T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

1-PARAMETRELİ DÜZLEMSEL HİPERBOLİK HAREKETLER ALTINDA YÜKSEK MERTEBEDEN İVMELER VE POLLER

SERDAL ŞAHİN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
PROF. DR. SALİM YÜCE

İSTANBUL, 2015

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

1-PARAMETRELİ DÜZLEMSEL HİPERBOLİK HAREKETLER ALTINDA YÜKSEK MERTEBEDEN İVMELER VE POLLER

Serdal ŞAHİN tarafından hazırlanan tez çalışması 11.06.2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Salim YÜCE

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Salim YÜCE

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU

Bahçeşehir Üniversitesi ________________________

Doç. Dr. Mustafa DÜLDÜL

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Doç. Dr. Filiz KANBAY

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Prof. Dr. Fatma ÖZDEMİR

İstanbul Teknik Üniversitesi ________________________

Bu çalışma, Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü’ nün 2013-01-03-DOP02 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Hiperbolik düzlemde, 1-parametreli hareketler için hız, ivme, pol, hareketli koordinat sistemi ve Euler-Savary formülü kavramları ile ilgili çalışmaların dışında literatürdeki “hiperbolik düzlemde yüksek mertebeden hız, ivme ve pol” kavramlarının eksikliğinin giderildiği bu çalışmanın hazırlanmasında benden hiçbir yardımı esirgemeyen Saygıdeğer Hocam Sayın Prof. Dr. Salim YÜCE’ ye, en içten duygularımla sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, tez izleme komitesinde bulunan Sayın Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU ve Sayın Doç. Dr. Mustafa DÜLDÜL hocalarıma bilgilerini ve tecrübelerini esirgemeyerek sağladıkları katkılardan dolayı teşekkür ederim.

TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı’na, “2214-Yurt Dışı Araştırma Burs Proğramı” ve “2224-Yurt Dışı Bilimsel Etkinlikleri Destekleme Proğramı” kapsamlarında, doktora öğrenimim sırasında vermiş oldukları desteklerden dolayı teşekkür ederim.

Bununla birlikte, tüm hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini hep yanımda hissettiğim değerli aileme ve çalışma arkadaşlarıma en içten duygularımla teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Haziran, 2015

Serdal ŞAHİN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

ÖZET

1-PARAMETRELİ DÜZLEMSEL HİPERBOLİK HAREKETLER ALTINDA YÜKSEK MERTEBEDEN İVMELER VE POLLER

Serdal ŞAHİN

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Salim YÜCE

H.R. Müller tarafından 1-parametreli düzlemsel kompleks hareketler altında ve 1-parametreli düzlemsel kompleks ters hareketler altında yüksek mertebeden ivmeler ve ivme pollerini elde edilmiş ve aralarındaki ilişki verilmiştir, [1]. Ayrıca, hareketin t parametresi yerine φ dönme açısı seçilmesi durumunda 1-parametreli düzlemsel kompleks hareketler altında yüksek mertebeden ivmeler ve ivme polleri ifade edilmiştir, [1].

Bu çalışmada, Yüce, S. ve Kuruoğlu, N. [2] tarafından verilen 1-parametreli düzlemsel hiperbolik hareketler kullanılarak, Müller, H.R. [1] tarafından verilen düzlemsel kompleks hareketlere benzer şekilde, hem 1-parametreli düzlemsel hiperbolik hareketler altında, hemde 1-parametreli düzlemsel hiperbolik ters hareketler altında yüksek mertebeden ivmeler ve ivme polleri araştırılmıştır.

Bununla birlikte, hareketin t parametresi yerine φ dönme açısı seçilmesi durumunda 1-parametreli düzlemsel hiperbolik hareketler altında yüksek mertebeden ivmeler ve ivme polleri elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kinematik, Hiperbolik Sayılar, 1-Parametreli Düzlemsel Hiperbolik Hareket

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ABSTRACT

HIGHER-ORDER ACCELERATIONS AND POLES UNDER THE 1-PARAMETER PLANAR HYPERBOLIC MOTIONS

Serdal ŞAHİN

Department of Mathematics

Ph.D Thesis

Advisor: Prof. Dr. Salim YÜCE

Higher-order accelerations and poles under the 1-parameter planar complex motions and its inverse are obtained and compared by H.R. Müler, [1]. The higher-order accelerations and poles are also presented under the 1-parameter planar complex motions by considering the rotation angle φ as a parameter of the motion instead of t, [1].

In this study, in analogy to the 1-parameter planar complex motions which was given by H.R. Müller, [1] we analyzed higher-order accelerations and poles under 1-parameter planar hyperbolic motions and their inverse motions by using the 1-parameter planar hyperbolic motions which was given by Yüce, S. ve Kuruoğlu, N. [2].

Besides this, we obtained the higher-order accelerations and poles under the 1-parameter planar hyperbolic motions by considering the rotation angle φ as a parameter of the motion instead of t.

Keywords: Kinematics, Hyperbolic Numbers, 1-Parameter Planar Hyperbolic Motion

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Kinematik, kuvvet ve kütle kavramlarının hiçbir rol almadığı mekaniğin bir alt dalıdır. O halde kinematik, sadece bir nokta yada bir nokta sisteminin (cisim) zamana bağlı yer değişimini inceler.

Bu çalışmada, Öklid düzlemindeki kinematiği kompleks sayılar yardımıyla ele alınmasına benzer olarak, Lorentz düzlemindeki kinematik hiperbolik sayılar yardımıyla ele alınacaktır.

1.1 Literatür Özeti

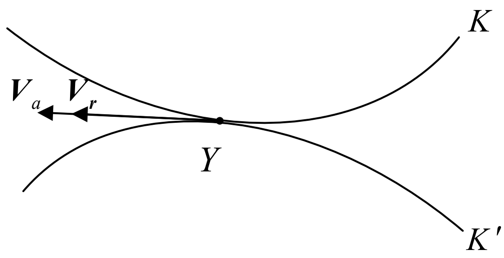
Öklid ve kompleks düzlemlerinde 1-parametreli hareketler altında hızlar, ivmeler ve poller ile ilgili bağıntı ve sonuçlar ve kompleks düzlemde 1-parametreli hareketler altında, yüksek mertebeden ivmeler

$$\overset{(n)}{\mathbf{x}'} = \overset{(n)}{\mathbf{u}'} + \phi_n' \left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}' \right),$$

yüksek mertebeden pol noktaları ise

$$\mathbf{p}_{\mathbf{n}}' = \mathbf{u}' - \frac{\overset{(n)}{\mathbf{u}'}}{\phi_n'}$$

olarak H. R. Müller tarafından elde edilmiştir [1], [3]. Benzer şekilde, kompleks düzlemde 1-parametreli ters hareketler altında yüksek mertebeden ivmeler ve ivme polleri elde edilmiştir [1], [3]. Bununla birlikte, 1-parametreli düzlemsel hareket esnasında E-hareketli Öklid düzlemde sabit bir K eğrisinin E'-sabit Öklid düzlemindeki K' zarf eğrisi (Şekil 1.1) elde edilmiştir.



Şekil 1.1 Bir eğrinin zarfı

Bunun yanısıra, $\lambda = \dfrac{|\mathbf{V_r}|}{|\mathbf{V_a}|}$ yuvarlanma-kayma sayısı ile birbiri üzerinde yuvarlanarak kayan bütün K , K' zarf eğri çiftlerinin de H. R. Müller tarafından elde edilmiştir, [1], [3]. Burada $\mathbf{V_r}$ ile $\mathbf{V_a}$ hız vektörlerinin aynı doğrultuda olmaları gerektiği gösterilmiştir, [1], [3]. Ayrıca hareketin t parametresi yerine φ dönme açısı seçilmesi durumunda 1-parametreli düzlemsel kompleks hareketler altında yüksek mertebeden ivmeler

$$\overset{(n)}{\mathbf{x}'} = \overset{(n)}{\mathbf{u}'} + i^n \left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}' \right)$$

ve ivme polleri

$$\mathbf{p}'_\mathbf{n} = \mathbf{u}' + i^{2-n} \overset{(n)}{\mathbf{u}'}$$

olarak elde edilmiştir [1], [3].

Lorentz düzleminde 1-parametreli düzlemsel hareket ve bu hareket altında hızlar, ivmeler ve poller ile ilgili bağıntı ve sonuçlar A. A. Ergin, [4] tarafından verilmiştir. 1-parametreli düzlemsel hareketin kompleks sayılar ifadesine benzer şekilde, Lorentz düzleminde 1-parametreli düzlemsel hareketin hiperbolik sayılarla ifadesi, S. Yüce ve N. Kuruoğlu, [2] tarafından verilmiştir.

1.2 Tezin Amacı

Bu tez çalışmasının amacı; H. R. Müller tarafından 1-parametreli düzlemsel kompleks hareketler için elde edilen sonuçlara benze şekilde, [2] da verilen Hiperbolik düzlemde 1-parametreli düzlemsel hareket altında yüksek mertebeden ivmeler ve ivme polleri ile ters hareketinin altında yüksek mertebeden ivme ve pollerini elde edip ikisinin arasındaki ilişkiyi incelemektir. Ayrıca, 1-parametreli düzlemsel hiperbolik hareketler için de zarf eğri çiftleri ve bunların yuvarlanma-kayma sayıları ile ilgili temel özellikleri incelecektir.

1.3 Orijinal Katkı

[2] da verilen Hiperbolik düzlemde 1-parametreli hareket altında yüksek mertebeden ivmeler ve poller ile ters hareket altında yüksek mertebeden ivmeler ve poller elde edilecektir. İkisinin arasındaki bu ilişki kinematikte birçok problemin çözümüne olanak sağlaması öngörülmektedir.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezin orijinal kısmında kullanacağımız bazı temel bilgiler verilecektir.

2.1 Afin Uzay ve İzometri

Tanım 2.1

$A \neq \emptyset$ bir cümle ve V; K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir

$$
\begin{aligned}
f\ :\ & A \times A \to V \\
& (P,Q) \to f\ (P,Q) = \overrightarrow{PQ}
\end{aligned}
$$

fonksiyonu varsa A ya V ile birleşen bir afin **Afin Uzay** denir:

i. $\forall P,Q,R \in A$ için $f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$

ii. $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P,Q) = \alpha$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

Tanım 2.2

V n-boyutlu reel vektör uzayı ve A da V ile birleşen bir afin uzay olsun. Eğer V bir iç-çarpım uzayı ise A ya **Öklid Uzay** denir ve E^n ile gösterilir.

Tanım 2.3

K cismi üzerinde iki vektör uzayı V_1 ve V_2 olsun. V_1 ve V_2 ile birleşen afin uzaylar A_1 ve A_2 olmak üzere $f : A_1 \to A_2$ dönüşümü $P,Q \in A_1$ için

$$\psi_p : V_1 \to V_2$$
$$\mathbf{PQ} \to \psi_p(\mathbf{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$$

şeklinde tanımlansın. Burada ψ_p dönüşümüne f ile birleşen dönüşüm adı verilir. Eğer ψ_p dönüşümü lineer ise f ye bir **Afin Dönüşüm** denir.

Tanım 2.4

E_1^n ve E_2^n, sırasıyla V_1 ve V_2 n-boyutlu iç-çarpım uzayları ile birleşen birer Öklid uzayı olsun. Bir

$$f : E_1^n \to E_2^n$$

afin dönüşümü $\forall \alpha, \beta \in V_1$ için

$$\langle \psi(\alpha), \psi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$$

olacak şekilde bir

$$\psi : V_1 \to V_2$$

lineer dönüşümü ile birleşiyorsa f ye bir **izometri** denir.

Tanım 2.5

f, n-boyutlu E^n Öklid uzayı üzerinde bir izometri olsun. E^n deki bir dik koordinat sistemine göre f nin matrisel ifadesi; $A \in O(n)$,(yani $AA^T = A^T A = I_n$, det $A = \pm 1$)

ve $C \in \mathbb{R}_1^n$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} x' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

formundadır. f ye E^n de bir **hareket** adı verilir. Eğer, det $A = 1$ ise f hareketine **direkt hareket,** det $A = -1$ ise **karşıt hareket** denir.

Tanım 2.6

E^n, n-boyutlu Öklid uzayının bir f izometrisi için $f(O)=O$ olacak şekilde bir $O \in E^n$ noktası varsa f ye O noktası etrafında E^n de bir **dönme** adı verilir. Eğer hareket direkt hareket ise f ye **direkt dönme**, karşıt hareket ise **karşıt dönme** denir.

E^n de başlangıç noktası O olan bir dik koordinat sistemi $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ olsun. $f : E^n \to E^n$ izometrisi O noktası etrafındaki bir dönme ise f nin bu dik koordinat sistemine göre ifadesi

$$\begin{bmatrix} x' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

veya,

$$x' = Ax$$

şeklindedir. Burada $A \in O(n)$ ve $x, x' \in \mathbb{R}^n{}_1$ dir.

Tanım 2.7

E^n, n-boyutlu Öklid uzayının bir f izometrisi ve $\forall X \in E^n$ için $f(X) = X + t$ olacak şekilde bir tek $t = (t_1, t_2, ..., t_n) \in E^n$ noktası varsa f ye E^n de t ile belirtilen bir **öteleme** denir.

E^n de başlangıç noktası O olan bir dik koordinat sistemi $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ olsun. $f : E^n \to E^n$ izometrisi $t = (t_1, t_2, ..., t_n)$ noktası ile belli olan bir öteleme olmak üzere, f nin dik koordinat sistemine göre ifadesi

$$\begin{bmatrix} x' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

veya

$$x' = x + t$$

dir.

BÖLÜM 3

1- PARAMETRELİ DÜZLEMSEL HAREKET

E ve $E' \left(E = E' = E^2\right)$ Öklid düzlemlerinde, sırasıyla, $\{O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$ ve $\{O';\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2\}$ koordinat sistemlerini tespit edelim. Eğer $t \in I \subset \mathbb{R}$ için,

$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1(t)$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2(t)$

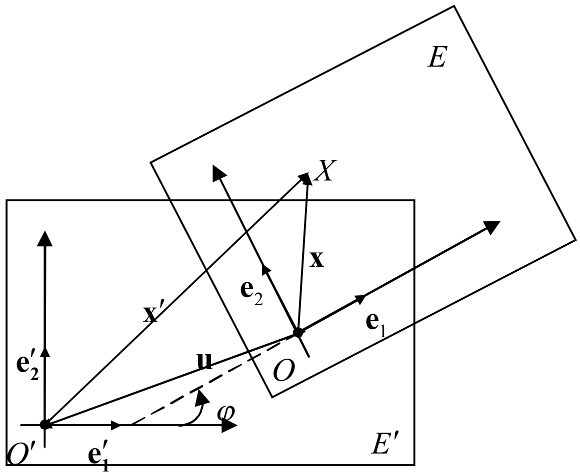
ise bu takdirde $\{O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$ koordinat sisteminin, $\{O';\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2\}$ koordinat sistemine göre hareket ettiği kabul edilir. Bundan dolayı $\{O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$ koordinat sistemine **hareketli koordinat sitemi**, $\{O';\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2\}$ koordinat sistemine ise **sabit koordinat sistemi** denir. Dolayısıyla E düzlemi, E' düzlemi üzerinde hareket ediyor kabul edilir. $\mathbf{e}_1$ ile $\mathbf{e}_1'$ arasındaki açı φ olmak üzere φ ye **dönme açısı** denir. $\mathbf{OO}' = \mathbf{u}$ hareketin **öteleme vektörü** olmak üzere:

$$\mathbf{OO}' = \mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 \qquad (3.1)$$

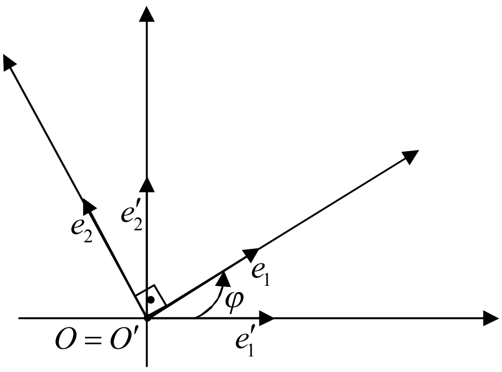
yazılabilir. Eğer,

$$u_1 = u_1(t)$$
$$u_2 = u_2(t)$$
$$\varphi = \varphi(t)$$

şeklinde reel bir t parametresinin sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonları iseler, E nin E' ne göre hareketine **1-parametreli düzlemsel hareket** denir ve $B = E / E'$ ile gösterilir. Buradaki "t" parametresi genel olarak **'zaman'** parametresi olarak alınır.



Şekil 3. 1 Bir parametreli düzlemsel hareket



Şekil 3. 2 Başlangıç noktaları çakışık olan koordinat sistemleri

$O = O^{'}$ olduğu zaman, $\mathbf{e}_1$ ve $\mathbf{e}_2$ vektörleri, $\mathbf{e}_1^{'}$ ve $\mathbf{e}_2^{'}$ doğrultularında bileşenlerine ayrılabilir ve buradan

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \ \ \cos\varphi\, \mathbf{e}_1^{'} + \sin\varphi\, \mathbf{e}_2^{'} \\ \mathbf{e}_2 &= -\sin\varphi\, \mathbf{e}_1^{'} + \cos\varphi\, \mathbf{e}_2^{'} \end{aligned} \tag{3.2}$$

eşitlikleri elde edilir, (Şekil 3. 2).

Düzlemin bir X noktası hem hareketli sistemdeki (x_1, x_2) koordinatları ve hem de sabit sistemdeki $(x_1^{'}, x_2^{'})$ koordinatları yardımıyla göz önüne alınabilir. Buna göre her iki sistemde, X noktasına ait konum vektörleri için

$$\mathbf{x} = \mathbf{OX} = x_1\mathbf{e_1} + x_2\mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{O'X} = x_1'\mathbf{e}_1' + x_2'\mathbf{e}_2'$$

yazılabilir. Böylece

$$\mathbf{O^{'}X} = \mathbf{O^{'}O} + \mathbf{OX} = -\mathbf{OO^{'}} + \mathbf{OX}$$

veya

$$\mathbf{x}^{'} = \mathbf{x} - \mathbf{u} = (x_1 - u_1)\mathbf{e_1} + (x_2 - u_2)\mathbf{e_2} \tag{3.3}$$

vektörel denklemi elde edilir. Bu denkleme 1-parametreli düzlemsel hareketin **vektörel denklemi** denir. Buradan,

$$x_1^{'}\mathbf{e}_1^{'} + x_2^{'}\mathbf{e}_2^{'} = (x_1 - u_1)\mathbf{e_1} + (x_2 - u_2)\mathbf{e_2}$$

eşitliğinin $\mathbf{e}_1^{'}$ ve $\mathbf{e}_2^{'}$ ile iç-çarpımı sonucunda,

$$\begin{cases} x_1^{'} = (x_1 - u_1)\cos\varphi - (x_2 - u_2)\sin\varphi \\ x_2^{'} = (x_1 - u_1)\sin\varphi + (x_2 - u_2)\cos\varphi \end{cases}$$

veya

$$\begin{cases} x_1' = (x_1\cos\varphi - x_2\sin\varphi) + (-u_1\cos\varphi + u_2\sin\varphi) \\ x_2' = (x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi) + (-u_1\sin\varphi - u_2\cos\varphi) \end{cases} \tag{3.4}$$

bulunur. Bu ifadeye $B = E / E'$ hareketinin kartezyen denklemi denir. Bu son eşitlik

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

veya

$$X' = AX + C$$

şeklinde matris formunda da gösterilebilir. Burada $A \in O(2)$ ye dönme matrisi, C ye öteleme matrisi denir.

Türev Denklemleri

Hareket esnasında bir $X \in E$ noktasının her iki E ve $E^{'}$-düzlemlerine göre hızlarını araştırmak için önce hareketimizin türev denklemlerini elde edeceğiz. Bunun için (3.2) denklemlerinin, $\mathbf{e}_1^{'}$, $\mathbf{e}_2^{'}$ vektörlerini sabit kabul ederek, t zamanına göre türev alınırsa,

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{dt} = \dot{\mathbf{e}}_1 = -\dot{\varphi}\sin\varphi\mathbf{e}_1^{'} + \dot{\varphi}\cos\varphi\mathbf{e}_2^{'} = \dot{\varphi}\left(-\sin\varphi\mathbf{e}_1^{'} + \cos\varphi\mathbf{e}_2^{'}\right)$$
$$\frac{d\mathbf{e}_2}{dt} = \dot{\mathbf{e}}_2 = -\dot{\varphi}\cos\varphi\mathbf{e}_1^{'} - \dot{\varphi}\sin\varphi\mathbf{e}_2^{'} = -\dot{\varphi}\left(\cos\varphi\mathbf{e}_1^{'} + \sin\varphi\mathbf{e}_2^{'}\right)$$

bulunur. Buradan kısaca

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \dot{\varphi}\mathbf{e}_2 \ , \ \dot{\mathbf{e}}_2 = -\dot{\varphi}\mathbf{e}_1 \tag{3.5}$$

yazılabilir.

Benzer şekilde (3.1) denkleminin t ye göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \dot{\mathbf{u}} = \dot{u}_1\mathbf{e}_1 + u_1\dot{\mathbf{e}}_2 + \dot{u}_2\mathbf{e}_2 + u_2\dot{\mathbf{e}}_2$$

elde edilir. $\dot{\mathbf{e}}_1$ ve $\dot{\mathbf{e}}_2$ nın (3.5) deki değerleri burada yerine yazılırsa

$$\dot{\mathbf{u}} = \left(\dot{u}_1 - u_2\dot{\varphi}\right)\mathbf{e}_1 + \left(\dot{u}_2 + u_1\dot{\varphi}\right)\mathbf{e}_2 \tag{3.6}$$

bulunur. (3.5) ve (3.6) denklemlerine $B = E / E^{'}$ hareketinin **türev denklemleri** denir.

3.1 Hızlar ve Hızların Terkibi

E-düzlemi E'-düzlemine göre 1-parametreli hareket yaparken, bir X noktası da hareketli E-düzlemindeki yerini t zamanı ile değiştirsin. Bu durumda, bu iki hareket esnasında noktanın hızlarının nasıl terkip edildiğini araştıracağız.

Tanım 3.1

X noktasının E-düzleminde hareket ederken sahip olduğu hız vektörüne, yani X noktası E-deki yörüngesini çizerken sahip olduğu vektörel hıza X noktasının **relatif (izafi) hızı** denir ve $\mathbf{V_r}$ ile gösterilir. Bu hız

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e_1} + x_2\mathbf{e_2}$$

denkleminden $\mathbf{e_1}$ ve $\mathbf{e_2}$ yi sabit tutup türev alarak

$$\mathbf{V_r} = \dot{x}_1\mathbf{e_1} + \dot{x}_2\mathbf{e_2} \tag{3.7}$$

şeklinde bulunur. Eğer X noktası E-de sabit ise $\mathbf{V_r}$ relatif hızı sıfırdır.

Tanım 3.2

X noktasının E'-düzlemine göre sahip olduğu hız vektörüne X noktasının **mutlak hızı** denir ve $\mathbf{V_a}$ ile gösterilir. (3.3) denkleminin t ye göre türevini alırsak $\mathbf{V_a}$ için aşağıdaki ifade bulunur:

$$\mathbf{V_a} = (\dot{x}_1 - \dot{u}_1)\mathbf{e_1} + (x_1 - u_1)\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{1} + (\dot{x}_2 - \dot{u}_2)\mathbf{e_2} + (x_2 - u_2)\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{2}.$$

Burada $\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{1}$ ve $\dot{\mathbf{e}}_\mathbf{2}$ nın (3.5) deki değerleri dikkate alınırsa

$$\mathbf{V_a} = \{-\dot{u}_1 + (u_2 - x_2)\dot{\varphi}\}\mathbf{e_1} + \{-\dot{u}_2 + (-u_1 + x_1)\dot{\varphi}\}\mathbf{e_2} + \dot{x}_1\mathbf{e_1} + \dot{x}_2\mathbf{e_2}$$

veya

$$\mathbf{V_a} = \{-\dot{u}_1 + (u_2 - x_2)\dot{\varphi}\}\mathbf{e_1} + \{-\dot{u}_2 + (-u_1 + x_1)\dot{\varphi}\}\mathbf{e_2} + \mathbf{V_r}$$

elde edilir. Burada

$$\mathbf{V_f} = \{-\dot{u}_1 + (u_2 - x_2)\dot{\varphi}\}\mathbf{e_1} + \{-\dot{u}_2 + (-u_1 + x_1)\dot{\varphi}\}\mathbf{e_2} \tag{3.8}$$

vektörüne X noktasının **sürüklenme hız vektörü** denir. O halde hızların terkibine ait şu teorem verilebilir:

Teorem 3.1

$B = E/E'$; 1-parametreli düzlemsel hareketi esnasında eğer $X \in E$ noktası her iki sisteme göre hareketli ise $X \in E$ noktasının hız vektörleri arasında

$$\mathbf{V_a} = \mathbf{V_f} + \mathbf{V_r} \tag{3.9}$$

bağıntısı vardır [1].

Tanım 3.3

Dönme açısının $\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$ türevine B hareketinin **açısal hızı** denir.

Bundan sonra sırf öteleme hareketinden kaçınmak için $\dot{\varphi} \neq 0$ kabul edeceğiz.

3.2 Dönme Polü ve Pol Eğrileri

Şimdi B *hareketinin her* t *anında sürüklenme hızı sıfır olan noktaları araştıralım:*

Böyle noktalar, t anında, yalnız hareketli E-düzleminde değil aynı zamanda sabit $E^{'}$-düzleminde de sabit bulunmak zorundadır. O halde

$$\mathbf{V_f} = 0$$

olacağından (3.8) denkleminden

$$-\dot{u}_1 + \left(u_2 - x_2\right)\dot{\varphi} = 0 \quad , \quad -\dot{u}_2 + \left(-u_1 + x_1\right)\dot{\varphi} = 0$$

elde edilir. $\dot{\varphi} \neq 0$ olduğuna göre bu iki denklem her zaman tek türlü çözülebilir. Bu çözümler p_1 ve p_2 olmak üzere,

$$\begin{aligned} p_1 &= x_1 = u_1 + \frac{\dot{u}_2}{\dot{\varphi}} = u_1 + \frac{du_2}{d\varphi} \\ p_2 &= x_2 = u_2 - \frac{\dot{u}_1}{\dot{\varphi}} = u_2 - \frac{du_1}{d\varphi} \end{aligned} \tag{3.10}$$

bulunur.

Tanım 3.4

$$\mathbf{OP} = \mathbf{p} = p_1\mathbf{e_1} + p_2\mathbf{e_2}$$

yer vektörüne karşılık gelen $P=(p_1,p_2)$ noktasına $B=E/E^{'}$ hareketinin t anındaki **pol(kutup) noktası**, **dönme polü** veya **ani dönme merkezi** denir. Bundan dolayı şu teorem verilebilir:

Teorem 3.2

Açısal hızı sıfır olmayan bir 1-parametreli düzlemsel hareket esnasında, her t anında sürüklenme hızı sıfır olan yani her iki düzlemde de sabit kalan bir tek nokta (pol noktası) vardır.□

P pol noktası yardımı ile herhangi bir X noktasının $\mathbf{V_f}$ sürüklenme hızı aşağıdaki şekilde de yazılabilir:

Bunun için (3.10) denkleminden

$$\dot{u}_1=(u_2-p_2)\dot{\varphi} \quad , \quad \dot{u}_2=-(u_1-p_1)\dot{\varphi}$$

ifadeleri hesaplanır ve (3.8) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\mathbf{V_f}=\{-(x_2-p_2)\mathbf{e_1}+(x_1-p_1)\mathbf{e_2}\}\dot{\varphi} \tag{3.11}$$

elde edilir.

X noktasının sürüklenme hızının bu son ifadesi kullanılarak aşağıdaki önemli sonuç ve teoremler verilebilir:

Sonuç 3.1

P polünden X noktasına giden pol ışınının

$$\mathbf{PX}=(x_1-p_1)\mathbf{e_1}+(x_2-p_2)\mathbf{e_2}$$

vektörü $\mathbf{V_f}$ ye diktir; çünkü

$$\langle \mathbf{PX},\mathbf{V_f}\rangle=-(x_2-p_2)(x_1-p_1)+(x_1-p_1)(x_2-p_2)=0$$

dır. Yani pol ışını, hareketin her t anında sürüklenme hızına diktir.

Sonuç 3.2

$\mathbf{V_f}$ vektörünün uzunluğu için şu bağıntı vardır:

$$\|\mathbf{V_f}\| = \sqrt{(x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2}\ \dot{\varphi}$$
$$= \|\mathbf{PX}\|\dot{\varphi}$$

Teorem 3.3

$B = E / E^{'}$; 1-parametreli düzlemsel hareket esnasında hareketli E-düzleminin her X noktası, t anında, P (pol noktası) merkezli ve $\dot{\varphi}$ açısal hızlı bir ani dönme hareketi yapar.

Teorem 3.4

$B = E / E^{'}$; 1-parametreli düzlemsel hareket t anında, hareketli E-düzleminin P ani dönme polü etrafında $\dot{\varphi}$ açısal hızı ile dönmesinden oluşur.

Teorem 3.5

$B = E / E'$ 1-parametreli düzlemsel hareket esnasında E-düzleminin X noktaları, E'-düzleminde yörünge normalleri, P dönme polünden geçen, yörüngeler çizerler.

Tanım 3.5

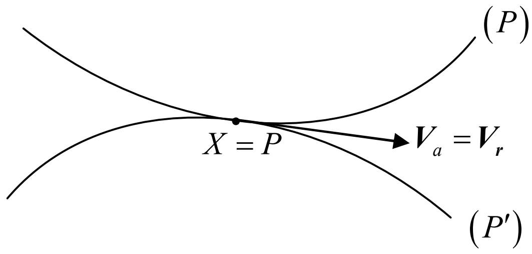
Her t anında bir P dönme polü olacağından B hareketi esnasında P pol noktası her iki E ve $E^{'}$-düzlemlerinde çeşitli konumlarda bulunur. P noktasının hareketli E-düzlemindeki yeri genel olarak bir eğridir. Bu eğriye **hareketli pol eğrisi** denir ve (P) ile gösterilir. P noktasının $E^{'}$-düzlemindeki geometrik yerine ise **sabit pol eğrisi** denir ve $(P^{'})$ ile gösterilir.□

Şimdi pol hızlarını, yani (P) *ve* $(P^{'})$ *pol eğrilerini çizen* P *noktasının hızlarının araştıralım:*

Dönme polünün $\mathbf{V_f} = 0$ olduğu noktalar olduğunu daha önce söylemiştik. Buna göre (3.1) teoreminden, $X = P$ noktası için

$$\mathbf{V_a} = \mathbf{V_r}$$

bulunur.



Şekil 3. 3 Hareketli ve sabit pol eğrileri

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.6

E' -sabit ve E -hareketli düzlemlerdeki pol eğrilerini çizen P dönme polünün her t anındaki hızları birbirinin aynısıdır. □

Bu teoremden dolayı, her t anında (P) ve (P') pol eğrileri P ani dönme polünde birbirine teğettir ve

$$ds' = |\mathbf{V_a}|dt = |\mathbf{V_r}|dt = ds$$

olduğundan P dönme polü dt zaman aralığında her iki pol eğrisi üzerinde eşit uzaklıklar kat eder.

Böylece aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 3.7

1- parametreli düzlemsel $B = E / E'$ hareketinde E -düzleminin (P) hareketli pol eğrisi E' -sabit düzleminin (P') sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır [1], [2].

3.3 Ters Hareket

$B = E / E'$ hareketinin ters hareketinde E-düzlemi sabit, E'-düzlemi ise hareketlidir ve herşey E-düzlemi üzerinde oluşmaktadır. Biz bu hareketi $B' = E' / E$ ile göstereceğiz.

Burada her iki pol eğrisi rollerini değiştiriler yani $\left(P'\right)$ pol eğrisi, $\left(P\right)$ sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır. $B' = E' / E$ hareketi, $B = E / E'$ hareketinin tersi yönde döndüğünden açısal hız işaretini değiştirir. Böylece $B = E / E'$ hareketinde açısal hız $\dot{\varphi}$ iken, $B' = E' / E$ ters hareketinde açısal hız $-\dot{\varphi}$ dır.

3.4 İvmeler ve İvmelerin Terkibi

$B = E / E'$; 1- parametreli düzlemsel hareket esnasında X noktasının E-düzlemine göre olan ivme vektörüne **relatif ivme vektörü** denir. Bu ivme vektörü $\mathbf{V}_r$ relatif hızının t ye göre türevi alınarak bulunur ve $\mathbf{b_r}$ ile gösterilir:

$$\mathbf{b_r} = \dot{\mathbf{V}}_{\mathbf{r}} = \ddot{x}_1\mathbf{e_1} + \ddot{x}_2\mathbf{e_2}\,. \tag{3.12}$$

Burada $\mathbf{e_1}$ ve $\mathbf{e_2}$ sabit olarak kabul edilmiştir.

