T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

h-KATLI SAYISAL YARIGRUPLAR

MESUT KILIÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. KÜRŞAT HAKAN ORAL

İSTANBUL, 2015

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

h-KATLI SAYISAL YARIGRUPLAR

Mesut KILIÇ tarafından hazırlanan tez çalışması 24/11/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Kürşat Hakan ORAL

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Kürşat Hakan ORAL

Yıldız Teknik Üniversitesi ______________________

Doç. Dr. Murat ALAN

Yıldız Teknik Üniversitesi ______________________

Prof. Dr. Ünsal TEKİR

Marmara Üniversitesi ______________________

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasında başta her türlü desteği sağlayan değerli danışman hocam; Doç. Dr. Kürşat Hakan ORAL'a, hayat boyu desteklerini ve fedakarlıklarını benden esirgemeyen aileme, kıymetli arkadaşlarım Serdar Güneş, Suat Koç , Mehmet Celal Bilgin ve Kübra Kılıç'a şükranlarımı sunarım.

Aralık, 2015

Mesut KILIÇ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

BÖLÜM 4

SİMGE LİSTESİ

S	Sayısal yarıgrup
$F(\mathrm{S})$	Frobenius Sayısı
$\langle A \rangle$	A ile üretilen küme
$Ap(S,n)$	n sayısana göre Apery kümesi
$Ap(S)$	Sayısal yarıgrubun katlılığına göre Apery kümesi
$PF(S)$	Pseudo-Frobenius sayılar kümesi
$FG(S)$	Sayısal yarıgrubun temel boşlukarı
$G(S)$	Sayısal yarıgrubun boşluklar kümesi
$g(S)$	Sayısal yarıgruban boşluklar kümesindeki eleman sayısı
$e(S)$	Sayısal yarıgrubun gömme boyutu
$\mathfrak{D}(\mathrm{X})$	X kümesinin bölenler kümesi
$Arf(S)$	Arf Sayısal yarıgrupların kesişimi
$t(S)$	Sayısal yarıgrubun tipi
$H(S)$	Sayısal yarıgrubun kutup noktaları
$Maximals_{\leq_s} A$	A kümesinde kısmi sıralama bağıntısına göre maksimaller
$Ap'(S)$	$Ap(S)$'in özel alt kümesi
$Ap^*(S)$	$Ap(S)$'in özel alt kümesi
$I \cap J$	İki ideal kesişimi
$I \cup J$	İki ideal birleşimi
$I + J$	İki ideal toplamı
$\mathrm{mod}\, m$	Modülo m
Ω	Sayısal yarıgruban Kanonikal ideali
$\rightarrow$	İşaretin yönündeki sayıdan sonraki tüm sayılar kümenin elemanı
$\mathbb{N}$	negatif olmayan tamsayılar
$\leq_S$	Sayısal yarıgruban kısmi sıralama bağıntısı
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tamsayılar
#	Eleman sayısı(kardinalite)
$G(I)$	İdealin boşlukar kümesi
$m(I)$	İdealin en küçük elemanı
$\omega(i)$	Apery kümesinde $\mathrm{mod}\, m$ ye göre i ye denk en küçük eleman
$m(S)$	Sayısal yarıgrubun katlılığı

ω'	$Ap(S)$'in kısmi sıralama bağıntısına göre en büyük elemanı
$\mathbb{N}*$	sıfır hariç doğal sayılar kümesi

ÖZET

h-KATLI SAYISAL YARIGRUPLAR

Mesut KILIÇ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Kürşat Hakan Oral

Bu çalışmada verilen bir sayısal yarıgrup ve bir h pozitif tamsayısı yardımıyla yeni bir sayısal yarıgrup oluşturulacaktır. Oluşturulan bu sayısal yarıgruba h-katlı sayısal yarıgrup denilecektir. Bu yeni yapının özellikleri incelenecek, daha sonra da sayısal yarıgrup ile h-katlı sayısal yarıgrup yapıları arasındaki özellikler h pozitif tamsayısının bazı özel değerleri için karşılaştırılacaktır.

Anahtar Kelimeler: h-katlı sayısal yarıgrup, sayısal yarıgrup

ABSTRACT

---

h-FOLD NUMERICAL SEMIGROUPS

Mesut KILIÇ

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Adviser: Assoc. Prof. Kürşat Hakan Oral

In this study; by given a numerical semigroup and a positive integer h, we build a new numerical semigroup which is called h-fold numerical semigroup. Also we study properties of this new numerical semigroup. In particular, we compare h-fold numerical semigrups and numerical semigroups for a special h positive integer.

Keywords: h-fold numerical semigroup, numerical semigroup

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Son yıllarda üzerindeki çalışmalar artan sayısal yarıgruplar, özellikle cebirsel geometri ile bilgisayar gibi alanlarda uygulama bulmuş bir konudur. En temel tanımı ile sayısal yarıgrup; sıfırı kapsayan doğal sayıların toplamsal kapalı bir altkümesinin tümleyeni sonlu olan kümedir.

Sayısal yarıgruplar ilk olarak 19. Yüzyılda Ferdinand Frobenius ve James Joseph Sylvester tarafından ele alınmıştır. Tarihte "Frobenius coin-exchange problem" ve aynı zamanda, "Frobenius'un lineer diyafont denklemi" olarak da adlandırılan bu problem ilk olarak "ortak bir bölene sahip olmayan bozuk paraları kullanılarak elde edilemeyen en büyük para miktarı nedir?" sorusuyla ifade edilmiştir [1]. Yani, temel olarak " a ve b negatif olmayan tamsayılar , p ile q sayıları 1 den büyük ve aralarında asal olmak üzere; $ap+bq$ lineer kombinasyonu olarak ifade edilemeyen $F(\mathrm{S})$ sayısı nedir?" sorusu Frobenius problemi olarak bilinir. p ve q gibi iki adet sayı için bu problemin çözümü; $F(S)=pq-p-q$ olarak belirlidir [2]. Bu şekilde iki sayı için $\left[0,F(S)\right]$ aralığındaki sayılardan p ile q sayılarının lineer kombinasyonu şeklinde yazılabilen ve yazılamayan sayısı eşit sayıda olduğu ve tam olarak $\dfrac{F(S)+1}{2}$ adet olduğu [2] da belirlenmiş ve bununla ilgili teoremin ıspatı, 1884 yılında "Educational Times" da yine Sylvester tarafından yapılmıştır [3].

Sayısal yarıgrupların oluşmasında temel olarak Diyafont denklemi vardır. "$ax+by=c$" biçimindeki denklem sistemleri Diyafont denklemi olarak adlandırılır. Sayısal yarıgrupların Diyafont denklemlerinden farkı ise, bu denklemlerin negatif olmayan çözümlerinin dikkate alınmamasıdır. Dolayısıyla bu denklemlerden genellemeye varacak olursak, $a_1, a_2, ..., a_k$ aralarında asal pozitif tamsayılar olmak üzere, $n = a_1x_1 + a_2x_2 + ...a_kx_k$; $x_i \geq 0, i = 1, 2, ..., k$ denkleminin negatif olmayan çözümleri ile oluşturulan n doğal sayılarının kümesi herhangi bir sayısal yarıgrubun elemanlarını belirtir. Dolayısıyla, bu sayıların lineer kombinasyonu olarak yazılabilen sayıların sonsuz tane olduğu tespit edilmiştir. Bu konu üzerinde ilgilenilen diğer bir soru ise, bir sayısal yarıgrubun minimal üreteç sisteminin ne olacağı ve bunları belirleme sorusudur.

Bu konu üzerinde yapılan çalışmalar , sayısal yarıgruplara ait yeni tanımların da ortaya çıkmasını sağlamıştır. Sonradan tanımlanmış olan; Apery kümeleri ve bu kümelere ait özellikler, simetrik, pseudo-simetrik ve hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup çeşitleri, boşluklar, kutup noktaları ve temel boşluklardan yola çıkarak gruba yeni bir eleman eklendiğinde ya da sayısal yarıgrubtan bir eleman çıkarıldığında elde edilen yeni kümelerin sayısal yarıgrup olma şartlarının nelere bağlı olduğu gibi konular, özellikle bu konu üzerinde geniş bir uygulama alanı olmuştur.

Bu konuyla ilgili J.C. Rosales, Numerical Semigroup kitabını [6] yazarak sayısal yarıgruplarla ilgili bilgileri derlemiş ve bu konuyla ilgili önemli bir kaynak olmuştur.

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışmada, öncelikle sayısal yarıgruplarla ilgili genel özellikler ve bazı çeşitleri ile ilgili önbilgiler verilecek. Devamında, Tanım 3.1.1 de bir sayısal yarıgrup için h-katlı küme tanımı yapacağız. Daha sonra Teorem 3.1.3 te bu kümenin bir sayısal yarıgrup olduğunu ıspatlayacağız. Böylece, verilen bir S sayısal yarıgrubu yardımıyla yeni bir sayısal yarıgrup inşa edilecek. Elde edilen bu sayısal yarıgrubu, h-katlı sayısal yarıgrup olarak adlandırıp, $h \odot S$ ile göstereceğiz. Daha sonra, bu yeni sayısal yarıgrubun özelliklerini, sayısal yarıgrupların özellikleri açısından karşılaştırmak ve böylece yeni inşa edilen bu sayısal yarıgrubun anlamlandırılarak literatüre kazandırma hedeflenmiştir. Bunun için $h = 2$ özel değerlerlerini bazı özelliklerini inceleyerek bunu genellemeye çalışacağız. Ayrıca h-katlı sayısal yarıgrubun idealleri ile ilgili de bazı sonuçlar verilecektir.

1.3 Hipotez

Bir sayısal yarıgrubunun h-katlı kümesi tanımlanmış ve bu kümenin sayısal yarıgrup olduğu gösterilmiştir. Elde edilen bu yeni sayısal yarıgrupla ilgili bazı önermeler ıspatlanmış ve temel sonuçlar elde edilmiştir.

BÖLÜM 2

SAYISAL YARIGRUPLAR

2.1 Sayısal Yarıgruplar

Tanım 2.1.1: $S, \mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin her $a,b \in S$ için $a+b \in S$ ve $0 \in S$ olacak şekilde bir alt kümesi olsun. Eğer $\mathbb{N} \setminus S$ kümesi sonlu ise S ye **sayısal yarıgrup** denir [6].

Örnek 2.1.2: $S = \{0, 7, 11, 14, 18, 21, 22, 23, 24, \rightarrow\}$ kümesi sayısal yarıgruptur.

Gerçekten, S kümesi toplamaya göre kapalı, $0 \in S$ ve

$\mathbb{N} \setminus S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20\}$ kümesi sonlu olup tanımdan bir sayısal yarıgrup olduğu görülür.

Ayrıca burada $\mathbb{N} \setminus S$ kümesi **S sayısal yarıgrubunun boşlukları** olup **G(S)** ile gösterilir. Bu kümenin eleman sayısına da **S nin sınıfı** denir ve **g(S)** ile gösterilir [11].

Yani Örnek 2.1.2 de,

$G(S) = \mathbb{N} \setminus S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20\}$ olup $g(S) = 17$ dir.

Örnek 2.1.2 yi biraz daha incelediğimizde $S = \{0, 7, 11, 14, 18, 21, 22, 23, 24, \rightarrow\}$

kümesinde $\{7, 11, 23, 24, 26, 27\}$ sayıları dışındaki tüm sayılar, bu kümenin elemanlarının lineer kombinasyonları şeklinde yazıldığı görülür.

Örneğin; $32 = 1.11 + 3.7,\ 40 = 1.26 + 2.7, \ldots$

Burada $A = \{7, 11, 23, 24, 26, 27\}$ dersek, bu kümeye S sayısal yarıgrubunun **üreteç sisitemi** denir. Ayrıca eğer S sayısal yarıgrubu, A kümesinin herhangi bir özalt kümesi ile üretilemiyorsa A ya **minimal üreteç sistemi** denir. Minimal üreteç sisteminin eleman sayısına da S sayısal yarıgrubunun **gömme boyutu** denir ve **e(S)** ile gösterilir [2].

Örnek 2.1.2 de; minimal üreteç sistemi: $A = \{7, 11, 23, 24, 26, 27\}$ ve $e(S) = 6$ dır.

Lemma 2.1.3: A boş kümeden farklı ve $A \subseteq \mathbb{N}$ olsun. O halde, aşağıdaki ifadeler denktir:

i) $S = \langle A \rangle$ bir sayısal yarıgruptur.

ii) $obeb(A) = 1$ dir [6].

Ispat: $i) \Rightarrow ii)$ **:** $\langle A \rangle$ bir sayısal yarı grup ve $obeb(A) = d$ olsun, eğer $s \in \langle A \rangle$ ise d | s elde edilir. $\mathbb{N} - \langle A \rangle$ sonlu olduğundan $\langle A \rangle$ sayısal yarıgrubunda öyle bir x elemanı vardır ki; d | x ve d | $x+1$olur. Bu da $d = 1$ olmasını gerektririr.

$ii) \Rightarrow i)$: $obeb(A) = 1$ olsun. O zaman $z_1 a_1 + \ldots + z_n a_n = 1$ olacak şekilde $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ve $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ bulunabilir. Bu eşitliği $z_{i1} a_{i1} + \cdots + z_{ik} a_{ik} = 1 - z_{j1} a_{j1} - \cdots - z_{jl} a_{jl}$

şeklinde düzenlersek $s \in \langle A \rangle$ için, $s + 1 \in \langle A \rangle$ bulunabilir demektir. Eğer

$n \geq (s-1)s + (s-1)$ ise $n \in \langle A \rangle$ olur. Üstelik, $n = qs + r,\ 0 \leq r < s$ olacak şekilde q ve r tamsayıları bulunabilir. $n \geq (s-1)s + (s-1)$ eşitliğinden $r \leq s - 1 \leq q$ elde edilir.

Buradan $n = (rs + r) + (q - r)s = r(s+1) + (q-r)s \in \langle A \rangle$ bulunur. Yani, $\langle A \rangle$ bir sayısal yarıgruptur.

Teorem 2.1.4: S sayısal yarıgrup ve $A = \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ kümesi S sayısal yarıgrubunun minimal üreteç sistemi ise;

$S = \langle n_1, n_2, \ldots, n_k \rangle = \{a_1 n_1 + a_2 n_2 + \ldots + a_k n_k : a_i \in \mathbb{N}, i \in \{1, 2, \ldots, k\}\}$ şeklindedir [6].

