T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞMELİ OLMAYAN HALKALAR ÜZERİNDEKİ ÇARPIMSAL MODÜLLER

DENİZ SÖNMEZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
DOÇ.DR.GÜRSEL YEŞİLOT

İSTANBUL, 2013

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞMELİ OLMAYAN HALKALAR ÜZERİNDEKİ ÇARPIMSAL MODÜLLER

Deniz SÖNMEZ tarafından hazırlanan tez çalışması 19.07.2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Yrd. Doç. Dr. Kürşat Hakan Oral

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Doç. Dr. Ünsal Tekir

Marmara Üniversitesi ________________________

ÖNSÖZ

Öncelikle eğitimim ve tez çalışmam boyunca benden emeğini, yardımlarını ve bilgisini esirgemeyen, sabırla ve anlayışla öğrenimime katkı sağlayan saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT ’a çok teşekkür ederim.

Yine bu süreçte her daim yanımda olan, desteklerini ve yardımlarını hiç eksik etmeyen sevgili eşim Furkan SÖNMEZ'e, çok sevdiğim anne ve babama teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca yardımları için sevgili arkadaşım Neslihan SÜZEN'e ve burs vererek beni destekleyen TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Haziran, 2013

Deniz SÖNMEZ

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ

$ann(M)$	M modülünün sıfırlayıcısı (anhilatörü)
$Çek\ f$	f fonksiyonunun çekirdeği
$\oplus$	Direkt toplam
$\leq$	Küçük eşittir
$\cong$	İzomorfizma
$J(R)=J$	R halkasının Jacobson radikali
$\langle m \rangle$	m elemanı ile üretilmiş alt modül
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\Rightarrow$:	Gereklilik
$\Leftarrow$:	Yeterlilik
$\Leftrightarrow$	Gerek ve yeter koşul
$\subseteq$	Kapsama
$\cap$	Kesişim

ÖZET

DEĞİŞMELİ OLMAYAN HALKALAR ÜZERİNDEKİ ÇARPIMSAL MODÜLLER

Deniz SÖNMEZ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT

Bu tezin temel konusu modül teorisi ve modül teorisi içersindeki çarpımsal modül kavramlarını ve özelliklerini değişmeli olmayan halkalar üzerinde tanımlamak ve inşa edilmesi için gerekli özellikleri sunmaktır.

İlk olarak Bölüm 2'de gerekli temel kavramları hatırlatmak adına ön bilgiler verilmiştir. Böylece Halkalar Teorisine giriş ve halkalar üzerine kurulu olan modüller için bir alt yapı oluşturulmuştur. Üçüncü bölümde halkaların genel yapısı, değişmeli olma ve olmama durumları ve bu durumda sağlanan özelliklerden bahsedilmiştir. Bölüm 4'te ise modül tanımı ve temel özellikleri verilmiştir.Böylelikle özel bir modül olan çarpımsal modüllerin inşası ve incelenmesi için gerekli tüm bilgi ve özellikler sunulmuştur.

Bölüm 5'te ilk olarak değişmeli olmayan halka üzerinde kurulu çarpımsal modülün genel özellikleri ve tanımları verilmiştir. Bu tanım ve özellikleri destekleyen örnekler sunulmuştur. Daha sonra çarpımsal modüllerin asli, düzgün, asal, dağılmalı olma gibi özel halleri incelenmiştir. Sonraki kısımlarda çarpımsal modüllerin sonlu üretilmişlik durumları, maksimal alt modüllerinin yapısı ele alınmıştır. Son olarak ise değişmeli olmayan halkaların ideallerinin çarpımı değişmeli olduğu durumda çarpımsal modüllerin nasıl davranışlar izlediği incelenmiş ve sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Değişmeli olmayan halka, modül, çarpımsal modül, alt modül

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ABSTRACT

MULTIPLICATION MODULES OVER NONCOMMUTATIVE RINGS

Deniz SÖNMEZ

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Gürsel YEŞİLOT

The main subject of this thesis is to define the characteristics and properties of module theory and multiplication modules in module theory over noncommuative rings.

First of all,in section 2 is given the required information for being able to remind the basic concepts. So that, the sub-structure was established to introduce to the Ring Theory and Module Theory.

In section 3, the general structure and the condition of being commutative and noncommutative of the rings are described.

In the next section, definition and basic properties of the modules are given. Thus, all knowledge and properties of the modules are presented to examine the construction of the multiplication modules.

In section 5, firstly, general characteristics and definitions of the multiplication modules over the noncommutative ring are given. Some examples are presented to support this definition and properties.

Then, the special situation of the multiplication modules such as, essantial, uniform, prime, distributive modules are investigated. Nextly, the finitely generated multiplication modules and the structure of the maximal submodules of the multiplication modules are dealt.

Finally, the behaviours of the multiplication modules over the noncommutative ring with commutative multiplication of ideals are investigated and showed.

Keywords: Noncommutative ring, modules, multiplication modules, submodules

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Modül teorisi, matematiğin temel disiplinlerinden biri olan Cebir ve Sayılar Teorisi içersinde çok önemli bir yerdedir.

H. İbrahim Karakaş 1972 yılında halkalar için bilinen Cohen Teoremini modüllere genişletmiş ve bu çalışmasının sonucunu Cohen Teoremi olarak sunmuştur.

1981 yılında A.Barnard çarpımsal modüllerin temel özelliklerini vermiş ve bu temel özellikler ve tanımlar kullanılarak birçok çalışma yapılmıştır [3],[4],[5],[8],[9]. Ayrıca A.Barnard bu çalışmasında çarpımsal modüller için sonlu üretilmişlik koşulu olmadan Nakayama Lemma'yı ispatlamıştır.[2]

Z.Abd El-Bast ve P.F.Smith 1988 yılında çarpımsal modüller ile ilgili bir çalışma yapmış ve bu çalışmada çarpımsal modül olma şartları ile ilgili bir çok kriter ortaya koymuşlardır. Daha sonra P.F.Smith elde ettikleri bazı teoremleri tekrardan inceleyerek farklı tekniklerle yeniden ispatlamıştır.

1990 ve sonraki yıllarda ise A.A. Tuganbaev yayınladığı birçok makale ile çarpımsal modüllerin temelini sağlamlaştırmıştır. A.A. Tuganbaev bu çalışmaları ile birlikte değişik özelliklerdeki halkalar üzerindeki çarpımsal modülleri incelemiştir. Bunların en dikkat çekici olanı değişmeli olmayan halkalar üzerindeki çarpımsal modül ile ilgili yapılan çalışmalardır. Bu çalışmasında değişmeli olamayan çarpımsal modüller ile alt modüllerini ve maksimal alt modülleri arasındaki ilişkileri incelemiş, sonlu üretilmiş çarpımsal modüller ile teoremleri yeniden ele almış ve farklı yollarla ispatlamıştır [1].

1.2 Tezin Amacı

Modül Teorisi, matematiğin temel disiplinlerinden biri olan cebir içersinde önemli bir yer tutmaktadır. Bu tez ile birlikte, Modül Teorisi'nin temel tanım ve teoremlerini sunmak ve özel olarak değişmeli olmayan halkalar üzerindeki çarpımsal modüller hakkında bilgi vermek amaçlanmıştır.

Bu amaç doğrultusunda ilk olarak Halkalar Teorisi'nin temel kavramlarından bahsedilecektir. Daha sonra bu kavramlardan yararlanılarak Modül Teorisine giriş yapılacaktır.

Sunulan temel bilgiler ışığında Çarpımsal Modüller ayrıntılı olarak incelenecektir. Bu çalışmalar ile çarpımsal modül tanımı, temel teoremleri ve çarpımsal modüllerin özel halleri incelenerek çarpımsal modüllerin değişmeli olmayan halkalar üzerindeki davranışları ayrıntılı olarak sunulacaktır.

1.3 Hipotez

Cebirin önemli bir çalışma alanı olan Modül Teorisinde, Çarpımsal Modüllerin halkanın değişme özelliğine göre farklı davranışlar sergilediği gösterilebilir.

BÖLÜM 2

ÖN BİLGİLER

Tanım 2.1 S bir küme ve üzerinde bir bağıntı $\leq$ olan $(S, \leq)$ sistemi

(i) Yansıma : Her $a \in S$ için $a \leq a$

(ii) Ters simetri : $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise $a = b$

(iii) Geçişme : $a \leq b,\ \ b \leq c$ iken $a \leq c$

sağlanıyorsa S ye sıralı küme denir. Eğer $(S, \leq)$ sıralı kümesinde $a, b\ \in S$ için $a \leq b$ veya $b \leq a$ ise bu sıralı kümeye tam sıralı denir [12].

Tanım 2.2 Sıralı bir kümede kendinden kesin büyük hiçbir eleman yoksa bu elemana maksimal eleman denir [12].

Tanım 2.3 $(S, \leq)$ sıralı kümesinde, $a, b\ \in S$ elemanları için ;

(i) $a \leq z,\ \ b \leq z$ ve

(ii) $a \leq z',\ \ b \leq z'$ iken $z \leq z'$ olmasını gerektirecek şekilde bir $z \in S$ varsa z ye a ile b nin supremumu denir ve $z = \sup\{a, b\}$ olarak gösterilir.

Benzer şekilde infimum da tanımlanabilir ve $\inf\ \{a, b\}$ olarak gösterilir [12].

Tanım 2.4 $(S, \leq)$ sıralı kümesinde her $a, b\ \in S$ elemanının bir supremumu ve infimumu varsa bu sıralı kümeye bir latis (kafes) denir.

Bir latiste sonlu ve boş olmayan her A alt kümesinin $\sup\ A$ ve $\inf(A)$ vardır [12].

Tanım 2.5 Sıralı bir kümenin tam sıralı bir alt kümesine zincir denir [12].

Lemma 2.1 (Zorn Lemma) Boş olmayan bir S sıralı kümesinin, her zincirinin S de bir üst sınırı varsa, S sıralı kümesinin bir maksimal elemanı vardır [12].

Tanım 2.6 S, sıralı kümesi bir zincir ve S nin boş olmayan her alt kümesinin de bir en küçük elemanı varsa S ye iyi sıralı küme denir [6].

İyi sıralama prensibi : Boş kümeden farklı bir S kümesi için,kendisi üzerinde S nin bir zincir olacak şekilde kısmi sıralama bağıntısı vardır ve bu sıralamaya göre S iyi sıralı bir kümedir [6].

BÖLÜM 3

HALKALAR

3.1 Halkalar ve Alt Halkalar

Bu bölümden itibaren alınan tüm halkalar birimli halka olarak kabul edilecektir.

Tanım 3.1 R boştan farklı bir küme, "+" ve " . " da R üzerinde ikili işlemler olsun. Bu durumda aşağıdaki koşulları sağlayan $(R,+,.)$ sıralı üçlüsüne bir halka denir [6].

(1) $R,+$ bir abelyan (değişmeli) gruptur.

(2) "." R de birleşmeli bir işlemdir.

(3) "." nın "+" üzerine soldan ve sağdan dağılma özellikleri vardır, yani her $a,b,c \in R$ için

$a \ b+c \ = ab+ac$ ve $b+c \ a = ba+ca$

Teorem 3.1 $(R,+,.)$bir halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır [6].

(1) Her $a \in R$ için $a.0_R = 0_R = 0_R a$

(2) Her $a,b \in R$ için $a \ -b \ = -ab = \ -a \ b$

(3) Her $a,b \in R$ için $-a \ \ -b \ = ab$

(4) Her $a,b,c \in R$ için $a \ b-c \ = ab-ac$ ve $b-c \ a = ba-ca$

Tanım 3.2 $(R,+,.)$ bir halka olsun.

(1) Eğer R nin "." işlemine göre birimi varsa $(R,+,.)$ halkasına birimli halka denir.

(2) R birimli bir halka, $1_R \neq 0_R$ ve $0_R \neq a$ olsun. Eğer $ab = ba = 1_R$ olacak şekilde bir $b \in R$ mevcut ise b ye a nın çarpımsal tersi, a ya da terslenebilir (birimsel) bir eleman denir.

(3) Eğer "." değişmeli ise $(R, +, .)$ halkasına bir değişmeli halka denir.

(4) R nin sıfırdan farklı herhangi iki elemanının çarpımı sıfır olmuyor ise R ye sıfır bölensiz halka denir [6].

Örnek 3.1 n bir pozitif tamsayı olsun. Modülo n ye göre tüm kalan sınıflarının kümesi olan $Z_n = \{\, 0, 1, \dots, n-1 \,\}$ üzerinde ve $\oplus$ yı $a \quad b = a + b$ ve $a \quad b = ab$ ile tanımlayalım. Bu durumda { Z_n, ,$\odot$ } birimi 1 olan değişmeli, sonlu bir halkadır [6].

Örnek 3.2 $\mathbb{R}$ reel sayı bileşenli n-inci $(n \geq 1)$ merteben tüm matrisler kümesi $M_n(\mathbb{R})$ ile gösterilsin. Matris toplamı ve çarpımına göre $n \geq 2$ için $M_n(\mathbb{R})$ değişmesiz ve sıfır bölenli bir halkadır [6].

Tanım 3.3 R bir halka S de R nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer S, R deki işlemlere göre bir halka ise S ye R nin bir alt halkası denir [6].

Teorem 3.2 $(R, +, .)$ bir halka ve $S \subset R$ olsun. S nin R nin alt halkası olması için gerek ve yeter koşul ;

(1) $S \neq \emptyset$

(2) Her $a, b \in S$ için $a - b \in S$

(3) Her $a, b \in S$ için $ab \in S$ olmasıdır [6]..

Örnek 3.3 $\mathbb{Z}$**,** $\mathbb{Q}$ nun bir alt halkası ; $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ nin bir alt halkası ve $\mathbb{R}$ de $\mathbb{C}$ nin bir alt halkasıdır [6].

Örnek 3.4 $2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}$ nin bir alt halkasıdır. O halde birimli bir halkanın alt halkası birimsiz olabilir [6].

Not : Bir halkanın birimi ile alt halkasının birimi aynı olmak zorunda değildir. Gerçektende $M_2(\mathbb{R})$ halkasının birimi $\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$ iken onun bir alt halkası olan

$S = \begin{matrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} : a \in \mathbb{R}$ nin birimi $\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$ dir [6].

