$ K, - - - - - $\Delta T = 700$ K.....	75
Şekil 3.27	Değişik üniform sıcaklık artışı ile birlikte akma gerilmesinin kiriş yüksekliği boyunca değişimi a) $n=0$ (Tümüyle Östenitik paslanmaz çelik (316)). a) $n=0$ b) $n=0.5$ c) $n=3$ d) $n=\infty$ (Tümüyle saf Molibden). ————— $\Delta T = 0$ , - - - - - $\Delta T = 200$ K, - - - - - $\Delta T = 200$ K, + + + + + $\Delta T = 400$ K, - - - - - $\Delta T = 700$ K.....	75
Şekil 3.28	Malzeme fiziksel özelliklerinin sıcaklığa bağlı olmaması durumunda, kiriş yüksekliği boyunca, farklı fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) değerlerine göre değişimler ( $\Delta T = 700$ K için ). a) Elastisite modülü, b) sıcaklık genleşme katsayısı c) Akma gerilmesi, d) ısı iletim katsayısı. ————— $n=0$ , - - - - - $n=0.1$ , + + + + + $n=0.5$ , - - - - - $n=1$ , eeeeeee $n=3$ , eeeeeee $n=10$ , + + + + + $n=\infty$ .....	76
Şekil 3.29	Malzeme fiziksel özelliklerinin sıcaklığa bağlı olması durumunda, kiriş yüksekliği boyunca, farklı fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) değerlerine göre değişimler ( $\Delta T = 700$ K için ). a) Elastisite modülü, b) sıcaklık genleşme katsayısı, c) Akma gerilmesi, d) ısı iletim katsayısı. ————— $n=0$ , - - - - - $n=0.1$ , + + + + + $n=0.5$ , - - - - - $n=1$ , eeeeeee $n=3$ , eeeeeee $n=10$ , + + + + + $n=\infty$ .....	77
Şekil 3.30	Farklı fonksiyonel derecelendirilme katsayılarına göre malzeme fiziksel özelliklerinin sıcaklığa bağlı olması ve olmaması durumlarında, kirişin kritik burkulma sıcaklığı ile kirişin $L/h$ oranı arasındaki ilişki. ————— Model 1, - - - - - Model 2.....	78

- Şekil 3.31 Malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağlı olması ve olmaması durumlarında, kirişin orta noktasının düşey yer değiştirmesi  $V(L/2)$  ile sıcaklık artışı  $\Delta T$  arasındaki ilişkisi. a)  $n=0$ , b)  $n=0.5$  c)  $n=1$ . ——— Model 1, - - - - - Model 2.....79
- Şekil 3.32 Malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağlı olması ve olmaması durumlarında en büyük Cauchy normal gerilmesi ile sıcaklık artışı  $\Delta T$  arasındaki ilişki a)  $n=0$  b)  $n=0.5$ , c)  $n=1$ . ——— Model 1, - - - - - Model 2.....81

**SICAKLIK ETKİSİ ALTINDAKİ FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ  
KİRİŞLERİN BURKULMA SONRASI DAVRANIŞLARININ İNCELENMESİ**

Şeref Doğuşcan AKBAŞ

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Turgut KOCATÜRK

Bu çalışmada fonksiyonel olarak derecelendirilmiş kirişlerin sıcaklık etkisi altında burkulma sonrası davranışı incelenmiştir. Problemin çözümünde kirişler, Timoshenko kiriş teorisi, iki boyutlu sürekli ortam modeli ve üç boyutlu sürekli ortam modeli çerçevesinde ele alınmıştır. Her üç durumda da toplam Lagrangian formülasyonu ile birlikte sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır. Kirişin malzeme özellikleri, kiriş kalınlığı boyunca fonksiyonlara bağlı olarak belirlenmiştir. Bilindiği gibi burkulma sonrası davranış problemi geometrik doğrusal olmayan bir problemdir. Bununla birlikte, yer değiştirmiş konum üzerinde yazılan geometrik doğrusal olmayan denklemler daha sonra yer değiştirmeler ve dönmeler sınırlandırılarak doğrusallaştırılmakta ve bu durum için çözümler elde edilmektedir. Buradaki çalışmada ise yer değiştirmeler ve dönmeler üzerinde herhangi bir sınırlandırma yapılmamış olup burkulma ve burkulma sonrası davranış tam olarak incelenebilmektedir. Yani geometrik doğrusal olmama hali tam olarak göz önüne alınmıştır. Ayrıca bu çalışmada, sıcaklığın malzeme özellikleri üzerindeki etkisi de incelenmiştir. Malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağlı olarak değişmesi ile birlikte, ele alınan problem, malzeme yönünden de doğrusal olmayan bir problem olmaktadır.

Sonlu eleman ifadeleri artımsal formda doğrusallaştırılmış olarak elde edilmiştir. Bu doğrusallaştırma işlemi sonucunda eleman teğet rijitlik matrisi bulunur. Daha sonra

eleman teğet rijitlik matrisleri kullanılarak sistem teğet rijitlik matrisi elde edilir. Son olarak ise Newton-Raphson sayısal çözümler tekniğinin kullanımı ile doğrusal olmayan eşitlikler sisteminin çözümleri gerçekleştirilir. Bilindiği gibi kuvvetli doğrusal olmama durumunda yükün de birkaç adımda uygulanması gerekli olabilmektedir ve bu çalışmada da yük parçalara bölünerek son adımda nihai yüke ulaşılmıştır. Sayısal hesaplamalarda, MATLAB programı kullanılmıştır.

Son yıllarda fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler uygulama alanına girmiş olup buna paralel olarak bu konu üzerinde yoğun kuramsal araştırmalar yapılmıştır. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler, özellikle ısı bariyeri olarak kullanılmakta olup bu açıdan bakıldığında böylesi malzemelerle teşkil edilen yapı elemanlarında sıcaklık değişimi çok önem arz etmektedir.

Bu çalışmada, sıcaklık artışı ve farklı malzeme dağılımlarına göre, kirişlerin yer değiştirmesi, burkulma sonrası konumları, kritik burkulma yükleri ve kiriş kalınlığı boyunca gerilme dağılımı detaylı olarak incelenmiştir. Timoshenko kiriş teorisi, iki boyutlu sürekli ortam modeli ve üç boyutlu sürekli ortam modeli arasındaki farklar burkulma sonrası durum için araştırılmıştır. Bunlara ilave olarak, sıcaklığın malzemenin fiziksel özellikleri üzerindeki etkisi ayrıntılı olarak araştırılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler, Kirişler, Toplam Lagrangian sonlu elemanlar yöntemi, Burkulma sonrası davranış, Sıcaklığa bağlı malzeme özelliği

**POST BUCKLING BEHAVIOUR OF FUNCTIONALLY GRADED BEAMS  
UNDER THE INFLUENCE OF TEMPERATURE**

Şeref Doğuşcan AKBAŞ

Department of Civil Engineering

PH.D. Thesis

Advisor: Prof. Dr. Turgut KOCATÜRK

In this study, post-buckling behavior of functionally graded beams under the influence of temperature loading is investigated by using total Lagrangian finite element model of two dimensional continuum, three dimensional continuum and the Timoshenko beam element approximations. Material properties of the beam change in the thickness direction according to a power-law function. It is known that post-buckling problems are geometrically nonlinear problems. In this study, there is no restriction on the magnitudes of deflections and rotations in the beam. Also, the temperature dependent material properties are investigated in this study. Hence, the considered problem is both geometrically and physically nonlinear one.

The considered highly non-linear problem is solved by using incremental displacement-based finite element method in connection with Newton-Raphson iteration method. In order to use the solution procedures of Newton-Raphson type, there is need to linearized equilibrium equations, which can be achieved through the linearization of the principle of virtual work in its continuum form. As it is known, when the nonlinearity is strong, it is needed to apply the external load step by step. In this study, the above mentioned solution procedure is applied. The necessary computer programs are developed by using MATLAB program.

Functionally graded materials are a new generation of composites that have many practical applications and much more attention has been given to this area in recent years. Functionally graded materials are especially used as thermal barriers: Therefore the design of functionally graded materials in the high thermal environments is very important.

With the effects of material gradient property and thermal load, the relationships between deflections, thermal post-buckling configuration, critical buckling temperature and stress distributions through the thickness of the beams are illustrated in detail in post-buckling case. The difference between the results of total Lagrangian finite element model of two-dimensional continuum, three-dimensional continuum and total Lagrangian finite element model of Timoshenko beam element is investigated for functionally graded beams. Also, the differences between temperature dependent and independent physical properties are investigated for functionally graded beams in detail in post-buckling case.

**Key words:** Functionally graded materials, Beams, Total Lagrangian finite element method, Post buckling behaviour, Temperature-dependent physical properties

#### 1.1 Literatür Özeti

Son yıllarda fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerden yapılmış yapı elamanlarının davranışları ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Yapılan literatür taramalarında, burkulma ve burkulma sonrası davranış ile ilgili çalışmalar fonksiyonel derecelendirilmiş plak ve kabuk üzerinde yoğunlaşmıştır. Kirişlerin sıcaklık etkisi altında burkulma ve burkulma sonrası davranışları ile ilgili çok fazla çalışmaya rastlanmamıştır. Yapılan çalışmalarda ise çubuk teorisi kullanılarak belirli kısıtlamalarla sonuca gidilmiştir. Ayrıca sıcaklığın malzemenin fiziksel özelliklerine olan etkisi üzerinde pek durulmamıştır. Khdeir [1], üniform sıcaklık dağılımına maruz kalın, orta kalın ve ince çapraz katlı laminantlı kirişlerin termal burkulmasını incelemiştir. Sankar ve Tzeng [2], fonksiyonel derecelendirilmiş bir kirişin termo-elastik denklemlerini aksel gerilme dağılımını elde ederek kapalı formda çözmüştür. Radtgo vd. [3], çift simetrik kesitli bir eğrisel kirişin termal burkulma yükünü araştırmıştır. Ching ve Yen [4], iki boyutlu fonksiyonel derecelendirilmiş katı cisimlerin, hem mekanik hem de termal yüklemeler altında davranışını ağırsız Petrov-Galerkin yöntemini kullanarak incelemiştir. Librescu vd. [5] fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerden yapılmış ince cidarlı kirişlerin termo-elastik modellemesi ve davranışını araştırmıştır. Ching ve Yen [6], fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin geçici termo-elastik şekil değiştirmelerini ağırsız Petrov-Galerkin yöntemi kullanarak incelemiştir. Na ve Kim [7], fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin, üç boyutlu termo-mekanik burkulma analizini yapmıştır. Li vd. [8], fonksiyonel derecelendirilmiş bir kirişin sıcaklık etkisi altında burkulma sonrası davranışını incelemiştir. Bu çalışmada Timoshenko kiriş teorisi kullanılarak, her iki ucu

ankastre mesnetli kirişin burkulma sonrası davranışı shooting yöntemi ile çözülmüştür. Na ve Kim [9], üniform ve üniform olmayan sıcaklık artışına maruz fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerin üç boyutlu termal burkulma ve burkulma sonrası analizini sonlu elemanlar yöntemini kullanarak yapmıştır. Lu vd. [10], fonksiyonel derecelendirilmiş kalın kirişlerin iki boyutlu termo elastik analizini yapmıştır. Mohammadia ve Drydena [11], fonksiyonel derecelendirilmiş eğrisel bir kirişin termo-elastik gerilmelerini incelemiştir. Carpinteri ve Paggi [12], çok tabakalı homojen olmayan kirişlerin termo-elastik gerilme problemini incelemiştir. Rahimi ve Davoodinik [13], fonksiyonel derecelendirilmiş Timoshenko kirişinin termal davranışının analizini yapmıştır. Kapuria vd. [14], tabakalı fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin termal yükleme altındaki davranışını sonlu elemanlar modelini temel alan üçüncü dereceden zikzak teorisi ile incelemiştir. Song ve Li [15], mekanik ve termal yüklemeye maruz her iki ucu ankastre mesnetli fonksiyonel derecelendirilmiş kemerlerin burkulma problemini incelemiştir. Xiang ve Yang [16], Timoshenko kiriş teorisi çerçevesinde, değişik kalınlıkta tabakalı fonksiyonel derecelendirilmiş bir kirişin, termal olarak indirgenmiş başlangıç gerilmeleri altında serbest ve zorlanmış titreşimini araştırmıştır. Li vd. [17], yüzeyinde piezoelektrik tabakalarla bağlı fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin hem sıcaklık artışı hem de elektriksel gerilim altında serbest titreşim ve burkulma sonrası analizini yapmıştır. Ke vd. [18], kenarında çatlak içeren fonksiyonel derecelendirilmiş malzemedan yapılmış kirişlerin burkulma sonrası davranışını Timoshenko kiriş teorisi ve von Kármán kinematik bağıntılarıyla incelemiştir. Pradhan ve Murmu [19], fonksiyonel derecelendirilmiş sandviç kirişlerin termo-mekanik titreşim analizini incelemiştir. Lim vd. [20], fonksiyonel derecelendirilmiş dairesel kemerlerin titreşimini, iki boyutlu elastisite teorisi temelinde sıcaklığa bağlı olarak incelemiştir. Malekzadeh vd. [21], termal ortamda fonksiyonel derecelendirilmiş dairesel eğrisel kirişlerin düzlem dışı serbest titreşim analizini yapmıştır. Kiani ve Eslami [22], Euler-Bernoulli kiriş teorisi çerçevesinde, çeşitli termal yükleme tipi altında fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin burkulmasını incelemiştir. Alibeigloo [23], piezoelektrik-aktüatör ve sensor ile birleştirilmiş fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin elektrik ve termo-mekanik yükleme altında analitik çözümünü incelemiştir. Anandrao [24], fonksiyonel derecelendirilmiş üniform narin kirişlerin termal burkulma sonrası



davranışını von-Karman şekil değiştirme-yer değiştirme ilişkilerini temel alarak klasik Rayleigh-Ritz formülasyonu ve çok yönlü sonlu elemanlar yöntemi ile araştırmıştır. Farid vd. [25] başlangıçta gerilmiş kalın, basit mesnetli, iki parametrelili elastik zemine oturan, fonksiyonel derecelendirilmiş eğrisel panellerin termal ortamda serbest titreşimlerini üç boyutlu elastisite formülasyonlarını kullanarak çözmüştür. Su vd. [26], sıcaklık artışı ve elektrik alanına maruz fonksiyonel derecelendirilmiş, yüzeyi piezoelektrik tabakalar ile bağlı Timosehenko kirişlerin burkulma-sonrası davranışlarını incelemiştir. Kocatürk vd. [27], izleyici üniform yayılı yüke maruz fonksiyonel derecelendirilmiş konsol bir kirişin geometik lineer olmayan analizini Timoshenko kiriş teorisi çerçevesinde çözmüştür. Li ve Li [28], yayılı yük altında fonksiyonel derecelendirilmiş kolonların burkulma ve burkulma sonrası davranışlarını incelemiştir. Zhao vd. [29], korunumsuz kuvvetler ile sıcaklık yükü altında fonksiyonel derecelendirilmiş basit bir kirişin burkulma sonrası analizini incelemiştir. Burada malzeme özellikleri sıcaklığa bağlı olarak değişmektedir. Akbaş ve Kocatürk [30], aksenal olarak fonksiyonel derecelendirilmiş her iki ucu sabit mesnetli bir kirişin sıcaklık etkisi altında burkulma sonrası davranışı Timoshenko kiriş teorisi çerçevesinde incelenmiştir. Kocatürk ve Akbaş [31], fonksiyonel derecelendirilmiş bir kirişin sıcaklık etkisi altında burkulma sonrası davranışını Timoshenko kiriş teorisi çerçevesinde incelemiştir. [30] ile [31] çalışmaları, tez çalışması kapsamında üretilmiştir. Fonksiyonel derecelendirilmiş plak ve kabukların sıcaklık etkisi altında burkulma ve burkulma sonrası davranışları ile ilgili literatürde birçok çalışma yer almaktadır [32-55]. Bu çalışmaların çoğunda sıcaklığın malzemenin fiziksel özelliklerine olan etkisi dikkate alınmıştır. Ayrıca, homojen kirişlerin sıcaklık etkisi altında burkulma ve burkulma sonrası davranışları ile ilgili literatürde birçok çalışma mevcuttur [56-79]. Bu çalışmalarda, sıcaklığın malzemenin fiziksel özelliklerine olan etkisi üzerinde pek durulmamıştır.

## **1.2 Tezin Amacı**

Son yıllarda fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler uygulama alanına girmiş olup buna paralel olarak bu konu üzerinde yoğun kuramsal araştırmalar yapılmıştır. Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler özellikle ısı bariyeri olarak kullanılmakta

olup bu açıdan bakıldığında böylesi malzemelerle teşkil edilen yapı elemanlarında sıcaklık değişimi çok önem arz etmektedir. Bu konu üzerinde çalışmalar oldukça sınırlıdır. Bu nedenle tez çalışmasının hedefi, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerden yapılmış kirişlerin sıcaklık etkisi altındaki burkulma sonrası davranışlarını ayrıntılı olarak inceleyerek literatüre bu konuda katkı sağlamaktır.

### **1.3 Orijinal Katkı**

Tez çalışmasında, fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin geometrik doğrusal olmama durumundaki toplam Langragian sonlu elemanlar formülasyonları, Timoshenko kiriş teorisi, iki boyutlu sürekli ortam modeli ve üç boyutlu sürekli ortam modeli çerçevesinde geliştirilmiştir. Buradaki çalışmada yer değiştirmeler ve dönmeler üzerinde herhangi bir sınırlandırma yapılmamış olup burkulma ve burkulma sonrası davranış tam olarak incelenebilmektedir: Yani geometrik doğrusal olmama hali tam olarak göz önüne alınacaktır. Literatür çalışmasında görüldüğü üzere, kirişlerin doğrusal olmayan analizlerinde genellikle yer değiştirmeler ve dönmeler üzerinde belirli bir sınırlandırma ile çalışmalar yapılmıştır. Bu durum, kirişlerin gerçek davranışları hakkında yetersiz bilgi vermektedir. Özellikle kirişlerin burkulma ve burkulma sonrası davranışlarının iyi anlaşılabilmesi için yer değiştirmeler ve dönmeler üzerinde herhangi bir kısıtlama yapılmaması gerekir. Bu yüzden bu tez çalışmasında, geometrik olarak doğrusal olmama hali herhangi bir kısıtlama yapılmaksızın tam olarak göz önüne alınmıştır. Ayrıca literatür çalışmasında görüldüğü üzere, fonksiyonel derecelendirilmiş kirişler ile yapılmış çalışmalarda çoğunlukla çubuk teorileri kullanılmıştır. Bu tez çalışmasında ise, çubuk modeli, iki boyutlu ve üç boyutlu modeller ile araştırma yapılmıştır. Bu modeller arasındaki farklar etraflıca incelenmiştir.

Tez çalışmasında, sıcaklığın malzeme özelliklerine olan etkisi de incelenmiştir. Malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağlı olarak değişmesi ile birlikte, ele alınan problem, malzeme yönünden de doğrusal olmayan bir problem olmaktadır. Literatür çalışmasında görüldüğü üzere, gerek fonksiyonel derecelendirilmiş malzemedan yapılmış kirişlerin gerek homojen malzemedan yapılmış kirişlerin sıcaklık yüklemesi altındaki davranışları ile ilgili, malzemelerin sıcaklığa bağlı davranışları da göz önüne alınarak yapılmış çok az çalışma bulunmaktadır. Özellikle kirişlerin sıcaklık etkisi altında oluşacak burkulma ve

burkulma sonrası davranışları ile ilgili çok sınırlı çalışma yapıldığı görülmüştür. Bu tez çalışmasında, sıcaklığın malzeme özelliklerine olan etkisi, burkulma sonrası davranış için ayrıntılı olarak incelenmiştir. Malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağlı olma ve olmama durumları arasındaki fark ayrıntılı olarak incelenmiştir.

## BÖLÜM 2

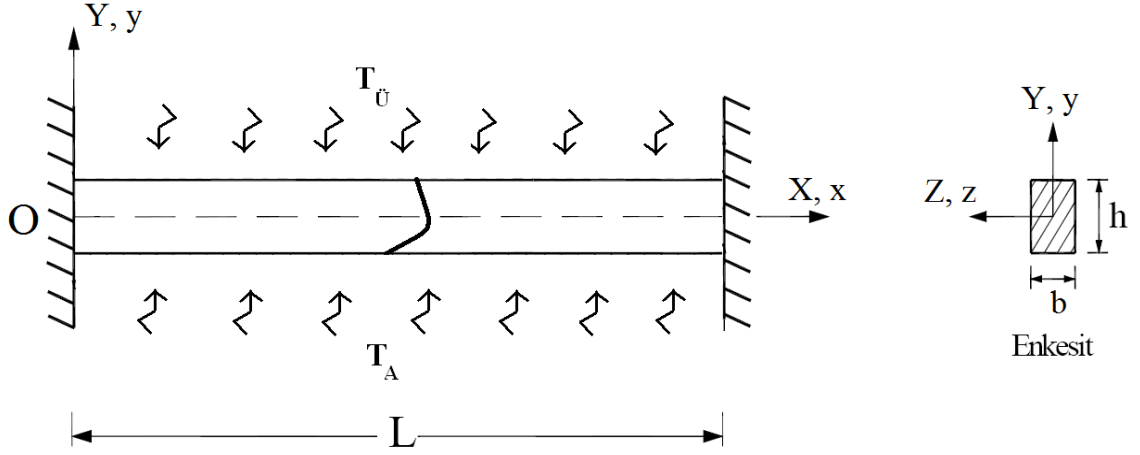
---

### KURAMSAL ÇALIŞMA

Tez çalışması kapsamında, fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin burkulma sonrası davranışlarının incelenmesinde, Timoshenko kiriş teorisi, iki boyutlu sürekli ortam modeli ve üç boyutlu sürekli ortam modeli kullanılmıştır. Her üç modelde de toplam Lagrangian formülasyonu ile birlikte sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır. Geometrik doğrusal olmayan toplam Lagrangian sonlu elemanlar formülasyonları, fonksiyonel derecelendirilmiş kirişler için türetilmiştir. Ayrıca bu çalışmada, sıcaklığın malzemenin fiziksel özelliklerine etkisi de dikkate alınmıştır.

#### 2.1 Problemin Geometrisi

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeden yapılmış bir kirişin maddesel veya Lagrangian koordinat sistemi  $(X, Y, Z)$  ve uzaysal ya da Euler koordinat sistemi  $(x, y, z)$  şekil 2.1 de gösterilmiştir. Koordinat sistemlerinin başlangıcı  $O$  noktasıdır. Kirişin her iki ucu da ankastre mesnetlidir.



Şekil 2. 1 Sıcaklık etkisi altında fonksiyonel derecelendirilmiş her iki ucu ankastre mesnetli bir kiriş.

Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin kiriş kalınlığı boyunca değişen malzeme özelliklerinden herhangi biri  $P$  ( $E$  Elastisite modülü,  $\alpha_x$  termal genleşme katsayısı,  $k$  ısı iletim katsayısı,  $T$  sıcaklık,  $\nu$  Poisson oranı ve  $G$  Kayma modülü) aşağıda verilen, kiriş kalınlığı boyunca belli bir fonksiyona (power-law) bağlı olarak değişmektedir [80]:

$$P(Y) = (P_U - P_A) \left( \frac{Y}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + P_A \quad (2.1)$$

Burada,

$P$ : Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin kalınlık boyunca değişen malzeme özelliklerinden herhangi biri.

$P_U$ : Kirişin üst yüzeyindeki malzemenin özellikleri

$P_A$ : Kirişin alt yüzeyindeki malzemenin özellikleri

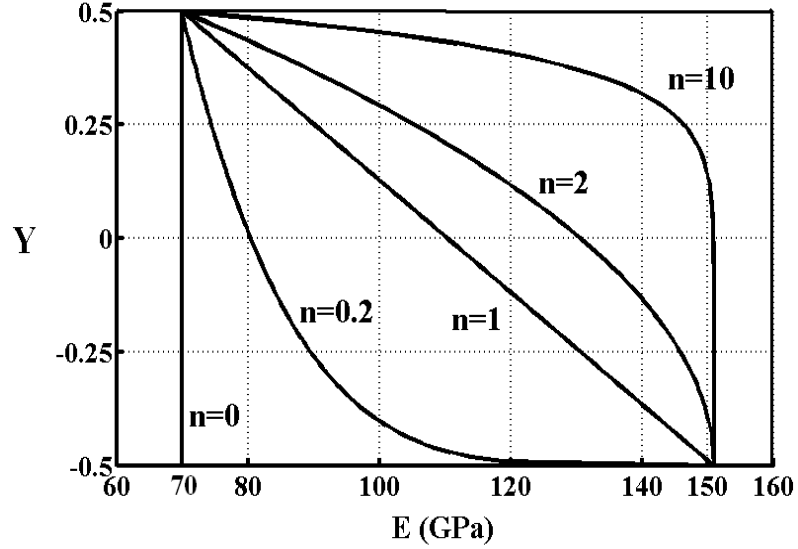
$n$ : Fonksiyonel derecelendirme katsayısı

$Y$ : Kalınlık yönündeki koordinat

$h$ : kiriş yüksekliği

Eşitlik (2.1) den görülür ki,  $Y = -h/2$  olduğunda  $P = P_A$  ve  $Y = h/2$  olduğunda  $P = P_U$  olur. Ayrıca fonksiyonel derecelendirme katsayısı  $n=0$  olduğunda  $P = P_U$  ve  $n=\infty$

olduğunda  $P=P_A$  olur. Eşitlik (2.1) deki denkleme göre elastisite modülünün kiriş kalınlığı boyunca dağılımı şekil 2.2 de gösterilmiştir. Burada kirişin alt yüzeyi seramik ( $E_A = E_{Seramik} = 151 \text{ GPa}$ ) ve üst yüzeyi ise Alüminyum ( $E_U = E_{Alüminyum} = 70 \text{ GPa}$ ) dur.



Şekil 2.2 Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemede elastisite modülünün kalınlık boyunca değişimi.

## 2.2 Doğrusal Olmayan Problemlerin Genel Çözüm Yolu

Eşitlik (2.2) den eşitlik (2.13) e kadar olan formülasyonların geliştirilmesinde Zienkiewicz ve Taylor [81] tarafından genel çerçevesi verilen türetim kullanılmıştır. Bilindiği gibi, doğrusal olmayan problemlerin çözümünde her zaman cebrik eşitlikler takımı elde edilir ve bunlar genel olarak doğrusal değildirler ve izleyen şekilde gösterilirler.

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} - \mathbf{P}(\mathbf{u}) = 0 \quad (2.2)$$

Burada  $\mathbf{u}$  ayrıklaştırma parametrelerinin bir takımıdır; bu çalışmada bunlar düğüm yer değiştirmeleridirler,  $\mathbf{R}$  artık vektördür,  $\mathbf{f}$  ayrıklaştırma parametrelerinden bağımsız bir vektördür ve  $\mathbf{P}$  ayrıklaştırma parametrelerine bağımlı bir vektördür. Bu eşitlikler birden fazla çözüme sahip olabilirler (yani  $\mathbf{u}$  nun birden fazla takımı eşitlik (2.2) yi sağlayabilir). Bu yüzden eğer bir çözüme varılmışsa bu çözüm aranan çözüm olmayabilir.

Gerçekçi cevaplar elde etmek için problemin doğasına uygun derinlemesine fiziksel bakış açısı ve genellikle bilinen çözümlerden küçük adımlı artımsal yaklaşımlar esastır. Böylesi artımlar, eğer gerilme ve şekil değiştirme değişimlerini ilişkilendiren bünye kanunu yola bağlıysa, her zaman gereklidir.

Doğrusal olmayan problem genel olarak izleyen eşitliğin çözümü şeklinde formüle edilir.

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{R}(\mathbf{u}_{n+1}) = \mathbf{f}_{n+1} - \mathbf{P}(\mathbf{u}_{n+1}) = 0 \quad (2.3)$$

Burada sayısal işlemlere, bilinen yakın bir çözümden başlanır:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_n, \quad \mathbf{R}_n = 0, \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}_n \quad (2.4)$$

Bu çözüm genel olarak zorlayıcı fonksiyon  $\mathbf{f}_n$  deki değişimlerden ortaya çıkar:

$$\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{f}_n + \Delta \mathbf{f}_n \quad (2.5)$$

İzleyen ifadedeki  $\Delta \mathbf{u}_n$  değişimini belirlemek

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u}_n \quad (2.6)$$

amaç olacaktır ve  $\Delta \mathbf{f}_n$  artımları yol bağımlılığı izlenebilir diye makul düzeyde küçük tutulacaktır. Ayrıca böylesi artımsal işlem yolu aşırı sayıda iterasyon sayısını indirgemeye ve fiziksel olarak doğru yolu izlemeye faydalıdır.

Newton-Raphson metodunda birinci mertebeye kadar (2.3) eşitliğine izleyen şekilde yaklaşım sağlanabilir:

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}_{n+1}^{i+1}) \approx \mathbf{R}(\mathbf{u}_{n+1}^i) + \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}} \right)_{n+1}^i d \mathbf{u}_n^i \quad (2.7)$$

İterasyon sayacı  $i=1$  olduğunda genel olarak

$$\mathbf{u}_{n+1}^1 = \mathbf{u}_n \quad (2.8)$$

kabul edilerek iterasyona başlanır ve burada  $\mathbf{u}_n$  bir önceki yük düzeyindeki yakınsanan çözümdür. Bir teğet doğrultuya karşı gelen rijitlik matrisi izleyen şekilde verilir:

$$\mathbf{K}_r = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{u}} = - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{u}} \quad (2.9)$$

(2.7) eşitliği ardışık düzeltmeyi

$$\mathbf{K}_T^i d\mathbf{u}_n^i = \mathbf{R}_{n+1}^i \quad (2.10a)$$

veya

$$d\mathbf{u}_n^i = (\mathbf{K}_T^i)^{-1} \mathbf{R}_{n+1}^i \quad (2.10b)$$

ifadeleriyle verir.

Burada  $d\mathbf{u}_n$  nun bir çözüm artımı olup diferansiyel  $d\mathbf{u}$  dan farklı olduğunu not etmek gereklidir. Genelde lineer olmayan eşitlikleri çözerken birinci artım için başlangıç çözüm vektörü, yani  $f_{n+1} = \Delta f_1$  için çözüm vektörü, sıfır vektörü olarak seçilir: Yani birinci iterasyon çözümü doğrusal çözüme karşı gelir. Bu iterasyon işlemi, ardışık iki çözüm vektörü arasındaki fark Euclidean normunda seçilen bir tolerans kriterinden küçük olana kadar devam ettirilir. Söz konusu tolerans kriteri izleyen şekilde alınmıştır.

$$\sqrt{\frac{[(d\mathbf{u}_n^{i+1} - d\mathbf{u}_n^i)^T (d\mathbf{u}_n^{i+1} - d\mathbf{u}_n^i)]^2}{[(d\mathbf{u}_n^{i+1})^T (d\mathbf{u}_n^{i+1})]^2}} \leq \zeta_{tol} \quad (2.11)$$

Ardışık yaklaşımların bir serisi

$$\mathbf{u}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{u}_{n+1}^i + d\mathbf{u}_{n+1}^i = \mathbf{u}_n + \Delta\mathbf{u}_n^i \quad (2.12)$$

ifadesini verir, burada

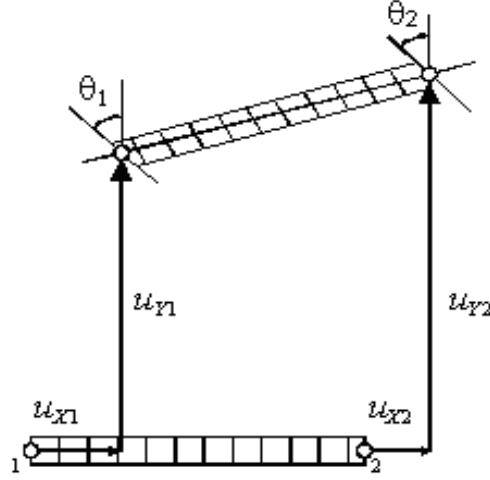
$$\Delta\mathbf{u}_n^i = \sum_{k=1}^i d\mathbf{u}_n^k \quad (2.13)$$

### 2.3 Fonksiyonel Derecelendirilmiş Kirişlerin Timoshenko Kiriş Teorisi Çerçevesinde Toplam Lagrangian Sonlu Elemanlar Formülasyonları

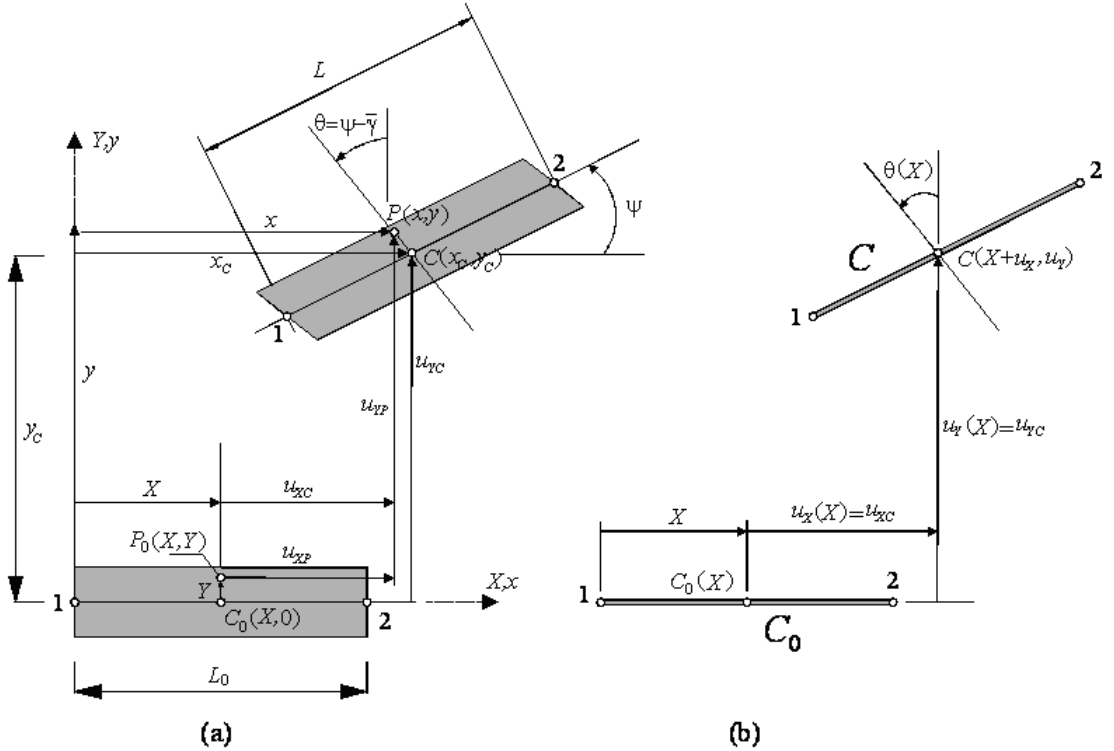
Fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin Timoshenko kiriş teorisi çerçevesinde doğrusal olmayan sonlu eleman modeli, toplam Lagrangian formülasyonları üzerine temellendirilerek oluşturulmuştur. Toplam Lagrangian formülasyonlarının çözümü için, bilinen önceki adım çözümlerinden küçük adımlı artımlar yapılması yaklaşımı yolu kullanılmıştır. Bu çalışmada, Felippa [82] tarafından verilen homojen ve izotrop malzemeli Timoshenko kirişinin toplam Lagrangian sonlu elemanlar formülasyonları,



sıcaklık ve fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeler için geliştirilmiştir. Timoshenko kiriş elemanının 2 düğüm noktalı sonlu elaman modeli Şekil 2.3 de gösterilmiştir. Her bir düğüm noktası üç serbestlik derecesine sahiptir. Bunlar, yatay ve düşey yer değiştirmeler olan  $u_{xi}$  ve  $u_{yi}$  ile Z eksenini etrafında dönme olan  $\theta_i$  dir.



Şekil 2.3 İki düğüm noktalı kiriş elemanı [82].



Şekil 2.4 X doğrultusunda yönelmiş referans konumu ile birlikte olan  $C_0$  kiriş elemanının Lagrangian kinematığı a) kirişin düzlemsel hareketi b) hareket tarifinin X koordinatlarıyla ölçülen bir boyuta indirgenmesi. Bu şekil Felippa [82] tarafından alınmıştır.