Ispat: Her $s \in S$ için $a_1 n_1 + ... + a_k n_k$ olacak şekilde $a_i \in \mathbb{N}, i \in \{1,2,...,k\}$ bulunabilir. Böylece, $S \subseteq \{a_1 n_1 + a_2 n_2 + ... + a_k n_k : a_i \in \mathbb{N}, i \in \{1,2,...,k\}\}$ elde edilir. Diğer taraftan,

$P = \{a_1 n_1 + a_2 n_2 + ... + a_k n_k : a_i \in \mathbb{N}, i \in \{1,2,...,k\}\}$ diyelim. Açıkça $0 \in P$ olduğu görülür. Şimdi $x, y \in P$ alırsak,

$x = a_1 n_1 + a_2 n_2 + ... + a_k n_k$, $y = a'_1 n_1 + a'_2 n_2 + ... + a'_k n_k$ olacak şekilde

$a_1, ..., a_k, a_1', ..., a_k' \in \mathbb{N}$ bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned} x + y &= (a_1 n_1 + a'_1 n_1) + (a_2 n_2 + a'_2 n_2) + ... + (a_k n_k + a'_k n_k) \\ &= (a_1 + a'_1) n_1 + (a_2 + a'_2) n_2 + ... + (a_k + a'_k) n_k \end{aligned}$$

olup, $x + y \in P$ elde edilir. Son olarak, $A = \{n_1, n_2, ..., n_k\}$ minimal üreteç sistemi olup, $ebob(A = \{n_1, n_2, ..., n_k\}) = 1$ olacağından Lemmaya 2.1.3 göre P bir sayısal yarıgruptur. Böylece, $S = P$ elde edilir.

Örnek 2.1.5: $A = \{4,7,9\}$ kümesi verilsin. $obeb(4,7,9) = 1$ olduğundan, $S = \langle A \rangle$ bir sayısal yarıgruptur. Gerçekten, $S = \langle A \rangle = \{0,4,7,8,9,11,12,13,14,15,\rightarrow\} \subset \mathbb{N}$ olup, $G(\mathrm{S}) = \mathbb{N} \setminus S = \{1,2,3,5,6,10\}$ ve $g(S) = 6$ sonlu olduğundan $S = \langle A \rangle$ bir sayısal yarıgruptur.

Tanım 2.1.6: S sayısal yarıgrup olsun. $G(S)$ kümesinin en büyük elemanına S sayısal yarıgrubunun **Frobenius Sayısı** denir ve $\mathbf{F(S)}$ ile gösterilir [4].

Örnek 2.1.2 de $S = \{0,7,11,14,18,21,22,23,24,\rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için

$G(S) = \{1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,13,15,16,17,19,20\}$ olup, $F(S) = 20$ elde edilir.

Tanım 2.1.7: S bir sayısal yarıgrup ve n, S sayısal yarıgrubunun bir elemanı olmak üzere, S nin n ye göre **Apery kümesi** şu şekilde tanımlanır:

$Ap(S,n) = \{s \in S : s - n \notin S\}$ [15].

Lemma 2.1.8: S bir sayısal yarıgrup ve n, S sayısal yarıgrubunun bir elemanı olsun. O halde, $\omega(i)$, S sayısal yarıgrubunun $\bmod n$ ye göre i ye denk olan en küçük elemanı olmak üzere,

$Ap(S,n)=\{s\in S : s-n\notin S\}=\{\omega(0)=0,\omega(1),\omega(2),...,\omega(n-1)\}$ şeklindedir [15].

Ispat: $i\in\{1,2,...,n-1\}$ alalım. O halde her $i\in\{1,2,...,n-1\}$ için $i+kn\in S$ olacak şekilde $k\in\mathbb{N}$ bulunur. Bu şekilde yazılan en küçük sayıya $\omega(i)$ dersek, $\omega(i)\in Ap(S,n)$ elde edilir. Buradan $\{\omega(0)=0,\omega(1),\omega(2),...,\omega(n-1)\}\subseteq Ap(S,n)$ olur. Şimdi bir $x\in Ap(S,n)$ alalım. O halde Apery kümesinin tanımına göre $x-n\notin S$ dir. Yani x, S sayısal yarıgrubunun bu özellikteki en küçük elemanıdır. Ayrıca $\operatorname{mod} n$ ye göre $\{1,2,...,n-1\}$ kümesinin elemanlarından birine denk olacağından

$x\in\{\omega(0)=0,\omega(1),\omega(2),...,\omega(n-1)\}$ olur. Böylece, , sonucuna varılır.

Lemma 2.1.9: S sayısal yarıgrup ve $S^*=S-\{0\}$ olsun. O halde $S^*-(S^*+S^*)$ kümesi S sayısal yarıgrubunun bir üreteç sistemidir. Üstelik her üreteç sistemi bu kümeyi kapsar [6].

Ispat: $s\in S^*$ alalım. Eğer $x\notin S^*-(S^*+S^*)$ ise, o halde $x,y\in S^*$ vardır öyle ki , $s=x+y$. Bunu sonlu adım için tekrar ettirirsek, $s=s_1+...+s_n$, $s_i\in S^*$ eşitliğini elde ederiz. Böylece, $S^*-(S^*+S^*)$ kümesi S sayısal yarıgrubunun bir üreteç sistemi olmuş olur. Şimdi, S sayısal yarıgrubunun herhangi bir üreteç sistemi olarak A kümesi verilsin ve bir $x\in S^*-(S^*+S^*)$ alalım. O halde, $x=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2 ...+\lambda_n a_n$ olacak şeklide $n\in\mathbb{N}^*$, $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\in\mathbb{N}$ ve $a_1,a_2,...,a_n\in A$ bulunabilir. Ayrıca, $x\notin(S^*+S^*)$ olduğundan, $x=a_i$ elde edilir. Yani, $S^*-(S^*+S^*)\subseteq A$ olup, böylece $S^*-(S^*+S^*)$ üreteç sisteminin minimal olduğunu söyleyebiliriz.

Tanım 2.1.10: S sayısal yarıgrubunun 0 dan farklı en küçük elemanın **$\mathbf{S}$ nin katlılığı** denir ve $\mathbf{m(S)}$ ile gösterilir [8].

Önerme 2.1.11: S bir sayılsa yarıgrup olsun. O halde,

i) $m(S)$, minimal üreteç sisteminin en küçük elemanıdır.

ii) $e(S)\le m(S)$ eşitsizliği sağlanır [9].

Ispat: i) şıkkı katlılığın tanımından direkt olarak elde edilir.

ii) için her $s\in S$ için $\left(k,w\right)\in\left(\mathbb{N},Ap(S,\mathrm{m(S)})\right)$ olmak üzere $s=kn+w$ olacağından $S=\left\langle\left(Ap(S,\mathrm{m(S)})\cup\{\mathrm{m(S)}\}\right)\right\rangle$ yazabiliriz. $S^*-\left(S^*+S^*\right)$ minimal üreteç sistemi olup

$S^*-\left(S^*+S^*\right)\subseteq\left\{Ap(S,\mathrm{m(S)})\cup\{\mathrm{m(S)}\}\right\}$ ve $\#\left\{Ap(S,m(S))\cup\{m(S)\}\right\}=m(S)$

olduğundan $e(S)\leq m(S)$ sonucuna varılır.

Örnek 2.1.12: $S=\langle 5,7,9\rangle=\{0,5,7,9,10,12,14,\rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için,

$$Ap(S,n)=\left\{s\in S: s-n\notin S\right\}=\left\{\omega(0)=0,\omega(1),\omega(2),...,\omega(n-1)\right\}$$
$$Ap(S,5)=\left\{\omega(0)=0,\omega(1),\omega(2),...,\omega(4)\right\}=\left\{0,7,9,16,18\right\}$$

$e(S)=3$ ve $\min\{5,7,9\}=m(S)=5$ olup, $e(S)\leq m(S)$ sağlanır.

Önerme 2.1.13: S bir sayısal yarıgrup ve n, S sayısal yarıgrubunun bir elemanı olsun. O halde,

i) $F(S)=\max(Ap(S,n))-n$

ii) $g(S)=\dfrac{1}{n}\left(\sum\limits_{w\in Ap(S,n)}w\right)-\left(\dfrac{n-1}{2}\right)$ dır [6].

Ispat:

i) Apery kümesinin tanımından $\max(Ap(S,n))-n\notin S$ dir. Eğer

$x>\max(Ap(S,n))-n$, ise $x+n>\max(Ap(S,n))$ yazılabilir. $w\in Ap(S,\mathrm{n})$ elemanı $\mathrm{mod}\,n$ ye göre $x+n$ ye denk olsun. $w<x+n$ olduğundan bazı k pozitif tamsıyıları için $x=w+kn$ şeklinde yazılabilir. Buradan, $x-n=w+(k-1)n\in S$ elde edilir. Yani $x\in S$ olur. Böylece, Frobenius sayısının tanımından $F(S)=\max(Ap(S,n))-n$

sonucuna varılır.

ii) Her $w\in Ap(S,n)$ için w , $\mathrm{mod}\,n$ ye göre i ye kongrüent ve $i\in\{1,2,...,n-1\}$ olduğu için $w=k_i+i$ olacak şekilde k_i pozitif tamsayısı bulunabilir

Böylece Lemma 2.1.8 den,

$Ap(S,n)=\left\{0,w(1)=\mathrm{k}_1\,n+1,w(2)=\mathrm{k}_2\,n+1,...,w(\mathrm{n}-1)=\mathrm{k}_{n-1}\,n+n-1\right\}$ elde edilir.

$\bmod n$ ye göre $w(i)$ ye denk olan bir x tamsayısı S nin elemanıdır ancak ve ancak $w(i) \leq x$ olmasıdır. Böylece,

$$\begin{aligned} g(S) &= k_1 + \ldots + k_{n-1} \\ &= \frac{1}{n}\left((k_1 n + 1) + \ldots + (k_{n-1} n + n - 1)\right) - \left(\frac{n-1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{w \in Ap(S,n)} w - \left(\frac{n-1}{2}\right) \end{aligned}$$

O halde buradan hareketle iki elemanla üretilen $S = \langle a,b \rangle$ sayısal yarıgrupları için bir genelleme yapabiliriz:

$Ap(S,a) = (0, b, 2b, \ldots, (a-1)b)$ olduğunundan aşağıdaki sonuca varabiliriz:

Sonuç 2.1.14: $a \, ve \, b$ **,** $ebob(a,b) = 1$ olacak şekilde iki pozitif tamsayı olsun.

i) $F(\langle a,b \rangle) = ab - a - b$

ii) $g(\langle a,b \rangle) = \dfrac{ab - a - b + 1}{2}$ dır [6].

İki üreteçli sayısal yarıgruplar için bu genellemeler yapılmıştır, fakat üç ve daha fazla sayıda üreteçli sayısal yarıgruplar için bu çok karmaşık olduğundan bu şekilde bir genelleme yapılamamıştır.

Lemma 2.1.15 : S , $\{n_1, \ldots, n_p\}$ ile üretilen bir sayısal yarıgrup olsun.

$obeb(n_1, \ldots, n_{p-1}) = \mathrm{d}$ olmak üzere, $T = \langle \frac{n_1}{d}, \ldots, \frac{n_{p-1}}{d}, n_p \rangle$ kümesi verilsin. O zaman $Ap(S, n_p) = d(Ap(T, n_p))$ olur [6].

Ispat: Hipotezde verilenleri kabul edelim.

Eğer $w \in Ap(S, n_p)$ ise $w \in \langle n_1, \ldots, n_{p-1} \rangle$ dir. Buradan $\frac{w}{d} \in \langle \frac{n_1}{d}, \ldots, \frac{n_{p-1}}{d} \rangle \subseteq T$ elde

edilir. Şimdi $w \in Ap(\mathrm{T}, n_p)$ alalım. O zaman $w \in \langle \frac{n_1}{d}, \ldots, \frac{n_{p-1}}{d} \rangle$ ve $wd \in \langle n_1, \ldots, \mathrm{n}_p \rangle \subseteq S$

olur. Eğer $dw - n_p$ elemanı da S'de ise $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$dw - n_p = \lambda_1 n_1 + \cdots + \lambda_{p-1} n_{p-1} + \lambda_p n_p$ şeklindedir. S sayısal yarıgrup olduğundan,

$obeb(n_1,...,n_p)=1$ dir. Bu da $obeb(d,n_p)=1$ demektir. Buradan

$(\lambda_p+1)n_p = dw-(\lambda_1 n_1+\cdots+\lambda_{p-1}n_{p-1})$ olduğundan $d \mid (\lambda_p+1)$ dir. Ama o zaman

$w=\frac{\lambda_1 n_1}{d}+...+\frac{\lambda_{p-1}n_{p-1}}{d}+\frac{\lambda_p+1}{d}n_p$ ve $\frac{\lambda_p+1}{d}$ pozitif tamsayı olmalı bu da $w\in Ap(\mathrm{T},n_p)$

olması ile çelişir. Sonuç olarak $Ap(S,n_p)=d(\mathrm{Ap}(\mathrm{T},n_p))$ elde edilir.

Lemma 2.1.16: S , $\{n_1,...,n_p\}$ ile üretilen bir sayısal yarıgrup olsun ve

$obeb(n_1,...,n_{p-1})=\mathrm{d}$

olmak üzere, $T=\langle\frac{n_1}{d},...,\frac{n_{p-1}}{d},n_p\rangle$ kümesi verilsin. O zaman,

i) $F(S)=dF(\mathrm{T})+(d-1)n_p$,

ii) $g(S)=dg(T)+\frac{(d-1)(n_p-1)}{2}$ dir [6].

Örnek 2.1.17: $S=\langle 20,30,17\rangle$ olsun. $obeb(20,30)=10$ ve

$T=\langle 2,3,17\rangle=\langle 2,3\rangle=\{0,2,3,\rightarrow\}$ olur. Buradan $F(\mathrm{T})=1,\ g(T)=1,$

$F(S)=10F(\mathrm{T})+9.17=10+153=163$ ve $g(S)=10g(\mathrm{T})+\frac{9.16}{2}=10+72=82$ elde

edilir.

Örnek 2.1.18: $S=\langle 6,8,11\rangle$ olsun. $Obeb(6,8)=2$ ve

$T=\langle 3,4,11\rangle=\langle 3,4\rangle=\{0,3,4,6,7,\rightarrow\}$ olur. $F(T)=5$, $g(\mathrm{T})=3$,

$F(S)=2F(\mathrm{T})+1.11=10+11=21$ ve $g(S)=2g(\mathrm{T})+\frac{9.16}{2}=6+\frac{1.10}{2}=11$ elde edilir.