Teorem 3.3 R bir halka $\{S_i\}_{i\in I}$ de R nin boştan farklı alt halkalar ailesi olsun. Bu durumda ${}_{i\in I} S_i$ arakesiti de R nin bir alt halkasıdır [6].

Tanım 3.4 R bir halka ve $S \subset R$ olsun. R nin S yi kapsayan tüm alt halkalarının arakesitine S ile üretilen alt halka denir ve $< S >$ ile gösterilir. $S = \emptyset$ ise $< S >=0_R$ dır [6].

3.2 İdealler ve Halka Homomorfizmaları

Tanım 3.5 $(R, +, .)$ bir halka ve I da R nin bir toplamsal alt grubu olsun.

Her $r \in R$ ve her $a \in I$ için $ra \in I$ ise I ya R nin sağ ideali denir. Aynı şekilde ;

her $r \in R$ ve her $a \in I$ için $ar \in I$ ise I ya R nin sol ideali denir.

Bu şartlar altında I, R nin hem sol hem de sağ ideali ise I ya R nin idealidir denir [6].

Örnek 3.5 R halkasının sıfırı ve kendisi R nin idealleridir ve bunlara aşikar (trivial) idealleri denir. Bunların dışında başka idealleri varsa onlara da öz idealler denir [6].

Örnek 3.6 Tamsayılar halkası $\mathbb{Z}$ nin idealleri toplamsal alt gruplarıdır ve $n \in \mathbb{Z}$ için $n\mathbb{Z}$ şeklindedir [6].

Teorem 3.4 R bir halka ve $\{ I_i : i \in \omega\}$ de R nin ideallerinin boştan farklı bir ailesi olsun. Bu durumda ${}_{i\in\omega} I_i$ de R nin bir idealidir [6].

Tanım 3.6 R bir halka ve $I \subseteq R$ olsun. R nin I yı kapsayan tüm ideallerinin arakesitine I ile üretilen ideal denir ve $< I >$ ile gösterilir. Eğer $I = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ise

$< I >=< \ a_1, a_2, \dots, a_n \ >=< a_1, a_2, \dots, a_n >$ olur. Eğer $I = \{a\}$ tek elemanlı ise $< a >$ idealine a ile üretilen temel ideal denir. Her ideali temel ideal olan halkaya da temel ideal halkası, her ideali temel ideal olan bir tamlık bölgesine ise temel ideal bölgesi (TİB) denir [6].

Örnek 3.7 $\mathbb{Z}$**,** bir TİB dir. Çünkü $\mathbb{Z}$ nin her ideali toplamsal devirli alt grup yani $I = n\mathbb{Z} =< n >$ olduğundan $\mathbb{Z}$ bir temel ideal bölgesidir [6].

Teorem 3.5 R bir halka ve I, R nin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun.

(1) $< I > = \ {}_{i=1}^{h} r_i \, a_i + \ {}_{j=1}^{t} b_j \, s_j + \ {}_{k=1}^{p} n_k \, c_k + \ {}_{d=1}^{f} g_d \, z_d \ : \ r_i, s_j \in R, n_{j,} z_d \in \mathbb{Z},$ $a_i, b_j, c_k, g_d \in I, \ p, t, h, d \ \in \mathbb{Z}^+$

(2) R değişmeli ise $< I > = \{ \sum_{i=1}^{s} r_i a_i + \sum_{j=1}^{t} b_j s_j \, : \, r_i, s_j \in R, a_i, b_j \in I, s, t \in \mathbb{Z}^+ \}$

Bu durumda $< a > = \{ \sum_{i=1}^{n} r_i a s_i : r_i, s_i \in R, \; n \in \mathbb{Z}^+ \}$ olur [6].

Tanım 3.7 R bir halka I ve J de R nin iki ideali olsun.

$I + J = \{ a + b \, : a \in I, b \in J \}$ ye I ve J ideallerinin toplamı

$IJ = \{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \, : \, a_i \in I, b_i \in J \; ve \; n \in \mathbb{Z}^+ \}$ ye de bu ideallerin çarpımı denir [6].

Teorem 3.6 R halka ve I, J de iki ideali olsun. O zaman $I + J \; ve \; IJ$ de R nin idealidir [6].

Tanım 3.8 $(R, +, \cdot)$ ve $(R', \oplus, \odot)$ halkalar ve $f : R \longrightarrow R'$ bir fonksiyon olsun. Eğer aşağıdakiler sağlanıyorsa f ye halka homomorfizması denir.

(1) Her $a, b \in R$ için $f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$

(2) Her $a, b \in R$ için $f(ab) = f(a) \odot f(b)$

Eğer $f : R \longrightarrow R'$ halka homomorfizması örten ise f ye epimorfizma, 1-1 ise f ye monomorfizma, f halka homomorfizması 1-1 ve örten ise izomorfizma denir.

Bir halkanın kendisi üzerindeki homomorfizmasına endomorfizma ve kendi üzerine izomorfizmasına ise otomorfizma denir [6].

Tanım 3.9 R ve S iki halka olmak üzere , $\varphi : R \rightarrow S$ fonksiyonu her $r \in R$ için $\varphi(r) = 0_S$ ise φ fonksiyonu bir halka homomorfizmasıdır ve sıfır homomorfizma olarak adlandırılır [6].

Örnek 3.8 R bir halka ve $i : R \rightarrow R$ birim fonksiyon olsun. Bu durumda i bir halka homomorfizmasıdır, hatta burada i 1-1 ve örten olduğundan izomorfizmadır [6].

Örnek 3.9 $\mu : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$, her $a \in \mathbb{Z}$ için $\mu(a) = a$ ile tanımlansın. Burada μ bir halka epimorfizmasıdır. Gerçekten de her $a, b \in \mathbb{Z}$ için

$\mu(a + b) = a + b = a + b = \mu(a) + \mu(b)$

$\mu(ab) = ab = ab = \mu(a)\mu(b)$

olduğundan μ bir halka homomorfizması ve her $b \in \mathbb{Z}_n$ için $\mu(b) = b$ olacak şekilde bir $b \in \mathbb{Z}$ bulunduğundan μ örtendir yani bir epimorfizmadır [6].

Tanım 3.10 $(R,+,\cdot)$ ve $R',\oplus,\odot$ birer halka ve $f : R \to R'$ bir halka homomorfizması olsun. $f^{-1}(0_{R'}) = \{ r \in R : f\ r\ = 0_{R'} \}$ kümesi $(R,+)$ nın bir alt grubudur ve bu alt gruba f nin çekirdeği denir. $Çek\ f$ ile de gösterilir [6].

Yardımcı Teorem 3.1 Tanım 3.10 da tanımlanan $Çek\ f$, R nin bir idealidir [6].

Teorem 3.7 R bir halka I da bir ideal olsun. R de modülo I ya göre kalan sınıflarının kümesi R/I üzerinde $+$, $\cdot$ işlemlerinin

$a+I\ +\ b+I\ =\ (a+b)+I$ ve

$a+I\ \ b+I\ =(ab)+I$

ile tanımlayalım. Bu durumda $(R/I,+,\cdot)$ bir halkadır. Eğer $\varphi : R \to R/I$ fonksiyonu her $a \in R$ için $\varphi\ a\ = a+I$ ile tanımlanırsa φ bir epimorfizma ve $Çek\ \varphi = I$ dır. Burada φ ye doğal homomorfizma denir [6].

Teorem 3.8 Halka homomorfizmasının bir monomorfizma olması için gerek ve yeter koşul çekirdeğinin sıfıra eşit olmasıdır [6].

Teorem 3.9 (Birinci İzomorfizma Teoremi)

$f: R \to S$ bir halka homomorfizması ise $R/Çekf \cong f\ R$ dir [6].

Teorem 3.10 (İkinci İzomorfizma Teoremi)

Eğer I, R halkasının bir ideali, S de bir alt halkası ise $S+I, R$ nin bir alt halkası ve $S \cap I$ da S nin bir idealidir. Ayrıca $(S+I)/I \cong S/(S \cap I)$ dır [6].

Teorem 3.11 (Üçüncü İzomorfizma Teoremi)

I ve J , R halkasının idealleri ve $I \subseteq J$ olsun. Bu durumda $J/I, R/I$ nın ideali ve

$(R/I)/(J/I) \cong (R/J)$ dir [6].

Tanım 3.11 Bir halkanın idealleri sadece 0 ve kendisinden ibaret ise bu halkaya basit halka denir [6].

3.3 Maksimal ve Asal İdealler

Tanım 3.12 R bir halka ve Mde R nin bir sol (sağ) ideali olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa M idealine R nin sol (sağ) maksimal ideali denir.

(1) $M \neq R$

(2) I, R nin $M \subset I \subset R$ olacak şekilde bir sol (sağ) ideali ise $I = M$ veya $I = R$ dir .

Eğer M sol ideali aynı zamanda bir sağ ideal ise M maksimal idealdir denir. [7].

Örnek 3.11 $p \in \mathbb{Z}$ asal olsun. $p\mathbb{Z} = (p)$ ideali $\mathbb{Z}$ de maksimal idealdir. Gerçekten $1 \notin p\,\mathbb{Z}$ olduğundan $p\,\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$ dir. $p\,\mathbb{Z} \subset n\,\mathbb{Z}$ olsun. Buradan $n|p$ olacağından

$n = 1$ veya $n = p$ olur. $n = 1$ ise $n\,\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ ve $n = p\ ise\ n\,\mathbb{Z} = p\,\mathbb{Z}$ olur [6].

Teorem 3.12 R bir halka ve $M \neq R$ bir ideali olsun. M nin R nin maksimali ideali olması için gerek ve yeter koşul her $x \in R \backslash M$ için $M + \quad x \quad = R$ olmasıdır [6].

Tanım 3.13 R bir halka, $R \neq \{0_R\}$ ve $P \neq R$ bir ideali olsun. R nin herhangi iki A, B ideali için $AB \subseteq P$ iken $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ oluyorsa P ye R nin bir asal idealidir [6].

Teorem 3.13 P, R halkasının bir asal ideali ve $I_1, I_2, \dots, I_n$ de R halkasının bir takım idealleri olsun. O halde aşağıdakiler denktir [12].

(1) Bir $j = 1,2, \dots, n$ için $P \supseteq I_j$

(2) $P \supseteq \quad {}_{k=1}^{n} I_k$

(3) $P \supseteq \quad {}_{k=1}^{n} I_k$

Teorem 3.14 R bir birimli halka ve $0_R \neq 1_R$ olsun. Bu durumda R nin en az bir tane sol maksimal ideali mevcuttur [12].

BÖLÜM 4

MODÜLLER

4.1 Modüller ve Alt Modüller

Tanım 4.1 $M,+$ bir değişmeli grup ve R bir halka olsun. M deki elemanların, R deki elemanlarla skaler çarpımı , $R\ x\ M \ \rightarrow M$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, M ye R üzerinde bir modül veya kısaca R-modül denir [12].

(1) Her $r \in R$, her $m, m' \in M$ için $r\ \ m + m'\ \ = rm + rm'$

(2) Her $r, r' \in R$, her $m \in M$ için $r + r'\ \ m = rm + r'm$

(3) Her $r, r' \in R$, her $m \in M$ için $rr'\ \ m = r(r'm)$

(4) Her $m \in M$ için $1_R m = m$

Teorem 4.1 R bir halka ve M bir R −modül olsun. Her $m \in M$ için ;

(1) $0_{\boldsymbol{R}} m = 0_M$

(2) $-1\ \ m = -m$ dir [12].

Örnek 4.1 Her R halkası skaler çarpımı halkadaki çarpım olarak kendisi üzerinde bir R−modüldür [12].

Örnek 4.2 V, Kcismi üzerinde bir vektör uzayı ise V bir K-modüldür [12].

Örnek 4.3 I, R halkasının bir ideali ise I bir R −modüldür [12].

Örnek 4.4 I, R halkasının bir ideali ise R x $R/I \rightarrow R/I$ skaler çarpımını

$r, s + I \ \ \rightarrow rs + I$ ile tanımlayarak, R/I bir R −modül olur [12].

Tanım 4.2 R bir halka, M bir R $-$modül ve $N \subseteq M$ boş olmayan bir alt küme olsun. N de kendi başına bir R $-$modül ise N ye, M nin bir alt modülü veya R $-$alt modülü denir [12].

Örnek 4.5 M modülünün kendisi ve sıfırdan ibaret $\{0_M\}$=0 alt kümeleri M nin alt modülleridir [12].

Önerme 4.1 R $-$modül M nin boş olmayan bir $N \subseteq M$ alt kümesinin alt modül olması için gerek ve yeter koşul her $r, r' \in R$, her $m, m' \in N$ için $rm + r'm' \in N$ olmasıdır [12].

Önerme 4.2 M bir R $-$modül olsun. $\{N_i\}_{i\in I}$ ailesi, M nin bir R-alt modüller ailesi olsun. Bu durumda ${}_{i\in I} N_i$ de M nin bir R alt modülüdür [12].

Tanım 4.3 M bir R $-$modül ve $X \subseteq M$ bir alt küme olsun. X alt kümesini kapsayan tüm alt modüllerinin arakesitine X in ürettiği alt modül denir ve $< X >$ ile gösterilir. O halde S_M, M nin alt modüllerinin ailesi olmak üzere; $< X > = {}_{X\subseteq K}\{ K \in S_M\}$ dir. Buradan ; $< X >$, X alt kümesini kapsayan en küçük R $-$alt modül olduğu anlaşılır [12].

Örnek 4.6

R bir halka, M bir R $-$modül olmak üzere $m \in M$ için $Rm = \{rm : r \in R\}$ dir.

(1) $X = \emptyset$ ise $< X > = \ 0_M$

(2) $X \neq \emptyset$ ise $< X > = \{ \ {}_{i=1}^{n} r_i x_i \ : \ r_i \ \in R$ ve $x_i \in X, i = 1,2, \dots, n; \ n \in N \}$

(3) $X = \{ x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sonlu bir küme ise

$< X > = \quad {}_{i=1}^{n} r_i x_i \ : \ r_i \ \in R$ ve $x_i \in X, i = 1,2, \dots, m \quad = Rx_1 + Rx_2 + \cdots Rx_m$ olur [12].