Şekil 2.4 de gösterildiği gibi, başlangıçta  $(X,Y)$  kartezyen koordinat sisteminde,  $C_0$  ilk konumunda olan bir cisim içinde  $(X,Y)$  pozisyonundaki bir  $P_0$  maddesel noktası dikkate alınsın. Burada  $P_0, C_0$  konumunda  $(X,Y)$  yerini işgal eden noktanın adıdır ve bu yüzden  $(X,Y)$  koordinatlarına maddesel koordinatlar adı verilir. Yüklerin uygulanmasından sonra cisim şekil değiştirecek ve yeni bir  $C$  konumuna geçecektir. Artık, göz önüne alınan  $P_0$  maddesel noktasının yeri, yeni  $C$  konumunda  $P$  olup  $(x,y)$  koordinatı ile belirlenir. Burada kesit boyutlarının değişmediği ve kayma çarpılmasının  $\psi \ll 1$  olduğu varsayılmıştır. Bu durumda  $\cos \psi \cong 1$  olur ve herhangi bir noktanın koordinatları izleyen şekildeki gibi olur (Felippa [82]) :

$$x = x_c - Y(\sin \psi + \sin \psi \cos \psi) = x_c - Y[\sin(\psi + \psi) + (1 - \cos \psi)\sin \psi] = x_c - Y \sin \theta \quad (2.14)$$

$$y = y_c + Y(\cos \psi - \sin \psi \sin \psi) = y_c + Y[\cos(\psi + \psi) + (1 - \cos \psi)\cos \psi] = y_c + Y \cos \theta \quad (2.15)$$

Burada  $x_c = X + u_{xc}$  ve  $y_c = u_{yc}$  dir. Sonuçta  $x = X + u_{xc} - Y \sin \theta$  ve  $y = u_{yc} + Y \cos \theta$  olur.  $u_{xc}$  ve  $u_{yc}$  ifadelerini sırasıyla  $u_x$  ve  $u_y$  ile göstererek Euler ve Lagrange koordinatları arasındaki ilişki izleyen şekilde elde edilir:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X + u_x - Y \sin \theta \\ u_y + Y \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Burada  $u_x, u_y$  ve  $\theta$ ,  $X$  in fonksiyonlarıdır. Böylece Şekil 2.4 de şematik olarak gösterildiği gibi bir boyutlu modele indirgeme işlemi sonuçlandırılır. İki düğüm noktalı  $C_0$  elemanı için yer değiştirme ve dönme alanları, düğüm yer değiştirmeleri ve dönmelerinin lineer fonksiyonu cinsinden izleyen şekilde ifade edilir.

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} u_x(X) \\ u_y(X) \\ \theta(X) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 & 1+\xi & 0 & 0 \\ 0 & 1-\xi & 0 & 0 & 1+\xi & 0 \\ 0 & 0 & 1-\xi & 0 & 0 & 1+\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ \theta_1 \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{u} \quad (2.17)$$

Burada  $\xi = (2X/L_0) - 1$  izoparametrik koordinat olup 1 düğüm noktası ile 2 düğüm noktası arasında sırasıyla  $\xi = -1$  ile  $\xi = 1$  arasında değişir.

Green – Lagrange şekil değiştirme- yer değiştirme ilişkisi izleyen şekilde yazılır (Felippa [82] ).

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{xx} \\ 2e_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+u'_x)\cos\theta + u'_y\sin\theta - Y\theta' - 1 \\ -(1+u'_x)\sin\theta + u'_y\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e - Y\kappa \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\kappa = \theta' = \frac{\theta_2 - \theta_1}{L_0}; \quad e = (1+u'_x)\cos\theta + u'_y\sin\theta - 1; \quad \gamma = -(1+u'_x)\sin\theta + u'_y\cos\theta \quad (2.19)$$

Burada  $e$  ekstenel şekil değiştirme,  $\gamma$  kayma şekil değiştirmesi,  $\kappa$  kirişin eğriliğidir. Sıcaklık değişiminin göz önüne alınmayla birlikte İkinci Piola- Kirchhoff gerilme ifadeleri fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme için izleyen şekilde ifade edilir. Burada Felippa [82] tarafından verilen ifadelere, sıcaklık değişimini ve fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin etkileri eklenmiştir:

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_{xx} \\ s_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1^0 + E(Y)(e_1 - \alpha_x(Y)T(Y)) \\ s_2^0 + G(Y)e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1^0 \\ s_2^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E(Y) & 0 \\ 0 & G(Y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 - \alpha_x(Y)\Delta T(Y) \\ e_2 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Burada  $s_1^0$  ve  $s_2^0$  başlangıç gerilmeleri,  $E$  elastisite modülü,  $G$  kayma modülü,  $\alpha_x$  X doğrultusundaki termal genişleme katsayısı ve  $\Delta T$  sıcaklık değişimini ifade ederler. Bu ifadeler eşitlik 2.1 de verilen denkleme göre  $Y$  koordinatına bağlı birer fonksiyondurlar. Sıcaklık artışını temsil eden  $\Delta T = \Delta T(Y)$  denklemi, ısı transfer denklemi (2.21) kullanarak elde edilir:

$$-\frac{d}{dY} \left[ K(Y) \frac{dT(Y)}{dY} \right] = 0 \quad (2.21)$$

$T(h/2) = T_{\bar{U}}$  ve  $T(-h/2) = T_A$  sınır koşullarının kullanımıyla (2.21) eşitliğinin integrasyonu sonucunda izleyen eşitlik ortaya çıkar:

$$\Delta T(Y) = T_A + (T_{\bar{U}} - T_A) \int_{-h/2}^Y \frac{1}{K(Y)} dY \Big/ \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{K(Y)} dY \quad (2.22)$$

Bu çalışmada, sıcaklık değişimi sadece  $Y$  koordinatı boyunca olduğu düşünülmüştür. Çubuk elemanı için şekil değiştirme enerjisi izleyen şekilde verilmiştir:

$$\begin{aligned} U &= \int_{V_0} \left[ (s^0)^T e + \frac{1}{2} e^T E(Y) e \right] d\bar{X} \\ &= \int_{A_0} \int_{L_0} \left[ (s_1^0 e_1 + s_2^0 e_2) + \frac{1}{2} (E(Y) e_1^2 + G(Y) e_2^2) \right] dA d\bar{X} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Şekil değiştirme enerjisi kesit tesirleri cinsinden izleyen şekilde ifade edilir [82]:

$$\begin{aligned} U &= \int_{L_0} \left( N^0 e + \frac{1}{2} E(Y) A_0 e^2 \right) d\bar{X} + \int_{L_0} \left( V^0 \gamma + \frac{1}{2} G(Y) A_0 \gamma^2 \right) d\bar{X} \\ &+ \int_{L_0} \left( M^0 e + \frac{1}{2} E(Y) I_0 \kappa^2 \right) d\bar{X} \end{aligned} \quad (2.24)$$

İç kuvvetler, şekil değiştirme enerjisinin düğüm yer değiştirmelerine göre birinci varyasyonu sonucunda elde edilir. Şekil değiştirme enerjisinin birinci varyasyonu izleyen şekilde verilmiştir:

$$\delta U = \int_{L_0} (N \delta e + V \delta \gamma + M \delta \kappa) d\bar{X} \quad (2.25)$$

Burada, eksenel kuvvet  $N$ , kesme kuvveti  $V$  ve eğilme momenti  $M$ , ikinci-Piola Kirchhoff kesit tesirleridir. Bu kesit tesirleri fiziki bir anlam taşımamakta olup sadece şekil değiştirme enerjisinde ortaya çıkan matematiksel büyüklüklerdir. Bunlar İkinci-Piola Kirchhoff gerilme tansörü ile Green-Lagrange şekil değiştirme tansörlerinin enerji açısından eşlenik olmasından dolayı, şekil değiştirme enerjisi ifadesinde kullanılırlar. Bünye bağıntıları (Eşitlik 2.20) kullanılarak, ikinci-Piola Kirchhoff eksenel kuvveti  $N$ , kesme kuvveti  $V$  ve eğilme momenti  $M$  izleyen şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} N &= \int_A s_1 dA = \int_A \left[ s_1^0 + E(Y) (e - \gamma \kappa - \alpha_x(Y) \Delta T(Y)) \right] dA \\ &= N^0 + A_{xx} e - B_{xx} \kappa - N_T \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$V = \int_A s_2 dA = \int_A \left[ s_2^0 + G(Y) e_2 \right] dA = V^0 + A_{xz} \gamma \quad (2.27)$$

$$M = \int_A -\gamma s_1 dA = \int_A -\gamma \left[ s_1^0 + E(Y) (e - \gamma \kappa - \alpha_x(Y) \Delta T(Y)) \right] dA \quad (2.28)$$

$$M = M^0 - B_{xx}e + D_{xx}\kappa + M_T \quad (2.29)$$

Burada

$$N^0 = \int_{A_0} s_1^0 dA, V^0 = \int_{A_0} s_2^0 dA, M^0 = \int_{A_0} -Ys_1^0 dA \quad (2.30)$$

$$(A_{xx}, B_{xx}, D_{xx}) = \int_A E(Y)(1, Y, Y^2) dA \quad (2.31)$$

$$A_{xz} = \int_A G(Y) dA \quad (2.32)$$

$$(N_T, M_T) = \int_A E(Y)\alpha(Y)\Delta T(Y)(1, Y) dA \quad (2.33)$$

Burada  $A_{xx}$ ,  $B_{xx}$ ,  $D_{xx}$  ve  $A_{xz}$  sırasıyla aksenal, girişim, eğilme ve kayma rijitlikleridir.  $N_T$  and  $M_T$  sırasıyla termal aksenal kuvvet ve termal eğilme momentidir. Timoshenko kiriş teorisine göre Toplam Lagrangian sonlu eleman modeli için teğet rijitlik matrisi izleyen şekilde verilmiştir. Burada Felippa [82] tarafından homojen ve izotrop malzeme durumunda verilen sonlu eleman ifadeleri fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme ve sıcaklık değişimi durumları için geliştirilmiştir.

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_G \quad (2.34)$$

Burada  $K_G$  geometrik rijitlik matrisi ve  $K_M$  malzeme rijitlik matrisi olup Felippa [82] tarafından izleyen şekilde verilmiştir:

$$\mathbf{K}_M = \int_{L_0} \mathbf{B}_m^T \mathbf{S} \mathbf{B}_m dX \quad (2.35)$$

(2.35) eşitliğinin integrasyonu sonucu  $K_M$  izleyen şekilde ifade edilir:

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{K}_M^a + \mathbf{K}_M^c + \mathbf{K}_M^b + \mathbf{K}_M^s \quad (2.36)$$

Burada  $K_M^a$  aksenal rijitlik matrisi,  $K_M^c$  fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme durumunda oluşan girişim rijitlik matrisi,  $K_M^b$  eğilme rijitlik matrisi,  $K_M^s$  kayma rijitlik matrisi olup  $B_m$  ise izleyen şekilde ifade edilir:



$$\mathbf{K}_M^a = \frac{A_{xx}}{L_0} \begin{bmatrix} c_m^2 & c_m s_m & -c_m \gamma_m L_0 / 2 & -c_m^2 & -c_m s_m & -c_m \gamma_m L_0 / 2 \\ c_m s_m & s_m^2 & -\gamma_m L_0 s_m / 2 & -c_m s_m & -s_m^2 & -\gamma_m L_0 s_m / 2 \\ -c_m \gamma_m L_0 / 2 & -\gamma_m L_0 s_m / 2 & \gamma_m^2 L_0^2 / 4 & c_m \gamma_m L_0 / 2 & \gamma_m L_0 s_m / 2 & \gamma_m^2 L_0^2 / 4 \\ -c_m^2 & -c_m s_m & c_m \gamma_m L_0 / 2 & c_m^2 & c_m s_m & c_m \gamma_m L_0 / 2 \\ -c_m s_m & -s_m^2 & \gamma_m L_0 s_m / 2 & c_m s_m & s_m^2 & \gamma_m L_0 s_m / 2 \\ -c_m \gamma_m L_0 / 2 & -\gamma_m L_0 s_m / 2 & \gamma_m^2 L_0^2 / 4 & c_m \gamma_m L_0 / 2 & \gamma_m L_0 s_m / 2 & \gamma_m^2 L_0^2 / 4 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$\mathbf{K}_M^c = \frac{B_{xx}}{L_0} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -c_m & 0 & 0 & c_m \\ 0 & 0 & -s_m & 0 & 0 & s_m \\ -c_m & -s_m & \gamma_m L_0 & c_m & s_m & 0 \\ 0 & 0 & c_m & 0 & 0 & -c_m \\ 0 & 0 & s_m & 0 & 0 & -s_m \\ c_m & s_m & 0 & -c_m & -s_m & -\gamma_m L_0 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

$$\mathbf{K}_M^b = \frac{D_{xx}}{L_0} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

$$\mathbf{K}_M^s = \frac{A_{xz}}{L_0} \begin{bmatrix} s_m^2 & -c_m s_m & -\alpha_1 L_0 s_m / 2 & -s_m^2 & c_m s_m & -\alpha_1 L_0 s_m / 2 \\ -c_m s_m & c_m^2 & c_m \alpha_1 L_0 / 2 & c_m s_m & -c_m^2 & c_m \alpha_1 L_0 / 2 \\ -\alpha_1 L_0 s_m / 2 & c_m \alpha_1 L_0 / 2 & \alpha_1^2 L_0^2 / 4 & \alpha_1 L_0 s_m / 2 & -c_m \alpha_1 L_0 / 2 & \alpha_1^2 L_0^2 / 4 \\ -s_m^2 & c_m s_m & \alpha_1 L_0 s_m / 2 & s_m^2 & -c_m s_m & \alpha_1 L_0 s_m / 2 \\ c_m s_m & -c_m^2 & -c_m \alpha_1 L_0 / 2 & -c_m s_m & c_m^2 & -c_m \alpha_1 L_0 / 2 \\ -\alpha_1 L_0 s_m / 2 & c_m \alpha_1 L_0 / 2 & \alpha_1^2 L_0^2 / 4 & \alpha_1 L_0 s_m / 2 & -c_m \alpha_1 L_0 / 2 & \alpha_1^2 L_0^2 / 4 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Burada  $\alpha_1 = 1 + e_m$  dir. (2.39), (2.40), (2.41) ve (2.42) ifadeleri Felippa [82] tarafından homojen ve izotrop malzeme için verilen formülasyonlar kullanılarak fonksiyonel derecelendirilmiş Timoshenko kirişi için geliştirilmiştir. Geometrik rijitlik matrisi  $K_G$  ise Felippa [82] tarafından verildiği gibi aynı kalıp, izleyen şekilde ifade edilmiştir:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_G = \frac{N_m}{2} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & s_m & 0 & 0 & s_m \\ 0 & 0 & -c_m & 0 & 0 & -c_m \\ s_m & -c_m & -\frac{1}{2}L_0(1+e_m) & -s_m & c_m & -\frac{1}{2}L_0(1+e_m) \\ 0 & 0 & -s_m & 0 & 0 & -s_m \\ 0 & 0 & c_m & 0 & 0 & c_m \\ s_m & -c_m & -\frac{1}{2}L_0(1+e_m) & -s_m & c_m & -\frac{1}{2}L_0(1+e_m) \end{bmatrix} \\
+ \frac{V_m}{2} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_m & 0 & 0 & c_m \\ 0 & 0 & s_m & 0 & 0 & s_m \\ c_m & s_m & -\frac{1}{2}L_0V_m & -c_m & -s_m & -\frac{1}{2}L_0V_m \\ 0 & 0 & -c_m & 0 & 0 & -c_m \\ 0 & 0 & -s_m & 0 & 0 & -s_m \\ c_m & s_m & -\frac{1}{2}L_0V_m & -c_m & -s_m & -\frac{1}{2}L_0V_m \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Burada  $N_m$ ,  $V_m$  sırasıyla kiriş elemanının orta noktasındaki aksenal ve kesme kuvvetleridir. Düğüm noktalarındaki iç kuvvet vektörü izleyen şekilde ifade edilir (Felippa [82]):

$$\mathbf{p} = L_0 \mathbf{B}_m^T \mathbf{z} = \begin{bmatrix} -c_m & -s_m & \frac{1}{2}L_0V_m & c_m & s_m & \frac{1}{2}L_0V_m \\ s_m & -c_m & -\frac{1}{2}L_0(1+e_m) & s_m & -c_m & -\frac{1}{2}L_0(1+e_m) \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N \\ V \\ M \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

Burada  $\mathbf{z}^T = [N \ V \ M]$ . Düğüm noktalarındaki dış kuvvet vektörü izleyen şekilde ifade edilir (Felippa [82]):

$$\mathbf{f} = h_e \int_h \int_{L_0} \begin{bmatrix} 1-\xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\xi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\xi_1 \\ 1-\xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\xi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} dXdY + b \int_{L_0} \begin{bmatrix} 1-\xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\xi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\xi_1 \\ 1-\xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\xi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ m_z \end{bmatrix} dX \tag{2.45}$$

Burada  $f_x$ ,  $f_y$  kütle kuvvetleri,  $t_x$ ,  $t_y$ ,  $m_z$  yüzey kuvvetleridir.  $b$  kiriş genişliğini,  $h$  ise kiriş yüksekliğini ifade eder. Bu çalışmada, kütle kuvvetleri ve yüzeysel kuvvetler dikkate alınmamıştır.



Timoshenko giriş problemi için toplam Lagrangian formülasyonlarının çözümünde, bilinen önceki çözümlerden hareketle küçük adımlı artımsal yük yaklaşımı kullanılmıştır. Bilindiği gibi, tüm yükün tek adımda etkitilmesi durumunda çözüm ancak doğrusal olmamanın yumuşak olması halinde mümkündür. Ayrıca artımsal işlem yolunun takibi aşırı sayıda iterasyon sayısını indirgemede ve fiziksel olarak doğru yolu izlemeye faydalıdır. Burada artımsal işlem yolu ile birlikte Newton-Raphson ardışık yaklaşım yöntemi kullanılmış olup  $n$  inci yük artımında  $i$  inci iterasyon için çözüm izleyen formda elde edilir:

$$d\mathbf{u}_n^i = (\mathbf{K}_T^i)_s^{-1} (\mathbf{R}_{n+1}^i)_s \quad (2.46)$$

Burada  $(\mathbf{K}_T^i)_s$   $i$  inci iterasyonda teğet doğrultudaki sistem rijitlik matrisi,  $d\mathbf{u}_n^i$   $i$  inci iterasyonda ve  $n+1$  inci yük adımındaki artımsal çözüm vektörü,  $(\mathbf{R}_{n+1}^i)_s$   $i$  inci iterasyonda ve  $n+1$  inci yük adımındaki sistem artık vektörüdür. Bu iterasyon işlemi, ardışık iki çözüm vektörü arasındaki fark Euclidean normunda seçilen bir tolerans kriterinden küçük olana kadar devam ettirilir. Söz konusu tolerans kriteri (2.11) eşitliğiyle verilmiştir.

Eşitlik (2.46) da bulunan, toplam Lagrangian sonlu eleman modeli için  $i$  inci iterasyondaki teğet rijitlik matrisi  $(\mathbf{K}_T^i)_e$  iki kısımdan oluşur (Eşitlik (2.34)).  $\mathbf{R}_{n+1}^i$  artık vektörü izleyen şekilde ifade edilir:

$$\mathbf{R}_{n+1}^i = \mathbf{f} - \mathbf{p} \quad (2.47)$$

Burada  $\mathbf{p}$  iç kuvvetler vektörü ve  $\mathbf{f}$  dış kuvvetler vektörü olup sırasıyla (2.44) ve (2.45) eşitliklerinde belirtilmiştir.

Düğüm noktalarındaki yer değiştirmeler elde edildikten sonra, ikinci Piola-Kirchhoff gerilme tansörü bileşenleri  $S_{xx}, S_{xy}, S_{yy}$ , (2.20) eşitliği kullanılarak elde edilebilir. Cauchy gerilme tansörleri  $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$  ile ikinci Piola-Kirchhoff gerilme tansörleri arasındaki ilişki izleyen şekildedir:

$$\sigma_{xx} = \frac{{}^2\rho}{{}^0\rho} \left( \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial x}{\partial X} S_{xx} + 2 \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial x}{\partial Y} S_{xy} + \frac{\partial x}{\partial Y} \frac{\partial x}{\partial Y} S_{yy} \right) \quad (2.48a)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{{}^2\rho}{{}^0\rho} \left( \frac{\partial y}{\partial X} \frac{\partial y}{\partial X} S_{xx} + 2 \frac{\partial y}{\partial X} \frac{\partial y}{\partial Y} S_{xy} + \frac{\partial y}{\partial Y} \frac{\partial y}{\partial Y} S_{yy} \right) \quad (2.48b)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{{}^2\rho}{{}^0\rho} \left( \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial x}{\partial X} S_{xx} + 2 \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial y}{\partial Y} S_{xy} + \frac{\partial x}{\partial Y} \frac{\partial y}{\partial Y} S_{yy} \right) \quad (2.48c)$$

Burada  ${}^0\rho$  ve  ${}^2\rho$  sırasıyla  $C_0$  ve  $C$  konumlarındaki malzeme kütle yoğunluklarını temsil ederler.  ${}^0\rho$  ve  ${}^2\rho$  arasındaki ilişki izleyen şekildedir:

$${}^0\rho = {}^2\rho J \quad (2.49)$$

Burada  $J$ , şekil değiştirme gradyen tensörü  $F$  nin determinantıdır (veya dönüşümün Jacobieni) ve izleyen şekilde tariflenir:

$$J = \det(F) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{vmatrix} \quad (2.50)$$

Çalışmada bünye tensörü bileşenlerinin şekil değiştirme esnasında sabit kaldığı kabul edilmiştir. Yani  ${}^0\rho \approx {}^2\rho$  kabulü yapılmıştır. Eğer genlemeler göreceli olarak küçükse bu kabul nedeniyle ortaya çıkan hata ihmal edilebilir düzeyde olabilir. Fakat büyük şekil değiştirme problemlerinde fark önemli olabilir.

## 2.4 Sürekli Ortamlar Modeli kullanılarak Toplam Langragian Sonlu Elemanlar Formülasyonları

### 2.4.1 Sürekli Ortamın Toplam Langragian Formülasyonları<sup>1</sup>

#### 2.4.1.1 Virtüel Yer Değişiklikler Prensipleri

Hareketin Langragian artımsal tarifinin eşitlikleri virtüel iş prensibinden türetilebilir. Burada nihai hedef bir cismi yöneten eşitliklerin sonlu eleman modelini geliştirme olduğundan gerçekte hareketin diferansiyel eşitlikleri türetilmeyecek fakat sonlu eleman modellerini geliştirmek için virtüel iş ifadeleri kullanılacaktır.

Yer değiştirme tabanlı sonlu eleman modeli, virtüel yer değişiklikler üzerine temellendirilmiştir. Prensip, cisim üzerinde yapılan dış virtüel iş ve cisimde depolanan iç virtüel işin toplamının sıfıra eşit olmasını gerektirir.

$$\delta W = \int_{\mathcal{V}} \sigma : \delta(\mathbf{e}) d^2V - \delta^2 R = 0 \quad (2.51)$$

$$= \int_{\mathcal{V}} \sigma_{ij} \delta(e_{ij}) d^2V - \delta^2 R = 0 \quad (2.52)$$

Burada  $\delta^2 R$  uygulanan kuvvetlerin yaptığı virtüel işi gösterir.

$$\delta^2 R = \int_{\mathcal{V}} f \delta u d^2V + \int_{\mathcal{S}} t \delta u d^2S \quad (2.53)$$

$$= \int_{\mathcal{V}} f_i \delta u_i d^2V + \int_{\mathcal{S}} t_i \delta u_i d^2S \quad (2.54)$$

$d^2S$  yüzey elemanını gösterir.  $f$  kütle kuvveti vektörüdür (her bir birim hacim için).

$t$  sınır gerilme vektörüdür (her bir birim alan için). Bu büyüklükler  $C_2$  konumundadırlar.  $\delta$  bilinmeyen yer değiştirme değişkenleri ( $u_i$  ve  $u_i$ ) üzerinde işlem görmektedir.

---

<sup>1</sup> Reddy [83] den alınmıştır.

$C_2$  konumu bilinmediğinden (2.51) eşitliği doğrudan çözülemez. Yer değiştirmelerin sonsuz küçük olduğu, bu nedenle cismin konumunun değişmediği doğrusal analizle karşılaştırıldığında bu önemli bir farktır. Büyük yer değiştirme analizinde cismin konumunun sürekli değiştiği gerçeğine özellikle dikkat edilmelidir. Uygun gerilme ve şekil değiştirme ölçüleri tanımlanarak konumdaki bu değişim ile ilgilenilebilir. Analizde bu ölçülerin tariflenmesinin amacı (2.51) eşitliğinde verilen iç işi bilinmeyen konum üzerindeki bir integral cinsinden ifade etmektir. Burada gerilme ve şekil değiştirme ölçüleri olarak ikinci Piola-Kirchhoff gerilme tensörü ve Green-Langrange genleme tensörü kullanılacaktır ki bunlar birbirleriyle enerji açısından eşleniktirler.

#### 2.4.1.2 Toplam Langragian Formülasyonu

Toplam Langragian formülasyonunda tüm büyüklükler  $C_0$  başlangıç konumu ile ilintili ölçülür. Bu yüzden (2.51) eşitliğindeki virtüel iş ifadesi başlangıç konumuna bağlı büyüklükler cinsinden ifade edilmelidir. İzleyen özdeşlikler kullanılacaktır:

$$\int_{\mathcal{V}} {}^2\sigma_{ij} \delta({}_2e_{ij}) d^2V = \int_{\mathcal{V}} {}^2S_{ij} \delta({}_0^2E_{ij}) d^0V \quad (2.55)$$

$$\int_{\mathcal{V}} {}^2f_i \delta u_i d^2V = \int_{\mathcal{V}} {}^2f_i \delta u_i d^0V \quad (2.56)$$

$$\int_{\mathcal{S}} {}^2t_i \delta u_i d^2S = \int_{\mathcal{S}} {}^2t_i \delta u_i d^0S \quad (2.57)$$

Burada  ${}^2f_i$  ve  ${}^2t_i$  kütle kuvveti ve sınır gerilme bileşenleri olup bunlar başlangıç konumu  $C_0$  a göre ifade edilmişlerdir. (2.55)-(2.57) eşitliklerinin, (2.52) eşitliğinde kullanılmasıyla izleyen ifadeye ulaşılır:

$$\int_{\mathcal{V}} {}^2S_{ij} \delta({}_0^2E_{ij}) d^0V - \delta({}_0^2R) = 0 \quad (2.58)$$

Burada

$$\delta({}_0^2R) = \int_{\mathcal{V}} {}^2f_i \delta u_i d^0V + \int_{\mathcal{S}} {}^2t_i \delta u_i d^0S \quad (2.59)$$

Bu aşamada (3.58) ile verilen virtüel iş ifadesi basitleştirilecektir. İlk olarak not edilmelidir ki

$$\begin{aligned}\delta({}_0^2 E_{ij}) &= \delta({}_0^1 E_{ij}) + \delta({}_0 \varepsilon_{ij}) = \delta({}_0 \varepsilon_{ij}) \\ &= \delta({}_0 e_{ij}) + \delta({}_0 \eta_{ij})\end{aligned}\quad (2.60)$$

Burada  $\delta({}_0^1 E_{ij}) = 0$  olur: Çünkü bu ifade bilinmeyen yer değiştirmelerin bir fonksiyonu değildir. Virtüel genlemeler izleyen şekilde verilir:

$$\delta({}_0 e_{ij}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta u_i}{\partial {}^0 x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial {}^0 x_i} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial {}^0 x_i} \frac{\partial \delta {}_0^1 u_k}{\partial {}^0 x_j} + \frac{\partial \delta {}_0^1 u_k}{\partial {}^0 x_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial {}^0 x_j} \right) \quad (2.61)$$

$$\delta({}_0 \eta_{ij}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta u_k}{\partial {}^0 x_i} \frac{\partial u_k}{\partial {}^0 x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial {}^0 x_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial {}^0 x_j} \right) \quad (2.62)$$

(2.60) ve  ${}_1^2 S_{ij} = {}^1 \sigma_{ij} + {}_1 S_{ij}$  eşitlikleri (3.58) eşitliğinde yerine konarak izleyen ifadeye varılır:

$$\begin{aligned}0 &= \int_{0V} {}_0^2 S_{ij} \delta({}_0^2 E_{ij}) d^0 V - \delta({}_0^2 R) \\ &= \int_{0V} ({}_0^1 S_{ij} + {}_0 S_{ij}) \delta({}_0 \varepsilon_{ij}) d^0 V - \delta({}_0^2 R) \\ &= \int_{0V} \{ {}_0 S_{ij} \delta({}_0 \varepsilon_{ij}) + {}_0^1 S_{ij} [\delta({}_0 \varepsilon_{ij}) + \delta({}_0 \eta_{ij})] \} d^0 V - \delta({}_0^2 R) \\ &= \int_{0V} {}_0^1 S_{ij} \delta({}_0 \varepsilon_{ij}) d^0 V + \int_{0V} {}_0^1 S_{ij} \delta({}_0 \eta_{ij}) d^0 V + \delta({}_0^1 R) - \delta({}_0^2 R)\end{aligned}\quad (2.63)$$

Burada  $\delta({}_0^1 R)$ ,  $C_1$  konumunda cisimde depolanan virtüel iç enerjidir (Gerçek iç kuvvetlerin virtüel yer değiştirmelerde gördüğü iş.):

$$\delta({}_0^1 R) = \int_{0V} {}_0^1 S_{ij} \delta({}_0 e_{ij}) d^0 V \quad (2.64)$$

Cisim  $C_1$  konumunda dengede olduğundan  $C_1$  konumunda uygulanan virtüel iş prensibi vasıtasıyla

$$0 = \int_{0V} {}_0^1 S_{ij} \delta({}_0 e_{ij}) d^0 V - \int_{0V} {}_0^1 f_i \delta u_i d^0 V - \int_{0V} {}_0^1 t_i \delta u_i d^0 S \quad (2.65)$$

elde edilir ve bu yüzden

$$\delta({}_0^1 R) = \int_{0V} {}_0^1 f_i \delta u_i d^0 V + \int_{0S} {}_0^1 t_i \delta u_i d^0 S \quad (2.66)$$

(2.63) eşitliği sonlu eleman modelinin temelini oluşturur. Sadece  ${}_0S_{ij}$  genlemeler cinsinden ifade edilmelidir ve nihai olarak  ${}_0S_{ij}$  uygun bir bünye ilişkisi kullanılarak yer değiştirme artımları cinsinden ifade edilmelidir. (2.63) eşitliğinin birinci terimi  $C_1$  ve  $C_2$  konumları arasındaki virtüel artımsal yer değiştirmeler olan  $u_i$  ler cinsinden virtüel şekil değiştirme enerjisindeki değişimi temsil eder. İkinci terim başlangıç gerilmesi  ${}_0S_{ij}$  lar tarafından yapılan virtüel işi temsil eder. Son iki terimin ikisi birden  $C_1$  den  $C_2$  ye hareket esnasında uygulanan kütle kuvvetleri ve yüzey gerilmelerinin yaptığı işdeki değişimi gösterir. Bu esas olarak iki konum arasında ortaya çıkan geometrik değişimler yüzündendir. (2.63) eşitliği  $C_1$  ve  $C_2$  konumları arasındaki artımsal şekil değiştirme için virtüel iş ifadesini temsil eder ve buna varmada hiçbir yaklaşım yapılmamıştır. (2.63) eşitliğinin yer değiştirme tabanlı sonlu eleman modelini oluştururken, artımsal genleme bileşenleri  ${}_0\varepsilon_{ij}$  cinsinden  ${}_0S_{ij}$  ı ifade etmek için  ${}_0S_{ij} \approx {}_0C_{ijkl} {}_0e_{kl}$  bünye eşitlikleri kullanılmıştır. (2.63) eşitliği izleyen formu alır.

$$\int_{0V} {}_0C_{ijkl} {}_0\varepsilon_{kl} \delta({}_0\varepsilon_{ij}) d^0V + \int_{0V} {}_1S_{ij} \delta({}_0\eta_{ij}) d^0V = \delta({}_0^2R) - \delta({}_0^1R) \quad (2.67)$$

(2.67) eşitliği yer değiştirme artımları  $u_i$  lere göre doğrusal değildir. Bunun hesaplanabilir olması için  $u_i$  yer değiştirmelerinin küçük olduğu kabul edilir ( $C_1$  den  $C_2$  ye hareket esnasında yük adımı küçük olduğunda gerçekten bu durum geçerlidir.).  $u_i$  yer değiştirmeleri küçük alındığında izleyen yaklaşımlar geçerlidir:

$${}_0S_{ij} \approx {}_0C_{ijkl} {}_0e_{kl}, \quad \delta({}_0\varepsilon_{ij}) \approx \delta({}_0e_{ij}) \quad (2.68)$$

Daha sonra (2.68) eşitliği izleyen şekilde basitleştirilebilir:

$$\int_{0V} {}_0C_{ijkl} {}_0e_{kl} \delta({}_0e_{ij}) d^0V + \int_{0V} {}_1S_{ij} \delta({}_0\eta_{ij}) d^0V = \delta({}_0^2R) - \delta({}_0^1R) \quad (2.69)$$

(2.69) eşitliği toplam Langragian formülasyonu üzerine temellendirilmiş sonlu eleman modelinin gelişimi için zayıf formdur. Toplam gerilme bileşenleri  ${}_0^1S_{ij}$  izleyen bünye eşitliği kullanılarak hesaplanır:

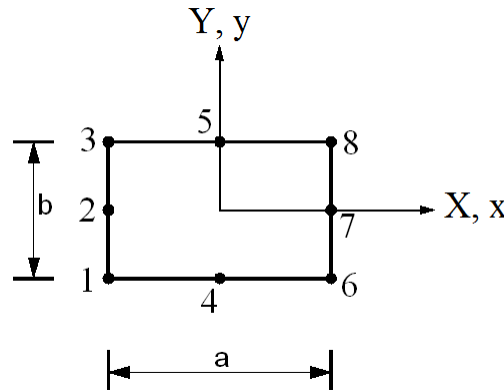
$${}_0^1S_{ij} = {}_0C_{ijkl} {}_0^1E_{kl} \quad (2.70)$$

Burada  ${}^1_0E_{kl}$ , Green-Langrange genleme tensörü bileşenleri olup izleyen şekilde tanımlanmıştır.

$${}^1_0E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^1 u_i}{\partial^0 x_j} + \frac{\partial^1 u_j}{\partial^0 x_i} + \frac{\partial^1 u_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial^1 u_k}{\partial^0 x_j} \right) \quad (2.71)$$

#### 2.4.2 Fonksiyonel Derecelendirilmiş Kirişlerin İki Boyutlu Sürekli Ortam Modeli Çerçevesinde Toplam Lagrangian Sonlu Elemanlar Formülasyonları

Burada Reddy [83] tarafından homojen ve izotrop malzeme durumunda verilen sonlu eleman ifadeleri fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme ve sıcaklık değişimi durumları için geliştirilmiştir. 8 düğüm noktalı eleman için iki boyutlu sürekli ortamın toplam Lagrangian sonlu eleman modeli durumunda  $i$  inci iterasyonda (2.10) eşitliğinde kullanılacak olan teğet rijitlik matrisi  $\mathbf{K}_T^i$  ve artık vektörü  $\mathbf{R}_{n+1}^i$  izleyen şekilde verilir:



Şekil 2.6 İki boyutlu, sekiz düğüm noktalı eleman.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{11L} + \mathbf{K}^{11NL} & \mathbf{K}^{12L} \\ \mathbf{K}^{21L} & \mathbf{K}^{22L} + \mathbf{K}^{22NL} \end{bmatrix}^i \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{v}} \end{Bmatrix}^i = \begin{Bmatrix} {}^2_0\mathbf{F}^1 & -{}^1_0\mathbf{F}^1 \\ {}^2_0\mathbf{F}^2 & -{}^1_0\mathbf{F}^2 \end{Bmatrix}^i \quad (2.72)$$

Burada

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{11L} = & b \int_{\Omega^e} \left\{ {}_0C_{11} \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial X} \right)^2 \frac{\partial \psi_i}{\partial X} \frac{\partial \psi_j}{\partial X} \right. \\
& + {}_0C_{22} \left( \frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2 \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} \frac{\partial \psi_j}{\partial Y} \\
& + {}_0C_{12} \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial X} \right) \frac{\partial u}{\partial Y} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial X} \frac{\partial \psi_j}{\partial X} + \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} \frac{\partial \psi_j}{\partial X} \right) \\
& \left. + {}_0C_{66} \left[ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial X} \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} + \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial \psi_i}{\partial X} \right] \times \left[ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial X} \right) \frac{\partial \psi_j}{\partial Y} + \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial \psi_j}{\partial X} \right] \right\} dXdY
\end{aligned} \tag{2.73}$$