X noktasının E'-düzlemine göre olan ivme vektörüne **mutlak ivme vektörü** denir ve $\mathbf{b_a}$ ile gösterilir. Ayrıca $\mathbf{V_a}$ nın t ye göre türevi alınarak,

$$\begin{aligned}\mathbf{b_a} = \dot{\mathbf{V}}_{\mathbf{a}} &= \left\{-\left(\dot{x}_2 - \dot{p}_2\right)\mathbf{e_1} - \left(x_2 - p_2\right)\dot{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}} + \left(\dot{x}_1 - \dot{p}_1\right)\mathbf{e_2} + \left(x_1 - p_1\right)\dot{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}}\right\}\dot{\varphi} \\ &\quad + \left\{-\left(x_2 - p_2\right)\mathbf{e_1} + \left(x_1 - p_1\right)\mathbf{e_2}\right\}\ddot{\varphi} + \ddot{x}_1\mathbf{e_1} + \dot{x}_1\dot{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}} + \ddot{x}_2\mathbf{e_2} + \dot{x}_2\dot{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}}\end{aligned}$$

bulunur. Burada (3.5) denklemindeki $\dot{\mathbf{e}}_{\mathbf{1}}$ ve $\dot{\mathbf{e}}_{\mathbf{2}}$ değerleri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\mathbf{b_a} &= \left\{\dot{p}_2\dot{\varphi} - \left(x_1 - p_1\right)\dot{\varphi}^2 - \left(x_2 - p_2\right)\ddot{\varphi}\right\}\mathbf{e_1} + \left\{-\dot{p}_1\dot{\varphi} - \left(x_2 - p_2\right)\dot{\varphi}^2 + \left(x_1 - p_1\right)\ddot{\varphi}\right\}\mathbf{e_2} \\ &\quad + 2\dot{\varphi}\left\{-\dot{x}_2\mathbf{e_1} + \dot{x}_1\mathbf{e_2}\right\} + \mathbf{b_r}\end{aligned} \tag{3.13}$$

elde edilir. (3.13) denklemindeki

$$\mathbf{b_f} = \left\{\dot{p}_2\dot{\varphi} - \left(x_1 - p_1\right)\dot{\varphi}^2 - \left(x_2 - p_2\right)\ddot{\varphi}\right\}\mathbf{e_1} + \left\{-\dot{p}_1\dot{\varphi} - \left(x_2 - p_2\right)\dot{\varphi}^2 + \left(x_1 - p_1\right)\ddot{\varphi}\right\}\mathbf{e_2} \tag{3.14}$$

vektörüne X noktasının **sürüklenme ivme vektörü** ve

$$\mathbf{b_c} = 2\dot{\varphi}\left\{-\dot{x}_2\mathbf{e_1} + \dot{x}_1\mathbf{e_2}\right\} \tag{3.15}$$

vektörüne de **Coriolis-ivme vektörü** denir.

Buna göre ivmelerin terkibi şu teoremle ifade edilebilir:

Teorem 3.8

$B = E / E'$ 1- parametreli düzlemsel hareketi esnasında bir noktanın mutlak ivme vektörü, sürüklenme ivme vektörü ile Coriolis-ivme vektörü ve relatif ivme vektörünün toplamına eşittir. Buna göre

$$\mathbf{b_a} = \mathbf{b_f} + \mathbf{b_c} + \mathbf{b_r} \tag{3.16}$$

dir.

Sonuç 3.3

$\mathbf{b_c}$ Coriolis-ivmesi ve $\mathbf{V_r}$ relatif hızının iç-çarpımı

$$\left\langle \mathbf{b_c}, \mathbf{V_r} \right\rangle = 2\dot{\varphi}\left(-\dot{x}_1\dot{x}_2 + \dot{x}_1\dot{x}_2\right) = 0$$

olduğundan $\mathbf{b_c}$ Coriolis-ivmesi, $\mathbf{V_r}$ relatif hızına diktir. □

E-de sabit olmayan bir X noktasının Coriolis-ivmesinin sıfır olması ancak ve ancak $\dot{\varphi} = 0$ olmasıyla sağlanır. $\dot{\varphi} = 0$ ise B hareketi bir kaymadan (ötelemeden) ibarettir. Böylece

$\mathbf{b_c} = 0$ ise ivmeler arasında,

$$\mathbf{b_a} = \mathbf{b_f} + \mathbf{b_r}$$

bağıntısı bulunur. Yani, ancak bir kayma hareketinde ivmeler hızlar gibi terkip edilirler.

Şimdi bir B hareketinde, herhangi bir t anında sürüklenme ivmesi sıfır olan noktaları araştıralım:

$\mathbf{b_f} = 0$ için

$$\begin{aligned}(x_1 - p_1)\dot{\varphi}^2 + (x_2 - p_2)\ddot{\varphi} &= \dot{p}_2\dot{\varphi} \\ (x_1 - p_1)\ddot{\varphi} - (x_2 - p_2)\dot{\varphi}^2 &= \dot{p}_1\dot{\varphi}\end{aligned}$$

elde edilir. $\dot{\varphi} \neq 0$ oldoğundan $\left(x_1 - p_1\right)$ ve $\left(x_2 - p_2\right)$ ye göre homojen olmayan denklem sisteminin Δ katsayılar determinantı

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dot{\varphi}^2 & \ddot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} & -\dot{\varphi}^2 \end{vmatrix} = -\left(\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2\right) \neq 0$$

dır. Buna göre yukarıdaki sistemin Cramer yöntemi ile bir tek çözümü bulunur.

Tanım 3.6

$B = E/E'$ hareketi esnasında, $\dot{\varphi} \neq 0$ olmak üzere herhangi bir t anında sürüklenme ivmesi sıfır olan bir tek nokta vardır. Bu noktaya **ivme polü** denir ve

İvme polünün koordinatları

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + \frac{\dot{\varphi}\left(\dot{p}_2\dot{\varphi}^2 + \dot{p}_1\ddot{\varphi}\right)}{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2} \\ x_2 &= p_2 - \frac{\dot{\varphi}\left(\dot{p}_1\dot{\varphi}^2 + \dot{p}_2\ddot{\varphi}\right)}{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2} \end{aligned} \tag{3.17}$$

şeklinde bulunur [1], [2] ve [5].

BÖLÜM 4

1-PARAMETRELİ DÜZLEMSEL HAREKETİN KOMPLEKS SAYILARLA İFADESİ

E ve $E^{'}$ $\left(E = E^{'} = E^{2}\right)$, sırasıyla, hareketli ve sabit öklid düzlemler olsun. $\{O; \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ ve $\{O^{'}; \mathbf{e_1^{'}}, \mathbf{e_2^{'}}\}$ de E ve $E^{'}$-düzlemlerinde tespit edilen koordinat sistemleri olsun. Bir X noktasının her iki sistemdeki koordinatlarını, sırasıyla,

$x = x_1 + ix_2 \quad , \quad x^{'} = x_1^{'} + ix_2^{'}$

kompleks sayıları ile ve $\mathbf{O^{'}O}$ vektörünü de sabit sistemde

$\mathbf{u}^{'} = u_1^{'} + iu_2^{'}$

kompleks sayısı ile gösterelim. Buna göre,

$-\mathbf{u} = -u_1 - iu_2$

dir. O halde $+\mathbf{u}$, $\mathbf{O^{'}O}$ vektörüne karşılık olan vektördür. (3.4) denkleminden x_1' ve x_2' ifadeleri, $\mathbf{x}^{'} = x_1^{'} + ix_2^{'}$ de yerine yazılırsa

$\mathbf{x}^{'} = \left(x_1 + ix_2\right)\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) - \left(u_1 + iu_2\right)\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$

veya

$\mathbf{x}^{'} = \mathbf{x}e^{i\varphi} - \mathbf{u}e^{i\varphi}$

elde edilir.

$$\mathbf{u}^{'} = -\mathbf{u}e^{i\varphi} \tag{4.1}$$

olmak üzere

$$\mathbf{x}' = \mathbf{u}' + \mathbf{x}e^{i\varphi} \tag{4.2}$$

yazılabilir. Böylece φ, $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$ bir t (zaman) reel parametresine bağlı olmak üzere, (4.2) denklemi ile tanımlanan harekete kompleks düzlemde **1-parametreli düzlemsel hareket** denir ve $B = E / E'$ ile gösterilir [1], [2]. (4.2) denkleminden çözüm yoluyla

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}' - \mathbf{u}')e^{-i\varphi} = \mathbf{u} + \mathbf{x}'e^{-i\varphi}$$

denklemi elde edilir. Bu denklem $B' = E' / E$ ters hareketinin vektörel denklemidir.

4.1 Hızlar ve Hızların Terkibi

E-düzlemi, E'-düzlemine göre 1-parametreli hareket yaparken, bir X noktası da hareketli E-düzlemindeki yerini t zamanı ile değiştirsin. Böylece bu iki hareket esnasında oluşan hızları araştıralım:

$X \in E$ noktasının hareketli sistemine göre $\mathbf{X_r}$ relatif hızı;

$$\mathbf{X_r} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}} \tag{4.3}$$

dir.

X noktasının E-düzleminde sahip olduğu $\mathbf{X_r}$ relatif hız vektörünün sabit sisteme göre ifadesi için,

$$\mathbf{X}'_\mathbf{r} = \mathbf{X_r}e^{i\varphi} = \dot{\mathbf{x}}e^{i\varphi} \tag{4.4}$$

yazılabilir. X noktasının E' düzleminde sahip olduğu $\mathbf{X}'_\mathbf{a}$ mutlak hızı, sabit sistemine göre;

$$\mathbf{X}'_\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{x}'}{dt} = \dot{\mathbf{x}}' = \dot{\mathbf{u}}' + i\dot{\varphi}\mathbf{x}e^{i\varphi} + \dot{\mathbf{x}}e^{i\varphi}$$

veya

$$\mathbf{X}'_\mathbf{a} = \dot{\mathbf{u}}' + i\dot{\varphi}\left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}'\right) + \dot{\mathbf{x}}e^{i\varphi} \tag{4.5}$$

şeklinde bulunur. Buna göre, X noktasının $\mathbf{X}'_\mathbf{f}$ sürüklenme hızı, sabit sistemine göre;

$$\mathbf{X}'_{\mathbf{f}} = \dot{\mathbf{u}}' + i\dot{\varphi}\left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}'\right) \tag{4.6}$$

şeklindedir.

Şimdi, (4.5) ve (4.6) denklemleri ile verilen, düzlemsel hareket esnasında $X \in E$ *noktasının* E' *düzleminde sahip olduğu hız vektörlerinin* E *hareketli düzleminde ki karşılıklarını ifade edelim:*

X noktasının E-düzleminde sahip olduğu $\mathbf{X}_{\mathbf{r}}$ relatif hızını (4.3) denkleminde vermiştik.

X noktasının hareket esnasında E'-düzleminde sahip olduğu mutlak hız vektörünün E-düzlemindeki ifadesi için

$$\mathbf{X}_{\mathbf{a}} = \mathbf{X}'_{a} e^{-i\varphi} = \dot{\mathbf{u}}' e^{-i\varphi} + i\dot{\varphi}\mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}$$

yazılabilir. $\dot{\mathbf{u}}' = -\left(\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{u}\dot{\varphi}\right)e^{i\varphi}$ olduğundan,

$$\mathbf{X}_{\mathbf{a}} = -\left(\dot{\mathbf{u}} + i\mathbf{u}\dot{\varphi}\right) + i\dot{\varphi}\mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}} \tag{4.7}$$

elde edilir. Bu durumda X noktasının $\mathbf{X}_{\mathbf{f}}$ sürüklenme hızı,

$$\mathbf{X}_{\mathbf{f}} = -\dot{\mathbf{u}} + i\dot{\varphi}\left(\mathbf{x} - \mathbf{u}\right) = \dot{\mathbf{u}}' e^{-i\varphi} + i\dot{\varphi}\mathbf{x} \tag{4.8}$$

şeklinde ifade edilir.

(4.3), (4.4),(4.5) ve (4.6),(4.7),(4.8) ifadelerinden aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.1

Kompleks düzlemde, $B = E / E'$ 1-parametreli düzlemsel hareket esnasında bir X noktasının mutlak hızı, sürüklenme hızı ile relatif hızının toplamına eşittir, yani hızlar kanunu korunur:

$$\begin{cases} \mathbf{X}'_{\mathbf{a}} = \mathbf{X}'_{\mathbf{f}} + \mathbf{X}'_{\mathbf{r}} \\ \text{ve} \\ \mathbf{X}_{\mathbf{a}} = \mathbf{X}_{\mathbf{f}} + \mathbf{X}_{\mathbf{r}} \end{cases}. \tag{4.9}$$

□

4.2 Dönme Polü ve Pol Eğrileri

Şimdi B *hareketinin her* t *anındaki sabit düzlemde ki sürüklenme hızı sıfır olan noktaları, yani pol noktalarını araştıralım:*

$$\mathbf{X}_{\mathbf{f}}' = \dot{\mathbf{u}}' + i\dot{\varphi}\left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}'\right) = 0$$

olmak üzere

$$\mathbf{x}' = \mathbf{p}' = \mathbf{u}' + i\frac{\dot{\mathbf{u}}'}{\dot{\varphi}} \tag{4.10}$$

elde edilir. Ayrıca bu son denklemden elde edilen

$$\dot{\mathbf{u}}' = i\dot{\varphi}\left(\mathbf{u}' - \mathbf{p}'\right)$$

ifadeyi (4.6) denkleminde yerine yazarsak sürüklenme hız vektörünü pol noktası cinsinden

$$\mathbf{X}_{\mathbf{f}}' = i\dot{\varphi}\left(\mathbf{x}' - \mathbf{p}'\right) \tag{4.11}$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi, (4.10) denklemi ile verilen, düzlemsel hareket esnasında E' *düzleminde ki pol noktasının ve (4.11) denklemi ile verilen sürüklenme hız vektörünün* E *hareketli düzleminde ki karşılıklarını ifade edelim:*

$\mathbf{X}_{\mathbf{f}} = 0$ olan noktaları araştıracağız; O halde (4.8) denkleminden

$$\dot{\mathbf{u}}' e^{-i\varphi} + i\dot{\varphi}\mathbf{x} = 0$$

olmak üzere

$$\mathbf{p} = \frac{-\dot{\mathbf{u}}'}{i\dot{\varphi}} e^{-i\varphi} = \mathbf{u} - i\frac{\dot{\mathbf{u}}}{\dot{\varphi}} \tag{4.12}$$

elde edilir. Burada $\dot{\mathbf{u}}'$ nın değeri $\mathbf{p}$ cinsinden bulup (4.8) de yerine yazılırsa sürüklenme hızın $\mathbf{p}$ pol noktası cinsinden E-düzlemindeki ifadesi,

$$\mathbf{X}_{\mathbf{f}} = i\dot{\varphi}\left(\mathbf{x} - \mathbf{p}\right) \tag{4.13}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. □

X *noktasının sürüklenme hızının (4.11) ve (4.13) ifadelerinden aşağıdaki sonuçlar verilebilir:*

Sonuç 4.1

$$\left\langle \mathbf{X}_{\mathbf{f}}^{'}, \mathbf{P}'\mathbf{X}' \right\rangle = \left\langle i\dot{\varphi}\left(\mathbf{x}' - \mathbf{p}'\right), \left(\mathbf{x}' - \mathbf{p}'\right) \right\rangle$$

$$= \left\langle \left(-\left(x_2' - p_2'\right), x_1' - p_1'\right), \left(x_1' - p_1', x_2' - p_2'\right) \right\rangle \dot{\varphi}$$

$$= \left[-\left(x_2' - p_2'\right)\left(x_1' - p_1'\right) + \left(x_1' - p_1'\right)\left(x_2' - p_2'\right)\right]\dot{\varphi} = 0.$$

Benzer şekilde E hareketli düzleminde $\mathbf{X}_{\mathbf{f}} = i\dot{\varphi}\left(\mathbf{x} - \mathbf{p}\right)$ sürüklenme hız vektörü ve $\mathbf{PX}$ pol ışını için,

$$\left\langle \mathbf{X}_{\mathbf{f}}, \mathbf{PX} \right\rangle = \left\langle i\dot{\varphi}\left(\mathbf{x} - \mathbf{p}\right), \left(\mathbf{x} - \mathbf{p}\right) \right\rangle$$

$$= \left\langle \left(-\left(x_2 - p_2\right), x_1 - p_1\right), \left(x_1 - p_1, x_2 - p_2\right) \right\rangle \dot{\varphi}$$

$$=0$$

olduğundan pol ışını hareketin her t anında sürüklenme hızına diktir.

Sonuç 4.2

$\mathbf{X}_{\mathbf{f}}^{'}$ vektörünün uzunluğu için,

$$\left\| \mathbf{X}_{\mathbf{f}}^{'} \right\| = \sqrt{\left\langle \mathbf{X}_{\mathbf{f}}^{'}, \mathbf{X}_{\mathbf{f}}^{'} \right\rangle}$$

$$= \sqrt{\left\langle i\dot{\varphi}\left(\mathbf{x}' - \mathbf{p}'\right), i\dot{\varphi}\left(\mathbf{x}' - \mathbf{p}'\right) \right\rangle}$$

$$= \sqrt{\left\langle \left(-\left(x_2' - p_2'\right), x_1' - p_1'\right), \left(-\left(x_2' - p_2'\right), x_1' - p_1'\right) \right\rangle \dot{\varphi}^2}$$

$$= \sqrt{\dot{\varphi}^2 \left[\left(x_2' - p_2'\right)^2 + \left(x_1' - p_1'\right)^2\right]}$$

$$= \dot{\varphi} \left\| \mathbf{P}'\mathbf{X}' \right\|$$

elde edilir.

Benzer şekilde, E hareketli düzlemde $\mathbf{X_f}$ sürüklenme hız vektörünün uzunluğu için;

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{X_f}\right\| &= \sqrt{\left\langle \mathbf{X_f}, \mathbf{X_f} \right\rangle} \\ &= \sqrt{\left\langle i\dot{\varphi}\left(\mathbf{x}-\mathbf{p}\right), i\dot{\varphi}\left(\mathbf{x}-\mathbf{p}\right)\right\rangle} \\ &= \sqrt{\dot{\varphi}^2\left[\left(x_2-p_2\right)^2+\left(x_1-p_1\right)^2\right]} \\ &= \dot{\varphi}\left\|\mathbf{PX}\right\|\end{aligned}$$

elde edilir. □

Şimdi (P) ve (P') pol eğrilerini çizen P pol noktasının hızlarını araştıralım:

Pol noktası $\mathbf{X_f'} = 0$ ile tanımlandığından (4.9) eşitliğinden $X = P$ için

$$\mathbf{X_a'} = \mathbf{X_r'} = \dot{\mathbf{p}}e^{i\varphi}$$

bulunur.

Böylece aşağıdaki teoremleri ispatsız verebiliriz.

Teorem 4.2

Sabit ve hareketli düzlemlerdeki pol eğrilerini çizen P pol noktasının her t anındaki hızları birbirinin aynısıdır.

Teorem 4.3

Kompleks düzlemde, $B = E/E'$; 1-parametreli düzlemsel hareket esnasında E-düzleminin (P) hareketli pol eğrisi E'-düzleminin (P') sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır.

İspat:

Teorem 4.1 e göre her t anında (P) ve (P') pol eğrileri P pol noktasında birbirine teğettir. Ayrıca, (P) nin t_0 ve t_1 parametrelerine karşılık gelen noktaları arasındaki yay uzunluğu

$ds = \left\| \mathbf{X}'_{\mathbf{r}} \right\| dt$

dir. (P') nün t_0 ve t_1 parametrelerine karşılık gelen noktaları arasındaki yay uzunluğu

$ds' = \left\| \mathbf{X}'_{\mathbf{a}} \right\| dt$

olur. P pol noktası için $\mathbf{X}'_{\mathbf{r}} = \mathbf{X}'_{\mathbf{a}}$ olduğundan

$ds' = ds$

bulunur. O halde (P) ve (P') pol eğrileri her t anında birbirine teğet ve aldıkları yollar aynı olduğundan (P) hareketli pol eğrisi (P') sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır.

4.3 İvmeler ve İvmelerin Terkibi

Kompleks düzlemde 1-parametreli düzlemsel hareket esnasında X noktasının relatif ivme vektörü, X noktasının E-düzlemine göre olan ivme vektörüdür ve X in E-düzlemine göre $\mathbf{X}_{\mathbf{r}}$ vektörel hızının t zamanına göre türevi alınarak bulunur. O halde (4.3) denkleminden

$$\mathbf{b}_{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{X}}_{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{x}} \tag{4.14}$$

elde edilir. Bu vektör sabit koordinat sistemine göre,

$$\mathbf{b}'_{\mathbf{r}} = \mathbf{b}_{\mathbf{r}} e^{i\varphi} = \ddot{\mathbf{x}} e^{i\varphi} \tag{4.15}$$

şeklinde ifade edilebilir. X noktasının mutlak ivme vektörü, X noktasının E'-düzlemine göre ivme vektörüdür. Buna göre bu ivme vektörü

$$\mathbf{X}'_{\mathbf{a}} = \mathbf{X}'_{\mathbf{f}} + \mathbf{X}'_{\mathbf{r}} = i\dot{\varphi}(\mathbf{x} - \mathbf{p}) e^{i\varphi} + \dot{\mathbf{x}} e^{i\varphi}$$

mutlak hızının t ye göre türevi alınarak

$$\begin{aligned} \mathbf{b}'_{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{X}}'_{\mathbf{a}} &= i\ddot{\varphi}(\mathbf{x} - \mathbf{p}) e^{i\varphi} + i\dot{\varphi}(\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{p}}) e^{i\varphi} - \dot{\varphi}^2 (\mathbf{x} - \mathbf{p}) e^{i\varphi} + \ddot{\mathbf{x}} e^{i\varphi} + i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{x}} e^{i\varphi} \\ &= (\mathbf{x} - \mathbf{p})(i\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2) e^{i\varphi} + i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{x}} e^{i\varphi} - i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{p}} e^{i\varphi} + i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{x}} e^{i\varphi} + \ddot{\mathbf{x}} e^{i\varphi} \end{aligned}$$

bulunur. Bu son eşitliği düzenlersek

$$\mathbf{b}_{\mathbf{a}}^{'} = (\mathbf{x}-\mathbf{p})\left(i\ddot{\varphi}-\dot{\varphi}^2\right)e^{i\varphi} - i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{p}}e^{i\varphi} + 2i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{x}}e^{i\varphi} + \mathbf{b}_{\mathbf{r}}^{'} \qquad (4.16)$$

elde edilir. Buradaki

$$\mathbf{b}_{\mathbf{f}}^{'} = (\mathbf{x}-\mathbf{p})\left(i\ddot{\varphi}-\dot{\varphi}^2\right)e^{i\varphi} - i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{p}}e^{i\varphi} \qquad (4.17)$$

vektörüne X noktasının **sürüklenme ivme vektörü** ve

$$\mathbf{b}_{\mathbf{c}}^{'} = 2i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{x}}e^{i\varphi} \qquad (4.18)$$

vektörüne de **Coriolis-ivme vektörü** denir.

O halde ivmelerin terkibi şu teoremle ifade edilebilir:

Teorem 4.4

Kompleks düzlemde, 1-parametreli düzlemsel hareket esnasında, bir noktanın mutlak ivme vektörü; sürüklenme ivme vektörü, Coriolis-ivme vektörü ve relatif ivme vektörünün toplamına eşittir:

$$\mathbf{b}_{\mathbf{a}}^{'} = \mathbf{b}_{\mathbf{f}}^{'} + \mathbf{b}_{\mathbf{c}}^{'} + \mathbf{b}_{\mathbf{r}}^{'} . \qquad (4.19)$$

□

(4.16), (4.17) ve (4.18) ile verilen ivme vektörleri hareketli sisteme göre sırasıyla

$$\mathbf{b}_{\mathbf{a}} = \mathbf{b}_{\mathbf{a}}^{'}e^{-i\varphi} = (\mathbf{x}-\mathbf{p})\left(i\ddot{\varphi}-\dot{\varphi}^2\right) - i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{p}} + 2i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{b}_{\mathbf{r}} \qquad (4.20)$$

$$\mathbf{b}_{\mathbf{f}} = \mathbf{b}_{\mathbf{f}}^{'}e^{-i\varphi} = (\mathbf{x}-\mathbf{p})\left(i\ddot{\varphi}-\dot{\varphi}^2\right) - i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{p}} \qquad (4.21)$$

$$\mathbf{b}_{\mathbf{c}} = \mathbf{b}_{\mathbf{c}}^{'}e^{-i\varphi} = 2i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{x}} \qquad (4.22)$$

vektörleri ile ifade edilir.

Sonuç 4.3

(4.4) ve (4.18) denklemleri kullanarak $\left\langle \mathbf{X}_{\mathbf{r}}^{'}, \mathbf{b}_{\mathbf{c}}^{'} \right\rangle = \left\langle \dot{\mathbf{x}}e^{i\varphi}, 2i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{x}}e^{i\varphi} \right\rangle$ iç-çarpımını hesaplayalım:

$\mathbf{a} = a_1 + ia_2, \quad \mathbf{b} = b_1 + ib_2$ kompleks sayıları için,

$$\left\langle \mathbf{a}e^{i\varphi}, \mathbf{b}e^{i\varphi} \right\rangle = \left\langle \left(a_1 + ia_2\right)\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right), \left(b_1 + ib_2\right)\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) \right\rangle$$

$$= \left\langle \left(a_1\cos\varphi - a_2\sin\varphi, a_1\sin\varphi + a_2\cos\varphi\right), \left(b_1\cos\varphi - b_2\sin\varphi, b_1\sin\varphi + b_2\cos\varphi\right) \right\rangle$$

$$= a_1b_1 + a_2b_2$$

olduğundan

$$\left\langle \mathbf{a}e^{i\varphi}, \mathbf{b}e^{i\varphi} \right\rangle = \left\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \right\rangle \tag{4.23}$$

bulunur.

O halde (4.23) denklemi kullanılırsa,

$$\left\langle \mathbf{X}_\mathbf{r}^{'}, \mathbf{b}_\mathbf{c}^{'} \right\rangle = \left\langle \dot{\mathbf{x}}e^{i\varphi}, 2i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{x}}e^{i\varphi} \right\rangle$$

$$= \left\langle \dot{\mathbf{x}}, 2i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{x}} \right\rangle$$

$$= 2\left\langle \left(\dot{x}_1 + i\dot{x}_2\right), i\dot{\varphi}\left(\dot{x}_1 + i\dot{x}_2\right) \right\rangle$$

$$= 2\left\langle \left(\dot{x}_1, \dot{x}_2\right), \left(-\dot{\varphi}\dot{x}_2, \dot{\varphi}\dot{x}_1\right) \right\rangle$$

$$= 2\left(-\dot{\varphi}\dot{x}_2\dot{x}_1 + \dot{\varphi}\dot{x}_2\dot{x}_1\right)$$

$$= 0$$

bulunur. Yani $\mathbf{b}_\mathbf{c}^{'}$ Coriolis-ivmesi $\mathbf{X}_\mathbf{r}^{'}$ relatif hızına diktir. □

(4.19) eşitliği ile ivmelerin hızlardan farklı bir yapı ile birbirleri arasındaki ilişki verilmektedir. E düzlemindeki X noktasının Coriolis-ivmesi sıfır olduğunda ancak ivmelerde hızlardaki gibi benzer sekilde

$$\mathbf{b}_\mathbf{a}^{'} = \mathbf{b}_\mathbf{f}^{'} + \mathbf{b}_\mathbf{r}^{'}$$

eşitliğine sahip olurlar.

Bununla ilgili aşagıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.4

Kompleks düzlemde, E/E' 1-parametreli düzlemsel hareket esnasında E**-**hareketli düzleminde hareketli X noktasının Coriolis-ivmesi sıfır ise $E/E^{'}$ hareketi bir kayma (öteleme) hareketidir ve bu ifadenin tersi de doğrudur.

İspat:

$$\mathbf{b}_{\mathbf{c}}^{'} = 2i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{x}}e^{i\varphi} = 0$$

olsun. Bu durumda

$$\dot{\varphi} = 0$$

elde edilir. Bu ise φ nin sabit olduğunu, dolayısıyla $E/E^{'}$ hareketinin bir kayma hareketi olduğunu gösterir.

Tersine, $E/E^{'}$ hareketi sadece bir kayma hareketi olsun. Buna göre $\varphi =$sabit olacağından $\mathbf{b}_{\mathbf{c}}^{'} = 0$ olacaktır. □

Şimdi de bir $E/E^{'}$ *hareketi esnasında, herhangi bir* t *anında, sabit düzlemde sürüklenme ivmesinin sıfır olduğu noktaları yani ivme pollerini araştıralım*:

Buna göre

$$\mathbf{b}_{\mathbf{f}}^{'} = 0$$

olmak üzere

$$(\mathbf{x}-\mathbf{p})\left(i\ddot{\varphi}-\dot{\varphi}^{2}\right)e^{i\varphi} - i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{p}}e^{i\varphi} = 0$$

eşitliğinden

$$\mathbf{x}-\mathbf{p} = \frac{i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{p}}}{i\ddot{\varphi}-\dot{\varphi}^{2}}$$

elde edilir. Böylece ivme polü için,

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \frac{i\dot{\varphi}\dot{\mathbf{p}}}{i\ddot{\varphi}-\dot{\varphi}^{2}} \tag{4.24}$$

veya

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \frac{\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\dot{\mathbf{p}}}{\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4} - i\frac{\dot{\varphi}^3\dot{\mathbf{p}}}{\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4}$$

elde edilir.

4.4 Yörünge Eğrisinin Ağırlık Merkezi

$B = E / E'$, 1-parametreli düzlemsel hareket ve $t \in [t_0, t_1]$ reel bir kapalı aralık olsun. Eğer,

$$\begin{aligned} u'(t+T) &= u'(t) \\ \varphi(t+T) &= \varphi(t) + 2\pi\upsilon, \qquad \forall t \in [t_0, t_1] \end{aligned} \tag{4.25}$$

olacak şekilde en küçük bir $T > 0$ sayısı varsa, $B = E / E'$ hareketine **1-parametreli kapalı düzlemsel hareket** denir. Burada T kapalı hareketin peryodu ve υ de kapalı hareketin dönme sayısıdır.

X noktası hareketli E-düzleminde sabit bir nokta olsun. Yani x noktası sabit bir kompleks sayı ise, X noktası kapalı bir $B = E / E'$ hareketinde kapalı bir eğri çizer. Yol elementini her defasında $d\varphi$ kitle elementi ile örtülen yörünge eğrisinin ağırlık merkezini S_x ile gösterelim.

Şimdi S_x ağırlık merkezini araştıralım:

Bu nokta sabit E'-düzleminde

$$S_x = \frac{\oint x' d\varphi}{\oint d\varphi} \tag{4.26}$$

kompleks sayısı ile elde edilir. (4.1) ve (4.2) denklemlerinden

$$x' = u' + xe^{i\varphi} = (x - u)e^{i\varphi}$$

elde edilir. Bu son eşitlik (4.26) denkleminde yerine yazılırsa S_x kompleks sayısı için

$$S_x = \frac{\oint (x-u)e^{i\varphi} d\varphi}{\oint d\varphi} = \frac{x\oint e^{i\varphi} d\varphi - \oint ue^{i\varphi} d\varphi}{\oint d\varphi}$$

eşitliği elde edilir.

$$\oint e^{i\varphi} d\varphi = 0$$

ve

$$\oint d\varphi = 2\pi\upsilon$$

olduğundan

$$S_x = -\frac{1}{2\pi\upsilon}\oint u e^{i\varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi\upsilon}\oint u' d\varphi \tag{4.27}$$

olarak elde edilir.

Benzer şekilde $d\varphi$ kitle elementi ile örtülen (P') sabit pol eğrisi de S' ağırlık merkezine sahip olsun:

Bu S' noktasına karşılık gelen s' kompleks sayısına **Steiner noktası** denir ve bu nokta için,

$$s' = s_1' + i s_2' = \frac{\oint p' d\varphi}{\oint d\varphi}$$

yazılabilir. (4.10) denkleminden $p' = u' + i\,\dfrac{du'}{d\varphi}$ oduğundan

$$s' = s_1' + i s_2' = \frac{\oint u' d\varphi + i\oint du'}{\oint d\varphi}$$

dir. Burada

$$\oint du' = \int_0^T du' = u'\Big|_0^T = u'(T) - u'(0) = 0$$

ve

$$\oint d\varphi = 2\pi\upsilon$$

olduğundan

$$s' = \frac{1}{2\pi\upsilon} \oint u' d\varphi \qquad (4.28)$$

olarak elde edilir. (4.27) ve (4.28) denklemlerinden

$$S_x = s'$$

dir.

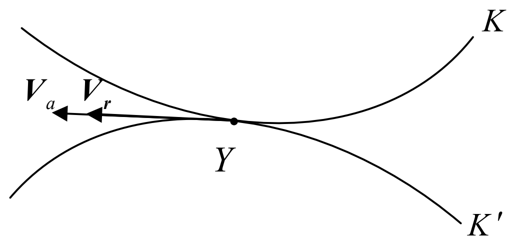
Teorem 4.5

Kapalı bir $B = E / E'$ hareketinin nokta yörüngelerinin yay elemenleri her defa kitle elementi olan $d\varphi$ dönme açısı ile örtülürse, örtülen bu yörünge eğrileri sabit (P') pol eğrisinin S' Steiner noktası ile ortak ağırlık merkezine sahiptirler, [1] ve [3].

BÖLÜM 5

1-PARAMETRELİ DÜZLEMSEL KOMPLEKS HAREKETLER ALTINDA ZARF EĞRİLERİ

E -hareketli düzleminde K eğrisi tesbit edilmiş olsun. 1-parametreli bir $B = E / E'$ hareketinde K eğrisinin E' sabit düzleminde her t için farklı bir durumu vardır. K nın E'-sabit düzlemindeki bu durumları genel olarak K' gibi bir zarfa sahiptir.



Şekil 5.1 Zarf eğrileri

K ve K' eğrilerini en azından değme noktalarında düzgün eğriler olarak kabul edelim, K eğrisi t anında K' zarfına Y noktasında değsin (Şekil 5.1). Buna göre, $B = E / E'$ hareketi esnasında bu ortak Y değme noktası hem K hemde K' üzerinde hareket eder. $B = E / E'$ hareketi esnasında K eğrisi $\mathbf{V_r}$ vektörel hızı ile, K' eğrisi ise $\mathbf{V_a}$ vektörel hızı ile çizilir.

Y , K ve K' eğrilerinin ortak değme noktası olduğundan $\mathbf{V_r}$ ile $\mathbf{V_a}$ hız vektörleri ortak teğet ile çakışırlar. Y noktasının sürüklenme hızı $\mathbf{V_f}$ vektörü olmak üzere;

$$\mathbf{V_a} = \mathbf{V_f} + \mathbf{V_r}$$

olduğundan

$$\mathbf{V_f} = \mathbf{V_a} - \mathbf{V_r}$$

dir. Böylece, Y noktasının sürüklenme hızına ait $\mathbf{V_f}$ vektörü de $\mathbf{V_r}$ ve $\mathbf{V_a}$ hız vektörleri ile ortak doğrultudadır. Aynı zamanda $\mathbf{V_f}$, $\mathbf{PY}$ pol ışınına diktir. Böylece aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 5.1

Bir parametreli bir $B = E / E'$ hareketinde zarfın normali, yani K ve K' eğrilerinin Y değme noktasındaki ortak normali daima P ani pol noktasından geçer. □

Y noktası P noktasından farklı oldukça $\mathbf{V_f} \neq 0$ ve dolayısıyla $\mathbf{V_a} \neq \mathbf{V_r}$ olacaktır. Burada $\dfrac{|\mathbf{V_r}|}{|\mathbf{V_a}|} = \lambda$ sayısı hareketin yuvarlanma-kayma sayısı olarak adlandırılacaktır.