Lemma 2.1.19: S sayısal yarıgrup olsun. O halde,

$g(S)\geq\frac{F(S)+1}{2}$, eşitsizliği sağlanır [6].

Daha sonra bu ifadenin eşitlik haline özel bir isim vereceğiz.

S sayısal yarıgrubu olsun. Frobenius sayısının tanımdan her $i\in\mathbb{N}^*$ için $F(S)+i\in S$ olduğunu biliyoruz. Şimdi benzer argümanla yeni bir tanım verelim:

Tanım 2.1.20: S sayısal yarıgrup ve $x \in G(S)$ olsun. Eğer her $s \in S$ için $x+s \in S$ oluyorsa x bir **Pseudo Frobenius** sayısıdır. S nin tüm Pseudo Frobenius sayılarının kümesi **PF(S)** ile gösterilir. $PF(S)$ nin eleman sayısına **S nin tipi** denir ve **t(S)** ile gösterilir.

NOT: $\max\left(PF(S)\right) = F(S)$ olduğu görülür.

Örnek 2.1.21: $S = \langle 5,7,9 \rangle = \{0,5,7,9,10,12,14,\rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için,

$PF(S) = \{11,13\}$ ve böylece $t(S) = 2$ elde edilir. Ayrıca $F(S) = 13$ olup $PF(S)$ kümesinin en büyük elemanıdır.

A kümesinde $\leq_S$ bağıntısına göre maximal elemanların kümesini $\max imals_{\leq S} A$ şeklinde göstereceğiz.

Önerme 2.1.22 : S bir sayısal yarıgrup olsun. O zaman, aşağıdakiler sağlanır:

i) $PF(S) = \left\{x \in \mathbb{Z} - S : x \in Maximals_{\leq_s}\right\}$

ii) $x \in \mathbb{Z} - S \Leftrightarrow f - x \in S$, bazı $f \in PF(S)$ için [6].

Önerme 2.1.23: S bir sayısal yarıgrup ve n bir pozitif tamsayı olsun. O halde,

$PF(S) = \left\{w - n : w \in Maximals_{\leq_s} Ap(S,n)\right\}$ dir [6].

Ispat: $x \in PF(S)$ alalım. Buradan $x \notin S$ ve $x+n \in S$ veya bir başka deyişle $x+n \in Ap(S,n)$ yazabiliriz. Ayrıca, $x+n \leq_s w$ olacak şekilde $w \in Ap(S,n)$ alalım. O halde, $w-(x+n) = w-x-n \in S$ olur. Yani, bazı $s \in S$ için $w-n = x+s$ elde edilir. $w-n \notin S$ ve $x \in PF(S)$ olduğundan, $s = 0$ olmalıdır. Yani, $w = x+n$ sonucuna varılır.

Şimdi, $w \in Maximals_{\leq_s} Ap(S,n)$ alalım. O zaman, $w-n \notin S$ dir. Eğer $w-n+s \notin S$ olacak şekilde $0 \neq s \in S$ bulunabiliyorsa, $w+s \in Ap(S,n)$ olur ki bu da w nin maksimalliği ile çelişir.

Tanım 2.1.24: Bir S sayısal yarıgrubu için eğer $e(S) = m(S)$ oluyorsa, bu sayısal yarıgruba **maksimal gömme boyutlu sayısal yarıgrup** denir [6].

Önerme 2.1.25: S bir sayısal yarıgrup ve $\{n_1 < n_2 < ... < n_e\}$ minimal üreteç sistemi olsun. O halde, S maksimal gömme boyutlu sayısal yarıgruptur ancak ve ancak $Ap(S,n_1) = \{0, n_2, n_3, ..., n_e\}$ olmasıdır [6].

Ispat: $Ap(S,n_1)$ bir üreteç sistemi olduğundan, $\{n_2, n_3, ..., n_e\} \subseteq Ap(S,n_1)$ yazabiliriz. Ayrıca, $Ap(S,n_1)$ kümesinin kardinalitesinin n_1 olduğunu biliyoruz. Böylece $e = n_1$ ancak ve ancak $Ap(S,n_1) = \{0, n_2, n_3, ..., n_e\}$ olmasıdır.

Şimdi Önerme 2.1.14 ve Önerme 2.1.24 den edilen sonucu verelim:

Sonuç 2.1.26: S bir sayısal yarıgrup ve $\{n_1 < n_2 < ... < n_e\}$ minimal üreteç sistemi olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır:

i) Eğer S maksimal gömme boyutlu ise $F(S) = n_e - n_1$ dir.

ii) S maksimal gömme boyutlu sayısal yarıgruptur ancak ve ancak

$g(S) = \dfrac{1}{n_1}\left(n_2 + n_3 + ... + n_e\right) - \dfrac{n_1 - 1}{2}$ olmasıdır.

iii) S maksimal gömme boyutlu sayısal yarıgruptur ancak ve ancak $t(S) = n_1 - 1$ olmasıdır [6].

Örnek 2.1.27: $S = \langle 4,5,11 \rangle = \{0,4,5,8,9,10,\rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için

$F(S) = n_e - n_1 = 11 - 4$ sağlanır. Fakat $m(S) = 4 > 3 = e(S)$ olup, S maksimal gömme boyutlu değildir.

2.2 Simetrik ve Pseudo-simetrik Sayısal Yarıgruplar

Tanım 2.2.1: Bir sayısal yarıgrup, eğer bu sayısal yarıgrubu özkapsayan iki sayısal yarıgrubun kesişimi olarak yazılamıyorsa bu sayısal yarıgruba **İndirgenemez Sayısal Yarıgrup** denir [6].

Örnek 2.2.2: $S = \langle 4,6,7 \rangle = \{0,4,6,7,8,10,\rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu indirgenemezdir. Fakat $S = \langle 5,7,9 \rangle = \{0,5,7,9,10,13 \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu indirgenemez değildir.

Lemma 2.2.3 : $S \neq \mathbb{N}$ bir sayısal grup verilsin. O zaman $S \cup \{F(S)\}$ kümesi bir sayısal yarıgruptur [6].

İspat: $S - \mathbb{N}$ sonlu olduğundan, $S \cup \{F(S)\}$ kümesinin de $\mathbb{N}$'deki tümleyeni sonludur. $a, b \in S \cup \{F(S)\}$ alalım. Eğer bir tanesi $F(S)$ ise, $a + b \geq F(S)$ yani $a + b \in S \cup \{F(S)\}$ olur. Eğer $a, \mathrm{b} \in \mathrm{S}$ ise $a + b \in S$ ve $S \subseteq S \cup \{F(S)\}$ olduğundan, $a + b \in S \cup \{F(S)\}$ elde edilir. Ayrıca $0 \in S \subseteq S \cup \{F(S)\}$ olup, $S \cup \{F(S)\}$ kümesi bir sayısal yarıgruptur.

Teorem2.2.4: S sayısal yarıgrup olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:

i) S indirgenemez bir sayısal yarıgruptur.

ii) S**,** Frobenius sayısı $F(S)$ olan tüm sayısal yarıgruplar içinde maksimaldir.

iii) S**,** Frobenius sayısı $F(S)$ yi içermeyen tüm sayısal yarıgruplar içinde maksimaldir [6].

Ispat: $i) \Rightarrow ii)$ **:** T , $S \subseteq T$ ve $F(S) = F(T)$ olacak şekilde bir sayısal yarıgrup olsun. O halde $S = \left(S \cup \{F(S)\}\right) \cap T$ elde edilir. S indirgenemez bir sayısal yarıgrup olduğundan $S = T$ elde edilir.

$ii) \Rightarrow iii)$: T , $S \subseteq T$ ve $F(S) \notin T$ olacak şekilde bir sayısal yarıgrup olsun. O halde $T \cup \{F(S)+1, F(S)+2, \rightarrow\}$ kümesi S sayısal yarıgrubunu kapsayan ve Frobenius sayısı $F(S)$ olan bir sayısal yarıgruptur. Böylece $S = T \cup \{F(S)+1, F(S)+2, \rightarrow\}$ olduğundan $S = T$ elde edilir.

$iii) \Rightarrow i)$: S_1 ve S_2 , S sayısal yarıgrubunu kapsayan iki sayısal yarıgrup olsun. O halde hipotezden $F(S) \in S_1$ ve $F(S) \in S_2$ olup böylece $S \neq S_1 \cap S_2$ elde edilir. Yani S indirgenemez bir sayısal yarıgruptur.

Tanım 2.2.5: S sayısal yarıgrubu eğer indirgenemez ve Frobenius Sayısı tek tamsayı ise S sayısal yarıgrubu **simetriktir** [6]**.**

Örnek 2.2.6: $S = \langle 4, 6, 7 \rangle = \{0, 4, 6, 7, 8, 10, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu simetriktir.

Tanım 2.2.7: S sayısal yarıgrubu eğer indirgenemez ve Frobenius Sayısı çift tamsayı ise S sayısal yarıgrubu **pseudo-simetriktir** [6]**.**

Örnek2.2.8: $S=\langle 3,4,5\rangle=\{0,3,\rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu pseudo-simetriktir.

Lemma 2.2.9: S sayısal yarıgrup ve $h=\max\left\{x\in\mathbb{Z}-S : F(S)-x\notin S \ ve \ x\neq\frac{F(S)}{2}\right\}$

olacak şekilde bir sayının var olduğunu kabul edelim. O halde $S\cup\{h\}$ kümesi Frobenius sayısı $F(S)$ olan bir sayısal yarıgruptur [6].

Ispat: $S\cup\{h\}$ kümesinin $\mathbb{N}$ içindeki tümleyeni sonlu ve $0\in S$ olduğu açıktır.

$H=\left\{x\in\mathbb{Z}-S : F(S)-x\notin S \ ve \ x\neq\frac{F(S)}{2}\right\}$ olarak alalım. Eğer $x\in H$ ise

$F(S)-x\in H$. Buradan, $h>\frac{F(S)}{2}$ elde edilir. Şimdi bir $s\in S-\{0\}$ alalım.

Eğer $h+s\notin S$ ise h nin maksimalliğinden ve $h>\frac{F(S)}{2}$, $h+s\neq\frac{F(S)}{2}$ olduğundan $F(S)-(h+s)=t\in S$ elde edilir. Buradan da $F(S)-h=t+s\in S$ olr ki bu da h nin tanımıyla çelişir.

Eğer $2h\notin S$ ise, yine h nin maksimalliğinden, $F(S)-2h=t\in S$ olup yukarıda da görüldüğü gibi $h+t\in S$ olur. Fakat, $h+t=F(S)-h$, S de olamayacağından çelişki elde edilir.

Önerme 2.2.10: S sayısal yarıgrup olsun.

i) S simetriktir ancak ve ancak $F(S)$ tek ve $x\in\mathbb{Z}-S$ iken $F(S)-x\in S$

ii) S pseudo-simetriktir ancak ve ancak $F(S)$ çift ve $x\in\mathbb{Z}-S$ iken ya $F(S)-x\in S$ ya da $x=\frac{F(S)}{2}$ olmasıdır [8].

Ispat:i) $(\Rightarrow)$: Eğer $x\in\mathbb{Z}-S$ fakat $F(S)-x\notin S$ ise

$h = \max\left\{ x \in \mathbb{Z} - S : F(S) - x \notin S \; ve \; x \neq \frac{F(S)}{2} \right\}$ alırsak, $S \cup \{h\}$ kümesi Frobenius sayısı $F(S)$ olan bir sayısal yarıgrup olur. Böylece S indirgenemez bir sayısal yarıgrup olduğundan Teorem 2.2.4 göre, " S **,** Frobenius sayısı $F(S)$ olan tüm sayısal yarıgruplar içinde maksimaldir" ifadesiyle çelişir.

$(\Leftarrow)$: Teorem 2.2.4 kullanırsak, " S **,** Frobenius sayısı $F(S)$ yi içermeyen tüm sayısal yarıgruplar içinde maksimaldir." ifadesini göstermemiz yeterlidir. Bunun için ; T, $T \subset S$ olacak şekilde bir sayısal yarıgrup olsun. Şimdi bir $x \in T - S \subset \mathbb{Z} - S$ alalım. O zaman hipotezden, $F(S) - x \in S$ ve böylece $F(S) - x \in T$ olur. Fakat bu da

$F(S) = x + \left(F(S) - x\right) \in T$ olamasını gerektirir. Böylece, S **,** Frobenius sayısı $F(S)$ yi içermeyen tüm sayısal yarıgruplar içinde maksimaldir.

Sonuç 2.2.11: S sayısal yarıgrup olsun. O halde, aşağıdaki denklikler vardır:

i) $S \; simetriktir \Leftrightarrow g(S) = \frac{F(S)+1}{2}$

ii) $S \; pseudo - simetriktir \Leftrightarrow g(S) = \frac{F(S)+2}{2}$ [6].

NOT: Simetrik ve pseudo-simetrik sayısal yarıgruplar arasında bir geçiş yoktur. Çünkü, simetrik sayısal yarıgrupların Frobenius sayısı tektir. Fakat pseudo-simetrik sayısal yarıgrupların Frobenius sayısı çifttir.

Örnek 2.2.12: $S = \langle 5,8,19 \rangle = \{0,5,8,10,13,15,16,18,19,20,21,23,\rightarrow\}$ verilsin,

$G(S) = \{1,2,3,4,6,7,9,11,12,14,17,22\}$ ve $F(S) = 22$ elde edilir. Eğer her $x \in G(S)$ için $F(S) - x \in S$ sağlanır. Eğer $x \notin G(S)$ ise x bir negatif tamsayıdır. Dolayısıyla $F(S) - x \in S$ şartı sağlanır. Böylece S kümesi bir pseudo-simetrik yarıgruptur.

Sonuç 2.2.13: Gömme boyutu 2 olan her sayısal yarıgrup simetriktir [6].

Örnek 2.2.14: $S = \langle 4,6,7 \rangle = \{0,4,6,7,8,10,11,\rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu simetriktir. $\langle 3,4,5 \rangle = \{3,\rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu ise pseudo-simetriktir. Ayrıca, $\langle 5,7,9 \rangle$ sayısal yarıgrubu indirgenemez değildir.

Sonuç 2.2.15: S sayısal yarıgrup ve n de sıfırdan farklı bir elemanı olsun. Eğer $x, y \in S$, $x + y \in Ap(S, n)$ olacak şekilde ise $\{x, y\} \subseteq Ap(S, n)$ olur [6].

