T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OKTONİYONİK EĞRİLER VE KARAKTERİSTİK ÖZELLİKLERİ

ÖZCAN BEKTAŞ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
PROF. DR. SALİM YÜCE

İSTANBUL, 2015

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OKTONİYONİK EĞRİLER VE KARAKTERİSTİK ÖZELLİKLERİ

Özcan BEKTAŞ tarafından hazırlanan tez çalışması 28.04.2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Salim YÜCE

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Salim YÜCE

Yıldız Teknik Üniversitesi ______________________

Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU

Bahçeşehir Üniversitesi ______________________

Prof. Dr. Ertuğrul ÖZDAMAR

Bahçeşehir Üniversitesi ______________________

Doç. Dr. Mustafa DÜLDÜL

Yıldız Teknik Üniversitesi ______________________

Yrd. Doç. Dr. Salih ÇELİK

Yıldız Teknik Üniversitesi ______________________

ÖNSÖZ

Bu tezde ilk olarak, oktoniyonlar hakkında geniş bilgiler verilmiştir. Daha sonra, $\boldsymbol{O_P}$ uzaysal oktoniyonik uzayında uzaysal oktoniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri incelenmiştir. Bunlarla birlikte, $\boldsymbol{O}$ oktoniyonik uzayında oktoniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri verilerek literatüre oktoniyonik eğri kavramı kazandırılmıştır. Son olarak, $\boldsymbol{O_P}$ ve $\boldsymbol{O}$ oktoniyonik uzayınlarında oktoniyonik eğilim çizgisi ve harmonik eğrilik kavramları tanıtılmıştır.

Doktora eğitimim süresince bilgilerinden yararlandığım, kendisiyle çalışmaktan gurur duyduğum, çalışmalarımda yönlendirmeleriyle bakış açımı değiştiren, her şartta destek veren sabır gösteren, değerli hocam Prof. Dr. Salim YÜCE'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca varlıklarını hep yanımda hissettiğim manevi desteklerini hiç esirgemeyen, bana güç veren yol gösteren canım aileme tüm içtenliğimle teşekkür ederim.

Her zaman yanımda olan, fedakarlık gösteren, bana sabreden ve destek olan hayat arkadaşım Özge KANTAR'a teşekkür ederim.

Nisan, 2015

Özcan BEKTAŞ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ vii

ŞEKİL LİSTESİ viii

ÇİZELGE LİSTESİ ix

ÖZET x

ABSTRACT xi

BÖLÜM 1

GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 1
1.2 Tezin Amacı 3
1.3 Hipotez 3

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR 4

2.1 Öklid Uzayında Temel Kavramlar 4
2.2 Vektörel Çarpım 7
2.2.1 $\mathbb{R}^3$ Uzayında Vektörel Çarpım 7
2.2.2 $\mathbb{R}^3$ de Üç Vektörün Vektörel Çarpım 9
2.2.3 $\mathbb{R}^3$ de Vektörel Çarpımın Geometrik Yorumu 10
2.2.4 $\mathbb{R}^7$ de Vektörel Çarpım 10
2.3 Tanjant Vektörler ve Tanjant Uzaylar 11
2.4 Vektör Alanları ve Vektör Alanları Uzayı 12
2.5 Yöne Göre Türev ve Kovaryant Türev 13
2.6 Bir Vektör Alanının Bir Diğer Vektör Alanına Göre Kovaryant Türevi 14
2.7 Kotanjant Vektörler ve Kotanjant Uzaylar 14
2.8 Eğriler Teorisi 15
2.8.1 Bir M Eğrisinin Yüksek Mertebeden Türev Vektör Alanları 17
2.9 Serret-Frenet Formülleri ve Eğrilikler 18

2.10 $\boldsymbol{E}^7$ ve $\boldsymbol{E}^8$ de Serret-Frenet Formülleri 21
2.11 Helisler (Eğilim Çizgileri) 25

BÖLÜM 3

OKTONİYONLAR 27

3.1 Reel Oktoniyonlar 27
3.2 Reel Oktoniyonlar Üzerinde İşlemler 35
3.3 Reel Oktoniyonların Kutupsal Gösterimi 39
3.4 Birim Reel Oktoniyonların Kutupsal Gösterimi 40
3.5 Reel Oktoniyonlar için De Moivre Formülü 41
3.6 Reel Oktoniyonlar için Euler Formülü 43
3.7 Reel Oktoniyonların Kuaterniyon Katsayılı Gösterimi 44
3.8 Reel Oktoniyonların Matris Gösterimleri 50
3.8.1 Reel Oktoniyonların Kuaterniyon Matris Gösterimi 50
3.8.2 Reel Oktoniyonların Reel Matris Gösterimi 50
3.9 Reel Oktoniyonlar Üzerinde İç Çarpım 56
3.10 Oktoniyon Operatörü 58
3.11 Oktoniyonlarla Dönme 59
3.12 7 Boyutlu Öklid Uzayında Dönmeler 60
3.13 8 Boyutlu Öklid Uzayında Dönmeler 69
3.14 8 Boyutlu Dönmenin Geometrisi 74
3.15 Oktoniyonik Uzayda Analiz 78
3.15.1 Uzaysal Oktoniyonik Analiz 79
3.15.2 Oktoniyonik Analiz 83

BÖLÜM 4

OKTONİYONİK EĞRİLER İÇİN SERRET-FRENET FORMÜLLERİ 88

4.1 $\boldsymbol{O_P}$ Uzayında Uzaysal Oktoniyonik Eğriler İçin Serret-Frenet Formülleri ... 88
4.2 $\boldsymbol{O}$ Uzayında Oktoniyonik Eğriler İçin Serret-Frenet Formülleri 106

BÖLÜM 5

OKTONİYONİK EĞİLİM ÇİZGİLERİ VE KARAKTERİZASYONLARI 125

5.1 $\boldsymbol{O_P}$ Uzayında Uzaysal Oktoniyonik Eğilim Çizgileri ve Karakterizasyonları 125
5.2 $\boldsymbol{O}$ Uzayında Oktoniyonik Eğilim Çizgileri ve Karakterizasyonları 136

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER 154

KAYNAKLAR 155

EK-A

KOMPLEKS UZAYLAR 160

A-2 Kompleks Sayıların Matris Gösterimi 164

A-3 Kompleks Sayıların Kutupsal Formu 165

EK-B

KUATERNİYONLAR 167

B-1 Reel Kuaterniyonlar 167
B.1.1 Reel Kuaterniyonlar Üzerinde Temel İşlemler 173
B.1.2 Reel Kuaterniyonların Kutupsal Gösterimi....................................... 178
B.1.3 Birim Reel Kuaterniyonların Kutupsal Gösterimi 178
B.1.4 Reel Kuaterniyonlar için De Moivre Formülü................................... 179
B.1.5 Reel Kuaterniyonlar için Euler Formülü 181
B.1.6 Reel Kuaterniyonların Reel Matris Gösterimi 181
B.1.7 Reel Kuaterniyona Karşılık Gelen Reel Matris İçin De Moivre Formülü 183
B.1.8 Reel Kuaterniyona Karşılık Gelen Reel Matris İçin Euler Formülü 189
B.1.9 Reel Kuaterniyonların Kompleks Matris Gösterimi........................... 190
B.1.10 Kuaterniyonlar Üzerinde İç Çarpım 195
B.2 Kuaterniyonlarla Dönme 197
B.2.1 $\mathbb{R}^4$ de Birim Kuaterniyonun Geometrik Yorumu 197
B.2.3 Kompleks Sayı ve Kuaterniyon Operatörü 204
B.2.4 3 Boyutlu Uzayda Dönme... 205

ÖZGEÇMİŞ 224

SİMGE LİSTESİ

E^n	n boyutlu Öklid uzay
$\boldsymbol{O}$	Oktoniyonların kümesi
$\boldsymbol{O_P}$	Uzaysal oktoniyonların kümesi
$\boldsymbol{H}$	Kuaterniyonların kümesi
S_A	Oktoniyonun skalar kısmı
V_A	Oktoniyonun vektörel kısmı
A_0	A_0 Oktoniyonunun normlanmışı
$\boldsymbol{L}$	A_0 birim oktoniyonunun ekseni
$\langle \, , \rangle$	Öklid iç çarpım
$\Vert \; \Vert$	Norm
A	n boyutlu Afin uzay
V	n boyutlu Vektör uzay
d	Uzaklık fonksiyonu
$\wedge$	$\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^7$ vektörel çarpım
$\times$	Oktoniyon çarpımı
$T_A(P)$	$P \in A$ noktasının tanjant vektörlerin kümesi
$\chi\left(E^n\right)$	E^n de vektör alanların kümesi
$C\left(a, \mathbb{R}\right)$	$a \in E^n$ noktasında türevlenebilen reel değerli fonksiyonların kümesi
$T_{E^n}{}^*(P)$	Kotanjant uzay
D	E^n de kovaryant türev operatörü
$\vec{v}_P\left[f\right]$	f nin $\vec{v}_P$ tanjant vektörü doğrultusundaki türevi
k_i	eğrinin i yinci eğrilik fonksiyonu
H_i	eğrinin i yinci harmonik eğrilik fonksiyonu