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{12L} = & b \int_{\Omega^e} \left\{ {}_0C_{11} \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial X} \right) \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial \psi_i}{\partial X} \frac{\partial \psi_j}{\partial X} \right. \\
& + {}_0C_{22} \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial Y} \right) \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} \frac{\partial \psi_j}{\partial Y} \\
& + {}_0C_{12} \left[ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial X} \right) \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial Y} \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial X} \frac{\partial \psi_j}{\partial Y} \right. \\
& \left. + \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} \frac{\partial \psi_j}{\partial X} \right] \\
& \left. + {}_0C_{66} \left[ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial X} \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} + \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial \psi_i}{\partial X} \right] \times \left[ \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial Y} \right) \frac{\partial \psi_j}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial \psi_j}{\partial Y} \right] \right\} dXdY = K_{ij}^{21L}
\end{aligned} \tag{2.74}$$

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{22L} = & b \int_{\Omega^e} \left\{ {}_0C_{11} \left( \frac{\partial v}{\partial X} \right)^2 \frac{\partial \psi_i}{\partial X} \frac{\partial \psi_j}{\partial X} + {}_0C_{22} \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial Y} \right)^2 \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} \frac{\partial \psi_j}{\partial Y} \right. \\
& + {}_0C_{12} \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial Y} \right) \frac{\partial v}{\partial X} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial X} \frac{\partial \psi_j}{\partial Y} + \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} \frac{\partial \psi_j}{\partial X} \right) \\
& \left. + {}_0C_{66} \left[ \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial Y} \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} \right] \times \left[ \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial Y} \right) \frac{\partial \psi_j}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial \psi_j}{\partial Y} \right] \right\} dXdY
\end{aligned} \tag{2.75}$$

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{11NL} = & h_e \int_{\Omega^e} \left[ {}^1S_{11} \frac{\partial \psi_i}{\partial X} \frac{\partial \psi_j}{\partial X} + {}^1S_{12} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} \frac{\partial \psi_j}{\partial X} + \frac{\partial \psi_i}{\partial X} \frac{\partial \psi_j}{\partial Y} \right) \right. \\
& \left. + {}^1S_{22} \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} \frac{\partial \psi_j}{\partial Y} \right] dXdY = K_{ij}^{22N}
\end{aligned} \tag{2.76}$$

$${}^2F_i^1 = b \int_{\Omega^e} {}^2f_x \psi_i dXdY + b \int_{\Gamma^e} {}^2t_x \psi_i ds \tag{2.77}$$



$${}^2_0F_i^2 = b \int_{\Omega^e} {}^2_0f_Y \psi_i dX dY + b \int_{\Gamma^e} {}^2_0t_Y \psi_i ds \quad (2.78)$$

Burada  ${}^2_0f_X, {}^2_0f_Y$  kütle kuvvetleridir.  ${}^2_0t_Y, {}^2_0t_X$  yüzey kuvvetleridir.  $\Omega^e$  eleman üzerindeki integrasyon bölgesidir.

$${}^1_0F_i^1 = b \int_{\Omega^e} \left\{ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial X} \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial X} {}^1_0S_{11} + \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} {}^1_0S_{22} \right. \\ \left. + \left[ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial X} \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} + \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial \psi_i}{\partial X} \right] {}^1_0S_{12} \right\} dX dY \quad (2.79)$$

$${}^1_0F_i^2 = b \int_{\Omega^e} \left\{ \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial \psi_i}{\partial X} {}^1_0S_{11} \right. \\ \left. + \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial Y} \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} {}^1_0S_{22} \right. \\ \left. + \left[ \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial Y} \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} \right] {}^1_0S_{12} \right\} dX dY \quad (2.80)$$

Burada  ${}^1_0S_{11}, {}^1_0S_{22}$  ve  ${}^1_0S_{12}$  cismin  $C_1$  konumundaki ikinci Piola-Kirchhoff gerilme tensörünün bileşenleridir. İkinci Piola-Kirchhoff gerilme tensörü (Şekil değiştirmemiş birim alandaki dönüştürülmüş mevcut kuvvet: Bu tensör Cauchy gerilme tensörü simetrik olduğunda simetriktir.) ve Green-Lagrange genleme tensörü arasındaki ilişki izleyen şekilde kabul edilir:

$$C = \begin{bmatrix} {}^0_0C_{11} & {}^0_0C_{12} & 0 \\ {}^0_0C_{12} & {}^0_0C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & {}^0_0C_{66} \end{bmatrix} {}^1_0S = \begin{bmatrix} {}^1_0S_{11} \\ {}^1_0S_{22} \\ {}^1_0S_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0_0C_{11} & {}^0_0C_{12} & 0 \\ {}^0_0C_{12} & {}^0_0C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & {}^0_0C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^1_0E_{11} - \alpha_X(Y) \Delta T \\ {}^1_0E_{22} - \alpha_Y(Y) \Delta T \\ 2 {}^1_0E_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.81)$$

Burada  ${}^0_0C_{ij}$  cismin  $C_0$  konumundaki indirgenmiş bünye tensörünün bileşenleridir.  $\alpha_X, \alpha_Y$  sırasıyla X ve Y doğrultularındaki sıcaklık genleşme katsayılarını ve  $\Delta T$  sıcaklık değişimini ifade etmektedir. Bu çalışmada, sıcaklık nedeniyle Y doğrultusunda ortaya çıkabilecek etkiler dikkate alınmamıştır. İndirgenmiş bünye tensörü matris formda izleyen şekilde yazılır:

$$C = \begin{bmatrix} {}_0C_{11} & {}_0C_{12} & 0 \\ {}_0C_{12} & {}_0C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & {}_0C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

Bünye tensörünün bileşenleri Young modülü  $E$ , ve Poisson oranı  $\nu$  cinsinden izleyen şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} {}_0C_{11} &= \frac{E(Y)}{1-\nu^2(Y)}, \quad {}_0C_{12} = {}_0C_{21} = \frac{\nu(Y)E(Y)}{1-\nu^2(Y)}, \\ {}_0C_{22} &= \frac{E(Y)}{1-\nu^2(Y)}, \quad {}_0C_{66} = \frac{E(Y)}{2(1+\nu(Y))} \end{aligned} \quad (2.83)$$

Sıcaklık değişimini temsil eden  $\Delta T = \Delta T(Y)$  denklemi, eşitlik (2.22) de verilmiştir.

Green-Lagrange genleme tensörü iki boyutlu katı sürekli ortam durumunda yer değiştirmeler cinsinden izleyen şekilde ifade edilir:

$${}^1_0E = \begin{Bmatrix} {}^1E_{11} \\ {}^1E_{22} \\ 2{}^1E_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial X} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial Y} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} + \left( \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial v}{\partial Y} \right) \end{Bmatrix} \quad (2.84)$$

Sonlu elemanın yer değiştirme alanları düğüm yer değiştirmeleri cinsinden izleyen şekilde ifade edilebilir:

$$u = (\psi_1 \cdot u_1 + \psi_2 \cdot u_2 + \psi_3 \cdot u_3 + \psi_4 \cdot u_4 + \psi_5 \cdot u_5 + \psi_6 \cdot u_6 + \psi_7 \cdot u_7 + \psi_8 \cdot u_8) \quad (2.85)$$

$$v = (\psi_1 \cdot v_1 + \psi_2 \cdot v_2 + \psi_3 \cdot v_3 + \psi_4 \cdot v_4 + \psi_5 \cdot v_5 + \psi_6 \cdot v_6 + \psi_7 \cdot v_7 + \psi_8 \cdot v_8) \quad (2.86)$$

Bu toplam yer değiştirme ve artımsal yer değiştirme alanlarına izleyen şekilde yaklaşım sağlanabilir:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^8 u_j \psi_j(X,Y) \\ \sum_{j=1}^8 v_j \psi_j(X,Y) \end{Bmatrix} = [\Psi] \{\Delta\} \quad (2.87)$$

$$\{\bar{u}\} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^8 \bar{u}_j \psi_j(X,Y) \\ \sum_{j=1}^8 \bar{v}_j \psi_j(X,Y) \end{Bmatrix} = [\Psi] \{du\} \quad (2.88)$$

Burada

$$[\psi] = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & \psi_3 & 0 & \psi_4 & 0 & \psi_5 & 0 & \psi_6 & 0 & \psi_7 & 0 & \psi_8 & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 & \psi_2 & 0 & \psi_3 & 0 & \psi_4 & 0 & \psi_5 & 0 & \psi_6 & 0 & \psi_7 & 0 & \psi_8 \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

$$\{\Delta\}^T = \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4 \ u_5 \ v_5 \ u_6 \ v_6 \ u_7 \ v_7 \ u_8 \ v_8\} \quad (2.90)$$

$$\{du\}^T = \{\bar{u}_1 \ \bar{v}_1 \ \bar{u}_2 \ \bar{v}_2 \ \bar{u}_3 \ \bar{v}_3 \ \bar{u}_4 \ \bar{v}_4 \ \bar{u}_5 \ \bar{v}_5 \ \bar{u}_6 \ \bar{v}_6 \ \bar{u}_7 \ \bar{v}_7 \ \bar{u}_8 \ \bar{v}_8\} \quad (2.91)$$

Sekiz düğüm noktalı dörtgensel (quadratic) eleman için yaklaşım fonksiyonları izleyen şekilde alınmıştır:

$$\begin{aligned} [\psi_1] &= \left(X - \frac{a}{2}\right) \left(Y - \frac{b}{2}\right) \left(-\frac{1}{ab} - \frac{2X}{a^2 b} - \frac{2Y}{ab^2}\right) & [\psi_2] &= \left(\frac{4}{b^2 a}\right) \left(X - \frac{a}{2}\right) \left(Y + \frac{b}{2}\right) \left(Y - \frac{b}{2}\right) \\ [\psi_3] &= \left(X - \frac{a}{2}\right) \left(Y + \frac{b}{2}\right) \left(\frac{1}{ab} + \frac{2X}{a^2 b} - \frac{2Y}{ab^2}\right) & [\psi_4] &= \left(\frac{4}{b a^2}\right) \left(X - \frac{a}{2}\right) \left(X + \frac{a}{2}\right) \left(Y - \frac{b}{2}\right) \\ [\psi_5] &= \left(\frac{4}{b a^2}\right) \left(X - \frac{a}{2}\right) \left(X + \frac{a}{2}\right) \left(Y + \frac{b}{2}\right) & [\psi_6] &= \left(X + \frac{a}{2}\right) \left(Y - \frac{b}{2}\right) \left(\frac{1}{ab} - \frac{2X}{a^2 b} + \frac{2Y}{ab^2}\right) \\ [\psi_7] &= \left(-\frac{4}{b^2 a}\right) \left(X + \frac{a}{2}\right) \left(Y - \frac{b}{2}\right) \left(Y + \frac{b}{2}\right) & [\psi_8] &= \left(X + \frac{a}{2}\right) \left(Y + \frac{b}{2}\right) \left(-\frac{1}{ab} + \frac{2X}{a^2 b} + \frac{2Y}{ab^2}\right) \end{aligned} \quad (2.92)$$

Rijitlik matrisinde görülen integralin sayısal hesaplamaları beş noktalı Gauss integral kuralı kullanılarak gerçekleştirilecektir.

Gerçek gerilme, yani şekil değiştirmiş konumdaki gerilme, şekil değiştirmiş birim alandaki mevcut kuvvet (son durum kuvveti) olarak ifade edilir. Cauchy gerilme tensörü bileşenleri  ${}^2\sigma_{ij}$  ve ikinci Piola-Kirchhoff gerilme tensörü bileşenleri  ${}^2S_{ij}$  arasındaki ilişki eşitlik (2.48) de verilmiştir.

## 2.4.3 Fonksiyonel Derecelendirilmiş Kirişlerin Üç Boyutlu Sürekli Ortam Modeli

### Çerçevesinde Toplam Lagrangian Sonlu Elemanlar Formülasyonları

#### 2.4.3.1 Üç Boyutlu Sürekli Ortam Modeli

Burada üç boyutlu sürekli ortam modeli çerçevesinde toplam Lagrangian sonlu elemanlar formülasyonları türetilmiştir. Üç boyutlu toplam Lagrangian sonlu elemanlar formülasyonlarının türetilmesinde, Reddy [83] tarafından verilen iki boyutlu toplam Lagrangian sonlu elemanlar formülasyonlarının türetilmesindeki yol izlenmiştir. Ayrıca üç boyutlu toplam Lagrangian sonlu elemanlar formülasyonları, sıcaklık durumu ve fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme için geliştirilmiştir.

#### 2.4.3.2 Toplam Lagrangian Formülasyonu

İzleyen notasyon tariflensin:

$$\begin{aligned} {}^0x_1 = X, {}^0x_2 = Y, {}^0x_3 = Z, {}^1u_1 = u, {}^1u_2 = v, {}^1u_3 = w \\ u_1 = \bar{u}, u_2 = \bar{v}, u_3 = \bar{w} \end{aligned} \quad (2.93)$$

(2.69) eşitliğinin birinci ifadesi alternatif formda izleyen şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} \int_{\text{o}_V} {}^0C_{ijkl} {}^0e_{kl} \delta({}^0e_{ij}) d^0V = \int_{\text{o}_V} \{\delta_0 e\}^T [{}^0C] \{e\} d^0V \\ \int_{\text{o}_V} \{\delta \bar{u}\}^T ([D] + [D_u])^T [{}^0C] ([D] + [D_u]) \{\delta \bar{u}\} d^0V \end{aligned} \quad (2.94)$$

Burada

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} {}^0e_{xx} \\ {}^0e_{yy} \\ {}^0e_{zz} \\ 2 {}^0e_{yz} \\ 2 {}^0e_{xz} \\ 2 {}^0e_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial X} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial Z} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial Z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial Y} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial Z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial X} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial X} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial \bar{u}}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial \bar{v}}{\partial X} + \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial \bar{w}}{\partial X} \\ \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial Y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} + \frac{\partial w}{\partial Y} \frac{\partial \bar{w}}{\partial Y} \\ \frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial \bar{u}}{\partial Z} + \frac{\partial v}{\partial Z} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial Z} \frac{\partial \bar{w}}{\partial Z} \\ \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial Z} + \frac{\partial v}{\partial Y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial Y} \frac{\partial \bar{w}}{\partial Z} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} \frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial Y} \frac{\partial w}{\partial Z} \\ \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial \bar{u}}{\partial Z} + \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial \bar{w}}{\partial Z} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial X} \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial X} \frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial X} \frac{\partial w}{\partial Z} \\ \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} + \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial \bar{w}}{\partial Y} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial X} \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial X} \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial X} \frac{\partial w}{\partial Y} \end{Bmatrix} \quad (2.95a)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial X} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial Y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial Z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial Z} & \frac{\partial}{\partial Y} \\ \frac{\partial}{\partial Z} & 0 & \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial}{\partial X} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial}{\partial X} & \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial}{\partial X} & \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial v}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial w}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial Y} \\ \frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial Z} & \frac{\partial v}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial Z} & \frac{\partial w}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial Z} \\ \frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial Z} & \frac{\partial v}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial Z} & \frac{\partial w}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial w}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial Z} \\ \frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial}{\partial Z} & \frac{\partial v}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial}{\partial Z} & \frac{\partial w}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial}{\partial Z} \\ \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial v}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial w}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial}{\partial Y} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} \quad (2.95b)$$

$$\{\delta_0 e\} = \begin{Bmatrix} \delta_0 e_{xx} \\ \delta_0 e_{yy} \\ \delta_0 e_{zz} \\ 2\delta_0 e_{yz} \\ 2\delta_0 e_{xz} \\ 2\delta_0 e_{xy} \end{Bmatrix} = ([D] + [D_u]) \{\delta \bar{u}\} \quad (2.96)$$

$$[_0C] = \begin{bmatrix} {}_0C_{11} & {}_0C_{12} & {}_0C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ {}_0C_{12} & {}_0C_{22} & {}_0C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ {}_0C_{13} & {}_0C_{23} & {}_0C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}_0C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}_0C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}_0C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

(3.69) eşitliğinin ikinci ifadesi izleyen şekilde yazılabilir:

$$\int_{0V} {}^1_0S_{ij} \delta({}_0\eta_{ij}) d^0V = \int_{0V} \{\delta_0\eta\}^T \{{}^1_0S\} d^0V \quad (2.98)$$

$$\{\delta_0\eta\} = \begin{Bmatrix} {}_0\eta_{xx} \\ {}_0\eta_{yy} \\ {}_0\eta_{zz} \\ 2{}_0\eta_{yz} \\ 2{}_0\eta_{xz} \\ 2{}_0\eta_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial X} \frac{\partial \bar{u}}{\partial X} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial X} \frac{\partial \bar{v}}{\partial X} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial X} \frac{\partial \bar{w}}{\partial X} \right) \\ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial Y} \frac{\partial \bar{w}}{\partial Y} \right) \\ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial Z} \frac{\partial \bar{u}}{\partial Z} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial Z} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial Z} \frac{\partial \bar{w}}{\partial Z} \right) \\ 2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial Z} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial Y} \frac{\partial \bar{w}}{\partial Z} \right) \\ 2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial X} \frac{\partial \bar{u}}{\partial Z} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial X} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial X} \frac{\partial \bar{w}}{\partial Z} \right) \\ 2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial X} \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial X} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial X} \frac{\partial \bar{w}}{\partial Y} \right) \end{Bmatrix} \quad (2.99a)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial X} \frac{\partial}{\partial X} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial X} \frac{\partial}{\partial X} & \frac{\partial \bar{w}}{\partial X} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial \bar{w}}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial Y} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial Z} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial Z} & \frac{\partial \bar{w}}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial Z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} \quad (2.99b)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial Y} \right) & \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial Y} \right) & \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial Y} \right) \\ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial X} \frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial X} \right) & \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial X} \frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial X} \right) & \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial X} \frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial Z} \frac{\partial}{\partial X} \right) \\ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial X} \frac{\partial}{\partial Y} \right) & \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial X} \frac{\partial}{\partial Y} \right) & \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial Y} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial X} \frac{\partial}{\partial Y} \right) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} \quad (2.99c)$$

$$= \frac{1}{2} [D_{\bar{u}}] \{\bar{u}\} \quad (2.99c)$$

$$\{\delta_o \eta\} = \begin{Bmatrix} \delta_o \eta_{xx} \\ \delta_o \eta_{yy} \\ \delta_o \eta_{zz} \\ 2\delta_o \eta_{yz} \\ 2\delta_o \eta_{xz} \\ 2\delta_o \eta_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \delta \bar{u}}{\partial X} \frac{\partial \bar{u}}{\partial X} + \frac{\partial \delta \bar{v}}{\partial X} \frac{\partial \bar{v}}{\partial X} + \frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial X} \frac{\partial \bar{w}}{\partial X} \\ \frac{\partial \delta \bar{u}}{\partial Y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} + \frac{\partial \delta \bar{v}}{\partial Y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} + \frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial Y} \frac{\partial \bar{w}}{\partial Y} \\ \frac{\partial \delta \bar{u}}{\partial Z} \frac{\partial \bar{u}}{\partial Z} + \frac{\partial \delta \bar{v}}{\partial Z} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Z} + \frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial Z} \frac{\partial \bar{w}}{\partial Z} \\ \frac{\partial \delta \bar{u}}{\partial Y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial Z} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \frac{\partial \delta \bar{u}}{\partial Z} + \frac{\partial \delta \bar{v}}{\partial Y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Z} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} \frac{\partial \delta \bar{v}}{\partial Z} + \frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial Y} \frac{\partial \bar{w}}{\partial Z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial Y} \frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial Z} \\ \frac{\partial \delta \bar{u}}{\partial X} \frac{\partial \bar{u}}{\partial Z} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial X} \frac{\partial \delta \bar{u}}{\partial Z} + \frac{\partial \delta \bar{v}}{\partial X} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Z} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial X} \frac{\partial \delta \bar{v}}{\partial Z} + \frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial X} \frac{\partial \bar{w}}{\partial Z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial X} \frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial Z} \\ \frac{\partial \delta \bar{u}}{\partial X} \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial X} \frac{\partial \delta \bar{u}}{\partial Y} + \frac{\partial \delta \bar{v}}{\partial X} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial X} \frac{\partial \delta \bar{v}}{\partial Y} + \frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial X} \frac{\partial \bar{w}}{\partial Y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial X} \frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial Y} \end{Bmatrix} \quad (2.100a)$$

$$= [D_{\bar{u}}] \{\delta \bar{u}\} = [D_{\delta \bar{u}}] \{\bar{u}\} \quad (2.100b)$$

İkinci Piola-Kirchhoff gerilme tensörü (Şekil değiştirmemiş birim alandaki dönüştürülmüş mevcut kuvvet: Bu tensör Cauchy gerilme tensörü simetrik olduğunda simetriktir.) ve Green-Lagrange genleme tensörü arasındaki ilişki izleyen şekilde kabul edilir:

$$\begin{Bmatrix} {}^1_0S \\ {}^1_0S \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^1_0S_{xx} \\ {}^1_0S_{yy} \\ {}^1_0S_{zz} \\ {}^1_0S_{yz} \\ {}^1_0S_{xz} \\ {}^1_0S_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_0C_{11} & {}_0C_{12} & {}_0C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ {}_0C_{12} & {}_0C_{22} & {}_0C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ {}_0C_{13} & {}_0C_{23} & {}_0C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}_0C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}_0C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}_0C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^1_0E_{xx} - \alpha_x(Y) \Delta T \\ {}^1_0E_{yy} - \alpha_y(Y) \Delta T \\ {}^1_0E_{zz} - \alpha_z(Y) \Delta T \\ 2 {}^1_0E_{yz} \\ 2 {}^1_0E_{xz} \\ 2 {}^1_0E_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.101)$$

Burada  ${}_0C_{ij}$  cismin başlangıç konumundaki bünye tensörünün bileşenleridir.  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$ ,  $\alpha_z$  sırasıyla X, Y ve Z doğrultularındaki sıcaklık genişleme katsayılarını ve  $\Delta T$  sıcaklık değişimini ifade etmektedir. Bu çalışmada, sıcaklık nedeniyle Y ve Z doğrultularında ortaya çıkabilecek etkiler dikkate alınmamıştır. Bünye tensörünün bileşenleri Young modülü  $E$ , ve Poisson oranı  $\nu$  cinsinden izleyen şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} {}_0C_{11} &= {}_0C_{22} = {}_0C_{33} = \frac{E(Y)(1-\nu(Y))}{(1+\nu(Y))(1-2\nu(Y))} \\ {}_0C_{12} &= {}_0C_{13} = {}_0C_{23} = \frac{E(Y)\nu(Y)}{(1+\nu(Y))(1-2\nu(Y))} \\ {}_0C_{66} &= {}_0C_{55} = {}_0C_{44} = \frac{E(Y)}{2(1+\nu(Y))} \end{aligned} \quad (2.102)$$

Sıcaklık değişimini temsil eden  $\Delta T = \Delta T(Y)$  denklemi, eşitlik (2.22) de verilmiştir.

Green-Lagrange genleme tensörü üç boyutlu katı sürekli ortam durumunda yer değiştirmeler cinsinden izleyen şekilde ifade edilir:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^1_0 u_i}{\partial^0 x_j} + \frac{\partial^1_0 u_j}{\partial^0 x_i} + \frac{\partial^1_0 u_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial^1_0 u_k}{\partial^0 x_j} \right) \quad (2.103)$$

$$\left\{ \begin{matrix} {}^1_0E \\ {}^1_0E \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial X} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial Y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial Y} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial w}{\partial Z} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial Z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial Z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial Z} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial Y} + \left( \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial v}{\partial Y} \frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial Y} \frac{\partial w}{\partial Z} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial X} + \left( \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial w}{\partial Z} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} + \left( \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial w}{\partial Y} \right) \end{matrix} \right\} \quad (2.104)$$

Bununla birlikte  $\{\delta_{\circ\eta}\}$  yer değiştirme artımları vektörü  $\bar{u}$  nin doğrusal olmayan bir fonksiyonu olduğundan (2.98) ifadesi sonlu eleman geliştirilmesi için uygun değildir. Bu nedenle (2.98) ifadesi sonlu eleman matrislerinin kurulumunu kolaylaştıracak şekilde alternatif bir yolla yazılmalıdır. Bu amaçla izleyen ifade yazılır:

$$\int_{\circ V} \{\delta_{\circ\eta}\}^T \left( \begin{matrix} {}^1_0S \end{matrix} \right) d^{\circ V} \quad (2.105a)$$

$$= \int_{\circ V} \left( \begin{matrix} {}^1_0S_{xx} \left( \frac{\partial \delta \bar{u}}{\partial X} \frac{\partial \bar{u}}{\partial X} + \frac{\partial \delta \bar{v}}{\partial X} \frac{\partial \bar{v}}{\partial X} + \frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial X} \frac{\partial \bar{w}}{\partial X} \right) \\ + {}^1_0S_{yy} \left( \frac{\partial \delta \bar{u}}{\partial Y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} + \frac{\partial \delta \bar{v}}{\partial Y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} + \frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial Y} \frac{\partial \bar{w}}{\partial Y} \right) \\ + {}^1_0S_{zz} \left( \frac{\partial \delta \bar{u}}{\partial z} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \delta \bar{v}}{\partial z} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial z} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) \\ + {}^1_0S_{yz} \left( \frac{\partial \delta \bar{u}}{\partial Y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \frac{\partial \delta \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \delta \bar{v}}{\partial Y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} \frac{\partial \delta \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial Y} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial Y} \frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial z} \right) \\ + {}^1_0S_{xz} \left( \frac{\partial \delta \bar{u}}{\partial X} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial X} \frac{\partial \delta \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \delta \bar{v}}{\partial X} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial X} \frac{\partial \delta \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial X} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial X} \frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial z} \right) \\ + {}^1_0S_{xy} \left( \frac{\partial \delta \bar{u}}{\partial X} \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial X} \frac{\partial \delta \bar{u}}{\partial Y} + \frac{\partial \delta \bar{v}}{\partial X} \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial X} \frac{\partial \delta \bar{v}}{\partial Y} + \frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial X} \frac{\partial \bar{w}}{\partial Y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial X} \frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial Y} \right) \end{matrix} \right) \quad (2.105b)$$



$$= \int_{\delta V} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \delta \bar{u}}{\partial X} \\ \frac{\partial \delta \bar{u}}{\partial Y} \\ \frac{\partial \delta \bar{u}}{\partial Z} \\ \frac{\partial \delta \bar{v}}{\partial X} \\ \frac{\partial \delta \bar{v}}{\partial Y} \\ \frac{\partial \delta \bar{v}}{\partial Z} \\ \frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial X} \\ \frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial Y} \\ \frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial Z} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} {}^1_0 S_{xx} & {}^1_0 S_{xy} & {}^1_0 S_{xz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^1_0 S_{xy} & {}^1_0 S_{yy} & {}^1_0 S_{yz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}^1_0 S_{xz} & {}^1_0 S_{yz} & {}^1_0 S_{zz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^1_0 S_{xx} & {}^1_0 S_{xy} & {}^1_0 S_{xz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^1_0 S_{xy} & {}^1_0 S_{yy} & {}^1_0 S_{yz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^1_0 S_{xz} & {}^1_0 S_{yz} & {}^1_0 S_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^1_0 S_{xx} & {}^1_0 S_{xy} & {}^1_0 S_{xz} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^1_0 S_{xy} & {}^1_0 S_{yy} & {}^1_0 S_{yz} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^1_0 S_{xz} & {}^1_0 S_{yz} & {}^1_0 S_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial X} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial Z} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial X} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial Z} \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial X} \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial Y} \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial Z} \end{Bmatrix} d^0 V \quad (2.105c)$$

$$= \int_{\delta V} \{\delta \bar{u}\}^T [\bar{D}]^T [{}^1_0 S] [\bar{D}] \{\bar{u}\} d^0 V \quad (2.105d)$$

$$\{{}^1_0 S\} = \begin{Bmatrix} {}^1_0 S_{xx} \\ {}^1_0 S_{yy} \\ {}^1_0 S_{zz} \\ {}^1_0 S_{yz} \\ {}^1_0 S_{xz} \\ {}^1_0 S_{xy} \end{Bmatrix}, \quad [\bar{D}]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial X} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial Y} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial Z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \bar{v}}{\partial X} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial Y} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial Z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \bar{w}}{\partial X} & \frac{\partial \bar{w}}{\partial Y} & \frac{\partial \bar{w}}{\partial Z} \end{bmatrix} \quad (2.106)$$

Böylece (2.69) virtül iş ifadesindeki ifadelerin alternatif formlarının geliştirilmesi tamamlanmış olmaktadır.

Toplam ve artımsal yer değiştirme alanlarına izleyen şekilde yaklaşım yapılınsın:

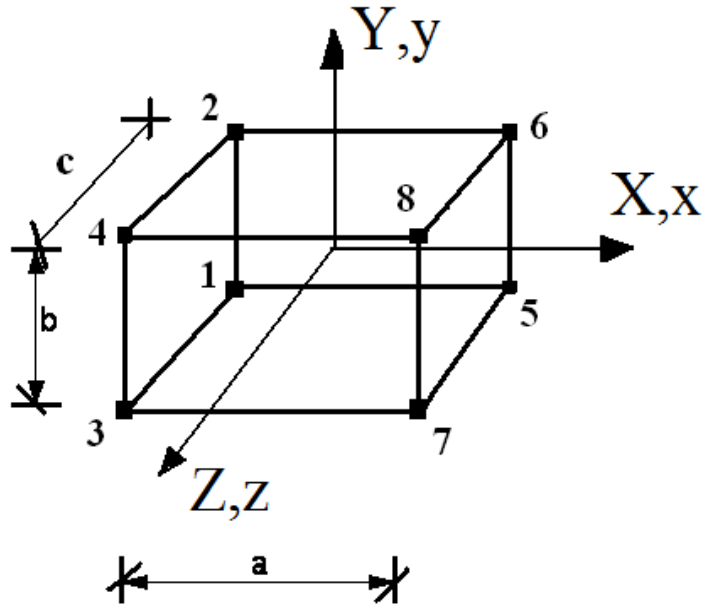
$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^n u_j \psi_j(X, Y, Z) \\ \sum_{j=1}^n v_j \psi_j(X, Y, X) \\ \sum_{j=1}^n w_j \psi_j(X, Y, Z) \end{Bmatrix} = [\Psi] \{\Delta\} \quad (2.107)$$

$$\{\bar{u}\} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^n \bar{u}_j \psi_j(X,Y,Z) \\ \sum_{j=1}^n \bar{v}_j \psi_j(X,Y,Z) \\ \sum_{j=1}^n \bar{w}_j \psi_j(X,Y,Z) \end{Bmatrix} = [\Psi] \{\bar{\Delta}\} \quad (2.108)$$

Burada

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & \psi_2 & 0 & 0 & \dots & \psi_n & 0 & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 & 0 & \psi_2 & 0 & \dots & 0 & \psi_n & 0 \\ 0 & 0 & \psi_1 & 0 & 0 & \psi_2 & \dots & 0 & 0 & \psi_n \end{bmatrix} \quad (2.109)$$

Sekiz düğüm noktalı üç boyutlu elemanın şekli ve yaklaşım fonksiyonları izleyen şekildedir:



Şekil 2.7 Sekiz düğüm noktalı, üç boyutlu eleman.

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{8} \left(1 - \frac{2X}{a}\right) \left(1 - \frac{2Y}{b}\right) \left(1 - \frac{2Z}{c}\right) & \psi_2 &= \frac{1}{8} \left(1 - \frac{2X}{a}\right) \left(1 + \frac{2Y}{b}\right) \left(1 - \frac{2Z}{c}\right) \\ \psi_3 &= \frac{1}{8} \left(1 - \frac{2X}{a}\right) \left(1 - \frac{2Y}{b}\right) \left(1 + \frac{2Z}{c}\right) & \psi_4 &= \frac{1}{8} \left(1 - \frac{2X}{a}\right) \left(1 + \frac{2Y}{b}\right) \left(1 + \frac{2Z}{c}\right) \\ \psi_5 &= \frac{1}{8} \left(1 + \frac{2X}{a}\right) \left(1 - \frac{2Y}{b}\right) \left(1 - \frac{2Z}{c}\right) & \psi_6 &= \frac{1}{8} \left(1 + \frac{2X}{a}\right) \left(1 + \frac{2Y}{b}\right) \left(1 - \frac{2Z}{c}\right) \\ \psi_7 &= \frac{1}{8} \left(1 + \frac{2X}{a}\right) \left(1 - \frac{2Y}{b}\right) \left(1 + \frac{2Z}{c}\right) & \psi_8 &= \frac{1}{8} \left(1 + \frac{2X}{a}\right) \left(1 + \frac{2Y}{b}\right) \left(1 + \frac{2Z}{c}\right) \end{aligned} \quad (2.110)$$

$$\{\Delta\}^T = \{u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2, \dots, u_n, v_n, w_n\} \quad (2.111)$$

$$\{\bar{\Delta}\}^T = \{\bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{w}_1, \bar{u}_2, \bar{v}_2, \bar{w}_2, \dots, \bar{u}_n, \bar{v}_n, \bar{w}_3\} \quad (2.112)$$

Böylece izleyen ifade elde edilir.

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_V} \{\delta_{\circ} e\}^T [{}_{\circ}C] \{\circ e\} d^{\circ}V = \\ & = \int_{\Omega_V} \{\delta \bar{u}\}^T ([D] + [D_u])^T [{}_{\circ}C] ([D] + [D_u]) \{\bar{u}\} d^{\circ}V \\ & = \int_{\Omega_V} \{\delta \bar{\Delta}\}^T \{([D] + [D_u])[\Psi]\}^T [{}_{\circ}C] \{([D] + [D_u])[\Psi]\} \{\bar{\Delta}\} d^{\circ}V \\ & = \int_{\Omega_V} \{\delta \bar{\Delta}\}^T [B_L]^T [{}_{\circ}C] [B_L] \{\bar{\Delta}\} d^{\circ}V \end{aligned} \quad (2.113)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_V} \{\delta_{\circ} \eta\}^T \{{}_{\circ}S\} d^{\circ}V \\ & = \int_{\Omega_V} \{\delta \bar{u}\}^T [\bar{D}]^T [{}_{\circ}S] [\bar{D}] \{\bar{u}\} d^{\circ}V \\ & = \int_{\Omega_V} \{\delta \bar{\Delta}\}^T [B_{NL}]^T [{}_{\circ}S] [B_{NL}] \{\bar{\Delta}\} d^{\circ}V \end{aligned} \quad (2.114)$$

$$\begin{aligned} \delta({}^1_0 R) & = \int_{\Omega_V} {}^1_0 s_{ij} \delta(\circ e_{ij}) d^{\circ}V \\ & = \int_{\Omega_V} \{\delta_{\circ} e\}^T \{{}_{\circ}S\} d^{\circ}V \\ & = \int_{\Omega_V} \{\delta \bar{\Delta}\}^T [B_L]^T \{{}_{\circ}S\} d^{\circ}V \end{aligned} \quad (2.115)$$

$$\begin{aligned} \delta({}^2_0 R) & = \int_{\Omega_V} {}^2_0 f_i \delta u_i d^{\circ}V + \int_{\Omega_S} {}^2_0 t_i \delta u_i d^{\circ}S \\ & = \int_{\Omega_V} \{\delta \bar{\Delta}\}^T [\Psi]^T \{{}^2_0 f\} d^{\circ}V + \int_{\Omega_S} \{\delta \bar{\Delta}\}^T [\Psi]^T \{{}^2_0 t\} d^{\circ}S \end{aligned} \quad (2.116)$$

Burada

$$[B_L] = ([D] + [D_u])[\Psi], [B_{NL}] = [\bar{D}][\Psi] \quad (2.117)$$

(2.113),(2.116) eşitliklerinin (2.69) eşitliğinde yerine konması ve varyasyonlar hesabının lemmasının kullanımı (yani  $\{\delta \bar{\Delta}\}$  keyfi değişimlerdir.) üç boyutlu lineer olmayan sürekli ortamın toplam Lagrangian formülasyonu ile ilişkili izleyen sonlu eleman modeli elde edilir:

$$([K_L] + [K_{NL}])\{\bar{\Delta}\} = \{{}^2_0 F\} - \{{}^1_0 F\} \quad (2.118)$$

Burada

$$[K_L] = \int_{0_V} [B_L]^T [{}_0C] [B_L] d^0V \quad (2.119)$$

$$[K_{NL}] = \int_{0_V} [B_{NL}]^T [{}_0S] [B_{NL}] d^0V \quad (2.120)$$

$$\{ {}^1_0F \} = \int_{0_V} [B_L]^T \{ {}^1_0S \} d^0V \quad (2.121)$$

$$\{ {}^2_0F \} = \int_{0_V} [\Psi]^T \{ {}^2_0f \} d^0V + \int_{0_S} [\Psi]^T \{ {}^2_0t \} d^0S \quad (2.122)$$

$$\{ {}^2_0f \} = \begin{Bmatrix} {}^2_0f_x \\ {}^2_0f_y \end{Bmatrix}, \quad \{ {}^2_0t \} = \begin{Bmatrix} {}^2_0t_x \\ {}^2_0t_y \end{Bmatrix} \quad (2.123)$$

Not edilmelidir ki  $[{}_0S]$  ve  $[{}_0C]$  simetrik olduğundan rijitlik matrisi  $[K] = [K_L] + [K_{NL}]$  simetriktir. Ayrıca toplam Langragian formülasyonları artımsal formülasyonlardır. Yani  $\{ \delta \Delta \} \equiv \{ \bar{\Delta} \}$  nın belirlenmesinde (2.118) eşitliğindeki rijitlik matrisi teğet (tangent) rijitlik matrisidir. Doğrusal bir analiz için  $\{ \bar{\Delta} \} = \{ \Delta \}$ ,  $\{ {}^1_0F \} = \{ 0 \}$  ve  $[K_{NL}] = [0]$ .