Sonuç 2.2.16: S sayısal yarıgrup , n de sıfırdan farklı bir elemanı ve $Ap(\mathrm{S}, \mathrm{n}) = \{a_0 < a_1 < ... < a_{n-1}\}$ olsun. O halde, S simetriktir ancak ve ancak her $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$ için $a_i + a_{n-1-i} = a_{n-1}$ olmasıdır [6].

Ispat: $(\Rightarrow)$**:** Önerme 2.1.11 den $F(S) = a_{n-1} - n$ olduğunu biliyoruz. $a_i - n \notin S$ ve S simetrik olduğundan, $F(S) - (a_i - n) = a_{n-1} - a_i \in S$ yazabiliriz. Lemma2.2.13 ten, $a_{n-1} = a_i + a_j$ olacak şekilde $j \in \{0, 1, ..., n-1\}$ vardır. $a_0 < a_1 < ... < a_{n-1}$ olduğundan, $j = n - 1 - i$ olmalıdır.

$(\Leftarrow)$: Hipotezden, $\{a_{n-1}\} = Maximals_{\leq_S} Ap(S, n)$ yazabiliriz. Önerme2.1.19 dan $PF(S) = \{F(S)\}$ ve dolayısıyla $\{F(S)\} = Maximals_{\leq_S} (\mathbb{Z} - S)$ olur. Bu da eğer $x \in \mathbb{Z} - S$ ise $F(S) - x \in S$ demektir. Bunun ötesinde, eğer $\frac{F(S)}{2}$ bir tamsayı ise $\frac{F(S)}{2} \in \mathbb{Z} - S$ dir. Böylece, $F(S) - \frac{F(S)}{2} = \frac{F(S)}{2} \in S$ olup bu bir çelişkidir. Yani $F(S)$ tek ve Önerme 2.2.8 den S simetriktir.

Sonuç 2.2.17: S sayısal yarıgrup olsun. O halde aşağıdakiler denktir:

i) S simetriktir.

ii) $PF(S) = \{F(S)\}$

iii) $t(S) = 1$ [6].

Ispat: ii) ve iii) açıkça birbirine denktir. i) ve ii) arasındaki denlik de Sonuç 2.2.14 ün yeterlilik ıspatından elde edilir. Yani, $PF(S) = \{F(S)\}$ ve dolayısıyla $\{F(S)\} = Maximals_{\leq_S} (\mathbb{Z} - S)$ olur. Bu da eğer $x \in \mathbb{Z} - S$ ise $F(S) - x \in S$ demektir. Bunun ötesinde, eğer $\frac{F(S)}{2}$ bir tamsayı ise $\frac{F(S)}{2} \in \mathbb{Z} - S$ dir. Böylece,

$F(S)-\dfrac{F(S)}{2}=\dfrac{F(S)}{2}\in S$ olup bu bir çelişkidir. Yani $F(S)$ tek ve Önerme 2.2.8 den S simetriktir.

Sonuç 2.2.18: S sayısal yarıgrup ve n de sıfırdan farklı bir elemanı olsun. O halde S simetriktir ancak ve ancak $Maximals_{\leq_S} Ap(S,n)=\{F(S)+n\}$ olmasıdır [6].

Örnek 2.2.19: $S=\langle 4,6,7\rangle=\{0,4,6,7,8,10,\rightarrow\}$ olsun. O zaman, $Ap(S,4)=\{0,6,7,13\}$ elde edilir ve böylece $Maximals_{\leq_S} Ap(S,4)=\{F(S)+4\}=\{13\}$ dir.

Lemma 2.2.20: S bir pseudo-simetrik sayısal yarıgrup ve n de sıfırdan farklı bir elemanı olsun. O halde $\dfrac{F(S)}{2}+n\in Ap(S,n)$ dir [6].

Ispat: $\dfrac{F(S)}{2}\notin S$ olduğundan, $\dfrac{F(S)}{2}+n\in S$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Bunu göstermek için, tersini kabul edelim. Önerme 2.2.8 den

$$F(S)-\left(\frac{F(S)}{2}+n\right)=\frac{F(S)}{2}-n\in S$$

elde edilir. Fakat bu durum,

$$\frac{F(S)}{2}=\frac{F(S)}{2}-n+n\in S$$

olmasını gerektirir ki bu da imkansızdır.

Önerme 2.2.21: S**,** Frobenius sayısı çift olan bir sayısal yarıgrup ve $n\in S-\{0\}$ olsun. O halde, S bir pseudo-simetrik sayısal yarıgruptur ancak ve ancak $Ap(S,n)=\{a_0<a_1<\ldots<a_{n-2}=F(S)+n\}\cup\dfrac{F(S)}{2}+n$ ve her $i\in\{0,1,\ldots,n-2\}$ için $a_i+a_{n-2-i}=a_{n-2}$ olmasıdır [6].

Sonuç 2.2.22: S bir sayısal yarıgrup olsun. Aşağıdaki koşullar denktir:

i) S pseudo-simetriktir.

ii) $PF(S)=\left\{F(S),\dfrac{F(S)}{2}\right\}$ [6].

Örnek 2.2.23: $S=\langle 5,7,8\rangle=\{0,5,7,8,10,12,13,\rightarrow\}$ olsun. O halde $PF(S)=\{9,11\}$ olup tipi $t(S)=2$ dir ancak bir pseudo-simetrik sayısal yarıgrup değildir.

Örnek 2.2.24: $S=\langle 5,6,7,9\rangle=\{0,5,6,7,9,10,12,13,\rightarrow\}$ olursa

$Maximals_{\leq_S} Ap(S,5)=\{9,13\}$ olup $PF(S)=\{4,8\}=\left\{\frac{F(S)}{2},F(S)\right\}$ elde edilir. Yani, S bir pseudo-simetrik sayısal yarıgruptur.

Önerme 2.2.25: S, Pseudo-Simetrik bir sayısal yarıgrup ise S sayısal yarıgrubunun tipi, $t(S)=2$ dir [6].

İspat: S sayısal yarıgrup iken $PF(S)$ kümesinin eleman sayısının 2 olduğunu göstermeliyiz. Her S sayısal yarıgrubu için $F(S)\in PF(S)$ dir. $x=\frac{F(S)}{2}$ için $x\in PF(S)$ olduğunu gösterelim. $x=\frac{F(S)}{2}$ iken her $s\in S-\{0\}$ için $(x+s)\in S$ olduğunu gösterirsek, $x=\frac{F(S)}{2}\in PF(S)$ olur. Kabul edelim ki $(\frac{F(S)}{2}+s)\notin S$ olsun. S pseudo-simetrik bir sayısal yarıgrup olduğundan; $F(S)-(\frac{F(S)}{2}+s)\in S$, $\frac{F(S)}{2}+s=s'\in S$. Buradan $s+s'\in S$ olacak şekilde bir $s'\in S$ vardır. Fakat $\frac{F(S)}{2}=s+s'$ ve $\frac{F(S)}{2}\notin S$ olduğundan çelişki elde edilir. Dolayısıyla, $(\frac{F(S)}{2}+s)\in S$ olması gerektiği sonucuna varılır. $t(S)=2$ olduğunu göstermek için $PF(S)$ kümesinin sadece $F(S)$ ve $\frac{F(S)}{2}$ den oluştuğunu göstermemiz gerekir. Kabul edelim ki; $x\neq F(S)$ *ve* $x\neq\frac{F(S)}{2}$ için $x\in PF(S)$ olsun. S, pseudo-simetrik sayısal yarıgrup olduğundan, $F(S)-x\in S$ olmalıdır. $x\in PF(S)$ olduğundan x elemanının S sayısal yarıgrubunun sıfırdan farklı her elemanıyla toplamı sayısal yarıgrubun elemanı olmalıdır. S nin sıfırdan farklı elemanı olarak $F(S)-x\in S$ elemanını alalım, tanım gereği; $x+(F(S)-x)\in S$ elde edilir. Yani $F(S)\in S$ elde edilir ki bu bir çelişkidir.

Sonuç olarak; $PF(S)$ kümesinin sadece $F(S)$ ve $\frac{F(S)}{2}$ den oluştuğunu görürüz. Böylece $t(S)=2$ elde edilmiş olur.

Örnek 2.2.26: $S=\langle 5,8,19\rangle=\{0,5,8,10,13,15,16,18,19,20,21,23,\rightarrow\}$ kümesinin bir pseudo-simetrik yarıgrup olduğunu biliyoruz. O zaman $t(S)=2$ olmalı. Gerçekten, $PF(S)=\{11,22\}$ ve dolayısıyla $t(S)=2$ elde edilir.

NOT: Yukarıdaki önermenin tersi her zaman doğru olmayabilir. Yani $t(S)=2$ ise S bir pseudo-simetrik yarıgrup olmak zorunda değildir.

Örnek 2.2.27:

$S=\langle 5,13,21\rangle=\{0,5,10,13,15,18,20,21,23,25,26,28,30,31,33,34,35,36,38,\rightarrow\}$ sayısal yarı grubu için, $PF(S)=\{29,37\}$ olduğundan tipi, $t(S)=2$ dir. Ancak, $F(S)=37$ tek olduğundan, S sayısal yarıgrubu Pseudo-Simetrik bir sayısal yarıgrup değildir.

Örnek 2.2.28:

$S=\langle 7,9,11\rangle=\{0,7,9,11,14,16,18,20,21,22,23,25,27,\rightarrow\}$ sayısal yarıgruba için $PF(S)=\{24,26\}$, $t(S)=2$ ve $F(S)=26$ çift olmasına rağmen, pseudo-simetrik sayısal yarıgrup değildir. Çünkü, $2\notin S$ fakat $F(S)-2=26-2\in S$ olması gerekirken $24\notin S$ elde edilmiş olur.

Sonuç 2.2.29 : S sayısal yarıgrup olsun,
S, Pseudo-Simetriktir olması için gerek ve yeter koşul $H(S)$ kümesinin tek elemanlı olmasıdır [17].

İspat: ($\Rightarrow$): S Pseudo-Simetrik sayısal yarıgrup olduğundan, $F(S)$ çift sayı ve $x\in\mathbb{Z}-S$ için, $F(S)-x\notin S$ şartı sadece $x=\frac{F(S)}{2}$ için sağlanır.

$H(S)=\{z\in\mathbb{Z}: z\notin S \ ve \ F(S)-z\notin S\}$ olarak tanımlanmıştı. $x=\frac{F(S)}{2}$, kutup noktaları kümesinin şartını sağladığından; $x=\frac{F(S)}{2}\in H(S)$ olur. Kutup noktaları kümesinin $x=\frac{F(S)}{2}$ elemanından farklı bir elemanın olduğunu kabul edelim. $\frac{F(S)}{2}\neq z\in H(S)$ olsun. $z\notin S$ ve $F(S)-z\notin S$ olacaktır. Bu durum S sayısal yarıgrubunun Pseudo-Simetrik sayısal yarıgrup olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $H(S)=\left\{\frac{F(S)}{2}\right\}$ tek elemanlıdır.

$(\Leftarrow)$: $H(S)$ kümesinin tek elemanlı olsun. Kabul edelim ki; S Pseudo-Simetrik sayısal yarıgrup olmasın. $x\in H(S)\subset G(S)\Rightarrow x\in\mathbb{Z}-S$ ve $F(S)-x\notin S$ şartı sağlanır. $a=F(S)-x$ sayısını ele alalım. $a\notin S$ ve $F(S)-a=F(S)-(F(S)-x)=x\notin S$ elde edilir. Buradan $a=F(S)-x\in H(S)$ olur. Bu durum $H(S)$ kümesinin tek elemanlı oluşu ile çelişir. Yani, $x\in\mathbb{Z}-S$ için $F(S)-x\notin$ şartını sağlayan tek sayı olmalıdır. Bu durum; Pseudo-Simetrik sayısal yarıgrup olma şartıdır.

2.3 Hemen Hemen Simetrik Sayısal Yarıgruplar

Tanım 2.3.1 : S sayısal yarıgrup olmak üzere, $PF(S)=H(S)\cup\{F(S)\}$ şartını sağlayan sayısal yarıgruplara **hemen hemen simetrik yarıgrup** denir [14].

Örnek 2.3.2: $S=\langle 8,11,12,15\rangle=\{0,8,11,12,15,16,19,20,22,23,24,26,27,28,30,\rightarrow\}$

sayısal yarıgrubu için; $F(S)=29$, $PF(S)=\{4,25,29\}$, $H(S)=\{4,25\}$ ve dolayısıyla $PF(S)=H(S)\cup\{F(S)\}$ olduğundan S bir hemen hemen sayısal yarıgruptur.

Örnek 2.3.3: $S=\langle 7,12,13\rangle=\{0,7,12,13,14,19,20,21,24,25,26,27\ ,28,31,\rightarrow\}$ sayısal

yarıgrubu için; $F(S)=30$, $PF(S)=\{29,30\}$, $H(S)=\{1,8,15,22,29\}$ olup

$PF(S)\neq H(S)\cup\{F(S)\}$ elde edildiğinden, S hemen hemen simetrik değildir.

Önerme 2.3.4 : S bir simetrik sayısal yarıgrup ise aynı zamanda hemen hemen simetrik sayısal yarıgruptur [22].

İspat: S simetrik sayısal yarıgrup ise $H(S)=\varnothing$ olduğunu biliyoruz. Bu sebeple; $PF(S)=\{F(S)\}$ olduğunu göstermeliyiz. Yani S simetrik sayısal yarıgrubanun $F(S)$ den başka bir pseudo frebenius sayısının olmadığını göstermeliyiz. Kabul edelim ki; $F(S)\neq x\in PF(S)$ olsun. $x\in G(S)$ ve S simetrik sayısal yarıgrup olduğundan $F(S)-x\in S$ olmalıdır. $x\in PF(S)$ ise S'nin sıfırdan farklı her elemanıyla toplamı S sayısal yarıgrubanun elemanı olmalıdır. Öyleyse; S sayısal yarıgrubunun sıfırdan farklı elemanı olarak $F(S)-x \in S$ elemanını seçelim. O halde $x+(F(S)-x)=\cancel{x}+F(S)-\cancel{x}=F(S)\in S$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla, S simetrik sayısal yarıgrubanun Frobenius sayısından başka Pseudo Frobenius sayısı

olmadığından hemen hemen sayısal yarıgrup şartı sağlanır.