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3. 1 Oktoniyonların Baz Elemanlarının Cayley Dickson yöntemine göre çarpım diyagramı 33

Şekil 3. 2 Oktoniyonun Reel Eksen ile Arasındaki İlişki…………………………………………….66

Şekil 3.3 $\boldsymbol{L}$,$\boldsymbol{C}$ ve $\boldsymbol{R}$ arasındaki ilişki………………………………………………………………………….68

Şekil 3. 3 Hamilton üçgenleri……………………………………………………………………………….76

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 3. 1 Oktoniyonlarının Baz Elemanlarının Cayley Dickson Yöntemine Göre Çarpım Tablosu 32
Çizelge 3. 1 Uzaysal Oktoniyonik Eğrinin Elemanlarının Oktoniyonlarının Baz Elemanlarının Çarpım Tablosu 90

ÖZET

OKTONİYONİK EĞRİLER VE KARAKTERİSTİK ÖZELLİKLERİ

Özcan BEKTAŞ

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Salim YÜCE

7-boyutlu Öklid uzayındaki bir eğrinin Serret-Frenet formülleri $\boldsymbol{O_P}$ uzaysal oktoniyonik uzayında uzaysal oktoniyonlar kullanılarak tekrar elde edilmiştir. Elde edilen Serret-Frenet formülleri kullanılarak $\boldsymbol{O}$ oktoniyonik uzayındaki oktoniyonik eğrilerin Serret-Frenet formülleri verilmiştir. Daha sonra oktoniyonik eğriler için bulunan Serret-Frenet formülleri göz önünde bulundurularak $\boldsymbol{O_P}$ ve $\boldsymbol{O}$ oktoniyonik uzaylarındaki oktoniyonik eğriler için oktoniyonik eğilim çizgisi ve oktoniyonik harmonik eğrilik ifadeleri tanıtılmış ve oktoniyonik harmonik eğrilikler oktoniyonik eğrilerin eğrilikleri cinsinden elde edilmiştir. Bunlara ek olarak, $\boldsymbol{O_P}$ ve $\boldsymbol{O}$ oktoniyonik uzaylarındaki oktoniyonik eğrilerin birer oktoniyonik eğilim çizgileri olmaları için gerek ve yeter şartlar verilmiştir. Ayrıca, uzaysal oktoniyonik eğilim çizgisinden elde edilen bir oktoniyonik eğrinin de eğilim çizgisi olduğu gösterilmiştir. Son olarak, $\boldsymbol{O_P}$ ve $\boldsymbol{O}$ oktoniyonik uzaylarındaki oktoniyonik eğrilerin oktoniyonik harmonik eğrilikleri ile eğrilikleri arasındaki ilişkiler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Uzaysal oktoniyonik eğri, Oktoniyonik eğri, Uzaysal oktoniyonik eğilim çizgisi, Oktoniyonik eğilim çizgisi, Oktoniyonik Serret-Frenet formülleri, Oktoniyonik eğrilik, Oktoniyonik burulma, Oktoniyonik Harmonik eğrilik.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ABSTRACT

OCTONIONIC CURVES AND THEIR CHARACTERISTIC PROPERTIES

Özcan BEKTAŞ

Department of Mathematics

Phd. Thesis

Advisor: Prof. Dr. Salim YÜCE

The Serret-Frenet formula for a curve in the 7-dimensional Euclidean space was reacquired by use of the spatial octonions in the spatial octonionic space $\boldsymbol{O_P}$. The Serret-Frenet formulas for the octonionic curves in the octonionic space $\boldsymbol{O}$ were given by use of the Serret-Frenet formulas obtained. Next, the statements the octonionic inclined curve and the octonionic harmonic curvature for the octonionic curves in the octonionic spaces $\boldsymbol{O_P}$ and $\boldsymbol{O}$ were introduced bearing in mind that the Serret-Frenet formulas found for the octonionic curves and the octonionic harmonic curvatures were obtained in terms of the octonionic curvatures of the octonionic curves. Moreover, necessary and sufficient conditions were given to become each of the octonionic curves to the octonionic inclined curves in the octonionic spaces $\boldsymbol{O_P}$ and $\boldsymbol{O}$. Besides, it were shown that the octonionic curve which was obtained from the spatial octonionic inclined curve was a octonionic inclined curve. Finally, the relationships between the octonionic harmonic curvatures of the octonionic curves in the octonionic spaces $\boldsymbol{O_P}$, and $\boldsymbol{O}$, and curvatures were given.

Keywords: Spatial octonionic curve, Octonionic curve, Spatial octonionic inclined curve, Octonionic inclined curve, Octonionic Serret-Frenet formula, Octonionic curvature, Octonionic torsion, Octonionic harmonic curvature.

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Oktoniyonlar, 1843 senesinde Graves tarafından keşfedilmiş; fakat bu keşiften haberi olmayan Cayley tarafından bağımsız olarak bulunmuştur. İlk olarak Cayley tarafından yayınlatıldığı için literatürde oktoniyonlar “Cayley Sayıları” olarak bilinmektedir. Reel sayılar, kompleks sayılar, kuaterniyonlar ve oktoniyonlar birer normlu bölüm cebiridir. Oktoniyonlar bu normlu bölüm cebirlerinin en geniş olanıdır. Ayrıca, oktoniyonlar değişimli ve birleşimli olmayan, iki kuaterniyonun birleşimi olarak ifade edilebilen, 8 boyutlu bir yapıdır. Birleşimli olmadıkları için oktoniyonların matris gösterimi direkt olarak mevcut değildir. Fakat kuaterniyonların reel matris gösterimlerinden yararlanılarak oktoniyonların sağ ve sol olmak üzere iki reel matris gösterimi elde edilebilir. Oktoniyonlar reel, dual katsayılı, split (bölüntülü), hiperbolik ve kompleks olmak üzere çeşitli tanımlamalara sahiptir. String (sicim) teori, özel izafiyet ve kuantum lojik oktoniyonların başlıca uygulama alanlarıdır.

1.1 Literatür Özeti

Hamilton’un kuaterniyonları keşfetmesinin ardından, Graves, Hamilton’un bu düşüncesini oktoniyonlara (Graves 26 Aralık 1843 tarihinde Hamiltona gönderdiği mektupla “oktav” ifadesini kullanmış ve bu ifadenin tanımını yapmıştır) genişletmiştir [1]. Ancak Graves bu keşfini yayınlatmamıştır, Cayley ise Graves’ten bağımsız olarak 1845 yılının mart ayında tanımı yapmıştır [2]. Ayrıca [3-25] çalışmalarında, oktoniyonlarla ilgili temel tanımlar, teoremler, sonuçlar ve oktoniyonların cebirsel ve geometrik özellikleri yer almaktadır.

Kuaterniyonların matris gösteriminden yararlanılarak [5] makalesinde oktoniyonların sağ ve sol matris gösterimleri bulunup, oktoniyonlar üzerinde bazı lineer denklemler incelenmiş ve oktoniyon matrislerin ek matrisleri çalışılmıştır.

[26] makalesinde, 8 boyutlu Öklid uzayında oktoniyonlar için Hamilton operatörlerine benzeyen bir matris geliştirilip, bu matris yardımıyla yeni bir hareket tanımlanmış ve bu hareketin homotetik hareket olduğu görülmüştür. Bununla birlikte, [27] ile birim oktoniyonların geometrik olarak bir dönme operatörü olduğu görülmüştür.

Bhupendra vd. [28] tarafından oktoniyon ve onun özellikleri kullanılarak, 3 boyutlu Öklid uzayının 7 -boyutlu Öklid uzayına genişletilebileceği gösterilmiştir.

Flaut ve Shpakivskyi [29] tarafından oktoniyonlar için De Moivre ve Euler formülleri bulunup, bu formüller kullanılarak genelleştirilmiş oktoniyonların kökleri araştırılmıştır.

Pendeza vd. [30] çalışmasıyla, oktoniyonlar ve kuvvet serileri için genişletilmiş De Moivre formülünü vermişlerdir.

[21,31-37] çalışmalarında, kuaterniyonla ilgili temel tanımlar, teoremler, sonuçlar ve kuaterniyonların cebirsel ve geometrik özellikleri yer almaktadır.