Üç boyutlu problemler için  $[B_L]$  ve  $[B_{NL}]$  matrisleri izleyen şekilde verilir:

$$[B_L] = [B_L^0] + [B_L^I] + [B_L^J] + [B_L^K] \quad (2.124)$$

$$[B_L^0] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial X} & 0 & 0 & \frac{\partial \psi_2}{\partial X} & 0 & 0 & \text{----} & \frac{\partial \psi_n}{\partial X} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \psi_1}{\partial Y} & 0 & 0 & \frac{\partial \psi_2}{\partial Y} & 0 & \text{----} & 0 & \frac{\partial \psi_n}{\partial Y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \psi_1}{\partial Z} & 0 & 0 & \frac{\partial \psi_2}{\partial Z} & \text{----} & 0 & 0 & \frac{\partial \psi_n}{\partial Z} \\ 0 & \frac{\partial \psi_1}{\partial Z} & \frac{\partial \psi_1}{\partial Y} & 0 & \frac{\partial \psi_2}{\partial Z} & \frac{\partial \psi_2}{\partial Y} & \text{----} & 0 & \frac{\partial \psi_n}{\partial Z} & \frac{\partial \psi_n}{\partial Y} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial Z} & 0 & \frac{\partial \psi_1}{\partial X} & \frac{\partial \psi_2}{\partial Z} & 0 & \frac{\partial \psi_2}{\partial X} & \text{----} & \frac{\partial \psi_n}{\partial Z} & 0 & \frac{\partial \psi_n}{\partial X} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial Y} & \frac{\partial \psi_1}{\partial X} & 0 & \frac{\partial \psi_2}{\partial Y} & \frac{\partial \psi_2}{\partial X} & 0 & \text{----} & \frac{\partial \psi_n}{\partial Y} & \frac{\partial \psi_n}{\partial X} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.125)$$



$$\begin{bmatrix} [K^{11L}] + [K^{11N}] & [K^{12L}] & [K^{13L}] \\ [K^{21L}] & [K^{22L}] + [K^{22N}] & [K^{23L}] \\ [K^{31L}] & [K^{32L}] & [K^{33L}] + [K^{33N}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{u}\} \\ \{\bar{v}\} \\ \{\bar{w}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{^2F^1\} \\ \{^2F^2\} \\ \{^2F^3\} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \{^1F^1\} \\ \{^1F^2\} \\ \{^1F^3\} \end{Bmatrix} \quad (2.130)$$

Burada

$$\begin{aligned} K_{ij}^{11L} = & \int_{\nu} \left\{ {}_0C_{11} \left[ \frac{\partial \psi_i}{\partial X} \frac{\partial \psi_j}{\partial X} \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial X} \right)^2 \right] + {}_0C_{12} \left[ \frac{\partial \psi_i}{\partial X} \frac{\partial \psi_j}{\partial Y} \frac{\partial u}{\partial Y} \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial X} \right) \right] + {}_0C_{13} \left[ \frac{\partial \psi_i}{\partial X} \frac{\partial \psi_j}{\partial Z} \frac{\partial u}{\partial Z} \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial X} \right) \right] \right. \\ & + {}_0C_{12} \left[ \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} \frac{\partial \psi_j}{\partial X} \frac{\partial u}{\partial Y} \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial X} \right) \right] + {}_0C_{22} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial Y} \right)^2 \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} \frac{\partial \psi_j}{\partial Y} \right] + {}_0C_{23} \left[ \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} \frac{\partial \psi_j}{\partial Z} \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial u}{\partial Z} \right] \\ & + {}_0C_{13} \left[ \frac{\partial \psi_i}{\partial Z} \frac{\partial \psi_j}{\partial X} \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial X} \right) \frac{\partial u}{\partial Z} \right] + {}_0C_{23} \left[ \frac{\partial \psi_i}{\partial Z} \frac{\partial \psi_j}{\partial Y} \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial u}{\partial Z} \right] + {}_0C_{33} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial Z} \right)^2 \frac{\partial \psi_i}{\partial Z} \frac{\partial \psi_j}{\partial Z} \right] \\ & + {}_0C_{44} \left[ \frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} + \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial \psi_i}{\partial Z} \right] \times \left[ \frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial \psi_j}{\partial Y} + \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial \psi_j}{\partial Z} \right] \\ & + {}_0C_{55} \left[ \frac{\partial \psi_i}{\partial Z} \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial X} \right) + \frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial \psi_i}{\partial X} \right] \times \left[ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial X} \right) \frac{\partial \psi_j}{\partial Z} + \frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial \psi_j}{\partial X} \right] \\ & \left. + {}_0C_{66} \left[ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial X} \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} + \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial \psi_i}{\partial X} \right] \times \left[ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial X} \right) \frac{\partial \psi_j}{\partial Y} + \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial \psi_j}{\partial X} \right] \right\} d^{\nu} \end{aligned} \quad (2.131)$$

$$\begin{aligned} K_{ij}^{22L} = & \int_{\nu} \left\{ {}_0C_{11} \left[ \frac{\partial \psi_i}{\partial X} \frac{\partial \psi_j}{\partial X} \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial X} \right) \frac{\partial v}{\partial X} \right] + {}_0C_{12} \left[ \frac{\partial \psi_i}{\partial X} \frac{\partial \psi_j}{\partial Y} \frac{\partial u}{\partial Y} \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial X} \right) \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial Y} \right) \right] + {}_0C_{13} \left[ \frac{\partial \psi_i}{\partial X} \frac{\partial \psi_j}{\partial Z} \frac{\partial v}{\partial Z} \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial X} \right) \right] \right. \\ & + {}_0C_{12} \left[ \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} \frac{\partial \psi_j}{\partial X} \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial v}{\partial X} \right] + {}_0C_{22} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial Y} \right) \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial Y} \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} \frac{\partial \psi_j}{\partial Y} \right] + {}_0C_{23} \left[ \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} \frac{\partial \psi_j}{\partial Z} \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial v}{\partial Z} \right] \\ & + {}_0C_{13} \left[ \frac{\partial \psi_i}{\partial Z} \frac{\partial \psi_j}{\partial X} \frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial v}{\partial X} \right] + {}_0C_{23} \left[ \frac{\partial \psi_i}{\partial Z} \frac{\partial \psi_j}{\partial Y} \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial Y} \right) \frac{\partial u}{\partial Z} \right] + {}_0C_{33} \left[ \frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial v}{\partial Z} \frac{\partial \psi_i}{\partial Z} \frac{\partial \psi_j}{\partial Z} \right] \\ & + {}_0C_{44} \left[ \frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} + \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial \psi_i}{\partial Z} \right] \times \left[ \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial Y} \right) \frac{\partial \psi_j}{\partial Z} + \frac{\partial v}{\partial Z} \frac{\partial \psi_j}{\partial Y} \right] + {}_0C_{55} \left[ \frac{\partial \psi_i}{\partial Z} \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial X} \right) + \frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial \psi_i}{\partial X} \right] \times \left[ \frac{\partial v}{\partial Z} \frac{\partial \psi_j}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial \psi_j}{\partial Z} \right] \\ & \left. + {}_0C_{66} \left[ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial X} \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} + \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial \psi_i}{\partial X} \right] \times \left[ \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial Y} \right) \frac{\partial \psi_j}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial \psi_j}{\partial Y} \right] \right\} d^{\nu} = K_{ij}^{21L} \end{aligned} \quad (2.132)$$



$$\begin{aligned}
K_{ij}^{33L} = & \int_{\nu} \left\{ {}_0C_{11} \left[ \frac{\partial \psi_i}{\partial X} \frac{\partial \psi_j}{\partial X} \left( \frac{\partial w}{\partial X} \right)^2 \right] + {}_0C_{12} \left[ \frac{\partial \psi_i}{\partial X} \frac{\partial \psi_j}{\partial Y} \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial w}{\partial Y} \right] + {}_0C_{13} \left[ \frac{\partial \psi_i}{\partial X} \frac{\partial \psi_j}{\partial Z} \frac{\partial w}{\partial X} \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial Z} \right) \right] \right. \\
& + {}_0C_{12} \left[ \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} \frac{\partial \psi_j}{\partial X} \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial w}{\partial Y} \right] + {}_0C_{22} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial Y} \right)^2 \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} \frac{\partial \psi_j}{\partial Y} \right] + {}_0C_{23} \left[ \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} \frac{\partial \psi_j}{\partial Z} \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial Z} \right) \frac{\partial w}{\partial Y} \right] \\
& + {}_0C_{13} \left[ \frac{\partial \psi_i}{\partial Z} \frac{\partial \psi_j}{\partial X} \frac{\partial w}{\partial X} \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial Z} \right) \right] + {}_0C_{23} \left[ \frac{\partial \psi_i}{\partial Z} \frac{\partial \psi_j}{\partial Y} \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial Z} \right) \frac{\partial w}{\partial Y} \right] + {}_0C_{33} \left[ \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial Z} \right)^2 \frac{\partial \psi_i}{\partial Z} \frac{\partial \psi_j}{\partial Z} \right] \\
& + {}_0C_{44} \left[ \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial Z} \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} + \frac{\partial w}{\partial Y} \frac{\partial \psi_i}{\partial Z} \right] \times \left[ \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial Z} \right) \frac{\partial \psi_j}{\partial Y} + \frac{\partial w}{\partial Y} \frac{\partial \psi_j}{\partial Z} \right] \\
& + {}_0C_{55} \left[ \frac{\partial \psi_i}{\partial X} \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial Z} \right) + \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial \psi_i}{\partial Z} \right] \times \left[ \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial Z} \right) \frac{\partial \psi_j}{\partial X} + \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial \psi_j}{\partial Z} \right] \\
& \left. + {}_0C_{66} \left[ \frac{\partial w}{\partial Y} \frac{\partial \psi_i}{\partial X} + \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} \right] \times \left[ \frac{\partial w}{\partial Y} \frac{\partial \psi_j}{\partial X} + \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial \psi_j}{\partial Y} \right] \right\} d^0V
\end{aligned} \tag{2.136}$$

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{11N} = & \int_{\nu} \left[ {}_0^1S_{xx} \frac{\partial \psi_i}{\partial X} \frac{\partial \psi_j}{\partial X} + {}_0^1S_{xy} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} \frac{\partial \psi_j}{\partial X} + \frac{\partial \psi_i}{\partial X} \frac{\partial \psi_j}{\partial Y} \right) + {}_0^1S_{xz} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial Z} \frac{\partial \psi_j}{\partial X} + \frac{\partial \psi_i}{\partial X} \frac{\partial \psi_j}{\partial Z} \right) \right. \\
& \left. + {}_0^1S_{yz} \left( \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} \frac{\partial \psi_j}{\partial Z} + \frac{\partial \psi_i}{\partial Z} \frac{\partial \psi_j}{\partial Y} \right) + {}_0^1S_{yy} \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} \frac{\partial \psi_j}{\partial Y} + {}_0^1S_{zz} \frac{\partial \psi_i}{\partial Z} \frac{\partial \psi_j}{\partial Z} \right] d^0V = K_{ij}^{22N} = K_{ij}^{33N}
\end{aligned} \tag{2.137}$$

$${}_0^2F_i^1 = \int_{\nu} {}_0^2f_x \psi_i d^0V + \int_{\Gamma^e} {}_0^2t_x \psi_i ds \tag{2.138}$$

$${}_0^2F_i^2 = \int_{\nu} {}_0^2f_y \psi_i d^0V + \int_{\Gamma^e} {}_0^2t_y \psi_i ds \tag{2.139}$$

$${}_0^2F_i^3 = \int_{\nu} {}_0^2f_z \psi_i d^0V + \int_{\Gamma^e} {}_0^2t_z \psi_i ds \tag{2.140}$$

$$\begin{aligned}
{}_0^1F_i^1 = & \int_{\nu} \left\{ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial X} \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial X} {}_0^1S_{xx} + \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} {}_0^1S_{yy} + \frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial \psi_i}{\partial Z} {}_0^1S_{zz} + \left[ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial X} \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} + \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial \psi_i}{\partial X} \right] {}_0^1S_{xy} \right. \\
& \left. + \left[ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial X} \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial Z} + \frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial \psi_i}{\partial X} \right] {}_0^1S_{xz} + \left[ \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial \psi_i}{\partial Z} + \frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} \right] {}_0^1S_{yz} \right\} d^0V
\end{aligned} \tag{2.141}$$

$$\begin{aligned}
{}_0^1F_i^2 = & \int_{\nu} \left\{ \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial \psi_i}{\partial X} {}_0^1S_{xx} + \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial Y} \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} {}_0^1S_{yy} + \frac{\partial v}{\partial Z} \frac{\partial \psi_i}{\partial Z} {}_0^1S_{zz} + \left[ \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial Y} \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} \right] {}_0^1S_{xy} \right. \\
& \left. + \left[ \frac{\partial v}{\partial Z} \frac{\partial \psi_i}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial \psi_i}{\partial Z} \right] {}_0^1S_{xz} + \left[ \left( 1 + \frac{\partial v}{\partial Y} \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial Z} + \frac{\partial v}{\partial Z} \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} \right] {}_0^1S_{yz} \right\} d^0V
\end{aligned} \tag{2.142}$$

$$\begin{aligned}
{}_0^1F_i^3 = & \int_{\nu} \left\{ \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial \psi_i}{\partial X} {}_0^1S_{xx} + \frac{\partial w}{\partial Y} \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} {}_0^1S_{yy} + \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial Z} \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial Z} {}_0^1S_{zz} + \left[ \frac{\partial w}{\partial Y} \frac{\partial \psi_i}{\partial X} + \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} \right] {}_0^1S_{xy} \right. \\
& \left. + \left[ \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial Z} \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial X} + \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial \psi_i}{\partial Z} \right] {}_0^1S_{xz} + \left[ \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial Z} \right) \frac{\partial \psi_i}{\partial Y} + \frac{\partial w}{\partial Y} \frac{\partial \psi_i}{\partial Z} \right] {}_0^1S_{yz} \right\} d^0V
\end{aligned} \tag{2.143}$$



## 2.5 Sıcaklığa Bağlı Malzeme Özelliği

Sıcaklığın değişmesi ile birlikte malzemelerin fiziksel özellikleri de değişmektedir. Özellikle yüksek sıcaklıklarda bu durum oldukça önem arz etmektedir. Sıcaklığın değişmesi ile birlikte malzemelerin Young modülü, sıcaklık genleşme katsayısı, ısı iletim katsayısı, akma gerilmesi gibi özellikleri değişmekte olup, yapı elemanlarının tasarımında bu durumun dikkate alınması gerekmektedir. Yapılan literatür çalışmasında, sıcaklık etkisi altındaki kirişlerin mekanik davranışları incelenirken, sıcaklığın malzeme özelliklerine olan etkisinin çok az incelenmiş olduğu görülmüştür.

Malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağlılığının dikkate alınmasıyla, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemedan yapılmış bir yapı elemanının malzeme dağılımı, hem koordinat boyunca hem de o koordinattaki sıcaklığa bağlı olarak değişecektir. Sıcaklığın değişmesi ile malzemelerin fiziksel özellikleri değişeceğinden, ele alınan problem malzeme yönünden doğrusal olmayan bir probleme dönüşecektir. Bunun sonucunda, incelenen problem hem geometrik hem de fiziksel doğrusal olmayan bir problem olmaktadır.

Hacim oranlarına göre malzemenin herhangi bir noktadaki özellikleri  $P$ , o noktadaki sıcaklığa bağlı olarak izleyen şekilde olur:

$$P(Y, T) = P_A(T) V_A(Y) + P_U(T) V_U(Y) \quad (2.144)$$

Burada  $P_A$  ve  $P_U$  sırasıyla alt ve üst malzemelerin özellikleri olmak üzere, sıcaklığa bağlı olarak değişmektedir.  $V_A$  ve  $V_U$ , sırasıyla alt ve üst malzemelerin kalınlık boyunca hacim oranı olup, aralarındaki bağıntı izleyen şekildedir:

$$V_A + V_U = 1 \quad (2.145)$$

Hacim oranları göz önüne alınarak, malzemenin kiriş kalınlığı boyunca özellikleri belli bir fonksiyona (power-law) [80] göre izleyen şekilde verilmiştir:

$$P(Y, T) = \left( P_U(T) - P_A(T) \right) \left( \frac{Y}{h} + \frac{1}{2} \right)^n + P_A(T) \quad (2.146)$$

$P$ : Fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin kalınlık boyunca ve sıcaklığa göre değişen malzeme özelliklerinden herhangi biri.

$P_u$ : Kirişin üst yüzeyindeki malzemenin özellikleri

$P_A$ : Kirişin alt yüzeyindeki malzemenin özellikleri

$n$ : Kalınlık boyunca malzeme değişimini üstel dağılım kanununa göre (power-law) belirleyen pozitif bir katsayı.

$Y$ : Kalınlık yönündeki koordinat

$h$ : kiriş yüksekliği

$T$ : Kalınlık boyunca sıcaklık

Bu kısımda yer alan nümerik hesaplarda, fonksiyonel derecelendirilmiş kirişin malzemesi Östenitik paslanmaz çelik-316 ile saf molibden alınmıştır. Östenitik paslanmaz çelik-316'in fiziksel özellikleri sıcaklığa bağlı olarak izleyen şekilde verilmiştir ([84,85,86,87]):

$$E(T) = 205.91 - 2.6913 \times 10^{-2} T - 4.1876 \times 10^{-5} T^2 \quad (GPa) \quad (2.147)$$

$$\alpha(T) = (11.813 + 1.3106 \times 10^{-2} T - 6.1375 \times 10^{-6} T^2) \times 10^{-6} \quad (1/K) \quad (2.148)$$

$$k(T) = 9.0109 + 1.5298 \times 10^{-2} T \quad (W/mK) \quad (2.149)$$

$$\sigma_y(T) = 448.69 - 1.193 T + 1.4787 \times 10^{-3} T^2 - 6.3134 \times 10^{-7} T^3 \quad (MPa) \quad (2.150)$$

Burada  $E$  elastisite modülü,  $\alpha_x$  sıcaklık genleşme katsayısı,  $k$  ısı iletim katsayısı ve  $\sigma_y$  akma gerilmesini temsil etmektedir. Sıcaklık birimi olarak Kelvin (K) alınmıştır. Buradaki eşitlikler, 300 K ile 1000 K sıcaklık aralığı için geçerlidir. Poisson oranı  $\nu=0.27$  alınmıştır.

Saf Molibdenin sıcaklığa bağlı olarak malzeme fonksiyonları izleyen şekilde verilmiştir ([85,86,88,89,90]):

$$E(T) = 338.93 - 3.413 \times 10^{-2} T - 8.2007 \times 10^{-6} T^2 \quad (GPa) \quad (2.151)$$

$$\alpha(T) = (4.9904 + 1.1837 \times 10^{-4} T + 3.5877 \times 10^{-7} T^2) \times 10^{-6} \quad (1/K) \quad (2.152)$$

$$k(T) = 152.78 - 5.0884 \times 10^{-2} T + 9.6754 \times 10^{-6} T^2 \quad (W/mK) \quad (2.153)$$

$$\sigma_y(T) = 309.75 + 0.165 T - 3.675 \times 10^{-4} T^2 + 1.0535 \times 10^{-7} T^3 \quad (MPa) \quad (2.154)$$

(2.151)-(2.152) eşitlikleri 300K -2900K, (2.153) eşitliği 300K-2600K, (2.154) 300K-2100K sıcaklık aralıkları için geçerlidir. Saf Molibdenin Poisson oranı  $\nu=0.356$ 'dir.

### SAYISAL UYGULAMALAR

#### 3.1 Timoshenko Kiriş Teorisi Çerçevesinde Çözüm

Bilinen birleştirme işlemlerinin kullanımıyla Eşitlik 2.34 de verilen, iki düğüm noktalı eleman için Timoshenko kiriş teorisi üzerine temellendirilen toplam Lagrangian sonlu eleman modeline ilişkin eleman rijitlik matrislerinin kullanımıyla sistem teğet rijitlik matrisi elde edilir. Bundan sonra önceden de belirtildiği gibi doğrusal olmayan problemlerin çözüm işlemi kullanılarak Timoshenko kirişinin toplam Lagrangian sonlu eleman modeli için ilgili çözümler elde edilir. Sayısal hesaplarda, farklı termal yükleme, malzeme dağılımı ve kirişin geometik özelliklerine göre, kritik burkulma yükleri, yer değiştirmeler, mesnet tepkileri, termal yükler, Cauchy gerilmeleri incelenmiştir. Ayrıca karşılaştırma çalışmaları yapılmıştır. Bu bölümdeki sayısal hesaplarda, kirişin seramik malzemesi zirkon ( $ZrO_2$ ;  $E=151$  GPa,  $\nu=0.2882$ ,  $k=2.09$  W/(m.K),  $\alpha=10 \times 10^{-6} K^{-1}$ ) ve metal malzemesinin alüminyumdan (Al;  $E=70$  GPa,  $\nu=0.31$ ,  $k=204$  W/(m.K),  $\alpha=23 \times 10^{-6} K^{-1}$ ) oluştuğu düşünülmüştür. Buradaki malzemelerin fiziksel özellikleri, Li vd. [8] tarafından yapılmış olan çalışmadan alınmıştır. Kirişin alt yüzeyi alüminyum, üst yüzeyi seramikten yapılmıştır. Fonksiyonel derecelendirme katsayısı  $n=0$  olduğunda kiriş malzemesinin tamamı seramik (homojen seramik) olmaktadır. Sayısal hesaplarda, sonlu eleman sayısı 70 alınmıştır.

Problemde ele alınan büyüklükler boyutsuzlaştırılırsa, izleyen ifadeler elde edilir:

$$\xi = \frac{X}{L}, \quad \eta = \frac{Y}{L}, \quad u = \frac{u_x}{L}, \quad v = \frac{u_y}{L},$$

$$E_r = \frac{E_{\bar{u}}}{E_A}, \quad T_r = \frac{T_{\bar{u}}}{T_A}, \quad \lambda = L^2 \alpha_A T_A,$$

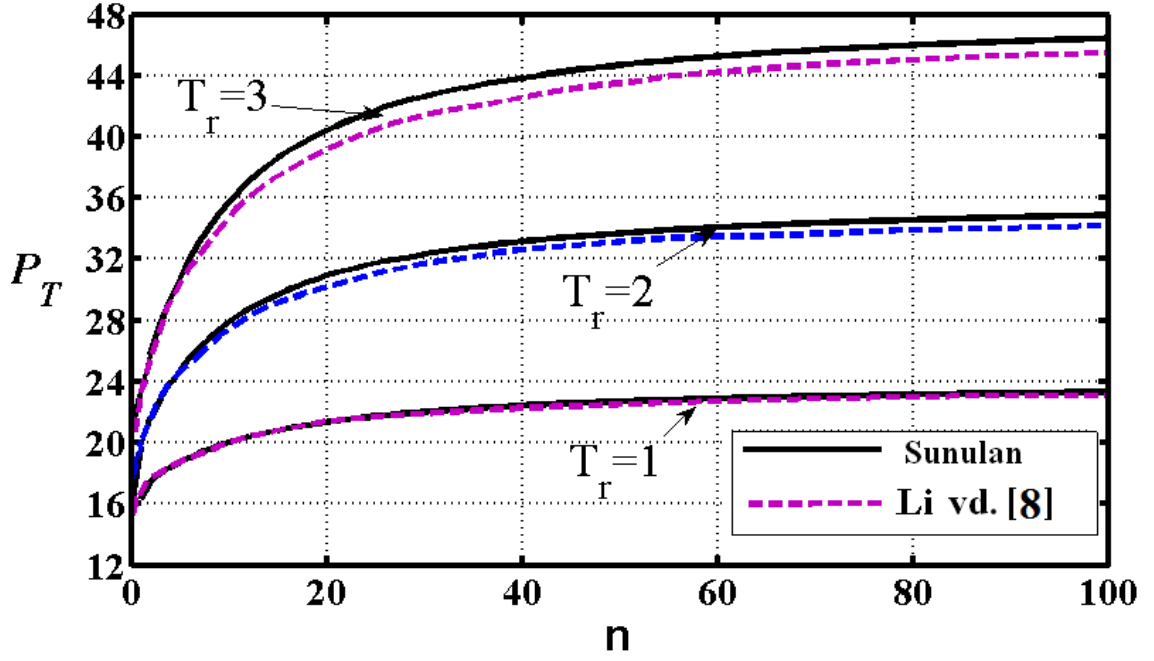
$$P_H = \frac{p_H L^2}{D_{xx}}, \quad P_V = \frac{p_V L^2}{D_{xx}}, \quad P_T = \frac{N_T L^2}{D_{xx}}, \quad (3.1)$$

$$m = \frac{mL}{D_{xx}}, \quad m_T = \frac{M_T L}{D_{xx}}, \quad \Delta = \frac{S-L}{L}, \quad \delta = \frac{L}{h}$$

$$\bar{\sigma}_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E_A T_A \alpha_{xA}}, \quad \bar{\sigma}_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E_A T_A \alpha_{xA}}, \quad \bar{\sigma}_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{E_A T_A \alpha_{xA}}$$

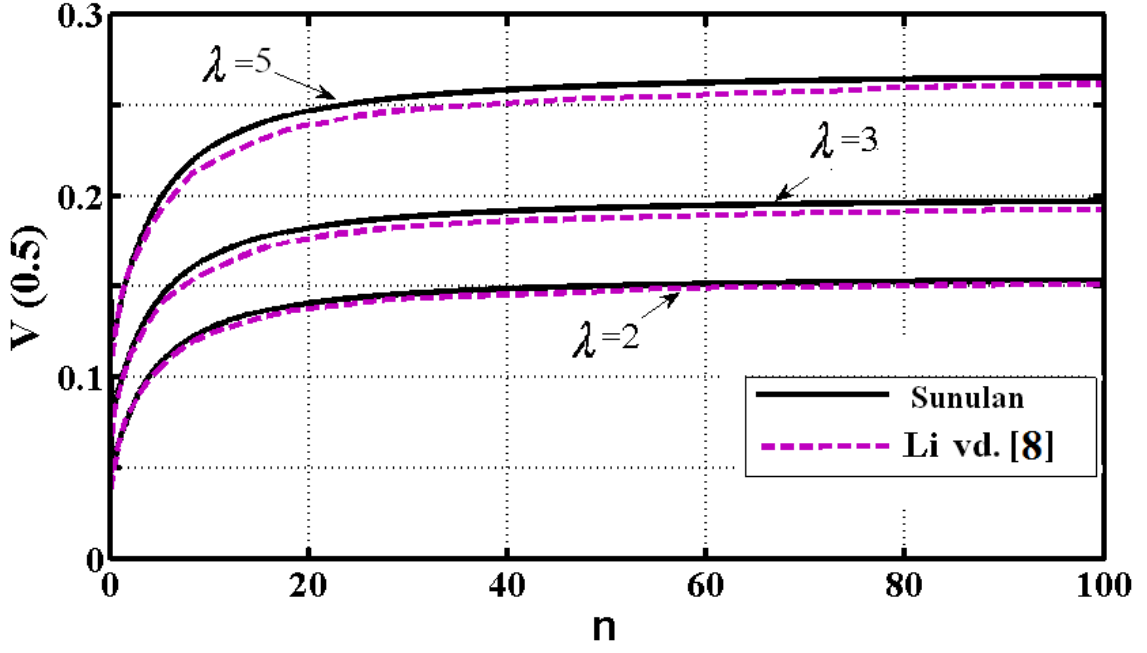
Burada  $T_r$  kirişin üst ve alt yüzeylerindeki sıcaklık değerlerinin oranı,  $E_r$  kirişin üst ve alt yüzeylerindeki elastisite modülü değerlerinin oranı,  $P_H$  boyutsuz yatay mesnet tepkisi,  $P_V$  boyutsuz düşey mesnet tepkisi,  $P_T$  boyutsuz eksenel termal yük,  $m_T$  boyutsuz termal eğilme momenti,  $m$  boyutsuz mesnet tepki momenti,  $\Delta$  boyutsuz toplam eksenel uzama,  $S$  kirişin şekil değişimi sonrası uzunluğu,  $\bar{\sigma}_{xx}$  boyutsuz Cauchy normal gerilmesi,  $\bar{\sigma}_{xy}$  boyutsuz Cauchy kayma gerilmesi ve  $\lambda$  ise boyutsuz termal yükü temsil etmektedir.

Elde edilen formülasyonların ve Matlab program dilinde yazılan bilgisayar programının doğruluğunu test etmek için, daha önceden yayınlanmış, literatürde mevcut olan çalışmaların sonuçlarıyla karşılaştırmalar yapılmıştır. Bu amaçla, Li vd. [8] tarafından yapılan çalışmanın Şekil 3 de verilen, her iki ucu ankastre mesnede sahip fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeli bir kirişin  $L/h=15$ ,  $\lambda=2$  ve  $T_r=1,2,3$  değerleri için boyutsuz termal eksenel yük  $P_T$  ile fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) arasındaki ilişkinin sonuçları tez çalışmasının sonuçları ile Şekil 3.1 da karşılaştırılmıştır. Şekil 3.1 den görüldüğü gibi, elde edilen eğriler, Li vd. [8] tarafından elde edilen eğrilere yakın çıkmıştır.



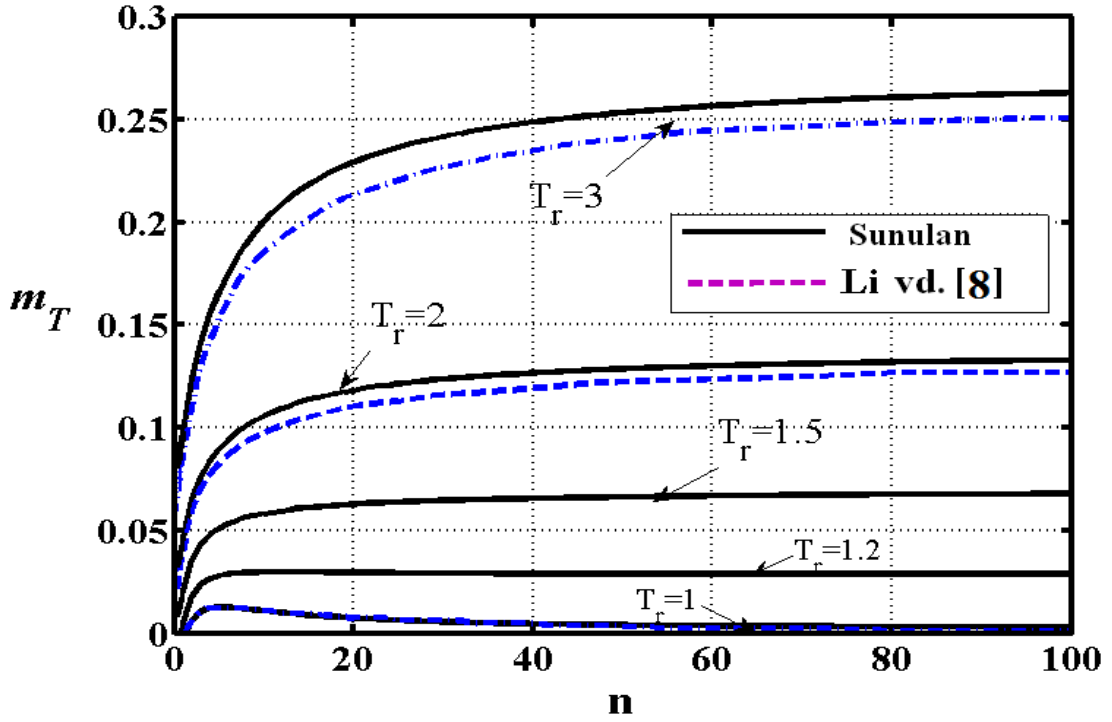
Şekil 3.1  $L/h=15$ ,  $\lambda=2$  ve  $T_r=1,2,3$  değerleri için boyutsuz termal aksenal yük  $P_T$  ile fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) arasındaki ilişki.

Li vd. [8] tarafından yapılan çalışmada Şekil 7 ile verilen, her iki ucu ankastre mesnede sahip fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeli bir kirişin  $L/h=15$ ,  $T_r=15$  ve boyutsuz termal yük  $\lambda=2,3,5$  değerleri için kirişin orta noktasının boyutsuz düşey yer değiştirmesi  $V(0.5)$  ile fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) arasındaki ilişkisi sunulan tezdeki sonuçlarla Şekil 3.2 de karşılaştırılmıştır. Şekil 3.2 de görüldüğü gibi, elde edilen eğriler, Li vd. [8] tarafından elde edilen eğrilere oldukça yakın çıkmıştır.



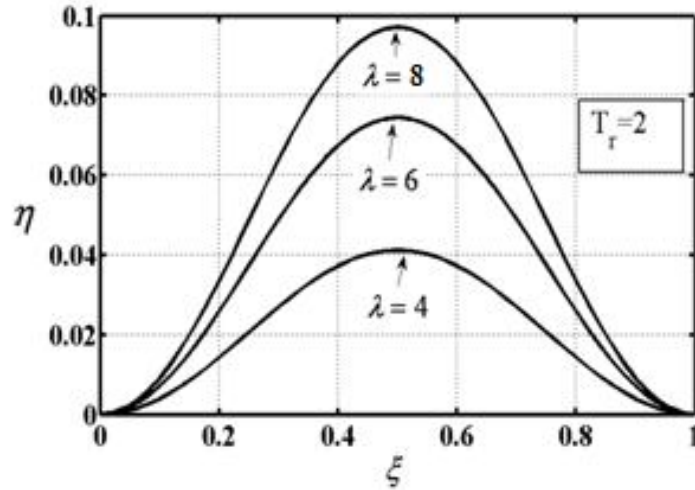
Şekil 3.2  $L/h=15$  ,  $T_r = 15$  ve boyutsuz termal yük  $\lambda = 2,3,5$  değerleri için kirişin orta noktasının boyutsuz düşey yer değiştirmesi  $V(0.5)$  ile fonksiyonel derecelendirme katsayısı  $n$  arasındaki ilişkisi.

Elde edilen formülasyonların ve Matlab program dilinde yazılan bilgisayar programının doğruluğunu bir kez daha test etmek için, Li vd. [8] tarafından yapılan çalışmada Şekil 4 ile verilen, her iki ucu ankastre mesnede sahip fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeli bir kirişin  $L/h=15$ ,  $T_r = 1, 1.2, 1.5, 2, 3$  ve boyutsuz termal yük  $\lambda = 2$  değerleri için boyutsuz termal eğilme momenti  $M_T$  ile fonksiyonel derecelendirme katsayısı  $n$  arasındaki ilişkisi sunulan tezdeki sonuçlarla Şekil 3.3 de karşılaştırılmıştır. Şekil 3.3 de görüldüğü gibi, elde edilen eğriler, Li vd. [8] tarafından elde edilen eğrilere yakın çıkmıştır.



Şekil 3.3  $L/h=15$ ,  $T_r = 1, 1.2, 1.5, 2, 3$  ve boyutsuz termal yük  $\lambda = 2$  değerleri için boyutsuz termal eğilme momenti  $M_T$  ile fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) arasındaki ilişki.