Örnek 2.3.5:

$S=\langle 6,14,17\rangle=\{0,6,12,14,17,18,20,23,24,26,28,29,30,31,32,34,35,36,37,38,40,\rightarrow\}$

sayısal yarı grubu verilsin;

$G(S)=\{1,2,3,4,5,7,8,9,10,11,13,15,16,19,21,22,25,27,33,39\}$, $PF(S)=\{39\}$ olup S simetrik olduğundan $H(S)=\varnothing$ ve $F(S)=39$ olduğundan, $PF(S)=H(S)\cup\{F(S)\}$ şartı sağlanır. Yani , S hemen hemen simetrik sayısal yarıgruptur.

Önerme 2.3.6 : S, Pseudo-Simetrik sayısal yarıgrup ise aynı zamanda hemen hemen simetrik sayısal yarıgruptur [22].

İspat: S, Pseudo-Simetrik sayısal yarıgrup ise $F(S)$ çift sayı ve $PF(S)=\left\{\frac{F(S)}{2},F(S)\right\}$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, $H(S)=\left\{\frac{F(S)}{2}\right\}$ olduğundan;

$PF(S)=H(S)\cup\{F(S)\}$ şartı sağlanır. Yani, S aynı zamanda hemen hemen simetrik bir sayısal yarıgruptur.

Örnek 2.3.7: $S=\langle 3,7\rangle=\{0,3,6,7,9,\rightarrow\}$ sayısal yarıgruba için $G(S)=\{1,2,4,5,8\}$,

$PF(S)=\{4,8\}$ ve $F(S)=8$ dir. Buradan S, Pseudo-Simetrik sayısal yarıgrup olduğu görülür. Böylece, $x\in G(S)$ için $F(S)-x\notin S$ şartı sadece $x=4$ için sağlandığından dolayı $H(S)=\{4\}$ tür. Böylelikle, $PF(S)=H(S)\cup\{F(S)\}$ şartı sağlanmış olup, S hemen hemen sayısal yarıgruptur.

Önerme 2.3.8 : S bir sayısal yarıgrup olmak üzere;

$2g(S)\geq F(S)+t(S)$

eşitsizliği sağlanır. Genel olarak, S sayısal yarıgruba hemen hemen simetrik ise; $2g(S)=F(S)+t(S)$ eşitliği sağlanır [22].

Sonuç 2.3.9: S hemen hemen sayısal yarıgrup ise, $t(S)=2g(S)-F(S)$ eşitliği sağlanır. Özel olarak, S simetrik sayısal yarıgrup ise $t(S)=1$ ve S pseudo simetrik sayısal yarıgrup ise $t(S)=2$ dir [22].

2.4 Arf Sayısal Yarıgruplar ve Saturated Sayısal Yarıgruplar

Tanım 2.4.1 : Bir sayısal yarıgrup S, eğer her $x,y,z\in S$ için $x\geq y\geq z$ olmak üzere $x+y-z\in S$ özelliğini sağlıyorsa S bir **Arf sayısal yarıgrup**tur [24].

Lemma 2.4.2: S, $\mathbb{N}$ nin toplamsal kapalı, $0\in S$ olmak üzere bir altkümesi olsun. O halde,

$S'=\{x+y-z : x,y,z\in S,\ x\geq y\geq z\}$ kümesi $\mathbb{N}$'nin toplamsal kapalı bir alt kümesidir ve $S\subseteq S'$ dür [24].

İspat: $x\in S$ olsun. O zaman $x+x-x\in S'$, yani $S\subseteq S'$. $S'\subseteq\mathbb{N}$ olduğu açıktır. Şimdi $a,b\in S'$ alalım. S' kümesinin tanımından, $x_i\geq y_i\geq z_i$, $i\in\{1,2\}$ ve

$a=x_1+y_1-z_1$, $b=x_2+y_2-z_2$ olmak üzere $x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2\in S$ vardır. Buradan, $a+b=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)-(z_1+z_2)$ elde edilir. Açıkça, $x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2\in S$ ve $x_1+x_2\geq y_1+y_2\geq z_1+z_2$ olduğu görülebilir. Bu da $a+b\in S'$ demektir. Böylece istenen elde edilmiş olur.

Tanım 2.4.3 : S, $\mathbb{N}$ nin toplamsal kapalı, $0\in S$ olmak üzere bir altkümesi olsun ve bir $n\in\mathbb{N}$ için, S^n şu şekilde tanımlanır:

$S^0=S$ ve $S^{n+1}=(S^n)'$ [24].

Önerme 2.4.4 : S bir sayısal yarıgrup olsun. O zaman $S^k=Arf(\mathrm{S})$ olacak şekilde $k\in\mathbb{N}$ vardır [24].

İspat: n üzerine tümevarım yöntemiyle $S^n\subseteq Arf(\mathrm{S}), \forall n\in\mathbb{N}$ olduğu kolayca gösterilebilir. Bir önceki lemmadan $S^n\subseteq S^{n+1}$ ve $S\subseteq S^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Eğer bazı $k\in\mathbb{N}$ için $S^k=S^{k+1}$ ise S sonludur. Bu da S^k bir Arf sayısal yarıgrup demektir.

$S^k \subseteq Arf(S)$ ve $Arf(S)$, S yi içeren en küçük Arf sayısal yarıgrup olduğundan $S^k = Arf(S)$ elde edilir.

Tanım 2.4.5 : Bir sayısal yarıgrup S, eğer $s \geq s_i$, $\forall i \in \{1,...,n\}$ olacak şekilde $s, s_1, ..., s_n \in S$ ve $z_i \in \mathbb{Z}$, $\forall i \in \{1,...,n\}$ olacak şekilde $z_1 s_1 + \cdots + z_n s_n \geq 0$ olduğunda $s + z_1 s_1 + \cdots + z_n s_n \in S$ oluyorsa **saturated yarıgrup** denir [6].

Örnek 2.4.6: $S = \langle 5,7,8,9,11 \rangle = \{0,5,7,8,9,10,11,\rightarrow\}$ sayısal yarıgruba saturated olduğunu gösterelim:

$s = 9,\ s_1 = 8,\ s_2 = 7,\ s_3 = 5$ ve $z_1 = -1,\ z_2 = 1,\ z_3 = 2$ olsun. O halde $z_1 s_1 + \cdots + z_n s_n = 8(-1) + 7.1 + 5.2 = 9 \geq 0$ sağlandığından ve

$s + z_1 s_1 + \cdots + z_n s_n = 9 + 9 = 18 \in S$ olduğundan S bir saturated yarıgruptur.

2.5 Apery Kümesinin Altkümeleri

Tanım 2.5.1 : S bir sayısal yarıgrup olsun, eğer $x, y \in S$ için $y - x \in S$ oluyorsa x *ve* y **kismî sıralıdır** denir ve $x \leq_S y$ ile gösterilir ve y büyüktür x şeklinde okunur. Böylece, $Ap(S)$'in $i(\mathrm{mod(m(S))})$' e kongrüent olan en küçük elemanını $\omega(i)$ ve $Ap(S)$'in en büyük elemanını ω' ile göstereceğiz.

Ayrıca, $F(S) + m(S) = \omega'$ olduğu açıkça görülür [6].

Örnek 2.5.2: $S = \langle 6,8,11 \rangle = \{0,6,8,11,12,14,16,17,18,19,20,22,\ \rightarrow\}$ verilsin.

Burada $11 \leq_S 17$ çünkü $17 - 11 = 6 \in S$. Fakat $11 \not\leq_S 20$ çünkü $20 - 11 = 9 \notin S$. $m(\mathrm{S}) = \min\{6,8,11\}$ = 6 ve $F(S) = 21$ dir.

$Ap(\mathrm{S}) = \{s \in S : s - m(\mathrm{S}) \notin \mathrm{S}\} = \{s \in S : s - 6 \notin S\} = \{0,8,11,16,19,27\}$.Ayrıca,

$\omega(0) \equiv 0$ her zaman doğrudur, $\omega(1) \equiv 19$, $\omega(2) \equiv 8$, $\omega(3) \equiv 27 = \omega'$, $\omega(4) \equiv 16$, $\omega(5) \equiv 11$

Örnek 2.5.3:

$S=\langle 6,14,17\rangle=\{0,6,12,14,17,18,20,23,24,29,30,31,34,35,36,37,38,40,\rightarrow\}$ verilsin.

$Ap(S)=\{0,14,17,28,31,45\}$ olup, $0\equiv\omega(0)(\mathrm{mod}\,6)$, $14\equiv\omega(2)(\mathrm{mod}\,6)$, $17\equiv\omega(5)(\mathrm{mod}\,6)$, $28\equiv\omega(4)(\mathrm{mod}\,6)$, $31\equiv\omega(1)(\mathrm{mod}\,6)$, $45\equiv\omega(3)(\mathrm{mod}\,6)$ elde edilir. Ayrıca, $F(S)=39$ ve $m(S)=6$ olup, $F(S)+m(S)=39+6=45=\omega'$ eşitliği sağlanır.

Tanım 2.5.4: S bir sayısal yarıgrup olsun,

$S'=\{x\in\mathbb{Z}: x\notin S \ ve \ x+s\in S \ her \ 0<s\in S\}$ kümesi şeklinde tanımlanır [6].

Tanım 2.5.5: S bir sayısal yarıgrup olsun. **S'nin kutup noktaları**, $H(S)$, şu şekilde tanımlanır:
$H(S)=\{z\in\mathbb{Z}: z\notin S \ ve \ F(S)-z\notin S\}$, ayrıca $H(S)\subset\mathbb{Z}$ dir [5].

Örnek 2.5.6: $S=\langle 7,9,11\rangle=\{0,7,9,11,14,16,18,20,21,22,23,25,27,\rightarrow\}$ ise o zaman, $G(S)=\{1,2,3,4,5,6,8,10,12,13,15,17,19,24,26\}$ ve dolayısıyla $S'=\{24,26\}$ olur. Böylece $H(S)=\{2,13,24\}$ olarak elde edilir.

Önerme 2.5.7: S bir sayısal yarıgrup olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:

i) $S'\setminus H(S)=\{F(S)\}$

ii) $H(S)$'in en büyük elemanı, S' kümesinin ikinci büyük elemanıdır.

iii) S simetriktir $\Leftrightarrow$ $S'=\{F(S)\}$ $\Leftrightarrow$ $H(S)=\varnothing$ [6].

Tanım 2.5.8 : S bir sayısal yarıgrup olmak üzere, $Ap'(\mathrm{S})$ ve $\mathrm{Ap}^*(\mathrm{S})$ kümeleri şu şekilde tanımlanır:

$$Ap'(S)=\{\omega\in Ap(S): \leq_S \ bağıntısına \ göre \ \omega \ \mathrm{maksimal}\}$$
$$Ap^*(S)=\{\omega\in Ap(S): \omega\not\leq_S \omega'\}$$
[5].

NOT: $Ap'(S)\setminus Ap^*(S)=\{\omega'\}$ dir.

Örnek2.5.9: $S=\langle 8,11,12,15\rangle=\{0,8,11,12,15,16,19,20,22,23,24,26,27,28,30,\rightarrow\}$

$G(S)=\{1,2,3,4,5,6,7,9,10,13,14,17,18,21,25,29\}$, $F(S)=29$, $m(S)=8$

$Ap(S)=\{0,11,12,15,22,26,33,37\}$

$Ap'(S)=\{\omega \in Ap(S):\leq_S \text{ bağıntısına göre } \omega \max imal\}=\{12,33,37\}$
$Ap^*(S)=\{\omega \in Ap(S):\omega \not\leq_S \omega'\}=\{12,33\}$

$Ap'(S)\setminus Ap^*(S)=37=\omega'$

Lemma 2.5.10 : S bir sayısal yarıgrup ve $S'=\{x\in\mathbb{Z}: x\notin S \text{ ve } x+s\in S \text{ her } 0<s\in S\}$ olsun. O zaman, $z\in S' \Leftrightarrow z+m(S)\in Ap'(S)$ dir [5].

Örnek 2.5.11: Bir önceki örnekten $S=\langle 8,11,12,15\rangle$ için S' hızlıca hesaplanabilir: $S'=\{4,25,29\}$

Lemma 2.5.12: S bir sayısal yarıgrup olsun. O zaman, $S \text{ simetriktir} \Leftrightarrow Ap'(S)=\{\omega'\}$ [5].

Lemma 2.5.13 : S bir sayısal yarıgrup olsun. O zaman, $S \text{ simetriktir} \Leftrightarrow Ap^*(S)=\varnothing$ [5].

Örnek 2.5.14: $S=\langle 2,3\rangle$ sayısal yarıgruba simetriktir, çünkü $Ap(\mathrm{S})=\{0,3\}$,

$Ap'(S)=\{3\}$ ve $\omega'=3$ dolayısıyla $Ap'(S)=\{\omega'\}$ dir. Ayrıca $Ap^*(S)=\varnothing$ dir.

Teorem 2.5.15 : S bir sayısal yarıgrup ve $0\neq n\in S$ olsun. O halde,
$PF(S)=\{w-n: w\in Ap(\mathrm{S},\mathrm{n}) \text{ ve } w\in \max imals_{\leq S} Ap(\mathrm{S},\mathrm{n})\}$ dir [6].

İspat: $x\in PF(S)$ olsun . O zaman $x\notin S$ ve $x+n\in S$, yani $x+n\in Ap(S,n)$. $x+n\leq_S w$ olacak şekilde $w\in Ap(S,n)$ alalım . O halde $w-(\mathrm{x}+\mathrm{n})=\mathrm{w}-\mathrm{n}-\mathrm{x}\in \mathrm{S}$, yani bazı $s\in S$ için $w-n=x+s$ elde edilir. $w-n\notin S$ ve $x\in PF(S)$ iken s =0 olmalı bu da $w=x+n$ demektir. Şimdi, bir $w\in \max imals_{\leq S} Ap(S,n)$. O zaman $w-n\notin S$. Eğer $w-n+s\notin S$, bazı $0\neq s\in S$ için, ise $w+s\in Ap(S,n)$ elde edilir ki bu da w nin maximalliği ile çelişir. Şu halde istenen elde edilir.

Örnek 2.5.16: $S=\langle 5,7,9\rangle$ olsun. O zaman $\max imal_{\leq S} Ap(S,5)=\{16,18\}$. Buradan $PF(S)=\{11,13\}$ elde edilir.

Örnek 2.5.17: Eğer $S=\langle a,b\rangle$ şeklinde bir sayısal yarıgrup ise
$Ap(S,a)=\{0,b,2b,\ldots,(\mathrm{a}-1)\mathrm{b}\}$ bu da $\max imal_{\leq S} Ap(\mathrm{S},\mathrm{a})=\{(a-1)\mathrm{b}\}$ ve
$PF(S)=\{ab-a-b\}$ elde edilir.