Tanım 4.4 M bir R $-$modül, $m \in M$olsun. $\{m\}$ nin ürettiği alt modül

$< m > = Rm = \{rm : r \in R\}$ dir. Eğer $M =< m >$ olacak şekilde $m \in M$ bulunabiliyorsa, M modülüne devirli modül denir. $X \subseteq M$ sonlu bir alt küme olmak üzere, $M =< X >$ ise M modülüne sonlu üretilmiş modül denir [12].

Örnek 4.7 R halkası, $R = R1_R$ olduğundan R $-$modül olarak devirlidir [12].

Teorem 4.2 (Modüler Kural) M bir R −modül olsun. $K, L\ ve\ N$, M modülünün alt modülleri ve $K \subseteq N$ olsun. Böylece ;

$K + \ \ L \cap N \ \ = \ \ K + L \ \ \cap N$ dir [12].

İspat : $K + \ \ L \cap N \ \ \subseteq K + L$ ve $K \subseteq N$ olduğundan, $K + \ \ L \cap N \ \ \subseteq K + N \subseteq N$ dir. Buradan $K + \ \ L \cap N \ \ \subseteq (K + L) \cap N \ldots (1)$ bulunur.

Tersine ; $x \in (K + L) \cap N$ alalım. $x \in N\ ve\ x = y + z$ olacak şekilde bir $y \in K$ ve bir $z \in L$ bulunabilir. $K \subseteq N$ olduğundan $y \in N$olur ve $z = x - y \in L \cap N$ bulunur.

$x = y + z \in K + (L \cap N)$ elde edilir.

Böylece $K + L \ \ \cap N \subseteq K + \ \ L \cap N$ ... (2) olduğu görülür.

1 ve (2) kapsamalarından eşitlik elde edilir.

Önerme 4.3 R bir halka, I bir ideal ve M bir $R -$ modül olsun.

$IM = \{ \ {}_{i=1}^{n} r_i m_i : \ r_i \in I$ ve $m_i \in M, i = 1,2, \ldots n; n \in \mathbb{N}\}$ ise

(1) IM, M nin bir alt modülüdür.

(2) I ve I', R nin iki ideali ise $I \ \ I'M \ \ = \ \ II' \ \ M$ dir.

(3) $I = Ra$ bir esas (temel) ideal ise $IM = \ \ Ra \ \ M = \{am : m \in M\}$ dir [12].

Önerme 4.4 R bir halka, M bir R −modül, N bir alt modül ve $\emptyset \neq X \subseteq M$ bir alt küme olsun. $(N{:}X)$ kümesini ;

$N{:}X \ \ = \ \ N{:}_R X \ \ = \{r \in R : rX \subseteq N\}$ olarak tanımlayalım. Bu durumda ;

(1) $N{:}X$, R nin bir idealidir.

(2) $N{:}X \ \ = (N{:} \ \ X \ \ )$ dir [12].

Tanım 4.5 R bir halka, M bir R −modül ve $\emptyset \neq X \subseteq M$ bir alt küme olsun.

$0{:}X \ \ = \{r \in R{:} rX = 0\}$ idealine X in anhilatörü (sıfırlayıcısı) denir ve $Ann\,(X)$ ile gösterilir [12].

Teorem 4.3 R bir halka, M bir R −modül ve $\emptyset \neq X \subseteq M$ bir alt küme olsun.

$Ann(M/X) = \{r \ \in R : \ \ r(M/X) \ = 0_{m/X} = \ X \}$

$= \ \ r \ \in \ R \ : \ rm + X = X \ \ = \ \ r \in R : \ rm \in \ X, her\ m \ \in \ M\ için$

$= \ \{r \in \ R : \ rM \subseteq \ X \} = \ (X{:}M)$ [12] dir.

Tanım 4.6 R bir halka, M bir R −modül olsun. $0{:}M\ = \{r \in R{:}rM = 0\}$ idealine M modülünün anhilatörü denir ve $Ann(M)$ ile gösterilir. Eğer $Ann\ M\ = 0$ ise M modülüne sadık (faithful) modül denir.

$Ann\ M\ = \ {}_{m\in M} Ann(m)$ olduğu açıktır [12].

Önerme 4.5 R bir halka, M bir R −modül, $\emptyset \neq X \subseteq M$ bir alt küme, N_i ler ve N alt modüller olsun.

(1) ${}_{i\in I} N_i : X\ = \ {}_{i\in I}(N_i{:}X)$

(2) N ve N' alt modülleri için $Ann\ \ N + N'\ \ = Ann(N) \cap Ann(N')$ dir [12].

Önerme 4.6 R bir halka, M bir R −modül ve N de bir alt modül olsun.

$R\ x\ M/N \to M/N$ skaler çarpımını $r, m + N\ \to rm + N$ ile tanımlanırsa, M/N toplamsal bölüm grubu bir R −modüldür ve M/N ye bölüm modülü denir [12].

Sonuç 4.1 R bir halka, M bir R −modül olsun. Bu durumda M/N bölüm modülü aynı zamanda bir $R/(N{:}M) = R/ann(M/N)$ −modüldür [12].

Örnek 4.8 R bir halka, M bir R −modül ve N_1, N_2 birer alt modül olsun.

$Ann((N_1 + N_2)/N_1) = (N_1{:}N_1 + N_2) = (N_1{:}N_2)$ [12] dir.

4.2 Modül Homomorfizmaları

Tanım 4.7 R bir halka, M ve N de birer R −modül olsun. Bir $f : M \to N$ fonksiyonu, her $m, m' \in M$ ve her $r \in R$ için ;

$f\ \ m + m'\ \ = f\ \ m\ \ + f\ \ m'$ ve $f\ \ rm\ \ = rf\ \ m$

koşullarını sağlıyorsa, f ye bir modül homomorfizması veya R −homomorfizma denir.

Tanım 4.8 Bir modül homomorfizması olan f ; 1-1 ise monomorfizma ; örten ise epimorfizma ve de hem 1-1 hem de örten ise bu homomorfizmaya izomorfizma denir [12].

Önerme 4.7 R bir halka ve $f : M \to N$ bir homomorfizma olsun.

(1) $f\ \ 0_M\ \ = 0_N, f\ \ -m\ \ = -f(m)$

(2) $Çek\ f = f^{-1}\ \ 0_N\ \ = \ \ m \in M : \ f\ \ m\ \ = 0_N$ kümesi bir M alt modülüdür.

(3) f homomorfizmasının bire bir olması için gerek ve yeter koşul $Çekf = 0$ olmasıdır.

(4) $f(M) = Im\,f, N$ nin bir alt modülüdür [12].

Önerme 4.8 R bir halka, M ve N bir $R-$modül ve $f : M \to N$ bir homomorfizma olsun.

(1) f örten ise $ann(M) \subseteq ann(N)$

(2) f bire bir ise $ann(N) \subseteq ann(M)$

(3) f izomorfizma ise $ann(N) = ann(M)$ olur [12].

Önerme 4.9 R bir halka, M ve N bir $R-$modül ve f_1 ve $f_2 : M \to N$ birer homomorfizma olsun. O halde homomorfizmaların toplamı ;

$(\boldsymbol{f_1} + \boldsymbol{f_2})(m) = f_1(m) + f_2(m)$ ile tanımlanırsa $f_1 + f_2$ de bir modül homomorfizmasıdır [12].

Tanım 4.9 R bir halka, M bir $\boldsymbol{R}-$modül ve N bir alt modül olsun.

$f : M \to M/N, f(m) = m + N$ ile tanımlı fonksiyon bir örten homomorfizmadır. Bu fonksiyona doğal homomorfizma denir [12].

Teorem 4.4 (Homomorfizma Teoremi) R bir halka, M ve N bir $R-$modül ve $f : M \to N$ bir homomorfizma olsun. O halde ;

$M/Çekf \cong f(M) = Im\,f$ dir [12].

Tanım 4.10 Sıfırdan farklı bir modülün, sıfır ve kendisinden başka hiçbir alt modülü yoksa bu modüle basit modül denir [12].

Örnek 4.9 p asal tamsayıları için Z_p, $Z-$modülleri basit modüllerdir [12].

Tanım 4.11 Bir M modülünün öz bir alt modülü olan N alt modülü için, M nin N yi kapsayan N den başka hiçbir öz alt modülü yoksa N ye bir maksimal alt modül denir [12].

Önerme 4.10 R bir halka, M bir R-modül ve N alt modül olmak üzere N nin maksimal alt modül olması için gerek ve yeter koşul M/N bölüm modülünün basit modül olmasıdır [12].

BÖLÜM 5

DEĞİŞMELİ OLMAYAN HALKALAR ÜZERİNDEKİ ÇARPIMSAL MODÜLLER

5.1 Çarpımsal Modüllerin Genel Özellikleri

Tanım 5.1 R bir halka, M bir sol R −modül olsun. M nin her N alt modülü için $N = IM$ olacak şekilde R nin bir I ideali varsa, M ye çarpımsal sol $R -$ modül denir[1].

Örnek 5.1 Her R halkası, kendisi üzerinde bir çarpımsal sol $R -$ modüldür [1].

Önerme 5.1 R bir halka olmak üzere

M çarpımsal sol R −modüldür $\Leftrightarrow$ Her N alt modülü için $N = (N: M)M$ dir [1].

İspat : $\Rightarrow$: M bir çarpımsal sol R −modül ise her N alt modülü için $N = IM$ olacak şekilde I ideali vardır.

$IM = N$ ise $IM \subseteq N$ dir. Öyleyse $(N: M)$ nin tanımı gereği $I \subseteq (N: M)$ dir.

$N = IM \subseteq (N: M)M$ yani $N \subseteq (N: M)M$ … (1)

Her $r \in (N: M)$ için $rM \subseteq N$ ise $(N: M)M \subseteq N$…(2) bulunur.

Sonuç olarak ise (1) ve (2) den de $N = (N: M)M$ olduğu görülür.

$\Leftarrow$: $(N: M)$; R nin bir ideali olduğundan $(N: M) = I$ dersek her N alt modülü için $N = (N: M)M = IM$ bulunur ve M çarpımsal sol R −modül olur.

Örnek 5.2 Her basit sol $R -$ modül çarpımsal sol $R -$ modüldür[1].

İspat : M bir basit sol $R -$ modül olsun. M nin çarpımsal sol $R -$ modül olduğunu gösterelim.

M basit sol $R -$ modül olduğundan alt modülleri 0_M ve M dir. M nin çarpımsal sol R-modül olabilmesi için her N alt modülü için $N = IM$ olacak şekilde I ideali var olmalıdır. O halde, $0_M = 0_R M$ olan 0_R ideali ve $M = RM$ olan halkanın kendisi ideal olarak var olur. Dolayısıyla M basit sol $R -$ modülü çarpımsal sol $R -$ modül bulunur.

- $p\mathbb{Z}$ (p-asal), $\mathbb{Z} -$ modül olarak çarpımsaldır.
- Tersi olarak; $\mathbb{Z}, \mathbb{Z} -$ modül olarak çarpımsaldır fakat basit modül değildir.

Örnek 5.3 Basit halka üzerindeki her sıfırdan farklı çarpımsal sol R −modül basit sol $R -$ modüldür[1].

İspat : R bir basit halka ve M sıfırdan farklı bir sol R −modül olsun. M nin basit modül olduğunu göstermek için kendisinden ve 0_M alt modülünden başka alt modülünün olmadığını göstermeliyiz. R basit halka olduğundan idealleri sadece 0_R ve R dir. M modülü çarpımsal sol R −modül olduğundan her N alt modülü için $N = IM$ olacak şekilde R nin bir I ideali vardır. O halde M nin alt modülleri ;

$N = IM = 0_R M = 0_M$ ve $N = IM = RM = M$ olarak bulunur. M nin 0_M ve M alt modüllerinden başka alt modülü bulunamadığından M bir basit çarpımsal sol $R -$ modüldür.

Önerme 5.2 R halka M sol R-modül olmak üzere ;

M bir çarpımsal sol R-modüldür ⇔ $I \subseteq ann(M)$ olacak şekilde I ideali için M bir çarpımsal sol R/I −modüldür[1].

İspat : ⇒: M çarpımsal sol R-modül olsun. $I \subseteq ann(M)$ için M nin bir çarpımsal sol R/I −modül olduğunu gösterelim.

Öncelikle M nin bir sol R/I −modül olduğunu göstereceğiz. Burada skaler çarpımı ;

$R/I \times M \rightarrow M$; $(r + I, m) = rm$ olarak tanımlanırsa M sol R/I −modüldür, çünkü;

- **İyi tanımlılık**

$(r + I, m) = (r' + I, m')$ iken $m = m'$ ve $r + I = r' + I$ olur.

Öyleyse $r - r' \in I \subseteq ann(M)$ bulunur, yani her $m \in M$ için

$(r - r')m = 0_m = rm - r'm$ olur. Buradan ;

$rm = r'm$ ve $m = m'$ olduğundan $rm = r'm'$ bulunur ve iyi tanımlıdır.

- **Modül**

Her $r + I, s + I \in R/I$ ve m, n ∈M için,

(i) $(r + I, (m + n)) = rm + Im + rn + In$ olur. $I \subseteq ann(M)$ olduğundan $Im = In = 0_m$ olur. Buradan

$(r + I, (m + n)) = rm + rn = (r + I, m) + (r + I, n)$

(ii) $r + I + s + I\ , m = r + s + I\ , m = r + s\ m = rm + sm$

$= (r + I, m) + (s + I, m)$

(iii) $r + I\quad s + I, m = r + I, sm = rsm = rs + I, m$

$= (((r + I)(s + I)), m)$ bulunur.

Böylece M bir sol R/I-modül olur.

Şimdi M sol R/I-modülünün çarpımsal olduğunu göstereceğiz.

M çarpımsal sol R −modül olduğundan her N alt modülü için $N = JM$ olacak şekilde J ideali vardır. Her N alt modülü için $N = J'M$ olacak şekilde $J' < R' = R/I$ ideali bulunabilirse M bir çarpımsal sol R/I −modüldür.

$J' = (J + I)/I$ alındığında J' bir R' idealidir. Gerçekten de ;

$a, b \in J, x, y \in I$ olmak üzere her $a' = a + x + I, b' = b + y + I \in J'$ için

$a' - b' = a + x + I - (b + y + I)$ olur. $(R, +)$ değişmeli bir grup olduğundan ;

$a' - b' = a + x + I - b + y + I = a - b + (x - y) + I$ elde edilir. J ve I birer ideal olduğundan $a - b \in J$ ve $x - y \in I$ bulunur. Dolayısıyla her $a', b' \in J'$ için $a' - b' \in (J + I)/I = J'$ bulunur.