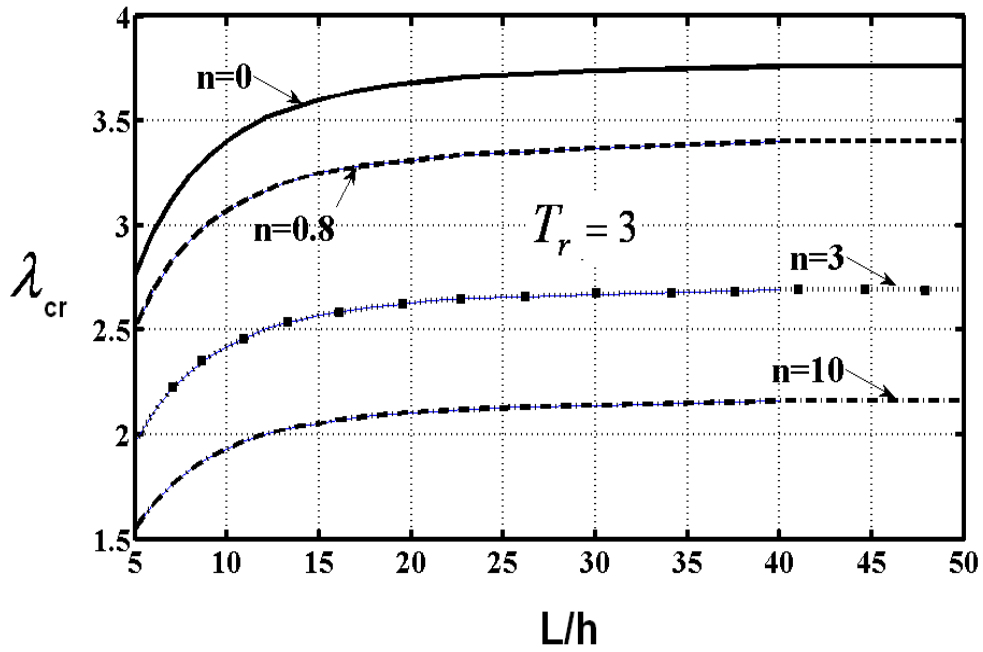
Şekil 3.4 de, kirişin,  $T_r = 2$ ,  $L/h=15$ ,  $n=3$ ,  $\lambda = 4, 6, 8$  değerleri için burkulma sonrası konumları verilmiştir.



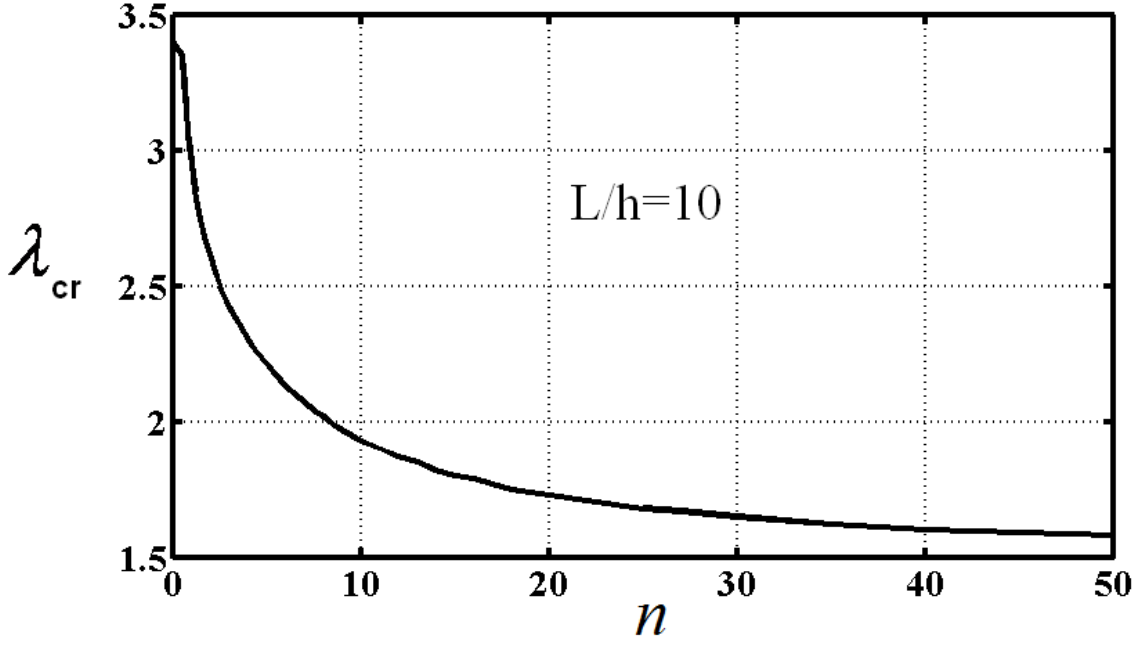
Şekil 3.4 Kirişin  $T_r = 2$ ,  $L/h=15$ ,  $n=3$ ,  $\lambda = 4, 6, 8$  değerleri için burkulma sonrası konumları.



Şekil 3.5 de,  $T_r = 3$  ve çeşitli fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) değerleri için boyutsuz kritik burkulma sıcaklığı ile kirişin uzunluk/yükseklik oranı arasındaki ilişki verilmiştir. Şekil 3.5 de görüldüğü gibi eğriler  $L/h=30$  dan sonra yaklaşık olarak yataya asimptot olmaktadır. Şekil 3.5 ve Şekil 3.6 da görülür ki, fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) değeri arttıkça kritik burkulma sıcaklığı azalmaktadır. Bu düşüş formu şekil 3.6 da daha açıkça görülmektedir. Fonksiyonel derecelendirme katsayısı  $n=40$  değerinden sonra, kiriş malzemesinin büyük çoğunluğu metal olmakta ve bu yüzden  $\lambda_{cr} - n$  eğrisi  $n=40$  değerinden sonra yataya asimptot olmaktadır. Fonksiyonel derecelendirme katsayısı  $n=0$  durumu için, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeli kiriş homojen seramik olmaktadır.

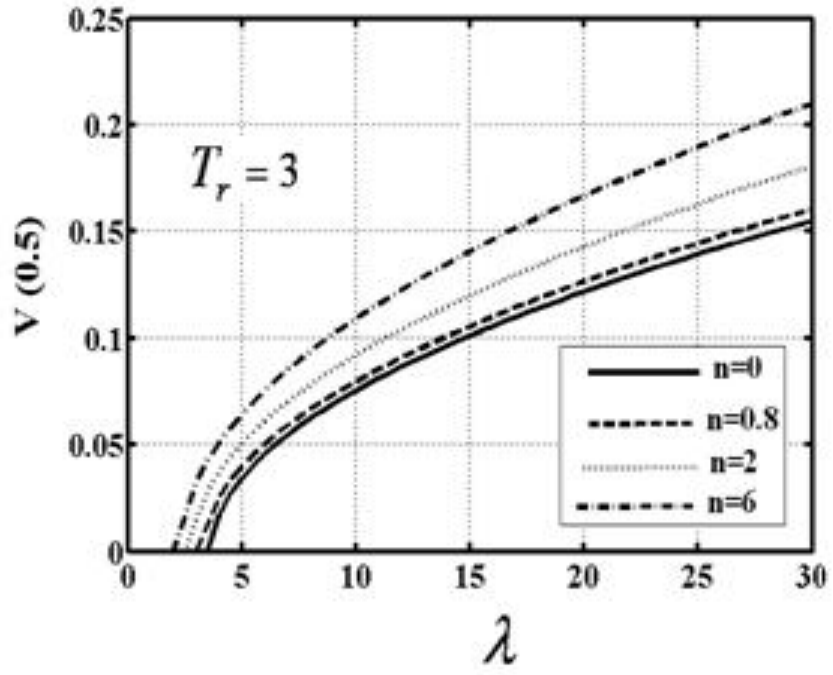


Şekil 3.5  $T_r = 3$  ve çeşitli fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) değerleri için boyutsuz kritik burkulma sıcaklığı ile kirişin uzunluk/yükseklik oranı arasındaki ilişki.

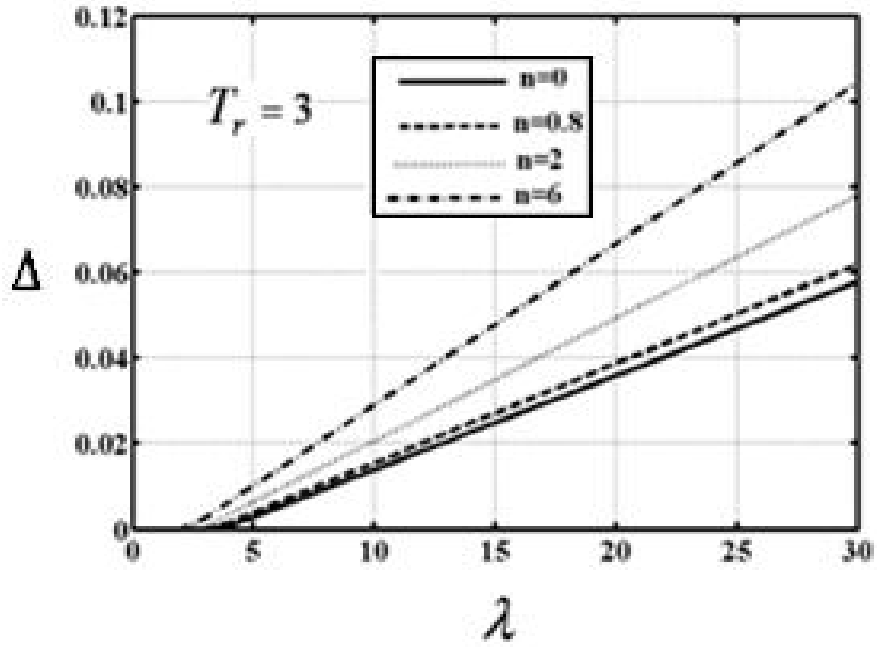


Şekil 3.6  $T_r = 3$  ve  $L/h=10$  için fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) ile boyutsuz kritik burkulma sıcaklığı arasındaki ilişki.

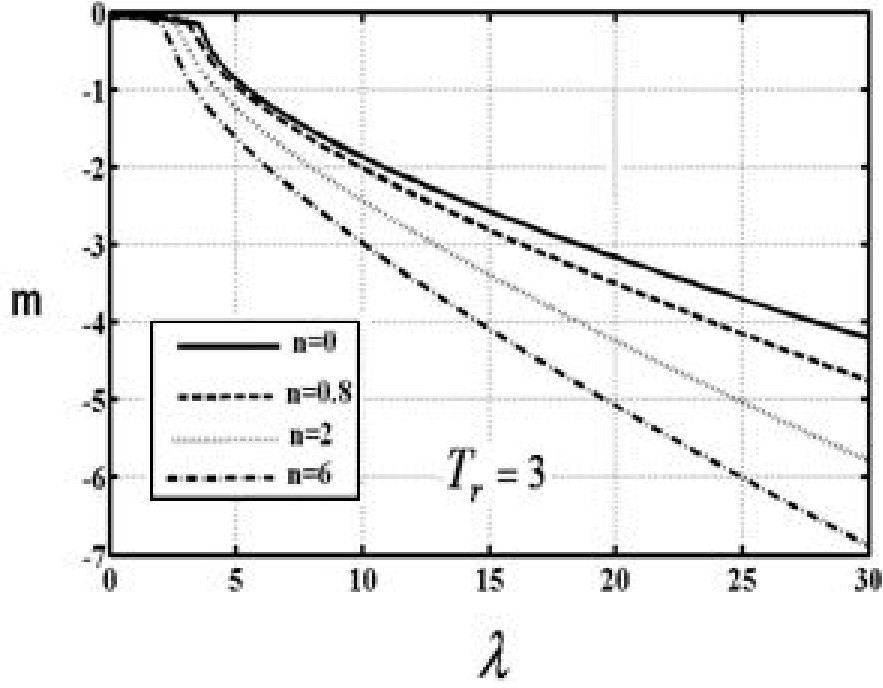
Şekil 3.7, 3.8 ve 3.9 da,  $T_r = 3$ ,  $L/h=20$  ve çeşitli fonksiyonel derecelendirme katsayısı  $n$  değerleri için kirişin orta noktasının boyutsuz düşey yer değiştirmesi, kirişin toplam aksenal boyutsuz uzaması ve boyutsuz mesnet tepkisi değerleri ile boyutsuz termal yük arasındaki ilişkiler gösterilmiştir. Şekillerden görüldüğü gibi, kritik termal burkulma yükünden sonra, çok küçük sıcaklık artışında kirişin yer değiştirme ve mesnet momenti değerleri ciddi bir biçimde artmaktadır.



Şekil 3.7  $L/h=20$  ,  $T_r = 3$  ve fonksiyonel derecelendirme katsayısı  $n=0, 0.8, 2, 6$  değerleri için kirişlerin orta noktasının boyutsuz düşey yer değiştirmesi  $V(0.5)$  ile boyutsuz termal yük  $\lambda$  arasındaki ilişki.



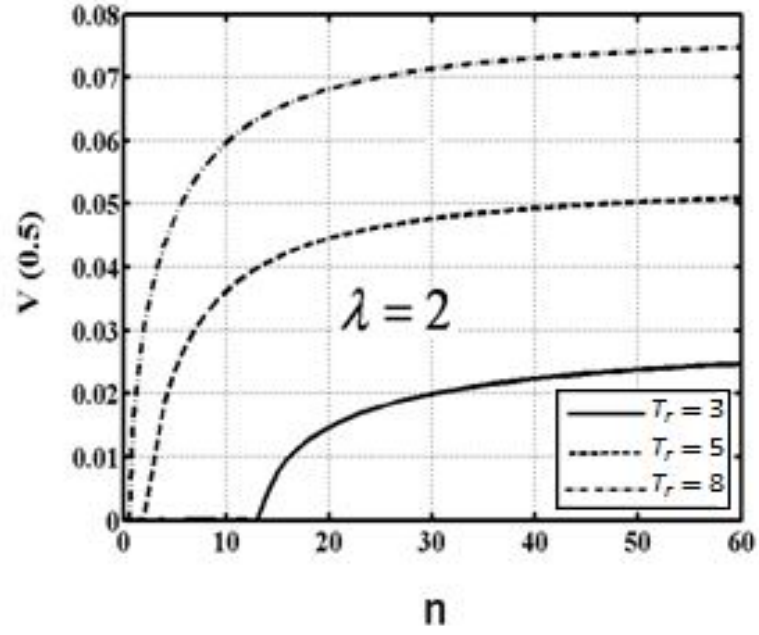
Şekil 3.8  $L/h=20$  ,  $T_r = 3$  fonksiyonel derecelendirme katsayısı  $n=0, 0.8, 2, 6$  değerleri için kirişlerin toplam boyutsuz boy uzaması  $\Delta$  ile boyutsuz termal yük  $\lambda$  arasındaki ilişki.



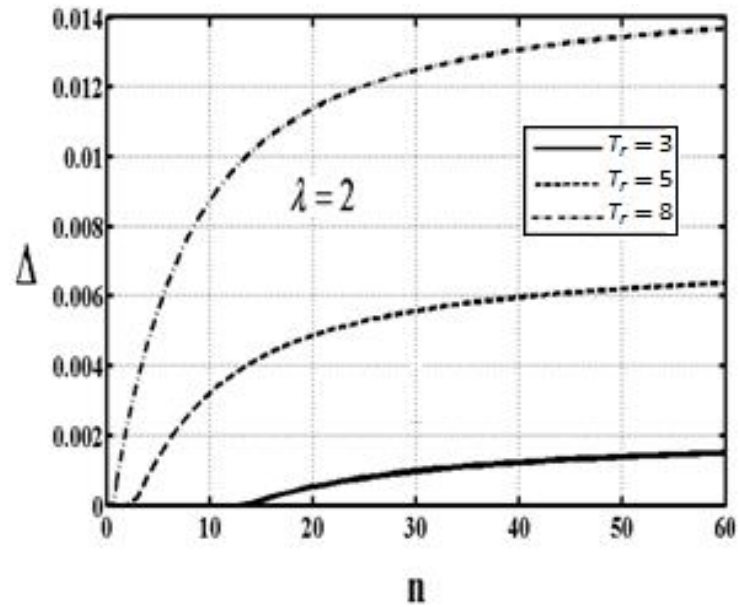
Şekil 3.9  $L/h=20$  ,  $T_r = 3$  fonksiyonel derecelendirme katsayısı  $n=0, 0.8, 2, 6$  değerleri için boyutsuz mesnet tepkileri ile boyutsuz termal yük  $\lambda$  arasındaki ilişki.

Şekil 3.7, 3.8 ve 3.9 dan görüldüğü gibi, fonksiyonel derecelendirme katsayısı  $n$  arttıkça boyutsuz yer değiştirme, boyutsuz toplam eksenel uzama ve boyutsuz mesnet tepkileri artmaktadır: Çünkü fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) arttıkça kiriş malzemesi Alüminyuma yaklaşmakta olup, Alüminyumun elastisite modülü Seramiğe göre çok düşük olduğundan, kirişin rijitliği azalmaktadır.

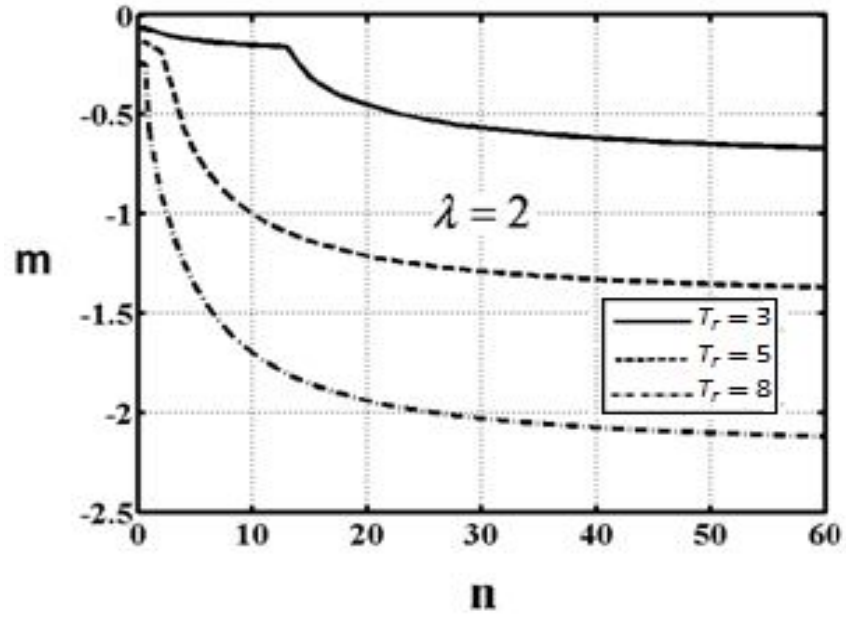
Şekil 3.10, 3.11 ve 3.12 de,  $\lambda=2$  ,  $L/h=20$  ve çeşitli  $T_r$  (kirişin üst ve alt yüzelerindeki sıcaklık değerlerinin oranı) için kirişin orta noktasının boyutsuz düşey yer değiştirmesi, kirişin toplam eksenel boyutsuz uzaması ve boyutsuz mesnet tepkisi değerleri ile fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) arasındaki ilişkiler gösterilmiştir. Şekillerden görüldüğü gibi,  $T_r$  arttıkça kirişlerin orta noktasının boyutsuz düşey yer değiştirmesi, kirişin toplam eksenel boyutsuz uzaması ve mesnet tepkisi, tüm fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) değerleri için artar.



Şekil 3.10  $L/h=20$ ,  $\lambda = 2$  ve çeşitli  $T_r$  değerleri için kirişlerin orta noktasının boyutsuz düşey yer değiştirmesi  $V(0.5)$  ile fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) arasındaki ilişki.



Şekil 3.11  $L/h=20$ ,  $\lambda = 2$  ve çeşitli  $T_r$  değerleri için kirişlerin toplam boyutsuz aksenal uzaması  $\Delta$  ile fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) arasındaki ilişki.



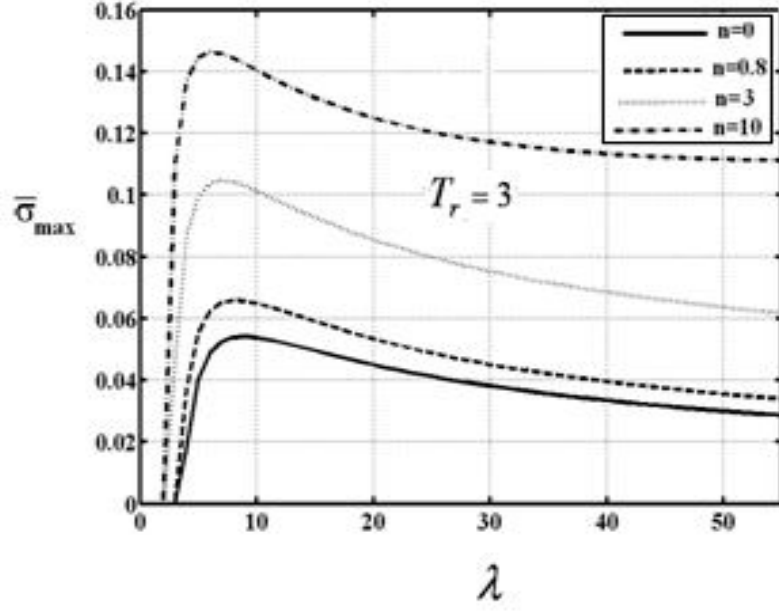
Şekil 3.12  $L/h=20$ ,  $\lambda = 2$  ve çeşitli  $T_r$  değerleri için kirişlerin boyutsuz mesnet tepkileri ile fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) arasındaki ilişki.

Boyutsuz Cauchy asal normal gerilmeleri,  $\bar{\sigma}_{\max}$ ,  $\bar{\sigma}_{\min}$  izleyen şekilde verilmiştir:

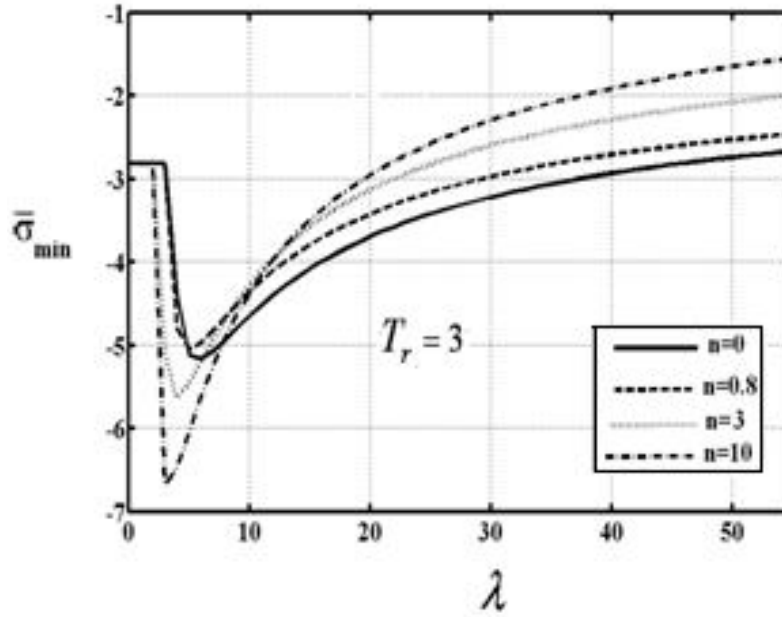
$$\bar{\sigma}_{\max} = \frac{\bar{\sigma}_{xx} + \bar{\sigma}_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\bar{\sigma}_{xx} - \bar{\sigma}_{yy}}{2}\right)^2 + (\bar{\sigma}_{xy})^2} \quad (3.2)$$

$$\bar{\sigma}_{\min} = \frac{\bar{\sigma}_{xx} + \bar{\sigma}_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\bar{\sigma}_{xx} - \bar{\sigma}_{yy}}{2}\right)^2 + (\bar{\sigma}_{xy})^2} \quad (3.3)$$

Şekil 3.13 ve Şekil 3.14 de, kirişlerin orta kesitinin üst noktasında ( $\xi = 0.5, \eta = 0.5$ ) sırasıyla boyutsuz en büyük Cauchy asal normal gerilmeleri ve boyutsuz en küçük Cauchy asal normal gerilmeleri ile boyutsuz termal yük arasındaki ilişki verilmiştir. Şekillerden görüldüğü gibi, kritik termal burkulma yükünden sonra, gerilmeler ciddi bir biçimde değişmektedir. Kritik burkulma yükünden sonra, en büyük Cauchy asal gerilmeleri ile en küçük Cauchy asal gerilmeleri monoton bir biçimde azalmaktadır. Ayrıca, aynı termal yükleme durumunda, fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) arttıkça en büyük ile en küçük Cauchy asal gerilmeleri artmaktadır.

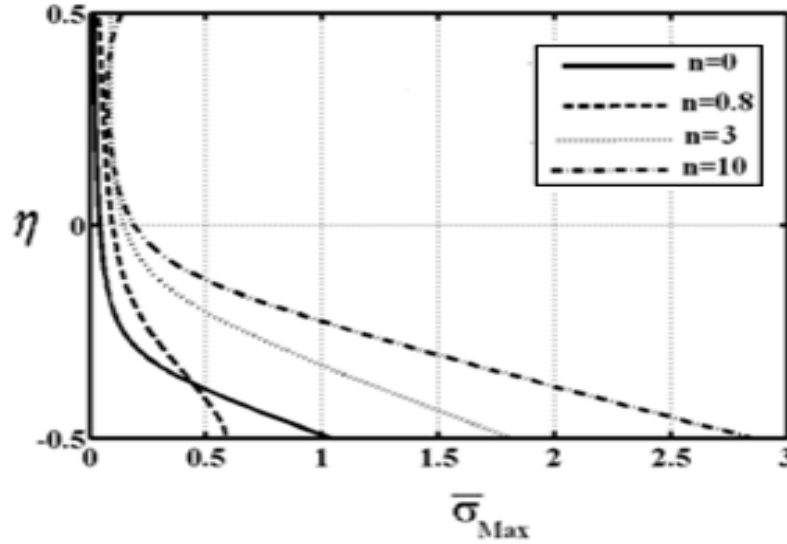


Şekil 3.13  $L/h=20$ ,  $T_r = 3$  fonksiyonel derecelendirme katsayısı  $n=0, 0.8, 3, 10$  değerleri için kirişin orta kesitinin üst noktasında ( $\xi = 0.5, \eta = 0.5$ ), boyutsuz en büyük Cauchy asal gerilmeleri ile boyutsuz termal yük  $\lambda$  arasındaki ilişki.

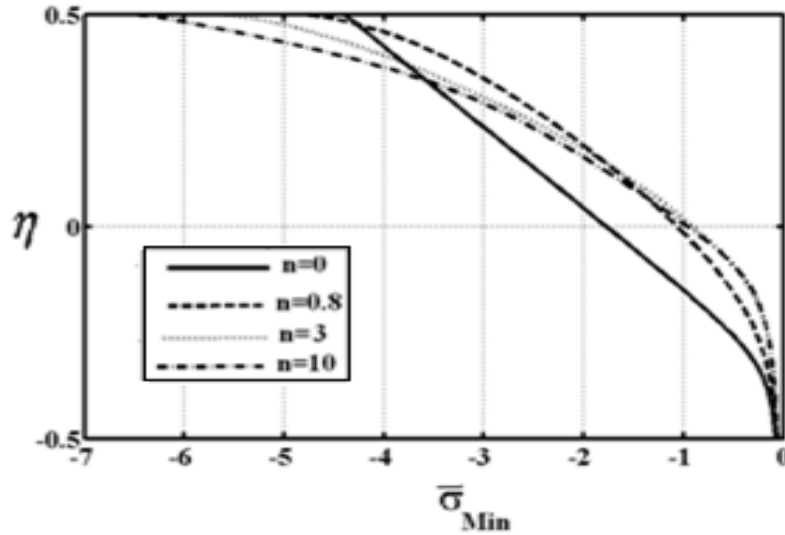


Şekil 3.14  $L/h=20$ ,  $T_r = 3$ , fonksiyonel derecelendirme katsayısı  $n=0, 0.8, 3, 10$  değerleri için kirişin orta kesitinin üst noktasında ( $\xi = 0.5, \eta = 0.5$ ), boyutsuz en küçük Cauchy asal gerilmeleri ile boyutsuz termal yük  $\lambda$  arasındaki ilişki.

Şekil 3.15 ve 3.16 da,  $\lambda = 4$ ,  $L/h = 20$  ve  $T_r = 3$  değerleri için kirişin orta kesitinin sırasıyla boyutsuz en büyük Cauchy asal normal gerilmeleri ve boyutsuz en küçük Cauchy asal normal gerilmelerinin yükseklik boyunca dağılımı ile fonksiyonel derecelendirme katsayısı  $n$  arasındaki ilişkiler gösterilmiştir. Şekillerden görüldüğü gibi, fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ), gerilmelerin kesit yüksekliği boyunca dağılımı üzerinde önemli bir rol oynamaktadır.



Şekil 3.15  $L/h=20$ ,  $T_r = 3$ ,  $\lambda = 4$  için kirişin orta kesitinde boyutsuz en büyük Cauchy asal gerilmeleri.



Şekil 3.16  $L/h=20$ ,  $T_r = 3$ ,  $\lambda = 4$  için kirişin orta kesitinde boyutsuz en küçük Cauchy asal gerilmeleri.



Bu kolumde, elde edilen verilerden Őu sonuclara ulaşılmıştır:

- Fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) artıkça boyutsuz yer değiştirme, boyutsuz toplam aksenal uzama ve boyutsuz mesnet tepkileri artmaktadır: Çünkü fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) artıkça kiriş malzemesi Alüminyuma yaklaşmakta olup Alüminyumun elastisite modülü Seramiğe göre çok düşük olduğundan, kirişin rijitliği azalmaktadır.
- $T_r$  ( kirişin üst ve alt yüzeylerindeki sıcaklık değerlerinin oranı) artıkça kirişlerin orta noktasının boyutsuz düşey yer değiştirmesi, kirişin toplam aksenal boyutsuz uzaması ve mesnet tepkisi, tüm fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) değerleri için artar.
- Kritik termal burkulma yükünden sonra gerilmeler ciddi bir biçimde değişmektedir. Kritik burkulma yükünden sonra, en büyük Cauchy asal gerilmeleri ile en küçük Cauchy asal gerilmeleri monoton bir biçimde azalmaktadır. Ayrıca, aynı termal yükleme durumunda, fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) artıkça en büyük ile en küçük Cauchy asal gerilmeleri artmaktadır.
- Fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ), gerilmelerin kesit yüksekliği boyunca dağılımı üzerinde önemli bir rol oynamaktadır.

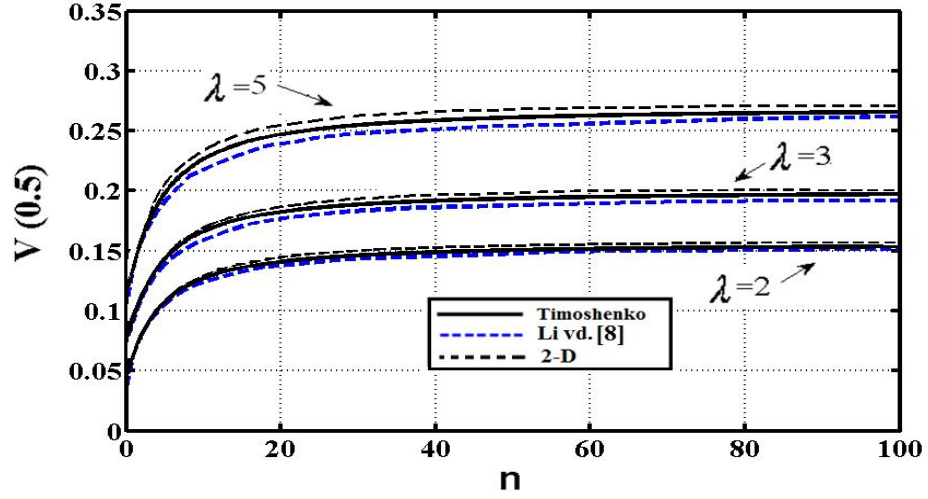
### 3.2 İki Boyutlu Sürekli Ortam Modeli Çerçevesinde Çözüm

Bilinen birleştirme işlemlerinin kullanımıyla eşitlik (2.72)'da, 8 düğüm noktalı eleman için toplam Lagrangian formülasyonu üzerine temellendirilen iki boyutlu sürekli ortamın toplam Lagrangian sonlu eleman modeline ilişkin eleman rijitlik matrislerinin kullanımıyla sistem teğet rijitlik matrisi elde edilir. Bundan sonra önceden de belirtildiği gibi doğrusal olmayan problemlerin çözüm işlemi kullanılarak iki boyutlu sürekli ortamın toplam Lagrangian sonlu eleman modeli için ilgili çözümler elde edilir. Sayısal hesaplamalarda beş noktalı Gauss integral kuralı kullanılmıştır. Bu bölümdeki sayısal hesaplarda, kirişin seramik malzemesi zirkon ( $ZrO_2$ ;  $E=151$  GPa,  $\nu=0.2$ ),

$\nu=0.2882$ ,  $k=2.09 \text{ W}/(\text{m.K})$ ,  $\alpha=10 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ) ve metal malzemesinin alüminyumdan (Al;  $E=70 \text{ GPa}$ ,  $\nu=0.31$ ,  $k=204 \text{ W}/(\text{m.K})$ ,  $\alpha=23 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ ) olduğu düşünülmüştür. Buradaki malzemelerin fiziksel özellikleri, Li vd. [7] tarafından yapılmış olan çalışmadan alınmıştır. Kirişin alt yüzeyi alüminyum, üst yüzeyi seramikten yapılmıştır. Fonksiyonel derecelendirme katsayısı  $n=0$  olduğunda kiriş malzemesinin tamamı seramik (homojen seramik) olmaktadır. Sayısal hesaplarda, yatay sonlu eleman sayısı 30 ve düşey sonlu eleman sayısı 8 alınmıştır.

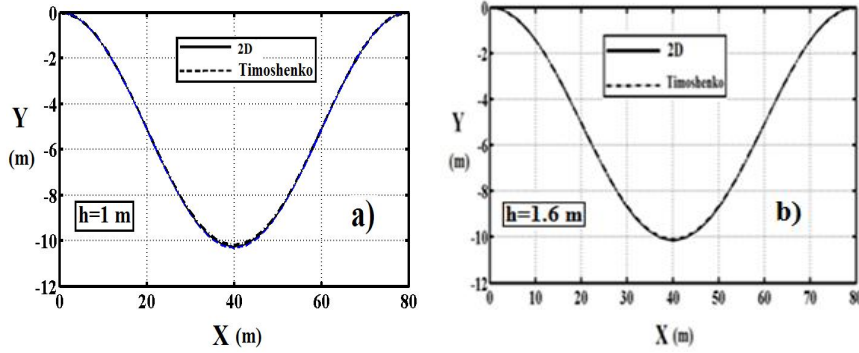
Bu kısımda yer alan sayısal sonuçlarda, iki boyutlu sürekli ortam modeli ile Timoshenko kiriş teorisi arasındaki fark incelenmiştir. Sayısal hesaplamalarda MATLAB bilgisayar programlama dili kullanılmıştır.

Elde edilen formülasyonların ve Matlab program dilinde yazılan bilgisayar programının doğruluğunu test etmek için, daha önceden yayınlanmış olup literatürde mevcut çalışmaların sonuçlarıyla karşılaştırmalar yapılmıştır. Bu amaçla, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeli bir kiriş için  $L/h=15$ ,  $\lambda=2,3,5$  ve  $T_r=15$  değerleri alınması durumunda boyutsuz orta nokta düşey yer değiştirmesi  $V(0.5)$  ile fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) arasında Li vd. [8] tarafından elde edilen ilişki bu çalışmada Timoshenko kiriş teorisi, iki boyutlu sürekli ortam teorileri ile bulunanlarla Şekil 3.17 de karşılaştırılmıştır. Şekil 3.17 den görüldüğü gibi, elde edilen eğriler, Li vd. [8] tarafından elde edilen eğrilere yakın çıkmıştır ( $T_r$  kirişin üst ve alt yüzeylerindeki sıcaklık değerlerinin oranı,  $\lambda$  ise boyutsuz termal yükü).