Özdamar ve Hacısalihoğlu, [38] çalışmalarıyla, n boyutlu Öklid uzayında eğilim çizgilerinin karakterizasyonlarını vermişlerdir.

Bharathi ve Nagaraj tarafından reel tek değişkenli kuaterniyon değerli fonksiyonlar (kuaterniyonik eğriler) için Serret-Frenet formülleri verilmiştir [37]. Karadağ ve Sivridağ 1997 yılında bu formüller yardımıyla kuaterniyonik eğilim çizgileri ve harmonik eğrilikleri inceleyip, harmonik eğrilikleri eğrinin eğrilikleri cinsinden elde etmişlerdir [39, 40]. Kuaterniyonik eğrilerin bir eğilim çizgisi olması için gerek ve yeter koşul Karadağ ve Sivridağ tarafından verilmiştir [39, 40]. Ayrıca, kuaterniyonik eğrilerin eğilim çizgisi olması için eğrinin harmonik eğrilikleri cinsinden karakterizasyonları incelenmiştir [40, 41]. 3 boyutlu yarı Öklid uzayındaki uzaysal yarı kuaterniyonik eğri için Serret-Frenet formülleri, 4 boyutlu yarı Öklid uzayındaki yarı kuaterniyonik eğri için Serret-Frenet formülleri, E_1^3 ve E_2^4 deki yarı kuaterniyonik eğriler için eğilim çizgileri, harmonik eğrilikleri ve karakterizasyonları, Çöken ve Tuna tarafından verilmiştir [42, 43].

1.2 Tezin Amacı

Tezin orijinal bölümünde 7-boyutlu Öklid uzayındaki bir eğrinin Serret-Frenet formülleri $\boldsymbol{O_P}$ uzay oktoniyonik uzayında, uzaysal oktoniyonlar kullanılarak tekrar elde edilecektir. Elde edilen Serret-Frenet formülleri kullanılarak $\boldsymbol{O}$ oktoniyonik uzayındaki oktoniyonik eğrilerin Serret-Frenet formülleri verilecektir. Daha sonra oktoniyonik eğriler için bulunan Serret-Frenet formülleri göz önünde bulundurularak $\boldsymbol{O_P}$ ve $\boldsymbol{O}$ oktoniyonik uzaylarındaki oktoniyonik eğriler için oktoniyonik eğilim çizgisi ve oktoniyonik harmonik eğrilik ifadeleri tanıtılacak ve oktoniyonik harmonik eğrilikler oktoniyonik eğrilerin eğrilikleri cinsinden elde edilecektir. Bunlara ek olarak, $\boldsymbol{O_P}$ ve $\boldsymbol{O}$ oktoniyonik uzaylarındaki oktoniyonik eğrilerin birer oktoniyonik eğilim çizgileri olmaları için gerek ve yeter şartlar verilecektir. Ayrıca, uzaysal oktoniyonik eğilim çizgisinden elde edilen bir oktoniyonik eğrinin de eğilim çizgisi olduğu gösterilecektir. Son olarak, $\boldsymbol{O_P}$ ve $\boldsymbol{O}$ oktoniyonik uzaylarındaki oktoniyonik eğrilerin oktoniyonik harmonik eğrilikleri ile eğrilikleri arasındaki ilişkiler verilecektir.

1.3 Hipotez

Bu çalışmada oktoniyonlar hakkında geniş bilgiler verilip, $\boldsymbol{O_P}$ uzaysal oktoniyonik uzayında uzaysal oktoniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri verilip, uzaysal oktoniyonik eğilim çizgisi ve uzaysal oktoniyonik harmonik eğrilik ifadeleri incelenecektir. Daha sonra, $\boldsymbol{O}$ oktoniyonik uzayında oktoniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri bulunup, oktoniyonik eğriler için oktoniyonik eğilim çizgisi ve oktoniyonik harmonik eğrilik ifadeleri tanımlanarak, literatüre oktoniyonik eğri kavramı kazandırılacaktır.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, Öklid uzayındaki temel tanım, teorem, sonuç ve örneklere yer verilecektir.

2.1 Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 2.1 $A \neq \varnothing$ bir küme ve V de $\Im$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $f : A\, x\, A \to V$ fonksiyonu aşağıdaki önermeleri sağlarsa A ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir.

$\boldsymbol{A_1)}$ $\forall\, P,Q,R \in A$ için $f\left(P,Q\right) + f\left(Q,R\right) = f\left(P,R\right)$

$\boldsymbol{A_2)}$ $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f\left(P,Q\right) = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır. $P,Q \in A$ *için* $f\left(P,Q\right) = \overrightarrow{PQ}$ biçiminde gösterilir.

Örnek 2.1 $A = \mathbb{R}^n$ ve $V = \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$ sıralı n-lilerin kümesi $\mathbb{R}^n$ standart vektör uzayı ile birleşen n boyutlu bir afin uzaydır.

Tanım 2.2 V, n boyutlu bir vektör uzayı ve A da V ile birleşen bir afin uzay olsun. $P_0, P_1, P_2, ..., P_n \in A$ noktaları için $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ kümesi V nin bir bazı ise $\left\{P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n\right\}$ nokta $(n+1)$ lisine, A afin uzayının bir afin çatısı denir. Burada P_0 noktasına çatının başlangıç noktası ve P_i, $1 \leq i \leq n$, noktalarına da çatının birim noktaları (uç) denir. Eğer $boyV = n$ ise A ya n boyutlu afin uzay denir.

Tanım 2.3 A**,** V vektör uzayı ile birleşen n boyutlu afin uzay ve $\{P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n\}$, A da bir afin çatı olsun. Bu durumda $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ sistemi V nin bir bazı olup $\forall P \in A$ noktası için $\overrightarrow{P_0P} \in V$ olduğundan $\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{P_0P_i}$, $a_i \in \Im$ yazılabilir. Eğer

$$
\begin{aligned}
x_i &: A \to \Im \\
&P \to x_i(P) = a_i \ , 1 \le i \le n
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlanırsa $\forall P \in A$ noktasına $(x_1(P), x_2(P), \ldots, x_n(P))$ sıralı n lisi karşılık gelir.

Tersine, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ skaler sayıları ele alalım. $\forall i$ için $a_i \overrightarrow{P_0P_i} \in V$ olduğundan $\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{P_0P_i} = \vec{\alpha} \in V$ vektörü elde edilir. $\boldsymbol{A_2}$**)** gereğince $\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{P_0P_i} = \vec{\alpha} \in V$ için $\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{P_0P_i}$ olacak şekilde bir tek $P \in A$ vardır.

Sonuç olarak, A afin uzayında her noktaya bir sıralı n li, her bir sıralı n liye de bir nokta karşılık gelir. A afin uzayında bir P noktasına karşılık gelen bu sıralı n liye $P \in A$ noktasının afin koordinatları, bu afin koordinatları tanımlamakta kullanılan x_i fonksiyonlarına afin koordinat fonksiyonları ve $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ fonksiyonlarının sistemine de bir afin koordinat sistemi denir.

Tanım 2.4 V reel vektör uzayı olmak üzere

$$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R} \quad (x, y) \to \langle x, y \rangle$$

reel değerli fonksiyonu $\forall x, y, z \in V$ için

***i*) Bilineerlik Aksiyomu**

$$
\begin{aligned}
&\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle, \\
&\langle x, ay + bz \rangle = a\langle x, y \rangle + b\langle x, z \rangle
\end{aligned}
$$

***ii*) Simetri Aksiyomu**

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

***iii*) Pozitif Tanımlılık Aksiyomu**

$\langle x,x\rangle \geq 0$, $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=\vec{0}$

aksiyomlarını sağlarsa bu fonksiyona iç çarpım fonksiyonu V uzayına da iç çarpım uzayı denir.

Örnek 2.2 $\langle,\rangle:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$\left(X,\ Y\right)\to\langle X,Y\rangle=\|X\|\|Y\|\cos\theta\ ,\ 0\leq\theta\leq\pi$$

şeklinde tanımlı fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur.

Tanım 2.5 A, V vektör uzayı ile birleşen n boyutlu afin uzay olsun. Eğer V vektör uzayı bir iç çarpım uzayı ise A afin uzayına Öklid uzayı denir.

Örnek 2.3 $A=\mathbb{R}^n$ ve $V=\mathbb{R}^n$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$ sıralı n lilerin kümesi $\mathbb{R}^n$ standart vektör uzayı ile birleşen n boyutlu bir afin uzayı olduğu bilinmektedir.

$$\langle,\rangle:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} \qquad \langle X,Y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i$$

şeklinde tanımlı fonksiyon bir iç çarpım fonksiyonudur. Bu iç çarpıma $\mathbb{R}^n$ de standart iç çarpım veya Öklid iç çarpımı denir. Standart iç çarpımın tanımlı olduğu $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı ile birleşen $\mathbb{R}^n$ afin uzayına n boyutlu standart Öklid uzayı denir ve E^n ile gösterilir.