Ayrıca; her $r' = r + I \in R/I$ ve $a \in J, x \in I$ olmak üzere her $a' = a + x + I \in J'$ için $r'a' = r + I\quad a + x + I = ra + rx + I$ olur. $a \in J$ ve J ideal olduğundan $ra \in J$ olur benzer şekilde $rx \in I$ ve $r'a' \in (J + I)/I$ bulunur.

Sonuç olarak J' ; R' nün bir idealidir.

Böylece M çarpımsal modül iken her N alt modülü için $N = JM$ olacak biçimde bir J ideali bulunduğundan $I \subseteq ann\ M$ için ;

$N = JM = JM + 0_M = (\ J + I\ /I)M = J'M = N$ elde edilir. Dolayısıyla ; her N alt modülü için R' nün $N = J'M$ olacak şekilde J' ideali vardır ve buradan M nin bir çarpımsal sol R/I- modül olduğu görülür.

⇐: $I \subseteq ann(M)$ için M bir çarpımsal sol $R' = R/I - \text{modül}$ olsun. M nin çarpımsal sol $R -$ modül olduğu gösterilmelidir.

Skaler çarpımı R x $M \rightarrow M$; $(r,m) = rm$ olarak tanımlarsak, M nin bir sol R −modül olduğu açıktır.

$I \subseteq ann(M)$ için M bir çarpımsal sol $R' = R/I -$ modül olduğundan her N alt modülü için $N = J'M$ olacak şekilde R' nün J' ideali vardır.

Bir J ideali için $J' = (J + I)/I$ alırsak ;

$N = J'M = JM + 0_M = JM = N$ olacak şekilde R nin J ideali olduğundan M çarpımsal sol R −modüldür.

Önerme 5.3 R halka ve M bir sol R −modül olsun. O halde ;

M nin bir çarpımsal sol R −modül olması için gerek ve yeter koşul her $m \in M$ için

$Rm = IM$ olacak şekilde R nin bir I ideali bulunmasıdır [3].

İspat : $\Leftarrow$: Her $m \in M$ için $Rm = IM$ olacak şekilde I ideali mevcut olsun. M nin çarpımsal sol $R -$ modül olduğunu göstermeliyiz.

Her $m \in M$ için sağlanıyorsa her $n \in N$ için de $Rn = I_n M$ olacak şekilde I_n ideali vardır. I yı I_n olarak alırsak yani $I = \quad I_n$ ise her $n \in N$ için

$n \in Rn = I_n M \subseteq \quad I_n M = IM$ olduğundan $N \subseteq IM$ bulunur. Aynı şekilde ;

$IM = \quad I_n M = (I_{n_1} + I_{n_2} + \ldots)M \subseteq N$ olur ve sonuç olarak ;

$IM \subseteq N$ ve $N = IM$ elde edilir. Böylece M çarpımsal sol R-modül olur.

$\Rightarrow$: M çarpımsal sol R −modül ise her $m \in M$ için Rm bir alt modül ve

$N = Rm = IM$ olacak şekilde bir I ideali vardır.

Tanım 5.2 M bir sol R-modül olmak üzere $X, Y \subseteq M$ için ;

$(Y{:}X) = \{r \in R : rX \subseteq Y\}$ kümesi " Y kolon X " olarak adlandırılır ve aşağıdakiler sağlanır .

(1) Y bir alt modül ve X bir alt küme olduğunda $(Y{:}X)$ bir sol idealdir.

(2) Y ve X birer alt modül olduğunda $(Y{:}X)$ bir ideal olur [1].

Şimdi (1) ve (2) yi ispatlayalım.

(1) : Y bir alt modül ve X alt küme olsun bu durumda ; $r, s \in (Y{:}X)$ için

$rX \subseteq Y, sX \subseteq Y$ dir. Her $x \in X \subseteq$ M için $rx = y_1$ ve $sx = y_2$ olacak şekilde $y_1, y_2 \in$ Y vardır. Böylece ;

$y_1 - y_2 = rx - sx = (r-s)x \in Y$ bulunur.

Her $x \in X$ için sağlandığından $(r-s)X \subseteq Y$; $r-s \in (Y{:}X)$ bulunur.

$a \in R$ için, $r \in (Y{:}X)$ ise $rX \subseteq Y$ ve Y alt modül olduğundan $arX \subseteq Y$ böylece $ar \in (Y{:}X)$ bulunur ve $(Y{:}X)$ bir sol idealdir.

(2) : X, Y alt modül iken $(Y{:}X)$ in bir ideal olduğunu göstereceğiz.

(1). kısımda sol ideal olduğu gösterilmişti. Şimdi sağ ideallik şartı gösterilmelidir. Yani $a \in R, r \in (Y{:}X)$ için $ra \in (Y{:}X)$ olduğu gösterilmelidir. $a \in R, r \in (Y{:}X)$ ise $rX \subseteq Y$ ve X alt modül olduğundan $aX \subseteq X$ dir. Her iki taraf r ile çarpıldığında $raX \subseteq rX \subseteq Y$ bulunur . Yani $ra \in (Y{:}X)$ dir ve $(Y{:}X)$ bir idealdir.

Örnek 5.4 R= $\mathcal{M}_{2x2}\ \mathbb{Z}$ bir halka ve $M = \mathcal{M}_{2x2}\ \mathbb{Q}$ bir sol R −modül iken ;

Y={ $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$: $a, b \in n\mathbb{Z}$ } bir alt modüldür.

$n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ olduğundan $Y \in M$ dir.

$y_1, y_2 \in Y$ ve $r \in R$ için $y_1 - y_2 \in Y$ ve $r.y_1 \in Y$ olduğundan Y bir alt modüldür.

$X = \{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : c \in \mathbb{Z}^+ \} \subseteq M$

kümesi bir alt modül değildir.

Çünkü modül şartı olarak X bir toplamsal grup değildir. ($0 \notin X$)

$$Y : X = r \in R : rX \subseteq Y$$

$$= \{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} : z_i \in \mathbb{Z}, i = 1,2,3,4 ; \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Y, c \in \mathbb{Z}^+ \}$$

$$= \{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} cz_1 & 0 \\ cz_3 & 0 \end{pmatrix} \in Y \ , z_i \in \mathbb{Z}, cz_1, cz_3 \in n\mathbb{Z}, c \in \mathbb{Z}^+ \}$$

$$= \{ \begin{pmatrix} nk & s \\ np & t \end{pmatrix} : n, k, p, s, t \in \mathbb{Z} \}$$

$= (Y{:}X)$ bir sol idealdir.

Çünkü $r.y = \begin{matrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{matrix} \begin{matrix} nk & s \\ np & t \end{matrix} = \begin{matrix} nkz_1 + npz_2 & f \\ nkz_3 + npz_4 & d \end{matrix} \in (Y{:}X)$ dir $(f, d \in \mathbb{Z})$.

Fakat $y.r = \begin{matrix} nk & s \\ np & t \end{matrix} \begin{matrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{matrix} = \begin{matrix} nkz_1 + sz_3 & g \\ npz_1 + tz_3 & b \end{matrix} \notin (Y:X)$ olduğundan sadece sol idealdir.

Aynı şekilde $X = \{ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : c \in n\mathbb{Z}, c \in \mathbb{Z}^{+}\}$ olarak aldığımızda X alt modül olur ve $(Y:X)$ bir idealdir.

$(Y:X) = \{ r \in R : rX \subseteq Y \}$

$= \{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} nt & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in Y, z_i, t \in \mathbb{Z}, i = 1,2,3,4 \}$

$= \{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} ntz_1 & 0 \\ ntz_3 & 0 \end{pmatrix} \in Y \}$ olur .

Her $z_i \in \mathbb{Z}$ için sağlandığından $(Y:X) = R$ olur ve bir idealdir.

Önerme 5.4 Bir çarpımsal sol R −modülün homomorf görüntüsü de çarpımsal sol R -modüldür [1].

İspat : M, R halkası üzerindeki bir çarpımsal sol $R-$ modül olsun. $f : M \rightarrow M$ bir epimorfizma ve N, M nin alt modülü olsun. $f(N) = N$ olacak şekilde M nin bir N alt modül vardır. M modülü çarpımsal sol R- modül olduğundan $N = IM$ olacak şekilde R nin bir I ideali var olur. Sonuç olarak ;

$N = f(N) = f(IM) = I\,f(M) = IM$ olur ve M çarpımsal sol $R-$ modül bulunur.

Sonuç 5.1 R bir halka ve M bir sol R −modül olsun. M nin N alt modülü için, M çarpımsal ise M/N bölüm modülü de çarpımsaldır [1].

İspat : M bir sol R −modül ise N alt modülü için M/N de sol R-modüldür. Buradan,

$f : M \longrightarrow M/N$ homomorfizmasını ele aldığımızda fonksiyon örten olduğundan homomorf görüntüsü $f(M) = M/N$ olur. Önerme 5.4 ten çarpımsal modülün homomorf görüntüsü de çarpımsal bulunur.

Önerme 5.5 M, R halkası üzerinde çarpımsal bir sol R −modül olsun . R nin

$IM \neq M$ şartını sağlayan her I ideali için ; $ann(M/X) \nsubseteq I$ olacak şekilde bir X devirli alt modülü vardır [1] .

İspat : M çarpımsal bir sol R-modül ise $IM \subseteq M$ dir. $IM \neq M$ olduğundan

$x \notin IM$ olan $x \in M$ vardır ve böylece $X = (x)$ devirli alt modülü mevcut bulunur. $x \notin IM$ olduğundan $X \nsubseteq IM$ dir. M çarpımsal sol R- modül olduğundan her N alt modülü için $N = KM$ olacak şekilde K ideali mevcuttur, öyleyse X devirli alt modülü için de $X = JM$ olacak biçimde bir J ideali vardır. $X \nsubseteq IM$ ise $X = JM \nsubseteq IM$ olur. Buradan $J \nsubseteq I$ bulunur. Çünkü ; $JM = X \nsubseteq IM$ iken J⊆ I olsun . Her $j \in J$ için $j \in I$ olur ve buradan $jM \subseteq JM$ ve $jM \subseteq IM$ olur. Her j için sağlandığından $JM \subseteq IM$ bulunur bu da $JM = X \nsubseteq IM$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $J \nsubseteq I$ dir.

$JM = X$ ise $JM \subseteq X$ yani $J \subseteq (X{:}\,M) = ann(M/X)$ dir.

$J \subseteq ann(M/X)$ ve $J \nsubseteq I$ olduğundan $ann(M/X) \nsubseteq I$ dir. Çünkü ; $J \nsubseteq I$ iken $ann(M/X) \subseteq I$ olursa $J \subseteq ann(M/X) \subseteq I$ olduğundan $J \subseteq I$ bulunur bu da hipotez ile çelişir. Dolayısıyla $ann(M/X) \nsubseteq I$ dir.

5.2 Çarpımsal Modüllerin Bazı Özel Halleri

Önerme 5.6 M bir sol $R -$ modül olmak üzere aşağıdakiler denktir.

(1) : M çarpımsal modüldür.

(2) : M nin devirli her X alt modülü için $X = IM$ olacak şekilde I sol ideali vardır.

(3) : M nin her X alt modülü ve her $i \in I$ için $X = \quad X_i$ ve $X_i = I_iM$ olacak şekilde X in alt modüllerinin kümesi $\{X_i\}$ ve $\{I_i\}$ ideallerin kümesi vardır [1].

İspat : (1)⇒(2) : M çarpımsal modül olsun . Her N alt modülü için devirli alt modüller dahil $N = JM$ olacak şekilde J ideali vardır. Yani X devirli alt modülü için $X = IM$ olacak şekilde I ideali dolayısıyla sol ideali vardır.

(2) ⇒(3) : M nin her X alt modülü ve bu X alt modülünün $\{X_i\}$ devirli alt modüllerinin kümesi için X_i ; X in alt modülü ise M nin de alt modülü olur. Her X alt modülü için $X = \quad X_i$ dir çünkü her $x \in X$ için $x = r.x_1 + r.x_2 + \cdots .. r.x_n$ olacak şekilde $x_i \in X_i$ bulunur ve $\{X_i\}$ modül ailesi mevcuttur. Hipotezden X_i devirli olduğundan X_i=I_iM olacak şekilde I_i sol ideali vardır. X_i= I_iM olduğundan $I_iM \subseteq X_i$ sağlanır. I_i =(X_i : M) alındığında X_i ve M birer alt modül olduğundan tanım 5.2 (2) gereği I_i bir ideal olur ve $\{I_i\}$ idealler kümesi bulunur.

(3) ⇒(1) : Her X alt modülü için $X = \quad X_i$ ve $X_i = I_i M$ olacak şekilde $\{X_i\}$ ve $\{I_i\}$ idealler ailesi mevcut olsun.

Bu durumda her X alt modülü $X = \quad X_i = \quad (I_i M\ ) = (\quad I_i)M$ olarak yazılabilir. $\quad I_i = I$ olarak alındığında I bir ideal olur ve her X alt modülü için $X = IM$ olacak şekilde bir I ideali bulunduğundan M bir çarpımsal sol R −modül olur.

Tanım 5.3 M sol R-modülünün sıfırdan farklı her X alt modülü için $N \cap X \neq 0$ koşulunu sağlayan N alt modülüne asli alt modül denir. Bu durumda M ye de N nin asli genişlemesi denir. Benzer şekilde R nin her $J \neq 0$ ideali için $I \cap J \neq 0$ oluyorsa I idealine asli ideal denir [1].

Tanım 5.4 M bir sol R- modül ve N, M nin alt modülü olsun. M nin her sıfırdan farklı P asal alt modülü için $N \cap P \neq 0$ oluyorsa N ye yarı asli alt modül denir [2].

Örnek 5.5 R nin her asli alt modülü yarı asli alt modülüdür. Tersi her zaman doğru değildir. $\mathbb{Z}$-modül olarak $\mathbb{Z}_{12}$ nin $\overline{6}$ altmodülü yari asli alt modülüdür ancak asli değildir. $4 \cap 6 = 0$ fakat $2 \cap 6 \neq 0$ ve $3 \cap 6 \neq 0$ [2].