5.1 Zarf Eğrilerinin Yuvarlanma-Kayması

K ve K' zarf eğrilerini göz önüne alalım. Ortak Y değme noktası Y_r kompleks sayısına karşılık gelen $\mathbf{V_r}$ vektörel hızı ile K eğrisini kateder. Bununla birlikte Y noktası Y_a kompleks sayısına karşılık gelen $\mathbf{V_a}$ vektörel hızı ile K' eğrisini çizer. Bu hız vektörleri için,

$$\mathbf{V_r} = \lambda \mathbf{V_a}$$

veya

$$\mathbf{y_r} = \lambda \mathbf{y_a}, \quad \mathbf{y}'_\mathbf{r} = \lambda \mathbf{y}'_\mathbf{a} \tag{5.1}$$

bağıntıları sağlanır. Bununla birlikte K ve K' eğrilerinin değmesi ifade edilmiştir. λ daha önce bahsedilen yuvarlanma-kayma sayısını gösterir. (5.1) denklemi

$$\mathbf{y_r} = \lambda(\mathbf{y_r} + \mathbf{y_f}), \quad \mathbf{y}'_\mathbf{a} - \mathbf{y}'_f = \lambda \mathbf{y}'_\mathbf{a} \tag{5.2}$$

şeklinde de yazılabilir. (5.2) denkleminde hızların daha önceki bölümlerde elde edilen ifadeleri yerine yazılırsa,

$$\dot{\mathbf{y}} = \lambda\left(\dot{\mathbf{y}} + i\,\dot{\varphi}\left(\mathbf{y}-\mathbf{p}\right)\right) \tag{5.3}$$

ve

$$\lambda\dot{\mathbf{y}}' = \dot{\mathbf{y}}' - i\,\dot{\varphi}\left(\mathbf{y}'-\mathbf{p}'\right) \tag{5.4}$$

elde edilir.

K , E -hareketli düzleminde herhangi bir eğri ve K' buna ait E'-düzlemindeki zarf eğrisi ise, bu durumda λ yuvarlanma-kayma sayısı genel olarak t zamanı ile değişir yani, $\lambda = \lambda(t)$ dir. Tersine, λ yı t zamanının keyfi fonksiyonu olarak önceden alabilir ve hareket esnasında $\lambda = \lambda(t)$ yuvarlanma-kayma sayısı ile birbiri üzerinde yuvarlanarak kayan bütün K , K' zarf eğri çiftlerini bulabiliriz. Bunun için en son elde edilen (5.3) ve (5.4) kompleks diferensiyel denklemlerinden herhangi birini integre etmek yeterlidir. (5.3) denklemini ele alalım:

(5.3) denkleminden

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}} &= \lambda\left(\dot{\mathbf{y}} + i\,\dot{\varphi}\left(\mathbf{y}-\mathbf{p}\right)\right)\\ &= \lambda\dot{\mathbf{y}} + \lambda i\,\dot{\varphi}\left(\mathbf{y}-\mathbf{p}\right)\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned}&\dot{\mathbf{y}} - \lambda\dot{\mathbf{y}} = \lambda i\,\dot{\varphi}\left(\mathbf{y}-\mathbf{p}\right)\\ &\dot{\mathbf{y}}\left(1-\lambda\right) = \lambda i\,\dot{\varphi}\left(\mathbf{y}-\mathbf{p}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$\dot{\mathbf{y}} = \dfrac{\lambda}{1-\lambda}\, i\,\dot{\varphi}\left(\mathbf{y}-\mathbf{p}\right)$, ($\dfrac{\lambda}{1-\lambda} = L$ denilirse)

$$\dot{\mathbf{y}} = iL\dot{\varphi}\left(\mathbf{y}-\mathbf{p}\right)$$

lineer diferensiyel denklemi bulunur.

Şimdi bulduğumuz lineer diferensiyel denklemini çözelim:

$\dot{\mathbf{y}} = iL\dot{\varphi}\mathbf{y} - iL\dot{\varphi}\mathbf{p}$ veya $\dot{\mathbf{y}} - iL\dot{\varphi}\mathbf{y} = -iL\dot{\varphi}\mathbf{p}$

yazılabilir. Buradan,

$\phi(t)=\int L\dot{\varphi}dt$ ve $N(t)=e^{-i\int L\dot{\varphi}dt}=e^{-i\phi}$ olmak üzere yukarıdaki diferensiyel denklemin son halinin her iki tarafı, $N(t)=e^{-i\int L\dot{\varphi}dt}=e^{-i\phi}$ ile çarpılırsa,

$$e^{-i\phi}\dot{\mathbf{y}}-e^{-i\phi}iL\dot{\varphi}\mathbf{y}=-iL\dot{\varphi}\mathbf{p}\,e^{-i\phi}$$

elde edilir. Buradan,

$$\left(e^{-i\phi}\mathbf{y}\right)'=-iL\dot{\varphi}\mathbf{p}\,e^{-i\phi}$$

dir. Böylece,

$$e^{-i\phi}\mathbf{y}=-i\int L\dot{\varphi}\mathbf{p}\,e^{-i\phi}dt+A_0$$

yazılabilir. Buradan aranılan K eğrileri

$$\mathbf{y}=\frac{-i\int L\dot{\varphi}\mathbf{p}\,e^{-i\phi}dt+A_0}{e^{-i\phi}}$$

veya

$$\mathbf{y}=-ie^{i\phi}\int L\mathbf{p}\,e^{-i\phi}d\varphi+A_0e^{i\phi}$$

şeklinde elde edilir.

Not: A_0 *sabitinin özel bir seçimi ile* K *eğrisinin herhangi bir* $t=t_0$ *anında* $y=y_0$ *noktasına karşılık gelen keyfi* Y_0 *noktasından geçtiğini ve bu noktadan sabit düzlemin* K' *eğrisine teğet olduğu nokta elde edelir. Yani elde edilen* K *eğrilerinden,* K' *eğrileri elde edilebilir.*

Benzer şekilde (5.4) denklemi de

$$\dot{\mathbf{y}}'=i\dot{\varphi}L'\left(\mathbf{y}'-\mathbf{p}'\right),\left(L'=\frac{1}{1-\lambda}=L+1\right)$$

şeklinde bir lineer diferensiyel denklem olarak yazılabilir. Ayrıca K' eğrileri

$$\mathbf{y}'=-ie^{i\phi'}\int L'\mathbf{p}'\,e^{-i\phi'}d\varphi+A_0'e^{i\phi'}$$

şeklinde de elde edilir. Burada,

$$\phi' = \int L' d\varphi = \phi + \varphi$$

dir.

5.2 Yuvarlanma-Kayma Sayısının Geometrik Karakteristiği

$\dot{\mathbf{y}} = i\,\dot{\varphi}L\left(\mathbf{y}-\mathbf{p}\right)$ ve $\dot{\mathbf{y}}' = i\,\dot{\varphi}L'\left(\mathbf{y}'-\mathbf{p}'\right)$ formüllerini, sırasıyla, P , P' ye göre çözersek,

$$\mathbf{p}=\mathbf{y}+\frac{i\dot{\mathbf{y}}}{L\dot{\varphi}}=\mathbf{y}+i\dot{\mathbf{y}}\frac{1-\lambda}{\lambda\dot{\varphi}}$$

ve

$$\mathbf{p}'=\mathbf{y}'+\frac{i\dot{\mathbf{y}}'}{L'\dot{\varphi}}=\mathbf{y}'+i\dot{\mathbf{y}}'\frac{1-\lambda}{\lambda\dot{\varphi}}$$

bağıntıları elde edilir. Yani, $B = E / E'$ hareketi esnasında $\left(P\right)$ ve $\left(P'\right)$ pol eğrilerini birbiri üzerinde λ yuvarlanma-kayma sayısı ile yuvarlanarak kayan K ve K' eğrilerinden elde edebiliriz. Burada $\dot{\varphi}$ açısal hızını başka bir şekilde ifade edelim.

K ve K' eğrilerinin yay uzunlukları, sırasıyla, s , s' ve Y ortak değme noktasında her iki koordinat sisteminin reel ekseni ile sırasıyla, χ , χ' açılarını oluşturan bir teğete sahip olsunlar. Fakat her iki sistem birbirine göre φ açısı kadar döndürülmüş olduğundan

$$\chi'=\chi+\varphi$$

bağıntısı vardır. Bu bağıntının t ye göre türevini alınırsa

$$\frac{d\chi'}{ds'}\frac{ds'}{dt}=\frac{d\chi}{ds}\frac{ds}{dt}+\frac{d\varphi}{dt}$$

elde edilir. Burada $d\chi$, K eğrisinin; $d\chi'$, K' eğrisinin kotengenz açısı olarak bulunur. Bu durumda K ve K' eğrilerinin Y ortak değme noktasındaki eğrilikleri

$$\frac{d\chi}{ds}=\kappa=\frac{1}{\rho},\quad \frac{d\chi'}{ds'}=\kappa'=\frac{1}{\rho'}$$

olarak elde edilir. Yuvarlanma-kayma hareketine ait

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = \lambda \frac{ds'}{dt} = \lambda \dot{s}'$$

bağıntısını göz önünde tutarsak açısal hızı

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{ds'}{dt}\left(\kappa' - \lambda\kappa\right) = \dot{s}'\left(\kappa' - \lambda\kappa\right)$$

şeklinde buluruz. Bunu pol eğrilerinin ifadesinde yerine koyarsak

$$\dot{\mathbf{y}} = \frac{d\mathbf{y}}{ds}\dot{s} \ , \ \ \dot{\mathbf{y}}' = \frac{d\mathbf{y}'}{ds'}\dot{s}'$$

den dolayı pol formülleri

$$\begin{aligned} P &= y + i\,\frac{1-\lambda}{\kappa' - \lambda\kappa}\frac{dy}{ds} \\ P' &= y' + i\,\frac{1-\lambda}{\kappa' - \lambda\kappa}\frac{dy'}{ds'} \end{aligned} \qquad (5.5)$$

olarak elde edilir.

Teorem 5.1

$B = E / E'$ hareketinin, K ve K' zarf eğri çifti, K ve K' eğrilerinin Y ortak değme noktalarının bu eğrileri katettikleri hızların $\lambda = \lambda\left(t\right)$ oranının (yuvarlanma-kayma sayısının) daha önceden verilmesi ile bellidir. Hareketin pol eğrileri (5.5) formülleri yardımıyla K ve K' eğrilerinin κ ve κ' eğrilikleri yardımıyla elde edilir.

Şimdi λ yuvarlanma-kayma sayısının dört noktanın çifte oranı olarak ifade edilebileceğini gösterelim:

$$\left|\frac{dy}{ds}\right| = \left|\frac{dy'}{ds'}\right| = 1$$ (Yay uzunluğuna göre türev teğet birim vektörü verir)

olduğundan dolayı (5.5) ifadelerinden Y noktasının pol uzaklığı

$$\eta = PY = \frac{1-\lambda}{\kappa' - \lambda\kappa} = \frac{\rho\rho'\left(1-\lambda\right)}{\rho - \lambda\rho'}$$

dir. Bu ifadeyi λ ya göre çözersek

$$\lambda = \frac{\eta - \rho'}{\eta - \rho} : \frac{\rho'}{\rho}$$

elde edilir.

$\eta - \rho' = PX'$, $\eta - \rho = PX$, $\rho' = X'Y$, $\rho = XY$

uzunlukları göz önünde bulundurulursa λ dört noktanın çifte oranı olarak

$$\lambda = \frac{PX'}{PX} : \frac{X'Y}{XY} = \left(P\, Y\, X'\, X\right)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 5.2

λ yuvarlanma-kayma sayısı dört noktanın çifte oranı olarak gösterilebilir. Bu noktalar P dönme polü, K ve K' eğrilerinin Y değme noktası ile K ve K' eğrilerinin Y değme noktasındaki X ve X' eğrilik merkezleridir, [1], [3].

BÖLÜM 6

KOMPLEKS DÜZLEMDE YÜKSEK MERTEBEDEN İVMELER VE İVME POLLERİ

6.1 Yüksek Mertebeden İvmeler

Kompleks düzlemde, E/E' 1-parametreli düzlemsel hareket esnasında X, E-hareketli düzleminde sabit bir nokta olsun. Bu noktayı kompleks $\mathbf{x}$ sayısı ile gösterelim. Bu nokta hareketli düzlemde sabit olduğundan E'-sabit düzleme göre hızı (mutlak hızı) sürüklenme hızına eşittir. Bu hız ise,

$$\dot{\mathbf{x}}' = \dot{\mathbf{u}}' + i\dot{\varphi}\left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}'\right) \tag{6.1}$$

bağıntısı ile ifade edilir. Bu ifadenin t ye göre türevini alarak X noktasının

$$\ddot{\mathbf{x}}' = \ddot{\mathbf{u}}' + i\ddot{\varphi}\left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}'\right) + i\dot{\varphi}\left(\dot{\mathbf{x}}' - \dot{\mathbf{u}}'\right)$$

sürüklenme ivmesini buluruz. (6.1) denklemindeki $\dot{\mathbf{x}}'$ nın değerini bu eşitlikte yerine yazarsak

$$\ddot{\mathbf{x}}' = \ddot{\mathbf{u}}' + \left(i\ddot{\varphi} + i\dot{\varphi}\, i\dot{\varphi}\right)\left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}'\right) \tag{6.2}$$

bulunur. (6.2) eşitliğinin bir defa daha türevini alarak 3.mertebeden hız (2. mertebeden ivme) vektörü için

$$\dddot{\mathbf{x}}' = \dddot{\mathbf{u}}' + \left(i\dddot{\varphi} - 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\right)\left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}'\right) + \left(i\ddot{\varphi} + i\dot{\varphi}\, i\dot{\varphi}\right)\left(\dot{\mathbf{x}}' - \dot{\mathbf{u}}'\right)$$

elde edilir. Eğer (6.1) denklemindeki $\dot{\mathbf{x}}'$ nın değerini bu eşitlikte yerine yazarsak,

$$\dddot{\mathbf{x}}' = \dddot{\mathbf{u}}' + \left((i\dddot{\varphi} - 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}) + (i\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2)i\dot{\varphi}\right)\left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}'\right) \tag{6.3}$$

elde edilir. (6.3) ifadesinin bir defa daha türevini alarak 4.mertebeden hız (3. mertebeden ivme) vektörü

$$\overset{(4)}{\mathbf{x}'} = \overset{(4)}{\mathbf{u}'} + \left((i\overset{(4)}{\varphi} - 3\ddot{\varphi}^2 - 3\dot{\varphi}\dddot{\varphi} - 3i\dot{\varphi}^2\ddot{\varphi}) + (i\dddot{\varphi} - 3\dot{\varphi}\ddot{\varphi} - i\dot{\varphi}^3)i\dot{\varphi} \right)(\mathbf{x}' - \mathbf{u}') \tag{6.4}$$

şeklinde elde edilir. (6.1) denklemindeki $(\mathbf{x}' - \mathbf{u}')$ nün katsayısına ϕ_1' denilirse;

$\phi_1' = i\dot{\varphi} \neq 0$,

(6.2) denkleminde $(\mathbf{x}' - \mathbf{u}')$ nün katsayısına ϕ_2' denilirse;

$\phi_2' = i\,\ddot{\varphi} + i\,\dot{\varphi}\; i\,\dot{\varphi} = \dot{\phi}_1' + \phi_1'\phi_1'$,

(6.3) denkleminde $(\mathbf{x}' - \mathbf{u}')$ nün katsayısına ϕ_3' denilirse;

$\phi_3' = \left((i\,\dddot{\varphi} - 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}) + (i\,\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2)i\,\dot{\varphi} \right) = \dot{\phi}_2' + \phi_2'\phi_1'$,

ve (6.4) denkleminde $(\mathbf{x}' - \mathbf{u}')$ nün katsayısına ϕ_4' denilirse,

$\phi_4' = \left((i\overset{(4)}{\varphi} - 3\ddot{\varphi}^2 - 3\dot{\varphi}\dddot{\varphi} - 3i\,\dot{\varphi}^2\ddot{\varphi}) + (i\,\dddot{\varphi} - 3\dot{\varphi}\ddot{\varphi} - i\,\dot{\varphi}^3)i\,\dot{\varphi} \right) = \dot{\phi}_3' + \phi_3'\phi_1'$,

elde edilir. (Çalışmamız boyunca $\phi_n' = \dot{\phi}_{n-1}' + \phi_{n-1}'\phi_1' \neq 0$ olduğu kabul edilecektir.)

Benzer şekilde ardışık türevler alarak yüksek mertebeden ivmeler elde edilir. (n-1). mertebeden ivme n. mertebeden hıza eşittir. Dolayısıyla yüksek mertebeden ivmelere aynı zamanda yüksek mertebeden hız da denilebilir. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 6.1

Kompleks düzlemde E/E'; φ dönme açılı, 1-parametreli düzlemsel hareket olsun.

$\phi_1' = i\dot{\varphi},\;\; \phi_0' = 1,\;\; \overset{(0)}{\mathbf{x}'} = \mathbf{x}'$ ve

$$\phi_n' = \dot{\phi}_{n-1}' + \phi_{n-1}'\phi_1' \neq 0 , \tag{6.5}$$

olmak üzere hareketli düzlemdeki sabit bir $\mathbf{x}$ noktasının yüksek mertebeden ivmeleri için

$$\overset{(n)}{\mathbf{x}'} = \overset{(n)}{\mathbf{u}'} + \phi_n' \left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}' \right) \tag{6.6}$$

bağıntısı mevcuttur [1], [3].

İspat

İspatımızı tümevarım yoluyla yapalım.

$n=1$, $n=2$, $n=3$ ve $n=4$ için teoremin doğru olduğu yukarıda gösterilmiştir.

Şimdi $n=k$ için (6.5) ve (6.6) eşitliklerinin doğru olduğunu kabul edip $n=k+1$ için doğruluğunu gösterelim. Yani $\phi_k' = \dot{\phi}_{k-1}' + \phi_{k-1}'\phi_1'$ ve $\overset{(k)}{\mathbf{x}'} = \overset{(k)}{\mathbf{u}'} + \phi_k' \left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}' \right)$ olsun.

Eğer bu son denklemin bir defa daha türevi alınırsa

$$\overset{(k+1)}{\mathbf{x}'} = \overset{(k+1)}{\mathbf{u}'} + \dot{\phi}_k' \left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}' \right) + \phi_k' \left(\dot{\mathbf{x}}' - \dot{\mathbf{u}}' \right)$$

elde edilir. Ayrıca (6.1) denkleminden $\dot{\mathbf{x}}'$ nın değeri bu eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\overset{(k+1)}{\mathbf{x}'} = \overset{(k+1)}{\mathbf{u}'} + \left(\dot{\phi}_k' + \phi_k'\phi_1' \right) \left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}' \right)$$

elde edilir. Buradan,

$$\overset{(k+1)}{\mathbf{x}'} = \overset{(k+1)}{\mathbf{u}'} + \phi_{k+1}' \left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}' \right)$$

olduğu görülür. □

6.2 Yüksek Mertebeden Poller

$\mathbf{p}' = \mathbf{p}_1'$ dönme polünü sürüklenme hızının sıfır olmasıyla yani, X noktası E-düzleminde sabit olmak üzere $\mathbf{X}_\mathbf{f}' = \dot{\mathbf{x}}' = 0$ olmasıyla tarif etmiştik. Buradan ($\phi_n' \neq 0$ olduğu göz önünde bulundurulursa)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{p}_1' = \mathbf{u}' - \frac{\dot{\mathbf{u}}'}{\phi_1'}$$

olduğunu biliyoruz.

$\mathbf{p}_2'$ ivme polü ise, $\ddot{\mathbf{x}}' = 0$

veya

$$\ddot{\mathbf{x}}' = \ddot{\mathbf{u}}' + \left(i\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2\right)\left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}'\right) = 0$$

olmak üzere

$$\mathbf{x}' = \mathbf{u}' - \frac{\ddot{\mathbf{u}}'}{i\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\mathbf{p}_2'$ ivme polüne

$$\mathbf{p}_2' = \mathbf{u}' - \frac{\ddot{\mathbf{u}}'}{\phi_2'}$$

kompleks sayısı karşılık gelir.

Benzer şekilde $(n-1)$. mertebeden ivmenin sıfır olduğu $\mathbf{p}_\mathbf{n}'$ noktasına $(\mathbf{n}\text{-}\mathbf{1})$. **mertebeden ivme polü (yada $\mathbf{n}$. mertebeden hız polü)** denir ve bu pol $\overset{(n)}{\mathbf{x}'} = 0$ olmak üzere

$$\mathbf{p}_\mathbf{n}' = \mathbf{u}' - \frac{\overset{(n)}{\mathbf{u}'}}{\phi_n'} \tag{6.7}$$

elde edilir. Buradan $\overset{(n)}{\mathbf{u}'}$ nin değeri bulunup (6.6) denkleminde yerine yazılırsa, (6.6) denklemi pol noktaları cinsinden

$$\overset{(n)}{\mathbf{x}'} = \phi_n'\left(\mathbf{x}' - \mathbf{p}_\mathbf{n}'\right) \tag{6.8}$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir.

Şimdi, (6.7) denklemi ile verilen, düzlemsel hareket esnasında E' düzleminde ki yüksek mertebeden ivme polü ve (6.8) denklemi ile verilen yüksek mertebeden hız vektörünün E hareketli düzleminde ki karşılıklarını ifade edelim:

$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1$ dönme polünü sürüklenme hızının sıfır olmasıyla yani, X noktası E-düzleminde sabit olmak üzere $\mathbf{X}_\mathbf{f} = 0$ olmasıyla tarif etmiştik.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X_f} = \dot{\mathbf{u}}' e^{-i\varphi} + i\dot{\varphi}\mathbf{x}$$

olmak üzere

$$\dot{\mathbf{u}}' e^{-i\varphi} + i\dot{\varphi}\mathbf{x} = 0$$

eşitliğinden,

$$\mathbf{x} = \mathbf{p_1} = \frac{-\dot{\mathbf{u}}'}{\phi_1'} e^{-i\varphi}$$

elde edilir. $\mathbf{p_2}$ ivme polü ise $\ddot{x} = 0$ olmasıyla elde edilir.

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}}' e^{-i\varphi} = \ddot{\mathbf{u}}' e^{-i\varphi} + \left(i\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2\right)\left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}'\right) e^{-i\varphi}$$

ve $\mathbf{x} = \left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}'\right) e^{-i\varphi}$ olduğundan, $\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}}' e^{-i\varphi} = \ddot{\mathbf{u}}' e^{-i\varphi} + \phi_2' \mathbf{x}$ bulunur. Buradan,

$$\mathbf{x} = \mathbf{p_2} = \frac{-\ddot{\mathbf{u}}'}{\phi_2'} e^{-i\varphi}$$

elde edilir. Benzer şekilde $(n-1)$. mertebeden ivmenin sıfır olduğu $\mathbf{p_n}$ noktası yada $(n-1)$. mertebeden ivme polünü $\overset{(n)}{\mathbf{x}} = 0$ olmasıyla elde edilir:

$$\overset{(n)}{\mathbf{x}} = \overset{(n)}{\mathbf{x}'} e^{-i\varphi} = \overset{(n)}{\mathbf{u}'} e^{-i\varphi} + \phi_n' \left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}'\right) e^{-i\varphi}$$

ve $\mathbf{x} = \left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}'\right) e^{-i\varphi}$ olduğundan, $\overset{(n)}{\mathbf{x}} = \overset{(n)}{\mathbf{u}'} e^{-i\varphi} + \phi_n' \mathbf{x}$ bulunur. Buradan,

$$\mathbf{x} = \mathbf{p_n} = -\frac{\overset{(n)}{\mathbf{u}'}}{\phi_n'} e^{-i\varphi} \qquad (6.9)$$

elde edilir. Böylece (4.13) formülünün genelleştirilmesinde (6.8) yerine

$$\overset{(n)}{\mathbf{x}} = \phi_n' \left(\mathbf{x} - \mathbf{p_n}\right) \qquad (6.10)$$

ifadesi yazılabilir. □

(6.8) bağıntısındaki kompleks büyüklüklerimizin mutlak değerini alır, X noktasının $\mathbf{P_n}$ polünden uzaklığının $\left|\mathbf{x}' - \mathbf{p_n}'\right|$ ile ifade edilirse aşağıdaki teoremi ispatsız verebiliriz:

Teorem 6.2

Yüksek mertebeden ivmelerin mutlak değeri, X noktasının ilgili mertebeden ivme polünden uzaklığı ile orantılıdır ve merkezleri bu pol olan daireler üzerinde aynı değeri alır. □

(6.8) de $\mathbf{P}'\mathbf{X}'$ *vektörüne karşılık gelen* $\mathbf{x}' - \mathbf{p}'_\mathbf{n}$ *kompleks sayısı* X *noktasından bağımsız olan* ϕ'_n *kompleks sayısı ile çarpıldığı için aşağıdaki teorem verilebilir:*

Teorem 6.3

Her t anında hareketli düzlemin bütün X noktalarının yüksek mertebeden ivme vektörleri pol ışınları ile aynı açıyı teşkil ederler.

İspat:

Kompleks bir çarpan ile çarpma koordinat sisteminin ilk durumundan bir dönme-uzama (dönme+uzama) sına karşılık gelir.

Her bir X noktasında bu noktaya ait yüksek mertebeden ivme vektörlerini oluşturur ve bu vektörleri X noktaları etrafında sabit açı kadar döndürürsek, bu takdirde dönmüş olan bu vektörlerin hepsi, ilgili mertebeden ivme polünü gösterir. □

Özel Durumlar

(6.1) ve (6.2) teoremlerini $n=1$ ve $n=2$ özel durumları için açıklayalım:

$i)$ $n=1$ için $\phi'_1 = i\dot{\varphi}$ tam sanal olup hızlar pol ışınlarına diktirler.

$ii)$ $n=2$ için hareketli düzlemimizin X noktalarının 1.mertebeden ivmeleri elde edilir. Bu ivmelerin dağılımı aşağıdaki şekilde verilmiştir:

$a)$ $\mathbf{p}_2$ ivme polünde ivme sıfırdır.

$b)$ $\mathbf{p}_2$ merkezli daireler üzerindeki ivmeler aynı mutlak değere sahip ve dairenin yarıçapı ile orantılıdır.

$c)$ İvmelerin $\mathbf{P}_2\mathbf{X}$ pol ışını ile teşkil ettikleri ψ açısı $\phi'_2 = i\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2$ kompleks sayısının argümenti ile tanımlanır ve genel olarak t zamanına bağlı olup

$$\tan\psi = -\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\dot{\varphi}}\right)$$

ile verilir [1], [3].

BÖLÜM 7

KOMPLEKS DÜZLEMDE TERS HAREKETİN YÜKSEK MERTEBEDEN İVMELERİ VE İVME POLLERİ

7.1 Ters Hareket Altında Yüksek Mertebeden İvmeler

Bir parametreli bir $B = E / E'$ hareketinin $B' = E' / E$ ters hareketi bölüm3 de

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{x}' e^{-i\varphi} \tag{7.1}$$

denklemi ile tarif edilmişti. $B' = E' / E$ ters hareketi esnasında X, E'-düzleminde sabit bir nokta olsun. Bu noktayı kompleks $\mathbf{x}'$ sayısı ile gösterelim. (7.1) denkleminden t'ye göre ardışık türevler alarak E-düzlemine göre yüksek mertebeden ivmeler (yüksek mertebeden hızlar) bulunur. Buna (7.1) denkleminin türevini alırsak

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{u}} - i\dot{\varphi}\mathbf{x}' e^{-i\varphi} = \dot{\mathbf{u}} - i\dot{\varphi}\left(\mathbf{x} - \mathbf{u}\right) \tag{7.2}$$

hızını, bu ifadenin t ye göre türevini alarak X noktasının

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{u}} - i\ddot{\varphi}\left(\mathbf{x} - \mathbf{u}\right) - i\dot{\varphi}\left(\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{u}}\right)$$

ivmesini buluruz. (7.2) denklemindeki $\dot{\mathbf{x}}$ nın değerini bu eşitlikte yerine yazarsak

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{u}} + \left(-i\ddot{\varphi} + (-i\dot{\varphi})(-i\dot{\varphi})\right)\left(\mathbf{x} - \mathbf{u}\right) \tag{7.3}$$

bulunur. (7.3) eşitliğinin bir defa daha türevini alarak 3.mertebeden hız (2. mertebeden ivme) vektörü için

$$\dddot{\mathbf{x}} = \dddot{\mathbf{u}} - \left(i\dddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\right)\left(\mathbf{x} - \mathbf{u}\right) - \left(i\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2\right)\left(\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{u}}\right)$$

elde edilir. Eğer (7.2) denklemindeki $\dot{\mathbf{x}}$ nın değerini bu eşitlikte yerine yazarsak,

$$\dddot{\mathbf{x}}' = \dddot{\mathbf{u}}' + \left((-i\dddot{\varphi} - 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}) + (-i\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2)(-i\dot{\varphi}) \right)(\mathbf{x} - \mathbf{u}) \tag{7.4}$$

elde edilir. (7.4) ifadesinin bir defa daha türevini alarak 4.mertebeden hız (3. mertebeden ivme) vektörü

$$\overset{(4)}{\mathbf{x}} = \overset{(4)}{\mathbf{u}} + \left((-i\overset{(4)}{\varphi} - 3\ddot{\varphi}^2 - 3\dot{\varphi}\dddot{\varphi} + 3i\dot{\varphi}^2\ddot{\varphi}) + (-i\dddot{\varphi} - 3\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + i\dot{\varphi}^3)(-i\dot{\varphi}) \right)(\mathbf{x} - \mathbf{u}) \tag{7.5}$$

şeklinde elde edilir. (7.2) denklemindeki $(\mathbf{x} - \mathbf{u})$ nün katsayısına ϕ_1 denilirse;

$\phi_1 = -i\dot{\varphi} \neq 0$,

(7.3) denkleminde $(\mathbf{x} - \mathbf{u})$ nün katsayısına ϕ_2 denilirse;

$\phi_2 = -i\,\ddot{\varphi} + (-i\,\dot{\varphi})(-i\,\dot{\varphi}) = \dot{\phi}_1 + \phi_1\phi_1$,

(7.4) denkleminde $(\mathbf{x} - \mathbf{u})$ nün katsayısına ϕ_3 denilirse;

$\phi_3 = \left((-i\,\dddot{\varphi} - 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}) + (-i\,\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2)(-i\,\dot{\varphi}) \right) = \dot{\phi}_2 + \phi_2\phi_1$,

ve (7.5) denkleminde $(\mathbf{x} - \mathbf{u})$ nün katsayısına ϕ_4 denilirse,

$$\phi_4 = \left((-i\,\overset{(4)}{\varphi} - 3\ddot{\varphi}^2 - 3\dot{\varphi}\dddot{\varphi} + 3i\,\dot{\varphi}^2\ddot{\varphi}) + (-i\,\dddot{\varphi} - 3\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + i\,\dot{\varphi}^3)(-i\,\dot{\varphi}) \right) = \dot{\phi}_3 + \phi_3\phi_1,$$

elde edilir. (Çalışmamız boyunca $\phi_n = \dot{\phi}_{n-1} + \phi_{n-1}\phi_1 \neq 0$ olduğu kabul edilecektir.)

Benzer şekilde ardışık türevler alarak yüksek mertebeden ivmeler elde edilir. (n-1). mertebeden ivme n. mertebeden hıza eşittir. Dolayısıyla yüksek mertebeden ivmelere aynı zamanda yüksek mertebeden hız da denilebilir. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 7.1

$H' = E'/E$ ters hareketi esnasında; $-\varphi$ dönme açılı, 1-parametreli düzlemsel ters hareket olsun.

$\phi_1 = -i\dot{\varphi},\ \ \phi_0 = 1,\ \ \overset{(0)}{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$ ve

$$\phi_n = \dot{\phi}_{n-1} + \phi_{n-1}\phi_1 \neq 0, \tag{7.6}$$

olmak üzere sabit düzlemdeki, sabit bir $\mathbf{x}'$ noktasının yüksek mertebeden ivmeleri için

$$\overset{(n)}{\mathbf{x}} = \overset{(n)}{\mathbf{u}} + \phi_n\left(\mathbf{x}-\mathbf{u}\right) \tag{7.7}$$

bağıntısı mevcuttur [1], [3].

İspat

İspatımızı tümevarım yoluyla yapalım.

$n=1$, $n=2$, $n=3$ ve $n=4$ için teoremin doğru olduğu yukarıda gösterilmiştir.

Şimdi $n=k$ için (7.6) ve (7.7) eşitliklerinin doğru olduğunu kabul edip $n=k+1$ için doğruluğunu gösterelim. Yani $\phi_k = \dot{\phi}_{k-1} + \phi_{k-1}\phi_1$ ve $\overset{(k)}{\mathbf{x}} = \overset{(k)}{\mathbf{u}} + \phi_k\left(\mathbf{x}-\mathbf{u}\right)$ olsun.

Eğer bu son denklemin bir defa daha türevi alınırsa

$$\overset{(k+1)}{\mathbf{x}} = \overset{(k+1)}{\mathbf{u}} + \dot{\phi}_k\left(\mathbf{x}-\mathbf{u}\right) + \phi_k\left(\dot{\mathbf{x}}-\dot{\mathbf{u}}\right)$$

elde edilir. Ayrıca (7.2) denkleminden $\dot{\mathbf{x}}$ nın değeri bu eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\overset{(k+1)}{\mathbf{x}} = \overset{(k+1)}{\mathbf{u}} + \left(\dot{\phi}_k + \phi_k\phi_1\right)\left(\mathbf{x}-\mathbf{u}\right)$$

elde edilir. Buradan,

$$\overset{(k+1)}{\mathbf{x}} = \overset{(k+1)}{\mathbf{u}} + \phi_{k+1}\left(\mathbf{x}-\mathbf{u}\right)$$

olduğu görülür. □

7.2 Ters Hareket Altında Yüksek Mertebeden Poller

Sürüklenme hızının sıfır olduğu yani $\dot{\mathbf{x}}=0$ olan noktaları araştıralım;

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{u}} - i\dot{\varphi}\left(\mathbf{x}-\mathbf{u}\right) = 0$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{q_1} = \mathbf{u} - \frac{\dot{\mathbf{u}}}{\phi_1}$$ ($\phi_n \neq 0$ olduğu göz önünde bulundurulursa)

$\mathbf{q_2}$ ivme polü ise, $\ddot{\mathbf{x}}=0$

veya

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{u}} + \left(-i\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2\right)\left(\mathbf{x} - \mathbf{u}\right) = 0$$

olmak üzere

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} - \frac{\ddot{\mathbf{u}}}{-i\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\mathbf{q_2}$ ivme polüne

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{u} - \frac{\ddot{\mathbf{u}}}{\phi_2}$$

kompleks sayısı karşılık gelir.