Önerme 2.5.18: S sayısal yarıgrup olsun. O halde,

$t(S) \le m(S) - 1$ **,** eşitsizliği sağlanır [6].

Örnek 2.5.19: $S = \langle 5,7,9 \rangle = \{0,5,7,9,10,12,14,15,\rightarrow\}$ verilsin,

$PF(S) = \{11,13\}$ ise $t(S) = 2$ dir. $m(S) = 5$ olduğundan yukarıdaki eşitsizlik sağlanır.

Örnek 2.5.20: $n \ge 2,\ r \ge 3n+2$ ve $s = r(3n+2)+3$ olmak üzere

$S = \langle s, s+3, s+3n, s+3n+2 \rangle$ olsun. O zaman S'nin tipi $t(\mathrm{S}) = 2n+3$ elde edilir.

Önerme 2.5.21: $p \in \mathbb{N}^*$ ve $\dfrac{S}{p} = \{x \in \mathbb{N} : px \in S\}$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:

i) $\dfrac{S}{p}$ bir sayısal yarıgruptur.

ii) $S \subseteq \dfrac{S}{p}$ dır [6].

2.6 Temel Farklar ve Sayısal Yarıgrubun Elde Edilmesi

Tanım 2.6.1: S bir sayısal yarıgrup olmak üzere; $G(S) = \mathbb{N} - S$ kümesi S'nin boşlukları olarak adlandırılmıştı. Eğer $x \in G(S)$ için $y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $y \mid x$ (y böler x) şartını sağlayan bir tamsayı ise ; y elemanı da $G(S)$ kümesine aittir. Bu sebeple, S sayısal yarıgrubu; $G(S)$, S'nin boşlukları olmak üzere $kx \notin G(S)$, $\mathrm{k} \ge 2$ şartını sağlayan x elemanlarından oluşur. Yani, S'nin boşlukları kümesinde ' $\mid$ '(bölme) işlemine göre maksimal olan elemanları bilmemiz yeterlidir. Dolayısıyla; bu şartları sağlayan elemanlara S sayısal yarıgrubunun temel farkları(boşlukları) denir [23].

Örnek 2.6.2:

$S = \langle 5,13,21 \rangle = \{0,5,10,13,15,18,20,21,23,25,26,28,30,31,33,34,35,36,38,\rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için, $G(S) = \{1,2,3,4,6,7,8,9,11,12,14,16,17,19,22,24,27,29,32,37\}$ dir. Buna göre S'nin temel farkları(boşlukları) kümesi; $\{14,17,19,22,24,27,29,32,37\}$

Tanım 2.6.3 : S bir sayısal yarıgrup ve S'nin temel farkları $\{x_1,...,x_r\}$ olsun. $\mathfrak{D}(x_1,...,x_r)=\{x\in\mathbb{N}: x\, böler\, x_i, i\in\{1,2,...,r\}\}$ olarak tanımlayalım. $\mathfrak{D}(x_1,...,x_r)$ kümesinin S sayısal yarıgrubunun boşluklar kümesi açıktır. Bu durumda, $S=\mathbb{N}-\mathfrak{D}(x_1,...,x_r)$ dir. [24]

Sonuç 2.6.4: $\mathfrak{D}(g_1,g_2)=\mathfrak{D}(g_1)\cup\mathfrak{D}(g_2)$ ifadesi sağlanır.

İspat: $x\in\mathfrak{D}(g_1,g_2)$ olsun. Bu durumda, $x \mid g_1$ veya $x \mid g_2 \Leftrightarrow x\in\mathfrak{D}(g_1)$ veya $x\in\mathfrak{D}(g_2)$.

Sonuç 2.6.5: $\mathfrak{D}(g_1,g_2,...,g_n)=\mathfrak{D}(g_1)\cup\mathfrak{D}(g_2)\cup\cdots\cup\mathfrak{D}(g_n)$

Önerme 2.6.6: S bir sayısal yarıgrup ve X ; $G(S)$ kümesinin bir alt kümesi olmak üzere, aşağıdaki koşullar denktir:

X ; S sayısal yarıgrubunun boşluklarını belirler.

Her $a\in\mathbb{N}$ için; eğer $a\in G(S)$ ve $\{2a,3a\}\subset S$ ise $a\in X$ tir. [6]

İspat: (i)$\Rightarrow$ (ii): Eğer; X, S'nin boşluklarını belirliyorsa, yukarıdaki tanımdan, $S=\mathbb{N}-\mathfrak{D}(x_1,...,x_r)$ ve sonuç olarak $G(S)=\mathfrak{D}(X)$ olur. Eğer, $a\in G(S)$ ise; $a\mid x$ şartını sağlayan en az bir $x\in X$ vardır ve bir $k\in\mathbb{N}$ sayısı için, $ka=x$ tir. Ayrıca, $\{2a,3a\}\in S$ kabülümüzden dolayı , $\forall l>1$ tamsayısı için $la\in S$ olduğundan, $k=1\; ve\; a=x\in X$ tir.

(ii)$\Rightarrow$ (i): $S=\mathbb{N}-\mathfrak{D}(X)$ olduğunu gösterirsek , temel boşluk tanımından, X'in , S'nin boşluklarını belirlediğini göstermiş oluruz. Kabulden dolayı; $X\subset G(S)$ olduğundan, $\mathfrak{D}(X)\subset G(S)$ dir. Böylece, $S\subset\mathbb{N}-\mathfrak{D}(X)$ olduğu sonucuna varılır. Eğer a; S sayısal yarıgrubuna ait olmayan negatif olmayan bir tamsayı ise, $a\in G(S)$ dir. $k=\max\{n\in\mathbb{N}: na\in G(S)\}$ olsun. $G(S)$ sonlu ve $0\notin G(S)$ olduğundan, $k\in\mathbb{N}-\{0\}$ dır. Buradan, $ka\in G(S)$ ve $\{2ka,3ka\}\subset S$ olacağından, hipotezden dolayı; $ka\in X$ ve sonuç olarak $a\in\mathfrak{D}(X)$ olur. Buradan $S=\mathbb{N}-\mathfrak{D}(X)$ olduğu sonucuna varılır.

Tanım 2.6.7 : Bir S sayısal yarıgrubunun temel farkları kümesi bir önce önermeye göre $FG(S)=\{x\in G(S):\{2x,3x\}\subset S\}$ olarak tanımlanır. Eğer $x,y\in FG(S)$ ve $x\neq y$ ise, o zaman $x\nmid y$ (x bölmez y) dir [24].

Örnek 2.6.8: $X=\{5,8,12,13\}$ olmak üzere, $\mathfrak{D}(\mathrm{X})$ kümesini ve S sayısal yarıgrubunu oluşturalım:

$\mathfrak{D}(\mathrm{X})$ kümesi, tanım gereği; X kümesine ait olan elemanlardan ve bu elemanların bölenlerinden oluşmaktadır. Yani, $\mathfrak{D}(\mathrm{X})=$ $\mathfrak{D}(5,8,12,13)=\{1,2,3,4,5,6,8,12,13\}$ şeklindedir. Çünkü, 1| 5, 2| 8, 3| 12, 4| 12, 6| 12 olduğundan S sayısal yarıgrubunun farkları kümesine dahil edilirler. Şimdi S sayısal yarıgrubunu oluşturalım: $\mathfrak{D}(\mathrm{X})$ kümesi S sayısal yarıgrubunun farkları kümesi olduğundan negatif olmayan tamsayılar kümesiyle $\mathfrak{D}(\mathrm{X})$ kümesinin farkını aldığımızda S sayısal yarıgrubunu elde ederiz. Yani, $S=\{0,7,9,10,11,14,\rightarrow\}$ elde edilir. Bu küme de negatif olmayan tamsayılar kümesinin, 0 elemanını kapsayan, toplamsal kapalı bir alt kümesi olduğundan bir sayısal yarıgruptur.

Örnek 2.6.9: $FG(S)=\{7,10,13,16\}$ olan S sayısal yarıgrubunu belirleyelim:

$\mathfrak{D}(FG(S))=$ $\mathfrak{D}(7,10,13,16)=\{1,2,4,5,7,8,10,13,16\}$ ve buradan da sayısal yarıgrubu oluşturursak; $S=\mathbb{N}-$ ($\mathfrak{D}(7,10,13,16)$) $=\{0,3,6,9,11,12,14,15,17,\rightarrow\}$ olur.

2.7 Sayısal Yarıgrupların İdealleri

Tanım 2.7.1 : S bir sayısal yarıgrup ve $I\subseteq S$ olmak üzere, $I+S\subseteq I$ oluyorsa, $I\subseteq S$ alt kümesine $\mathbf{S}$ **sayısal yarıgrubunun ideali** denir. Eğer, $A\subset S$ için, $I=A+S$ oluyorsa; I, S sayısal yarıgrubunun $\mathbf{A}$ **alt kümesi ile üretilen ideali** adını alır**.** Eğer I tek eleman ile üretiliyorsa, **temel ideal** denir. Yani, temel ideal $x_0\in S$ için, $I=\{x_0\}+S=\{x_0+s:s\in S\}$ şeklinde ifade edilir ve $I=[x_0]$ ile gösterilir [26].

Sonuç 2.7.2: Yukarıdaki tanıma göre $0\neq x_0\in S$ için $I=[x_0]$ ideali bir sayısal yarıgrup değildir. Çünkü sayısal yarıgrubun tanımından dolayı $0\in I=[x_0]$ olmalı. Fakat $0\neq x_0$

olduğundan, $\forall s \in S$ için $0 \neq x_0 + s$ olur. Yani $0 \notin I = [x_0]$ ve dolayısıyla $I = [x_0]$ bir sayısal yarıgrup değildir.

Örnek 2.7.3: $S = \langle 4,7,9 \rangle = \{0,4,7,8,9,11,\rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için temel ideal örnekleri oluşturalım:

$I = [4] = 4 + S = \{4,8,11,12,13,15,\rightarrow\}$, $m(I) = 4$, $F(I) = 14$, $G(\mathrm{I}) = \{0,7,9,14\}$

$J = [7] = 7 + S = \{7,11,14,15,16,18,\rightarrow\}$, $m(I) = 7$, $F(\mathrm{I}) = 17$, $G(\mathrm{J}) = \{0,4,8,9,12,13,17\}$

$K = [9] = 9 + S = \{9,13,16,17,18,20,\rightarrow\}$, $m(\mathrm{I}) = 9$, $\mathrm{F(I)} = 19$, $G(\mathrm{K}) = \{0,4,7,8,11,12,14,15,19\}$

Lemma 2.7.4: I **,** S sayısal yarıgrubunun temel ideali olsun. O halde $I \cup \{0\}$ kümesi bir sayısal yarıgruptur.

Ispat: I , S sayısal yarıgrubunun temel ideali olsun. $P = I \cup \{0\}$ alalım. I , S sayısal yarıgrubunun temel ideali ise $x_0 \in S$ için $I = \{x_0\} + S = \{x_0 + s : s \in S\}$ şeklinde yazabiliriz. Böylece, S sayısal yarıgrubunun tüm elemanlarına $x_0 \in S$ eklenmiş olur.

Not: I **,** S sayısal yarıgrubunun temel ideali olsun. $P = I \cup \{0\}$ alalım. O halde,

i) $F(I) = F(S) + x_0$

ii) $m(I) = m(S) + x_0$

Tanım 2.7.5: $I \ ve \ J$, S sayısal yarıgrubunun iki ideali olsun;

ideal toplamı: $I + J = \{i + j : i \in I, j \in J\}$

ideal kesişimi: $I \cap J = \{x : x \in I \ ve \ x \in J\}$

ideal birleşimi: $I \cup J = \{x : x \in I \ ve\, ya \ x \in J\}$ şeklinde tanımlanır [14].

Örnek 2.7.6: Bir önceki örnekten I, J, K idealleri için,

$I + J + K = [20] = 20 + S = \{20,24,27,28,29,31,\rightarrow\}$,

$I \cup J = \{4,7,8,11,\rightarrow\} \supseteq I + J + K$, $I \cap K = \{13,15,16,17,18,20,\rightarrow\}$

Önerme 2.7.7: S bir sayısal yarıgrup ve I, J iki ideali olsun. O halde $I + J,\ I \cup J,\ ve\ I \cap J$ birer idealdir.

İspat: $I + J$ ' nin ideal olması için; $(I + J) \subseteq S \ ve \ (I + J) + S \subseteq I + J$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için, $i + j \in I + J$ alalım. Burada $i \in I$, $j \in J$, $I \subseteq S \ ve \ J \subseteq S$ olduğundan $i + j \in S$ dir. Yani $I + J \subseteq S$ olur. Diğer kapsamı göstermek için, yine

$i \in I$, $j \in J$ olmak üzere $i + j \in I + J$ alalım. Bir $s \in S$ için $(i+j)+\mathrm{s} = \underbrace{i}_{\in I} + \underbrace{(\mathrm{j+s})}_{\substack{J\, ideal\, old.\\ \in J}} \in I + J$ olur. Dolayısıyla,

$(I+J)+S \subseteq I+J$ elde edilir. Böylece $I+J$, S'nin bir idealidir.

$I \cup J$' nin ideal olması için; $(I \cup J) \subseteq S \; ve \; (I \cup J)+S \subseteq I \cup J$ olduğunu göstermeliyiz.

$I \subseteq S \; ve \; J \subseteq S$ olduğundan $I \cup J \subseteq S$ dir. Ayrıca, $i \in I \cup J$ alalım, burada $i \in I \; ve \; ya \; i \in J$, bir $s \in S$ için $i+s \in I$ veya $i+s \in J$ olmalı. Dolayısıyla, $i+s \in I \cup J$. Yani, $(I \cup J)+S \subseteq I \cup J$ elde edilmiş olur. Böylece $I \cup J$, S'nin bir idealidir.

$I \cap J$' nin ideal olması için; $(I \cap J) \subseteq S \; ve \; (I \cap J)+S \subseteq I \cap J$ olduğunu göstermeliyiz:

$I \subseteq S \; ve \; J \subseteq S$ olduğundan $I \cap J \subseteq S$ dir. Ayrıca, $i \in I \cap J$ alalım, burada $i \in I \; ve \; i \in J$, bir $s \in S$ için $i+s \in I$ ve $i+s \in J$ olmalı. Buradan $i+s \in I \cap J$ elde edilir ki bu da $(I \cap J)+S \subseteq I \cap J$ demektir. Böylece, $I \cap J$ S sayısal yarıgrubunun bir idealidir.