Önerme 5.7 M sadık çarpımsal sol R- modül, her I_i ideali için $\ _{i \in I}(I_i\, M) = (\cap\, I_i)M$ ve N, M nin alt modülü olsun. N nin asli alt modül olması için gerek ve yeter koşul $N = IM$ olacak şekilde R nin bir I asli idealinin olmasıdır [1].

İspat : ⟹: N, M nin bir asli alt modülü olsun. M çarpımsal modül olduğundan $N = JM$ olacak şekilde R nin bir J ideali vardır. R nin bazı B idealleri için $J \cap B = 0$ olsun. Bu durumda M sadık olduğundan $N \cap BM = JM \cap BM = (J \cap B)M = 0M = 0$ ve N asli olduğundan $BM = 0$ olmalıdır. Buradan $B \in ann\ M$ ve M sadık olduğundan $B = 0$ dir. Öyleyse J, R nin asli idealidir.

⟸: I, R nin bir asli ideali ve K, M nin $IM \cap K = 0$ olacak şekilde bir alt modülü olsun. M çarpımsal olduğundan $K = XM$ olacak şekilde R nin bir X ideali vardır. $(I \cap X)M \subseteq IM \cap K = 0$ dır. M sadık olduğundan $(I \cap X) = 0$ olur. Buradan I asli olduğundan $X = 0$ dır. Böylece $K = XM = 0M = 0$ bulunur ve $IM = N$ asli alt modül olur.

Önerme 5.8 R bir halka, M bir çarpımsal sol $R-$modül ve $f : R \rightarrow R/ann(M)$ ile tanımlı halka epimorfizması olsun. I ise $ann(M) \subseteq I$ olacak şekilde R nin sol ideali ve $f(I)$ da $f(R)$ nin asli sol ideali ise IM ; M nin asli alt modülüdür [1].

İspat : IM nin asli olduğunu göstermek için ya her N alt modülü için $N \cap IM \neq 0$ olduğu ya da $N \cap IM = 0$ için $N = 0$ olduğu gösterilmelidir .

$N \cap IM = 0$ olsun . M çarpımsal modül olduğundan $N = JM$ olacak şekilde J ideali vardır. $(J \cap I)M \subseteq JM \cap IM = N \cap IM = 0$ ise $(J \cap I)M \subseteq 0$ olur. Böylece

$f(J \cap I) = 0_{R/ann(M)}$ bulunur. f bir epimorfizma olduğundan

$f(J \cap I) = f(J) \cap f(I) = 0$ dır. $f(I)$ asli sol ideal olduğundan her $f(J)$ ideali için $f(J) \cap f(I) = 0$ iken $f(J) = 0$ olmalıdır. Öyleyse $f(J) = 0$ dır. Sonuç olarak ise $JM = N = 0$ bulunur ve IM asli bulunur.

Tanım 5.5 Bir M modülünün sıfırdan farklı herhangi iki alt modülünün kesişimi sıfırdan farklı ise M modülüne düzgün (uniform) denir [1].

Önerme 5.9 R halka, M çarpımsal sol $R-$modül ve $f : R \rightarrow R/ann(M)$ ile tanımlı halka epimorfizması olsun . $f(R)$ halkasının sıfırdan farklı iki idealinin kesişimi sıfırdan farklı ise M düzgündür[1].

İspat : M nin herhangi iki alt modülü X, Y için $X \cap Y = 0$ iken $X = 0$ veya $Y = 0$ olduğu gösterilirse M düzgündür. $Y \cap X = 0$ olsun. M çarpımsal olduğundan $X = IM$ ve $Y = JM$ olacak şekilde I, J ideali vardır. $J \cap I \; M \subseteq JM \cap IM = Y \cap X = 0$ dır. Öyleyse $f \; J \cap I \; = 0_{R/ann(M)}$ dir. f bir epimorfizma olduğundan

$f \; J \cap I \; = f \; J \; \cap f \; I \; = 0$ dır . Hipoteze göre sıfırdan farklı iki idealin kesişimi sıfır olamayacağından $f(I) = 0$ veya $f(J) = 0$ dır. Yani $f(I) = 0$ ise $IM = 0$ bulunur.Yani $IM = X = 0$ dır. Böylece M düzgün (uniform) olduğu görülür.

Tanım 5.6 M sıfırdan farklı bir sol $R-$modül olmak üzere M nin sıfırdan farklı her N alt modülü için $ann(N) = ann(M)$ oluyorsa M ye asal modül denir. Eğer M/N asal modül oluyorsa N ye de asal alt modül denir.

R halkasının sıfırdan farklı I, J idealleri için $IJ \neq 0$ oluyorsa R ye asal halka denir[1].

Önerme 5.10 R halka M bir çarpımsal sol R-modül ve $f : R \rightarrow R/ann(M)$ halka epimorfizması olsun. $Ann(M)$, R nin asal ideali ise M asal modüldür [1].

İspat : M nin asal olduğunu göstermek için her N alt modülü için $ann(M) = ann(N)$ olduğunu göstermeliyiz.

Her $r \in ann(M)$ için $rM = 0$ ve sıfırdan farklı N alt modülü için $rN = 0$ dır. Öyleyse

$r \in ann(N)$ dir. Yani ; $ann(M) \subseteq ann(N)$ …(1) bulunur.

$0 \neq N$ alt modülü için M çarpımsal olduğundan $N = JM$ olacak şekilde J ideali vardır. Burada $f(J) \neq 0$ dır. Çünkü $f(J) = 0$ ise $J \subseteq ann(M)$ ve $JM \subseteq ann(M)M = 0$ yani $JM = N = 0$ bulunur bu da N alt modülünün seçimi ile çelişir.

Sonuç olarak $f(J) \neq 0$ yani $J \nsubseteq ann(M)$ dir. $N = JM$ olduğundan

$ann(N)J \subseteq ann(M)$ bulunur. Çünkü $r \in ann(N), j \in J$ olmak üzere

$r.j \in ann(N)J$ için $rjM \subseteq rJM = rN = 0$ dır. ($r \in ann(N)$ olduğundan) Öyleyse $rjM = 0$ yani $r.j \in ann(M)$ dir. Buradan $ann(N)J \subseteq ann(M)$ dir. $Ann(M)$ asal ideal olduğundan ya $ann(N) \subseteq ann(M)$ ya da $J \subseteq ann(M)$ olmalıdır.

$J \nsubseteq ann(M)$ olduğundan $ann(N) \subseteq ann(M)$… (2) bulunur.

(1) ve (2) den de $ann(N) = ann(M)$ eşitliği elde edilir ve M asaldır.

Tanım 5.7 M bir sol $R-$modül olmak üzere M nin herhangi X, Y ve Z alt modülleri için $(X + Y) \cap Z = X \cap Z + Y \cap Z$ sağlanıyorsa M ye dağılmalı (distributive) modül denir [1].

Önerme 5.11 R iki taraflı ideallerinin latisi dağılmalı olan halka ve M ; I, J idealleri için $IM \cap JM = (I \cap J)M$ olacak şekilde çarpımsal sol $R-$modül ise M dağılmalı modüldür[1].

İspat : $(X + Y) \cap Z = X \cap Z + Y \cap Z$ olduğunu göstermeliyiz . X, Y ve Z alt modülü için M çarpımsal olduğundan $X = IM$, $Y = JM$ ve $Z = KM$ olacak şekilde I, J ve K idealleri vardır.

$(X + Y) \cap Z = (IM + JM) \cap KM = (I + J)M \cap KM = ((I + J) \cap K)M$

$= (I \cap K + J \cap K)M = (I \cap K)M + (J \cap K)M = IM \cap KM + JM \cap KM$

$= X \cap Z + Y \cap Z$ bulunur.

Tanım 5.8 R bir halka ve M bir sol R-modül olmak üzere ; $Z(M)$ ve $Z(R)$ kümeleri

$Z(M) = \{ r \in R$: sıfırdan farklı bazı $m \in M$ ler için $rm = 0 \}$

$Z(R) = \{ r \in R$: sıfırdan farklı bazı $s \in R$ için $rs = 0\}$ olarak tanımlanır.

Önerme 5.12 R bir halka ve M bir sol R −modül olsun. M sadık çarpımsal sol $R-$ modül ise $Z(R) = Z(M)$ dir [1].

İspat : Her $a \in Z(R)$ için $as = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı $s \in R$ vardır. M sadık olduğundan dolayı $0 \neq s \in R$ için $sM \neq 0$ ve $as = 0$ olduğundan $asM = 0$ dır. $Z(M)$ tanımından da $a(sM) = 0$ olduğundan $a \in Z(M)$ bulunur ve $Z(R) \subseteq Z(M)$ elde edilir.

Diğer taraftan ; her $r \in Z\ M$ için $rm = 0$ olacak biçimde en az bir sıfırdan farklı $m \in M$ vardır. M çarpımsal sol R-modül olduğundan önerme 5.3 e göre her $m \in M$ için $Rm = IM$ olacak şekilde bir I ideali vardır. Böylece $rm = 0$ olduğundan $rIM = 0$ bulunur. M nin sadık R −modül olmasından dolayı da $rI = 0$ olmalıdır. I ideali sıfırdan farklı olduğundan $Z\ R$ nin tanımı gereği $r \in Z\ R$ bulunur. Buradan da

$Z(M) \subseteq Z(R)$ elde edilir.

Sonuç olarak da $Z(M) = Z(R)$ olduğu görülür.

5.3 Çarpımsal Modüllerin Maksimal Alt Modülleri

Önerme 5.13 R bir halka ve M çarpımsal sol R −modül iken P bir maksimal ideal ve $PM \neq M$ ise PM maksimal alt modüldür [1].

İspat : P maksimal ideal ise R nin öz idealidir ve $P \neq R$ dir. Dolayısıyla $RM = M \neq PM$ olur. Böylece PM, M nin bir öz alt modülüdür.

PM nin maksimal olması için PM yi kapsayan hiç bir öz alt modül olmaması gerekir. Kabul edelim ki $PM \subsetneq N \subsetneq M$ olacak şekilde N, M nin bir alt modülü olsun. M çarpımsal alt modül olduğundan her N alt modülü için $N = IM$ olacak biçimde bir I ideali vardır. Böylece $PM \subsetneq N = IM$ olur. $PM \subsetneq IM$ iken de $P \subsetneq I$ dir. Çünkü $PM \subsetneq IM$ iken $P \subsetneq I$ olmasaydı yani $P \not\subset I$ olsaydı $p \notin I$ olacak şekilde bir

$p \in P$ bulunabilirdi. $p \in P$ ve her $m \in M$ için $pm \in PM$ olur ve $pM \subseteq PM$ bulunur. Buradan $p \notin I$ olduğundan $pm \notin Im$ ve her $m \in M$ için $pM \not\subset IM$ olur. Bu da $PM \subsetneq IM$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $P \subsetneq I$ dir. Bu ise P nin maksimal ideal olması ile çelişir. Bu çelişki $PM \subsetneq N \subsetneq M$ olacak şekilde N alt modülünün varlığının kabulünden kaynaklanmaktadır.

Sonuç olarak, PM yi kapsayan öz alt modül yoktur ve PM maksimal alt modüldür.

Önerme 5.14 M bir çarpımsal sol R −modül ve P bir maksimal ideal olsun.

(1) : $M \neq PM$ ise M/PM modülü çarpımsal basit sol $R/P -$ modüldür ve

$R = P + ann(M/X)$ olacak şekilde bir X devirli alt modülü vardır.

(2) : M/PM modülü en fazla iki alt modüle sahip devirli modüldür ayrıca ya $M = PM$ ya da PM, M nin maksimal alt modülüdür [1].

İspat (1) : M çarpımsal sol R −modül iken P maksimal ideali için M/PM nin çarpımsal sol R/P –modüldür. Öncelikle bunu göstermeliyiz. M sol R −modülünün N alt modülleri için de M/PM nin alt modülleri N/PM şeklindedir. Çünkü ;

$a + PM, b + PM \in N/PM$ için $a, b \in N$ olmak üzere;

$(a + PM) - (b + PM) = a - b + PM \in N/PM$ olur.

$r + P \in R/P\ için\ (r + P)(a + PM) = ra + Pa + PM + rPM = ra + PM \in N/PM$ olur ve N/PM bir alt modül bulunur.

Şimdi de M/PM nin çarpımsal olduğunu gösterelim.

Her N/PM alt modülü için $N + PM = (I + P)(M + PM)$ olacak biçimde $I + P$ ideali mevcut ise M/PM çarpımsal olur. M çarpımsal olduğundan her N alt modülü için $N = IM$ olacak şekilde I ideali vardır . Buradan ;

$(I + P)(M + PM) = IM + IPM + PM + PPM = IM + PM = N + PM$ olduğundan M/PM çarpımsal bulunur.

P maksimal ideali için R/P halkası basittir, çünkü I/P ideali için $P \subseteq I \subseteq R$ dir fakat P maksimal olduğundan $I = R$ ya da $I = P$ olmalıdır. Dolayısıyla I/P ideali R/P ya da 0 idealidir. Böylece R/P nin kendisinden ve de sıfırından başka ideali olmadığından basit halka olduğu görülür. Örnek 5.3 ten de basit halka üzerindeki çarpımsal modüllerin basit modül olduğu söylenir. Yani M/PM çarpımsal basit sol R/P-modüldür.

Buna göre önerme 5.5 ten $PM \neq M$ iken $ann\ (M/X) \nsubseteq$ P olacak şekilde X devirli alt modülünün var olduğunu biliyoruz. P maksimal ideali için

$ann(M/X) \nsubseteq P$ olduğundan bir $r \in ann(M/X)$ için $R = (r) + P$ yani

$ann(M/X) + P = R$ bulunur.

(2) : Özellik (1) den M/PM nin basit modül olduğunu biliyoruz . Eğer $M/PM = 0$ ise M/PM tek bir alt modüle sahip devirli modül olur. Eğer $M/PM \neq 0$ ise yani $M \neq PM$ ise PM maksimal alt modül olur çünkü $PM \subseteq N \subseteq M$ için N/PM ; M/PM nin bir alt modülü olur fakat bu da basit olması ile çelişir dolayısıyla PM maksimaldir ve M/PM nin en fazla iki alt modülü vardır.

Önerme 5.15 R bir halka ve M bir sıfırdan farklı çarpımsal sol R-modül olmak üzere M nin maksimal alt modülü vardır [1].