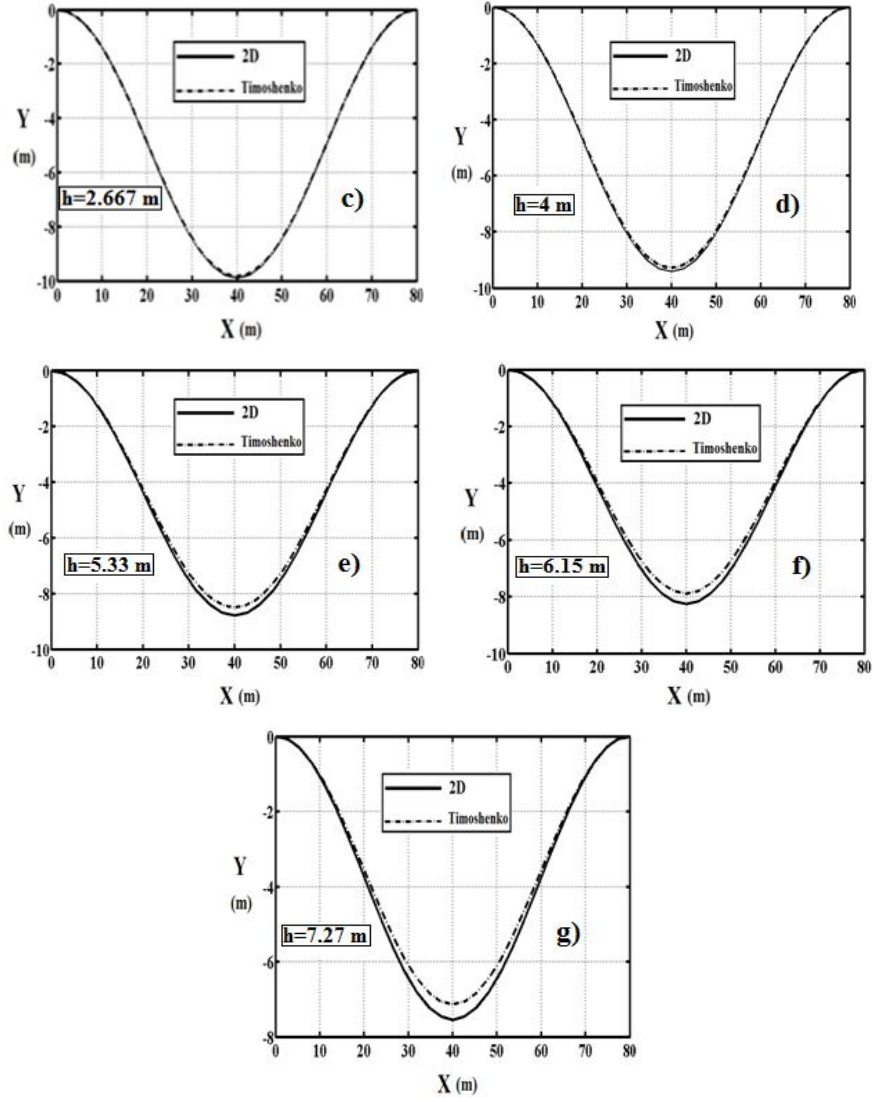


Şekil 3.17  $L/h=15$ ,  $T_r = 15$  ve boyutsuz termal yük  $\lambda = 2,3,5$  değerleri için kirişin orta noktasının boyutsuz düşey yer değiştirmesi  $V(0.5)$  ile fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) arasındaki ilişkisi.

Timoshenko kiriş teorisi ve iki boyutlu sürekli ortam modelinin karşılaştırılması,  $L=80$  m uzunluğunda ve  $b=1$  m genişliğinde bir kirişin farklı yükseklik değerlerine göre yapılmıştır. Bu amaçla, fonksiyonel derecelendirme katsayısı  $n=0$  ve üniform sıcaklık artışı  $\Delta T = 4000$  °C için kirişin burkulma sonrası yer değiştirmeleri ile yükseklik boyunca gerilme dağılımları hesaplanmıştır. Şekil 4.18 de iki model için elde edilen burkulma sonrası kirişin yer değiştirmiş konumları karşılaştırılmıştır.



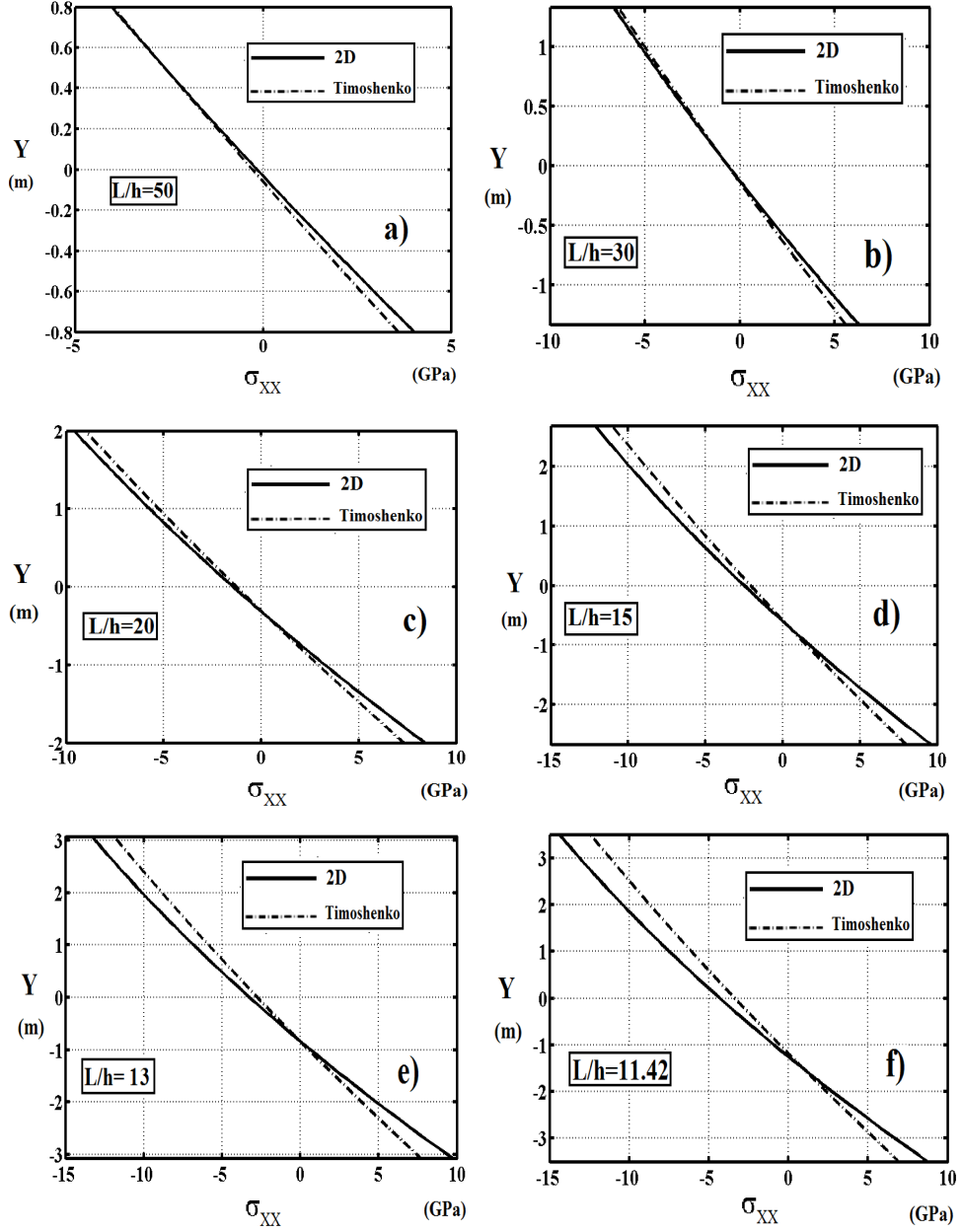
Şekil 3.18  $L=80$  m,  $b=1$  m,  $n=0$  ve  $\Delta T = 4000$  °C olması durumunda Timoshenko kiriş teorisi ve iki boyutlu sürekli ortam modeline göre kirişin burkulma sonrası yer değiştirmiş konumları. a)  $h=1$  m, b)  $h=1.6$  m.



Şekil 3.18  $L=80$  m,  $b=1$  m,  $n=0$  ve  $\Delta T = 4000$  °C olması durumunda Timoshenko kiriş teorisi ve iki boyutlu sürekli ortam modeline göre kirişin burkulma sonrası yer değiştirmiş konumları. c)  $h=2.667$  m, d)  $h=4$  m, e)  $h=5.33$  m, f)  $h=6.15$  m, g)  $h=7.27$  m.

Şekil 3.18de görüldüğü gibi, kiriş yüksekliği arttıkça Timoshenko kiriş teorisi ile iki boyutlu sürekli ortam modeli arasındaki fark artmaktadır.

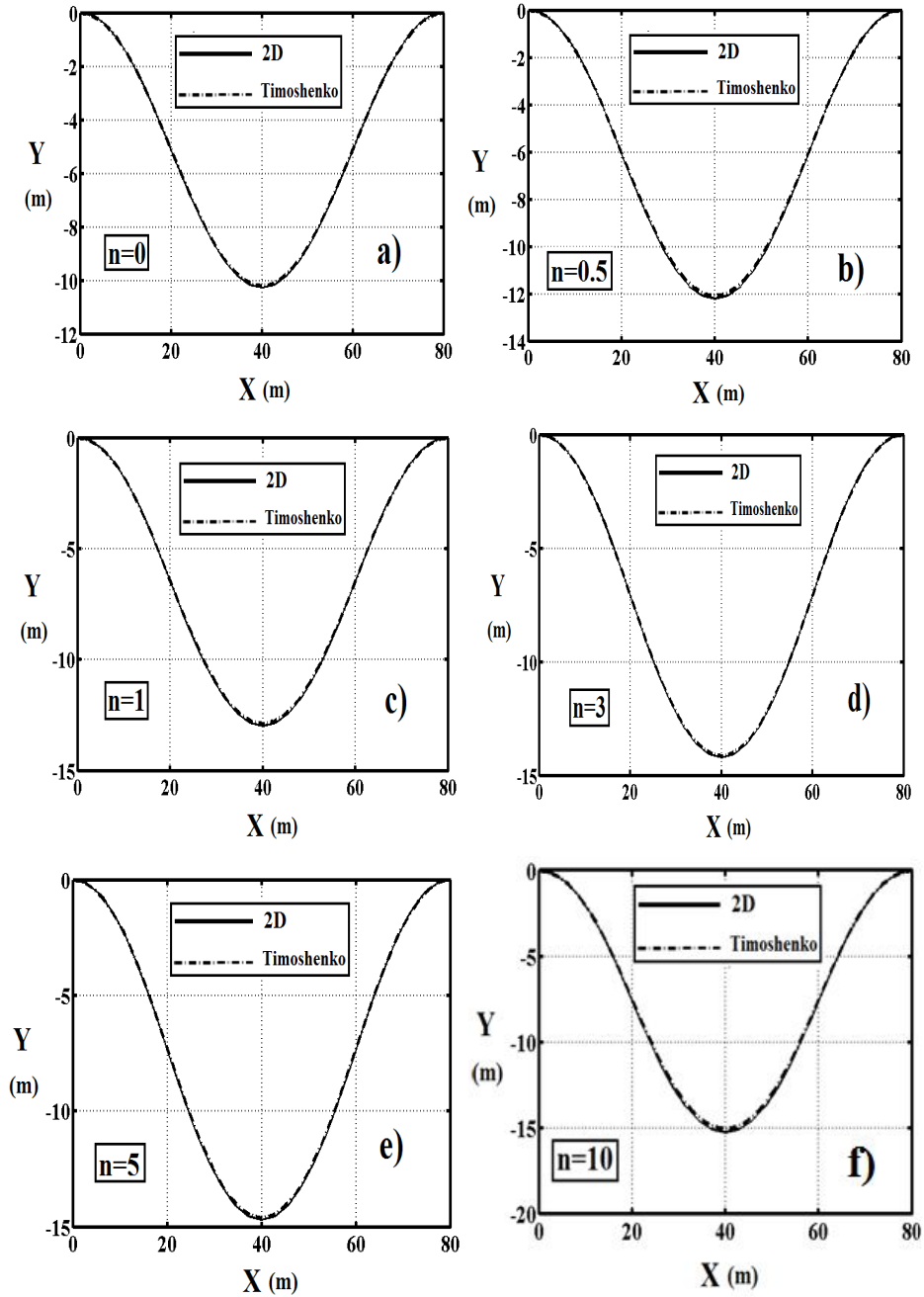
Şekil 3.19 da, kirişin orta kesitindeki Cauchy normal gerilmelerinin yükseklik boyunca dağılımı Timoshenko kiriş teorisi ve iki boyutlu sürekli ortam modeline göre karşılaştırılmıştır.



Şekil 3.19  $b=1$  m,  $n=0$  ve  $\Delta T = 4000$  °C olması durumunda Timoshenko kiriş teorisi ve iki boyutlu sürekli ortam modeline göre kirişin orta kesitindeki Cauchy normal gerilmelerinin yükseklik boyunca dağılımı. a)  $L/h=50$ , b)  $L/h=30$ , c)  $L/h=20$ , d)  $L/h=15$ , e)  $L/h=13$ , f)  $L/h=11.42$ .

Şekil 3.19 da görüldüğü gibi,  $L/h$  azaldıkça Timoshenko kiriş teorisi ile iki boyutlu sürekli ortam modeli arasındaki fark artmaktadır.

Şekil 3.20 de, kirişin burkulma sonrası yer değiştirmiş formu Timoshenko kiriş teorisi ile iki boyutlu sürekli ortam modeli kullanarak farklı fonksiyonel derecelendirme katsayısı  $n$  değerlerine göre verilmiştir.



Şekil 3.20  $L=80$  m,  $b=1$  m,  $h=1$  m ve  $\Delta T = 4000$  °C olması durumunda Timoshenko kiriş teorisi ve iki boyutlu sürekli ortam modeline göre kirişin burkulma sonrası konumları. a)  $n=0$ , b)  $n=0.5$ , c)  $n=1$ , d)  $n=3$ , e)  $n=5$ , f)  $n=10$ .

Şekil 3.20 de görülmektedir ki, fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) artıkça yer değiştirmeler artmaktadır. Çünkü fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) artıkça kiriş malzemesi Alüminyuma yaklaşmakta olup Alüminyumun elastisite modülü seramiğe göre çok düşük olduğundan, kirişin rijitliği azalmaktadır.

Şekillerden görüldüğü üzere, iki boyutlu sürekli ortam modeli sonuçlarının Timoshenko kiriş teorisi sonuçlarına göre daha büyük olduğu görülmektedir.  $L/h$  oranı küçüldükçe Timoshenko kiriş teorisi ile iki boyutlu sürekli ortam modeli arasındaki fark artmaktadır. Sonuçlardan görülür ki,  $L/h$  oranı düşük olan kirişlerde daha gerçekçi sonuçlar alabilmek için iki boyutlu sürekli ortam modeli kullanmak gerekir.

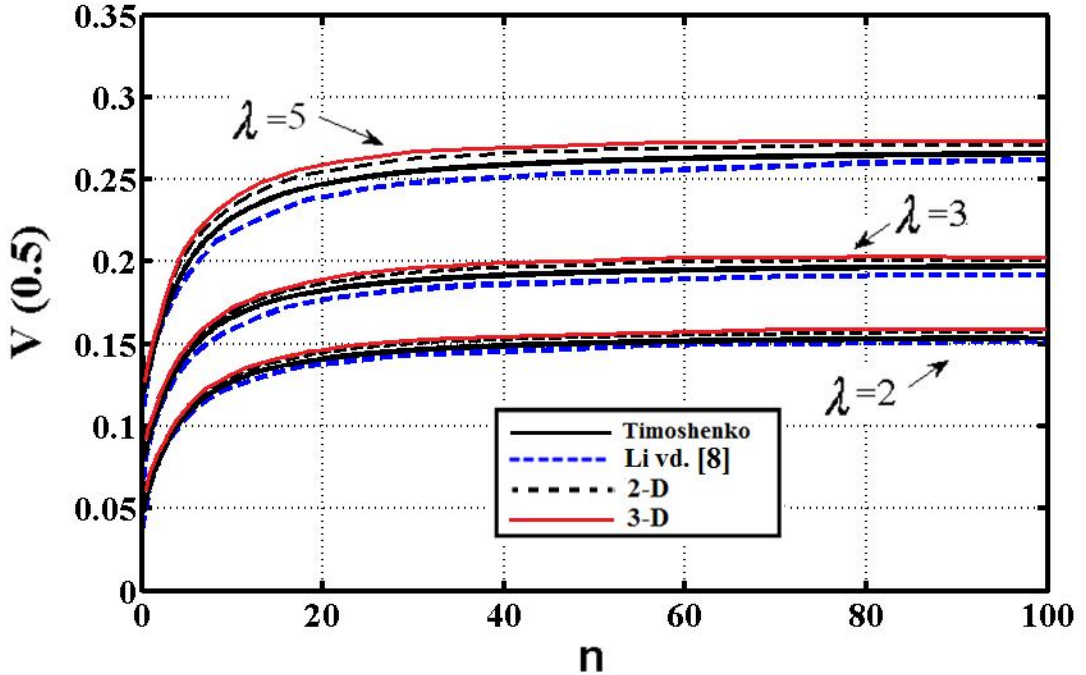
### 3.3 Üç Boyutlu Sürekli Ortam Modeli Çerçevesinde Çözüm

Bilinen birleştirme işlemlerinin kullanımıyla, 8 düğüm noktalı eleman için toplam Lagrangian formülasyonu üzerine temellendirilen üç boyutlu sürekli ortamın toplam Lagrangian sonlu eleman modeline ilişkin eleman rijitlik matrislerinin kullanımıyla sistem teğet rijitlik matrisi elde edilir. Bundan sonra önceden de belirtildiği gibi doğrusal olmayan problemlerin çözüm işlemi kullanılarak üç boyutlu sürekli ortamın toplam Lagrangian sonlu eleman modeli için ilgili çözümler elde edilir.

Nümerik hesaplarda, kirişin seramik malzemesinin Zirkon ( $ZrO_2$ ;  $E=151$  GPa,  $\nu=0.2882$ ,  $k=2.09$  W/(m.K),  $\alpha=10 \times 10^{-6}$  K<sup>-1</sup>) ve metal malzemesinin Alüminyumdan (Al;  $E=70$  GPa,  $\nu=0.31$ ,  $k=204$  W/(m.K),  $\alpha=23 \times 10^{-6}$  K<sup>-1</sup>) oluştuğu düşünülmüştür. Buradaki malzemelerin fiziksel özellikleri Li vd. [8] yapmış olduğu çalışmadan alınmıştır Kirişin alt yüzeyi alüminyum, üst yüzeyi seramikten yapılmıştır. Fonksiyonel derecelendirme katsayısı  $n=0$  olduğunda kiriş malzemesinin tamamı seramik (homojen seramik) olmaktadır. Sayısal hesaplarda, yatay sonlu eleman sayısı 200, düşey sonlu eleman sayısı 5 ve enine doğrultudaki sonlu eleman sayısı 5 alınmıştır. Bu kısımda yer alan sayısal sonuçlarda, iki ve üç boyutlu sürekli ortam modeli ile Timoshenko kiriş teorisi arasındaki fark, sıcaklık etkisi altındaki fonksiyonel

derecelendirilmiş kirişler için incelenmiştir. Sayısal hesaplamalarda MATLAB bilgisayar programlama dili kullanılmıştır. Sayısal integrasyon hesaplarında beş noktalı Gauss integral kuralı kullanılmıştır.

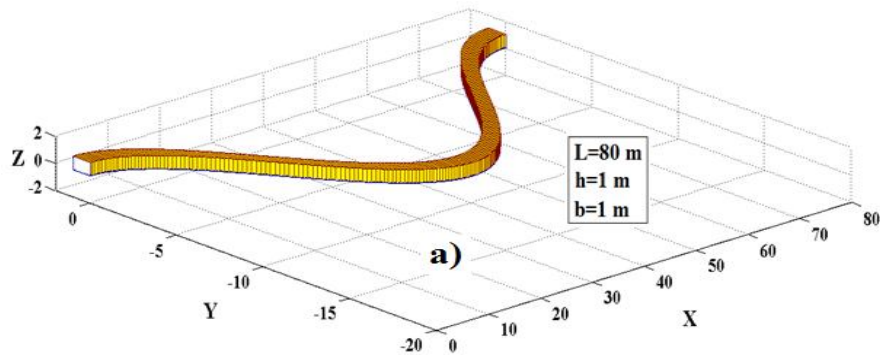
Elde edilen formülasyonların ve Matlab program dilinde yazılan bilgisayar programının doğruluğunu test etmek için daha önceden yayınlanmış olup literatürde mevcut çalışmaların sonuçlarıyla karşılaştırmalar yapılmıştır. Bu amaçla, fonksiyonel derecelendirilmiş malzemeli bir kiriş için  $L/h=15$ ,  $\lambda=2,3,5$  ve  $T_r=15$  değerleri alınması durumunda boyutsuz orta nokta düşey yer değiştirmesi  $V(0.5)$  ile fonksiyonel derecelendirme katsayısı  $n$  arasında Li vd. [8] tarafından elde edilen ilişki bu çalışmada Timoshenko kiriş teorisi, iki ve üç boyutlu sürekli ortam teorileri ile bulunanlarla Şekil 3.21 de karşılaştırılmıştır. Şekil 3.21 den görüldüğü gibi, elde edilen eğriler, Li vd. [8] tarafından elde edilen eğrilere yakın çıkmıştır ( $T_r$  kirişin üst ve alt yüzeylerindeki sıcaklık değerlerinin oranı,  $\lambda$  ise boyutsuz termal yük).



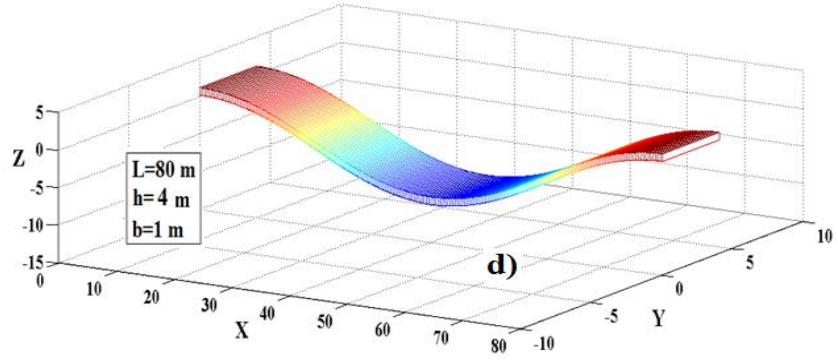
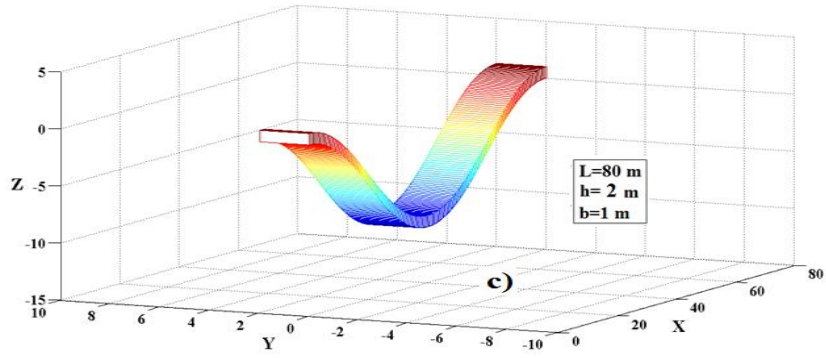
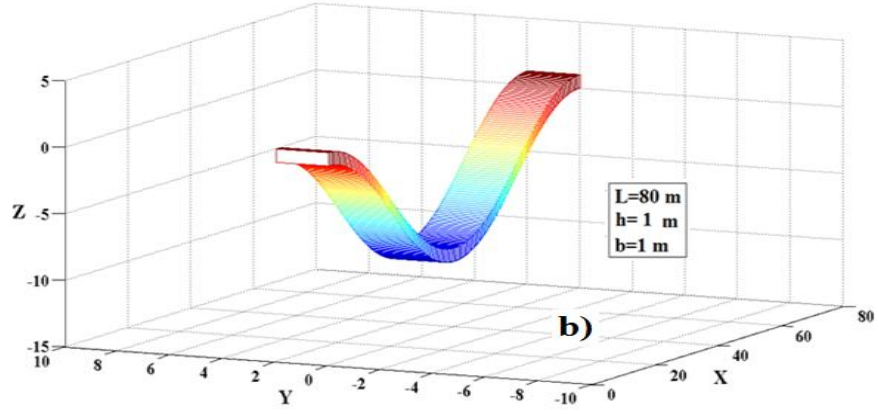
Şekil 3.21  $L/h=15$ ,  $T_r=15$  ve boyutsuz termal yük  $\lambda=2,3,5$  değerleri için kirişin orta noktasının boyutsuz düşey yer değiştirmesi  $V(0.5)$  ile fonksiyonel derecelendirme katsayısı  $n$  arasındaki ilişki.



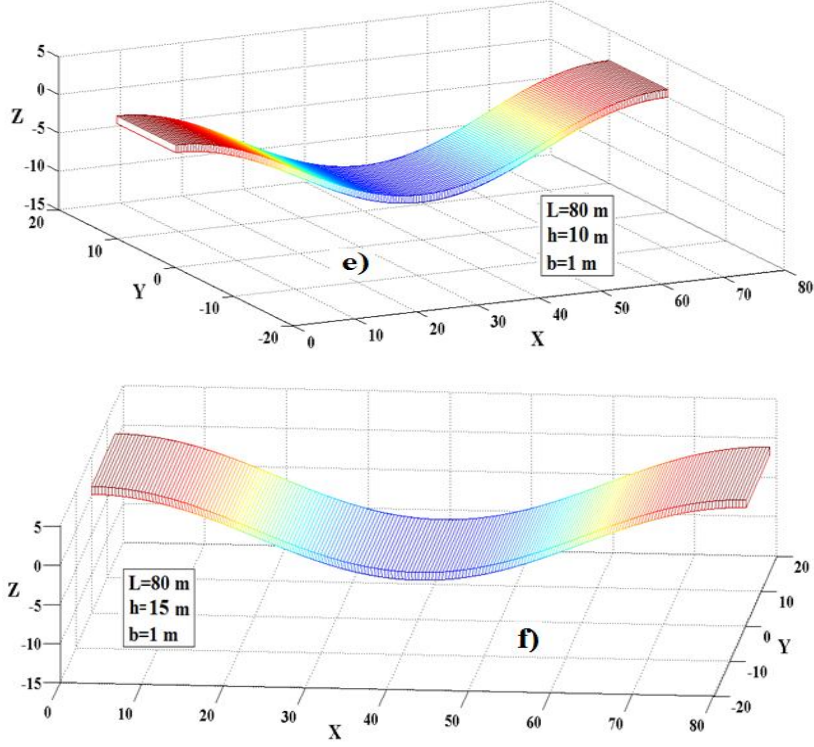
Şekil 3.22 de, üç boyutlu kirişin farklı kiriş yüksekliklerine göre burkulma sonrası konumları verilmiştir. Kiriş yüksekliği ile kiriş genişliği değerlerinin aynı olması durumunda kirişin kritik burkulma doğrultusu her iki doğrultuda (Y ve Z doğrultuları) olabilmektedir. Bu durum Şekil 3.22a ve Şekil 3.22b de görülmektedir. Kiriş yüksekliğinin artması durumunda, kirişin kritik burkulma doğrultusu değişmekte olup en küçük eylemsizlik momentinin olduğu eksen etrafında burkulma ortaya çıkmaktadır. Bu durumda, kiriş yüksekliği  $h > 1$  m olması halinde, kiriş en küçük eylemsizlik momentinin olduğu Y eksen etrafında burkulur. Bu durum, Şekil 3.22 de gösterilmiştir. Şekil 3.18 de görülmektedir ki, iki boyutlu sürekli ortam modeli ile Timoshenko kiriş teorisinde türetilen formüller düzlem problem için olduğundan burkulma sadece Z eksen etrafında olmaktadır. Yani kiriş yüksekliğinin artması ile birlikte, burkulmanın Y eksen etrafında olması gerekirken sadece Z eksen etrafında olmaktadır. Böylesi bir durum ise ancak kirişin Y doğrultusunda tutulmuş olması ile mümkündür. Kiriş Y doğrultusunda tutulu değilse gerçekçi sonuçlar almak için kirişlerin üç boyutlu uzayda modellenmesi gerekmektedir. Şekil 3.22 de görülmektedir ki, kiriş yüksekliği  $h$  nın artması ile birlikte kirişin Z doğrultusundaki yer değiştirmelerinde bir değişiklik olmamaktadır. Bunun nedeni Y eksen etrafındaki hem atalet momentinin hem de sıcaklık nedeniyle ortaya çıkan yükün  $h$  nın artımı ile doğru orantılı olarak artmasıdır. Bu durumda  $h$  nın farklı değerleri için aynı sıcaklık değerlerindeki yer değiştirme formları da aynı olmaktadır.



Şekil 3.22  $L=80$  m,  $b=1$  m,  $n=0$  ve  $\Delta T = 4000$  °C olması durumunda üç boyutlu sürekli ortam modeline göre kirişin burkulma sonrası konumları. a)  $h=1$  m.

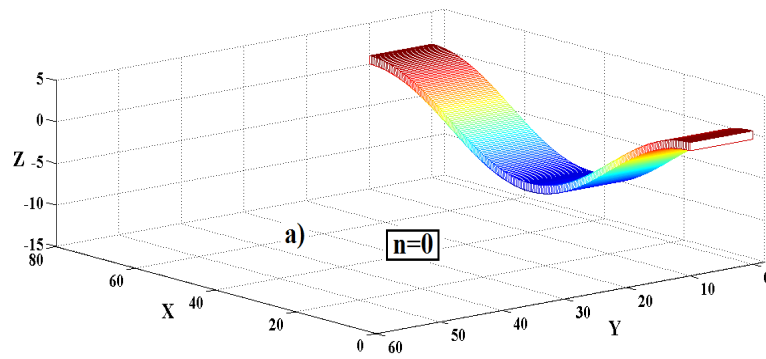


Şekil 3.22  $L=80$  m,  $b=1$  m,  $n=0$  ve  $\Delta T = 4000$  °C olması durumunda üç boyutlu sürekli ortam modeline göre kirişin burkulma sonrası konumları. b)  $h=1$  m, c)  $h=2$  m, d)  $h=4$  m.

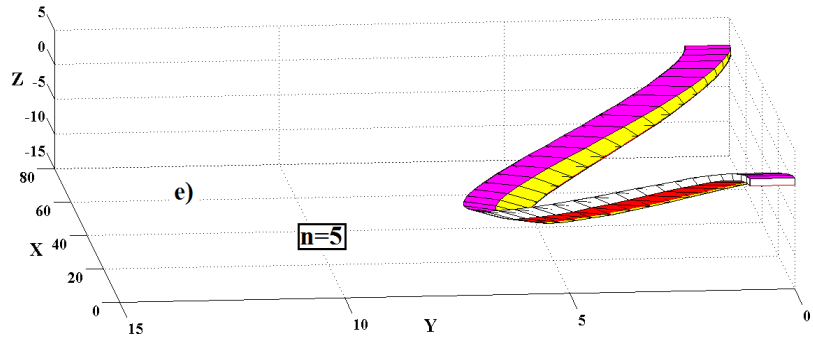
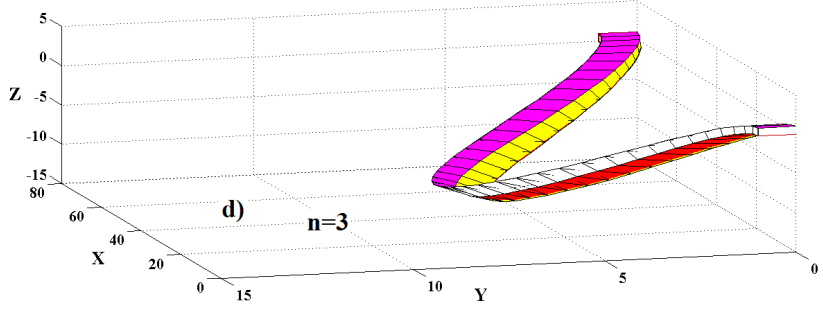
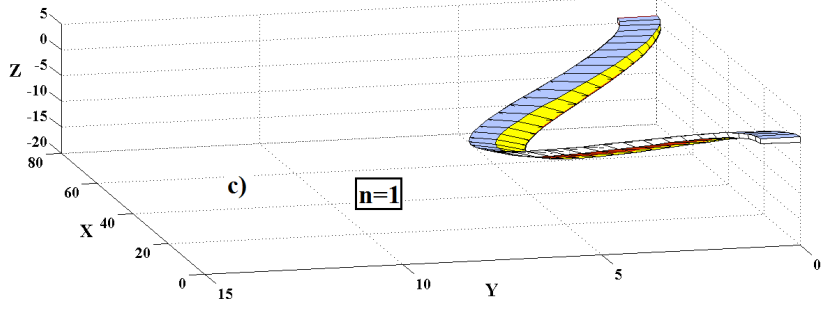
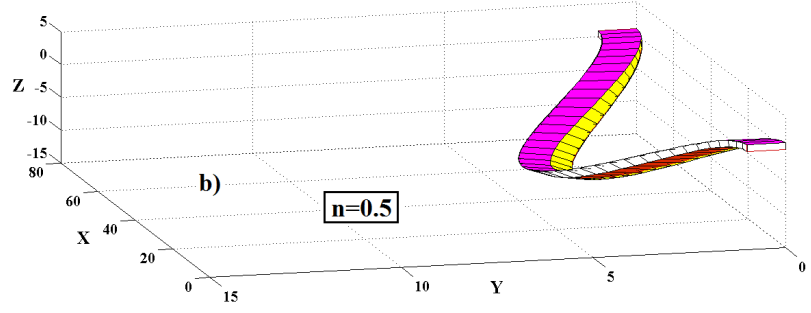


Şekil 3.22  $L=80$  m,  $b=1$  m,  $n=0$  ve  $\Delta T = 4000$  °C olması durumunda üç boyutlu sürekli ortam modeline göre kirişin burkulma sonrası konumları. e)  $h=10$  m, f)  $h=15$  m

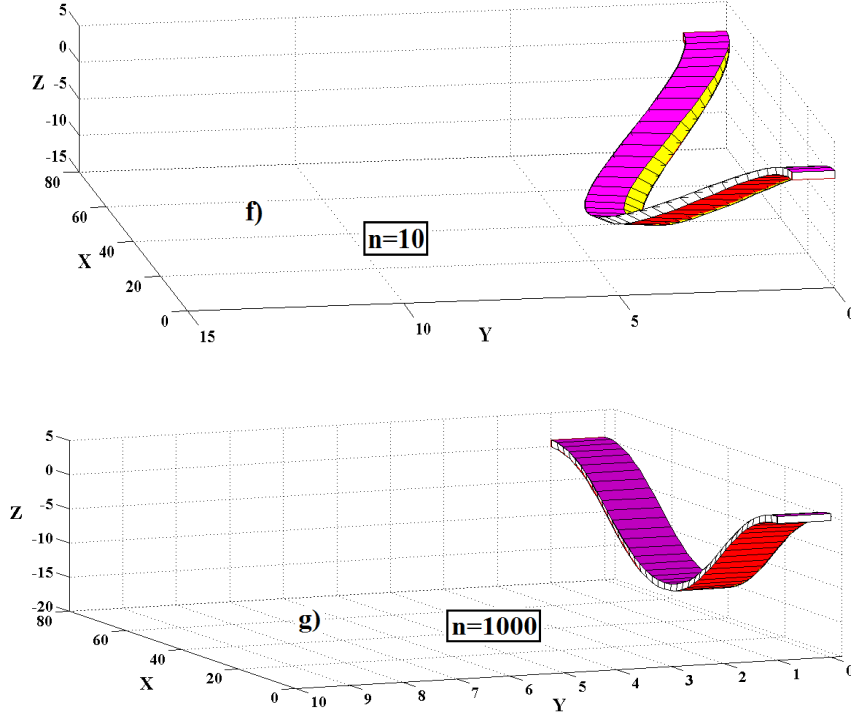
Şekil 3.23 de, üç boyutlu sürekli ortam modeli kullanılarak kirişin burkulma sonrası yer değiştirme formu farklı fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) değerleri için verilmiştir.



Şekil 3.23  $L=80$  m,  $b=1$  m,  $h=1$  m ve  $\Delta T = 4000$  °C olması durumunda üç boyutlu sürekli ortam modeline göre kirişin burkulma sonrası konumları. a)  $n=0$ .



Şekil 3.23  $L=80$  m,  $b=1$  m,  $h=1$  m ve  $\Delta T = 4000$  °C olması durumunda üç boyutlu sürekli ortam modeline göre kirişin burkulma sonrası konumları. a)  $n=0$ , b)  $n=0.5$ , c)  $n=1$ , d)  $n=3$ , e)  $n=5$ .