Benzer şekilde $(n-1)$. mertebeden ivmenin sıfır olduğu $\mathbf{q_n}$ noktasına $\mathbf{(n\text{-}1)}$**. mertebeden ivme polü (yada** $\mathbf{n}$**. mertebeden hız polü)** denir ve bu pol $\overset{(n)}{\mathbf{x}} = 0$ olmak üzere

$$\mathbf{q_n} = \mathbf{u} - \frac{\overset{(n)}{\mathbf{u}}}{\phi_n} \tag{7.8}$$

elde edilir. Buradan $\overset{(n)}{\mathbf{u}}$ nin değeri bulunup (7.7) denkleminde yerine yazılırsa, (7.7) denklemi pol noktaları cinsinden

$$\overset{(n)}{\mathbf{x}} = \phi_n\left(\mathbf{x} - \mathbf{q_n}\right) \tag{7.9}$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir.

$\mathbf{q_n}$ *polünün* E' *düzleminde ki karşılığı:*

$$\mathbf{q'_n} = -\frac{\overset{(n)}{\mathbf{u}}}{\phi_n} e^{i\varphi} \tag{7.10}$$

dir.

7.3 ϕ_n ve ϕ'_n Fonksiyonları Arasındaki Bağıntı

$n=1$, $n=2$, $n=3$ için doğrudan aşagıdaki bağıntılar bulunur:

$\phi_n = \overline{\phi'_n}$, $\phi'_n = \overline{\phi_n}$. (7.11)

Şimdi bu eşitliklerin n için doğru olduklarını kabul edip $(n+1)$ için ispat edelim:

$\phi_n = \overline{\phi'_n}$ olsun. Buradan bir defa daha türev alınırsa

$$\phi_{n+1} = \dot{\phi}_n + \phi_n \phi_1 = \overline{\dot{\phi}'_n} + \overline{\phi'_n}\,\overline{\phi'_1} = \overline{\phi'_{n+1}}$$

elde edilir. Böylece (7.11) denkleminin doğruluğu ispat edilmiş olur.

Şimdi $e^{i\varphi}$ ve $e^{-i\varphi}$ fonksiyonlarının t zamanına göre ardışık türevlerini alalım:

$$\frac{d}{dt} e^{i\varphi} = \phi'_1 e^{i\varphi}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} e^{i\varphi} = \left(\dot{\phi}'_1 + \phi'^2_1\right) e^{i\varphi} = \phi'_2 e^{i\varphi}$$

ve genel olarak

$$\frac{d^n}{dt^n} e^{i\varphi} = \phi'_n e^{i\varphi} \tag{7.12}$$

yazılabilir. Benzer şekilde,

$$\frac{d^n}{dt^n} e^{-i\varphi} = \phi_n e^{-i\varphi} \tag{7.13}$$

elde edilir.

(7.12) ve (7.13) denklemlerinden

$$\phi'_n = e^{-i\varphi} \frac{d^n}{dt^n} e^{i\varphi} \quad \text{ve} \quad \phi_n = e^{i\varphi} \frac{d^n}{dt^n} e^{-i\varphi}$$

yazılabilir.

$\frac{d^n}{dt^n}(e^{i\varphi} e^{-i\varphi}) = 0$ olduğundan ve Leibniz formülü gereğince $\left(\frac{d^n}{dt^n}(u,v) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \overset{(k)}{u} \overset{(n-k)}{v} \right)$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \phi'_k \phi_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \phi_k \phi'_{n-k} = 0$$

elde edilir.

7.4 P_n ve Q_n İvme Polleri Arasındaki Bağıntı

(6.7), (6.8), (7.8) ve (7.10) denklemlerinden

$$\mathbf{p_n} = -\frac{\overset{(n)}{\mathbf{u}'}}{\phi_n'} e^{-i\varphi}, \qquad \mathbf{p_n'} = \mathbf{u}' - \frac{\overset{(n)}{\mathbf{u}'}}{\phi_n'} \tag{7.14}$$

$$\mathbf{q_n} = \mathbf{u} - \frac{\overset{(n)}{\mathbf{u}}}{\phi_n}, \qquad \mathbf{q_n'} = -\frac{\overset{(n)}{\mathbf{u}}}{\phi_n} e^{i\varphi} \tag{7.15}$$

yazılabilir.

(7.13) ve Leibniz formülü yardımıyla

$$\overset{(n)}{u'} = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \overset{(k)}{u}\, \phi_{n-k}' e^{-i\varphi}$$

elde edilir. (7.15) in ikinci formülü kullanılırsa

$\overset{(n)}{u'} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q_k' \phi_k \phi_{n-k}'$ ve $q_0 = 0$ ve $q_0' = u'$ olduğundan $\overset{(n)}{u'}$ için

$$\overset{(n)}{u'} = u'\phi_n' + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} q_k' \phi_k \phi_{n-k}' \tag{7.16}$$

ifadesi yazılabilir.

(7.14) ün ikinci formülünden ve (7.16) dan,

$$\mathbf{p_n'} = -\frac{1}{\phi_n'} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} q_k' \phi_k \phi_{n-k}' \tag{7.17}$$

yazılabilir. Benzer şekilde,

$$\mathbf{p_n} = -\frac{1}{\phi_n'} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} q_k \phi_k \phi_{n-k}', \tag{7.18}$$

$$q_{\mathbf{n}} = -\frac{1}{\phi_n'} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p_k \phi_k' \phi_{n-k} \tag{7.19}$$

ve

$$q'_{\mathbf{n}} = -\frac{1}{\phi_n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} p'_k \, \phi'_k \phi_{n-k} \tag{7.20}$$

denklemleri elde edilir. Böylece $B = E / E'$ hareketinin $B' = E' / E$ ters hareketinin P_n ve Q_n ivme polleri arasındaki bağıntı elde edilmiş olur.

BÖLÜM 8

KOMPLEKS DÜZLEMDE PARAMETRE OLARAK DÖNME AÇISI

$B = E / E'$, 1-parametreli düzlemsel hareketin $t \in I$ parametresi yerine, parametre olarak φ açısının seçilmesiyle bölüm6 ve bölüm7 da verilen denklemlerde büyük sadelikler elde edilir. Bu takdirde φ dönme açısı hareketimizin bir doğal parametresi rolünü almış olur.

$\phi_1' = i\dot{\varphi}$, $\phi_1 = -i\dot{\varphi}$ olmak üzere, $\varphi = t$ için $\dot{\varphi} = 1$ olduğundan,

$$\phi_1' = i$$

elde edilir. Benzer şekilde işlemlere devam edilirse

$$\phi_2' = -1 = i^2$$

$$\phi_3' = i^3$$

ve

$$\phi_n' = i^n \tag{8.1}$$

olduğu görülür. Buna göre $\mathbf{p_n'}$ ivme polü için, (6.7) denkleminden

$$\mathbf{p_n'} = \mathbf{u}' - \frac{\overset{(n)}{\mathbf{u}'}}{\phi_n'} = \mathbf{u}' - i^{-n}\overset{(n)}{\mathbf{u}'}$$

veya

$$\mathbf{p_n'} = \mathbf{u}' + i^{2-n}\overset{(n)}{\mathbf{u}'} \tag{8.2}$$

yazılabilir. $\mathbf{p_n}$ ivme polü için ise, (6.9) denkleminden

$$\mathbf{p_n} = -\frac{\overset{(n)}{\mathbf{u}'}}{\phi'_n} e^{-i\varphi} = -i^{-n} \overset{(n)}{\mathbf{u}'} e^{-i\varphi} \tag{8.3}$$

ifadeleri elde edilir. Böylece $\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{x}'}$ için

$$\overset{(n)}{\mathbf{x}'} = \overset{(n)}{\mathbf{u}'} + i^n \left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}'\right) \tag{8.4}$$

yazılabilir. Bu ifadeyi $\mathbf{p}'_\mathbf{n}$ cinsinden tekrar düzenlersek

$$\overset{(n)}{\mathbf{x}'} = i^n \left(\mathbf{x}' - \mathbf{p}'_\mathbf{n}\right) \tag{8.5}$$

elde edilir. Buradan

$$\overset{(n)}{\mathbf{x}'} = i^{n-2} \left(\mathbf{p}'_\mathbf{n} - \mathbf{x}'\right)$$

veya

$$\mathbf{p}'_\mathbf{n} = \mathbf{x}' + i^{2-n} \overset{(n)}{\mathbf{x}'} \tag{8.6}$$

bulunur.

Bir vektörü i ile çarpmanın, başlangıç etrafında $+\pi/2$ açısı kadar dönmeye karşılık geldiğini düşünürsek aşağıdaki teoremi verilebilir:

Teorem 8.1

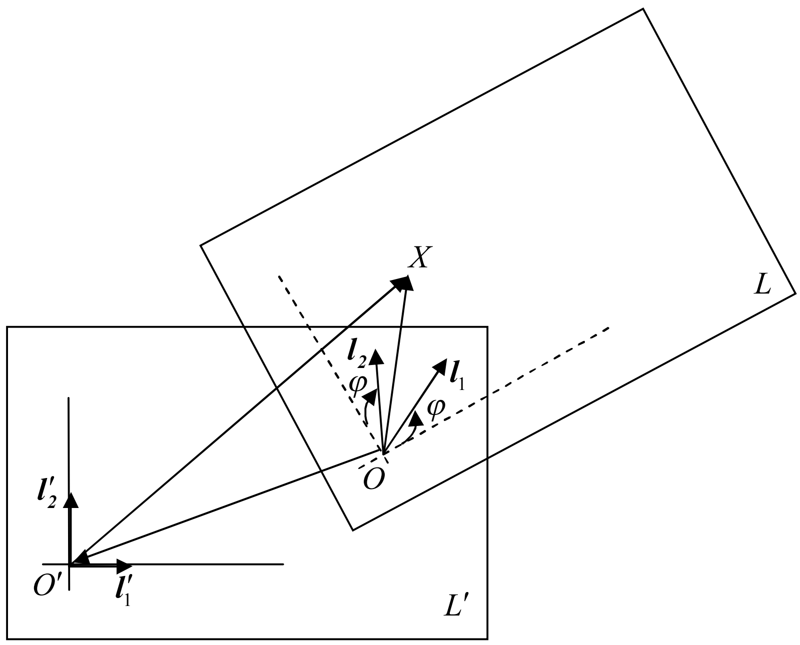
Dönme açısı parametre olarak seçilen bir 1-parametreli düzlemsel kompleks hareket esnasında hareketli düzlemin herhangi bir sabit X noktasına $\left(2-n\right)\pi/2$ açısı kadar döndürülmüş n. mertebeden $\overset{(n)}{\mathbf{x}'}$ türev vektörü eklenirse, bu toplam vektörünün uç noktası $\left(n-1\right)$. mertebeden $\mathbf{p}'_\mathbf{n}$ ivme polüne karşılık gelir [1].

BÖLÜM 9

LORENTZ DÜZLEMİNDE 1- PARAMETRELİ DÜZLEMSEL HAREKET

Bu bölümde, Lorentz düzleminde 1-parametreli düzlemsel hareket tanımlandıktan sonra, bu hareketin hızları, ivmeleri ve pol noktalarını elde edip, aralarındaki ilişki verilecektir.

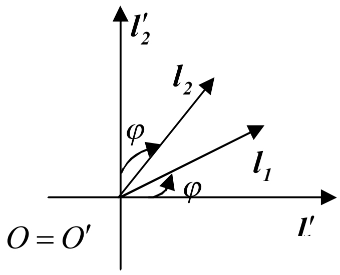
L ve L' $\left(L = L' = L^2\right)$ sırası ile hareketli ve sabit Lorentz düzlemleri olsun. Bu düzlemlerde tesbit edilen sırası ile $\{\mathrm{O}; \boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2\}$ hareketli koordinat sistemini $\{O'; \boldsymbol{l}'_1, \boldsymbol{l}'_2\}$ sabit koordinat sistemi üzerinde hareket ettirelim.



Şekil 9. 1 Lorentz düzleminde 1-parametreli düzlemsel hareket

$$\boldsymbol{OO'} = \boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{l_1} + u_2\boldsymbol{l_2} \tag{9.1}$$

yazılabilir. Eğer, bu hareket esnasında $l_i = l_i(t),\ u_i = u_i(t),\ \varphi = \varphi(t)\ \ (1 \le i \le 2)$ fonksiyonları t nin birer diferensiyellenebilir fonksiyonları ise bu harekete $\{O;\boldsymbol{l_1},\boldsymbol{l_2}\}$ hareketli koordinat sisteminin $\{O';\boldsymbol{l'_1},\boldsymbol{l'_2}\}$ sabit koordinat sistemine göre ve dolayısıyla L-düleminin L'-düzlemine göre hareketine **Lorentz düzleminde 1-parametreli düzlemsel hareket** denir ve $B = L/L'$ ile gösterilir, [3]. Buradaki "t" parametresi genel olarak **zaman** parametresi olarak alınır.



Şekil 9. 2 Lorentz düzleminde başlangıç noktaları çakışık olan koordinat sistemleri

$O = O'$ olduğu zaman, $\boldsymbol{l_1}$ ve $\boldsymbol{l_2}$ vektörleri, $\boldsymbol{l'_1}$ ve $\boldsymbol{l'_2}$ doğrultularında bileşenlerine ayrılabilir ve buradan

$$\begin{aligned} \boldsymbol{l_1} &= \cosh\varphi\ \boldsymbol{l'_1} + \sinh\varphi\ \boldsymbol{l'_2} \\ \boldsymbol{l_2} &= \sinh\varphi\ \boldsymbol{l'_1} + \cosh\varphi\ \boldsymbol{l'_2} \end{aligned} \tag{9.2}$$

eşitlikleri elde edilir, (Şekil 9. 2).

Düzlemin bir X noktası hem hareketli sistemdeki (x_1, x_2) koordinatları ve hem de sabit sistemdeki (x'_1, x'_2) koordinatları yardımıyla göz önüne alınabilir. Buna göre her iki sistemde, X noktasına ait konum vektörleri için

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{OX} = x_1\boldsymbol{l_1} + x_2\boldsymbol{l_2}$$

$$\boldsymbol{x'} = \boldsymbol{O'X} = x'_1\boldsymbol{l'_1} + x'_2\boldsymbol{l'_2}$$

yazılabilir. Böylece

$$\mathbf{O'X} = \mathbf{O'O} + \mathbf{OX} = -\mathbf{OO'} + \mathbf{OX}$$

veya

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{u} = (x_1 - u_1)\boldsymbol{l_1} + (x_2 - u_2)\boldsymbol{l_2} \tag{9.3}$$

vektörel denklemi elde edilir. Bu denkleme 1-parametreli düzlemsel hareketin **vektörel denklemi** denir. Buradan,

$$x_1'\boldsymbol{l_1'} + x_2'\boldsymbol{l_2'} = (x_1 - u_1)\boldsymbol{l_1} + (x_2 - u_2)\boldsymbol{l_2}$$

eşitliğinin $\boldsymbol{l_1'}$ ve $\boldsymbol{l_2'}$ ile iç-çarpımı sonucunda,

$$\begin{cases} x_1' = (x_1 - u_1)\cosh\varphi + (x_2 - u_2)\sinh\varphi \\ x_2' = (x_1 - u_1)\sinh\varphi + (x_2 - u_2)\cosh\varphi \end{cases}$$

veya

$$\begin{cases} x_1' = (x_1\cosh\varphi + x_2\sinh\varphi) + (-u_1\cosh\varphi - u_2\sinh\varphi) \\ x_2' = (x_1\sinh\varphi + x_2\cosh\varphi) + (-u_1\sinh\varphi - u_2\cosh\varphi) \end{cases} \tag{9.4}$$

bulunur. Bu ifadeye $B = L / L'$ hareketinin kartezyen denklemi denir. Bu son eşitlik

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

veya

$$X' = AX + C$$

şeklinde matris formunda da gösterilebilir.

Türev Denklemleri

Hareket esnasında bir $X \in L$ noktasının her iki L ve L'-düzlemlerine göre hızlarını araştırmak için önce hareketimizin türev denklemlerini teşkil edeceğiz. Bunun için (9.2) denklemlerinin, $\boldsymbol{l_1'}$, $\boldsymbol{l_2'}$ vektörlerini sabit kabul ederek, t zamanına göre türev alınırsa,

$$\frac{d\boldsymbol{l_1}}{dt} = \dot{\boldsymbol{l}}_1 = \dot{\varphi}\sinh\varphi\boldsymbol{l_1'} + \dot{\varphi}\cosh\varphi\boldsymbol{l_2'} = \dot{\varphi}\left(\sinh\varphi\boldsymbol{l_1'} + \cosh\varphi\boldsymbol{l_2'}\right)$$

$$\frac{d\boldsymbol{l_2}}{dt} = \dot{\boldsymbol{l}}_2 = \dot{\varphi}\cosh\varphi\boldsymbol{l_1'} + \dot{\varphi}\sinh\varphi\boldsymbol{l_2'} = \dot{\varphi}\left(\cosh\varphi\boldsymbol{l_1'} + \sinh\varphi\boldsymbol{l_2'}\right)$$

bulunur. Buradan kısaca

$$\dot{\boldsymbol{l}}_1 = \dot{\varphi}\boldsymbol{l}_2 \;,\; \dot{\boldsymbol{l}}_2 = \dot{\varphi}\boldsymbol{l}_1 \tag{9.5}$$

yazılabilir.

Benzer şekilde (9.1) denkleminin t ye göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \dot{\boldsymbol{u}} = \dot{u}_1\boldsymbol{l}_1 + u_1\dot{\boldsymbol{l}}_1 + \dot{u}_2\boldsymbol{l}_2 + u_2\dot{\boldsymbol{l}}_2$$

elde edilir. $\dot{\boldsymbol{l}}_1$ ve $\dot{\boldsymbol{l}}_2$ nın (9.5) deki değerleri burada yerine yazılırsa

$$\dot{\boldsymbol{u}} = \left(\dot{u}_1 + u_2\dot{\varphi}\right)\boldsymbol{l}_1 + \left(\dot{u}_2 + u_1\dot{\varphi}\right)\boldsymbol{l}_2 \tag{9.6}$$

bulunur. (9.5) ve (9.6) denklemlerine $B = L/L^{'}$ hareketinin **türev denklemleri** denir.

9.1 Hızlar ve Hızların Terkibi

L-düzlemi L'-düzlemine göre 1-parametreli hareket yaparken, bir X noktası da hareketli L-düzlemindeki yerini t zamanı ile değiştirsin. Bu durumda, bu iki hareket esnasında noktanın hızlarının nasıl terkip edildiğini araştıracağız.

Tanım 9.1

X noktasının L**-**düzleminde hareket ederken sahip olduğu hız vektörüne, yani X noktası L-deki yörüngesini çizerken sahip olduğu vektörel hıza X noktasının **relatif (izafi) hızı** denir ve $\mathbf{V_r}$ ile gösterilir. Bu hız

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{l}_1 + x_2\boldsymbol{l}_2$$

denkleminden $\boldsymbol{l}_1$ ve $\boldsymbol{l}_2$ yi sabit tutup türev alarak

$$\boldsymbol{V}_r = \dot{x}_1\boldsymbol{l}_1 + \dot{x}_2\boldsymbol{l}_2 \tag{9.7}$$

şeklinde bulunur. Eğer X noktası E**-**de sabit ise $\mathbf{V_r}$ relatif hızı sıfırdır [4].

Tanım 9.2

X noktasının L'-düzlemine göre sahip olduğu hız vektörüne X noktasının **mutlak hızı** denir ve $\mathbf{V_a}$ ile gösterilir. (9.3) denkleminin t ye göre türevini alırsak $\mathbf{V_a}$ için aşağıdaki ifade bulunur:

$$\boldsymbol{V_a} = \dot{\boldsymbol{x}}' = (\dot{x}_1 - \dot{u}_1)\boldsymbol{l_1} + (x_1 - u_1)\dot{\boldsymbol{l}}_1 + (\dot{x}_2 - \dot{u}_2)\boldsymbol{l_2} + (x_2 - u_2)\dot{\boldsymbol{l}}_2 .$$

Burada $\dot{\boldsymbol{l}}_1$ ve $\dot{\boldsymbol{l}}_2$ nın (9.5) deki değerleri dikkate alınırsa

$$\boldsymbol{V_a} = \{-\dot{u}_1 - (u_2 - x_2)\dot{\varphi}\}\boldsymbol{l_1} + \{-\dot{u}_2 - (u_1 - x_1)\dot{\varphi}\}\boldsymbol{l_2} + \dot{x}_1\boldsymbol{e_1} + \dot{x}_2\boldsymbol{e_2}$$

veya

$$\boldsymbol{V_a} = \{-\dot{u}_1 - (u_2 - x_2)\dot{\varphi}\}\boldsymbol{l_1} + \{-\dot{u}_2 - (u_1 - x_1)\dot{\varphi}\}\boldsymbol{l_2} + \boldsymbol{V_r}$$

elde edilir. Burada

$$\boldsymbol{V_f} = \{-\dot{u}_1 - (u_2 - x_2)\dot{\varphi}\}\boldsymbol{l_1} + \{-\dot{u}_2 - (u_1 - x_1)\dot{\varphi}\}\boldsymbol{l_2} \qquad (9.8)$$

vektörüne X noktasının **sürüklenme hız vektörü** denir [4].

O halde hızların terkibine ait şu teorem verilebilir:

Teorem 9.1

$B = L / L'$; Lorentz düzleminde 1-parametreli düzlemsel hareketi esnasında eğer $X \in L$ noktası her iki sisteme göre hareketli ise $X \in L$ noktasının hız vektörleri arasında

$$\mathbf{V_a} = \mathbf{V_f} + \mathbf{V_r} \qquad (9.9)$$

bağıntısı vardır [4].

Tanım 9.3

Dönme açısının $\dfrac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$ türevine $B = L / L'$ hareketinin **açısal hızı** denir.

Bundan sonra sırf öteleme hareketinden kaçınmak için $\dot{\varphi} \neq 0$ kabul edeceğiz.

9.2 Dönme Polü ve Pol Eğrileri

Şimdi $B = L / L'$ hareketinin her t anında sürüklenme hızı sıfır olan noktaları araştıralım:

Böyle noktalar, t anında, yalnız hareketli L-düzleminde değil aynı zamanda sabit L'-düzleminde de sabit bulunmak zorundadır. O halde

$$\mathbf{V_f} = \mathbf{0}$$

olacağından (9.8) denkleminden

$$\dot{u}_1 + (u_2 - x_2)\dot{\varphi} = 0 \ , \ \dot{u}_2 + (u_1 - x_1)\dot{\varphi} = 0$$

elde edilir. $\dot{\varphi} \neq 0$ olduğuna göre bu iki denklem her zaman tek türlü çözülebilir. Bu çözümler p_1 ve p_2 olmak üzere,

$$\begin{aligned} p_1 = x_1 = u_1 + \frac{\dot{u}_2}{\dot{\varphi}} = u_1 + \frac{du_2}{d\varphi} \\ p_2 = x_2 = u_2 + \frac{\dot{u}_1}{\dot{\varphi}} = u_2 + \frac{du_1}{d\varphi} \end{aligned} \qquad (9.10)$$

bulunur [4].

Tanım 9.4

$$\boldsymbol{OP} = \boldsymbol{p} = p_1 \boldsymbol{l_1} + p_2 \boldsymbol{l_2}$$

yer vektörüne karşılık gelen $P = (p_1, p_2)$ noktasına $B = L / L'$ hareketinin t anındaki **pol(kutup) noktası**, **dönme polü** veya **ani dönme merkezi** denir.

Bundan dolayı şu teorem verilebilir:

Teorem 9.2

Açısal hızı sıfır olmayan bir 1-parametreli düzlemsel hareket esnasında, her t anında sürüklenme hızı sıfır olan yani her iki düzlemde de sabit kalan bir tek nokta (pol noktası) vardır. □

P pol noktası yardımı ile herhangi bir X noktasının $\mathbf{V_f}$ sürüklenme hızı aşağıdaki şekilde de yazılabilir:

Bunun için (9.10) denkleminden

$$\dot{u}_1 = (p_2 - u_2)\dot{\varphi} \quad , \quad \dot{u}_2 = (p_1 - u_1)\dot{\varphi}$$

ifadeleri hesaplanır ve (9.8) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\boldsymbol{V_f} = \{(x_2 - p_2)\boldsymbol{l_1} + (x_1 - p_1)\boldsymbol{l_2}\}\dot{\varphi} \tag{9.11}$$

elde edilir.

X noktasının sürüklenme hızının bu son ifadesi kullanılarak aşağıdaki önemli sonuç ve teoremler verilebilir:

Sonuç 9.1

P polünden X noktasına giden pol ışınının

$$\boldsymbol{PX} = (x_1 - p_1)\boldsymbol{l_1} + (x_2 - p_2)\boldsymbol{l_2}$$

vektörü $\mathbf{V_f}$ ye Lorentz anlamında diktir; çünkü

$$\langle \mathbf{PX}, \mathbf{V_f} \rangle = \{(x_2 - p_2)(x_1 - p_1) - (x_1 - p_1)(x_2 - p_2)\}\dot{\varphi} = 0$$

dır. Yani pol ışını, hareketin her t anında sürüklenme hızına Lorentz anlamında diktir.

Sonuç 9.2

$\mathbf{V_f}$ vektörünün uzunluğu için şu bağıntı vardır:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{V_f}\| &= \sqrt{\left|(x_2 - p_2)^2 - (x_1 - p_1)^2\right|}\,|\dot{\varphi}| \\ &= \|\mathbf{PX}\|\,|\dot{\varphi}|\end{aligned}$$

Teorem 9.3

$B = L / L'$; Lorentz anlamında 1-parametreli düzlemsel hareket esnasında hareketli L-düzleminin her X noktası, t anında, P (pol noktası) merkezli ve $\dot{\varphi}$ açısal hızlı bir Lorentz dönme hareketi yapar.

Teorem 9.4

$B = L / L'$; Lorentz anlamında 1-parametreli düzlemsel hareket t anında, hareketli L-düzleminin P ani dönme polü etrafında $\dot{\varphi}$ açısal hızı ile dönmesinden oluşur.

Teorem 9.5

$B = L / L'$; 1-parametreli düzlemsel hareket esnasında L-düzleminin X noktaları, L'-düzleminde yörünge normalleri, P dönme polünden geçen, yörüngeler çizerler.

Tanım 9.5

Her t anında bir P dönme polü olacağından B hareketi esnasında P pol noktası her iki L ve L'-düzlemlerinde çeşitli konumlarda bulunur. P noktasının hareketli L-düzlemindeki yeri genel olarak bir eğridir. Bu eğriye **hareketli pol eğrisi** denir ve (P) ile gösterilir. P noktasının L'-düzlemindeki geometrik yerine ise **sabit pol eğrisi** denir ve (P') ile gösterilir. □

Şimdi pol hızlarını, yani (P) ve (P') pol eğrilerini çizen P noktasının hızlarının araştıralım:

Dönme polünün $\mathbf{V_f} = \mathbf{0}$ olduğu noktalar olduğunu daha önce söylemiştik. Buna göre (9.1) teoreminden, $X = P$ noktası için

$$\mathbf{V_a} = \mathbf{V_r}$$

bulunur.

Buna göre aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 9.6

L'-sabit ve L-hareketli düzlemlerdeki pol eğrilerini çizen P dönme polünün her t anındaki hızları birbirinin aynısıdır. □

Bu teoremden dolayı, her t anında (P) ve (P') pol eğrileri P ani dönme polünde birbirine teğettir ve

$$ds' = |\mathbf{V_a}| dt = |\mathbf{V_r}| dt = ds$$

olduğundan P dönme polü dt zaman aralığında her iki pol eğrisi üzerinde eşit uzaklıklar

kat eder.

Böylece aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

Teorem 9.7

Lorentz anlamında 1- parametreli düzlemsel $B = L / L'$ hareketinde L-düzleminin (P) hareketli pol eğrisi L'-sabit düzleminin (P') sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır.

9.3 İvmeler ve İvmelerin Terkibi

$B = L / L'$; Lorentz anlamında 1- parametreli düzlemsel hareket esnasında, hareketli L-düzleminde bir X noktası göz önüne alınsın. X noktasının L-düzlemine göre olan ivme vektörüne **relatif ivme vektörü** denir [4]. Bu ivme vektörü $\mathbf{V}_r$ relatif hızının t ye göre türevi alınarak bulunur ve $\mathbf{b_r}$ ile gösterilir:

$$\boldsymbol{b}_r = \dot{\boldsymbol{V}}_r = \ddot{x}_1 \boldsymbol{l}_1 + \ddot{x}_2 \boldsymbol{l}_2 . \tag{9.12}$$

Burada $\boldsymbol{l}_1$ ve $\boldsymbol{l}_2$ sabit olarak kabul edilmiştir.

X noktasının L'-düzlemine göre olan ivme vektörüne **mutlak ivme vektörü** denir ve $\mathbf{b_a}$ ile gösterilir. Ayrıca $\mathbf{V_a}$ nın t ye göre türevi alınarak,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}_a = \dot{\boldsymbol{V}}_a &= \left\{(\dot{x}_2 - \dot{p}_2)\boldsymbol{l}_1 + (x_2 - p_2)\dot{\boldsymbol{l}}_1 + (\dot{x}_1 - \dot{p}_1)\boldsymbol{l}_2 + (x_1 - p_1)\dot{\boldsymbol{l}}_2\right\}\dot{\varphi} \\ &\quad + \left\{(x_2 - p_2)\boldsymbol{l}_1 + (x_1 - p_1)\boldsymbol{l}_2\right\}\ddot{\varphi} + \ddot{x}_1\boldsymbol{l}_1 + \dot{x}_1\dot{\boldsymbol{l}}_1 + \ddot{x}_2\boldsymbol{l}_2 + \dot{x}_2\dot{\boldsymbol{l}}_2\end{aligned}$$

bulunur. Burada (9.5) denklemindeki $\dot{\boldsymbol{l}}_1$ ve $\dot{\boldsymbol{l}}_2$ değerleri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}_a &= \left\{-\dot{p}_2\dot{\varphi} + (x_1 - p_1)\dot{\varphi}^2 + (x_2 - p_2)\ddot{\varphi}\right\}\boldsymbol{l}_1 + \left\{-\dot{p}_1\dot{\varphi} + (x_2 - p_2)\dot{\varphi}^2 + (x_1 - p_1)\ddot{\varphi}\right\}\boldsymbol{l}_2 \\ &\quad + 2\dot{\varphi}\left\{\dot{x}_2\boldsymbol{l}_1 + \dot{x}_1\boldsymbol{l}_2\right\} + \boldsymbol{b}_r\end{aligned} \tag{9.13}$$

elde edilir. (9.13) denklemindeki

$$\boldsymbol{b_f} = \left\{-\dot{p}_2\dot{\varphi} + (x_1 - p_1)\dot{\varphi}^2 + (x_2 - p_2)\ddot{\varphi}\right\}\boldsymbol{l_1} + \left\{-\dot{p}_1\dot{\varphi} + (x_2 - p_2)\dot{\varphi}^2 + (x_1 - p_1)\ddot{\varphi}\right\}\boldsymbol{l_2} \tag{9.14}$$

vektörüne X noktasının **sürüklenme ivme vektörü** ve

$$\boldsymbol{b_c} = 2\dot{\varphi}\left\{\dot{x}_2\boldsymbol{l_1} + \dot{x}_1\boldsymbol{l_2}\right\} \tag{9.15}$$

vektörüne de **Coriolis-ivme vektörü** denir.

Buna göre ivmelerin terkibi şu teoremle ifade edilebilir:

Teorem 9.8

$B = L/L'$ Lorentz düzleminde 1- parametreli düzlemsel hareketi esnasında bir noktanın mutlak ivme vektörü, sürüklenme ivme vektörü ile Coriolis-ivme vektörü ve relatif ivme vektörünün toplamına eşittir. Buna göre

$$\mathbf{b_a} = \mathbf{b_f} + \mathbf{b_c} + \mathbf{b_r} \tag{9.16}$$

dir.

Sonuç 9.3

$\mathbf{b_c}$ Coriolis-ivmesi ve $\mathbf{V_r}$ relatif hızının iç-çarpımı

$$\langle \mathbf{b_c}, \mathbf{V_r} \rangle = 2\dot{\varphi}\left(\dot{x}_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1\dot{x}_2\right) = 0$$

olduğundan $\mathbf{b_c}$ Coriolis-ivmesi, $\mathbf{V_r}$ relatif hızına Lorentz anlamında diktir. □

L-de sabit olmayan bir X noktasının Coriolis-ivmesinin sıfır olması ancak ve ancak $\dot{\varphi} = 0$ olmasıyla sağlanır. $\dot{\varphi} = 0$ ise B hareketi bir kaymadan (ötelemeden) ibarettir. Böylece

$\mathbf{b_c} = 0$ ise ivmeler arasında,

$$\mathbf{b_a} = \mathbf{b_f} + \mathbf{b_r}$$

bağıntısı bulunur. Yani, ancak bir kayma hareketinde ivmeler hızlar gibi terkip edilirler.

Şimdi bir B hareketinde, herhangi bir t anında sürüklenme ivmesi sıfır olan noktaları araştıralım:

$\mathbf{b_f} = 0$ için

$$
\begin{aligned}
(x_1 - p_1)\dot{\varphi}^2 + (x_2 - p_2)\ddot{\varphi} &= \dot{p}_2\dot{\varphi} \\
(x_1 - p_1)\ddot{\varphi} + (x_2 - p_2)\dot{\varphi}^2 &= \dot{p}_1\dot{\varphi}
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\dot{\varphi} \neq 0$ olduğundan $(x_1 - p_1)$ ve $(x_2 - p_2)$ ye göre homojen olmayan denklem sisteminin Δ katsayılar determinantı

$$
\Delta = \begin{vmatrix} \dot{\varphi}^2 & \ddot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} & \dot{\varphi}^2 \end{vmatrix} = \left(\dot{\varphi}^4 - \ddot{\varphi}^2\right) \neq 0
$$

dır. Buna göre yukarıdaki sistemin Cramer yöntemi ile bir tek çözümü bulunur.