Tanım 2.7.8: S bir h-katlı sayısal yarıgrup ve $I \subseteq \mathbb{Z}$ olsun. $I+S \subseteq I$ ve bazı $s \in S$ için $I+s \subseteq S$ oluyorsa I ya **relative ideali** denir. S sayısal yarıgrubu tarafından kapsanan relative ideallere S sayısal yarıgrubunun **integral ideali** adı verilir. $\mathbb{Z}-I$'nin en büyük elemanı, I'nın Frobeius sayısı olarak adlandırılır ve $F(I)$ ile gösterilir [26].

Tanım 2.7.9: $I \; ve \; J, S$ sayısal yarıgrubunun relative idealleri olmak üzere; $I+J = \{i+j : i \in I, j \in J\}$ ve $I-J = \{z \in \mathbb{Z} : z+J \subseteq I\}$ olarak tanımlanır. Eğer $z \in \mathbb{Z}$ ise, $z+S = \{z+s : s \in S\}$ kümesi, z ile üretilen **temel relative ideal** denir. Bir idealin $I = (b_1, \ldots, b_n)$ ile üretilmesi, $I = (b_1, \ldots, b_n) = (b_1+S) \cup \cdots \cup (b_n+S)$ anlamına gelir [14].

Örnek 2.7.10: $S = \langle 8, 10, 11, 13 \rangle$ h-katlı sayısal yarıgrubu için, $I = (2,4)$ ve $J = (1,5)$ ideallerini oluşturalım:

$S = \langle 8,10,11,13 \rangle = \{0,8,10,11,13,16,18,19,20,21,22,23,24,26,\rightarrow\}$,

$F(S) = 25 \; ve \; m(S) = 8$

$I = (2+S) \cup (4+S) = \{2,4,10,12,13,14,15,17,18,20,\rightarrow\}$, $F(I) = 19 \; ve \; m(I) = 2$

$J = (1+S) \cup (5+S) = \{1,5,9,11,\rightarrow\}$, $F(J) = 10 \; ve \; m(J) = 1$

Tanım 2.7.11: Bir S h-katlı sayısal yarıgrubunun özel bir relative ideali olan **kanonikal ideali**; Ω sembolü ile gösterilir ve $\Omega = \{F(S) - x : x \in (\mathbb{Z} - \mathrm{S})\}$ şeklinde tanımlanır. Böylece; Ω , $z = F(S) - x$ şeklinde h-katlı sayısal yarıgrubun boşluklarına göre simetrik olan z tamsayılarını kapsıyorsa , z tamsayısı $\mathbf{x}$ **e göre simetrik** olarak adlandırılır [26].

Örnek 2.7.12: $S = \langle 4,7,13 \rangle = \{0,4,7,8,11,12,\rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için

$F(S) = 10 \; ve \; \mathbb{Z} - S = \{10,9,6,5,3,2,1,-1,-2,...\}$ olarak bulunur. Kanonik ideal tanımından, $\Omega = \{F(S) - x : x \in (\mathbb{Z} - \mathrm{S})\} = \{0,1,4,5,7,8,9,11,\rightarrow\}$

Teorem 2.7.13: S sayısal yarıgrup olmak üzere, aşağıdaki ifadeler sağlanır;

(i) $S \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{N}$

(ii) S'nin her I relative ideali için, $\Omega - I = \{F(S) - x : x \in (\mathbb{Z} - I)\}$

(iii) Eğer $I \; ve \; J$, S'nin $I \subseteq J$ şartını sağlayan relative idealleri ise, o zaman $\#(J - I)$=$\#[(\Omega - I) - (\Omega - J)]$ sağlanır [26].

İspat: (i) Eğer $s \in S$ ise, o zaman $x = F(S) - \mathrm{s} \notin \mathrm{S}$ sağlanır. Bu yüzden, $s = F(S) - \underbrace{(F(S) - s)}_{=x}$ = $F(S) - x \in \Omega$ olacağından $S \subseteq \Omega$ elde edilir.

Eğer, $z \in \mathbb{Z} \; ve \; z < 0$ ise, o zaman $F(S) - z > F(S)$, bu yüzden $F(S) - z \in S$ ve $z \notin \Omega$ elde edilir. Dolaısıyla $\Omega \subseteq \mathbb{N}$ olur. Böylece $S \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{N}$ sağlanmış olur.

(ii) S'nin her I relative ideali için, $x \in I \Rightarrow (F(S) - x) \notin \Omega - \mathrm{I}$ veya $x \notin I \Rightarrow (F(S) - x) \in \Omega - \mathrm{I}$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $x \in I$ alalım. Eğer $(F(S) - x) \in \Omega - \mathrm{I}$ ise, o zaman $F(S) - x + I \subseteq \Omega$ olur. Özel olarak; $F(S) - x + x = F(S) \in \Omega$ olur ki bu bir çelişkidir. Eğer, $(F(S) - x) \notin \Omega - \mathrm{I}$ ise, o zaman $F(S) - x + i \notin \Omega$ olacak şekilde $i \in I$ vardır. Buradan, $(F(S) - x + i)$ elemanının S nin bir elemanına göre simetrik olduğu sonucuna varılır. Özel olarak, $F(S)-(F(S)-x+i)=x+i\in S$ ve böylece $x\in i+S\subseteq I$ çelişkisi elde edilir.

(iii) $z\in\mathbb{Z}$ olsun. (ii) den, $z\in J-I \Leftrightarrow (F(S)-\mathrm{z})\in\left[(\Omega-I)-(\Omega-J)\right]$ bu sebepten iki küme arasında bire-bir eşleme vardır ve aynı eleman sayısına sahiptirler.

BÖLÜM 3

h-KATLI SAYISAL YARIGRUPLAR

3.1 h-Katlı Sayısal Yarıgruplar

Tanım 3.1.1: S bir sayısal yarıgrup ve $h \geq 2$ bir tamsayı olsun. $S^* = S \setminus \{0\}$ olmak üzere, $h \odot S = \{s_1 + s_2 + ... + s_h : s_i \in S^*, i = 1, 2, ..., h\} \cup \{0\}$ kümesine **S sayısal yarıgrubunun h-katlı kümesi** denir [27].

Örnek 3.1.2: $S = \langle 3,5 \rangle = \{3,5,6,8,\rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu ve $h = 3$ için, h-katlı küme:

$$3 \odot S = \{s_1 + s_2 + ... + s_h : s_i \in S^*, i = 1, 2, ..., h\} \cup \{0\} = \{0,9,11,13,15,16,17,18,\rightarrow\}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 3.1.3: S sayısal yarıgrubunun h-katlı kümesi:

$h \odot S = \{s_1 + s_2 + ... + s_h : s_i \in S^*, i \in \{1, 2, ..., h\}\} \cup \{0\}$, bir sayısal yarıgruptur [27].

Ispat: S sayısal yarıgrup ve $h \geq 2$ bir tamsayı olsun. $0 \in h \odot S \neq \varnothing$ ve $h \odot S \subseteq \mathbb{N}$ olduğundan birleşme özelliğini sağlanır. Şimdi $x, y \in h \odot S$ alalım. O halde, $s_i, s_i' \in S^*, i \in \{1, 2, ..., h\}$ olmak üzere, $x = s_1 + s_2 + ... + s_h$ ve $y = s'_1 + s'_2 + ... + s'_h$ şeklinde yazılabilir.

Bu durumda,

$$x + y = (s_1 + s_2 + ... + s_h) + (s'_1 + s'_2 + ... + s'_h)$$
$$x + y = (s_1 + s'_1) + (s_2 + s'_2) + ... + (s_h + s'_h)$$

S sayısal yarıgrup olduğundan,

$s_i + s_i' \in S^*, i \in \{1, 2, ..., h\}$ olup, $s_i + s_i' = t_i$ yazarsak;

$x + y = t_1 + t_2 + ... t_h, t_i \in S^*,\ i \in \{1, 2, ..., h\}$ ve böylece $x + y \in h \odot S$ elde edilir.

Şimdi $G(h\odot S)=\mathbb{N}\setminus h\odot S$ kümesinin sonlu olup olmadığına bakalım:

S sayısal yarıgrup ve $F(S)$ nin tanımından $F(S)+1=s\in S^*$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca, her $i\in\mathbb{N}$ için $s+i\in S^*$ olup, $(h-1)s+(s+i)\in h\odot S$ elde eldir. Buradan, her $i\in\mathbb{N}$ için $hs+i\in h\odot S$ olduğu görülür. Yani $G(h\odot S)=\mathbb{N}\setminus h\odot S$ kümesi sonludur.

Böylece, $h\odot S$ bir sayısal yarıgruptur.

Teorem 3.1.3 yardımıyla, artık verilen bir S sayısal yarıgrubu için S nin **h-katlı sayısal yarıgrubu**: $h\odot S=\{s_1+s_2+...+s_h : s_i\in S^*, i=1,2,...,h\}\cup\{0\}$ şeklinde elde edilir.

Önerme 3.1.4: S sayısal yarıgrup ve $h\odot S$ de h-katlı sayısal yarıgrubu olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır:

i) $m(h\odot S)=h.m(S)$

ii) $F(S)\leq F(h\odot S)$

iii) $g(S)\leq g(h\odot S)$

iv) $e(S)\leq e(h\odot S)$ [27].

Ispat: i) S sayısal yarıgrubunun katlılığı $m(S)$ olsun. S sayısal yarıgrubunun h-katlı sayısal yarıgrubu,

$h\odot S=\{s_1+s_2+...+s_h : s_i\in S^*, i=1,2,...,h\}\cup\{0\}$ şeklinde olduğundan,

$s_i\in S^*, i=\{1,2,...,h\}$ olmak üzere

$m(h\odot S)=s_1+s_2+...+s_h$ şeklindedir. Katlılığın tanımından,

$m(h\odot S)=\min\left(h\odot S-\{0\}\right)$ olacağından her $i\in\{1,2,...,h\}$ için $s_i=m(S)$ olmalıdır. Böylece $m(h\odot S)=s_1+s_2+...+s_h=h.m(S)$ olarak bulunur.

ii) S sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısı $F(S)$ ve minimal üreteç kümesi $A=\{a_1,a_2,...,a_k\}$ olsun. $F(S)$ sayısı $h\odot S$ sayısal yarıgrubunun elemanı olamaz. Yani $F(S)>F(h\odot S)$ olamaz. Fakat $h\odot S\cap A=\varnothing$ olduğundan $F(S)\leq F(h\odot S)$ elde edilir.

iii) S sayısal yarıgrubunun minimal üreteç kümesi $A=\{a_1,a_2,...,a_k\}$ olmak üzere $h\odot S\cap A=\varnothing$ olduğundan, $G(S)\subseteq G(h\odot S)$ olur ve böylece $g(S)\leq g(h\odot S)$ elde edilir.

iv) $S=\langle a_1,a_2,\dots,a_k\rangle$ minimal üreteç sistemi olsun. Yani $e(S)=k$ olsun. Ayrıca S sayısal yarıgrubunun minimal üreteç kümesi $A=\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$ olmak üzere $h\odot S\cap A=\varnothing$ olduğundan, $e(h\odot S)\geq k$ olmalıdır.

3.2 2-katlı Sayısal Yarıgruplar

$2\odot S=\{s_1+s_2 : s_1,s_2\in S^*\}\cup\{0\}$ kümesinin sayısal yarıgrup olduğunu biliyoruz.

Lemma 3.2.1: $S=\langle a_1,a_2,\dots,a_n\rangle$ sayısal yarıgrubu ve S nin 2-katlı sayısal yarıgrubu, $2\odot S$ için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

i) $2\odot S=S\setminus\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$

ii) $g(2\odot S)=g(S)+e(S)$

iii) $2S=\{2s : s\in S\}$ olmak üzere, $2S\subseteq 2\odot S\subseteq S$ dir [27].

Ispat: i) $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ minimal üreteç sistemi olduğundan hiç biri diğerlerinin lineer kombinasyonu şeklinde yazılamaz. Böylece $2\odot S=\{s_1+s_2 : s_1,s_2\in S^*\}\cup\{0\}$ tanımından, her $i\in\{1,2,\dots,n\}$ için $a_i\notin 2\odot S$ elde edilir. Yani,

$2\odot S\subseteq S\setminus\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ elde edilir. Şimdi bir $x\in S\setminus\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ alalım. Bu eleman minimal üreçlerden en az ikisinin lineer kombinasyonu şeklinde yazılabileceğinden $x\in 2\odot S$ bulunur. Böylece $2\odot S=S\setminus\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ sonucuna varılır.

ii) $2\odot S=S\setminus\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ olduğunu kullanırsak, $G(2\odot S)=\mathrm{G(S)}\cup\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ elde edilir. Bu da, $g(2\odot S)=g(S)+e(S)$ demektir.

iii) $x\in 2S$ alalım. $s\in S$ olmak üzere, $x=2s$ şeklinde yazabiliriz. Böylece $x\in 2\odot S$ olur. Buradan $2S\subseteq 2\odot S$ bulunur. Aynı zamanda $x\in S$ olduğundan $2\odot S\subseteq S$ elde edilir. Sonuç olarak, $2S\subseteq 2\odot S\subseteq S$ bulunur.

Lemma 3.2.2: $S=\langle a_1,a_2,\dots,a_n\rangle$ sayısal yarıgrubu ve $a_1<a_2<\dots<a_n$ olsun. Eğer her $j\in\{1,2,\dots,n\}$ için $F(S)>a_j$ ise $F(2\odot S)=F(S)$ dir [27].

Ispat: $a_1,a_2,\dots,a_n$; S sayısal yarıgrubunun minimal üreteçleri olsun. Bu durumda, $a_1,a_2,\dots,a_n\notin 2\odot S$ ve her $j\in\{1,2,\dots,n\}$ için $F(S)>a_j$ olduğundan $F(S)\notin 2\odot S$ elde edilir. Ayrıca, her $i \in \mathbb{N}^*$ için $F(S)+i \in S$ ve her $j \in \{1,2,...,n\}$ için $F(S) > a_j$ olduğundan $p_j \in \mathbb{N}$ sayılarından en az kisi sıfırdan farklı veya en az bir $p_j \geq 2$ olmak üzere, $F(S)+i = p_1a_1 + p_2a_2 + ... + p_na_n$ şeklinde yazılableceğinden $F(S)+i \in 2\odot S$ elde edilir.