Şekil 3.23  $L=80$  m,  $b=1$  m,  $h=1$  m ve  $\Delta T = 4000$  °C olması durumunda üç boyutlu sürekli ortam modeline göre kirişin burkulma sonrası konumları., f)  $n=10$  g)  $n=1000$

Şekil 3.23 de görülmektedir ki, kiriş malzemesinin homojen olması durumunda, yani  $n=0$  ve  $n=1000$  de, sadece eğilme burkulması ortaya çıkmaktadır. Kiriş malzemesinin homojen olmaması durumunda, eğilme ve burulma birlikte olarak eğilme-burulma burkulması ortaya çıkmaktadır. Kiriş malzemesinin fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme olması durumunda, kirişin yüksekliği boyunca yanal doğrultuda eğilme rijitliği değişken olduğundan yanal doğrultudaki yer değiştirmeler farklı olacak ve bu farklı eğilme yer değiştirmeler de çubuk eksenini etrafında bir burulma meydana getirecektir. Böylece tüm kesitin basınç kuvveti etkisi altında olması durumunda, eğilme ile birlikte burulma da ortaya çıkacak ve burkulma, burulmalı eğilme burkulması (Burulma-Eğilme burkulması) olacaktır. Homojen malzemeden yapılmış, sadece pozitif eğilme momenti etkisi altındaki I kirişlerde üst başlık basınca, alt başlık çekmeye zorlanacaktır. Böylesi bir durumda alt başlığın dengesi her zaman kararlı olmasına karşın üst başlık basınç etkisinde olduğundan basınç gerilmelerinin belli bir değerinden sonra basınç başlığı yanal burkulacaktır ve tüm kiriş göz önüne alındığında üst başlığın yanal burkulması, alt başlığın bu burkulmayı engellemeye çalışmasıyla burulma da ortaya çıkacaktır. Böylece

burulmalı eğilme burkulması meydana gelecektir. Bununla birlikte aksel basınç yükü ile yüklü ve çift simetri aksine sahip homojen malzemeli kesitlerde burulmalı eğilme burkulması beklenmez. Buna karşın fonksiyonel derecelendirilmiş malzemenin yapılmış kirişlerde geometrik olarak çift simetri akseni olsa bile basınç yükü altında burulmalı eğilme burkulması gözlenmektedir. Ayrıca şunu da akılda tutmak gerekir ki, fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme durumunda, sıcaklık nedeniyle ortaya çıkan basınç yükü de sadece geometrik açıdan bakılsa bile aksel olmaktan çıkmaktadır. Yani fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme durumunda yükseklik boyunca farklı sıcaklık genişleme katsayıları nedeniyle üniform sıcaklık durumunda bile yükseklik boyunca farklı gerilme değerleri ortaya çıkacağından aksel yük durumu anlamını yitirecektir. Bu durumda kiriş uçlarında hem basınç kuvveti hem de eğilme momenti beraber ortaya çıkacaktır. Aslında, üç boyutlu durumda ve fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme göz önüne alındığında kesit tesirleri yerine gerilme kavramlarıyla hareket etmek daha doğru olacaktır.

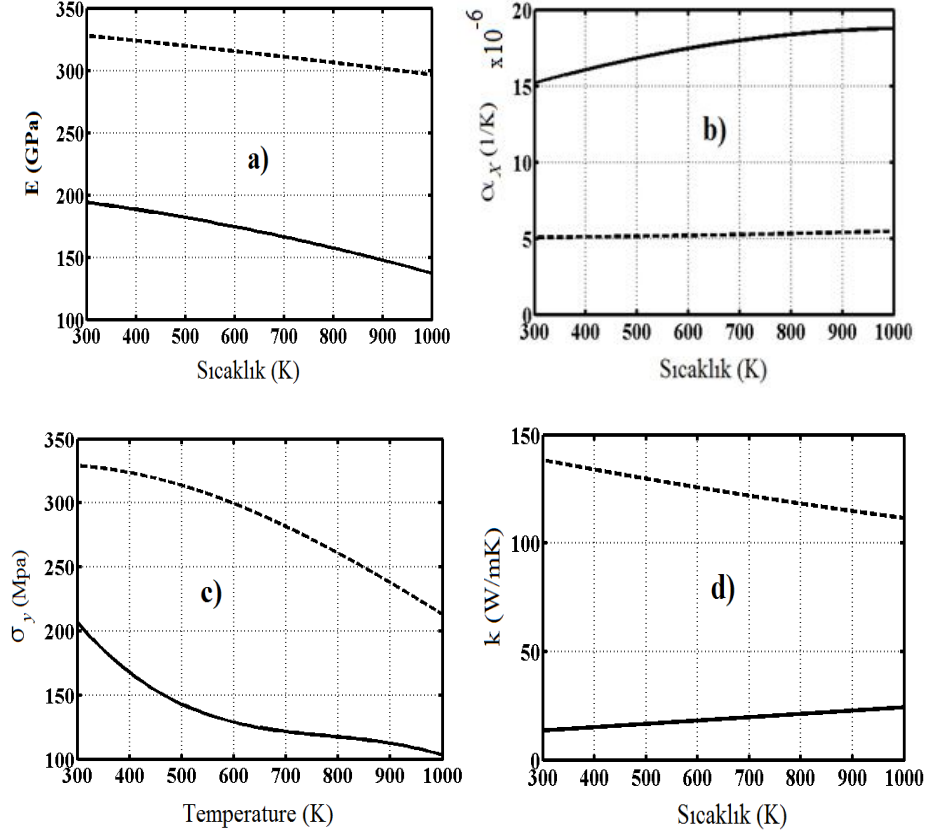
Sayısal sonuçlardan görüldüğü üzere, fonksiyonel derecelendirilmiş yapı elemanlarının mekanik davranışlarının incelenmesi ve bu elemanların tasarımında daha gerçekçi sonuçlar alınabilmesi için üç boyutlu sürekli ortam modelinin göz önüne alınması gerekmektedir.

### **3.4 Sıcaklığın Malzeme Özelliklerine Olan Etkisinin İncelenmesi**

Sıcaklığın malzeme özelliklerine etkisini araştırmak için daha önce Matlab program dilinde yazılan bilgisayar programları (2.146) eşitliği göz önüne alınarak yeniden elde edilmiştir. Sayısal hesaplarda, Kirişin alt yüzeyi saf Molibden ve üst yüzeyi Östenitik paslanmaz çelik (316) malzemelerinden oluşmaktadır. Bu değerlere ait malzeme özellikleri (2.147)-(2.154) eşitliklerinde verilmiştir. Buradaki çalışmada, malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağlı olma durumuna göre fonksiyonel derecelendirilmiş kirişlerin burkulma ve burkulma sonrası davranışları Timoshenko kiriş teorisi çerçevesinde araştırılmıştır. Malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağlı olma ve olmama durumları arasındaki fark araştırılmıştır. Malzemelerin ilk sıcaklıkları, oda sıcaklığına yakın bir değer olan 300 K alınmıştır. Bu kısımda, kiriş malzemesinin burkulma ve

burkulma sonrası davranışı elastik bölgede incelenmiştir. Sayısal işlemlerde, kırıšte oluşan gerilmeler akma gerilmesine eşit olduğu anda sayısal işlemler kesilmiştir. Bu yüzden elastik ötesi burkulma sonrası davranış incelenmemiştir.

Şekil 3.24 de, Östenitik paslanmaz çelik-316 ve saf molibdenin malzeme özellikleri ile sıcaklık artışı arasındaki ilişki verilmiştir.

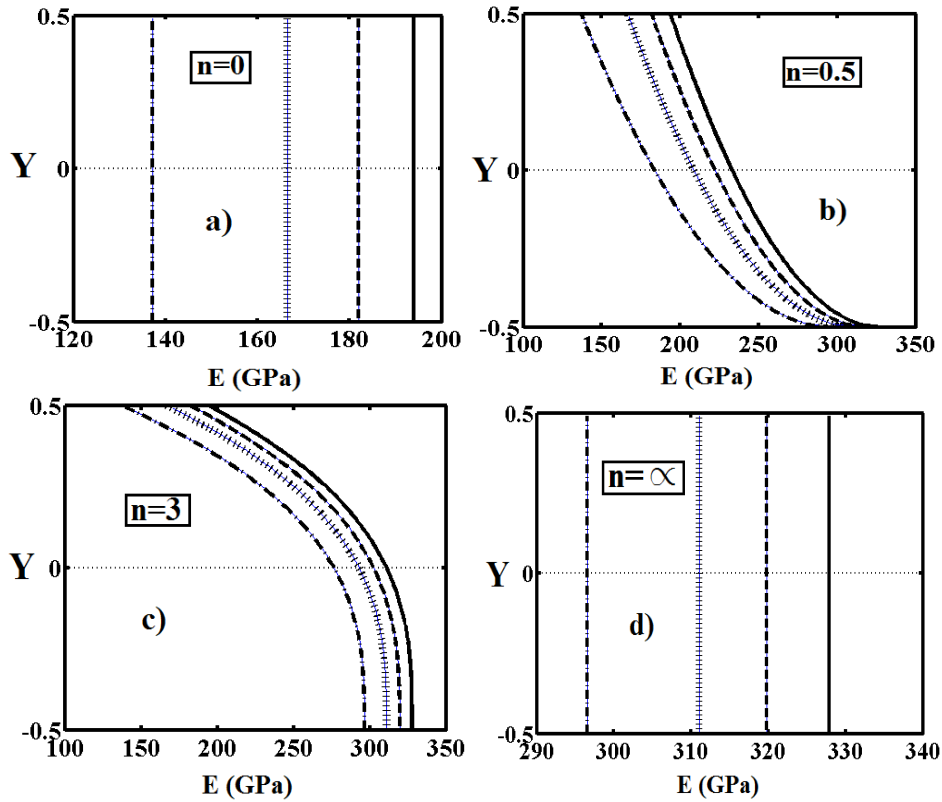


Şekil 3.24 Östenitik paslanmaz çelik-316 ve saf molibdenin malzeme özellikleri ile sıcaklık artışı arasındaki ilişki. a) Elastisite modülü, b) Sıcaklık genleşme katsayısı, c) Akma gerilmesi, d) Isı iletim katsayısı. — Östenitik Paslanmaz Çelik (316), - - - Saf Molibden.

Şekil 3.24 de görülmektedir ki, sıcaklığın artması ile birlikte malzemelerin fiziksel özellikleri önemli oranda değişmektedir. Şekil 3.24a da, sıcaklığın artması ile birlikte malzemelerin Young modülünde azalma olduğu görülmektedir. Çünkü sıcaklığın artması ile birlikte, moleküller arası mesafe artar ve moleküller arası kuvvet değeri düşer. Bunun sonucunda malzemenin mukavemeti düşmektedir. Şekil 3.24b de,

sıcaklığın artması ile birlikte sıcaklık genleşme katsayısının ciddi artımı gözlenmektedir. Şekil 3.24c de, sıcaklığın artması ile birlikte malzemelerin akma gerilmesi değerinin azaldığı görülmektedir. Özellikle, Östenitik Paslanmaz Çelik-316'in düşüşü saf molibden'e göre daha fazla olmaktadır. Yüksek sıcaklıklarda, Paslanmaz Çelik (316)'in akma gerilmesi değeri saf Molibden'e göre daha küçük olmaktadır. Şekil 3.24d de görüldüğü gibi, sıcaklığın artması ile birlikte, Östenitik Paslanmaz Çelik-316'in ısı iletim katsayısı değeri artmasına karşın saf Molibdenin ısı iletim katsayısı değeri düşmektedir.

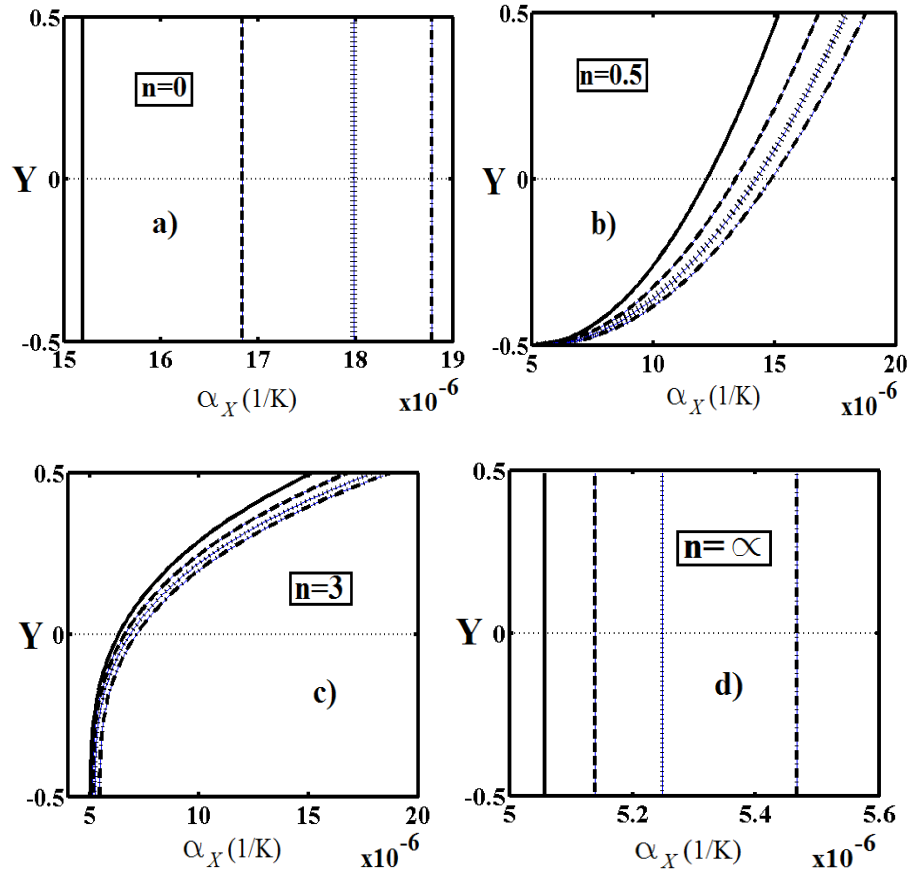
Şekil 3.25, 3.26 ve 3.27 de, yükseklik boyunca fonksiyonel derecelendirilmiş kirişin farklı sıcaklık artışı ve farklı fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme katsayısı ( $n$ ) değerlerine göre sırasıyla elastisite modülü, sıcaklık genleşme katsayısı ve akma değerleri gösterilmiştir.



Şekil 3.25 Değişik üniform sıcaklık artışı ile birlikte Elastisite modülünün kiriş yüksekliği boyunca değişimi a)  $n=0$  (Tümüyle Östenitik paslanmaz çelik-316) b)  $n=0.5$  c)  $n=3$

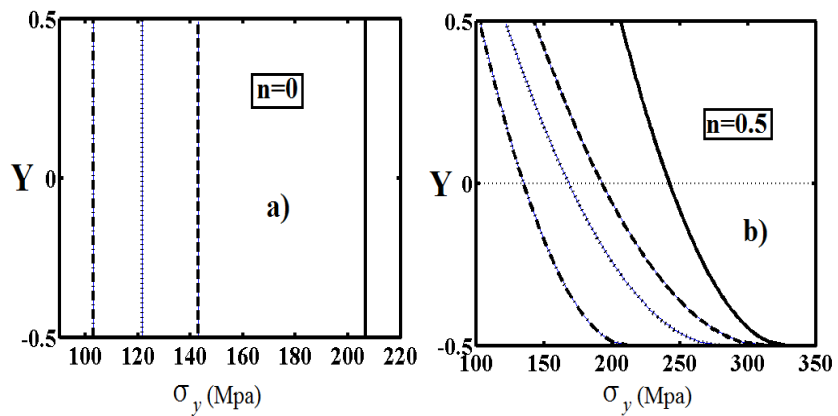
d)  $n=\infty$  (Tümüyle saf Molibden). —  $\Delta T = 0$ , - - -  $\Delta T = 200$  K, . . .  $\Delta T = 400$  K, - . - .  $\Delta T = 700$  K



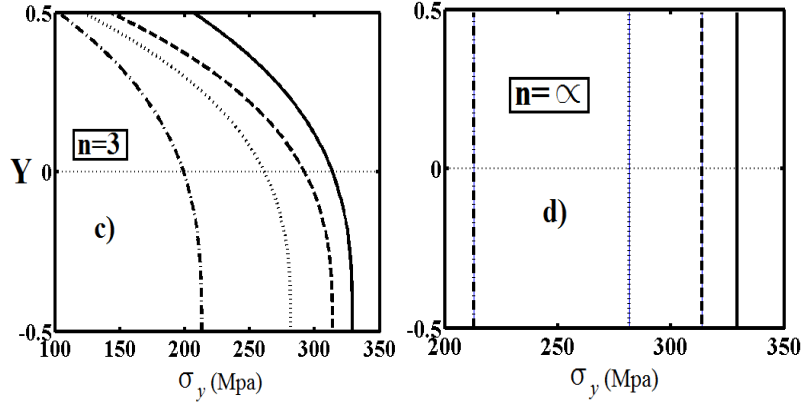


Şekil 3.26 Değişik üniform sıcaklık artışı ile birlikte sıcaklık genişleme katsayısının kiriş yüksekliği boyunca değişimi a)  $n=0$  (Tümüyle Östenitik paslanmaz çelik (316)), b)  $n=0.5$

c)  $n=3$  d)  $n=\infty$  (Tümüyle saf Molibden). —  $\Delta T = 0$ , - - -  $\Delta T = 200$  K,   
 ·····  $\Delta T = 400$  K, - · - ·  $\Delta T = 700$  K



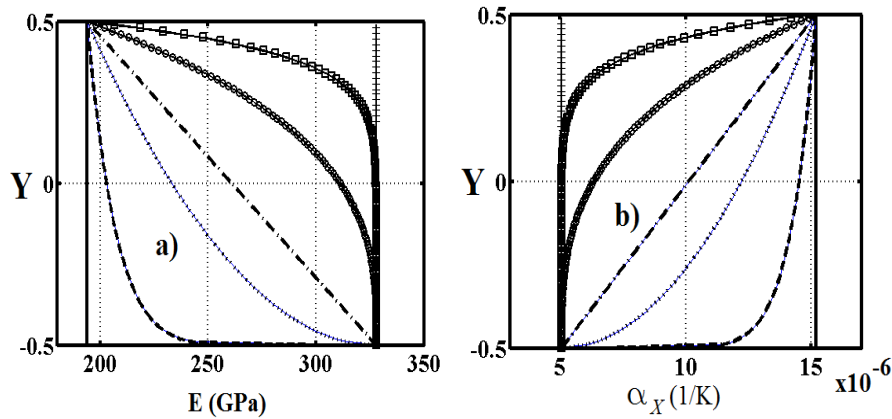
Şekil 3.27 Değişik üniform sıcaklık artışı ile birlikte akma gerilmesinin kiriş yüksekliği boyunca değişimi a)  $n=0$  (Tümüyle Östenitik paslanmaz çelik (316)). a)  $n=0$ , b)  $n=0.5$



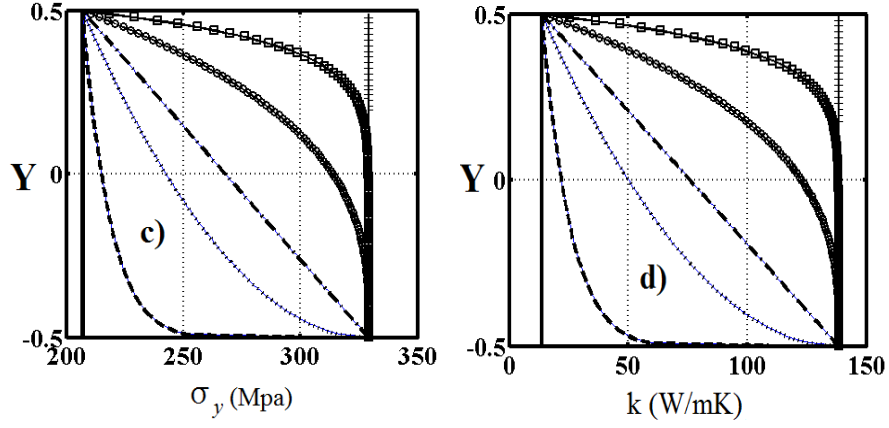
Şekil 3.27 Değişik üniform sıcaklık artışı ile birlikte akma gerilmesinin kiriş yüksekliği boyunca değişimi c)  $n=3$ , d)  $n=\infty$  (Tümüyle saf Molibden). —  $\Delta T = 0$ , - - -  $\Delta T = 200$  K, ———  $\Delta T = 200$  K, + + + + +  $\Delta T = 400$  K, - . - . -  $\Delta T = 700$  K.

Şekil 3.25, 3.26 ve 3.27 de görüldüğü gibi, sıcaklığın artması ile birlikte malzemelerin fiziksel özellikleri önemli oranda değişmektedir. Ayrıca fonksiyonel derecelendirme katsayısının malzeme özelliklerine ciddi bir etkisi olduğu görülmektedir.

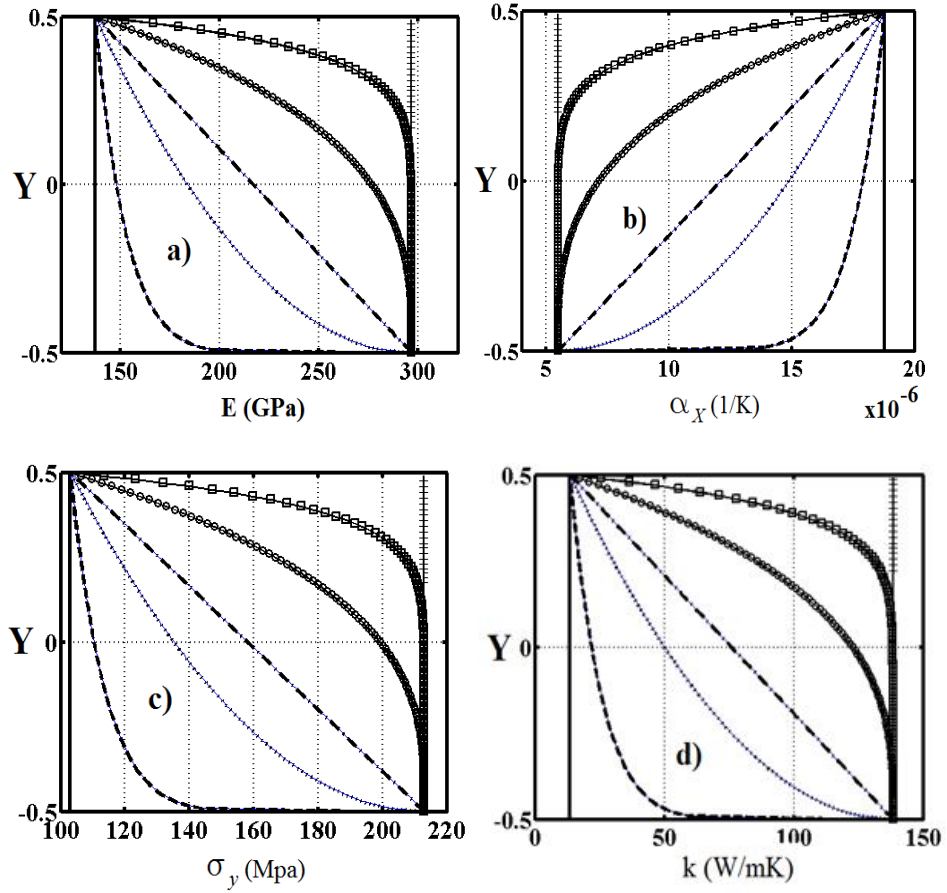
Şekil 3.28 ve Şekil 3.29 da sırasıyla malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağlı olmaması ve olması durumlarında, malzeme fiziksel özelliklerinin (Elastisite modülü, sıcaklık genişleme katsayısı, akma gerilmesi ve ısı iletim katsayısı) kiriş yüksekliği boyunca, farklı fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) değerlerine göre değişimi gösterilmiştir ( $\Delta T = 700$  K için).



Şekil 3.28 Malzeme fiziksel özelliklerinin sıcaklığa bağlı olmaması durumunda, kiriş yüksekliği boyunca, farklı fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) değerlerine göre değişimler ( $\Delta T = 700$  K için). a) Elastisite modülü, b) sıcaklık genişleme katsayısı. —  $n=0$ , - - -  $n=0.1$ , ———  $n=0.5$ , - . - . -  $n=1$ , + + + + +  $n=3$ , + + + + +  $n=10$ , + + + + +  $n=\infty$ .



Şekil 3.28 Malzeme fiziksel özelliklerinin sıcaklığa bağlı olmaması durumunda, kiriş yüksekliği boyunca, farklı fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) değerlerine göre değişimler ( $\Delta T = 700$  K için ). c) Akma gerilmesi, d) ısı iletim katsayısı. —  $n=0$ , - - -  $n=0.1$ , .....  $n=0.5$ , - . - .  $n=1$ , .....  $n=3$ , .....  $n=10$ , .....  $n=\infty$ .

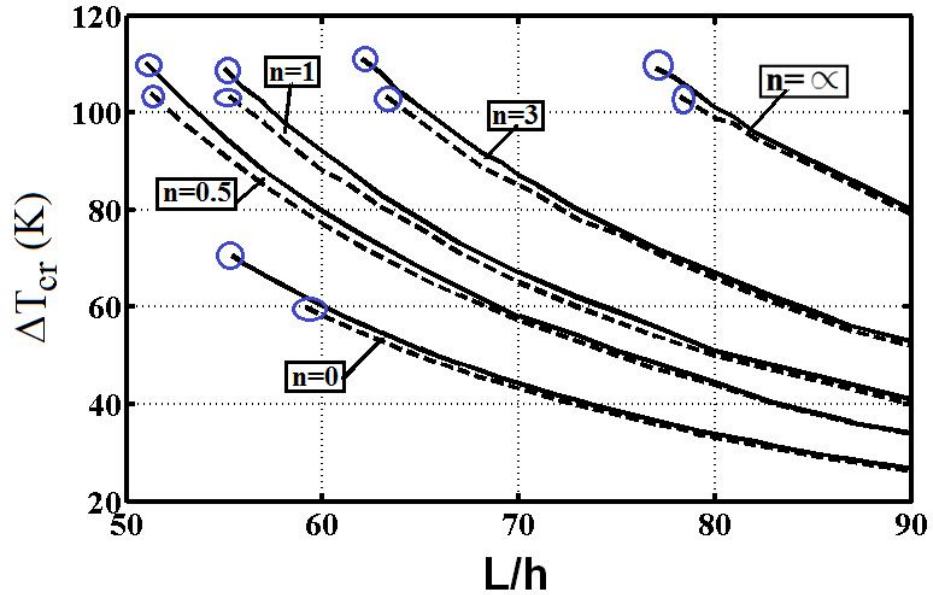


Şekil 3.29 Malzeme fiziksel özelliklerinin sıcaklığa bağlı olması durumunda, kiriş yüksekliği boyunca, farklı fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ) değerlerine göre değişimler ( $\Delta T = 700$  K için ). a) Elastisite modülü, b) sıcaklık genişleme katsayısı, c) Akma gerilmesi, d) ısı iletim katsayısı. —  $n=0$ , - - -  $n=0.1$ , .....  $n=0.5$ ,

- . - .  $n=1$ , .....  $n=3$ , .....  $n=10$ , .....  $n=\infty$ .

Şekil 3.28 ve 3.29 da görülmektedir ki, fonksiyonel derecelendirme katsayısının seçimi, malzemenin yüksek sıcaklık değerlerine karşı sergilediği davranışında önemli rol oynamaktadır.

Şekil 3.30 da, malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağlı olması ve olmaması durumlarında, kirişin kritik burkulma sıcaklığı ile kirişin uzunluk/yükseklik oranı arasındaki ilişki, farklı fonksiyonel derecelendirilme katsayılarına göre verilmiştir. Sayısal işlemlerde, sıcaklığın malzemenin fiziksel özelliklerini değiştirmedığı durum model 1, değiştirdiği durum ise model 2 olarak isimlendirilmiştir.

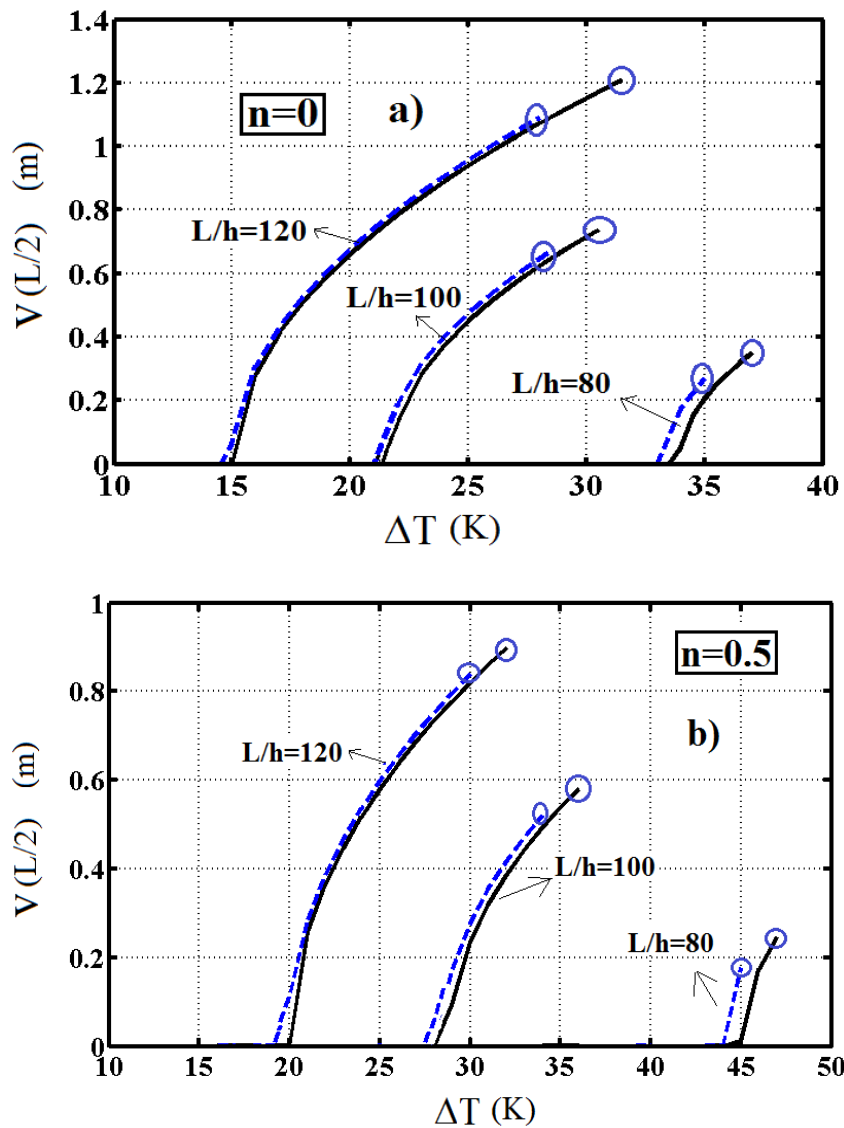


Şekil 3.30 Farklı fonksiyonel derecelendirilme katsayılarına göre malzeme fiziksel özelliklerinin sıcaklığa bağlı olması ve olmaması durumlarında, kirişin kritik burkulma sıcaklığı ile kirişin  $L/h$  oranı arasındaki ilişki. — Model 1, - - - Model 2.

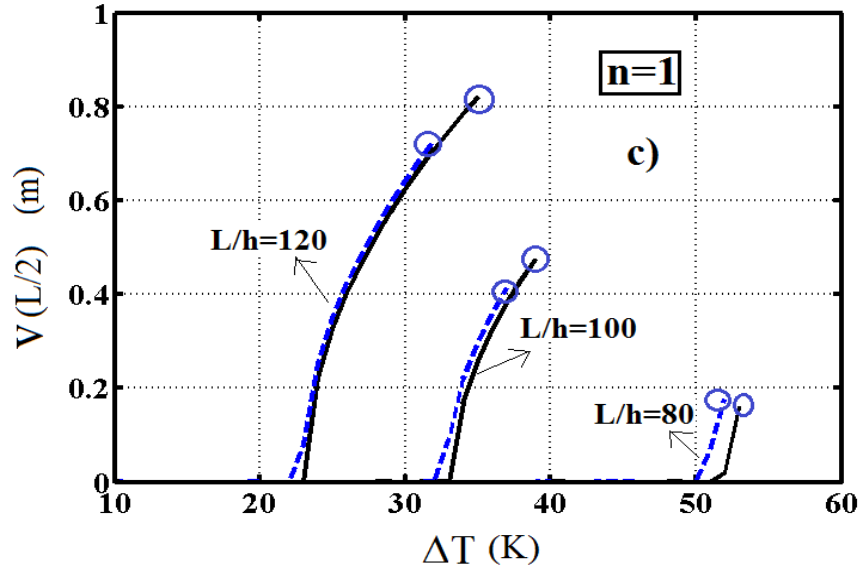
Şekil 3.30 da görülmektedir ki,  $L/h$  oranı arttıkça model 1 ile model 2 arasındaki fark azalmaktadır. Şekil 3.30 da görüldüğü gibi,  $L/h$  oranının küçük olması ile iki model arasındaki farkı ciddi bir biçimde ortaya çıkarmaktadır. Şekil 3.30 da, gösterilen eğrilerde bulunan çember içindeki nokta, kiriş malzemesinin ilk akmaya başladığı sıcaklığı göstermektedir. Yani elastik burkulma limitini temsil etmektedir. Şekil 3.30 da görülmektedir ki, model 1 ile model 2 arasındaki fark, elastik burkulma limit üzerinde

belirgin bir rol oynamaktadır. Ayrıca, fonksiyonel derecelendirilmiş katsayısı  $n$  değeri artıkça, her iki modelin elastik burkulma limit sıcaklık değerleri birbirine yaklaşmaktadır.

Şekil 3.31 de, farklı fonksiyonel derecelendirme katsayısı  $n$  değerleri için kirişin orta noktasının düşey yer değiştirmesi  $V(L/2)$  ile sıcaklık artışı  $\Delta T$  arasındaki ilişki değişik  $L/h$  oranlarına için gösterilmiştir. Burada, sıcaklığın malzeme özelliklerini değiştirdiği ve değiştirmedeği durumlar arasındaki farklar incelenmiştir.



Şekil 3.31 Malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağlı olması ve olmaması durumlarında, kirişin orta noktasının düşey yer değiştirmesi  $V(L/2)$  ile sıcaklık artışı  $\Delta T$  arasındaki ilişkisi. a)  $n=0$ , b)  $n=0.5$ . — Model 1, - - - Model 2.



Şekil 3.31 Malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağlı olması ve olmaması durumlarında, kirişin orta noktasının düşey yer değiştirmesi  $V(L/2)$  ile sıcaklık artışı  $\Delta T$  arasındaki ilişkisi. c)  $n=1$ . — Model 1, - - - Model 2.

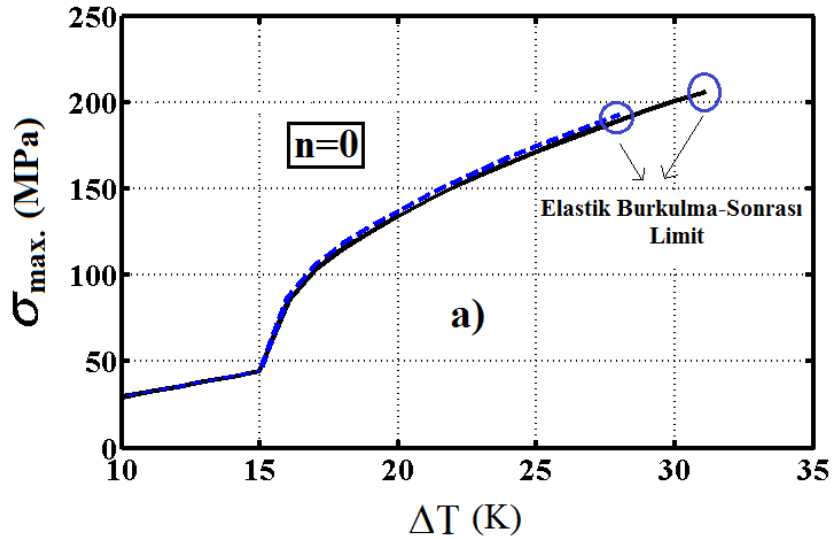
Şekil 3.31 de görüldüğü gibi, sıcaklığın artması ile birlikte, model 1 ile model 2 arasındaki farklar çok önemli oranda artmaktadır. Kritik burkulma sıcaklığı gerçek durum olan model 2 de daha düşük çıkmaktadır. Sıcaklığın çok yüksek olması ile birlikte modeller arasındaki fark ihmal edilemeyecek mertebelerde olmaktadır. Buradan görüldüğü üzere, sıcaklığın malzeme özelliklerini değiştirmedeği varsayılarak (Model 1) bir yapı elemanının mekanik davranışının incelenmesi ve tasarımı gerçekçi olmayacaktır.