Tanım 2.6 $P_0,P_1,P_2,...,P_n\in E^n$ noktaları için, $\{\overrightarrow{P_0P_1},\overrightarrow{P_0P_2},\ldots,\overrightarrow{P_0P_n}\}$ kümesi $\mathbb{R}^n$ nin bir ortonormal bazı ise $\{P_0,P_1,P_2,\ldots,P_n\}$ nokta $(n+1)$ lisine E^n de bir Öklid çatı veya dik çatı denir.

Tanım 2.7 E^n bir afin uzay olduğundan $P_0\in E^n$ için başlangıç noktası P_0 olan bir $\{P_0,P_1,P_2,\ldots,P_n\}$ afin çatısı vardır. $\forall P\in E^n$ için $\overrightarrow{P_0P}=\sum_{i=1}^{n}a_i\overrightarrow{P_0P_i},\ a_i\in\mathbb{R}$ yazılabilir. O halde,

$$x_i:E^n\to\mathbb{R}$$
$$P\to x_i\left(P\right)=a_i,\ 1\leq i\leq n$$

olmak üzere $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ afin koordinat sistemi bulunabilir. Bu afin koordinat sistemine Öklid (dik) koordinat sistemi denir.

Tanım 2.8 $d : E^n \times E^n \to \mathbb{R}^+,\quad d(X,Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2}$ şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna E^n Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve $d(X,Y)$ reel sayısına da X ile Y noktaları arasındaki uzaklık denir. Burada $X = (x_i)$, $Y = (y_i) \in E^n$, $1 \le i \le n$. (Afin ve Öklid uzayı hakkında geniş bilgi için [44] ve [45] kaynaklarına bakınız.)

2.2 Vektörel Çarpım

2.2.1 $\mathbb{R}^3$ Uzayında Vektörel Çarpım

$\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$, $\mathbb{R}^3$ uzayının standart bazı olmak üzere $\forall \vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$ vektörlerinin vektörel çarpımı $\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}$ ile gösterilir ve $\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta} = \sum_{i=1}^{3} \det\left(\vec{e_i}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}\right)\vec{e_i}$ ile tanımlanır. Buradan

$$\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta} = \det\left(\vec{e_1}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}\right)\vec{e_1} + \det\left(\vec{e_2}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}\right)\vec{e_2} + \det\left(\vec{e_3}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}\right)\vec{e_3}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \vec{e_1} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \vec{e_2} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \vec{e_3}$$

$$\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta} = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\vec{e_1} + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\vec{e_2} + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\vec{e_3}$$

elde edilir. O halde $\vec{\alpha}$ ve $\vec{\beta}$ vektörlerinin vektörel çarpımı

$$\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

şeklindeki sanal determinant ile hesaplanabilir.

Not 2.1

1. Burada tanımlanan determinant bir sanal determinanttır. Çünkü birinci satır $\vec{e_1},\ \vec{e_2},\ \vec{e_3}$ vektörlerinden oluşmaktadır. Oysa bütün elemanlar skaler olmak zorundadır.

2. İki vektörün vektörel çarpımı $\mathbb{R}^3$ de yeni bir vektördür. İki vektörün iç çarpımı n boyutta tanımlı olmasına rağmen iki vektörün vektörel çarpımı $\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^7$ uzayında tanımlıdır.

Örnek 2.4 $\vec{e_1}=(1,0,0),\quad \vec{e_2}=(0,1,0),\quad \vec{e_3}=(0,0,1)\Rightarrow \vec{e_i}=(\delta_{i1},\delta_{i2},\delta_{i3}),\ 1\le i\le 3$

vektörleri için $\vec{e_1}\wedge\vec{e_2}=\vec{e_3}$, $\vec{e_2}\wedge\vec{e_3}=\vec{e_1}$, $\vec{e_3}\wedge\vec{e_1}=\vec{e_2}$ eşitlikleri sağlanır.

Özellikler

$\forall\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}^3$ için,

1. $\vec{\alpha}\wedge\vec{\alpha}=\sum_{i=1}^{3}\det\left(\vec{e_i},\vec{\alpha},\vec{\alpha}\right)\vec{e_i}=\vec{0}\in\mathbb{R}^3$

2. $\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta}=\sum_{i=1}^{3}\det\left(\vec{e_i},\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)\vec{e_i}=-\sum_{i=1}^{3}\det\left(\vec{e_i},\vec{\beta},\vec{\alpha}\right)\vec{e_i}=-\vec{\beta}\wedge\vec{\alpha}$

3. $\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\wedge\vec{\gamma}=\left(\vec{\alpha}\wedge\vec{\gamma}\right)+\left(\vec{\beta}\wedge\vec{\gamma}\right)$

4. $\vec{\gamma}\wedge\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)=\left(\vec{\gamma}\wedge\vec{\alpha}\right)+\left(\vec{\gamma}\wedge\vec{\beta}\right)$

5. $\lambda\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta}=\lambda\left(\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta}\right)=\vec{\alpha}\wedge\left(\lambda\vec{\beta}\right),\ \lambda\in\mathbb{R}$

6. $\vec{\alpha}$ ile $\vec{\beta}$ lineer bağımlı ise $\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta}=\vec{0}$ dır.

Karma Çarpım

$\forall\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\in\mathbb{R}^3$ vektörlerinin karma çarpımı

$$\begin{aligned}&\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}\\&\quad\left(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\right)\to\left\langle\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta},\vec{\gamma}\right\rangle=\det\left(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\right)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Özellikler

$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$ için,

1. $\left\langle \vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}, \vec{\gamma} \right\rangle = \left\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \wedge \vec{\gamma} \right\rangle = \left\langle \vec{\beta}, \vec{\gamma} \wedge \vec{\alpha} \right\rangle = \left\langle \vec{\gamma}, \vec{\alpha} \wedge \vec{\beta} \right\rangle = \left\langle \vec{\beta} \wedge \vec{\gamma}, \vec{\alpha} \right\rangle = \left\langle \vec{\gamma} \wedge \vec{\alpha}, \vec{\beta} \right\rangle$

$$\left\langle \vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}, \vec{\gamma} \right\rangle = \det\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}\right) = -\det\left(\vec{\beta}, \vec{\alpha}, \vec{\gamma}\right) = \det\left(\vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\alpha}\right) = \left\langle \vec{\beta} \wedge \vec{\gamma}, \vec{\alpha} \right\rangle = \left\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \wedge \vec{\gamma} \right\rangle$$

2. $\left\langle \vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}, \vec{\alpha} \right\rangle = \det\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}\right) = 0$

$\left\langle \vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}, \vec{\beta} \right\rangle = \det\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\beta}\right) = 0$ olup

$\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta} \perp \vec{\alpha}$ ve $\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta} \perp \vec{\beta}$ dir.

2.2.2 $\mathbb{R}^3$ de Üç Vektörün Vektörel Çarpım

$\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3$ vektörlerinin vektörel çarpımı $\left(\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}\right) \wedge \vec{\gamma}$ olmak üzere

$\left(\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}\right) \wedge \vec{\gamma} = \left\langle \vec{\alpha}, \vec{\gamma} \right\rangle \vec{\beta} - \left\langle \vec{\beta}, \vec{\gamma} \right\rangle \vec{\alpha}$ veya $\vec{\alpha} \wedge \left(\vec{\beta} \wedge \vec{\gamma}\right) = \left\langle \vec{\alpha}, \vec{\gamma} \right\rangle \vec{\beta} - \left\langle \vec{\beta}, \vec{\alpha} \right\rangle \vec{\gamma}$

şeklinde tanımlanır. Dikkat edilirse $\left(\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}\right) \wedge \vec{\gamma} \neq \vec{\alpha} \wedge \left(\vec{\beta} \wedge \vec{\gamma}\right)$dır.

Jacobi Özdeşliği

$\forall \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3$ vektörleri için $\left(\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}\right) \wedge \vec{\gamma} + \left(\vec{\beta} \wedge \vec{\gamma}\right) \wedge \vec{\alpha} + \left(\vec{\gamma} \wedge \vec{\alpha}\right) \wedge \vec{\beta} = \vec{0}$ eşitliğine **Jacobi (Jacobien) Özdeşliği** denir.