Tanım 9.6

$\dot{\varphi} \neq 0$ olmak üzere, herhangi bir t anında sürüklenme ivmesi sıfır olan bir tek nokta vardır. Bu noktaya **ivme polü** denir. □

İvme polünün koordinatları

$$
\begin{aligned}
x_1 &= p_1 + \frac{\dot{\varphi}\left(\dot{p}_2\dot{\varphi}^2 - \dot{p}_1\ddot{\varphi}\right)}{\dot{\varphi}^4 - \ddot{\varphi}^2} \\
x_2 &= p_2 + \frac{\dot{\varphi}\left(\dot{p}_1\dot{\varphi}^2 - \dot{p}_2\ddot{\varphi}\right)}{\dot{\varphi}^4 - \ddot{\varphi}^2}
\end{aligned}
\tag{9.17}
$$

şeklinde bulunur [4].

BÖLÜM 10

LORENTZ DÜZLEMİNDE 1- PARAMETRELİ DÜZLEMSEL HAREKETİN HİPERBOLİK SAYILARLA İFADESİ

Bu bölümde, Lorentz düzleminde 1-parametreli düzlemsel hareketi hiperbolik sayılarla ifade ettikten sonra, bu hareketin hızları, ivmeleri ve pol noktalarını elde edip, aralarındaki ilişki verilecektir.

H ve H' $\left(H = H' = H^2\right)$, sırasıyla, hareketli ve sabit hiperbolik düzlemler olsun. $\{O;\mathbf{h_1},\mathbf{h_2}\}$ ve $\{O';\mathbf{h}_1',\mathbf{h}_2'\}$ de H ve H'-düzlemlerinde tespit edilen koordinat sistemleri olsun. Bir X noktasının her iki sistemdeki koordinatlarını sırasıyla,

$$x = x_1 + jx_2 \quad , \quad x^{'} = x_1^{'} + jx_2^{'}$$

hiperbolik sayıları ile ve $\mathbf{O^{'}O}$ vektörünü de sabit sistemde

$$\mathbf{u}^{'} = u_1^{'} + ju_2^{'}$$

hiperbolik sayısı ile gösterelim. Buna göre,

$$-\mathbf{u} = -u_1 - ju_2$$

dir. O halde $+\mathbf{u}$, $\mathbf{O^{'}O}$ vektörüne karşılık olan vektördür. (9.4) denkleminden x_1' ve x_2' ifadeleri, $\mathbf{x}^{'} = x_1^{'} + jx_2^{'}$ de yerine yazılırsa

$$\mathbf{x}^{'} = \left(x_1 + jx_2\right)\left(\cosh\varphi + j\sinh\varphi\right) - \left(u_1 + ju_2\right)\left(\cosh\varphi + j\sinh\varphi\right)$$

veya

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}e^{j\varphi} - \mathbf{u}e^{j\varphi}$$

elde edilir.

$$\mathbf{u}' = -\mathbf{u}e^{j\varphi} \tag{10.1}$$

olmak üzere

$$\mathbf{x}' = \mathbf{u}' + \mathbf{x}e^{j\varphi} \tag{10.2}$$

yazılabilir. Böylece $\varphi, \mathbf{u}, \mathbf{u}'$ bir t (zaman) reel parametresine bağlı olmak üzere, (10.2) denklemi ile tanımlanan harekete hiperbolik düzlemde **1-parametreli düzlemsel hiperbolik hareket** denir ve $B = H / H'$ ile gösterilir [2], [6] ve [7]. (9.2) denkleminden çözüm yoluyla

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}' - \mathbf{u}')e^{-j\varphi} = \mathbf{u} + \mathbf{x}'e^{-j\varphi}$$

denklemi elde edilir. Bu denklem $B' = H' / H$ 1-parametreli düzlemsel hiperbolik hareketin ters hareketinin vektörel denklemidir.

10.1 Hızlar ve Hızların Terkibi

H-düzlemi, H'-düzlemine göre 1-parametreli hiperbolik hareket yaparken, bir X noktası da hareketli H-düzlemindeki yerini t zamanı ile değiştirsin. Böylece iki hareketi bir araya getirerek hızların nasıl terkip edileceğini araştıracağız:

$X \in H$ noktasının hareketli sistemine göre $\mathbf{X}_\mathrm{r}$ relatif hızı;

$$\mathbf{X}_\mathrm{r} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}} \tag{10.3}$$

dir.

X noktasının H-düzleminde sahip olduğu $\mathbf{X}_\mathrm{r}$ relatif hız vektörünün sabit sisteme göre ifadesi için,

$$\mathbf{X}_\mathrm{r}' = \mathbf{X}_\mathrm{r}e^{j\varphi} = \dot{\mathbf{x}}e^{j\varphi} \tag{10.4}$$

yazılabilir. X noktasının H' düzleminde sahip olduğu $\mathbf{X}'_{\mathbf{a}}$ mutlak hızı, sabit sistemine göre;

$$\mathbf{X}^{'}_{\mathbf{a}} = \frac{d\mathbf{x}^{'}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}^{'} = \dot{\mathbf{u}}^{'} + j\dot{\varphi}\mathbf{x}e^{j\varphi} + \dot{\mathbf{x}}e^{j\varphi}$$

veya

$$\mathbf{X}'_{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{u}}^{'} + j\dot{\varphi}\left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}'\right) + \dot{\mathbf{x}}e^{j\varphi} \tag{10.5}$$

şeklinde bulunur. Buna göre, X noktasının $\mathbf{X}'_{\mathbf{f}}$ sürüklenme hızı, sabit sistemine göre;

$$\mathbf{X}'_{\mathbf{f}} = \dot{\mathbf{u}}' + j\dot{\varphi}\left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}'\right) \tag{10.6}$$

şeklindedir [2].

Şimdi, (10.5) ve (10.6) denklemleri ile verilen, düzlemsel hareket esnasında $X \in H$ noktasının H' düzleminde sahip olduğu hız vektörlerinin H hareketli düzleminde ki karşılıklarını ifade edelim:

X noktasının H-düzleminde sahip olduğu $\mathbf{X}_{\mathbf{r}}$ relatif hızını (10.3) denkleminde vermiştik. X noktasının hareket esnasında H'-düzleminde sahip olduğu mutlak hız vektörünün H-düzlemindeki ifadesi için

$$\mathbf{X}_{\mathbf{a}} = \mathbf{X}'_{a}e^{-j\varphi} = \dot{\mathbf{u}}'e^{-j\varphi} + j\dot{\varphi}\mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}$$

yazılabilir. $\dot{\mathbf{u}}^{'} = -\left(\dot{\mathbf{u}} + j\mathbf{u}\dot{\varphi}\right)e^{j\varphi}$ olduğundan,

$$\mathbf{X}_{\mathbf{a}} = -\left(\dot{\mathbf{u}} + j\mathbf{u}\dot{\varphi}\right) + j\dot{\varphi}\mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}} \tag{10.7}$$

elde edilir. Bu durumda X noktasının $\mathbf{X}_{\mathbf{f}}$ sürüklenme hızı,

$$\mathbf{X}_{\mathbf{f}} = -\dot{\mathbf{u}} + j\dot{\varphi}\left(\mathbf{x} - \mathbf{u}\right) = \dot{\mathbf{u}}'e^{-j\varphi} + j\dot{\varphi}\mathbf{x} \tag{10.8}$$

şeklinde ifade edilir.

(10.4), (10.5),(10.6) ve (10.3),(10.7),(10.8) ifadelerinden aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 10.1

Hiperbolik düzlemde, $B = H / H'$ 1-parametreli düzlemsel hiperbolik hareket esnasında bir X noktasının mutlak hızı, sürüklenme hızı ile relatif hızının toplamına eşittir, yani hızlar kanunu korunur:

$$\begin{cases} \mathbf{X}'_{\mathbf{a}} = \mathbf{X}'_{\mathbf{f}} + \mathbf{X}'_{\mathbf{r}} \\ \text{ve} \\ \mathbf{X}_{\mathbf{a}} = \mathbf{X}_{\mathbf{f}} + \mathbf{X}_{\mathbf{r}} \end{cases}. \tag{10.9}$$

□

10.2 Dönme Polü ve Pol Eğrileri

Şimdi $B = H / H'$ hareketinin her t anındaki sabit düzlemde ki sürüklenme hızı sıfır olan noktaları, yani pol noktalarını araştıralım:

$$\mathbf{X}'_{\mathbf{f}} = \dot{\mathbf{u}}' + j\dot{\varphi}\left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}'\right) = 0$$

olmak üzere

$$\mathbf{x}' = \mathbf{p}' = \mathbf{u}' - j\frac{\dot{\mathbf{u}}'}{\dot{\varphi}} \tag{10.10}$$

elde edilir. Ayrıca bu son denklemden elde edilen

$$\dot{\mathbf{u}}' = j\dot{\varphi}\left(\mathbf{u}' - \mathbf{p}'\right)$$

ifadeyi (10.6) denkleminde yerine yazarsak sürüklenme hız vektörünü pol noktası cinsinden

$$\mathbf{X}'_{\mathbf{f}} = j\dot{\varphi}\left(\mathbf{x}' - \mathbf{p}'\right) \tag{10.11}$$

şeklinde yazılabilir [2].

Şimdi, (10.10) denklemi ile verilen, 1-parametreli düzlemsel hiperbolik hareket esnasında H' düzleminde ki pol noktasının ve (10.11) denklemi ile verilen sürüklenme hız vektörünün H hareketli düzleminde ki karşılıklarını ifade edelim:

$\mathbf{X_f} = 0$ olan noktaları araştıracağız: O halde (10.8) denkleminden

$$\dot{\mathbf{u}}' e^{-j\varphi} + j\dot{\varphi}\mathbf{x} = 0$$

olmak üzere

$$\mathbf{p} = \frac{-\dot{\mathbf{u}}'}{j\dot{\varphi}} e^{-j\varphi} = \frac{\dot{\mathbf{u}} + j\mathbf{u}\dot{\varphi}}{j\dot{\varphi}} = \mathbf{u} + j\frac{\dot{\mathbf{u}}}{\dot{\varphi}} \tag{10.12}$$

elde edilir. Burada $\dot{\mathbf{u}}$ nın değeri $\mathbf{p}$ cinsinden bulup (10.8) de yerine yazılırsa sürüklenme hızın $\mathbf{p}$ pol noktası cinsinden E-düzlemindeki ifadesi,

$$\mathbf{X_f} = j\dot{\varphi}\,(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \tag{10.13}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. □

X noktasının sürüklenme hızının (10.11) ve (10.13) ifadelerinden aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

Sonuç 10.1

$$\left\langle \mathbf{X}'_{\mathbf{f}}, \mathbf{P}'\mathbf{X}' \right\rangle = \left\langle j\dot{\varphi}(\mathbf{x}' - \mathbf{p}'), (\mathbf{x}' - \mathbf{p}') \right\rangle$$

$$= \left\langle (x'_2 - p'_2, x'_1 - p'_1), (x'_1 - p'_1, x'_2 - p'_2) \right\rangle \dot{\varphi}$$

$$= \left[(x'_2 - p'_2)(x'_1 - p'_1) - (x'_1 - p'_1)(x'_2 - p'_2) \right] \dot{\varphi} = 0.$$

Benzer şekilde H hareketli düzleminde $\mathbf{X_f} = j\dot{\varphi}(\mathbf{x} - \mathbf{p})$ sürüklenme hız vektörü ve $\mathbf{PX}$ pol ışını için,

$$\left\langle \mathbf{X_f}, \mathbf{PX} \right\rangle = \left\langle j\dot{\varphi}(\mathbf{x} - \mathbf{p}), (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \right\rangle$$

$$= \left\langle (x_2 - p_2, x_1 - p_1), (x_1 - p_1, x_2 - p_2) \right\rangle \dot{\varphi}$$

=0

olduğundan pol ışını hareketin her t anında sürüklenme hızına diktir.

Sonuç 10.2

$\mathbf{X}_\mathbf{f}^{'}$ vektörünün uzunluğu için,

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{X}_\mathbf{f}^{'}\right\|_h &= \sqrt{\left|\left\langle \mathbf{X}_\mathbf{f}^{'},\mathbf{X}_\mathbf{f}^{'}\right\rangle\right|}\\
&= \sqrt{\left|\left\langle j\dot{\varphi}\left(\mathbf{x}'-\mathbf{p}'\right), j\dot{\varphi}\left(\mathbf{x}'-\mathbf{p}'\right)\right\rangle\right|}\\
&= \sqrt{\left|\left\langle \left(x_2'-p_2', x_1'-p_1'\right), \left(x_2'-p_2', x_1'-p_1'\right)\right\rangle\right|\dot{\varphi}^2}\\
&= \sqrt{\dot{\varphi}^2\left|\left(x_2'-p_2'\right)^2-\left(x_1'-p_1'\right)^2\right|}\\
&= \dot{\varphi}\left\|\mathbf{P}'\mathbf{X}'\right\|_h\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, H hareketli düzlemde $\mathbf{X}_\mathbf{f}$ sürüklenme hız vektörünün uzunluğu için;

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{X}_\mathbf{f}\right\|_h &= \sqrt{\left|\left\langle \mathbf{X}_\mathbf{f},\mathbf{X}_\mathbf{f}\right\rangle\right|}\\
&= \sqrt{\left|\left\langle j\dot{\varphi}\left(\mathbf{x}-\mathbf{p}\right), j\dot{\varphi}\left(\mathbf{x}-\mathbf{p}\right)\right\rangle\right|}\\
&= \sqrt{\dot{\varphi}^2\left|\left(x_2-p_2\right)^2-\left(x_1-p_1\right)^2\right|}\\
&= \dot{\varphi}\left\|\mathbf{PX}\right\|_h\end{aligned}$$

elde edilir. □

Şimdi $B = H/H'$ hareketi esnasında (P) ve $\left(P^{'}\right)$ pol eğrilerini çizen P pol noktasının hızlarını araştıralım:

Pol noktası $\mathbf{X}_\mathbf{f}^{'} = 0$ ile tanımlandığından (10.9) eşitliğinden $X = P$ için

$$\mathbf{X}_{\mathbf{a}}' = \mathbf{X}_{\mathbf{r}}' = \dot{\mathbf{p}} e^{j\varphi}$$

bulunur.

Böylece aşağıdaki teoremleri ispatsız verebiliriz:

Teorem 10.2

Sabit ve hareketli düzlemlerdeki pol eğrilerini çizen P pol noktasının her t anındaki hızları birbirinin aynısıdır.

Teorem 10.3

Hiperbolik düzlemde, $B = H / H'$; 1-parametreli düzlemsel hareket esnasında H-düzleminin (P) hareketli pol eğrisi H'-düzleminin (P') sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır [2].

İspat:

Teorem 10.1 e göre her t anında (P) ve (P') pol eğrileri P pol noktasında birbirine teğettir. Ayrıca, (P) nin t_0 ve t_1 parametrelerine karşılık gelen noktaları arasındaki yay uzunluğu

$$ds = \left\| \mathbf{X}_{\mathbf{r}}' \right\|_h dt$$

dir. (P') nün t_0 ve t_1 parametrelerine karşılık gelen noktaları arasındaki yay uzunluğu

$$ds' = \left\| \mathbf{X}_{\mathbf{a}}' \right\|_h dt$$

olur. P pol noktası için $\mathbf{X}_{\mathbf{r}}' = \mathbf{X}_{\mathbf{a}}'$ olduğundan

$$ds' = ds$$

bulunur. O halde (P) ve (P') pol eğrileri her t anında birbirine teğet ve aldıkları yollar aynı olduğundan (P) hareketli pol eğrisi (P') sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır.

10.3 İvmeler ve İvmelerin Terkibi

1-parametreli düzlemsel hiperbolik hareket esnasında X noktasının relatif ivme vektörü, X noktasının H-düzlemine göre olan ivme vektörüdür ve X in H-düzlemine göre $\mathbf{X_r}$ vektörel hızının t zamanına göre türevi alınarak bulunur. O halde (10.3) denkleminden

$$\mathbf{b_r} = \dot{\mathbf{X}}_\mathbf{r} = \ddot{\mathbf{x}} \tag{10.14}$$

elde edilir. Bu vektör sabit koordinat sistemine göre,

$$\mathbf{b_r'} = \mathbf{b_r} e^{j\varphi} = \ddot{\mathbf{x}} e^{j\varphi} \tag{10.15}$$

şeklinde ifade edilebilir. X noktasının mutlak ivme vektörü, X noktasının H'-düzlemine göre ivme vektörüdür. Buna göre bu ivme vektörü

$$\mathbf{X_a'} = \mathbf{X_f'} + \mathbf{X_r'} = j\dot{\varphi}(\mathbf{x} - \mathbf{p})e^{j\varphi} + \dot{\mathbf{x}}e^{j\varphi}$$

mutlak hızının t ye göre türevi alınarak

$$\begin{aligned}\mathbf{b_a'} = \dot{\mathbf{X}}_\mathbf{a}' &= j\ddot{\varphi}(\mathbf{x} - \mathbf{p})e^{j\varphi} + j\dot{\varphi}(\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{p}})e^{j\varphi} + \dot{\varphi}^2(\mathbf{x} - \mathbf{p})e^{j\varphi} + \ddot{\mathbf{x}}e^{j\varphi} + j\dot{\varphi}\dot{\mathbf{x}}e^{j\varphi} \\ &= (\mathbf{x} - \mathbf{p})\left(j\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2\right)e^{j\varphi} + j\dot{\varphi}\dot{\mathbf{x}}e^{j\varphi} - j\dot{\varphi}\dot{\mathbf{p}}e^{j\varphi} + j\dot{\varphi}\dot{\mathbf{x}}e^{j\varphi} + \ddot{\mathbf{x}}e^{j\varphi}\end{aligned}$$

bulunur. Bu son eşitliği düzenlersek

$$\mathbf{b_a'} = (\mathbf{x} - \mathbf{p})\left(j\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2\right)e^{j\varphi} - j\dot{\varphi}\dot{\mathbf{p}}e^{j\varphi} + 2j\dot{\varphi}\dot{\mathbf{x}}e^{j\varphi} + \mathbf{b_r'} \tag{10.16}$$

elde edilir. Buradaki

$$\mathbf{b_f'} = (\mathbf{x} - \mathbf{p})\left(j\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2\right)e^{j\varphi} - j\dot{\varphi}\dot{\mathbf{p}}e^{i\varphi} \tag{10.17}$$

vektörüne X noktasının **sürüklenme ivme vektörü** ve

$$\mathbf{b_c'} = 2j\dot{\varphi}\dot{\mathbf{x}}e^{j\varphi} \tag{10.18}$$

vektörüne de **Coriolis-ivme vektörü** denir [2].

O halde ivmelerin terkibi şu teoremle ifade edilebilir:

Teorem 10.4

Hiperbolik düzlemde, 1-parametreli düzlemsel hiperbolik hareket esnasında, bir noktanın mutlak ivme vektörü; sürüklenme ivme vektörü, Coriolis-ivme vektörü ve relatif ivme vektörünün toplamına eşittir:

$$\mathbf{b}_\mathbf{a}^{'} = \mathbf{b}_\mathbf{f}^{'} + \mathbf{b}_\mathbf{c}^{'} + \mathbf{b}_\mathbf{r}^{'}. \tag{10.19}$$

□

(10.16), (10.17) ve (10.18) ile verilen ivme vektörleri hareketli sisteme göre sırasıyla

$$\mathbf{b}_\mathbf{a} = \mathbf{b}_\mathbf{a}^{'} e^{-j\varphi} = (\mathbf{x}-\mathbf{p})(j\ddot{\varphi}+\dot{\varphi}^2) - j\dot{\varphi}\dot{\mathbf{p}} + 2j\dot{\varphi}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{b}_\mathbf{r} \tag{10.20}$$

$$\mathbf{b}_\mathbf{f} = \mathbf{b}_\mathbf{f}^{'} e^{-j\varphi} = (\mathbf{x}-\mathbf{p})(j\ddot{\varphi}+\dot{\varphi}^2) - j\dot{\varphi}\dot{\mathbf{p}} \tag{10.21}$$

$$\mathbf{b}_\mathbf{c} = \mathbf{b}_\mathbf{c}^{'} e^{-i\varphi} = 2j\dot{\varphi}\dot{\mathbf{x}} \tag{10.22}$$

vektörleri ile ifade edilir.

Sonuç 10.3

(10.4) ve (10.18) denklemleri kullanarak $\left\langle \mathbf{X}_\mathbf{r}^{'}, \mathbf{b}_\mathbf{c}^{'} \right\rangle = \left\langle \dot{\mathbf{x}} e^{j\varphi}, 2j\dot{\varphi}\dot{\mathbf{x}} e^{j\varphi} \right\rangle$ iç-çarpımını hesaplayalım:

$\mathbf{a} = a_1 + ja_2, \quad \mathbf{b} = b_1 + jb_2$ hiperbolik sayıları için,

$$\left\langle \mathbf{a}e^{j\varphi}, \mathbf{b}e^{j\varphi} \right\rangle = \left\langle (a_1+ja_2)(\cosh\varphi + j\sinh\varphi), (b_1+jb_2)(\cosh\varphi + j\sinh\varphi) \right\rangle$$

$$= \left\langle (a_1\cosh\varphi + a_2\sinh\varphi, a_1\sinh\varphi + a_2\cosh\varphi), (b_1\cosh\varphi + b_2\sinh\varphi, b_1\sinh\varphi + b_2\cosh\varphi) \right\rangle$$

$$= a_1b_1 - a_2b_2$$

olduğundan

$$\left\langle \mathbf{a}e^{j\varphi}, \mathbf{b}e^{j\varphi} \right\rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \tag{10.23}$$

bulunur.

O halde (10.23) denklemi kullanılırsa,

$$\left\langle \mathbf{X}_{\mathbf{r}}^{'}, \mathbf{b}_{\mathbf{c}}^{'} \right\rangle = \left\langle \dot{\mathbf{x}} e^{j\varphi}, 2 j \dot{\varphi} \dot{\mathbf{x}} e^{j\varphi} \right\rangle$$

$$= \left\langle \dot{\mathbf{x}}, 2 j \dot{\varphi} \dot{\mathbf{x}} \right\rangle$$

$$= \left\langle \left(\dot{x}_1 + j \dot{x}_2 \right), 2 j \dot{\varphi} \left(\dot{x}_1 + j \dot{x}_2 \right) \right\rangle$$

$$= \left\langle \left(\dot{x}_1, \dot{x}_2 \right), \left(2 \dot{\varphi} \dot{x}_2, 2 \dot{\varphi} \dot{x}_1 \right) \right\rangle$$

$$= 2 \left(\dot{\varphi} \dot{x}_2 \dot{x}_1 - \dot{\varphi} \dot{x}_2 \dot{x}_1 \right)$$

$$= 0$$

bulunur. Yani $\mathbf{b}_{\mathbf{c}}^{'}$ Coriolis-ivmesi $\mathbf{X}_{\mathbf{r}}^{'}$ relatif hızına diktir. □

(10.19) eşitliği ile ivmelerin hızlardan farklı bir yapı ile birbirleri arasındaki ilişki verilmektedir. H düzlemindeki X noktasının Coriolis-ivmesi sıfır olduğunda ancak ivmelerde hızlardaki gibi benzer sekilde

$$\mathbf{b}_{\mathbf{a}}^{'} = \mathbf{b}_{\mathbf{f}}^{'} + \mathbf{b}_{\mathbf{r}}^{'}$$

eşitliğine sahip olurlar. Bununla ilgili şu sonuç verilebilir:

Sonuç 10.4

Hiperbolik düzlemde, H / H' 1-parametreli düzlemsel hiperbolik hareket esnasında H **-**hareketli düzleminde hareketli X noktasının Coriolis-ivmesi sıfır ise H / H' hareketi bir kayma (öteleme) hareketidir ve bu ifadenin tersi de doğrudur.

İspat:

$$\mathbf{b}_{\mathbf{c}}^{'} = 2 j \dot{\varphi} \dot{\mathbf{x}} e^{i\varphi} = 0$$

olsun. Bu durumda

$$\dot{\varphi} = 0$$

elde edilir. Bu ise φ nin sabit olduğunu, dolayısıyla H/H' hareketinin bir kayma hareketi olduğunu gösterir.

Tersine, H/H' hareketi sadece bir kayma hareketi olsun. Buna göre $\varphi =$sabit olacağından $\mathbf{b}_{\mathbf{c}}^{'} = 0$ olacaktır. □

Şimdi de bir H/H' hareketi esnasında, herhangi bir t anında, sabit düzlemde sürüklenme ivmesinin sıfır olduğu noktaları yani ivme pollerini araştıralım:

Buna göre

$$\mathbf{b}_{\mathbf{f}}^{'} = 0$$

olmak üzere

$$(\mathbf{x}-\mathbf{p})\left(j\ddot{\varphi}+\dot{\varphi}^2\right)e^{j\varphi} - j\dot{\varphi}\dot{\mathbf{p}}e^{j\varphi} = 0$$

eşitliğinden

$$\mathbf{x}-\mathbf{p} = \frac{j\dot{\varphi}\dot{\mathbf{p}}}{j\ddot{\varphi}+\dot{\varphi}^2}$$

elde edilir. Böylece ivme polü için,

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \frac{j\dot{\varphi}\dot{\mathbf{p}}}{j\ddot{\varphi}+\dot{\varphi}^2} \tag{10.24}$$

veya

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \frac{\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\dot{\mathbf{p}}}{\ddot{\varphi}^2-\dot{\varphi}^4} - j\frac{\dot{\varphi}^3\dot{\mathbf{p}}}{\ddot{\varphi}^2-\dot{\varphi}^4}$$

elde edilir [2].

BÖLÜM 11

1-PARAMETRELİ DÜZLEMSEL HİPERBOLİK HAREKETLER ALTINDA ZARF EĞRİLERİ

Tezin bu ilk orijinal bölümünde, 1-parametreli düzlemsel kompleks hareketler altında elde edilen zarf eğrilerine benzer şekilde 1-parametreli düzlemsel hiperbolik hareketler altında zarf eğrileri elde edilmiştir.

H -hareketli düzleminde K eğrisi tespit edilmiş olsun. $B = H / H'$ 1-parametreli hareketinde K eğrisinin H' sabit düzleminde her t için farklı bir durumu vardır. K nın H' -sabit düzlemindeki bu durumları genel olarak K' gibi bir zarfa sahiptir.

K ve K' eğrilerini en azından değme noktalarında düzgün eğriler olarak kabul edelim ve K eğrisi t anında K' zarfına Y noktasında değsin. Buna göre, $B = H / H'$ hareketi esnasında bu ortak Y değme noktası hem K hemde K' üzerinde hareket eder. $B = H / H'$ hareketi esnasında K eğrisi $\mathbf{V_r}$ vektörel hızı ile, K' eğrisi ise $\mathbf{V_a}$ vektörel hızı ile çizilir.

Y , K ve K' eğrilerinin ortak değme noktası olduğundan $\mathbf{V_r}$ ile $\mathbf{V_a}$ hız vektörleri ortak teğet ile çakışırlar. Y noktasının sürüklenme hızı $\mathbf{V_f}$ vektörü olmak üzere;

$$\mathbf{V_a} = \mathbf{V_f} + \mathbf{V_r}$$

olduğundan

$$\mathbf{V_f} = \mathbf{V_a} - \mathbf{V_r}$$

dir. Böylece, Y noktasının sürüklenme hızına ait $\mathbf{V_f}$ vektörü de $\mathbf{V_r}$ ve $\mathbf{V_a}$ hız vektörleri ile ortak doğrultudadır. Aynı zamanda $\mathbf{V_f}$, $\mathbf{PY}$ pol ışınına diktir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 11.1

$B = H / H'$ 1-parametreli hareketi esnasında zarfın normali, yani K eğrisi ve onun K' zarf eğrisinin Y değme noktasındaki ortak normali daima P ani pol noktasından geçer. □

Tanım 11.1

$B = H / H'$ hareketi esnasında H hiperbolik düzlemde bir K eğrisi ve onun H' deki K' zarf eğrisinin değme noktası Y olsun. Y noktası P noktasından farklı olmak üzere $\mathbf{V_f} \neq 0$ ve dolayısıyla $\mathbf{V_a} \neq \mathbf{V_r}$ dir. O halde $\dfrac{|\mathbf{V_r}|}{|\mathbf{V_a}|} = \lambda$ sayısına hareketin **yuvarlanma-kayma sayısı** denir.

11.1 Zarf Eğrilerinin Yuvarlanma-Kayması

$B = H / H'$ hareketi esnasında H düzlemindeki bir K eğrisinin H' düzlemindeki K' zarf eğrisini ele alalım. Ortak Y değme noktası; Y_r hiperbolik sayısına karşılık gelen $\mathbf{V_r}$ vektörel hızı ile K eğrisini kat etsin. Bununla birlikte Y noktası Y_a hiperbolik sayısına karşılık gelen $\mathbf{V_a}$ vektörel hızı ile K' eğrisini çizer. Bu hız vektörleri için,

$$\mathbf{V_r} = \lambda \mathbf{V_a}$$

veya

$$\mathbf{y_r} = \lambda \mathbf{y_a}, \quad \mathbf{y'_r} = \lambda \mathbf{y'_a} \tag{11.1}$$

bağıntıları sağlanır. Böylece K ve K' eğrilerinin değmesi ifade edilmiş olup λ ise daha önce bahsedilen yuvarlanma-kayma sayısını gösterir. Ayrıca, (11.1) denklemi

$$\mathbf{y_r} = \lambda(\mathbf{y_r} + \mathbf{y_f}), \quad \mathbf{y'_a} - \mathbf{y'_{\mathit{f}}} = \lambda \mathbf{y'_a} \tag{11.2}$$

şeklinde de yazılabilir. (11.2) denkleminde hızların bölüm10 da elde edilen ifadeleri yerine yazılırsa,

$$\dot{\mathbf{y}} = \lambda\left(\dot{\mathbf{y}} + j\dot{\varphi}\left(\mathbf{y} - \mathbf{p}\right)\right) \tag{11.3}$$

ve

$$\lambda\dot{\mathbf{y}}' = \dot{\mathbf{y}}' - j\dot{\varphi}\left(\mathbf{y}' - \mathbf{p}'\right) \tag{11.4}$$

elde edilir.

K , H -hareketli düzleminde herhangi bir eğri ve K' buna ait H'-düzlemindeki zarf eğrisi olduğundan λ yuvarlanma-kayma sayısı genel olarak t zamanı ile değişir, yani $\lambda = \lambda(t)$ dir. Tersine, λ yı t zamanının keyfi fonksiyonu olarak önceden alabilir ve hareket esnasında $\lambda = \lambda(t)$ yuvarlanma-kayma sayısı ile birbiri üzerinde yuvarlanarak kayan bütün K , K' zarf eğri çiftlerini bulabiliriz. Bunun için en son elde edilen (11.3) ve (11.4) diferensiyel denklemlerinden herhangi birini integre etmek yeterlidir.

(11.3) denklemini ele alalım:

(11.3) denkleminden

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}} &= \lambda\left(\dot{\mathbf{y}} + j\dot{\varphi}\left(\mathbf{y} - \mathbf{p}\right)\right)\\ &= \lambda\dot{\mathbf{y}} + \lambda j\dot{\varphi}\left(\mathbf{y} - \mathbf{p}\right)\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned}&\dot{\mathbf{y}} - \lambda\dot{\mathbf{y}} = \lambda j\dot{\varphi}\left(\mathbf{y} - \mathbf{p}\right)\\ &\dot{\mathbf{y}}\left(1 - \lambda\right) = \lambda j\dot{\varphi}\left(\mathbf{y} - \mathbf{p}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$\dot{\mathbf{y}} = \dfrac{\lambda}{1-\lambda} j\dot{\varphi}\left(\mathbf{y} - \mathbf{p}\right)$, ($\dfrac{\lambda}{1-\lambda} = L$ denilirse)

$$\dot{\mathbf{y}} = jL\dot{\varphi}\left(\mathbf{y} - \mathbf{p}\right)$$

lineer diferensiyel denklemi bulunur.

Şimdi bulduğumuz lineer diferensiyel denklemini çözelim:

$\dot{\mathbf{y}} = jL\dot{\varphi}\mathbf{y} - jL\dot{\varphi}\mathbf{p}$ veya $\dot{\mathbf{y}} - jL\dot{\varphi}\mathbf{y} = -jL\dot{\varphi}\mathbf{p}$

yazılabilir. Buradan,

$\phi(t)=\int L\dot{\varphi}dt$ ve $N(t)=e^{-j\int L\dot{\varphi}dt}=e^{-j\phi}$ olmak üzere yukarıdaki diferensiyel denklemin son halinin her iki tarafı, $N(t)=e^{-j\int L\dot{\varphi}dt}=e^{-j\phi}$ ile çarpılırsa,

$$e^{-j\phi}\dot{\mathbf{y}}-e^{-j\phi}jL\dot{\varphi}\mathbf{y}=-jL\dot{\varphi}\mathbf{p}\,e^{-j\phi}$$

elde edilir. Buradan,

$$\left(e^{-j\phi}\mathbf{y}\right)'=-jL\dot{\varphi}\mathbf{p}\,e^{-j\phi}$$

dir. Böylece,

$$e^{-j\phi}\mathbf{y}=-j\int L\dot{\varphi}\mathbf{p}\,e^{-j\phi}dt+A_0$$

yazılabilir. O halde aranılan K eğrileri

$$\mathbf{y}=\frac{-j\int L\dot{\varphi}\mathbf{p}\,e^{-j\phi}dt+A_0}{e^{-j\phi}}$$

veya

$$\mathbf{y}=-je^{j\phi}\int L\mathbf{p}\,e^{-j\phi}d\varphi+A_0e^{j\phi}$$

şeklinde elde edilir.

Not: A_0 sabitinin özel bir seçimi ile K eğrisinin herhangi bir $t=t_0$ anında $y=y_0$ noktasına karşılık gelen keyfi Y_0 noktasından geçtiğini ve bu noktadan sabit düzlemin K' eğrisine teğet olduğu nokta elde edelir. Yani elde edilen K eğrilerinden, K' eğrileri elde edilebilir.