Şekil 3.31 de, gösterilen eğrilerde bulunan çember içindeki nokta, kiriş malzemesinin ilk akmaya başladığı sıcaklığı göstermektedir. Yükseklik boyunca kirişin malzemesi değişken olduğundan, akma tüm kalınlık boyunca aynı anda başlamayacaktır. Şekil 3.27 de görüldüğü gibi, ele alınan problemde kiriş malzemesinin en çok zorlandığı ve akma gerilmesinin en düşük kısımları kirişin en üst bölgeleridir. Sıcaklığa bağlı olan durumda, kiriş malzemesi daha erken akacaktır. Ayrıca Şekil 3.31 de görüldüğü gibi,  $L/h$  oranının azalması ile birlikte kritik burkulma sıcaklıkları arasındaki fark artmaktadır. Şekil 3.29 da görüldüğü üzere, yapı elemanlarının model 1 e göre yüksek sıcaklıkta tasarımı yapmak önemli bir tasarım hatası ortaya çıkmaktadır. Bu yüzden yapı elemanlarının

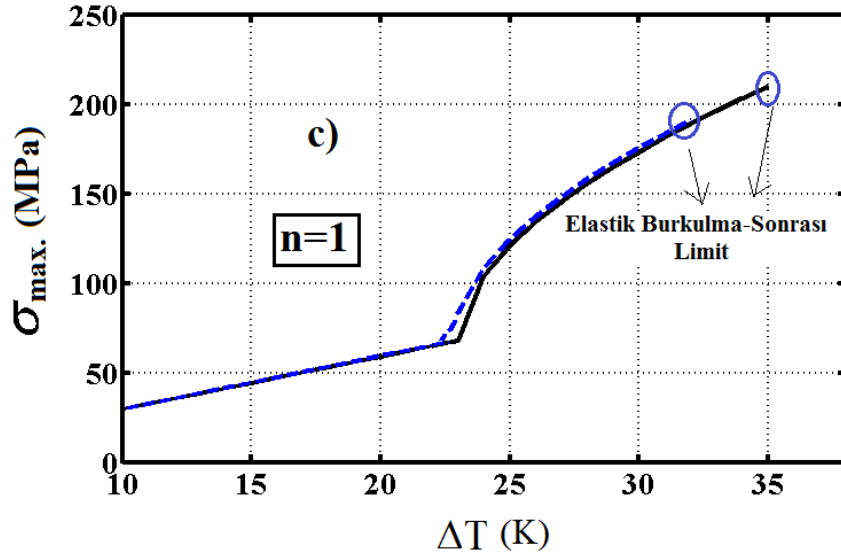
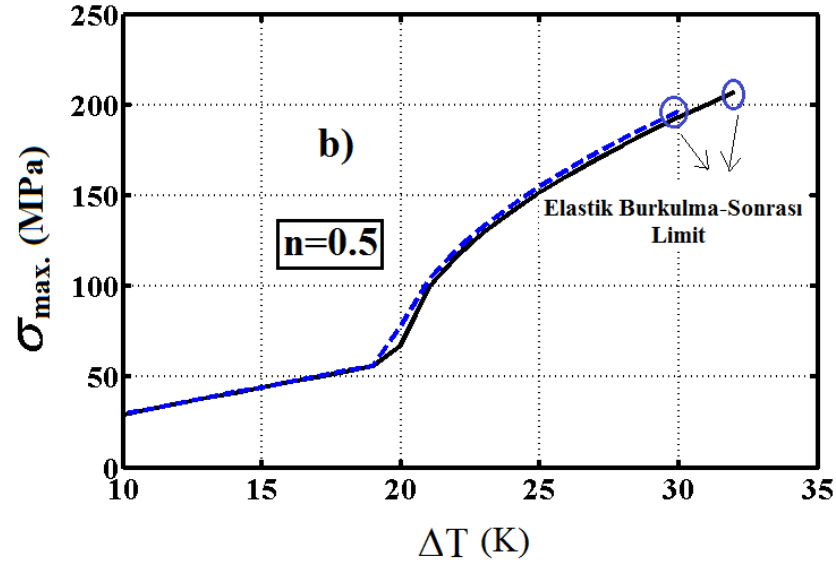
sıcaklık etkisinde daha gerçekçi davranışlarını görebilmek ve güvenli tasarımını yapabilmek için mutlaka sıcaklığın malzeme fiziksel özellikleri üzerindeki olan etkisi göz önüne alınmalıdır.

Ayrıca şekil 3.31 de görülmektedir ki, fonksiyonel derecelendirme katsayısı  $n$  değeri arttıkça, kritik burkulma sıcaklığı artmakta ve yer değiştirmeler azalmaktadır. Çünkü fonksiyonel derecelendirme katsayısı  $n$  arttıkça kırış malzemesi saf Molibdene yaklaşmakta olup, saf Molibdenin malzeme özellikleri Östenitik paslanmaz çeliğe göre yüksek değerlerde olduğundan, kırışın dayanımı artmaktadır. Buradan da görüldüğü gibi, fonksiyonel derecelendirme katsayısının seçiminin, malzemenin mekanik davranışı üzerinde çok önemli bir etkisi vardır. Bu yüzden fonksiyonel derecelendirilmiş bir yapı elemanının tasarımında, en uygun fonksiyonel derecelendirme katsayısının seçimi gereklidir.

Şekil 3.32 de, farklı fonksiyonel derecelendirme katsayısı  $n$  değerleri için en büyük Cauchy normal gerilme ile sıcaklık artışı  $\Delta T$  arasındaki ilişki gösterilmiştir. Burada, sıcaklığın malzeme özelliklerini değiştirdiği ve değiştirmedeği durumlar arasındaki farklar incelenmiştir.



Şekil 3.32 Malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağlı olması ve olmaması durumlarında en büyük Cauchy normal gerilmesi ile sıcaklık artışı  $\Delta T$  arasındaki ilişki a)  $n=0$ . — Model 1, - - - - Model 2.



Şekil 3.32 Malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağlı olması ve olmaması durumlarında en büyük Cauchy normal gerilmesi ile sıcaklık artışı  $\Delta T$  arasındaki ilişki a)  $n=0$ , b)  $n=0.5$ , c)  $n=1$ . — Model 1, - - - - Model 2.

Şekil 3.32 de görülmektedir ki, burkulma sıcaklığından önce gerilmeler yaklaşık doğrusal olarak artarken, burkulma oluştuğundan hemen sonra aniden artmaktadır. Ayrıca şekil 3.32 de görülmektedir ki, model 1 ile model 2 arasındaki fark, elastik burkulma limiti üzerinde belirgin olmaktadır. Sıcaklığa bağlı olma durumunda kırılgan malzemesi, sıcaklığa bağlı olmayan duruma göre daha erken olacaktır. Bu yüzden, yapısal elemanların güvenli tasarımı için sıcaklık bağımlı fiziksel özelliklerin göz önüne alınması zorunludur. Aksi halde çok önemli hatalar kaçınılmaz olacaktır.



### SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada fonksiyonel olarak derecelendirilmiş kirişlerin sıcaklık etkisi altında burkulma sonrası davranışları incelenmiştir. Problemin çözümünde, kirişler Timoshenko kiriş teorisi, iki boyutlu sürekli ortam modeli ve üç boyutlu sürekli ortam modeli çerçevesinde ele alınmıştır. Her üç durumda da toplam Lagrangian formülasyonu ile birlikte sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır. Kirişin malzeme özellikleri, kiriş yüksekliği boyunca fonksiyonlar şeklinde belirlenmiştir. Yer değiştirmeler ve dönmeler üzerinde herhangi bir sınırlandırma yapılmamış olup burkulma ve burkulma sonrası davranış tam olarak incelenmiştir. Sıcaklığın malzeme özelliklerine olan etkisi ayrıntılı olarak incelenmiştir. Sayısal hesaplarda, MATLAB programı kullanılmıştır. Elde edilen formülasyonların ve Matlab program dilinde yazılan bilgisayar programının doğruluğunu test etmek için, daha önceden yayınlanmış olup literatürde mevcut çalışmaların sonuçlarıyla karşılaştırmalar yapılmıştır. Sıcaklık artışı ve farklı malzeme dağılımlarına göre, kirişlerin yer değiştirmesi, burkulma sonrası konumları, kritik burkulma yükleri ve kiriş yüksekliği boyunca gerilme dağılımı detaylı olarak incelenmiştir. Timoshenko kiriş teorisi, iki boyutlu sürekli ortam modeli ile üç boyutlu sürekli ortam modelleri arasındaki farklar burkulma sonrası durum için araştırılmıştır. Bunlara ilave olarak, sıcaklığın malzemenin fiziksel özelliklerine etkisi ayrıntılı olarak araştırılmıştır. Bu çalışmada elde edilen belli başlı sonuçlar aşağıda kısaca özetlenmiştir:

- Fonksiyonel derecelendirme katsayısı ( $n$ ), yer değiştirme, uzama, mesnet tepkisi ve gerilmelerin kesit yüksekliği boyunca dağılımı üzerinde önemli bir rol oynamaktadır.

- Sayısal sonuçlardan görüldüğü üzere, iki boyutlu sürekli ortam modeli sonuçları Timoshenko kiriş teorisi sonuçlarına göre daha büyük olmaktadır.  $L/h$  oranı küçüldükçe Timoshenko kiriş teorisi ile iki boyutlu sürekli ortam modeli arasındaki fark artmaktadır. Sonuçlardan görülür ki,  $L/h$  oranı düşük olan kirişlerde daha gerçekçi sonuçlar alabilmek için iki boyutlu sürekli ortam modelinin kullanılması gereklidir.

- Sonuçlardan görülmektedir ki, kiriş malzemesinin homojen olması durumunda, yani  $n=0$  ve  $n=\infty$  da, sadece eğilme burkulması ortaya çıkmaktadır. Kiriş malzemesinin homojen olmaması durumunda, eğilme ve burulma birlikte olarak eğilme-burulma burkulması ortaya çıkmaktadır. Kiriş malzemesinin fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme olması durumunda, kirişin yüksekliği boyunca yanal doğrultuda eğilme rijitliği değişken olduğundan yanal doğrultudaki yer değiştirmeler farklı olacak ve bu farklı eğilme yer değiştirmeleri de çubuk eksenini etrafında bir burulma meydana getirecektir. Böylece tüm kesitin basınç kuvveti etkisi altında olması durumunda, eğilme ile birlikte burulma da ortaya çıkacak ve burulma, burulmalı eğilme burkulması (Burulma-Eğilme burkulması) olacaktır. Homojen malzemedeki yapılmış, sadece pozitif eğilme momenti etkisi altındaki I kirişlerde üst başlık basınca, alt başlık çekmeye zorlanacaktır. Böylesi bir durumda alt başlığın dengesi her zaman kararlı olmasına karşın üst başlık basınç etkisinde olduğundan basınç gerilmelerinin belli bir değerinden sonra basınç başlığı yanal burkulacaktır ve tüm kiriş göz önüne alındığında üst başlığın yanal burkulması, alt başlığın bu burkulmayı engellemeye çalışmasıyla burulma da ortaya çıkacaktır. Böylece burulmalı eğilme burkulması meydana gelecektir. Bununla birlikte aksenal basınç yükü ile yüklü ve çift simetri eksenine sahip kesitlerde burulmalı eğilme burkulması beklenmez. Buna karşın fonksiyonel derecelendirilmiş malzemedeki yapılmış kirişlerde geometrik olarak çift simetri eksenine olsa bile basınç yükü altında burulmalı eğilme burkulması gözlenmektedir. Ayrıca şunu da akılda tutmak gerekir ki, fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme durumunda, sıcaklık nedeniyle ortaya çıkan basınç yükü de sadece geometrik açıdan bakılsa bile aksenal olmaktan çıkmaktadır. Yani fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme durumunda yükseklik boyunca farklı sıcaklık genişleme katsayıları nedeniyle üniform sıcaklık durumunda bile yükseklik boyunca farklı gerilme

değerleri ortaya çıkacağından aksnel yük durumu anlamını yitirecektir. Bu durumda kiriş uçlarında hem basınç kuvveti hem de eğilme momenti beraber ortaya çıkacaktır. Aslında, üç boyutlu durumda ve fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme göz önüne alındığında kesit tesirleri yerine gerilme kavramlarıyla hareket etmek daha doğru olacaktır.

- Sayısal sonuçlardan görüldüğü üzere, fonksiyonel derecelendirilmiş yapı elemanlarının mekanik davranışlarının incelenmesi ve bu elemanların tasarımında daha gerçekçi sonuçlar alınabilmesi için üç boyutlu sürekli ortam modelinin göz önüne alınması gerekmektedir.

- $L/h$  oranı arttıkça, malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağlı olması ve olmaması durumları arasındaki fark azalmaktadır.  $L/h$  oranının büyük değerlerinde, kritik burkulma sıcaklığı yaklaşık aynı değerde olmaktadır.  $L/h$  oranının düşük olması ile malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağlı olması ve olmaması durumları arasındaki fark çok önemli oranda artmaktadır. Özellikle  $L/h$  oranı düşük olan kirişlerin sıcaklık etkisi altındaki davranışlarının incelenmesinde, mutlaka malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağlı olması durumu göz önüne alınmalıdır.

- Yapı elemanlarının sıcaklık etkisinde daha gerçekçi davranışlarını görebilmek ve daha güvenli tasarımlarını yapabilmek için mutlaka sıcaklığın malzeme özelliklerine olan etkisi göz önüne alınmalıdır. Aksi takdirde, çok önemli hatalar yapılmış olur.

- Fonksiyonel derecelendirme katsayısının seçiminin, malzemenin mekanik davranışı üzerinde çok önemli bir etkisi vardır. Bu yüzden fonksiyonel derecelendirilmiş bir yapı elemanının tasarımında, en uygun fonksiyonel derecelendirme katsayısının seçimi gereklidir.

## KAYNAKLAR

---

- [1] Khdeir, A.A., (2001). "Thermal buckling of cross-ply laminated composite beams", *Acta Mechanica*, 149:201-213.
- [2] Sankar, B.V. ve Tzeng, J.T., (2002). "Thermal stresses in functionally graded beams", *AIAA Journal*, 40(6):1228-1232.
- [3] Rastgo, A., Shafie, H. ve Allahverdizadeh, A., (2005). "Instability of curved beams made of functionally graded material under thermal loading", *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 2:117–128.
- [4] Ching, H.K. ve Yen S.C., (2005). "Meshless local Petrov-Galerkin analysis for 2D functionally graded elastic solids under mechanical and thermal loads", *Composites: Part B*, 36: 223–240.
- [5] Librescu, L., Oha, S.Y. ve Songb, O., (2005). "Thin-Walled Beams Made of Functionally Graded Materials and Operating in a High Temperature Environment: Vibration and Stability", *Journal of Thermal Stresses*, 28: 649-712.
- [6] Ching, H.K. ve Yen, S.C., (2005). "Transient thermoelastic deformations of 2-D functionally graded beams under nonuniformly convective heat supply", *Composite Structures*, 73: 381-393.
- [7] Na, K.S. ve Kim, J.H., (2005). "Three-dimensional thermomechanical buckling of functionally graded materials". *AIAA Journal*, 43(7):1605-1612.
- [8] Li, S.R., Zhang, J.H. ve Zhao, Y.G., (2006). "Thermal Post-Buckling of Functionally Graded Material Timoshenko Beams", *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 26(6): 803-810.
- [9] Na, K.S. ve Kim, J.H., (2006). "Thermal postbuckling investigations of functionally graded plates using 3-D finite element method", *Finite Elements in Analysis and Design*, 42(8-9): 749-756.
- [10] Lu, C., Chen, W. ve Zhong, Z., (2006). "Two-dimensional thermoelasticity solution for functionally graded thick beams", *Science in China Series G: Physics, Mechanics & Astronomy*, 49(4): 451-460.
- [11] Mohammadia, M. ve Drydena, J.R., (2008). "Thermal Stress in a Nonhomogeneous Curved Beam", *Journal of Thermal Stresses*, 31(7): 587-598.

- [12] Carpinteri, A. ve Paggi, M., (2008). "Thermo-elastic mismatch in nonhomogeneous beams", *Journal of Engineering Mathematics*, 61(2-4): 371-384.
- [13] Rahimi, G.H. ve Davoodinik, A.R., (2008). "Thermal Behavior Analysis of the functionally graded Timoshenko's beam", *IUST International Journal of Engineering Science*, 19(5-1): 105-113.
- [14] Kapuria, S., Bhattacharyya, M. ve Kumar, A.N., (2008). "Theoretical Modeling and Experimental Validation of Thermal Response of Metal-Ceramic Functionally Graded Beams", *Journal of Thermal Stresses*, 31: 759-787.
- [15] Song, X. ve Li, S., (2008). "Nonlinear stability of fixed-fixed FGM arches subjected to mechanical and thermal loads", *Advanced Materials Research*, 33-37: 699-706.
- [16] Xiang, H.J. ve Yang, J., (2008). "Free and forced vibration of a laminated FGM Timoshenko beam of variable thickness under heat conduction", *Composites: Part B*, 39: 292-303.
- [17] Li, S.R., Su, H.D. ve Cheng, C.J., (2009). "Free vibration of functionally graded material beams with surface-bonded piezoelectric layers in thermal environment", *Appl. Math. Mech. -Engl. Ed.*, 30(8): 969-982.
- [18] Ke, L.L, Yang. J. ve Kitipornchai, S., (2009), "Postbuckling analysis of edge cracked functionally graded Timoshenko beams under end shortening", *Composite Structures*, 90(2): 152-160.
- [19] Pradhan, S.C. ve Murmu, T., (2009). "Thermo-mechanical vibration of FGM sandwich beam under variable elastic foundations using differential quadrature method", *Journal of Sound and Vibration*, 321: 342-362.
- [20] Lim, C.W., Yang, Q. ve Lu, C.F., (2009). "Two-dimensional elasticity solutions for temperature dependent in-plane vibration of FGM circular arches", *Composite Structures*, 90: 323-329.
- [21] Malekzadeh, P., Haghghi, M.R.G. ve Atashi, M.M., (2010). "Out-of-plane free vibration of functionally graded circular curved beams in thermal environment", *Composite Structures*, 92(2): 541-552.
- [22] Kiani, Y. ve Eslami, M.R., "Thermal buckling analysis of functionally graded material beams", *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 6(3): 229-238.
- [23] Alibeigloo, A., (2010). "Thermoelasticity analysis of functionally graded beam with integrated surface piezoelectric layers", *Composite Structures*, 92: 1535-1543.
- [24] Anandrao, K.S., Gupta, R.K., Ramchandran, P. ve Rao, V., (2010). "Thermal post-buckling analysis of uniform slender functionally graded material beams", *Structural Engineering and Mechanics*, 36(5): 545-560.
- [25] Farid, M., Zahedinejad, P. ve Malekzadeh, P., (2010). "Three-dimensional temperature dependent free vibration analysis of functionally graded material curved panels resting on two-parameter elastic foundation using a hybrid semi-analytic, differential quadrature method", *Structural Engineering and Mechanics*, 31(1): 2-13.

- [26] Su, H.D., Li, S.R. ve Gao, Y., (2010). "Thermal post-buckling of functionally graded material Timoshenko beams with surface-bonded piezoelectric layers". *Jisuan Lixue Xuebao/Chinese Journal of Computational Mechanics*, 27(6): 1067-1072.
- [27] Kocatürk, T., Şimşek, M. ve Akbaş, Ş.D., (2011). " Large displacement static analysis of a cantilever Timoshenko beam composed of functionally graded material". *Science and Engineering of Composite Materials*, 18:21-34.
- [28] Li, Q. ve Li, S., (2011). "Post-buckling configuration of a functionally graded material column under distributed load". *Fuhe Cailiao Xuebao/Acta Materialae Compositae Sinica*, 28(3): 192-196.
- [29] Zhao, F., Wang, Z. ve Zhang, R., (2012). "Post-buckling analysis of FGM beam subjected to non-conservative forces and in-plane thermal loading", *Applied Mechanics and Materials*, 152-154:474-479.
- [30] Akbaş, Ş.D. ve Kocatürk, T., (2011). "Eksenel doğrultuda fonksiyonel derecelendirilmiş Timoshenko kirişinin sıcaklık etkisi altındaki burkulma sonrası davranışının incelenmesi", 17. Ulusal Mekanik Kongresi, Elazığ, 2011.
- [31] Kocatürk, T. ve Akbaş, Ş.D., (2012). "Post-buckling analysis of Timoshenko beams made of functionally graded material under thermal loading", *Structural Engineering and Mechanics*, 41(6): 775-789.
- [32] Feldman, E. ve Aboudi, J., (1997). "Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading", *Composite Structures*, 38(1-4):29-36.
- [33] Reddy, J.N. ve Chin, C.D., (1998). "Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates". *Journal of Thermal Stresses*, 21(6): 593-626.
- [34] Shen, H.-S., (2002). "Postbuckling analysis of axially-loaded functionally graded cylindrical shells in thermal environments", *Composites Science and Technology*, 62(7-8):977-987.
- [35] Javaheri, R., ve Eslami, M.R., (2002). "Thermal buckling of functionally graded plates". *AIAA Journal*, 40(1): 162-169.
- [36] Liew, K.M., Yang, J ve Kitipornchai, S., (2003). "Postbuckling of piezoelectric FGM plates subject to thermo-electro-mechanical loading". *International Journal of Solids and Structures*, 40(15): 3869-3892.
- [37] Shahsiah, R. ve Eslami, M.R., (2003). "Thermal buckling of functionally graded cylindrical shell", *Journal of Thermal Stresses*, 26(3):277-294.
- [38] Ma, L.S. ve Wang, T.J., (2003). "Nonlinear bending and post-buckling of a functionally graded circular plate under mechanical and thermal loadings", *International Journal of Solids and Structures*, 40(13-14):3311-3330.
- [39] Lanhe, W., (2004). "Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate". *Composite Structures*, 64(2): 211-218.
- [40] Shen, H.-S., (2004). "Thermal postbuckling behavior of functionally graded cylindrical shells with temperature-dependent properties", *International Journal of Solids and Structures*, 41(7):1961-1974.

- [41] Na, K.S. ve Kim, J.H., (2005). "Three-dimensional thermomechanical buckling of functionally graded materials". *AIAA Journal*, 43(7):1605-1612.
- [42] Shen, H.-S., (2005). "Postbuckling of axially loaded FGM hybrid cylindrical shells in thermal environments", *Composites Science and Technology*, 65(11-12):1675-1690.
- [43] Na, K.-S. ve Kim, J.-H., (2005), "Three-dimensional thermomechanical buckling of functionally graded materials", *AIAA Journal*, 43(7), 1605-1612.
- [44] Park, J.S. ve Kim, J.H., (2006). " Thermal postbuckling and vibration analyses of functionally graded plates". *Journal of Sound and Vibration*, 289(1-2):77-93.
- [45] Shen, H.-S., (2007). "Thermal postbuckling of shear deformable FGM cylindrical shells with temperature-dependent properties", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 14(6):439-452.
- [46] Wu, T.-L., Shukla, K.K. ve Huang, J.H., (2007). Post-buckling analysis of functionally graded rectangular plates, *Composite Structures*, 81(1):1-10.
- [47] Shen, H.-S., (2007). "Thermal postbuckling behavior of shear deformable FGM plates with temperature-dependent properties", *International Journal of Mechanical Sciences*, 49(4):466-478.
- [48] Li, S.R. , Zhang, J.H. ve Zhao, Y.G., (2007). "Nonlinear thermomechanical post-buckling of circular FGM plate with geometric imperfection", *Thin-Walled Structures*, 45(5):528-536.
- [49] Shariyat, M., (2008). "Dynamic thermal buckling of suddenly heated temperature-dependent FGM cylindrical shells, under combined axial compression and external pressure", *International Journal of Solids and Structures*, 45(9):2598-2612.
- [50] Xia, X.K., Shen, H.-S., (2008). "Vibration of post-buckled sandwich plates with FGM face sheets in a thermal environment", *Journal of Sound and Vibration*, 314(1-2):254-274.
- [51] Lee, S.L. ve Kim, J.H., (2009). "Thermal post-buckling and limit-cycle oscillation of functionally graded panel with structural damping in supersonic airflow", *Composite Structures*, 91(2):205-211.
- [52] Zhao, X., Lee, Y.Y. ve Liew, K.M., (2009). "Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates", *Composite Structures*, 90(2):161-171.
- [53] Duc, N.D. ve Tung, H.V., (2010). "Mechanical and thermal postbuckling of shear-deformable FGM plates with temperature-dependent properties", *Mechanics of Composite Materials*, 46(5): 461-476.
- [54] Mirzavand, B., Eslami, M.R. ve Shakeri, M., (2010). "Dynamic thermal postbuckling analysis of piezoelectric functionally graded cylindrical shells", *Journal of Thermal Stresses*, 33(7):646-660.
- [55] Dai, H.L. ve Zheng, H. Y., (2011). "Buckling and post-buckling analyses for an axially compressed laminated cylindrical shell of FGM with PFRC in thermal environments". *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 30(6): 913-923.

- [56] Gauss, R.C. ve Antman, S.S., (1984), "Large thermal buckling of non-uniform beam and plates", *Int. J. Solids Struct.*, 20 (11-12): 979–1000.
- [57] Rao, G.V. ve Raju, K.K., (1984), "Thermal postbuckling of columns" *AIAA Journal*, 22 (6): 850-851.
- [58] Jekot, T., (1996)," Non-linear Problems of Thermal Buckling of a Beam", *J. Thermal Stresses*, 19: 359–369.
- [59] Coffin, D.W. and Bloom, F., (1999), "Elastica solution for the hygrothermal buckling of a beam", *International Journal of Non-Linear Mechanics*,34(5): 935-947.
- [60] Li, S.R., (2000), "Thermal post-buckling of asymmetrically supported elastic rods" , *Engineering Machanics*,17(5): 115 – 119.
- [61] Li, S. ve Cheng C., (2000), "Analysis of thermal post- buckling of heated elastic rods", *Appl. Math. Mech. (English ed.)*, 21 (2): 133–140.
- [62] Li, S. ve Zhou Y., (2001), "Thermal post-buckling of rods with variable cross sections". In: *Proceedings of the Fourth International Congress on Thermal Stresses*, Osaka, Japan, 147–150.
- [63] Li, S., Zhou Y.H. ve Zheng X., (2002), "Thermal post- buckling of a heated elastic rod with pinned–fixed ends", *J. Therm. Stresses*, 25 (1): 45–56.
- [64] Chen, B., Gu, Y., Zhao, G., Lin, W., Chang, T.Y.P. ve Kuang, J.S., (2003), "Design optimization for structural thermal buckling", *J. Thermal Stresses*, 26(5): 479–94.
- [65] Li, S.R., Cheng, C.J. ve Zhou, Y.H., (2003), "Thermal post-buckling of an elastic beams subjected to a transversely non-uniform temperature rising", *Appl. Math. Mech. (English ed.)*, 24 (5): 514-520.
- [66] Li, S. ve Zhou, Y, (2003), "Geometrically nonlinear analysis of Timoshenko beams under thermomechanical loadings", *Journal of Thermal Stresses*, 26 (9): 861-872.
- [67] Vaz, M.A. ve Solano, R.F., (2003), "Postbuckling analysis of slender elastic rods subjected to uniform thermal loads", *J. Therm. Stresses*, 26 (9): 847–860.
- [68] Vaz, M.A. ve R.F. Solano, R.F., (2004), "Thermal post-buckling of slender elastic rods with hinged ends constrained by a linear spring", *J. Therm. Stresses* 27 (4): 367–380.
- [69] Li, S. ve Song, X., (2006), " Large thermal deflections of Timoshenko beams under transversely non-uniform temperature rise", *Mechanics Research Communications*, 33 (1): 84-92.
- [70] Vaz, M.A., Nascimento, M.S. ve Solano, R.F., (2007), "Initial post-buckling of elastic rods subjected to thermal loads and resting on an elastic foundation, *J. Therm. Stresses*, 30 (4): 381–393.
- [71] Song, X. and Li, S.R., (2007), "Thermal buckling and post-buckling of pinned–fixed Euler–Bernoulli beams on an elastic foundation", *Mechanics Research Communications*. 34 (2): 164-171.



- [72] Aristizabal-Ochoa, J.D., (2007), "Large deflection and post-buckling behavior of Timoshenko beam-columns with semi-rigid connections including shear and axial effects", *Journal of Engineering Structures*, 29(6): 991–1003.
- [73] Evandro, P. J. ve Joao B.M.S., (2008). "Design sensitivity analysis of nonlinear structures subjected to thermal loads", *Computers and Structures*, 86 (11-12):1369-1384.
- [74] Gupta, R.K., Gunda, J.B., Janardhan, G.R. ve Rao, G.V., (2009), "Comparative study of thermal post-buckling analysis of uniform slender & shear flexible columns using rigorous finite element and intuitive formulations", *International Journal of Mechanical Sciences*, 51 (3): 204-212.
- [75] Gupta, R.K., Gunda, J. B., Janardhan, G. R. ve Rao G. V., (2010), "Post-buckling analysis of composite beams: Simple and accurate closed-form expressions", *Composite Structures*, 92(3): 1947-1956.
- [76] Gupta, R.K., Gunda, J. B., Janardhan, G. R. ve Rao G. V., (2010), "Thermal Post-buckling analysis of slender columns using the concept of coupled displacement field", *International Journal of Mechanical Sciences*, 52 (4): 590-594.
- [77] Vaz, M.A., Cyrino, J.C.R. ve Neves A.C., (2010), "Initial thermo-mechanical post-buckling of beams with temperature-dependent physical properties", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 45 (3): 256–262.
- [78] Akbaş, Ş.D. ve Kocatürk, T., (2011). "Post-buckling analysis of a simply supported beam under uniform thermal loading" *Scientific Research and Essays*, 6(4):1135-1142.
- [79] Kocatürk, T. ve Akbaş, Ş.D., (2011). "Post-buckling analysis of Timoshenko beams with various boundary conditions under non-uniform thermal loading", *Structural Engineering and Mechanics*, 40(3):347-371.
- [80] Wakashima, K., Hirano, T. ve Niino, M., (1990). "Space applications of advanced structural materials", ESA, SP:303-397.
- [81] Zienkiewicz, O.C. ve Taylor, R.L., (2000). *The finite element method, Fifth Edition, Volume 2: Solid Mechanics*, Oxford: Butterworth-Heinemann.
- [82] Felippa, C.A., "Notes on Nonlinear Finite Element Methods", <http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/NFEM.d/NFEM.Ch10.d/NFEM.Ch10.pdf>, Haziran 2012.
- [83] Reddy, J.N, (2004). *An introduction to non-linear finite element analysis*, Oxford University Press Inc., New York.
- [84] Incropera, F. ve DeWitt, D., (1985). *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, Second edition, John Wiley.
- [85] ITER Documentation Series, (1991)., *Blanket, Shield Design and Material Data Base*, No:29, IAEA, Vienna.
- [86] *The ITER Machine*, (1994)., *Detail of the ITER Outline Design Report*, Vol 2, San Diego.

[87] ASME Code Cases: Nuclear Components, (1992). ASME Boiler and Pressure Vessel Code, Case N-47-30, Section III, Division 1.

[88] Shinno, H., Kitajima M. ve Okada, M., (1988). "Thermal stress analysis of high heat flux materials", Journal of Nuclear Materials, 155-157 (1):290-294.

[89] Hashizume H. ve Miya K., (1987). "Thermomechanical behaviour of the first wall subjected to plasma disruption", Fusion Engineering and Design, 5 (2): 141-154.

[90] Tietz, T.E. ve Wilson, J. W., (1965). Behaviour and properties of refractory metals, Arnold Publishing Co, London.

## ÖZGEÇMİŞ

---

### KİŞİSEL BİLGİLER

**Adı Soyadı** : Şeref Doğuşcan AKBAŞ  
**Doğum Tarihi ve Yeri** : 22.08.1985, İstanbul  
**Yabancı Dili** : İngilizce  
**E-posta** : serefda@yahoo.com

### ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	İnşaat Mühendisliği-Mekanik Programı	Yıldız Teknik Üniv.	2009
Lisans	İnşaat Mühendisliği	Yıldız Teknik Üniversitesi	2008
Lise	Fen Bilimleri	Fatih Vatan Lisesi	2003

### İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2009-2012	Yıldız Teknik Üniversitesi İnşaat Fak., İnşaat Müh. Böl. Mekanik A.B.D.	Araştırma Görevlisi

## YAYINLARI

### Makale

1. Kocatürk, T. ve **Akbaş, Ş.D.**, (2010). "Geometrically non-linear static analysis of a simply supported beam made of hyperelastic material", *Structural Engineering and Mechanics*, 35(6):677-697.
2. Kocatürk, T., **Akbaş, Ş.D.** ve Şimşek, M., (2010). "Large deflection static analysis of a cantilever beam subjected to a point load", *International Journal of Engineering and Applied Sciences (IJEAS)*, 2(4):1-13.
3. **Akbaş, Ş.D.** ve Kocatürk, T., (2011). "Post-buckling analysis of a simply supported beam under uniform thermal loading", *Scientific Research and Essays*, 6(4):1135-1142.
4. Kocatürk, T., Şimşek, M. ve **Akbaş, Ş.D.**, (2011). "Large displacement static analysis of a cantilever Timoshenko beam composed of functionally graded material", *Science and Engineering of Composite Materials*, 18:21–34.
5. Kocatürk, T., Eskin, A. ve **Akbaş, Ş.D.**, (2011). "Wave propagation in a piecewise homogenous cantilever beam under impact force", *International Journal of the Physical Sciences*, 6(16):4013-4020.
6. Kocatürk, T. ve **Akbaş, Ş.D.**, (2011). "Post-buckling analysis of Timoshenko beams with various boundary conditions under non-uniform thermal loading", *Structural Engineering and Mechanics*, 40(3):347-371.
7. Kocatürk, T. ve **Akbaş, Ş.D.**, (2012). "Post-buckling analysis of Timoshenko beams made of functionally graded material under thermal loading", *Structural Engineering and Mechanics*, 41(6): 775-789.
8. Şimşek, M., Kocatürk, T. ve **Akbaş, Ş.D.**, (2012), "Dynamic behavior of an axially functionally graded beam under action of a moving harmonic load", *Composite Structures*, 94(8):2258-2364.
9. Şimşek, M., Kocatürk, T. ve **Akbaş, Ş.D.**, (2012) "Static bending of a functionally graded microscale Timoshenko beam based on the modified couple stress theory", *Composite Structures*, Baskıda.
10. **Akbaş, Ş.D.** ve Kocatürk, T., (2012). " Post-Buckling Analysis of Timoshenko Beams with Temperature-Dependent Physical Properties under Uniform Thermal Loading", *Structural Engineering and Mechanics*, Kabul edildi.

### Bildiri

1. **Akbaş, Ş.D.** ve Kocatürk, T., "Hiperelastik Malzemeden Yapılmış Basit Kirişlerin Geometrik Lineer Olmayan Statik Analizi", 16. Ulusal Mekanik Kongresi, Kayseri, 2009, 115-125.

2. **Akbaş, Ş.D.**, Kocatürk, T. ve Şimşek, M., "Large deflection of a cantilever beam made of functionally graded material", 16th International Conference on Composite Structures, Porto, Portugal, 2011.
3. Şimşek, M., Kocatürk, T. ve **Akbaş, Ş.D.**, "Dynamics of an Axially Functionally Graded Beam Carrying a Moving Harmonic Load", 16th International Conference on Composite Structures, Porto, Portugal, 2011.
4. **Akbaş, Ş.D.** ve Kocatürk, T., "Eksenel doğrultuda fonksiyonel derecelendirilmiş Timoshenko kirişinin sıcaklık etkisi altındaki burkulma sonrası davranışının incelenmesi", 17. Ulusal Mekanik Kongresi, Elazığ, 2011.
5. **Akbaş, Ş.D.**, Şimşek M. ve Kocatürk, T., "Eksenel doğrultuda fonksiyonel derecelendirilmiş bir kirişin hareketli bir kütle altında dinamik davranışının incelenmesi", 17. Ulusal Mekanik Kongresi, Elazığ, 2011.
6. **Akbaş, Ş.D.**, "Static analysis of a functionally graded beam with edge cracks on elastic foundation", 9 th International Fracture Conference, 70-80.
7. Şimşek, M., Kocatürk, T. ve **Akbaş, Ş.D.**, "Static bending of a functionally graded microscale Timoshenko beam based on the modified couple stress theory", 1th International Conference on Mechanics of Nano, Micro and Macro Composite Structures, Politecnico di Torino, 18-20 June 2012.
8. **Akbaş, Ş.D.**, Kocatürk, T. ve Şimşek, M., "Free vibration analysis of a micro beam on elastic foundation based on the modified couple stress theory", 1th International Conference on Mechanics of Nano, Micro and Macro Composite Structures, Politecnico di Torino, 18-20 June 2012.
9. **Akbaş, Ş.D.**, Kocatürk, T. ve Şimşek, M., "Thermal post-buckling analysis of 2-D beams made of functionally graded material", 1th International Conference on Mechanics of Nano, Micro and Macro Composite Structures, Politecnico di Torino, 18-20 June 2012.

## ÖDÜLLER

1. Yıldız Teknik Üniversitesi Akademik Yayın Teşvik Ödülü 2010
2. Tübitak Akademik Yayın Teşvik Ödülü 2010
3. Yıldız Teknik Üniversitesi Akademik Yayın Teşvik Ödülü 2011