Langrange Özdeşliği

$\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta} \in \mathbb{R}^3$ vektörleri verilsin.

$$\left\langle \vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}, \vec{\gamma} \wedge \vec{\delta} \right\rangle = \left\langle \left(\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}\right) \wedge \vec{\gamma}, \vec{\delta} \right\rangle = \left\langle \left\langle \vec{\alpha}, \vec{\gamma} \right\rangle \vec{\beta} - \left\langle \vec{\beta}, \vec{\gamma} \right\rangle \vec{\alpha}, \vec{\delta} \right\rangle = \begin{vmatrix} \left\langle \vec{\alpha}, \vec{\gamma} \right\rangle & \left\langle \vec{\alpha}, \vec{\delta} \right\rangle \\ \left\langle \vec{\beta}, \vec{\delta} \right\rangle & \left\langle \vec{\beta}, \vec{\gamma} \right\rangle \end{vmatrix}$$

eşitliğine $\mathbb{R}^3$ de Lagrange Özdeşliği denir. Gerçekten $\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta} = \vec{v}$ denilirse karma çarpım ve determinant özellikleri kullanılarak

$$\left\langle \vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}, \vec{\gamma} \wedge \vec{\delta} \right\rangle = \left\langle \vec{v}, \vec{\gamma} \wedge \vec{\delta} \right\rangle = \left\langle \vec{v} \wedge \vec{\gamma}, \vec{\delta} \right\rangle = \left\langle \left(\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta} \right) \wedge \vec{\gamma}, \vec{\delta} \right\rangle = \left\langle \left\langle \vec{\alpha}, \vec{\gamma} \right\rangle \vec{\beta} - \left\langle \vec{\beta}, \vec{\gamma} \right\rangle \vec{\alpha}, \vec{\delta} \right\rangle$$

elde edilir.

2.2.3 $\mathbb{R}^3$ de Vektörel Çarpımın Geometrik Yorumu

1. İki vektörün vektörel çarpımı her iki vektöre de dik olan bir vektördür.
2. İki vektörün vektörel çarpımı her iki vektöre de dik olan ve boyu bu iki vektör üzerinde kurulan paralelkenarın alanına eşit yeni bir vektördür.

$$\left\| \vec{\alpha} \wedge \vec{\beta} \right\| = \left\| \vec{\alpha} \right\| . \left\| \vec{\beta} \right\| . \sin\theta$$

(Vektörel ve karma çarpım hakkında geniş bilgi için [44], [45] ve [46] kaynaklarına bakınız.)

2.2.4 $\mathbb{R}^7$ de Vektörel Çarpım

7 boyutlu Öklidyen uzayı ve 3 boyutlu Öklidyen uzayı iki vektörün vektörel çarpımının tanımlı olduğu uzaylardır [4, 8].

$\left\{ \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4}, \vec{e_5}, \vec{e_6}, \vec{e_7} \right\}$, $\mathbb{R}^7$ uzayının standart bazı olmak üzere

$\forall \vec{\alpha} = \left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7 \right), \vec{\beta} = \left(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7 \right) \in \mathbb{R}^7$ vektörlerinin vektörel çarpımı $\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta}$ ile gösterilir ve

$$\begin{aligned}
\vec{\alpha} \wedge \vec{\beta} = & \left(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7 \right) \wedge \left(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7 \right) \\
= & (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 + \alpha_4\beta_5 - \alpha_5\beta_4 - \alpha_6\beta_7 + \alpha_7\beta_6, \\
& -\alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1 + \alpha_4\beta_6 - \alpha_6\beta_4 + \alpha_5\beta_7 - \alpha_7\beta_5, \\
& \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_4\beta_7 - \alpha_7\beta_4 - \alpha_5\beta_6 + \alpha_6\beta_5, \\
& -\alpha_1\beta_5 - \alpha_2\beta_6 - \alpha_3\beta_7 + \alpha_5\beta_1 + \alpha_6\beta_2 + \alpha_7\beta_3, \\
& \alpha_1\beta_4 - \alpha_2\beta_7 + \alpha_3\beta_6 - \alpha_4\beta_1 - \alpha_6\beta_3 + \alpha_7\beta_2, \\
& \alpha_1\beta_7 - \alpha_3\beta_5 + \alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2 + \alpha_5\beta_3 - \alpha_7\beta_1, \\
& -\alpha_1\beta_6 + \alpha_2\beta_5 + \alpha_3\beta_4 - \alpha_4\beta_3 - \alpha_5\beta_2 + \alpha_6\beta_1)
\end{aligned}$$

ile tanımlanır. $\mathbb{R}^7$ deki vektörel çarpım, Jacobi özelliği hariç $\mathbb{R}^3$ deki vektörel çarpım için geçerli olan bütün özellikleri sağlamaktadır, [8, 25].

2.3 Tanjant Vektörler ve Tanjant Uzaylar

A, V vektör uzayı ile birleşen n boyutlu bir afin uzay olsun. $P \in A, \vec{v} \in V$ için $\left(P,\vec{v}\right) = \vec{v}_P$ ikilisine A afin uzayında bir tanjant vektör denir.

$P \in A$ noktasının tanjant vektörlerinin kümesi $T_A(P)$ ile gösterilir ve

$$T_A(P) = \left\{\vec{v}_P = \left(P,\vec{v}\right) : P \in A,\ \vec{v} \in V\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.9 $T_A(P)$ üzerinde toplama işlemi

$$\oplus : T_A\left(P\right) \times T_A\left(P\right) \to T_A\left(P\right)$$

$\forall \vec{v}_P,\ \vec{u}_P \in T_A\left(P\right)$ için

$$\vec{v}_P \oplus \vec{u}_P = \left(P,\vec{v}\right) \oplus \left(P,\vec{u}\right) = \left(P,\vec{v}+\vec{u}\right) = \left(\vec{v}+\vec{u}\right)_P = \vec{v}_P + \vec{u}_P$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.10 $T_A(P)$ üzerinde skaler ile çarpma işlemi

$$\odot : \mathbb{R} \times T_A\left(P\right) \to T_A\left(P\right)$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{v}_P \in T_A\left(P\right)$ için

$$\lambda \odot \vec{v}_P = \lambda \odot \left(P,\vec{v}\right) = \left(P,\lambda\vec{v}\right)$$

şeklinde tanımlanır.

Sonuç 2.1 $\left\{T_A\left(P\right), \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\right\}$ altılısı bir vektör uzayıdır. Bu uzaya A afin uzayının P noktasındaki tanjant vektörlerinin uzayı veya kısaca tanjant uzay denir.

$A = E^n$ alınırsa $\left\{T_{E^n}\left(P\right), \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\right\}$ altılısı bir vektör uzayı olur. Bu uzayın standart bazı $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_P, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_P\right\}$ dır.

2.4 Vektör Alanları ve Vektör Alanları Uzayı

$P \in E^n$ noktaları üzerindeki tanjant uzayların birleşimi $\bigcup_{P\in E^n} T_{E^n}(P)$ ile gösterilsin.

$$\pi : \bigcup_{P\in E^n} T_{E^n}(P) \to E^n$$

$$\vec{v}_P \to \pi(\vec{v}_P) = P$$

dönüşümü tanımlanmış olsun. $\pi \circ X : E^n \to E^n$ özdeşlik dönüşümü olacak şekilde

$$X : E^n \to \bigcup_{P\in E^n} T_{E^n}(P)$$

$$P \to X(P) = X_P$$

dönüşümüne E^n de bir vektör alanı denir. Yani, E^n üzerindeki bir X vektör alanı, $\forall P \in E^n$ noktasına $T_{E^n}(P)$ nin bir X_P tanjant vektörünü karşılık getiren bir fonksiyon olarak düşünülebilir.

Tanım 2.11 E^n de bütün vektör alanlarının kümesi $\chi(E^n)$ ile gösterilir ve

$$\chi(E^n) = \left\{ X \middle| X : E^n \xrightarrow[\text{örten}]{1-1} \bigcup_{P\in E^n} T_{E^n}(P) \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.12 $\chi(E^n)$ üzerinde toplama işlemi

$$\oplus : \chi(E^n) \times \chi(E^n) \to \chi(E^n)$$

$\forall X, Y \in \chi(E^n), \forall P \in E^n$ için

$$(X \oplus Y)(P) = \vec{X}_P + \vec{Y}_p$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.13 $\chi(E^n)$ üzerinde skaler ile çarpma işlemi

$$\odot : \mathbb{R} \times \chi(E^n) \to \chi(E^n)$$

$\forall X \in \chi\left(E^n\right), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall P \in E^n$ için

$$\left(\lambda \odot X\right)\left(P\right) = \lambda \odot X_P$$

şeklinde tanımlıdır.

Sonuç 2.2 $\left\{\chi\left(E^n\right), \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\right\}$ altılısı bir vektör uzayıdır. Bu uzaya vektör alanlarının uzayı denir. Bu uzayın standart bazı $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ dır.

2.5 Yöne Göre Türev ve Kovaryant Türev

Tanım 2.14 $f : E^n \to \mathbb{R}, a \in E^n$ olsun. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{\|x - a\|} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{\|h\|} = f'(a)$

limiti mevcut ise f ye $a \in E^n$ noktasında diferensiyellenebilirdir denir.