Benzer şekilde (11.4) denklemi de

$$\dot{\mathbf{y}}'=j\dot{\varphi}L'(\mathbf{y}'-\mathbf{p}'),\ \left(L'=\frac{1}{1-\lambda}=L+1\right)$$

şeklinde bir lineer diferensiyel denklem olarak yazılabilir. Ayrıca K' eğrileri

$$\mathbf{y}' = -je^{j\phi'}\int L'\mathbf{p}'\, e^{-j\phi'} d\varphi + A_0' e^{j\phi'}$$

şeklinde de elde edilir. Burada,

$$\phi' = \int L' d\varphi = \phi + \varphi$$

dir.

11.2 Yuvarlanma-Kayma Sayısının Geometrik Karakteristiği

$\dot{\mathbf{y}} = j\dot{\varphi}L\left(\mathbf{y}-\mathbf{p}\right)$ ve $\dot{\mathbf{y}}' = j\dot{\varphi}L'\left(\mathbf{y}'-\mathbf{p}'\right)$ formüllerini sırasıyla P , P' ye göre çözersek,

$$\mathbf{p} = \mathbf{y} + \frac{j\dot{\mathbf{y}}}{L\dot{\varphi}} = \mathbf{y} + j\dot{\mathbf{y}}\frac{1-\lambda}{\lambda\dot{\varphi}}$$

ve

$$\mathbf{p}' = \mathbf{y}' + \frac{j\dot{\mathbf{y}}'}{L'\dot{\varphi}} = \mathbf{y}' + j\dot{\mathbf{y}}'\frac{1-\lambda}{\lambda\dot{\varphi}}$$

bağıntıları elde edilir. Yani, $B = H / H'$ hareketi esnasında $\left(P\right)$ ve $\left(P'\right)$ pol eğrilerini birbiri üzerinde λ yuvarlanma-kayma sayısı ile yuvarlanarak kayan K ve K' eğrilerinden elde edebiliriz. Burada $\dot{\varphi}$ açısal hızını başka bir şekilde ifade edelim.

K ve K' eğrilerinin yay uzunlukları, sırasıyla, s , s' ve Y ortak değme noktasında her iki koordinat sisteminin reel ekseni ile, sırasıyla, χ , χ' açılarını oluşturan bir teğete sahip olsunlar. Fakat her iki sistem birbirine göre φ açısı kadar döndürülmüş olduğundan

$$\chi' = \chi + \varphi$$

bağıntısı vardır. Bu bağıntının t ye göre türevini alınırsa

$$\frac{d\chi'}{ds'}\frac{ds'}{dt} = \frac{d\chi}{ds}\frac{ds}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}$$

elde edilir. Burada $d\chi$; K eğrisinin, $d\chi'$; K' eğrisinin kotengenz açısı olarak bulunur. Bu durumda K ve K' eğrilerinin Y ortak değme noktasındaki eğrilikleri

$$\frac{d\chi}{ds} = \kappa = \frac{1}{\rho}, \quad \frac{d\chi'}{ds'} = \kappa' = \frac{1}{\rho'}$$

olarak elde edilir. Yuvarlanma-kayma hareketine ait

$$\dot{s}=\frac{ds}{dt}=\lambda\frac{ds'}{dt}=\lambda\dot{s}'$$

bağıntısını göz önünde tutarsak açısal hızı

$$\dot{\varphi}=\frac{d\varphi}{dt}=\frac{ds'}{dt}\left(\kappa'-\lambda\kappa\right)=\dot{s}'\left(\kappa'-\lambda\kappa\right)$$

şeklinde bulunur. Bu ifadeyi pol eğrilerinin ifadesinde yerine yazarsak

$$\dot{\mathbf{y}}=\frac{d\mathbf{y}}{ds}\dot{s}\ ,\ \ \dot{\mathbf{y}}'=\frac{d\mathbf{y}'}{ds'}\dot{s}'$$

olmak üzere pol formülleri

$$\begin{aligned}P&=\mathbf{y}+j\,\frac{1-\lambda}{\kappa'-\lambda\kappa}\frac{d\mathbf{y}}{ds}\\P'&=\mathbf{y}'+j\,\frac{1-\lambda}{\kappa'-\lambda\kappa}\frac{d\mathbf{y}'}{ds'}\end{aligned}\tag{11.5}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 11.2

$B=H\ /H'$ hareketinin, K ve K' zarf eğri çifti, K ve K' eğrilerinin Y ortak değme noktalarının bu eğrileri katettikleri hızların $\lambda=\lambda(t)$ oranının (yuvarlanma-kayma sayısının) daha önceden verilmesi ile bellidir. Hareketin pol eğrileri (11.5) formülleri yardımıyla K ve K' eğrilerinin κ ve κ' eğrilikleri yardımıyla elde edilir. □

Şimdi λ yuvarlanma-kayma sayısının dört noktanın çifte oranı olarak ifade edilebileceğini gösterelim:

$\left|\frac{dy}{ds}\right|=\left|\frac{dy'}{ds'}\right|=1$ (Yay uzunluğuna göre türev teğet birim vektörü verir.)

olduğundan dolayı (11.5) ifadelerinden Y noktasının pol uzaklığı

$$\eta=PY=\frac{1-\lambda}{\kappa'-\lambda\kappa}=\frac{\rho\rho'(1-\lambda)}{\rho-\lambda\rho'}$$

dir. Bu ifadeyi λ ya göre çözersek

$$\lambda = \frac{\eta - \rho'}{\eta - \rho} : \frac{\rho'}{\rho}$$

elde edilir.

$\eta - \rho' = PX'$, $\eta - \rho = PX$, $\rho' = X'Y$, $\rho = XY$

uzunlukları göz önünde bulundurulursa λ dört noktanın çifte oranı olarak

$$\lambda = \frac{PX'}{PX} : \frac{X'Y}{XY} = (P\,Y\,X'\,X)$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 11.3

$B = H / H'$ hareketi esnasında, H de tespit edilen K eğrisi ve K nın H' deki zarf eğrisi K' olsun. K ve K' eğrilerinin λ yuvarlanma-kayma sayısı; hareketin P dönme polü, K ve K' nün Y değme noktası ile K ve K' eğrilerinin Y değme noktasındaki X ve X' eğrilik merkezlerinin çifte oranı olarak elde edilir.

BÖLÜM 12

1- PARAMETRELİ DÜZLEMSEL HİPERBOLİK HAREKETLER ALTINDA YÜKSEK MERTEBEDEN İVMELER VE İVME POLLERİ

Tezin bu ikinci orijinal bölümünde 1-parametreli düzlemsel hiperbolik hareketler altında yüksek mertebeden ivmeler ve ivme polleri verilmiştir. Ayrıca, bölümdeki elde edilen sonuçlar, uluslararası bir konferansta bildiri olarak sunulmuş, [8] ve makale olarak SCI-Expanded kapsamında bir dergide yayınlanmıştır, [9].

12.1 1-Parametreli Düzlemsel Hiperbolik Hareketler Altında Yüksek Mertebeden İvmeler

H/H'; 1-parametreli düzlemsel hiperbolik hareket ve X, H -hareketli düzleminde sabit bir nokta olsun. Bu noktayı hiperbolik $\mathbf{x}$ sayısı ile gösterelim. Bu nokta hareketli düzlemde sabit olduğundan H'-sabit düzleme göre hızı (mutlak hızı) sürüklenme hızına eşittir. Bu hız ise,

$$\dot{\mathbf{x}}' = \mathbf{X}_\mathbf{f}' = \dot{\mathbf{u}}' + j\dot{\varphi}\left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}'\right) \tag{12.1}$$

bağıntısı ile ifade edilir. Bu ifadenin t ye göre türevini alarak X noktasının

$$\ddot{\mathbf{x}}' = \ddot{\mathbf{u}}' + j\ddot{\varphi}\left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}'\right) + j\dot{\varphi}\left(\dot{\mathbf{x}}' - \dot{\mathbf{u}}'\right)$$

sürüklenme ivmesi bulunur. (12.1) denklemindeki $\dot{\mathbf{x}}'$ nın değerini bu eşitlikte yerine yazılırsa

$$\ddot{\mathbf{x}}' = \ddot{\mathbf{u}}' + \left(j\ddot{\varphi} + j\dot{\varphi}\, j\dot{\varphi}\right)\left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}'\right) \tag{12.2}$$

bulunur. (12.2) eşitliğinin bir defa daha türevini alarak 3.mertebeden hız (2. mertebeden ivme) vektörü için

$$\dddot{\mathbf{x}}' = \ddot{\mathbf{u}}' + \left(j\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\right)\left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}'\right) + \left(j\ddot{\varphi} + j\dot{\varphi}\, j\dot{\varphi}\right)\left(\dot{\mathbf{x}}' - \dot{\mathbf{u}}'\right)$$

elde edilir. Eğer (12.1) denklemindeki $\dot{\mathbf{x}}'$ nın değerini bu eşitlikte yerine yazarsak,

$$\dddot{\mathbf{x}}' = \ddot{\mathbf{u}}' + \left((j\dddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}) + (j\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2)\, j\dot{\varphi}\right)\left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}'\right) \tag{12.3}$$

elde edilir. (12.3) ifadesinin bir defa daha türevini alarak 4.mertebeden hız (3. mertebeden ivme) vektörü

$$\overset{(4)}{\mathbf{x}'} = \overset{(4)}{\mathbf{u}'} + \left((j\overset{(4)}{\varphi} + 3\ddot{\varphi}^2 + 3\dot{\varphi}\dddot{\varphi} + 3j\dot{\varphi}^2\ddot{\varphi}) + (j\dddot{\varphi} + 3\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + j\dot{\varphi}^3)\, j\dot{\varphi} \right)\left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}'\right) \tag{12.4}$$

şeklinde elde edilir. (12.1) denklemindeki $\left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}'\right)$ nün katsayısına ϕ_1' denilirse;

$\phi_1' = j\dot{\varphi} \neq 0$,

(12.2) denkleminde $\left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}'\right)$ nün katsayısına ϕ_2' denilirse;

$\phi_2' = j\ddot{\varphi} + j\dot{\varphi}\;\; j\dot{\varphi} = \dot{\phi}_1' + \phi_1'\phi_1'$,

(12.3) denkleminde $\left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}'\right)$ nün katsayısına ϕ_3' denilirse;

$\phi_3' = \left((j\dddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}) + (j\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2)\, j\dot{\varphi}\right) = \dot{\phi}_2' + \phi_2'\phi_1'$,

ve (12.4) denkleminde $\left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}'\right)$ nün katsayısına ϕ_4' denilirse,

$$\phi_4' = \left((j\overset{(4)}{\varphi} + 3\ddot{\varphi}^2 + 3\dot{\varphi}\dddot{\varphi} + 3j\dot{\varphi}^2\ddot{\varphi}) + (j\dddot{\varphi} + 3\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + j\dot{\varphi}^3)\, j\dot{\varphi} \right) = \dot{\phi}_3' + \phi_3'\phi_1',$$

elde edilir.

Benzer şekilde ardışık türevler alarak yüksek mertebeden ivmeler elde edilir. (n-1). mertebeden ivme n. mertebeden hıza eşittir. Dolayısıyla yüksek mertebeden ivmelere aynı zamanda yüksek mertebeden hız da denilebilir. (Çalışmamız boyunca $\phi_n' = \dot{\phi}_{n-1}' + \phi_{n-1}'\phi_1' \neq 0$ olduğu kabul edilecektir.) Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 12.1

Hiperbolik düzlemde H/H'; φ dönme açılı, 1-parametreli düzlemsel hiperbolik hareket olsun.

$\phi_1' = j\dot{\varphi}, \quad \phi_0' = 1, \quad \overset{(0)}{\mathbf{x}'} = \mathbf{x}'$ ve

$$\phi_n' = \dot{\phi}_{n-1}' + \phi_{n-1}'\phi_1' \neq 0, \tag{12.5}$$

olmak üzere hareketli düzlemdeki sabit bir $\mathbf{x}$ noktasının yüksek mertebeden ivmeleri için

$$\overset{(n)}{\mathbf{x}'} = \overset{(n)}{\mathbf{u}'} + \phi_n'\left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}'\right) \tag{12.6}$$

bağıntısı mevcuttur.

İspat

İspatımızı tümevarım yoluyla yapalım.

$n=1$, $n=2$, $n=3$ ve $n=4$ için teoremin doğru olduğu yukarıda gösterilmiştir.

Şimdi $n=k$ için (12.5) ve (12.6) eşitliklerinin doğru olduğunu kabul edip $n=k+1$ için doğruluğunu gösterelim. Yani $\phi_k' = \dot{\phi}_{k-1}' + \phi_{k-1}'\phi_1'$ ve $\overset{(k)}{\mathbf{x}'} = \overset{(k)}{\mathbf{u}'} + \phi_k'\left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}'\right)$ olsun.

Eğer bu son denklemin bir defa daha türevi alınırsa

$$\overset{(k+1)}{\mathbf{x}'} = \overset{(k+1)}{\mathbf{u}'} + \dot{\phi}_k'\left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}'\right) + \phi_k'\left(\dot{\mathbf{x}}' - \dot{\mathbf{u}}'\right)$$

elde edilir. Ayrıca (12.1) denkleminden $\dot{\mathbf{x}}'$ nın değeri bu eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\overset{(k+1)}{\mathbf{x}'} = \overset{(k+1)}{\mathbf{u}'} + \left(\dot{\phi}_k' + \phi_k'\phi_1'\right)\left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}'\right)$$

elde edilir. Buradan,

$$\overset{(k+1)}{\mathbf{x}'} = \overset{(k+1)}{\mathbf{u}'} + \phi_{k+1}'\left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}'\right)$$

olduğu görülür. □

12.2 1-Parametreli Düzlemsel Hiperbolik Hareketler Altında Yüksek Mertebeden Poller

$\mathbf{p}' = \mathbf{p}_1'$ dönme polünü sürüklenme hızının sıfır olmasıyla yani, X noktası H-düzleminde sabit olmak üzere $\mathbf{X}_\mathbf{f}' = \dot{\mathbf{x}}' = 0$ olmasıyla tarif etmiştik. Buradan ($\phi_n' \neq 0$ olduğu göz önünde bulundurulursa)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{p}_1' = \mathbf{u}' - \frac{\dot{\mathbf{u}}'}{\phi_1'}$$

elde edilir.

$\mathbf{p}_2'$ ivme polü ise, $\ddot{\mathbf{x}}' = 0$

veya

$$\ddot{\mathbf{x}}' = \ddot{\mathbf{u}}' + \left(j\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2\right)\left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}'\right) = 0$$

olmak üzere

$$\mathbf{x}' = \mathbf{u}' - \frac{\ddot{\mathbf{u}}'}{j\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\mathbf{p}_2'$ ivme polüne

$$\mathbf{p}_2' = \mathbf{u}' - \frac{\ddot{\mathbf{u}}'}{\phi_2'}$$

hiperbolik sayısı karşılık gelir.

Benzer şekilde $(n-1)$. mertebeden ivmenin sıfır olduğu $\mathbf{p}_\mathbf{n}'$ noktasına $(\mathbf{n}\text{-}\mathbf{1})$**. mertebeden ivme polü (yada $\mathbf{n}$. mertebeden hız polü)** denir ve bu pol $\overset{(n)}{\mathbf{x}'} = 0$ olmak üzere

$$\mathbf{p}_\mathbf{n}' = \mathbf{u}' - \frac{\overset{(n)}{\mathbf{u}'}}{\phi_n'} \tag{12.7}$$

elde edilir. Buradan $\overset{(n)}{\mathbf{u}'}$ nin değeri bulunup (12.6) denkleminde yerine yazılırsa, (12.6) denklemi pol noktaları cinsinden

$$\overset{(n)}{\mathbf{x}'} = \phi_n' \left(\mathbf{x}' - \mathbf{p}_\mathbf{n}' \right) \tag{12.8}$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir.

Şimdi, (12.7) denklemi ile verilen, düzlemsel hiperbolik hareket esnasında H' düzleminde ki yüksek mertebeden ivme polü ve (12.8) denklemi ile verilen yüksek mertebeden hız vektörünün H hareketli düzleminde ki karşılıklarını ifade edelim:

$\mathbf{p} = \mathbf{p_1}$ dönme polünü sürüklenme hızının sıfır olmasıyla yani, X noktası H-düzleminde sabit olmak üzere $\mathbf{X_f} = 0$ olmasıyla tarif etmiştik.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X_f} = \dot{\mathbf{u}}' e^{-j\varphi} + j\,\dot{\varphi}\mathbf{x}$$

olmak üzere

$$\dot{\mathbf{u}}' e^{-j\varphi} + j\,\dot{\varphi}\mathbf{x} = 0$$

eşitliğinden,

$$\mathbf{x} = \mathbf{p_1} = \frac{-\dot{\mathbf{u}}'}{\phi_1'} e^{-j\varphi}$$

elde edilir. $\mathbf{p_2}$ ivme polü ise $\ddot{\mathbf{x}} = 0$ olmasıyla elde edilir.

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}}' e^{-j\varphi} = \ddot{\mathbf{u}}' e^{-j\varphi} + \left(j\,\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2 \right)\left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}' \right) e^{-j\varphi}$$

ve $\mathbf{x} = \left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}' \right) e^{-j\varphi}$ olduğundan, $\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}}' e^{-j\varphi} = \ddot{\mathbf{u}}' e^{-j\varphi} + \phi_2' \mathbf{x}$ bulunur. Buradan,

$$\mathbf{x} = \mathbf{p_2} = \frac{-\ddot{\mathbf{u}}'}{\phi_2'} e^{-j\varphi}$$

elde edilir. Benzer şekilde $(n-1)$. mertebeden ivmenin sıfır olduğu $\mathbf{p_n}$ noktası yada $(n-1)$. mertebeden ivme polünü $\overset{(n)}{\mathbf{x}} = 0$ olmasıyla elde edilir:

$$\overset{(n)}{\mathbf{x}} = \overset{(n)}{\mathbf{x}'} e^{-j\varphi} = \overset{(n)}{\mathbf{u}'} e^{-j\varphi} + \phi_n' \left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}' \right) e^{-j\varphi}$$

ve $\mathbf{x} = \left(\mathbf{x}' - \mathbf{u}' \right) e^{-j\varphi}$ olduğundan, $\overset{(n)}{\mathbf{x}} = \overset{(n)}{\mathbf{u}'} e^{-j\varphi} + \phi_n' \mathbf{x}$ bulunur. Buradan,

$$\mathbf{x} = \mathbf{p_n} = -\frac{\overset{(n)}{\mathbf{u}'}}{\phi_n'} e^{-j\varphi} \tag{12.9}$$

elde edilir. Böylece (10.13) formülünün genelleştirilmesinde (12.8) yerine

$$\overset{(n)}{\mathbf{x}} = \phi_n' \left(\mathbf{x} - \mathbf{p_n} \right) \tag{12.10}$$

ifadesi yazılabilir.□

(12.8) bağıntısınının her iki tarafının hiperbolik anlamda mutlak değeri alınır ve ϕ_n' *hiperbolik sayısının* X *noktasından bağımsız olduğu göz önüne alınırsa aşağıdaki teoremi ispatsız verebiliriz:*

Teorem 12.2

1-parametreli düzlemsel hiperbolik hareketler altında yüksek mertebeden ivmelerin hiperbolik anlamda mutlak değeri, X noktasının ilgili mertebeden ivme polünden uzaklığı ile orantılıdır ve merkezleri bu pol olan daireler üzerinde aynı değeri alır.□

Teorem 12.3

Her t anında hareketli düzlemin bütün X noktalarının, $\overset{(n)}{\mathbf{x}} = \phi_n' \left(\mathbf{x} - \mathbf{p_n} \right)$ yüksek mertebeden ivme vektörleri ilgili mertebeden $\boldsymbol{P_n'X}$ pol ışınları ile her iki vektörün space-like yada time-like olması durumunda aynı $\psi = \arctan h \left(\frac{\operatorname{Re}(\phi_n')}{\operatorname{Im}(\phi_n')} \right)$, biri space-like diğeri time-like olması durumunda ise aynı $\psi = \arctan h \left(\frac{\operatorname{Im}(\phi_n')}{\operatorname{Re}(\phi_n')} \right)$ açısını yaparlar.

İspat:

$\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{x}}$ ivme vektörü ile $\boldsymbol{P_n'X}$ pol ışınının her ikisi future pointing time-like (yada past pointing time-like) aralarındaki açı ψ olmak üzere,

$$\cosh\psi = \frac{-\left\langle \overset{(n)}{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n}}'\boldsymbol{X} \right\rangle}{\left\| \overset{(n)}{\boldsymbol{x}} \right\| \left\| \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n}}'\boldsymbol{X} \right\|}$$

$$= \frac{-\left\langle \phi_n' \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n}}'\boldsymbol{X}, \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n}}'\boldsymbol{X} \right\rangle}{\left\| \overset{(n)}{\boldsymbol{x}} \right\| \left\| \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n}}'\boldsymbol{X} \right\|}$$

$$= \frac{-\operatorname{Re}\left(\phi_n'\right) \left\| \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n}}'\boldsymbol{X} \right\|^2}{\sqrt{\left[\operatorname{Re}\left(\phi_n'\right)\right]^2 + \left[\operatorname{Im}\left(\phi_n'\right)\right]^2} \left\| \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n}}'\boldsymbol{X} \right\|^2}$$

dir. Buradan,

$$\cosh\psi = \frac{-\operatorname{Re}\left(\phi_n'\right)}{\sqrt{\left[\operatorname{Re}\left(\phi_n'\right)\right]^2 + \left[\operatorname{Im}\left(\phi_n'\right)\right]^2}}$$ olarak elde edilir. Benzer şekilde, $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisi olmak üzere,

$$\sinh\psi = \frac{-\left\langle \overset{(n)}{\boldsymbol{x}}, D\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n}}'\boldsymbol{X} \right\rangle}{\left\| \overset{(n)}{\boldsymbol{x}} \right\| \left\| \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n}}'\boldsymbol{X} \right\|}$$

$$= \frac{-\left\langle \phi_n' \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n}}'\boldsymbol{X}, D\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n}}'\boldsymbol{X} \right\rangle}{\left\| \overset{(n)}{\boldsymbol{x}} \right\| \left\| \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n}}'\boldsymbol{X} \right\|}$$

$$= \frac{-\operatorname{Im}\left(\phi_n'\right) \left\| \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n}}'\boldsymbol{X} \right\|^2}{\sqrt{\left[\operatorname{Re}\left(\phi_n'\right)\right]^2 + \left[\operatorname{Im}\left(\phi_n'\right)\right]^2} \left\| \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n}}'\boldsymbol{X} \right\|^2}$$

dir. Buradan,

$$\sinh\psi = \frac{-\operatorname{Im}\left(\phi_n'\right)}{\sqrt{\left[\operatorname{Re}\left(\phi_n'\right)\right]^2 + \left[\operatorname{Im}\left(\phi_n'\right)\right]^2}}$$ olarak elde edilir. Böylece, $\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{x}}$ ivme vektörü ile $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{n}}'\boldsymbol{X}$ pol ışınının her ikisi future pointing time-like (yada past pointing time-like) aralarındaki açı ψ olmak ise,

$$\tanh\psi = \frac{\sinh\psi}{\cosh\psi} = \frac{\operatorname{Im}\left(\phi_n'\right)}{\operatorname{Re}\left(\phi_n'\right)}$$

olarak elde edilir. Böylece,

$$\psi = \operatorname{arctan}h\left(\frac{\operatorname{Im}(\phi_n')}{\operatorname{Re}(\phi_n')}\right)$$

dir. Benzer şekilde, $\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{x}}$ ivme vektörü ile $\boldsymbol{P_n'X}$ pol ışınının biri future pointing time-like diğeri past pointing time-like veya her ikisi space-like vektörler ve aralarındaki açı ψ olmak üzere,

$$\tanh\psi = \frac{\operatorname{Im}(\phi_n')}{\operatorname{Re}(\phi_n')}$$

olarak elde edilir. Buradan,

$$\psi = \operatorname{arctan}h\left(\frac{\operatorname{Im}(\phi_n')}{\operatorname{Re}(\phi_n')}\right)$$

dir. Ayrıca, $\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{x}}$ ivme vektörü ile $\boldsymbol{P_n'X}$ pol ışınının biri time-like diğeri space-like vektör ve aralarındaki açı ψ olmak üzere,

$$\tanh\psi = \frac{\operatorname{Re}(\phi_n')}{\operatorname{Im}(\phi_n')}$$

olarak elde edilir. Buradan,

$$\psi = \operatorname{arctan}h\left(\frac{\operatorname{Re}(\phi_n')}{\operatorname{Im}(\phi_n')}\right)$$

dir.

Hiperbolik bir çarpan ile çarpma koordinat sisteminin ilk durumundan bir dönme-uzama (dönme+uzama) sına karşılık gelir.

Her bir X noktasında bu noktaya ait yüksek mertebeden ivme vektörlerini oluşturur ve bu vektörleri X noktaları etrafında sabit açı kadar döndürürsek, bu takdirde dönmüş olan bu vektörlerin hepsi, ilgili mertebeden ivme polünü gösterir. □

BÖLÜM 13

1- PARAMETRELİ DÜZLEMSEL HİPERBOLİK TERS HAREKETLER ALTINDA YÜKSEK MERTEBEDEN İVMELER VE İVME POLLERİ

Tezin bu üçüncü orijinal bölümünde 1-parametreli düzlemsel hiperbolik ters hareketler altında yüksek mertebeden ivmeler ve ivme polleri verilmiştir ve elde edilen sonuçlar [9] nolu çalışmada SCI-Expanded kapsamında bir dergide yayınlanmıştır. Ayrıca, uluslararası bir konferansta bildiri olarak sunulmuştur, [10].

13.1 1-Parametreli Düzlemsel Hiperbolik Ters Hareketler Altında Yüksek Mertebeden İvmeler

Bir parametreli bir H/H' hareketinin H'/H ters hareketi bölüm10 da

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{x}' e^{-j\varphi} \tag{13.1}$$

denklemi ile tarif edilmişti. H'/H ters hareketi esnasında X, H'-düzleminde sabit bir nokta olsun. Bu noktayı hiperbolik $\mathbf{x}'$ sayısı ile gösterelim. (13.1) denkleminden t'ye göre ardışık türevler alarak H-düzlemine göre yüksek mertebeden ivmeler (yüksek mertebeden hızlar) bulunur. Buna göre (13.1) denkleminin türevini alırsak

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{u}} - j\dot{\varphi}\mathbf{x}' e^{-j\varphi} = \dot{\mathbf{u}} - j\dot{\varphi}\left(\mathbf{x} - \mathbf{u}\right) \tag{13.2}$$

hızını, bu ifadenin t ye göre türevini alarak X noktasının

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{u}} - j\ddot{\varphi}\left(\mathbf{x} - \mathbf{u}\right) - j\dot{\varphi}\left(\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{u}}\right)$$

ivmesi bulunur. (13.2) denklemindeki $\dot{\mathbf{x}}$ nın değerini bu eşitlikte yerine yazarsak

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{u}} + \left(-j\,\ddot{\varphi} + (-j\,\dot{\varphi})(-j\,\dot{\varphi})\right)\left(\mathbf{x} - \mathbf{u}\right) \tag{13.3}$$

bulunur. (13.3) eşitliğinin bir defa daha türevini alarak 3.mertebeden hız (2. mertebeden ivme) vektörü için

$$\dddot{\mathbf{x}} = \dddot{\mathbf{u}} - \left(j\,\dddot{\varphi} - 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\right)\left(\mathbf{x} - \mathbf{u}\right) - \left(j\,\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2\right)\left(\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{u}}\right)$$

elde edilir. Eğer (13.2) denklemindeki $\dot{\mathbf{x}}$ nın değerini bu eşitlikte yerine yazarsak,

$$\dddot{\mathbf{x}}' = \dddot{\mathbf{u}}' + \left((-j\,\dddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}) + (-j\,\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2)(-j\,\dot{\varphi})\right)\left(\mathbf{x} - \mathbf{u}\right) \tag{13.4}$$

elde edilir. (13.4) ifadesinin bir defa daha türevini alarak 4.mertebeden hız (3. mertebeden ivme) vektörü

$$\overset{(4)}{\mathbf{x}} = \overset{(4)}{\mathbf{u}} + \left((-j\,\overset{(4)}{\varphi} + 3\ddot{\varphi}^2 + 3\dot{\varphi}\dddot{\varphi} - 3j\,\dot{\varphi}^2\ddot{\varphi}) + (-j\,\dddot{\varphi} + 3\dot{\varphi}\ddot{\varphi} - j\,\dot{\varphi}^3)(-j\,\dot{\varphi}) \right)\left(\mathbf{x} - \mathbf{u}\right) \tag{13.5}$$

şeklinde elde edilir. (13.2) denklemindeki $\left(\mathbf{x} - \mathbf{u}\right)$ nün katsayısına ϕ_1 denilirse;

$\phi_1 = -j\,\dot{\varphi} \neq 0$,

(13.3) denkleminde $\left(\mathbf{x} - \mathbf{u}\right)$ nün katsayısına ϕ_2 denilirse;

$\phi_2 = -j\,\ddot{\varphi} + (-j\,\dot{\varphi})(-j\,\dot{\varphi}) = \dot{\phi}_1 + \phi_1\phi_1$,

(13.4) denkleminde $\left(\mathbf{x} - \mathbf{u}\right)$ nün katsayısına ϕ_3 denilirse;

$\phi_3 = \left((-j\,\dddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}) + (-j\,\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2)(-j\,\dot{\varphi})\right) = \dot{\phi}_2 + \phi_2\phi_1$,

ve (13.5) denkleminde $\left(\mathbf{x} - \mathbf{u}\right)$ nün katsayısına ϕ_4 denilirse,

$$\phi_4 = \left((-j\,\overset{(4)}{\varphi} + 3\ddot{\varphi}^2 + 3\dot{\varphi}\dddot{\varphi} - 3j\,\dot{\varphi}^2\ddot{\varphi}) + (-j\,\dddot{\varphi} + 3\dot{\varphi}\ddot{\varphi} - j\,\dot{\varphi}^3)(-j\,\dot{\varphi}) \right) = \dot{\phi}_3 + \phi_3\phi_1,$$

elde edilir. (Çalışmamız boyunca $\phi_n = \dot{\phi}_{n-1} + \phi_{n-1}\phi_1 \neq 0$ olduğu kabul edilecektir.)

Benzer şekilde ardışık türevler alarak yüksek mertebeden ivmeler elde edilir. (n-1). mertebeden ivme n. mertebeden hıza eşittir. Dolayısıyla yüksek mertebeden ivmelere aynı zamanda yüksek mertebeden hız da denilebilir. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 13.1

H'/H ; $-\varphi$ dönme açılı, 1-parametreli hiperbolik düzlemsel ters hareket olsun.

$\phi_1 = -j\dot{\varphi}, \ \ \phi_0 = 1, \ \ \overset{(0)}{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$ ve

$$\phi_n = \dot{\phi}_{n-1} + \phi_{n-1}\phi_1 \neq 0 \, , \tag{13.6}$$

olmak üzere sabit düzlemdeki, sabit bir $\mathbf{x}'$ noktasının yüksek mertebeden ivmeleri için

$$\overset{(n)}{\mathbf{x}} = \overset{(n)}{\mathbf{u}} + \phi_n \left(\mathbf{x} - \mathbf{u}\right) \tag{13.7}$$

bağıntısı mevcuttur.

İspat

İspatımızı tümevarım yoluyla yapalım.

$n=1$, $n=2$, $n=3$ ve $n=4$ için teoremin doğru olduğu yukarıda gösterilmiştir.

Şimdi $n=k$ için (13.6) ve (13.7) eşitliklerinin doğru olduğunu kabul edip $n=k+1$ için doğruluğunu gösterelim. Yani $\phi_k = \dot{\phi}_{k-1} + \phi_{k-1}\phi_1$ ve $\overset{(k)}{\mathbf{x}} = \overset{(k)}{\mathbf{u}} + \phi_k \left(\mathbf{x} - \mathbf{u}\right)$ olsun.

Eğer bu son denklemin bir defa daha türevi alınırsa

$$\overset{(k+1)}{\mathbf{x}} = \overset{(k+1)}{\mathbf{u}} + \dot{\phi}_k \left(\mathbf{x} - \mathbf{u}\right) + \phi_k \left(\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{u}}\right)$$

elde edilir. Ayrıca (13.2) denkleminden $\dot{\mathbf{x}}$ nın değeri bu eşitlikte yerine yazılırsa,

$$\overset{(k+1)}{\mathbf{x}} = \overset{(k+1)}{\mathbf{u}} + \left(\dot{\phi}_k + \phi_k\phi_1\right)\left(\mathbf{x} - \mathbf{u}\right)$$

elde edilir. Buradan,

$$\overset{(k+1)}{\mathbf{x}} = \overset{(k+1)}{\mathbf{u}} + \phi_{k+1}\left(\mathbf{x} - \mathbf{u}\right)$$

olduğu görülür. □

13.2 1-Parametreli Düzlemsel Hiperbolik Ters Hareketler Altında Yüksek Mertebeden Poller

Sürüklenme hızının sıfır olduğu yani $\dot{\mathbf{x}} = 0$ olan noktaları araştıralım;

$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{u}} - j\dot{\varphi}(\mathbf{x} - \mathbf{u}) = 0$ için

$$\mathbf{x} = \mathbf{q_1} = \mathbf{u} - \frac{\dot{\mathbf{u}}}{\phi_1} \qquad (\phi_n \neq 0 \text{ olduğu göz önünde bulundurulursa})$$

elde edilir.

$\mathbf{q_2}$ ivme polü ise, $\ddot{\mathbf{x}} = 0$

veya

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{u}} + \left(-j\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2\right)(\mathbf{x} - \mathbf{u}) = 0$$

olmak üzere

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} - \frac{\ddot{\mathbf{u}}}{-i\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\mathbf{q_2}$ ivme polüne

$$\mathbf{q_2} = \mathbf{u} - \frac{\ddot{\mathbf{u}}}{\phi_2}$$

kompleks sayısı karşılık gelir.