İspat : $0 \neq m \in M$ elemanını alalım. $Ann\ m$,R nin bir öz idealidir çünkü aksi olsaydı yani $R = Ann(m)$ olurdu ve $1 \in Ann(m)$ olurdu ve $1.m = m = 0$ bulunurdu. $Ann(m)$ öz olduğundan $Ann(m) \subseteq P$ olacak şekilde bir maksimal P ideali vardır.

Eğer $M = PM$ ise M çarpımsal olduğundan $(1-p)m = 0$ olacak şekild$e\ bir\ p \in P$ vardır. O halde ;

$(1-p) \in Ann(m) \subseteq P$ olurdu. P maksimal olduğundan $1-p, P$ de olamaz çelişki meydana gelir dolayısıyla $M \neq PM$ dir. M/PM ; R/P basit halkası üzerinde çarpımsal sol R/P -modül olduğundan örnek 5.3 ten M/PM basit modül yani PM bir maksimal alt modül bulunur.

Önerme 5.16 R bir halka ve M sıfırdan farklı çarpımsal sol R −modül olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

(1) : M nin her öz alt modülü, M nin bir maksimal alt modülünde kapsanır.

(2) : K ; M nin bir maksimal alt modülü olması için gerek ve yeter koşul

$K = PM \neq M$ olacak şekilde R nin bir P maksimal ideali olmasıdır [1].

İspat : (1) : Sıfırdan farklı her çarpımsal modülün bir maksimal alt modül içerdiğini gösterelim. M sıfırdan farklı çarpımsal bir sol R -modül olsun. M sıfırdan farklı bir modül ise $0 \neq m \in M$ elemanı vardır. $Ann(m) = \{ r \in R : rm = 0 \}$ kümesi R nin bir öz idealidir çünkü aksi olsaydı yani $R = Ann(m)$ olsaydı $1 \in R = ann(m)$ olduğundan $1 \in Ann\ m$ olurdu ve $1.m = m = 0$ bulunurdu. Dolayısıyla $ann(m)$ bir öz idealdir.

R nin her öz idealini kapsayan bir maksimal ideal mevcut olduğundan, $ann(m)$ yi de kapsayan $ann(m) \subseteq P$ olacak şekilde bir maksimal P ideali vardır.

Eğer $M = PM$ ise M çarpımsal olduğundan $RM = PM$ yani her $m \in M$ için $Rm = Pm$ olur. $1 \in R$ olduğundan da $1.m = m = pm$ yani $(1-p)m = 0$ olacak şekilde bir $p \in P$ vardır. O halde ; $(1-p) \in Ann(m) \subseteq P$ olur. P maksimal ideali için $p \in P$ iken $1-p \in P$ bulunduğundan çelişki meydana gelir dolayısıyla $M \neq PM$ dir. M/PM bir çarpımsal sol R/P −modül olduğundan Örnek 5.3'ten M/PM basit modül yani PM bir maksimal alt modüldür. Sonuç olarak M çarpımsal için P maksimal ideali olmak üzere PM maksimal alt modüldür.

(2) : $\Leftarrow$: $PM = K \neq M$ olacak şekilde P maksimal ideal iken PM bir maksimal alt modül oluğunu Önerme 5.13 ten biliyoruz .

$\Rightarrow$: K bir maksimal alt modül olsun . $K = PM$ olacak şekilde P maksimal idealinin varlığını göstermeliyiz. Tanım 5.2 (2) den $(K:M) = Q$ olacak şekilde bir Q idealinden bahsedebiliriz. M çarpımsal sol R −modül olduğundan $(K:M)M = QM = K$ olur. Şimdi Q nun bir maksimal ideal olduğunu göstermeliyiz. Q nun maksimal ideal olmadığını kabul edelim. Öyleyse $Q \subset P$ olacak şekilde bir P maksimal ideali bulabiliriz. Böylece $p \notin Q = (K:M)$ olacak biçimde bir $p \in P$ vardır. $p \notin (K:M)$ olduğundan $pM \nsubseteq K$ ve K maksimal alt modül olduğundan $K + pM = M$ olur. $K = QM$ olduğundan da $QM + pM = M = (Q + pR)M \subseteq PM \subset M$ olur ve $PM = M$ bulunur.

(1) de gösterildiği gibi her $m \in M$ için $(1-p)m = 0$ olacak şekilde $p \in P$ bulunabilir. Her $m \in M$ için $(1-p)m = 0$ sağlandığından özel olarak $x \notin K$ olacak şekilde bir $x \in M$ elemanı seçersek $(1-p)x = 0$ olacak şekilde de bir $p \in P$ bulunur. Buradan K bir maksimal alt modül ve $x \notin K$ olduğundan $(x) + K = M$ olur. Eşitliğin her iki tarafını soldan $(1-p)$ ile çarparsak ;

$1-p \quad x \ + \ 1-p\ K = \ 1-p\ M$ olur buradan da,

$(1-p)K=(1-p)M \subseteq K$ bulunur.Böylece$(1-p) \in (K{:}M)=Q \subset P$ yani $(1-p) \in P$ elde edilir . P yi maksimal ideal seçtiğimizden dolayı $p \in P$ ve $1-p \in P$ olduğundan çelişki oluşur . Öyleyse Q maksimal idealdir ve $K=QM$ dir.

5.4 Sonlu Üretilmiş Çarpımsal Modüller

Önerme 5.17 R halka ve M bir sol R −modül olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

(1) : Her s,t için R= I_s+J_t olacak şekilde $I_1, I_2, ..., I_n$ ve $J_1, J_2, ..., J_m$ ler R nin idealleri ise $R = \sum_{i=1}^{n} I_i + \sum_{j=1}^{m} J_j$ olur.

(2) : M/IM ve M/JM sonlu üretilmiş modül olacak şekilde I,J ideali ve M modülü varsa $M/(JI)M$ modülü de sonlu üretilmiştir.

(3) : M/I_iM sonlu üretilmiş modül olmak üzere $I_1, I_2, ..., I_n$ idealleri ve M modülü varsa $M/(I_1I_2 \dots I_n)M$, $M/(I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_n)M$ ve $M/(I_1M \cap I_2M \cap \dots \cap I_nM)$ sonlu üretilmiş modüldür[1].

İspat (1) : R nin $\cap I_i$ idealine I , $\cap J_j$ idealine de J diyelim. Her s,t için $R = I_s+J_t$ olduğundan

$R=(I_s+J_1) \dots (I_s+J_m) \subseteq (I_s+J_1J_2 \dots J_m) \subseteq (I_s + J_1 \cap J_2 \cap \dots \cap J_m)$

$= (I_s+J) \subseteq R$ dir. Yani $(I_s+J) = R$ dir. Aynı şekilde

$R=(J+I_1) \dots (J+I_n) \subseteq J+I_1 \dots I_n \subseteq J+I_1 \cap \dots \cap I_n = J+I \subseteq R$ olur .

Böylece $J+I = R$ bulunur.

(2) : M/IM ve M/JM sonlu üretilmiş ise $x_1, x_2, \dots, x_m$; $y_1, \dots, y_n \in$ M için

$M = \sum_{i=1}^{m} Rx_i + IM = \sum_{j=1}^{n} Ry_j + JM$ dir . Her iki eşitliği J ile soldan çarparak

$JM = \sum_{i=1}^{m} Jx_i + JIM$ bulunur ve böylece

$$M = \sum_{j=1}^{n} Ry_j + JM$$

$= \sum_{j=1}^{n} Ry_j + \sum_{i=1}^{m} Jx_i + JIM \subseteq \sum_{j=1}^{n} Ry_j + \sum_{i=1}^{m} Rx_i + JIM \subseteq M$ olur. Sonuç olarak

$M = \sum_{j=1}^{n} Ry_j + \sum_{i=1}^{m} Rx_i + JIM$ bulunur.

$f{:}\, M \to M/JIM$ doğal epimorfizması için de

$f(M) = f\left(\sum_{j=1}^{n} Ry_j + \sum_{i=1}^{m} Rx_i + JIM\right) = \sum_{j=1}^{n} R\, f(y_j) + \sum_{i=1}^{m} R\, f(x_i)$ bulunur.

Böylece M/JIM sonlu üretilmiştir.

(3) : Özellik (2) den faydalanılarak tümevarımla $M/(I_1I_2 \dots I_n)M$ nin sonlu üretilmiş olduğunu göstereceğiz. (2).özellikten M/IM ve M/JM sonlu üretilmiş iken

$M/(IJ)M$ sonlu üretilmiş idi. Yani ;

n=2 için önerme doğrudur.

n=k için doğru ise n=k+1 için de doğru mu bunu göstereceğiz.

n=k için doğru ise $M/(I_1I_2 \ldots . I_k)M$ ve $M/I_{k+1}M$ sonlu üretilmiştir. Özellik (2) den $M/(I_1I_2 \ldots . I_{k+1})M$ de sonlu üretilmiş olur ve tümevarımdan $M/(I_1I_2 \ldots . I_n)M$ sonlu üretilmiş olur. Böylece $M/(I_1I_2 \ldots . I_n)M$ sonlu üretilmiş ise ;

$(I_1I_2 \ldots . I_n)\ M \subseteq (I_1 \cap I_2 \cap \ldots . \cap I_n)M \subseteq (\ I_1M \cap I_2M \cap \ldots . \cap I_nM)$ olduğundan $M/(I_1 \cap I_2 \cap \ldots . \cap I_n)M$ ve $M/(\ I_1M \cap I_2M \cap \ldots . \cap I_nM)$ modülleri, sonlu üretilmiş olan $M/(I_1I_2 \ldots . I_n)M$ modülünün bölüm modüllerine izomorf olur. Dolayısıyla $M/(I_1 \cap I_2 \cap \ldots . \cap I_n)M$ ve $M/(\ I_1M \cap I_2M \cap \ldots . \cap I_nM)$ modülleri de sonlu üretilmiş olur.

Önerme 5.18 M bir sol R −modül ve her boştan farklı $\{\ I_i\ \}$ idealler kümesi için

$_{i \in I}(I_i\ M) = [\cap\ I_i + ann(M)]M$ olsun. Aşağıdakiler denktir.

(1) : M çarpımsal sol R −modüldür.

(2) : $N \subset JM$ olacak şekilde herhangi N alt modülü ve J ideali için $N = IM$ ve $I \subset J$ olan I ideali vardır.

(3) : $N \subset JM$ olacak şekilde herhangi N alt modülü ve J ideali için $N \subseteq IM$ ve $I \subset J$ olan I ideali vardır[1].

İspat : (1) ⇒ (2) : M çarpımsal modül olsun . $N \subset JM$ olmak üzere $N = IM$ ve $I \subset J$ olan I idealini göstereceğiz. I idealini $I = J \cap (N{:}\,M)$ olarak alalım. M çarpımsal olduğundan her N alt modülü için $N = (N{:}\,M)M$ dir.Böylece $J \nsubseteq (N{:}\,M)$ dir. Gerçekten de eğer $J \subseteq (N{:}\,M)$ olsaydı her $j \in J$ için $jm \in JM$ olur .

$J \subseteq\ N{:}\,M$ olduğundan $j \in\ N{:}\,M$ dir. Böylece $jm \in N$ olur. Sonuç olarak $JM \subset N$ olur. {$N \subset JM$ idi, dolayısıyla $JM \subset N$ olamaz } . Böylece $J \nsubseteq (N{:}\,M)$ olduğu görülür. $I = J \cap\ N{:}\,M$ ve $J \nsubseteq (N{:}\,M)$ olduğundan da $I \subset J$ ve

$ann(M) \subseteq (N{:}\,M)$ bulunur. Çünkü $r \in ann(M)$ için $rM = 0 \subseteq N$ olur. Dolayısıyla $r \in (N{:}\,M)$ bulunur. Modüler kural kullanılarak

$(J + ann(M)) \cap (N{:}\,M) = J \cap (N{:}\,M) + ann(M) = I + ann(M)$ bulunur.

$[(J + ann(M))\ \cap (N{:}\,M)]M = (JM + 0) \cap N =\ [I + ann(M)]M = IM = JM \cap N$ bulunur. $N \subset JM$ olduğundan da $JM \cap N = N = IM$ bulunur ve ispat tamamlanır.

(2) ⇒(3) : $N \subset JM$ olacak şekilde herhangi N alt modülü ve J ideali için $N = IM$ ve $I\ \subset\ J$ olan I ideali var olsun . $N = IM$ olduğundan $N \subseteq IM$ sağlanır ve ispat tamamlanır.

(3) ⇒(1) : N, M nin bir alt modülü olsun .N alt modülü için $N = LM$ olacak şekilde bir L ideali var mı göstereceğiz. $\psi = \{K :\ K, R$ nin bir ideali ve $N \subseteq KM\ \}$ kümesi için $\psi \neq \emptyset$ dir. Çünkü R bir ideal ve $N \subseteq RM = M$ olur ve $R \in\ \psi$ dir. I_i idealleri ; ψ nın boş kümeden farklı idealler topluluğu olsun. Hipotezden $\cap\, I_i\ \in\ \psi$ olur Zorn lemması ve iyi sıralama prensibinden ψ nın en küçük elemanı vardır. J ideali ψ nın en küçük elemanı olsun. ψ tanımından $N \subseteq JM$ dir. $N \neq JM$ kabul edelim yani $(N \subset JM)$. (3). özellikten $I \subset J$ ve $N \subseteq IM$ olacak şekilde I ideali vardır. Böylece I $\in\ \psi$ bulunur. Fakat $I \subset J$ olduğundan J nin seçimi ile çelişir. O halde $N = JM$ dir ve M çarpımsaldır.

Örnek 5.6 Z tam sayılar halkası, Q rasyonel sayılar halkası,

$R\ = \{ \begin{pmatrix} z & q \\ 0 & z \end{pmatrix} :\ z \in Z, q \in Q\ \}$ şeklindeki 2x2 lik matrislerin değişmeli halkası ve $M = \{\begin{pmatrix} 0 & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} :\ q \in Q\ \}$ olsun. Burada M çarpımsal R-modül değildir. Çünkü her N alt modülü için $N = IM$ olacak şekilde I ideali yoktur. Gerçekten de her $p \in Q$ için $a \in Z; t, q \in Q$ olmak üzere $\begin{pmatrix} a & t \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} 0 & aq \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ yani her p= aq, a= $\frac{p}{q} \in Z$ olacak şekilde p,q $\in Q$ bulunamayabilir. Sonuç olarak M çarpımsal değildir. Fakat bir önceki önermeden her N alt modülü için $N \subset JM$ olacak şekilde $I \subset J$ ve $N \subseteq IM$ olan I ideali vardır[1].