Tanım 2.15 Belli bir $a \in E^n$ noktasında diferensiyellenebilir reel değerli fonksiyonların kümesi $C\left(a, \mathbb{R}\right)$ ile gösterilir. $\forall a \in E^n$ için $f \in C\left(a, \mathbb{R}\right)$ ise f ye E^n *de* diferensiyellenebilirdir denir. E^n de diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi $C\left(E^n, \mathbb{R}\right)$ ile gösterilir.

Tanım 2.16 $f : E^n \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyonunun $\vec{v}_P$ tanjant vektörü doğrultusundaki türevi $\vec{v}_P\left[f\right]$ ile gösterilir ve

$$\vec{v}_P\left[f\right] = \frac{d}{dt}\left[f\left(P + t\vec{v}\right)\right]\bigg|_{t=0}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.17 $X \in \chi\left(E^n\right),\ f \in C\left(E^n, \mathbb{R}\right)$ olsun. $\forall P \in E^n$ için $\left(X\left[f\right]\right)\left(P\right) = \vec{X}_P\left[f\right]$ ile tanımlı $X\left[f\right] \in C\left(E^n, \mathbb{R}\right)$ fonksiyonuna f fonksiyonunun X vektör alanı yönündeki türevi denir.

Tanım 2.18 $\alpha'(t)\left[f\right] = D_{\alpha'(t)} f$ türevine $f : E^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\alpha(t)$ eğrisi yönündeki yöne göre türevi veya eğriye göre kovaryant türevi denir.

2.6 Bir Vektör Alanının Bir Diğer Vektör Alanına Göre Kovaryant Türevi

Tanım 2.19 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n), Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\chi(E^n)$ verilsin. $P\in E^n$ noktası için $X_P,Y_P\in T_{E^n}(P)$ olmak üzere $x_i,y_i:E^n\to\mathbb{R}$ fonksiyonları $C^\infty-$sınıfından ise $X,Y\in\chi(E^n)$ vektör alanları da $C^\infty-$ sınıfındandır denir.

Tanım 2.20 Y diferensiyellenebilir vektör alanının X_p tanjant vektörü yönündeki türevi

$$Y\left(P+t\vec{X}\right)'(0)=\left(\lim_{t\to 0}\frac{Y(P+tX)-Y(P)}{t}\right)$$

şeklinde tanımlanır ve $D_X Y\big|_p$, $\nabla_X Y\big|_p$ ile gösterilir.

Tanım 2.21 Y diferensiyellenebilir vektör alanının X vektör alanı yönündeki kovaryant türevi

$$\begin{aligned} D:\chi(E^n)\times\chi(E^n) &\to \chi(E^n)\\ (X,Y) &\to D_XY:E^n\to\bigcup_{P\in E^n}T_{E^n}(P)\\ &\qquad\qquad P\to D_XY\big|_P\end{aligned}$$

olup $D_XY\big|_P=D_{X_P}Y=\left(X_p[y_1],X_p[y_2],\cdots,X_p[y_n]\right)$ ile tanımlanır.

Burada D operatörüne $\chi(E^n)$ de bir konneksiyon denir.

2.7 Kotanjant Vektörler ve Kotanjant Uzaylar

Tanım 2.22 $P\in E^n$ noktasındaki tanjant uzayı $T_{E^n}(P)$ olsun. $T_{E^n}(P)$ uzayının dual uzayı $T_{E^n}{}^*(P)$ olmak üzere $T_{E^n}{}^*(P)$ dual uzayına kotanjant uzay ve bu uzayın her bir elemanına da bir kotanjant vektör denir ve

$$T_{E^n}{}^*(P)=\left\{\overrightarrow{V_p}^*\,\middle|\,\overrightarrow{V_p}^*=\left(P,\vec{v}^*\right),\ \vec{v}^*:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}, P\in E^n\right\}$$

$$=\left\{\overrightarrow{V_p}^*\,\middle|\,\overrightarrow{V_p}^*:T_{E^n}(P)\xrightarrow{lineer}\mathbb{R}\right\}$$

şeklinde tanımlanır. ${T_{E^n}}^*(P)=\{P\}\times(\mathbb{R}^n)^*$ yazılabilir.

Tanım 2.23 ${T_{E^n}}^*(P)$ üzerinde toplama işlemi

$$\oplus : {T_{E^n}}^*(P)\times {T_{E^n}}^*(P)\rightarrow {T_{E^n}}^*(P)$$

$\forall \overrightarrow{v^*{}_p}, \overrightarrow{w^*{}_p} \in {T_{E^n}}^*(P)$ için

$$\overrightarrow{v_p^*}\oplus\overrightarrow{w_p^*}=\left(P,\overrightarrow{v^*}+\overrightarrow{w^*}\right)$$

şeklinde tanımlanır.

$\left(\overrightarrow{v^*}+\overrightarrow{w^*}\right)(\alpha)=\overrightarrow{v^*}(\alpha)+\overrightarrow{w^*}(\alpha),\ \alpha\in\mathbb{R}^n$ şeklindedir.

Tanım 2.24 ${T_{E^n}}^*(P)$ üzerinde skaler ile çarpma işlemi

$$\odot : \mathbb{R}\times {T_{E^n}}^*(P)\rightarrow {T_{E^n}}^*(P)$$

$\forall \overrightarrow{v_p^*} \in {T_{E^n}}^*(P), \lambda\in\mathbb{R}$ için

$$\lambda\odot\overrightarrow{v_p^*}=\lambda\odot\left(P,\overrightarrow{v^*}\right)=\left(P,\lambda\overrightarrow{v^*}\right)$$

şeklinde tanımlanır.

Sonuç 2.3 $\left\{{T_{E^n}}^*(P),\oplus,\mathbb{R},+,\cdot,\odot\right\}$ altılısı bir vektör uzayıdır.

Bu uzaya kotanjant uzay denir. Ayrıca,

$$boy{T_{E^n}}^*(P)=boyT_{E^n}(P)=n$$

dır.

(2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7 bölümlerindeki konular hakkında geniş bilgi için [44] ve [45] kaynaklarına bakınız.)

2.8 Eğriler Teorisi

Tanım 2.25 $I\subseteq\mathbb{R}$ ve $I=(a,b)$ olsun. $\alpha : I\rightarrow E^n$, $\alpha(t)=(\alpha_1(t),\alpha_2(t),...,\alpha_n(t))$ diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere $\alpha(I)\subset E^n$ alt kümesine E^n de bir eğri denir. Burada I, α eğrisinin parametre aralığı ve $t \in I$ reel sayısına da α eğrisinin parametresi denir. Ayrıca (I,α) ikilisine eğrinin koordinat komşuluğu denir. Bir eğri $\alpha(I) \subset E^n$ şeklinde veya kısaca (α) ile gösterilir.

Tanım 2.26 E^n de bir M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\|\alpha'\| : I \to \mathbb{R},\quad t \in I \to \|\alpha'\|(t) = \|\alpha'(t)\|$ ile tanımlı fonksiyona M eğrisinin (I,α) koordinat komşuluğuna göre skaler hız fonksiyonu, $\|\alpha'(t)\| \in \mathbb{R}$ reel sayısına da M eğrisinin (I,α) koordinat komşuluğuna göre $\alpha(t)$ noktasındaki skaler hızı , $\alpha'(t) = \dfrac{d\alpha}{dt} = \left(\dfrac{d\alpha_1}{dt}, \dfrac{d\alpha_2}{dt}, \ldots, \dfrac{d\alpha_n}{dt}\right)\Big|_{\alpha(t)}$ vektörüne de M eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü denir.

Tanım 2.27 E^n de bir M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall s \in I$ için, $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise M eğrisine birim hızlı eğri denir. M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğunda birim hızlı ise $s \in I$ parametresine eğrinin yay parametresi denir.

Tanım 2.28 Her noktada hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir.

Serret-Frenet Vektörleri

E^n de bir M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. M nin $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü $\alpha'(t)\big|_{\alpha(t)}$ ise E^n deki Öklid koordinat sistemi $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ olmak üzere $\alpha'(t)\big|_{\alpha(t)} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{d\alpha_i}{dt} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\alpha(t)}$ yazılabilir.

Böylece,

$$\alpha' : M \to \bigcup T_M(\alpha(t))$$

$$\alpha(t) \to \alpha'(t)\big|_{\alpha(t)}$$

olup $\alpha'(t) \in \chi(M)$ dir.