Benzer şekilde $(n-1)$. mertebeden ivmenin sıfır olduğu $\mathbf{q_n}$ noktasına $(\mathbf{n-1})$**. mertebeden ivme polü (yada $\mathbf{n}$. mertebeden hız polü)** denir ve bu pol $\overset{(n)}{\mathbf{x}} = 0$ olmak üzere

$$\mathbf{q_n} = \mathbf{u} - \frac{\overset{(n)}{\mathbf{u}}}{\phi_n} \tag{13.8}$$

elde edilir. Buradan $\overset{(n)}{\mathbf{u}}$ nin değeri bulunup (13.7) denkleminde yerine yazılırsa, (13.7) denklemi pol noktaları cinsinden

$$\overset{(n)}{\mathbf{x}} = \phi_n\left(\mathbf{x}-\mathbf{q_n}\right) \tag{13.9}$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir.

$\mathbf{q_n}$ *polünün* H' *düzleminde ki karşılığı:*

$$\mathbf{q'_n} = -\frac{\overset{(n)}{\mathbf{u}}}{\phi_n} e^{j\varphi} \tag{13.10}$$

dir.

13.3 1-Parametreli Düzlemsel Hiperbolik Hareketler Altında ϕ_n ve ϕ'_n Fonksiyonları Arasındaki Bağıntı

$n=1$, $n=2$, $n=3$ için doğrudan aşağıdaki bağıntılar bulunur:

$$\phi_n = \overline{\phi'_n}\ ,\ \phi'_n = \overline{\phi_n} \tag{13.11}$$

Şimdi bu eşitliklerin n *için doğru olduklarını kabul edip* $(n+1)$ *için ispat edelim:*

$\phi_n = \overline{\phi'_n}$ olsun. Buradan bir defa daha türev alınırsa

$$\phi_{n+1} = \dot{\phi}_n + \phi_n\phi_1 = \overline{\dot{\phi}'_n} + \overline{\phi'_n}\,\overline{\phi'_1} = \overline{\phi'_{n+1}}$$

elde edilir. Böylece (13.11) denkleminin doğruluğu ispat edilmiş olur.

Şimdi $e^{j\varphi}$ *ve* $e^{-j\varphi}$ *fonksiyonlarının* t *zamanına göre ardışık türevlerini alalım:*

$$\frac{d}{dt}e^{j\varphi} = \phi'_1 e^{j\varphi}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}e^{j\varphi} = \left(\dot{\phi}'_1 + \phi'^2_1\right)e^{j\varphi} = \phi'_2 e^{j\varphi}$$

ve genel olarak

$$\frac{d^n}{dt^n}e^{j\varphi} = \phi'_n e^{j\varphi} \tag{13.12}$$

yazılabilir. Benzer şekilde,

$$\frac{d^n}{dt^n} e^{-j\varphi} = \phi_n e^{-j\varphi} \tag{13.13}$$

elde edilir.

(13.12) ve (13.13) denklemlerinden

$\phi'_n = e^{-j\varphi} \dfrac{d^n}{dt^n} e^{j\varphi}$ ve $\phi_n = e^{j\varphi} \dfrac{d^n}{dt^n} e^{-j\varphi}$

yazılabilir.

$\dfrac{d^n}{dt^n}(e^{j\varphi} e^{-j\varphi}) = 0$ olduğundan ve Leibniz formülü gereğince $\left(\dfrac{d^n}{dt^n}(u,v) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \overset{(k)}{u} \overset{(n-k)}{v} \right)$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \phi'_k \phi_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \phi_k \phi'_{n-k} = 0$$

elde edilir.

13.4 P_n ve Q_n İvme Polleri Arasındaki Bağıntı

(12.7), (12.8), (13.8) ve (13.10) denklemlerinden

$$\mathbf{p_n} = -\frac{\overset{(n)}{\mathbf{u}'}}{\phi'_n} e^{-j\varphi}, \qquad \mathbf{p'_n} = \mathbf{u}' - \frac{\overset{(n)}{\mathbf{u}'}}{\phi'_n} \tag{13.14}$$

$$\mathbf{q_n} = \mathbf{u} - \frac{\overset{(n)}{\mathbf{u}}}{\phi_n}, \qquad \mathbf{q'_n} = -\frac{\overset{(n)}{\mathbf{u}}}{\phi_n} e^{j\varphi} \tag{13.15}$$

yazılabilir.

(13.13) ve Leibniz formülü yardımıyla

$$\overset{(n)}{u'} = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \overset{(k)}{u} \phi'_{n-k} e^{-j\varphi}$$

elde edilir. (13.15) in ikinci formülü kullanılırsa

$\overset{(n)}{u'} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q'_k \phi_k \phi'_{n-k}$ ve $q_0 = 0$ ve $q'_0 = u'$ olduğundan $\overset{(n)}{u'}$ için

$$\overset{(n)}{u'} = u'\phi_n' + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} q_k' \,\phi_k \,\phi_{n-k}' \tag{13.16}$$

ifadesi yazılabilir.

(13.14) ün ikinci formülünden ve (13.16) dan,

$$\mathbf{p_n'} = -\frac{1}{\phi_n'} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} q_k' \,\phi_k \,\phi_{n-k}' \tag{13.17}$$

yazılabilir. Benzer şekilde,

$$\mathbf{p_n} = -\frac{1}{\phi_n'} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} q_k \,\phi_k \,\phi_{n-k}', \tag{13.18}$$

$$q_{\mathbf{n}} = -\frac{1}{\phi_n'} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p_k \,\phi_k' \phi_{n-k} \tag{13.19}$$

ve

$$q_{\mathbf{n}}' = -\frac{1}{\phi_n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p_k' \,\phi_k' \phi_{n-k} \tag{13.20}$$

denklemleri elde edilir. Böylece H/H' hareketinin H'/H ters hareketinin P_n ve Q_n ivme polleri arasındaki bağıntı elde edilmiş olur.

BÖLÜM 14

1- PARAMETRELİ DÜZLEMSEL HİPERBOLİK HAREKETLER ALTINDA PARAMETRE OLARAK DÖNME AÇISI

Tezin bu son orijinal bölümünde, hareketin t parametresi yerine hareketin φ dönme açısı alınarak yüksek mertebeden hız ve ivmeler yeniden elde edilmiştir. Burada elde edilen sonuçlar [9] de makale olarak yayınlanmıştır.

H/H', 1-parametreli düzlemsel hiperbolik hareketin $t \in I$ parametresi yerine, parametre olarak φ dönme açısının seçilmesiyle bölüm10 ve bölüm11 de verilen denklemlerde büyük sadelikler elde edilir. Bu takdirde φ dönme açısı hareketimizin bir doğal parametresi rolünü almış olur.

14.1 φ-parametreli Hiperbolik Hareket Altında Yüksek Mertebeden İvmeler ve Poller

$\phi_1' = j\dot{\varphi}$, $\phi_1 = -j\dot{\varphi}$ olmak üzere, $\varphi = t$ için $\dot{\varphi} = 1$ olduğundan,

$\phi_1' = j$

elde edilir. Benzer şekilde işlemlere devam edilirse

$\phi_2' = j^2 = 1$

$\phi_3' = j^3$

ve

$$\phi_n^{'} = j^n \tag{14.1}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde,

$$\phi_n = (-j)^n \tag{14.2}$$

elde edilir.

Buna göre $\mathbf{p}_\mathbf{n}'$ ivme polü için, (12.7) denkleminden

$$\mathbf{p}_\mathbf{n}' = \mathbf{u}' - \frac{\overset{(n)}{\mathbf{u}'}}{\phi_n'} = \mathbf{u}' - j^{-n}\overset{(n)}{\mathbf{u}'} \tag{14.2}$$

yazılabilir. $\mathbf{p}_\mathbf{n}$ ivme polü için ise, (12.9) denkleminden

$$\mathbf{p}_\mathbf{n} = -\frac{\overset{(n)}{\mathbf{u}'}}{\phi_n'}e^{-j\varphi} = -j^{-n}\overset{(n)}{\mathbf{u}'}e^{-j\varphi} \tag{14.3}$$

ifadeleri elde edilir. Böylece $\overset{(\mathbf{n})}{\mathbf{x}'}$ için

$$\overset{(n)}{\mathbf{x}^{'}} = \overset{(n)}{\mathbf{u}^{'}} + j^n\left(\mathbf{x}^{'} - \mathbf{u}^{'}\right) \tag{14.4}$$

yazılabilir. Bu ifadeyi $\mathbf{p}_\mathbf{n}^{'}$ cinsinden tekrar düzenlersek

$$\overset{(n)}{\mathbf{x}^{'}} = j^n\left(\mathbf{x}^{'} - \mathbf{p}_\mathbf{n}^{'}\right) \tag{14.5}$$

elde edilir. Buradan

$$\mathbf{p}_\mathbf{n}' = \mathbf{x}' - j^{-n}\overset{(n)}{\mathbf{x}'} \tag{14.6}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\mathbf{q}_\mathbf{n} = \mathbf{x} - j^{-n}\overset{(n)}{\mathbf{x}} \tag{14.7}$$

elde edilir. Bir vektörü j ile çarpmanın, o vektörü başlangıç etrafında Lorentz anlamında dik bir vektöre dönüştürdüğünü düşünürsek aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 14.1

Dönme açısı parametre olarak seçilen bir 1-parametreli düzlemsel hiperbolik hareket esnasında, $\boldsymbol{x}'$ vektörü ve $w = -j^{-n}$ ile çarpılan n. mertebeden $\overset{(n)}{\mathbf{x}'}$ türev vektörü toplanırsa, bu toplam vektörünün uç noktası $(n-1)$. mertebeden $\mathbf{p}'_{\mathbf{n}}$ ivme polüne karşılık gelir. Ayrıca, bir 1-parametreli düzlemsel hiperbolik hareket esnasında $\boldsymbol{x}$ vektörü ve $w = -j^{-n}$ ile çarpılan n. mertebeden $\overset{(n)}{\mathbf{x}}$ türev vektörü toplanırsa, bu toplam vektörünün uç noktası $(n-1)$. mertebeden $\mathbf{q}_{\mathbf{n}}$ ivme polüne karşılık gelir.

KAYNAKLAR

[1] Müller, H.R., (1963). Kinematik Derleri, Ankara Üniversitesi, Ankara.

[2] Yüce, S. ve Kuruoğlu, N., (2008). “One-parameter plane hyperbolic Motions”, Adv. appl. Clifford alg., 18 (2): 279–285.

[3] Blaschke, W. ve Müller, H. R., (1956). Ebene Kinematik, Verlag Oldenbourg, München.

[4] Ergin, A. A., (1991). “On The One Parameter Lorentzian Motions”, Commun Fac. Sci. Univ. Ank. Series A , 40: 59-66.

[5] Düldül, M., (2000). Kompleks Düzlemde 1-Parametreli Hareketler ve Holditch Teoremi, Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Samsun.

[6] Yüce, S. ve Kuruoğlu, N., (2004). “Holditch-type theorems for the planar Lorentzian motons”, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 17(4): 467-471.

[7] Yüce S., Kuruoğlu N., (2010). “Holditch theorem and Steiner formula for the planar hyperbolic motions”, Adv. Appl. Clifford Algebr., 20(1): 195–200.

[8] Şahin S. ve Yüce S., (2013). “Higher-Order Acceleration and Poles under the One-Parameter Planar Hyperbolic Motions”, 2013 Lehigh University Geometry and Topology Conference, Bethlehem, Pennsylvania, USA, May 24-26.

[9] Şahin S. ve Yüce S., (2014). “ Higher-Order Acceleration and Poles under the One-Parameter Planar Hyperbolic Motions and Their Inverse Motions”, Mathematical Problems in Engineering, 2014: 686509.

[10] Şahin S. ve Yüce S., (2014). “Higher-Order Acceleration under the Inverse One-Parameter Planar Hyperbolic Motions”, Southeastern Spring Sectional Meeting University of Tennessee, Knoxville, Knoxville, USA, March 21-23.

[11] Birman, G., S., ve Nomizu, K., (1984). “Trigonometry in Lorentzian geometry”, Am. Math. Mont. 91(9): 543-549.

[12] Nesovic, E., ve Petrovic-Torgasev, M., (2003). “Some Trigonometric Relations In the Lorentz Plane”, Kragujevac J. Math. 25: 219-225.

[13] Ulrych, S., (2008). “Representations of Clifford algebras with Hyperbolic numbers”, Adv. Appl. Clifford Adv. Appl. Clifford Algebra, 18(1): 93–114.

[14] Sobczyk, G., (1995). “The Hyperbolic Number Plane”, The College Mathematics Journal, 26: 268.

[15] Motter, A. E. ve Rosa, M. A. F., (1998). “Hyperbolic calculus”, Adv. Appl. Clifford Al., 8: 109.

EK-A

LORENTZ DÜZLEMİ

A-1 Temel Kavramlar

Öklid iç çarpımı pozitif tanımlı olduğundan, E^2 Öklid uzayında vektörlerin karakterleri aynıdır. Fakat, Lorentz iç çarpımı ile donatılmış L^2 Lorentz düzlemi ele alınırsa, bu düzlemde vektörler, time-like, space-like ve light-like(null) vektörler olarak sınıflandırılır. Bu sınıflandırma, Lorentziyen geometride son derece önemlidir. Bu bölümde, Lorentz düzlemi ile ilgili temel kavramlar ve bunlarla ilgili temel özellikler verilecektir [4], [11].

Tanım A.1

$\mathbb{R}^2$ standart reel vektör uzayı üzerinde $\mathbf{x}=(x_1,x_2),\mathbf{y}=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$ için,

$$\begin{aligned}\langle\cdot\rangle:\ &\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\ &(\mathbf{x},\mathbf{y})\to\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=x_1y_1+x_2y_2\end{aligned}$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa, $\mathbb{R}^2$ afin uzayına, Öklid düzlemi denir ve E^2 ile gösterilir.

Tanım A.2

$\mathbb{R}^2$ standart reel vektör uzayı üzerinde $\mathbf{x}=(x_1,x_2),\mathbf{y}=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$ için,

$$\begin{aligned}\langle\cdot\rangle:\ &\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\ &(\mathbf{x},\mathbf{y})\to\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=x_1y_1-x_2y_2\end{aligned}$$

biçiminde tanımlı Lorentz iç çarpımı alınırsa $\mathbb{R}^2$ afin uzayı, Lorentz düzlemi olarak isimlendirilir ve L^2 ile gösterilir.

Lorentz iç çarpımı pozitif tanımlı olmadığından, bu uzaydaki vektörler aşağıdaki biçimde sınıflara ayrılır.

Tanım A.3

$\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in L^2$ olsun. Eğer

- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$ veya $\mathbf{x} = 0$ ise $\mathbf{x}$ ya space-like vektör,
- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle < 0$ ise $\mathbf{x}$ ya time-like vektör,
- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ ve $\mathbf{x} \neq 0$ ise $\mathbf{x}$ ya light-like (veya null) vektör denir.

Tanım A.4

$\mathbf{x} \in L^2$ için $\mathbf{x}$ nın normu,

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle|}$$

olarak tanımlanır. Buna göre,

- $\mathbf{x}$ time-like ve $\|\mathbf{x}\| = 1$ ise $\mathbf{x}$ ya birim time-like vektör,
- $\mathbf{x}$ space-like ve $\|\mathbf{x}\| = 1$ ise $\mathbf{x}$ ya birim space-like vektör denir.

Teorem A.1

$\mathbf{x} \in L^2$ için

- $\|\mathbf{x}\| > 0$ dır.
- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}$ bir null vektördür.
- $\mathbf{x}$ bir time-like vektör ise $\|\mathbf{x}\|^2 = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ dır.
- $\mathbf{x}$ bir space-like vektör ise $\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ dır.

Tanım A.5

L^2 Lorentz düzleminde iki vektör $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ olsun. Eğer

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$$

ise $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörlerine Lorentz anlamında diktirler denir.

Teorem A.2

L^2 Lorentz düzleminde iki time-like (veya space-like) vektör dik olamaz.

Sonuç A.1

L^2 Lorentz düzleminde iki vektörün dik olması için birinin time-like diğerinin space-like olması gerekir.

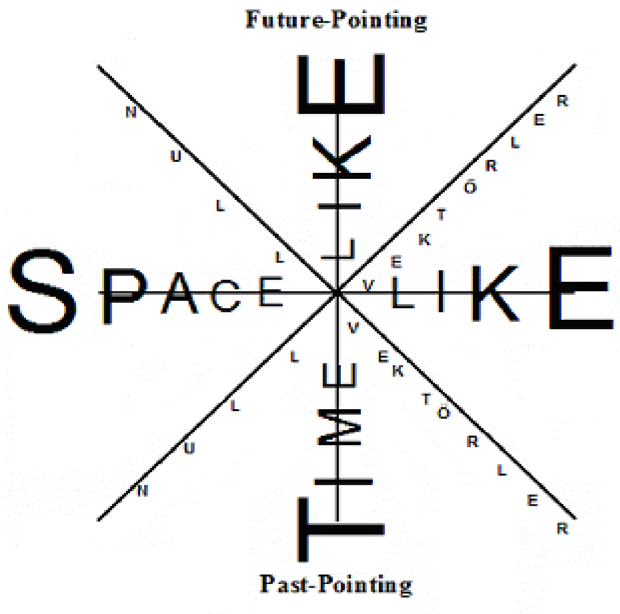
Tanım A.6

$\mathbf{x} \in L^2$ time-like vektör olsun. $\mathbf{e} = (0,1)$ olmak üzere,

- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{e} \rangle < 0$ ise $\mathbf{x}$ ya future pointing time-like vektör,
- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{e} \rangle > 0$ ise $\mathbf{x}$ ya past pointing time-like vektör denir.

Sonuç A.2

$\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in L^2$ vektörünün future pointing time-like vektör olması için gerek ve yeter şart $|x_1| < x_2$ olmasıdır. $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in L^2$ vektörünün past pointing time-like vektör olması için gerek ve yeter şart $x_1 < |x_2|$ olmasıdır.



Şekil EK-A. 1 Lorentz düzlemi

Lemma A.1

$\mathbf{x},\mathbf{y}\in L^2$ future pointing time-like vektörler olsun. Bu durumda,

- $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle < 0$
- $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, future pointing time-like vektördür (Kapalılık).
- $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle \geq \|\mathbf{x}\|.\|\mathbf{y}\|$ (Lorentz uzayında Schwartz eşitsizliği)
- $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \geq \|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$ (Lorentz uzayında üçgen eşitsizliği)

dır.

A-2 L^2 Lorentz Düzleminde Açı Kavramı ve Dönme

Düzlemsel, küresel ve uzay hareketlerinde en önemli kavram açı kavramıdır. Lorentz geometride açı kavramı, Öklid geometrisinden tamamen farklıdır. Bu farklılık vektörlerin karakterinden ortaya çıkmaktadır.

Tanım 1.7

L^2 düzleminde dönme hareketinin matrisi

$$A = \begin{bmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Öklid düzleminde $x = y$ (1. açıortay) doğrusuna gore yansımanın matrisi $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere, $B = AD$ matrisi de

$$B = \begin{bmatrix} \sinh\theta & \cosh\theta \\ \cosh\theta & \sinh\theta \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

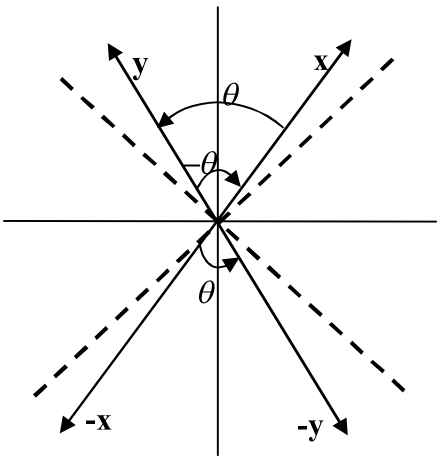
A-3 Future pointing (veya past pointing) time-like vektörler arasındaki açı

$\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ve $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in L^2$ future pointing (veya past pointing) time-like iki birim vektör olsun, $\mathbf{x}$ den $\mathbf{y}$ ye açının Lorentz anlamındaki ölçüsü $\theta \in \mathbb{R}$ ise;

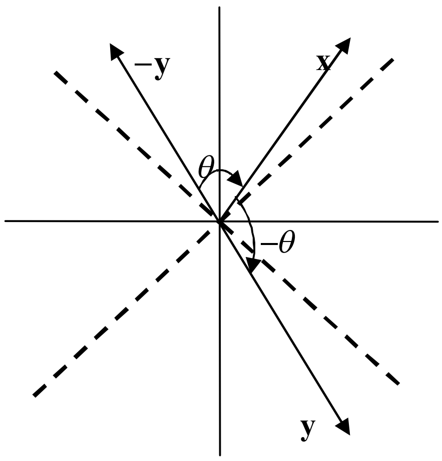
$$\begin{bmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

eşitliği sağlanır ve $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \theta$ şeklinde gösterilir. Bu durumda,

$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ ve $(-\mathbf{x}, -\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dir. (sekil EK-A. 2a)



Şekil EK-A. 2a İki f.p. veya p.p. time-like vektör arasındaki açı



Şekil EK-A. 2b Biri f.p. diğeri p.p. time-like iki vektör arasındaki açı

A-4 Biri future pointing time-like, diğeri past pointing time-like iki vektör arasındaki açı

$\mathbf{x}=(x_1,x_2)$ future pointing time-like birim vektör, $\mathbf{y}=(y_1,y_2)$ past pointing time-like birim vektör olsun. Bu durumda $-\mathbf{y}$ future pointing time-like birim vektördür. Buradan $(-\mathbf{y},\mathbf{x})=\theta$ ise; $\mathbf{x}$ den $\mathbf{y}$ ye olan açı, $(\mathbf{x},\mathbf{y})=-\theta$ olarak tanımlanır. (Şekil Ek-A. 2b)

Teorem A.3 (Açı Özellikleri)

$\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ $\in L^2$ future pointing time-like birim iki vektör olmak üzere aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

- $(-\mathbf{x},\mathbf{x})=0$
- $(\mathbf{x},\mathbf{y})+(\mathbf{y},\mathbf{z})=(\mathbf{x},\mathbf{z})$
- $(-\mathbf{x},\mathbf{x})=0$
- $(\mathbf{y},\mathbf{x})=-(\mathbf{x},\mathbf{y})$
- $(-\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{x},\mathbf{y})$
- $(\mathbf{x},-\mathbf{y})=(\mathbf{x},\mathbf{y})$

Lemma A.2

$\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$, future pointing time-like birim vektörler olsun. θ, $\mathbf{x}$ den $\mathbf{y}$ ye hiperbolik açı ise

$\cosh\theta=-\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$

dir [11].

İspat: $\mathbf{x}$ den $\mathbf{y}$ ye hiperbolik açı θ ise

$$\begin{bmatrix}\cosh\theta & \sinh\theta\\ \sinh\theta & \cosh\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$$

dir. Buradan

$$x_1 \cosh\theta + x_2 \sinh\theta = y_1$$
$$x_1 \sinh\theta + x_2 \cosh\theta = y_2$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle \\
&= \langle (x_1, x_2), (x_1 \cosh\theta + x_2 \sinh\theta, x_1 \sinh\theta + x_2 \cosh\theta) \rangle \\
&= \left(x_1^2 - x_1^2 \right) \cosh\theta \\
&= -\|\mathbf{x}\|^2 \cosh\theta \\
&= -\cosh\theta
\end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma A.3

Lorentz düzleminde herhangi iki vektör arasındaki açı aşağıdaki şekilde tanımlanır [12]:

1. $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$, future pointing time-like (yada past pointing time-like) birim vektörler ve θ, $\mathbf{x}$ den $\mathbf{y}$ ye hiperbolik açı ise,

$$\cosh\theta = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \quad \sinh\theta = -\langle \mathbf{x}, D\mathbf{y} \rangle$$

2. $\mathbf{x}$ future pointing time-like ve $\mathbf{y}$ past pointing time-like birim vektörler ve θ, $\mathbf{x}$ den $\mathbf{y}$ ye hiperbolik açı ise,

$$\cosh\theta = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \quad \sinh\theta = \langle \mathbf{x}, D\mathbf{y} \rangle$$

3. $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ aynı bölgede iki space-like birim vektörler ve θ, $\mathbf{x}$ den $\mathbf{y}$ ye hiperbolik açı ise,

$$\cosh\theta = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \quad \sinh\theta = \langle \mathbf{x}, D\mathbf{y} \rangle$$

4. $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ farklı bölgede iki space-like birim vektörler ve θ, $\mathbf{x}$ den $\mathbf{y}$ ye hiperbolik açı ise,

$$\cosh\theta = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \quad \sinh\theta = -\langle \mathbf{x}, D\mathbf{y} \rangle$$

5. $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ space-like birim, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ time-like birim vektör ve $\operatorname{sgn} x_1 = \operatorname{sgn} y_2$ iken θ, $\mathbf{x}$ den $\mathbf{y}$ ye hiperbolik açı ise,

$\cosh\theta = \langle \mathbf{x}, D\mathbf{y} \rangle$, $\quad \sinh\theta = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$

6. $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ space-like birim, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ time-like birim vektör ve $\operatorname{sgn} x_1 \neq \operatorname{sgn} y_2$ iken θ, $\mathbf{x}$ den $\mathbf{y}$ ye hiperbolik açı ise,

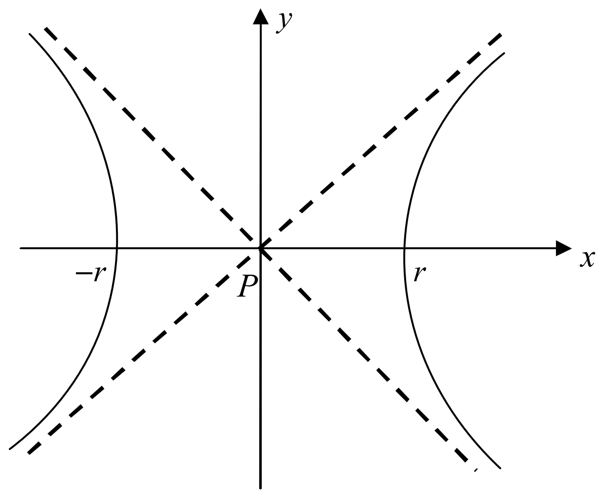
$\cosh\theta = -\langle \mathbf{x}, D\mathbf{y} \rangle$, $\quad \sinh\theta = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$

Tanım A.8

$P \in L^2$ ve $r > 0$ olmak üzere,

$$\left\{ Q \in L^2 \,\middle|\, \langle \mathbf{PQ}, \mathbf{PQ} \rangle = r^2 \right\}$$

kümesinin oluşturduğu eğriye P merkezli r yarıçaplı time-like Lorentz çemberi denir.



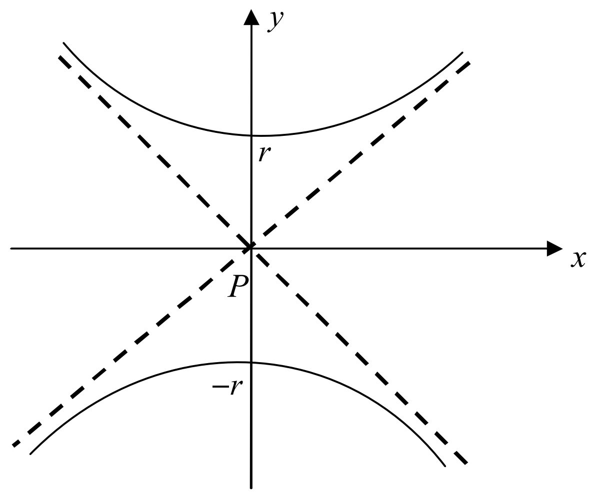
Şekil EK-A. 3 Time-like Lorentz çemberi

Tanım A.9

$P \in L^2$ ve $r > 0$ olmak üzere,

$$\left\{ Q \in L^2 \,\middle|\, \langle \mathbf{PQ}, \mathbf{PQ} \rangle = -r^2 \right\}$$

kümesinin oluşturduğu eğriye, P merkezli r yarıçaplı space-like Lorentz çemberi denir.



Şekil EK-A. 4 Space-like Lorentz çemberi

EK-B

KOMPLEKS SAYILAR

B-1 Temel Kavramlar

$\mathbb{C}=\left\{z=x+iy \,\middle|\, x,y\in\mathbb{R}, i^2=-1\right\}$ Kompleks sayılar kümesi üzerinde iki iç işlem ve eşitlik tanımlayalım:

Toplama:

$z_1=x_1+iy_1,\ z_2=x_2+iy_2\in\mathbb{C}$ için $\quad +:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ iç işlemi

$$\begin{aligned} z_1+z_2 &= x_1+iy_1+x_2+iy_2 \\ &= x_1+x_2+i(y_1+y_2) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Çarpma:

$z_1=x_1+iy_1,\ z_2=x_2+iy_2\in\mathbb{C}$ için $\quad \bullet:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ iç işlemi

$$\begin{aligned} z_1\bullet z_2 &= (x_1+iy_1)\bullet(x_2+iy_2) \\ &= x_1\bullet x_2+ix_1y_2+iy_1x_2-y_1y_2 \\ &= (x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Eşitlik:

$z_1=x_1+iy_1,\ z_2=x_2+iy_2\in\mathbb{C}$ için $\quad z_1=z_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$ ve $y_1=y_2$ dir.

Eşlenik:

$z = x + iy$ olmak üzere,

z'nun eşleniği $\overline{z} = x - iy$ dir. Burada x reel kısım y ise sanal kısımdır.

Bu işlemlerle birlikte $\mathbb{C}$ kümesinin Halka yapısını inceleyelim:

i) kapalılık

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için

$z_1 + z_2 = z \in \mathbb{C}$ olduğundan kapalıdır.

ii) Birleşme

$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ için $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ dir.

iii) Etkisiz (birim) eleman

$\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$ için, $z + z_e = z_e + z = z$ olacak şekilde $z_e \in \mathbb{C}$ var mı?

$(x + iy) + (a + ib) = x + iy$ olsun. Buradan

$\left.\begin{array}{l} x + a = x \\ y + b = y \end{array}\right\}$ olmak üzere $a = 0, b = 0$ bulunur. O halde $z_e = 0 + i\,0 = 0$

elde edilir.

iv) Ters eleman

$\forall z = x + jy \in \mathbb{C}$ için, $z + z^{-1} = z_e = 0$ olacak şekilde z^{-1} var mı?

$x + iy + a + ib = 0$ olsun. Buradan

$a = -x$ ve $b = -y$ olup $z^{-1} = -z$ dir.

v) Değişme özelliği

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ dir.

O halde $(\mathbb{C},+)$ bir abel gruptur. Ayrıca,

1- $(z_1.z_2).z_3 = z_1.(z_2.z_3)$

2- $(z_1+z_2).z_3 = (z_1.z_3)+(z_2.z_3)$

$z_3.(z_1+z_2) = (z_3.z_1)+(z_3.z_2)$

olduğundan $(\mathbb{C},+,\bullet)$ bir halkadır.

$\forall z = x+iy \in \mathbb{C}$ için

$z.1_{\mathbb{C}} = z$ olacak şekilde $1_{\mathbb{C}} \in H$ bulabilirmiyiz?

$(x+iy)(a+ib) = x+iy$ olsun. Buradan,

$$xa - yb = x$$
$$ya + xb = y$$

denklemleri çözülürse

x ve y nin ikisi birden sıfır değilse (yani $z \neq 0$ iken) $b=0$ ve $a=1$ elde edilir.

Yani, $(\mathbb{C},+,\bullet)$ hakasını etkisiz (birim) elamanı $1_{\mathbb{C}} = 1+i0 = 1$ dir.

$(\mathbb{C},+,\bullet)$ *halkasının değişmeli olduğunu gösterelim:*

$\forall z_1 = x_1+iy_1, \quad z_2 = x_2+iy_2 \in \mathbb{C}$ için

$z_1.z_2 = z_2.z_1$

olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= (x_1+iy_1)(x_2+iy_2) \\ &= (x_1x_2+y_1y_2)+i(y_1x_2+x_1y_2) \\ &= (x_2x_1+y_2y_1)+i(x_2y_1+y_2x_1) \\ &= z_2.z_1 \end{aligned}$$

olduğundan değişmelidir. Ayrıca, $(\mathbb{C},+,\bullet)$ cisimdir. Çünkü $\forall z \neq 0 \in \mathbb{C}$ sayısını carpma işlemine göre tersi vardır.

Şimdi $\mathbb{C}$ nin, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde vektör uzayı yapısını inceleyelim:

I . $(\mathbb{C},\oplus)$ abel grubudur.

II . $\lambda\in\mathbb{R}$ ve $\forall z=x+iy\in\mathbb{C}$ için $\lambda z=\lambda x+i\lambda y\in\mathbb{C}$ olacak şekilde

$$\odot:\mathbb{R}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$$

dış işlemini tanımlayalım.

Bu dış işlemin vektör uzayı aksiyomlarını sağlar:

1- $\forall z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2\in\mathbb{C}$ ve $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ için $\alpha\odot(z_1\oplus z_2)=\alpha\odot z_1\oplus\alpha\odot z_2$

2- $\forall z=x+iy\in\mathbb{C}$ ve $\forall\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ için $(\alpha_1+\alpha_2)\odot z=\alpha_1\odot z\oplus\alpha_2\odot z$

3- $\forall z=x+iy\in\mathbb{C}$ ve $\forall\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ için $(\alpha_1.\alpha_2)\odot z=\alpha_1(\alpha_2\odot z)$

4- $(\mathbb{C},+,.)$ halkasının 2. işleme göre birim elemanı $1_{\mathbb{C}}$ olsun ve $\forall z\in\mathbb{C}$ için $1_{\mathbb{C}}\odot z=z$.

Böylece $\{\mathbb{C},\oplus,\mathbb{R},+,.,\odot\}$ altılısı bir vektör uzayıdır.

$\forall z\ =x+iy\in\mathbb{C}$ için

$x+iy=x.1+i.y$

olduğundan $\mathbb{C}$ kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde $\{1,i\}$ bazına sahip 2-boyutlu bir vektör uzayıdır.