Böylece, $F(2\odot S) = F(S)$ sonucuna varılır.

NOT: Eğer en az bir $j \in \{1,2,...,n\}$ için $a_j > F(S)$ oluyorsa, $F(2\odot S) = F(S)$ sağlanmaz.

Örnek 3.2.3: $S = \langle 2,7 \rangle = \{0,2,4,6,7,8,\rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu için, $F(S) = 5$ dir. Fakat S sayısal yarıgrubunun 2-katlı sayısal yarıgrubu $2\odot S = \{0,4,6,8,\rightarrow\}$ için $F(2\odot S) = 7$ elde edilir. Yani, $F(2\odot S) \neq F(S)$ olur [27].

Lemma 3.2.4: $S = \langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$ sayısal yarıgrup ve $a_1 < a_2 < ... < a_n$ olmak üzere, eğer en az bir $j \in \{1,2,...,n\}$ için $a_j > F(S)$ ise $F(2\odot S) = a_n$ olur [27].

Ispat: $S = \langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$ ve $a_1 < a_2 < ... < a_n$ olup, en az bir $j \in \{1,2,...,n\}$ için $a_j > F(S)$ olduğundan $x \in S$ için eğer her $j \in \{1,2,...,n\}$ için $x > a_j$ ise x, minimal üreteç sisteminin en az iki elemanın lineer kombinasyonu şeklinde yazılır. Dolayısıyla her $j \in \{1,2,...,n\}$ için $x > a_j$ ise $x \in 2\odot S$ elde edilir. Ayrıca, $a_1, a_2, ..., a_n \notin 2\odot S$ olduğundan, Frobenius sayısının tanımından $F(2\odot S) = a_n$ elde edilir.

Lemma 3.2.5: $S = \langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$ sayısal yarıgrup ve her $j \in \{1,2,...,n\}$ için $F(S) > a_j$ olsun. O halde $2\odot S$ simetrik değildir [27].

Ispat: Verilen koşullarda $F(2\odot S) = F(S)$ olduğunu biliyoruz. Şimdi, S sayısal yarıgrubunun simetrik olup olmama durumuna göre inceleyelim:

i) S sayısal yarıgrubu simetrik olsun.

O halde $g(S) = \dfrac{F(S)+1}{2} = \dfrac{F(2\odot S)+1}{2}$ olup, diğer taraftan ;

g(2$\odot$S)= g(S) + $e(S) > \frac{F(2\odot S)+1}{2}$ olur ki böylece g(2$\odot$S) $\neq \frac{F(2\odot S)+1}{2}$ elde edilir. Yani, $2\odot S$ simetrik değildir.

ii) S sayısal yarıgrubu simetrik olmasın.

Kabul edelim ki $2\odot S$ simetrik olsun. O halde,

$$g(S)+e(S)=g(2\odot S)=\frac{F(2\odot S)+1}{2}=\frac{F(S)+1}{2}$$ ve böylece $g(S)<\frac{F(S)+1}{2}$ olur ki bu da kabulümüzle çelişir. Yani, $2\odot S$ simetrik değildir.

Lemma 3.2.6: $S=\langle a_1,a_2,...,a_n\rangle$ sayısal yarıgrup ve her $j\in\{1,2,...,n\}$ için $F(S)>a_j$ olsun. O halde $2\odot S$ pseudo-simetrik değildir [27].

Ispat: Verilen koşullardan $F(2\odot S)=F(S)$ olduğunu biliyoruz. Şimdi, S sayısal yarıgrubunun pseudo-simetrik olup olmama durumuna göre inceleyelim:

i) S sayısal yarıgrubu pseudo-simetrik olsun.

O halde $g(S)=\frac{F(S)+2}{2}=\frac{F(2\odot S)+2}{2}$ olup, diğer taraftan ;

g(2$\odot$S)= g(S) + $e(S) > \frac{F(2\odot S)+2}{2}$ olur ki böylece g(2$\odot$S) $\neq \frac{F(2\odot S)+2}{2}$ elde edilir. Yani, $2\odot S$ pseudo-simetrik değildir.

ii) S sayısal yarıgrubu pseudo-simetrik olmasın.

Kabul edelim ki $2\odot S$ simetrik olsun. O halde,

$$g(S)+e(S)=g(2\odot S)=\frac{F(2\odot S)+2}{2}=\frac{F(S)+2}{2}$$ ve böylece $g(S)<\frac{F(S)+2}{2}$ olur ki bu da kabulümüzle çelişir. Yani, $2\odot S$ pseudo-simetrik değildir.

Önerme 3.2.7: $S=\langle a_1,a_2,...,a_n\rangle$ indirgenemez sayısal yarıgrup ve her $j\in\{1,2,...,n\}$ için $F(S)>a_j$ olsun. O halde, $2\odot S$ indirgenemez değildir [27].

Ispat: S indirgenemez olduğundan Frobenius sayısı $F(S)$ olanlar arasında maksimaldir. Ayrıca, $F(2\odot S)=F(S)$ olduğundan $2\odot S$ 2-katlı sayısal yarıbunun Frobenius sayısı da $F(S)$ olduğundan, $2\odot S$ Frobenius sayısı $F(S)$ olanlar arasında maksimal değildir. Dolayısıyla, $2\odot S$ indirgenemez değildir.

Önerme 3.2.8: $S=\langle a_1,a_2,...,a_n\rangle$ sayısal yarıgrubu ve 2-katlı sayısal yarıgrubu $2\odot S$ olmak üzere, $2\odot S$ 2-katlı sayısal yarıgrubunun minimal üreteç sistemi M olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır:

i) $M\subseteq\left\langle a_i+a_j, a_i+a_j+a_k : i,j,k\in\{1,2,...,t\}\right\rangle$

ii) $e(S)=n$ olup, $e(2\odot S)\leq n^2(n+1)$ dir [27].

Lemma 3.2.9: $S=\langle a_1,a_2,...,a_n\rangle$ sayısal yarıgrubu ve 2-katlı sayısal yarıgrubu $2\odot S$ olsun. O halde,

$$\frac{2\odot S}{2}=\left\{x\in\mathbb{N}: 2x\in 2\odot S\right\}=S \text{ dir [27].}$$

Ispat: $x\in\dfrac{2\odot S}{2}$ alalım. $2x\in 2\odot S$ olup $2x=x+x$, şeklinde yazılacağından $x\in S^*$ ve dolayısıyla $x\in S$ olmalıdır. Buradan, $\dfrac{2\odot S}{2}\subseteq S$ elde edilir. Diğer tarafatan, $s\in S$ alalım. Eğer $s=0$ ise açıkça $s\in\mathbb{N}$ ve $2s\in 2\odot S$ olup $s\in\dfrac{2\odot S}{2}$ elde edilir. Eğer $s\neq 0$ ise $S\subseteq\mathbb{N}$ olup $s\in\mathbb{N}$ ve $s+s=2s\in 2\odot S$ olup yine $s\in\dfrac{2\odot S}{2}$ elde edilir.

3.3 h-katlı Sayısal Yarıgrupların İdealleri

Lemma 3.3.1: I,S sayısal yarıgrunun ideali iken $h\odot I$, $h\odot S$ h-katlı sayısal yarıgrubunun idealidir.

Ispat: I,S sayısal yarıgrunun ideali ise $I+S\subseteq I$ yazabiliriz. $I^*=I-\{0\}$ olsun.

$h\odot I=\{i_1+i_2+...+i_h : i_1,i_2,...,i_h\in I^*\}\cup\{0\}$ olup $x\in h\odot I$ alırsak, $i_1,i_2,...,i_h\in I^*$ olmak üzere, $x=i_1+i_2+...+i_h$ şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca bir $s\in h\odot S$ alırsak, bu elemanı da $s_1,s_2,...,s_h\in S^*$ olmak üzere, $s=s_1+s_2+...+s_h$ yazabiliriz. Böylece,

$$\begin{aligned} x+s &= (i_1+i_2+...+i_h)+(s_1+s_2+...+s_h) \\ &= (i_1+s_1)+(i_2+s_2)...+(i_h+s_h) \end{aligned}$$

olup $I+S\subseteq I$ olduğundan her $j\in\{1,2,...,h\}$ için, $i_j+s_j\in I$ olup $x+s\in 2\odot I$ elde edilir. Dolayısıyla $2\odot I+2\odot S\subseteq 2\odot I$ elde edilir. Yani, $h\odot I$, $h\odot S$ h-katlı sayısal yarıgrubunun idealidir.

Lemma 3.3.2: I, S sayısal yarıgrunun ideali olsun. O halde $I,\ h\odot S$ h-katlı sayısal yarıgrubunun idealidir.

Ispat: $h\odot S \subseteq S$ olduğundan, $I + h\odot S \subseteq I + S$ yazabiliriz. Ayrıca, I, S sayısal yarıgrunun ideali olduğundan, $I + S \subseteq I$ vardır. Böylece $I + h\odot S \subseteq I + S \subseteq I$ elde edilir ki bu da $I,\ h\odot S$ h-katlı sayısal yarıgrubunun ideali demektir.

BÖLÜM 4

SONUÇ VE ÖNERİLER

S sayısal yarıgrubu yardımıyla yeni bir sayısal yarıgrup elde edilir. Bu yeni sayısal yarıgrup ile S sayısal yarıgrubu arasındaki ilişkiler incelenmeye devam edilecektir. Bu yapının algoritması GAP programında yazılabilir. Böylece genellemeye daha kolay gidilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Beck, M., (2008). How to Change Coins, M&M'S or Chicken nuggets: The Linear Diophantine Problem of Frobenius, Resources For Teaching Discrete Mathematics, Mathematical Association of America, USA, 65-47.

[2] Rosales, J.C. ve Branco, M.B., (2011). "The Frobenius Problem for Numerical Semigroups with Multiplicity Four", Semigroup Forum, 83:468-478.

[3] Sylvester, J.J., (1884). "Mathematical Questions with Their Solutions". Educational Times, 41:171-178.

[4] İlhan, S., (2010). " An Approach to Numerical Semigroups", Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 39(3):411-415.

[5] Madero-Craven, M. ve Herzinger, K., (2005). "Apery Sets of Numerical Semigroups", Communcations in Algebra, 33:3831-3838.

[6] Rosales, J.C., Garcia-Sanchez, P.A., (2009). Numerical Semigroups, 20, Springer Developments in Mathematics, New York.

[7] İlhan, S., (2007). "Some Criteria for Subsemigroups of a Symmetric Numerical Semigroups", Int. J. Contemp. Math., 2(10):465-468.

[8] İlhan, S., (2004). "Keyfi Katlılıklı ve Gömme Boyutu 3 Olan Simetrik Sayısal Yarıgrupların Bir Sınıfı Üzerine", F.Ü. Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi, 16(1):127-130.

[9] Rosales, J.C., (2003). "Pirincipal Ideals of Numerical Semigroups", Bull. Belg. Math. Soc., 10:329-343.

[10] İlhan, S., Baykal, A. ve Kaya, A., (2010). "Some Applications of Computational Semigroups", International Journal of Information Science and Computer Mathematics,1:49-57.

[11] İlhan, S., (2007). " On The Set of Gaps in Numerical Semigroups", International Journal of Algebra, 1(3):145-149.

[12] Rosales, J.C. ve Vasco, P., (2008). "Numerical Semigroups with Many Gaps of The Same Parity", Semigroup Forum, 77:267-278.

[13] Rosales, J.C., (2009). “Atoms of The Set of Numerical Semigroups with Fixed Frobenius Number”, Linear Algebra and its Applications, 430:41-51.

[14] Madero-Craven, M.G., (2003). Apery Sets of Numerical Semigroups, Yüksek Lisans Tezi, The Faculty of Graduate School of The University of Maryland, USA.

[15] Rosales, J.C., ve Branco, M.B., (2011). “The Frobenius Problem for Numerical Semigroups”, Journal of Number Theory, 131:2310-2319.

[16] İlhan, S. ve Herzinger, K., (2009). “On Principal Ideals of Triply-Generated Telescopic Semigroups”, General Mathematics, 17(1):139-142.

[17] İlhan, S. ve Suer, M., (2009). “A Note on a Pseudo-symmetric Numerical Semigroups”, Acta University Apulensis 20: 139-142.

[18] Fröberg, R., Gottlieb, C. And Haggkvist, R., (1987). “On Numerical Semigroups”, Semigroup Forum, 35(1):63-83.

[19] İlhan, S., (2006). “On Apery Sets of Symmetric Numerical Semigroups”, International Mathematical Forum, 1(10):481-484.

[20] Robles-Perez, A.M., Rosales, J.C. ve Vasco, P., (2009). “The Doubles of a Numerical Semigroups”, Journal of Pure and Applied Algebra, 213:387-396.

[21] Leher, E., (2009). “ On The Frobenius Problem of Numerical Semigroups”, Communication in Algebra, 37(2):639-649.

[22] Nari, H., (2013). “Symmetries on almost symmetric numerical semigroups”, Semigroup Forum, 86(1):140-154.

[23] Rosales, J.C., Garcia-Sanchez, P.A. ve Garcia-Garcia J.I. and Jimenez Madrid, J.A., (2004). “Fundamental Gaps in Numerical Semigroups”, Journal of Pure and Applied Algebra, 189(1-3): 301-313.

[24] Rosales, J.C., Garcia-Sanchez, P.A. ve Garcia-Garcia J.I., (2004). “Fundamental Gaps in Numerical Semigroups with Respect to Their Multiplicity”, Acta Mathematica Sinica,20(4):629-646.

[25] Blanco, V. And Rosales, J.C., (2011), The Tree of Irreducible Numerical Semigroups with Fixed Frobenius Number, http://arxiv.org/abs/1101.4112, 15 Mayıs 2014.

[26] Barucci, V., (2009). On Propinquity of Numerical Semigroups and One Dimesional Local Cohen-Macaulay Rings, in Commutative Algebra and its Applications, Walter de Gruyter, Berlin, 49-60.

[27] Kilic M., Oral K.H., (2015, Eylül) h-Katlı Sayısal Yarıgruplar ve Özellikleri. 28. Ulusal Matematik Sempozyumu.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı :Mesut KILIÇ

Doğum Tarihi ve Yeri :18.02.1991-Mardin

Yabancı Dili :İngilizce

E-posta :mestklc@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Y. Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2015
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2014

Ulusal Bildiri

1. Kilic M., Oral K.H., (2015, Eylül) h-Katlı Sayısal Yarıgruplar ve Özellikleri. 28. Ulusal Matematik Sempozyumu.