2.8.1 Bir M Eğrisinin Yüksek Mertebeden Türev Vektör Alanları

M , E^n de (I,α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri olsun. D, E^n de kovaryant türev operatörü olmak üzere $D:\chi(E^n)\times\chi(E^n)\rightarrow\chi(E^n)$ dönüşümü $D_{\alpha'(t)}=\dfrac{d}{dt}$ şeklinde tanımlansın. Bu takdirde $D_{\alpha'}\alpha'=\dfrac{d\alpha'}{dt}$ dır. Çünkü

$$D_{\alpha'}\alpha'=\left(\alpha'\left[\frac{d\alpha_1}{dt}\right],\ldots,\alpha'\left[\frac{d\alpha_n}{dt}\right]\right)$$

$$=\left(\frac{d^2\alpha_1}{dt^2},\ldots,\frac{d^2\alpha_n}{dt^2}\right)$$

$$=\left(\alpha_1'',\ldots,\alpha_n''\right)$$

$$=\alpha''(t)\in\chi(E^n)$$

dir. Benzer şekilde devam edilirse,

$$D_{\alpha'}\alpha'=\alpha''$$

$$D_{\alpha'}\alpha''=\alpha'''$$

$$\vdots$$

$$D_{\alpha'}\alpha^{(n-1)}=\alpha^{(n)}$$

elde edilir. Buradan

$\alpha',\alpha'',\ldots,\alpha^{(n)}\in\chi(E^n)$olduğu açıktır. Ayrıca

$$\alpha'(t)\Big|_{\alpha(t)},\alpha''(t)\Big|_{\alpha(t)},\ldots,\alpha^{(n)}\Big|_{\alpha(t)}\in T_{E^n}\left(\alpha(t)\right)$$

bulunur. Bu türev vektör alanlarına eğrinin yüksek mertebeden türevleri denir. Bu vektörlerin her biri vektör alanı veya verilen bir $\alpha(t)\in M$ noktasında bir tanjant vektörüdür.

Bu vektör alanlarından r tanesinin lineer bağımsız olduğunu kabul edelim. Yani

$\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(r)} \in \chi(M)$ olmak üzere $S = \{\alpha', \alpha'', ..., \alpha^{(r)}\}$ lineer bağımsız olsun. O halde $\{\alpha^{(r+1)}, ..., \alpha^{(n)}\} \in S_P\{\alpha', \alpha'', ..., \alpha^{(r)}\}$ yazılabilir. $S = \{\alpha', \alpha'', ..., \alpha^{(r)}\}$ lineer bağımsız sistemine Gram-Schmidt metodu uygulanırsa,

$$E_1 = \alpha'$$

$$E_2 = \alpha'' - \frac{\langle \alpha'', E_1 \rangle}{\langle E_1, E_1 \rangle} E_1$$

$$\vdots$$

$$E_r = \alpha^{(r)} - \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\langle \alpha^{(r)}, E_k \rangle}{\langle E_k, E_k \rangle} E_k$$

olmak üzere $\{E_1, E_2, \ldots, E_r\}$ sistemi bir ortogonal sistemi elde edilir. Buradan

$$V_1 = \frac{E_1}{\|E_1\|},$$

$$V_2 = \frac{E_2}{\|E_2\|}$$

$$\vdots$$

$$V_r = \frac{E_r}{\|E_r\|}$$

olmak üzere $\{V_1, V_2, \ldots, V_r\}$ ortonormal sistemi elde edilir. Yani $\langle V_i, V_j \rangle = \delta_{ij}$ dir.

Tanım 2.29 E^n de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $r < n$ olmak üzere $\{\alpha', \alpha'', ..., \alpha^{(r)}\}$ kümesi lineer bağımsız iken $\{\alpha^{(r+1)}, ..., \alpha^{(n)}\} \in S_P\{\alpha', \alpha'', ..., \alpha^{(r)}\}$ olmak üzere S den elde edilen $\{V_1, V_2, \ldots, V_r\}$ ortonormal vektör alanları sistemine M nin $\alpha(t) \in M$ noktasındaki Serret-Frenet r ayaklısı veya Frenet çatısı denir. Burada $\forall \alpha(t) \in M$ için $V_i,\ 1 \leq i \leq r,$ vektörlerinin her birine bir Frenet vektörü denir.

2.9 Serret-Frenet Formülleri ve Eğrilikler

Tanım 2.30 E^n de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ için $\alpha(s) \in M$ noktasındaki Serret-Frenet r ayaklısı $\{V_1(s),, \ldots, V_r(s)\}$ olsun.

$$k_i : I \to \mathbb{R} \ , \quad 1 \le i < r,$$
$$s \to k_i(s) = \left\langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \right\rangle$$

şeklinde tanımlı, k_i fonksiyonuna M eğrisinin i yinci eğrilik fonksiyonu, $k_i(s) \in \mathbb{R}$ sayısına da M eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki i yinci eğriliği denir. Burada $V_i'(s)$ ler $V_i(s)$ Frenet vektörlerinin s ye göre türevleridir.

Teorem 2.1 E^n de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere Serret-Frenet r ayaklısı $\{V_1(s), , \ldots, V_r(s)\}$ ve eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğrilikleri $k_i(s)$, $1 \le i < r$ ise

$$V_1'(s) = k_1(s) V_2(s)$$
$$V_i'(s) = -k_{i-1}(s) V_{i-1}(s) + k_i(s) V_{i+1}(s),$$
$$V_r'(s) = -k_{r-1}(s) V_{r-1}(s)$$

dir [47]. Bu formüllere Frenet formülleri denir.

İspat

M, E^n de (I, α) koordinat komşuluğu ile tanımlanmış bir eğri ve $s \in I$ da yay parametresi olmak üzere Serret-Frenet r ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \cdots, V_r(s)\}$ olarak verilsin. Bu durumda $s \in I$ yay parametresi olduğundan dolayı $\forall \ s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ dir. Ayrıca $S = \{\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^r\}$, $r < k$ sistemi lineer bağımsızdır. $S = \{\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^r\}$ lineer bağımsız olduğundan bu S sistemine Gram-Schmidt metodu uygulanabilir ve $\{E_1, E_2, \ldots, E_r\}$ ortogonal sistemi elde edilir. Burada her bir vektör normuna bölünürse, $\{V_1(s), \ldots, V_r(s)\}$ ortonormal vektör sistemi elde edilir. Böylece $\left\langle V_i, V_j \right\rangle = \delta_{ij}$; $i, j = 1, 2, \ldots, r$ ve $\left\langle V_i', V_j \right\rangle = -\left\langle V_j', V_i \right\rangle$ olur.

$V_1(s) = E_1 = \alpha'$ olduğundan dolayı $V_1'(s) = \alpha''$ dır. Bu nedenle $V_1'(s) = Sp\{\alpha', \alpha''\}$ yazılır. Ayrıca,

$V_2(s) = \dfrac{\alpha''}{\|\alpha''\|}$ ifadesi kullanılırsa, $V_2'(s) = \dfrac{\alpha'''}{\|\alpha''\|}$ olup $V_2''(s) = Sp\{\alpha', \alpha'', \alpha''''\}$ dır. Bu şekilde devam edilirse; $V_r''(s) = Sp\left\{\alpha', \alpha'', \alpha'''', \cdots, \alpha^{(r+1)}\right\}$ yazılabilir.

Diğer taraftan, $1 \leq i \leq r-1$ olmak üzere $V_i'(s)$ türevleri $\{V_1(s), V_2(s), \cdots, V_{i+1}(s)\}$ kümesinin lineer birleşimi şeklinde yazılabilir. Buradan da, $j = i-1$ ve $j = i+1$ hariç olmak üzere,

$$\left\langle V_i'(s), V_j(s) \right\rangle = 0$$

ifadesine ulaşılır. Örneğin,

$$\left\langle V_1'(s), V_3(s) \right\rangle = \left\langle V_1'(s), V_4(s) \right\rangle = \cdots = \left\langle V_1'(s), V_r(s) \right\rangle = 0$$

dir.

$$V_1'(s) = a_{11}V_1(s) + a_{12}V_2(s)$$

$\left\langle V_1(s), V_1(s) \right\rangle = 1$ ise $\left\langle V_1'(s), V_1(s) \right\rangle + \left\langle V_1(s), V_1'(s) \right\rangle = 0$

dır. Buradan

$$\left\langle V_1'(s), V_1(s) \right\rangle = a_{11} = 0$$

olur.

$$\left\langle V_1'(s), V_2(s) \right\rangle = a_{12}$$

olmak üzere Tanım 2.30 gereğince,

$$a_{12} = k_1(s) = \left\langle V_1'(s), V_2(s) \right\rangle$$

elde edilir. $a_{11} = 0$ ve $a_{12} = k_1(s)$ ifadeleri yerlerine yazılırsa,

$$V_1'(s) = k_1(s)V_2(s)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$V_i'(s) = -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s),\ 2 \le i \le r-1$$