İç çarpım:

$\mathbb{C}=\left\{z\ =x\ +iy\ \middle|\ x\ ,y\ \in\mathbb{R},i^2=1\right\}$ kümesi verilsin, $\mathbf{z_1}=x_1+iy_1,\mathbf{z_2}=x_2+iy_2\in\mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned}\langle,\rangle:\mathbb{C}\times\mathbb{C}&\to\mathbb{R}\\ (\mathbf{z_1},\mathbf{z_2})\to\langle\mathbf{z_1},\mathbf{z_2}\rangle&=\mathbf{z_1}\overline{\mathbf{z_2}}\\ &=x_1x_2+y_1y_2\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Norm:

$\mathbf{z}=x+iy\in\mathbb{C}$ için $\|\mathbf{z}\|=\sqrt{\langle\mathbf{z},\mathbf{z}\rangle}=\sqrt{\mathbf{z}\overline{\mathbf{z}}}=\sqrt{x^2+y^2}$

şeklinde tanımlanır.

Uzaklık:

$z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned} d(\mathbf{z_1}, \mathbf{z_2}) &= \|\mathbf{z_1} - \mathbf{z_2}\| \\ &= \sqrt{(\mathbf{z_1} - \mathbf{z_2})\overline{(\mathbf{z_1} - \mathbf{z_2})}} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Çember:

$z = x + iy$ olsun.

$\|\mathbf{z}\| = r$ olmak üzere, $\sqrt{\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle} = \sqrt{\mathbf{z}.\overline{\mathbf{z}}} = r$ için

$x^2 + y^2 = r^2$ veya $\mathbf{z}.\overline{\mathbf{z}} = r^2$

merkezi orijin olan r yarıçaplı çember denklemidir.

B-2 Kompleks Sayıların Matris Gösterimi

$\mathbb{C} = \left\{ z = x + iy \middle| x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1 \right\}$ kümesinin $\mathbb{R}$ üzerinde $\{1, i\}$ bazına sahip 2-boyutlu bir vektör uzayı olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned} f_z &: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ &w \to f_z(w) = zw \end{aligned}$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlayalım.

$$f_z(w_1 + w_2) = f_z(w_1) + f_z(w_2)$$

$$f_z(\lambda w) = \lambda f_z(w)$$

olduğundan bu dönüşüm lineerdir. Her lineer dönüşüme bir matris karşılık geleceğinden $\{1, i\}$ bazını kullanarak bu lineer dönüşüme karşılık gelen matrisi bulalım.

$$f_z(1) = z.1 = (x + iy).1 = x + iy$$

$$f_z(i) = z.i = (x+iy).i = -y+ix$$

yazılabilir. O halde f_z lineer dönüşümüne karşılık gelen matris $\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$ olarak elde edilir. Özel olarak, $z = 0 + i.1 = i$ alınırsa $f_i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olarak elde edilir ve

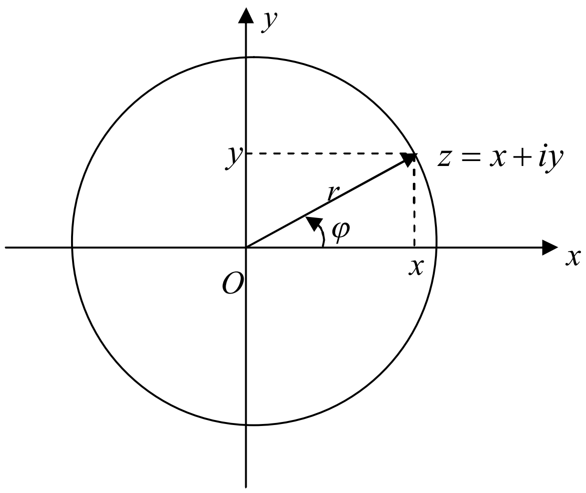
$$i^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1$$

olduğu görülür.

B-3 Kompleks Sayıların Kutupsal Form

Sıfırdan farklı her kompleks sayıyı kutupsal şekilde yazabiliriz.

$\|z\| = \sqrt{z.\bar{z}} = r$, z nin orijine olan uzaklığı olmak üzere, bir kompleks sayısının kutupsal formu



Şekil EK-B. 1 Bir kompleks sayısının kutupsal formu

$z = x+iy,\ x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ olmak üzere,

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$$

şeklinde elde edilir.

B-4 Kutupsal Formda Çarpma

$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ olmak üzere,

$$z_1 . z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

yazılabilir.

B-5 $e^{i\varphi}$ ile çarpma

$$\{1, i\} \to \{e^{i\varphi}, ie^{i\varphi}\}$$
$$z \to ze^{i\varphi}$$

dönüşümü dönmeye karşılık gelir. $e^{i\varphi}$ ile çarpma φ açısı kadar dönmeye karşılık gelir.

i nin geometrik yorumu:

Herhangi bir kompleks sayı $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$ olsun ve $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

olduğundan

$$z.i = re^{i\varphi}.e^{i\frac{\pi}{2}} = re^{i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} = r\left[\cos(\varphi + \frac{\pi}{2}) + i\sin(\varphi + \frac{\pi}{2})\right]$$

dir. Buradan bir kompleks sayıyı i ile çapmanın $\frac{\pi}{2}$ kadar dönme olduğu söylenebilir.

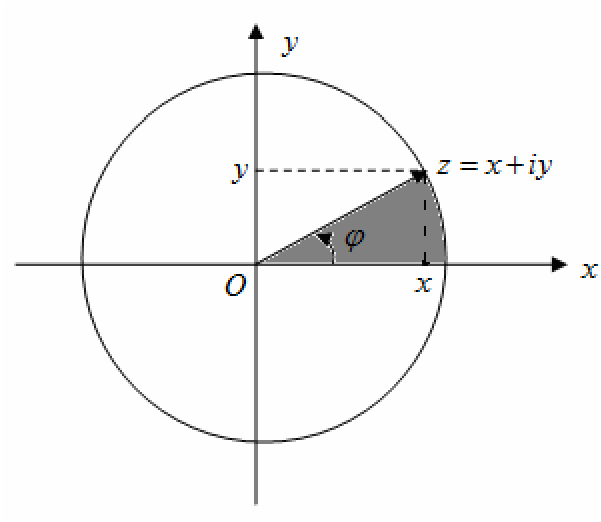
i^n nin geometrik yorumu:

Herhangi bir kompleks sayı $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$ olsun ve

$i^n = \left(c\,os\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^n = e^{in\frac{\pi}{2}}$ olduğundan bir kompleks sayıyı i^n ile çapmak $n\frac{\pi}{2}$ kadar dönmeye tekabül eder.

B-6 Birim Çemberde Merkez Açının Taradığı Alan

φ merkez açısını taradığı alanı hesalayalım:



Şekil EK-B. 1 Kompleks düzlemde merkez açının taradığı alan

$T.A = \pi r^2 \dfrac{\varphi}{2\pi} = \dfrac{\varphi}{2}$ ($r = 1$ olduğundan). Yani φ merkez açısının taradığı alan $\dfrac{\varphi}{2}$ ye eşittir.

EK-C

HİPERBOLİK SAYILAR

C-1 Temel Kavramlar

$H = \{ w = x + jy \mid x, y \in \mathbb{R}, j^2 = 1 \}$ hiperbolik sayıların kümesi ele alalım. Bu küme üzerinde iki iç işlem ve eşitlik tanımlayalım:

Toplama:

$w_1 = x_1 + jy_1,\ w_2 = x_2 + jy_2 \in H$ için $+ : H \times H \to H$ iç işlemi

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= x_1 + jy_1 + x_2 + jy_2 \\ &= x_1 + x_2 + j(y_1 + y_2) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Çarpma:

$w_1 = x_1 + jy_1,\ w_2 = x_2 + jy_2 \in H$ için $\bullet : H \times H \to H$ iç işlemi

$$\begin{aligned} w_1 \bullet w_2 &= (x_1 + jy_1) \bullet (x_2 + jy_2) \\ &= x_1 \bullet x_2 + jx_1 y_2 + jy_1 x_2 + j^2 y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 + y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + y_1 x_2) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Eşitlik:

$w_1 = x_1 + jy_1,\ w_2 = x_2 + jy_2 \in H$ için $w_1 = w_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ dir. □

Eşlenik:

$w = x + jy$ olamak üzere w'nun eşleniği $\overline{w} = x - jy$ dir. Burada x reel kısım y ise unipotent kısımdır.

Bu işlemlerle birlikte H kümesinin Halka yapısını inceleyelim:

i) kapalılık

$\forall w_1, w_2 \in H$ için

$w_1 + w_2 = w \in H$ olduğundan kapalıdır.

ii) Birleşme

$\forall w_1, w_2, w_3 \in H$ için $w_1 + (w_2 + w_3) = (w_1 + w_2) + w_3$ dir.

iii) Etkisiz (birim) eleman

$\forall w = x + jy \in H$ için, $w + w_e = w_e + w = w$ olacak şekilde $w_e \in H$ var mı?

$(x + jy) + (a + jb) = x + jy$ olsun. Buradan,

$$x + a = x$$
$$y + b = y$$

olmak üzere $a = 0, b = 0$ bulunur. O halde $w_e = 0 + j0 = 0$

elde edilir.

iv) Ters eleman

$\forall w = x + jy \in H$ için, $w + w^{-1} = w_e = 0$ olacak şekilde w^{-1} var mı?

$x + jy + a + jb = 0$ olsun. Buradan,

$a = -x, b = -y$ olup $w^{-1} = -w$ elde edilir.

v) Değişme özelliği

$\forall w_1, w_2 \in H$ için

$w_1 + w_2 = w_2 + w_1$ dir.

O halde, $(H,+)$ ikilisi bir abel gruptur. Ayrıca,

1- $(w_1.w_2).w_3 = w_1.(w_2.w_3)$

2- $(w_1 + w_2).w_3 = (w_1.w_3) + (w_2.w_3)$

$w_3.(w_1 + w_2) = (w_3.w_1) + (w_3.w_2)$

olduğundan $(H,+,\bullet)$ bir halkadır. Ek olarak,

$\forall w_1 = x_1 + jy_1,\quad w_2 = x_2 + jy_2 \in H$ için

$$\begin{aligned} w_1.w_2 &= (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) \\ &= (x_1x_2 + y_1y_2) + j(y_1x_2 + x_1y_2) \\ &= (x_2x_1 + y_2y_1) + j(x_2y_1 + y_2x_1) \\ &= w_2.w_1 \end{aligned}$$

olduğundan $(H,+,\bullet)$ halkası değişmelidir. Fakat cisim değildir:

$\forall w = x + jy \in H$ için

$w.w_e = w$ olacak şekilde $w_e \in H$ bulabilir miyiz?

$(x + jy)(a + jb) = x + jy$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} xa + yb &= x \\ ya + xb &= y \end{aligned}$$

denklemleri çözülürse

$$b(x^2 - y^2) = 0$$

$x^2 - y^2 \neq 0$ iken $b = 0$ dır. $b = 0$ ise $a = 1$ elde edilir.

Yani, $w = x + jy$ için $x^2 - y^2 \neq 0$ iken etkisiz eleman(birim) var. Dolayısıyla $x^2 - y^2 \neq 0$ iken w nin tersi vardır. Böylece $(H,+,\bullet)$ cisim değildir.

Şimdi H nin, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde vektör uzayı yapısını inceleyelim:

I . $(H,\oplus)$ abel grubudur.

II . $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $\forall w = x + jy \in H$ için $\lambda w = \lambda x + j\lambda y \in H$ olacak şekilde

$$\odot : \mathbb{R} \times H \to H$$

dış işlemini tanımlayalım.

Bu dış işlemi vektör uzayı aksiyomlarını sağlar:

1- $\forall w_1 = x_1 + jy_1, w_2 = x_2 + jy_2 \in H$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha \odot (w_1 \oplus w_2) = \alpha \odot w_1 \oplus \alpha \odot w_2$

2- $\forall w = x + jy \in H$ ve $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ için $(\alpha_1 + \alpha_2) \odot w = \alpha_1 \odot w \oplus \alpha_2 \odot w$

3- $\forall w = x + jy \in H$ ve $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ için $(\alpha_1 . \alpha_2) \odot w = \alpha_1 (\alpha_2 \odot w)$

4- $(H,+,.)$ halkasının 2. işleme göre birim elemanı 1_H olsun ve $\forall w \in H$ için $1_H \odot w = w$.

Böylece $\{H,\oplus,\mathbb{R},+,.,\odot\}$ altılısı bir vektör uzayıdır. Ayrıca,

$\forall w = x + jy \in H$ için

$x + jy = x.1 + j.y$

olduğundan H kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde $\{1, j\}$ bazına sahip 2-boyutlu bir vektör uzayıdır [13], [14].

C-2 Hiperbolik Sayıların Matris Gösterimi

$H = \{ w = x + jy \mid x, y \in \mathbb{R}, j^2 = 1 \}$ kümesinin $\mathbb{R}$ üzerinde $\{1, j\}$ bazına sahip 2-boyutlu bir vektör uzayı olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned} f_h &: H \to H \\ w &\to f_h(w) = hw \end{aligned}$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlayalım.

$f_h(w_1 + w_2) = f_h(w_1) + f_h(w_2)$

$f_h(\lambda w) = \lambda f_h(w)$

olduğundan bu dönüşüm lineerdir. Her lineer dönüşüme bir matris karşılık geleceğinden $\{1, j\}$ bazını kullanarak bu lineer dönüşüme karşılık gelen matrisi bulalım.

$$f_h(1) = h.1 = (x + jy).1 = x + jy$$

$$f_h(j) = h.j = (x + jy).j = y + jx$$

yazılabilir.

O halde f_h lineer dönüşümüne karşılık gelen matris $\begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}$ olarak elde edilir.

Özel olarak,

$h = 0 + j.1 = j$ alınırsa $f_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olarak elde edilir. Ayrıca,

$$j^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

dir.

İç-Çarpım ve Dış-Çarpım:

$H = \{w = x + jy \mid x, y \in \mathbb{R}, j^2 = 1\}$ ve $\overline{w}_1 = x_1 - jy_1$, $w_2 = x_2 + jy_2$ olmak üzere

$\overline{w}_1.w_2 = (w_1 - jy_1)(w_2 + jy_2) = \underbrace{(x_1x_2 - y_1y_2)}_{iç-çarpım} + \underbrace{(x_1y_2 - x_2y_1)}_{dış-çarpım}$ elde edilir.

Eğer w_1, w_2 hiperbolik düzlemde iç çarpımları sıfır ise w_1, w_2 hiperbolik ortogoneldir denir.

Dış çarpım öklid de olduğu gibi w_1, w_2 vektörlerinin oluşturduğu paralelkenarın alanını verir.

Norm:

$w = x + jy \in H$ için

$$\|w\| = \sqrt{|\langle w, w \rangle|} = \sqrt{|w.\overline{w}|} = \sqrt{|x^2 - y^2|}$$

şeklinde tanımlanır.

İki Nokta Arasındaki Uzaklık:

$w_1 = x_1 + jy_1$, $w_2 = x_2 + jy_2 \in H$ için,

$$\begin{aligned} d(w_1, w_2) &= \| w_1 - w_2 \| \\ &= \sqrt{(w_1 - w_2).\overline{(w_1 - w_2)}} \\ &= \sqrt{\left|(x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2\right|} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Hiperbolik Çember:

$w = x + jy$ olsun.

$\|w\| = \rho$ olmak üzere, $\sqrt{|\langle w, w \rangle|} = \sqrt{|w\,\overline{w}|} = \rho$ elde edilir. Buradan elde edilen

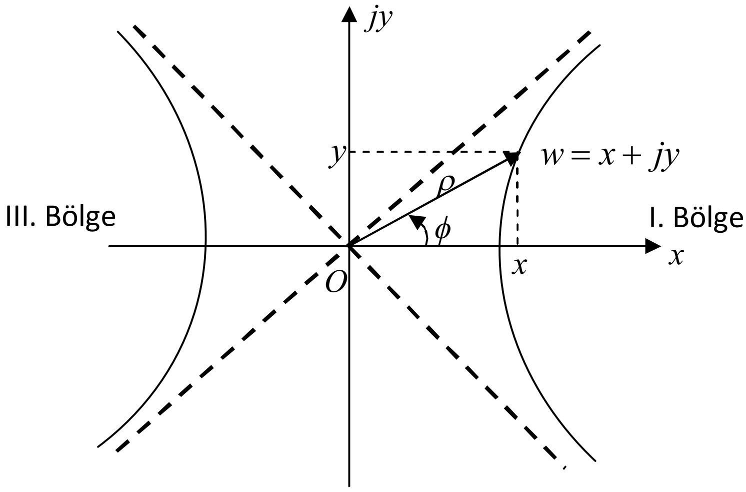
$|x^2 - y^2| = \rho^2$ veya $w\,\overline{w} = \pm\rho^2$

ifadeleri hiperbolik çember denklemidir. Böylece, $x^2 - y^2 = \rho^2$ veya $x^2 - y^2 = -\rho^2$ yazılabilir.

C-3 Hiperbolik Kutupsal Form

Sıfırdan farklı her kompleks sayıyı kutupsal şekilde yazabiliriz. Benzer şekilde $w = x + jy$ hiperbolik sayısını kutupsal şekilde yazalım [14].

$|w|_h = \sqrt{w.\overline{w}} = \rho$, w nin orijine olan uzaklığı olmak üzere (hiperbolik yarıçap),



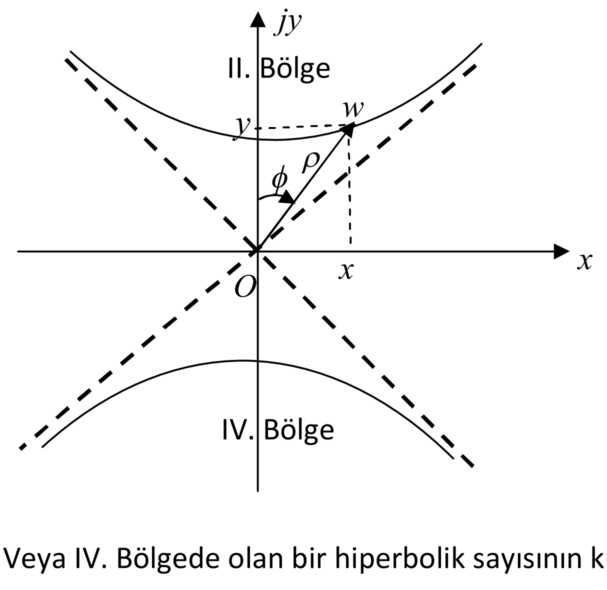
Şekil EK-C. 1 I. veya III. Bölgede olan bir hiperbolik sayısının kutupsal formu

$w = x + jy, \quad x = \rho \cosh\phi, \quad y = \rho \sinh\phi$ için

$w = \rho\left(\cosh\phi + j\sinh\phi\right) = \rho e^{j\phi}$

elde edilir.

Eğer $w = \mp\rho e^{j\phi}$ ise w I. veya III. bölgededir.



Şekil EK-C. 2 II. Veya IV. Bölgede olan bir hiperbolik sayısının kutupsal formu

$w = x + jy, \quad x = \rho \sinh\phi, \quad y = \rho \cosh\phi$ için

$w = \rho j\left(\cosh\phi + j\sinh\phi\right) = \rho j e^{j\phi}$

elde edilir.

Eğer $w = \mp \rho j e^{j\phi}$ ise w II. veya IV. bölgededir.

C-4 Kutupsal Formda Çarpma

$w_1 = \rho_1 e^{j\phi_1}, \quad w_2 = \rho_2 j e^{j\phi_2}$ olmak üzere,

$w_1.w_2 = \rho_1\rho_2 j e^{j(\phi_1+\phi_2)}$

dir. Eğer $w_1 = \rho_1 e^{j\phi_1} \in H - I, \quad w_2 = \rho_2 e^{j\phi_2} \in H - I$ ise

$w_1^{-}.w_2 = \rho_1\rho_2 e^{j(\phi_2-\phi_1)} = \rho_1\rho_2\left[\cosh(\phi_2-\phi_1) + j\sinh(\phi_2-\phi_1)\right]$

elde edilir. Burada,

$\phi_2 - \phi_1$ hiperbolik açısı; w_1 ve w_2 arasındaki hiperbolik açıdır. Ayrıca,

w, $y = \mp x$ eksenleri üzerinde ise kutupsal formu yoktur [14].

C-5 $e^{j\phi}$ ile çarpma

$$\{1, j\} \to \{e^{j\phi}, je^{j\phi}\}$$
$$w \to we^{j\phi}$$

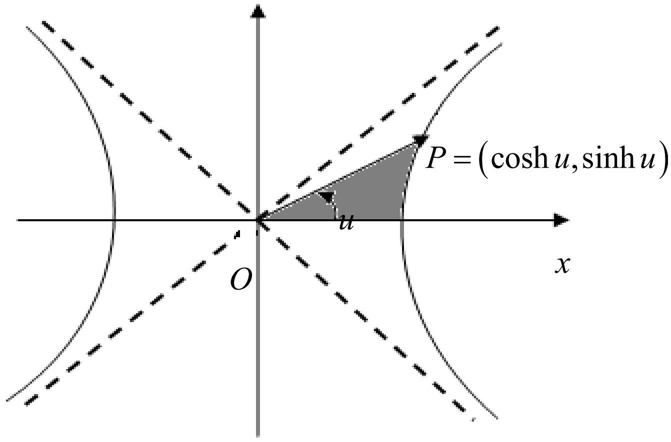
dönüşümü genelde hiperbolik dönmeye karşılık gelir. $e^{j\phi}$ ile çarpma hiperbolik ϕ açısı kadar dönmeye karşılık gelir.

j nin geometrik yorumu:

j ile çarpma $\{1, j\} \to \{j, 1\}$ pozitif x ve y eksenlerini değiştirir [14].

C-6 Birim Çemberde Merkez Açının Taradığı Alan

u merkez açısını taradığı alanı hesalayalım:



Şekil EK-C. 3 Hiperbolik düzlemde merkez açının taradığı alan

$$T.A=\frac{1}{2}\cosh u.\sinh u-\int_{1}^{coshu}\sqrt{x^2-1}\,dx$$

olmak üzere,

$$\int_{1}^{coshu}\sqrt{x^2-1}\,dx=\int_{0}^{u}\sqrt{\cos^2 ht-1}\sinh t\,dt \qquad \begin{bmatrix} x=\cosh t \\ dx=\sinh t\,dt \end{bmatrix}$$

$$=\int_{0}^{u}\sin t.\sin t\,dt$$

$$=\int_{0}^{u}\sin^2 t\,dt$$

$$=\int_{0}^{u}\frac{\cosh 2t-1}{2}dt$$

$$=\frac{1}{2.2}\sinh 2t-\frac{t}{2}\Big|_{0}^{u}=\frac{1}{4}\sinh 2u-\frac{u}{2}$$

olduğundan,

$$T.A=\frac{1}{2}\cosh u.\sinh u-\frac{1}{4}2\sinh u.\cosh u+\frac{u}{2}$$

$$=\frac{u}{2}$$

elde edilir.

C-7 İdempotent Baz

$\{1, j\}$ bazına göre her hiperbolik sayı $w = x + jy$ olarak yazılabilir. Ayrıca, hiperbolik düzlemi bölgeye ayıran izotropik doğrularla ilgili $\{j_+, j_-\}$ şeklinde başka bir baza sahiptir.

$j_+ = \frac{1}{2}(1+j)$ ve $j_- = \frac{1}{2}(1-j)$ olsun.

$w = x + jy$, $w_+ = x + y,\ \ w_- = x - y$ olmak üzere $w = w_+ j_+ + w_- j_-$ yazılabilir.

$j_+^2 = j_+,\ j_-^2 = j_-$ olduğundan $\{j_+, j_-\}$ bazına idempotent baz denir. Ayrıca,

- $j_+ j_- = 0$,
- $w\, j_+ = w_+ j_+$,
- $w\, j_- = w_- j_-$,

özellilerinden dolayı idempotent baz hesaplamalar için çok kullanışlıdır. Örneğin;

$w_+ w_- = x^2 - y^2$ dir. Böylece $v, w \in H$ için

$$vw = (v_+ j_+ + v_- j_-)(w_+ j_+ + w_- j_-) = (v_+ w_+) j_+ + (v_- w_-) j_-$$

ve

$$\|vw\| = \sqrt{|(v_+ w_+)(v_- w_-)|} = \sqrt{|(v_+ w_+)|}\sqrt{|(v_- w_-)|} = \|v\|\ \|w\|$$

elde edilir. Ayrıca, binom teoremi idempotent bazın kullanılmasıyla çok kolay bir formda olur. Böylece bir hiperbolik sayının kuvveti kolayca hesaplanabilir.

$\forall w \in H$ ve $k \in \mathbb{R}$ için, $(w_+ j_+ + w_- j_-)^k = (w_+)^k (j_+)^k + (w_-)^k (j_-)^k = (w_+)^k j_+ + (w_-)^k j_-$

dir. ($k \in \mathbb{R}^-$ ise $|w| \neq 0$ için sağlanır.)

Tanım C.1

$w = w_+ j_+ + w_- j_-$ olmak üzere;

$$f(w) = f(w_+)\, j_+ + f(w_-)\, j_- \tag{C.1}$$

olacak şekilde $f(w_+)$ ve $f(w_-)$ tanımlanabilir [14].

Örnek C.1

$\sin(x+jy)$ ifadesi, (C.1) denklemi yardımıyla

$$\begin{aligned}
\sin(x+jy) &= \sin(x+y)\frac{1}{2}(1+j) + \sin(x-y)\frac{1}{2}(1-j) \\
&= \frac{(\sin x \cos y + \sin y \cos x)}{2}(1+j) + \frac{(\sin x \cos y - \sin y \cos x)}{2}(1-j) \\
&= \sin x \cos y + j \sin y \cos x
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek C.2

$\sqrt{x+jy}$ ifadesi, (C.1) denklemi yardımıyla

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+jy} &= \sqrt{x+y}\ \frac{1}{2}(1+j) + \sqrt{x-y}\ \frac{1}{2}(1-j) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}\right) + j\frac{1}{2}\left(\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}\right)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

C-8 Hiperbolik Fonksiyonlar

Tanım C.1

$$\begin{aligned}
& f : H \to H \\
& \quad t + jx \to f(t+jx) = u(t,x) + jv(t,x)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı fonksiyonlara hiperbolik değerli fonksiyon denir.

Burada f fonksiyonu hiperbolik Cauchy-Riemann $\left(\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t}\right)$ koşullarını sağlıyorsa bu fonksiyona diferansiyellenebilirdir denir, [15].

Tanım C.2

$f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının belli bir $D(z_0,\ell)$ komşuluğundaki bütün noktalarda diferensiyellenebiliyorsa $f(z)$ z_0 noktasında analitiktir denir [15].

Türev:

$$f : H \to H$$
$$t + jx \to f\left(t + jx\right) = u\left(t, x\right) + jv\left(t, x\right)$$

olmak üzere, eğer (t_0, x_0) noktasında $u, v \in C^{\infty}$ ve hiperbolik Cauchy-Riemann $\left(\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t}\right)$ koşullarını sağlıyorsa, f fonksiyonuna hiperbolik anlamda analitik fonksiyondur veya $z_0 = t_0 + jx_0$ noktasında hiperbolik türeve sahiptir denir. Buradan

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial t}(t_0, x_0) + j\,\frac{\partial v}{\partial t}(t_0, x_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t_0, x_0) + j\,\frac{\partial v}{\partial x}(t_0, x_0)$$

ifadesine f nin z_0 noktasındaki *hiperbolik türevi* denir [15].

Türev ile İlgili Özellikler:

1. $f : H \to H$, $U \subseteq H$ açık kümesinde hiperbolik anlamda analitik ise f nin türevi

$f' : U \subseteq H \to H$ şeklinde hiperbolik anlamda analitiktir [15].

2. Eğer, $\begin{matrix} f : H \to H \\ g : H \to H \end{matrix}$

hiperbolik anlamda analitik ise $gof : H \to H$ hiperbolik anlamda analitiktir ve

$(gof)'(z_0) = g'\left(f(z_0)\right).f'(z_0), z_0 \in H$ dir[15].

3. Eğer $f, g : H \to H$ hiperbolik anlamda analitik fonksiyonlar ise $f + g$ ve $f.g$ fonksiyonları da hiperbolik anlamda analitiktir ve

$$\left(f + g\right)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$$

$$\left(f.g\right)'(z_0) = f'(z_0).g(z_0) + g'(z_0).f(z_0)$$

dır [15].

4. Hiperbolik polinomlar hiperbolik anlamda analitik fonksiyonlardır. Buna göre,

$f(z)=z^m$ ise $f'(z)=mz^{m-1}\left(0<m\in\mathbb{Z}\right)$ dir.

$f(z)=\dfrac{1}{z}$ fonsiyonunun türevi $\|z\|\neq 0$ (light-like değil) olması durumunda $f'(z)=-\dfrac{1}{z^2}$ olarak tanımlanabilir [15].

5. $g(z)$ null (light-like) değil iken f,g hiperbolik anlamda analitik fonksiyonlar ise $\dfrac{f}{g}$ de hiperbolik anlamda analitiktir. Buna göre,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z)=\frac{f'(z_0).g(z_0)-g'(z_0).f(z_0)}{\left(g(z_0)\right)^2} \text{ dir.}$$

6. $f\left(z\right)=e^{z}=e^{t}\left(\cosh x+j\sinh x\right)$ olmak üzere, $f(z)=e^z$ hiperbolik anlamda analitik ise

$f'(z)=e^z$ dir [15].

Tanım C.3

$x(t)$ ve $y(t)$, $[\alpha,\beta]$ aralığında tanımlanmış reel değerli sürekli fonksiyonlar olmak üzere düzlemin

$$z(t)=x(t)+jy(t)$$

denklemini sağlayan z noktalarının geometrik yerine *sürekli eğri* denir.

$z(t)=x(t)+jy(t)$ denklemine de eğrinin *parametrik denklemi* denir.

$$\left.\begin{aligned} x&=x(t)\\ y&=y(t)\end{aligned}\right\}\ \alpha\leq t\leq\beta \quad \text{olmak üzere,}$$

$z(\alpha)$ eğrinin başlangıç, $z(\beta)$ eğrinin bitiş noktası denir.

$$\left.\begin{aligned} t_1=t_2&\Rightarrow z(t_1)=z(t_2)\\ t_1\neq t_2&\Rightarrow z(t_1)\neq z(t_2)\end{aligned}\right\}\ (t_1,t_2\neq\alpha,\beta)$$

ise $z(t)=x(t)+jy(t)$ eğrisine basit eğri veya jordon eğrisi denir. Yani kendi kendini kesmeyen eğridir. $z(\alpha)=x(\beta)$ ise buna kapalı jordon eğrisi denir [15].

İntegral:

$f:H\to H$ hiperbolik sürekli fonksiyon , $\Gamma=\operatorname{Im}\gamma$ jordan eğrisi $\gamma:[a,b]\to H$ ve $\gamma(\tau)$ sınır değerleri dışında sürekli olmak üzere, f nin Γ eğrisi boyunca *hiperbolik integrali*

$$\int_\Gamma fdz=\int_\Gamma udt+vdx+j\int_\Gamma vdt+udx$$

şeklinde tanımlanır [15].

İntegral İle İlgili Özellikler:

1. $f:H\to H$ hiperbolik anlamda analitik ve Γ kapalı jordan eğrisi ise

$\oint_\Gamma fdz=0$ dır [15].

2. $f:D\subseteq H\to H, D\in H$ açık küme

$\int_\Gamma fdz$ yalnızca Γ jordan eğrisinin başlangıç ve son noktalarına bağlıdır [15].

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:Serdal ŞAHİN
Doğum Tarihi ve Yeri	:10.01.1984/Hatay
Yabancı Dili	:İngilizce
E-posta	:sersahin@yildiz.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Y. Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2009
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2006
Lise	Fen Bilimleri	Çapa Anadolu Öğretmen Lisesi	2000

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	**Firma/Kurum**	**Görevi**
2009-…	Yıldız Teknik Üniversitesi	Araştırma görevlisi

YAYINLARI

Makale

1. **Serdal Şahin** ve Salim Yüce, (2011). "High Order Accelerations And Poles Under The One-Parameter Planar Homothetic Motions, Acta Universitatis Apulensis", 26: 235-239.

2. Şahin S. ve Yüce S., (2014). " Higher-Order Acceleration and Poles under the One-Parameter Planar Hyperbolic Motions and Their Inverse Motions", Mathematical Problems in Engineering, 2014: 686509.

Bildiri

1. Serdal Şahin ve Salim Yüce, (2011). "High Order Accelerations, Poles under the One-Parameter Planar Homothetic Motions and Their Maple Examples", Sixth International Conference on Dynamic Systems and Applications, Atlanta, Georgia, USA, May 25-28.

2. Şahin S. ve Yüce S., (2013). "Higher-Order Acceleration and Poles under the One-Parameter Planar Hyperbolic Motions", 2013 Lehigh University Geometry and Topology Conference, Bethlehem, Pennsylvania, USA, May 24-26.

3. M. Akar, S. Şahin ve S. Yüce, (2013). "Some Properties on the Dual Hyperbolic Numbers, 2013Lehigh University Geometry and Topology Conference, Bethlehem, Pennsylvania, USA, May 24-26.

4. Şahin S. ve Yüce S., (2014). "Higher-Order Acceleration under the Inverse One-Parameter Planar Hyperbolic Motions", Southeastern Spring Sectional Meeting University of Tennessee, Knoxville, Knoxville, USA, March 21-23.

5. Akar, M., Şahin, S., ve Yüce, S. (2013). "Some Properties on the Dual Hyperbolic Numbers", 2013 Lehigh University Geometry and Topology Conference, Bethlehem, Pennsylvania, USA.

6. Şahin, S., Akar, M., ve Yüce, S. (2014). "On the Hyperbolic Complex Numbers", 38th Annual SIAM Southeastern Atlantic Section Conference, Florida Institute of Technology, Melbourne, Florida, USA.

7. Şahin, S., Yüce, S. (2014). "Higher-Order Poles under the Inverse One-Parameter Planar Hyperbolic Motions", 38th Annual SIAM Southeastern Atlantic Section Conference, Florida Institute of Technology, Melbourne, Florida, USA.

8. Şahin, S., Yüce, S. (2014). “A New Expression for Higher Order Accelerations and Poles under the One Parameter Planar Hyperbolic Homothetic Motions”, 10th International Conference on Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics, Tartu, Estonia, 4-9 August.

9. Akar, M., **Şahin, S.**, ve Yüce, S. (2015). “Higher-Order Velocities and Accelerations under the One-Parameter Planar Dual Motions”, 2015 Joint Mathematics Meetings. San Antonio, Texas, USA.