Tanım 5.9 M bir sol R- modül ve X alt modül olmak üzere ; eğer Y alt modülü için $M = X + Y$ iken $M = Y$ oluyorsa X alt modülüne gereksiz (superfluous) alt modül denir[1].

Önerme 5.19 M çarpımsal sol R −modül olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

(1) : R nin $M = IM$ yi sağlayan her I ideali için $R = I + ann(M)$ ise M sonlu üretilmiştir.

(2) : R nin $ann(M) \subseteq P$ olacak şekildeki her P maksimal ideali için $M \neq PM$ ise M sonlu üretilmiştir.

(3) : Her M/M_i bölüm modülü sonlu üretilmiş olacak şekilde $M_1, M_2, \ldots\ldots, M_n$ ler M nin alt modülleri ise $M/(M_1 \cap M_2 \cap \ldots.\cap M_n)$ de sonlu üretilmiştir.

(4) : Her M/M_i bölüm modülü sonlu üretilmiş ve $M_1 \cap M_2 \cap \ldots.\cap M_n = 0$ olacak şekilde $M_1, M_2, \ldots\ldots, M_n$ alt modülleri varsa M sonlu üretilmiştir.

(5) : Her M/M_i bölüm modülü sonlu üretilmiş ve $M_1 \cap M_2 \cap \ldots.\cap M_n$ alt modülü superfluous alt modül olacak şekilde $M_1, M_2, \ldots\ldots, M_n$ alt modülleri varsa M sonlu üretilmiştir[1].

İspat (1) : $\{X_i\}$, M nin tüm devirli alt modüllerinin kümesi olsun. M çarpımsal modül olduğundan her X_i alt modülü için $X_i = I_i M$ olacak şekilde I_i ideali vardır. I_i idealine I diyelim. M modülünü X_i olarak yazabildiğimizden

$M = \quad X_i = \quad I_i M = IM$ sağlanır. Hipoteze göre $M = IM$ sağlandığında

$R = I + ann(M)$ idi . $1 \in R = I + ann(M)$ olur. $\{I_i\}$ kümesinin

$1 \in {}_{i=1}^{n} I_i + ann(M)$ olacak şekilde sonlu bir $\{I_1, I_2, \ldots.., I_n\}$ alt kümesi vardır. O halde $M = 1.M = [\ {}_{i=1}^{n} I_i + ann(M)\ ]$. $M = {}_{i=1}^{n} I_i M + 0 = {}_{i=1}^{n} X_i$ olur . Sonuç olarak M ; $M = {}_{i=1}^{n} X_i$ olacak şekilde sonlu alt modüllerin toplamı olduğundan sonlu üretilmiştir.

(2) : $\{\ P_i\ \}$; R nin $ann(M) \subseteq P$ olan bütün maksimal ideallerinin kümesi olsun. $Ann(M) \subseteq P_i$ olduğundan hipoteze göre $M \neq P_i M$ olur. Önerme 5.5 e göre $M \neq PM$ ise $ann(M/X) \nsubseteq P$ olacak şekilde X devirli alt modülü vardı dolayısıyla ; $M \neq P_i M$ ise $ann(M/X_i) = (X_i : M) \nsubseteq P_i$ yani

$X_i \nsubseteq P_i M$ olacak şekilde X_i devirli alt modülü vardır. X_i ve M alt modül olduğundan tanım5.2 (2) den $(X_i : M) = ann\ (M / X_i)$ idealinden bahsedebiliriz.

R nin $ann(M/X_i)$ idealine I diyelim . Buradan $ann(M) \subseteq ann(M/X_i) \subseteq I$ olur. Gerçekten de ; $r \in ann(M)$ için $rM = 0$ dır .Yani her $m \in M$ için $rm = 0$ dır. O halde $rm + X_i \subseteq X_i$ olur. X_i alt modül olduğundan $r\,(m + X_i) \subseteq X_i$ bulunur . Buradan da $r \in ann\ (M/X_i)$ olduğu görülür.

$I = \quad ann(M/X_i)$ kabulümüzden de $ann(M/X_i) \subseteq I$ olduğu açıktır.

Şimdi M nin sonlu üretilmiş olduğunu göstermek için iki durumu inceleyeceğiz.

(i) : $R \neq I$ olsun . O halde bir P maksimal ideali vardır ki $I \subseteq P$ olur.

$ann(M) \subseteq I$ olduğunu bildiğimizden $ann(M) \subseteq P$ olur . $\{ P_i \}$ kümesini

$ann(M) \subseteq P_i$ olan maksimal ideallerin topluluğu olarak seçmiştik . Dolayısıyla bir $i \in I$ için $P = P_i$ dir. O halde $ann(M/X_i) \subseteq I \subseteq P_i$ bulunur. M çarpımsal modül olduğundan $X_i = (X_i : M)M = ann(M/X_i)\, M \subseteq P_i\, M$ olur. Yani ;

$X_i \subseteq P_i M$ dir. Bu ise önerme 5.5 e göre $X_i \nsubseteq P_i\, M$ olması ile çelişir. Sonuç olarak $I = R$ olmalıdır.

(ii) : $I = R$ olduğunu biliyoruz. $R = I$ nın sonlu bir J alt kümesi vardır ki

$R = I = \quad _{j\in J}\, ann(M/X_j)$ olur. M çarpımsal modül olduğundan her j için

$X_j = (X_j : M)M = ann(M/X_j)M$ dir. Dolayısıyla $M = RM = [\quad _{j\in J}\, ann(M/X_j)]\, M$

$= [\quad _{j\in J}\, ann(M/X_j)\, M] = \quad _{j\in J}\, X_j$ bulunur. J kümesinin sonlu olmasından dolayı M, sonlu alt modüllerin toplamı olur ve sonlu üretilmiştir .

(3) : M çarpımsal modül olduğundan her $i \in I$ ya karşılık M_i alt modülleri için $M_i = I_i M$ olacak şekilde I_i ideali vardır. Önerme 5.17 (3) ten $M/ I_i M = M/ M_i$ sonlu üretilmiş ise

$M/(I_1 \cap I_2 \cap \ldots . \cap I_n)M$ de sonlu üretilmiştir.

$(I_1 \cap I_2 \cap \ldots . \cap I_n)M \subseteq (I_1 M \cap I_2 M \cap \ldots . \cap I_n M)$ olduğundan dolayı

$M / (I_1 M \cap I_2 M \cap \ldots . \cap I_n M)$ modülü ;

sonlu üretilmiş $M/ (I_1 \cap I_2 \cap \ldots . \cap I_n)M$ nin bir bölüm modülüne izomorftur ve böylece $M / (I_1 M \cap I_2 M \cap \ldots . \cap I_n M)$ modülü de sonlu üretilmiş olur.

$M_i = I_i M$ olduğundan $M / (I_1 M \cap I_2 M \cap \ldots . \cap I_n M) = M/ M_1 \cap M_2 \cap \ldots . . \cap M_n$ sonlu üretilmiş olur.

(4) : (3). özellikten $M/ M_1 \cap M_2 \cap \ldots . . \cap M_n$ nin sonlu üretilmiş olduğunu biliyoruz .

$M_1 \cap M_2 \cap \ldots . . \cap M_n = 0$ ise $M/ M_1 \cap M_2 \cap \ldots . . \cap M_n = M / (0) = M$ bulunur ve M sonlu üretilmiş olur.

(5) : (3) . özellikten $M/ M_1 \cap M_2 \cap \ldots .. \cap M_n$ sonlu üretilmiş idi dolayısıyla

$M = N + M_1 \cap M_2 \cap \ldots .. \cap M_n$ olacak şekilde sonlu üretilmiş bir N alt modülü vardır.

$M_1 \cap M_2 \cap \ldots .. \cap M_n$ superfluous olduğundan dolayı tanım gereği $M = N$ olur. N sonlu üretilmiş olduğundan M de sonlu üretilmiş modül olur.

5.5 İdeallerinin Çarpımı Değişmeli Olan Halkalar Üzerindeki Çarpımsal Modüller

Lemma 5.1 (Çarpımsal Modüller için Nakayamma Lemma)

R bir ideallerinin çarpımı değişmeli olan halka ve M çarpımsal sol $R-$ modül olsun.

$I \subset J(R)$ olacak şekilde bir ideal olmak üzere $IM = M$ ise $M = 0$ dır [12].

İspat: Her $x \in M$ için $x = 0$ olduğu gösterilmelidir.

$x \in M$ için M çarpımsal sol $R-$modül olduğundan önerme 5.3 e göre $Rx = KM$ olacak şekilde bir K ideali vardır.Hipoteze göre $IM = M$ iken

$Rx = KM = KIM = IKM = IRx = Ix$ olur. O halde $Rx = Ix$ olduğundan bir $a \in I$ için $x = ax$ dir. $I \subset J\ R$ olduğundan $1 - a$ birimseldir. Böylece $x = ax$ ise $(1 - a)x = 0$ olur. Eşitliğin her iki yanını soldan $1 - \mathrm{a}\ ^{-1}$ ile çarparsak ;

$(1 - a)^{-1}\ 1 - a\ x = (1 - a)^{-1}0 = 0$ bulunur.Sonuç olarak $x = 0$ elde edilir ve $M = 0$ bulunur.

Önerme 5.20 R ideallerin çarpımı değişmeli olan bir halka ve M bir çarpımsal sol $R-$modül olsun. I ideali için $M = IM$ iken aşağıdakiler sağlanır :

(1) Her N alt modülü için $N = IN$

(2) Her $m \in M$ için bir $b \in I$ vardır ki $(1 - b)m = 0$ dır[1].

İspat : (1) : M çarpımsal olduğundan her N alt modülü için $N = JM$ olacak şekilde J ideali vardır. Hipoteze göre $M = IM$ iken $N = JM = JIM = IJM = IN$ bulunur.

(2) : Her $m \in M$ için $Rm \subseteq M \ldots (i)$ ve

her $m \in M$ için $m = 1 . m \in Rm$ olur ve $M \subseteq Rm$…(ii) bulunur.

(i) ve (ii) den $Rm = M$ dir. Ayrıca I ideali için $IR \subseteq I$ ve her $b \in I$ için $b = b.1 \in IR$ olduğundan $I \subseteq IR$ ve böylece $IR = I$ bulunur.

$Rm = M$ ve $IM = M$ olduğundan $Rm = M = IM = IRm = Im$ olur. Buradan $Rm = Im$ yani $1.m \in Im$ ‘dir. Bir $b \in I$ için $1.m = m = bm$ bulunur. Öyleyse $m - bm = 0 = (1 - b)m = 0$ bulunur.

Tanım 5.10 R bir halka olmak üzere R nin tek bir maksimal sol ya da sağ ideali var ise R halkasına local (yerel) halka denir[12].

Önerme 5.21 R ideallerinin çarpımı değişmeli bir halka olsun. Eğer R bir yerel halka ve M sıfırdan farklı bir sol çarpımsal $R -$ modül ise M devirli bir sol R- modüldür[1].

İspat : R bir yerel halka ise tek bir maksimal sol ideali vardır . Bu ideal, P ideali olsun. P bir maksimal sol ideal ise PM de maksimal alt modül bulunur (Önerme 5.13). PM maksimal olduğundan öz alt modüldür ve $PM \neq M$ dir. Gerçekten de eğer $PM \neq M$ değil ise yani $PM = M$ ise Nakayamma Lemma ve Jacobsan Radikali tanımı yardımıyla $J(R) = P$ yani $P \subseteq J(R)$ olduğundan $M = 0$ bulunur. Bu da hipotez ile çelişir. Dolayısıyla $PM \neq M$ dir.

$PM \neq M$ olduğundan dolayı $m \notin PM$ olacak biçimde bir $m \in M$ vardır. M de çarpımsal sol R-modül olduğundan önerme 5.3 ten $Rm = IM$ olacak şekilde bir I ideali vardır. $I \subseteq P$ olsaydı her iki taraf M ile çarpılarak $IM \subseteq PM$ kapsaması elde edilir. $1 \in R$ olduğundan $1.m = m \in Rm = IM$ olur ve $m \in PM$ çelişkisi meydana gelir. Dolayısıyla $I \nsubseteq P$ dir. P tek bir maksimal ideal olduğundan $I = R$ olmalıdır. Böylece $Rm = IM = RM = M$ olduğu görülür. Sonuç olarak ise $M = Rm$ olarak bulunduğundan M devirlidir denir.

Önerme 5.22 R ideallerin çarpımı değişmeli olan bir halka, M bir çarpımsal sol R −modül ve P, R nin bir maksimal ideali olsun. O halde aşağıdakiler birbirine denktir.

(1) : $M = PM$

(2): Her N alt modülü için $N = PN$ dir.

(3) : M nin her devirli X alt modülü için $X = PX$ dir.

(4) : P, M nin herhangi bir devirli alt modülünün anhilatörünü içermez [1].

İspat : (1) ⇒ (2) : Bir önceki önermede $M = IM$ iken $N = IN$ idi. Burada $M = PM$ sağlandığından $N = PN$ bulunur.

(2) ⇒ (3) : Her N alt modülü için $N = PN$ sağlanır ise X devirli alt modül için de $X = PX$ sağlanır.

(3) ⇒ (1) : $\{ X_i \}$, M nin tüm devirli alt modüllerinin kümesi olsun. M nin her devirli X alt modülü için $X = PX$ olduğundan X_i devirli alt modülleri için de X_i=$P\,X_i$ olur. M modülünü X_i olarak yazabildiğimizden $M = \quad X_i = \quad PX_i = P \quad X_i = PM$ bulunur.

(3) ⇒ (4) : M nin her devirli X alt modülü için $X = PX$ iken P nin herhangi devirli X alt modülünün anhilatörünü içermediğini göstereceğiz. Yani her devirli X alt modülü için $ann(X) \nsubseteq P$ olduğu gösterilmelidir.

Kabul edelim ki $ann(X) \subseteq P$ olsun . O halde her iki tarafı X ile çarptığımızda $ann(X)X \subseteq PX$ olur. Bu durumda $ann(X)X = 0 \subseteq PX = X$ bulunur. Yani $ann(X)$ in elemanlarından bağımsız kapsama her zaman sağlanır. Öyleyse $ann(X) = R$ dir. Kabulümüz olan $ann(X) \subseteq P$ kapsamasına göre $R \subseteq P$ bulunur. Fakat bu da P nin maksimal ideal olması ile çelişir. Dolayısıyla $ann(X) \nsubseteq P$ bulunur.

(4) ⇒ (3) : Her devirli X alt modülü için $ann(X) \nsubseteq P$ iken $X = PX$ olduğu gösterilmelidir.

Her X devirli alt modülü için $ann(X) \nsubseteq P$ ve P maksimal ideal olduğundan

$R = P + ann(X)$ dir. Böylece

$X = RX = (P + ann(X))X = PX + ann(X)X = PX + 0 = PX$ bulunur.

Tanım 5.11 R bir halka ve M bir sol R −modül olmak üzere M/N bölüm modülünün sıfırdan farklı her K/N alt modülü için $ann(K/N) = ann(M/N)$ oluyorsa N alt modülüne asal alt modül denir [1].

Tanım 5.12 R bir halka ve M bir basit sol R −modül olmak üzere $ann(M)$ ye R nin sol primitif ideali denir [1].

Önerme 5.23 R bir halka, M bir çarpımsal sol R −modül ve N, M nin bir öz alt modülü olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır.

(1) : N, M nin bir asal alt modülüdür gerek ve yeter koşul $ann(M/N)$ R nin asal idealidir.

(2) : N, M nin maksimal alt modülü ise N, M nin bir asal alt modülüdür ve R nin bazı P sol primitif idealleri için $N = PM$ olur.

(3) : R, ideallerinin çarpımı değişmeli olan bir halka ise M nin belirli N alt modülleri için R nin sol primitif P ideali $M \neq PM + N$ olacak şekilde bulunur ve PM, M nin asal alt modülüdür [1].

İspat (1) : $\Rightarrow$: N, M'nin bir asal alt modülü olsun. $Ann(M/N)$'nin asal olduğunu göstermeliyiz.

$IJ \subseteq ann(M/N) = (N{:}M)$ iken $I \subseteq (N{:}M)$ veya $J \subseteq (N{:}M)$ ise $(N{:}M)$ asaldır.

$IJ \subseteq ann\ M/N\ =\ N{:}M$ iken $I \nsubseteq ann\ M/N$ olsun. O halde $I\ M/N$, M/N bölüm modülünün sıfırdan farklı bir alt modülü ve $J \subseteq ann\ I\ M/N$ dir. N asal alt modül olduğundan $J \subseteq ann(M/N)$ olur ve böylece $ann(M/N)$ asal idealdir.

$\Leftarrow$ **:** $Ann(M/N) = (N{:}M) = P$ asal ideal olsun. M çarpımsal modül olduğundan $N = (N{:}M)M = PM'dir.$ K/N ; M/N'nin $N = PM \subsetneq K \subseteq M$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir alt modülü olsun. $PM \subsetneq K\ ve\ M$ çarpımsal olduğundan R nin $K = IM$ olacak biçimde bir I ideali vardır. $PM \subsetneq K = IM$ olduğundan $P \subsetneq I$ bulunur. Gerçekten de $PM \subsetneq K = IM$ iken $P \nsubseteq I$ olsun. O halde bir $p \in P$ için $p \notin I$ olur. p ∈ P olduğundan $M \subseteq PM$ ve $p \notin I$ ise $pm \notin Im \subseteq IM$ olur . Buradan $PM \nsubseteq IM$ olur bu da hipotez ile çelişir. Sonuç olarak $ann(M/N) = P \subsetneq I$ dır.

$K/N, M/N$'nin alt modülü olduğundan $K/N \subseteq M/N$ dir. O halde

$ann\ M/N \subseteq ann\ K/N$ bulunur. $Ann\ K/N \subseteq ann\ M/N$ olduğu gösterilirse N asal bulunmuş olur. M çarpımsal modül olduğundan $N{:}K\ K \subseteq N$ 'dir. N öz alt modül olduğundan $N \subsetneq M$ ve $M \nsubseteq N$ 'dir. Buradan ;

$(N{:}K)K = (N{:}IM)IM \subseteq N$ olur. Böylece $(N{:}IM)I \subseteq (N{:}M)$ yani

$(N{:}K)I \subseteq (N{:}M)$ elde edilir. $(N{:}M) = ann(M/N)$ asal ideal olduğundan dolayı $(N{:}K) = ann(K/N) \subseteq ann(M/N)$ ya da $I \subseteq ann(M/N)$ olmalıdır. Fakat $ann(M/N) = P \subsetneq I$ yani $I \nsubseteq ann(M/N)$ olduğundan $ann(K/N) \subseteq ann(M/N)$ olmalıdır. Böylece $ann(K/N) = ann(M/N)$ bulunur ve N asal alt modüldür.

(2) : N, M'nin maksimal alt modülü olsun . Bu durumda M/N bölüm modülü basit modül olur. M/N basit modül olduğu durumda $ann(M/N) = (N{:}M)$ primitif sol idealdir. $Ann(M/N)$ primitif sol ideal ise $ann(M/N)$ asal idealdir. Çünkü primitif sol ideal tanımına göre M/N basit modül olması için gerek ve yeter koşul N'nin maksimal alt modül olmasıdır. N maksimal modül ise $r \in R$ ve $m \in M$ için $rm \in N$ fakat $m \notin N$ olsun. O halde $rM = rN + rRm \subseteq N$ olur . Bu durumda $r \in (N: M)$ olur ve N asal bulunur. $P = ann(M/N) = (N: M)$ aldığımız da ise P primitif ideal olur ve M çarpımsal olduğundan $N = (N: M)M = PM$ elde edilir.

(3) : M çarpımsal modül ve P primitif sol ideal ise ; $ann(M/K) = P$ olacak şekilde M/K basit modülü dolayısıyla K maksimal alt modülü vardır. M çarpımsal olduğundan $K = (K: M)M = ann(M/K)M$ olur. K maksimal alt modül olduğundan

$M \neq K + N$ olacak şekilde belirli N alt modülleri için $ann(M/K) = P$ ideali bulunabilir. Yani N'yi kapsayan K maksimal alt modülleri için $M \neq K + N \neq ann(M/N)M + N \neq PM + N$ olacak şekilde P ideali bulunabilir. Bu durumda $P = ann(M/K)$ ise

$PM = ann(M/K)M = K$ maksimal alt modülü bulunur ve $K = PM$, M'nin maksimal alt modülü ise asal modüldür.

Önerme 5.24 M çarpımsal bir sol R-modül ve N, bir sol R −modül olsun.

$f : M \rightarrow N \oplus N$ olacak şekilde bir epimorfizma ise $N = 0$ dır [1].

İspat : $g : N \oplus N \rightarrow N$ olmak üzere $g\ (x, y) = x$ ile tanımlı dönüşüm ve

$h : N \oplus N \rightarrow N$ olmak üzere $h(x, y) = y$ ile tanımlı dönüşüm birer epimorfizmadır.

$f : M \rightarrow N \oplus N, g\ ve\ h$ dönüşümleri birer epimorfizma olduğundan dönüşümlerin bileşkeleri de epimorfizmadır. Böylece $(g \circ f) : M \rightarrow N$ ve $(h \circ f) : M \rightarrow$ N epimorfizma olarak bulunur.

$K = Çek\ (g \circ f)$ ve $L = Çek\ (h \circ f)$ olmak üzere,
$(g \circ f) : M \rightarrow N$ bir epimorfizma olduğundan $M/\ Çek\ (g \circ f) = M/\ K \cong N$ ve aynı şekilde
$(h \circ f) : M \rightarrow N$ de bir epimorfizma olduğundan $M\ /\ Çek\ (h \circ f) = M/\ L \cong N$ bulunur. Böylece ;
$M/L \cong M/K \cong N$ olduğundan bir $\psi : M/\ K \longrightarrow M/\ L$ olacak şekilde
$x, y \in M$ için $\psi(x + K) = (y + L)$ ile tanımlı bir izomorfizma bulunabilir.
Şimdi $ann(M/K) = ann(M/L)$ olduğunu gösterelim.

Her $a \in ann(M/K)$ için $a.(M/K) = 0_{M/K} = K$ olur. ψ bir izomorfizma olduğundan ψ^{-1} da bir izomorfizma yani örtendir böylece $M/K = \psi^{-1}(M/L)$ olur. Bu durumda ;

$a.(M/K) = a.\psi^{-1}(M/L) = 0_{M/K} = \psi^{-1}(0_{M/L}) = (\psi^{-1}(a.(M/L))$ bulunur . Böylece $a \in ann(M/L)$ bulunur.

Sonuç olarak ise $ann(M/K) \subseteq ann(M/L)$ elde edilir.

Aynı şekilde ; her $b \in ann(M/L)$ için $b.(M/L) = 0_{M/L}$ dır . ψ bir izomorfizma yani örten olduğundan $\psi(M/K) = M/L$ dir. Buradan

$0_{M/L} = b.(M/L) = b.\psi(M/K) = \psi(b.(M/K)) = \psi(0_{M/K})$ bulunur. Böylece ψ bire bir olduğundan $b.(M/K) = 0_{M/K}$ olduğundan $b \in ann(M/K)$ elde edilir.

Sonuç olarak ise $ann(M/L) \subseteq ann(M/K)$ bulunur ve $ann(M/K) = ann(M/L)$ olduğu görülür .

M çarpımsal sol R-modül olduğundan

$K = ann(M/K)M = (K:M)M = ann(M/L)M = (L:M)M = L$ olur. Böylece ;

$K = L$ olduğu görülür.

Her $n \in N$ için f örten olduğundan $f(m) = (0,n)$ olacak şekilde bir $m \in M$ vardır.

$g(0,n) = 0$ olduğundan $(g \circ f)(m) = 0$ elde edilir ve

$m \in Çek\ (g \circ f) = K = L = Çek\ (h \circ f)$ bulunur. O halde

$m \in Çek\ (h \circ f)$ olduğundan

$(h \circ f)(m) = (0,n) = n = 0$ olur ve $N = 0$ dır.

Not : $M, R-$ modül ve $N_i$ler alt modül olmak üzere $\cap N_i \subseteq N$ olacak şekilde asal alt modül ise $N_i \subset N$ genel olarak doğru değildir.Fakat M çarpımsalsa bu ifade herzaman doğrudur [12].

Önerme 5.25 R bir halka, M bir çarpımsal sol R- modül ve N asal alt modül olsun . N_i ler M nin alt modülü olmak üzere $N_1 \cap N_2 \cap \dots \dots \cap N_k \subseteq N$ ise en az bir i için $N_i \subseteq N$ dir [12].

İspat: Her N_i alt modülü ve N asal alt modülü için $N_1 \cap N_2 \cap \dots \dots \cap N_k \subseteq N$ ise

$(N_1 : M) \cap (N_2 : M) \cap \dots \dots \cap (N_k : M) \subseteq (N:M)$ olur ve N asal alt modül iken $(N:M)$ asal ideal olur. Teorem 3.13 ten en az bir i için $(N_i : M) \subseteq N:M$ olur. Her N_i alt modülü için M çarpımsal sol R-modül olduğundan $N_i = (N_i : M)$ M olduğundan

$N_i = (N_i : M)\, M \subseteq \ N:M \ \ M = N$ bulunur ve ispat tamamlanır.

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER

Tez çalışması sonucunda , halkanın değişmeli olmadığı durumda modüllerin ve özellikle çarpımsal modüllerin hangi özelliklere sahip olduğunu gördük. Böylelikle çarpımsal modüllerin alt modülleri, sonlu üretilmişlik durumları veya bunun gibi birçok özel hali ; modülün üzerinde kurulu olduğu halkanın değişmeli olup olmaması ile ilişkili olduğu sonucuna varıldı . Böylece, halkanın başka özellikleri dikkate alınarak modülün ve çarpımsal modülün farklı davranışlar sergileyip sergilemediği incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Tuganbaev, A. A., (2004). " Multiplication Modules”,Journal of Mathematical Sciences, 123(2):3839-3852

[2] Barnard, A., (1981). “Multiplication Modules”,Journal of Algebra, 71: 174-178.

[3] Abd El Bast, Z. and Smith, P.F., (1988). “Multiplication Modules”, Communications in Algebra, 16(4): 755-779.

[4] Smith, P.F., (1988). “Some Remarks on Multiplications Modules”,Arch. Math., 50:223-235.

[5] Ali, M.M., (2008). “Idempotent and Nilpotent Submodules of Multiplication Modules”,Communications in Algebra, 36: 4620-4642.

[6] Yeşilot, G. ve Özavşar, M., (2012). Soyut Cebir Çözümlü Problemleri, 1.Basım, Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara.

[7] Lam, T. Y., (1991) . A First Course In Noncommutative Rings, Springer- Verlag, New York.

[8] Sharp, R.Y., (2000). Steps in Commutative Algebra, Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge.

[9] Ameri, R.,(2002). “On the Prime Submodules of Multiplications Modules”, Ijmms 2003, 27: 1715-1724.

[10] Hungerford, T.W., (1974). Algebra, Springer- Verlag, New York.

[11] Gaur, A., Kumar, A. and Parkash, A., (2007). “Prime Submodules in Multiplication Modules”, International Journal of Algebra, 1(8): 375-380.

[12] Çallıalp, F. ve Tekir, Ü., (2009). Değişmeli Halkalar ve Modüller, Birsen Yayınevi, İstanbul.

[13] Singh, S. and Mehdi, F.,(1979). “Multiplication Modules”, Canad. Math. Bull., Vol. 22(1): 93-98

[14] Mijbassand, A. S. and Abdullah, N. K., (2009). “Semi-Essential Submodules and Semi-Uniform Modules”, Journal of Kirkuk University – Scientific Studies, 4(1):48-58

[15] Azizi, A.,(2008). “Principal Ideal Multiplications Modules”, Algebra Colloquium, 15(4):637-648.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Deniz SÖNMEZ
Doğum Tarihi ve Yeri	: 18.01.1987, İSTANBUL
Yabancı Dili	: İngilizce, Almanca
E-posta	: dnzguel@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Y. Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2013
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2010
Lise	Fen Bilimleri	Cağaloğlu Anadolu Lisesi	2005