$V_{r+1}(s)$ olmadığından dolayı, $V_r'(s)$ yü elde etmekte problemle karşılaşırız. $s_0 \in I$ verilsin, $\alpha^{(r+1)}(s_0) \notin Sp\{\alpha'(s_0), \alpha''(s_0), \cdots, \alpha^{(r)}(s_0)\}$ ise, bu durumda I aralığındaki s_0 ın komşuluğunda $V_r'(s)$ bulunabilir. s_0 ın komşuluğunda bulunan $s \in I$ için $V_{r+1}'(s)$ tanımlandığında,

$$V_r'(s) = -k_{r-1}(s)V_{r-1}(s) + k_r(s)V_{r+1}(s)$$

elde edilir. $\alpha^{(r+1)}(s_0) \in Sp\{\alpha'(s_0), \alpha''(s_0), \cdots, \alpha^{(r)}(s_0)\}$ ise, bu durumda

$$V_r'(s_0) = -k_{r-1}(s_0)V_{r-1}(s_0)$$

olur. Yukarıdaki eşitlikteki $k_1(s), k_2(s), \cdots, k_{r-1}(s)$ katsayıları eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğrilikleridir. $\alpha^{(r+1)}(s) \notin Sp\{\alpha'(s), \alpha''(s), \cdots, \alpha^{(r)}(s)\}$ ise, r. inci eğrilik $k_r(s)$ tanımlanabilir. Diğer taraftan $\alpha^{(r+1)}(s) \in Sp\{\alpha'(s), \alpha''(s), \cdots, \alpha^{(r)}(s)\}$ ise $k_r(s) = 0$ dır. $1 \le i \le r-1$ için $k_i(s) > 0$ ve $k_r(s) \ge 0$ olduğuna ulaşılır. $1 \le i \le r-1$ için $k_i(s)$, C^{k-i-1} sınıfındandır. C^{k-r-1} sınıfından olan $k_r(s)$ nin sıfır olmadığı yerde, $k_r(s)$ daima süreklidir.

(2.8 ve 2.9 bölümündeki eğriler teorisi hakkında geniş bilgi için [44] ve [45] kaynaklarına bakınız.)

2.10 E^7 ve E^8 de Serret-Frenet Formülleri

Teorem 2.2 E^7 de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere Serret-Frenet 7-ayaklısı $\{V_1(s), \ldots, V_7(s)\}$ ve eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğrilikleri $k_i(s)$, $1 \le i < 7$ ise,

$$V_1'(s) = k_1(s)V_2(s)$$

$$V_2'(s) = -k_1(s)V_1(s) + k_2(s)V_3(s)$$

$V_3'(s) = -k_2(s)V_2(s) + k_3(s)V_4(s)$

$V_4'(s) = -k_3(s)V_3(s) + k_4(s)V_5(s)$

$V_5'(s) = -k_4(s)V_4(s) + k_5(s)V_6(s)$

$V_6'(s) = -k_5(s)V_5(s) + k_6(s)V_7(s)$

$V_7'(s) = -k_6(s)V_6(s)$

dir.

İspat

$V_1'(s) = a_{11}V_1(s) + a_{12}V_2(s) + \ldots + \ldots a_{17}V_7(s)$

$V_2'(s) = a_{21}V_1(s) + a_{22}V_2(s) + \ldots + \ldots a_{27}V_7(s)$

$V_3'(s) = a_{31}V_1(s) + a_{32}V_2(s) + \ldots + \ldots a_{37}V_7(s)$

$V_4'(s) = a_{41}V_1(s) + a_{42}V_2(s) + \ldots + \ldots a_{47}V_7(s)$

$V_5'(s) = a_{51}V_1(s) + a_{52}V_2(s) + \ldots + \ldots a_{57}V_7(s)$

$V_6'(s) = a_{61}V_1(s) + a_{62}V_2(s) + \ldots + \ldots a_{67}V_7(s)$

$V_7'(s) = a_{71}V_1(s) + a_{72}V_2(s) + \ldots + \ldots a_{77}V_7(s)$

yazılabilir. $\{V_1, V_2, \ldots, V_r\}$ nin ortonormal vektör sistemi olduğu kullanılırsa katsayılar bulunabilir.

$\langle V_1(s), V_1(s) \rangle = 1$ olduğundan $\langle V_1'(s), V_1(s) \rangle = 0$ dır. Böylece $a_{11} = 0$ elde edilir. Ayrıca $k_1(s) = \langle V_1'(s), V_2(s) \rangle$ tanımı gereğince $a_{12} = k_1(s)$ bulunur.

Diğer taraftan $\langle V_1'(s), V_3(s) \rangle = \ldots = \langle V_1'(s), V_7(s) \rangle = 0$ ifadeleri kullanılırsa,

$a_{13} = a_{14} = a_{15} = a_{16} = a_{17} = 0$ olur. Bu durumda, $V_1'(s) = k_1(s)V_2(s)$ elde edilir.

$\left\langle V_1(s), V_2(s)\right\rangle = 0$ ifadesinin türevi alınırsa, $\left\langle V_1'(s), V_2(s)\right\rangle + \left\langle V_1(s), V_2'(s)\right\rangle = 0$ elde edilir. Buradan $\left\langle V_2'(s), V_1(s)\right\rangle = -k_1(s)$ olur. Yani $a_{21} = -k_1(s)$ dir.

$\left\langle V_2(s), V_2(s)\right\rangle = 1$ olduğundan $\left\langle V_2'(s), V_2(s)\right\rangle = 0$ dır. Böylece $a_{22} = 0$ elde edilir. Ayrıca $k_2(s) = \left\langle V_2'(s), V_3(s)\right\rangle$ tanımı gereğince $a_{23} = k_2(s)$ bulunur.

Diğer taraftan $\left\langle V_2'(s), V_4(s)\right\rangle = \ldots = \left\langle V_2'(s), V_7(s)\right\rangle = 0$ ifadeleri kullanılırsa,

$a_{24} = a_{25} = a_{26} = a_{27} = 0$ olur. Bu durumda, $V_2'(s) = -k_1(s)V_1(s) + k_2(s)V_3(s)$ elde edilir.

$\left\langle V_2(s), V_3(s)\right\rangle = 0$ ifadesinin türevi alınırsa, $\left\langle V_2'(s), V_3(s)\right\rangle + \left\langle V_2(s), V_3'(s)\right\rangle = 0$ elde edilir. Buradan $\left\langle V_3'(s), V_2(s)\right\rangle = -k_2(s)$ olur. Yani $a_{32} = -k_2(s)$ dir.

$\left\langle V_3(s), V_3(s)\right\rangle = 1$ olduğundan $\left\langle V_3'(s), V_3(s)\right\rangle = 0$ dır. Böylece $a_{33} = 0$ elde edilir. Ayrıca $k_3(s) = \left\langle V_3'(s), V_4(s)\right\rangle$ tanımı gereğince $a_{34} = k_3(s)$ bulunur.

Diğer taraftan $\left\langle V_3'(s), V_1(s)\right\rangle = \left\langle V_3'(s), V_5(s)\right\rangle = \left\langle V_3'(s), V_6(s)\right\rangle = \left\langle V_3'(s), V_7(s)\right\rangle = 0$ ifadeleri kullanılırsa,

$a_{31} = a_{35} = a_{36} = a_{37} = 0$ olur. Bu durumda, $V_3'(s) = -k_2(s)V_2(s) + k_3(s)V_4(s)$ elde edilir.

$\left\langle V_3(s), V_4(s)\right\rangle = 0$ ifadesinin türevi alınırsa, $\left\langle V_3'(s), V_4(s)\right\rangle + \left\langle V_3(s), V_4'(s)\right\rangle = 0$ elde edilir. Buradan $\left\langle V_4'(s), V_3(s)\right\rangle = -k_3(s)$ olur. Yani $a_{43} = -k_3(s)$ dir.

$\left\langle V_4(s), V_4(s)\right\rangle = 1$ olduğundan $\left\langle V_4'(s), V_4(s)\right\rangle = 0$ dır. Böylece $a_{44} = 0$ elde edilir. Ayrıca $k_4(s) = \left\langle V_4'(s), V_5(s)\right\rangle$ tanımı gereğince $a_{45} = k_4(s)$ bulunur.

Diğer taraftan $\left\langle V_4'(s), V_1(s)\right\rangle = \left\langle V_4'(s), V_2(s)\right\rangle = \left\langle V_4'(s), V_6(s)\right\rangle = \left\langle V_4'(s), V_7(s)\right\rangle = 0$ ifadeleri kullanılırsa,

$a_{41}=a_{42}=a_{46}=a_{47}=0$ olur. Bu durumda, $V_4'(s)=-k_3(s)V_3(s)+k_4(s)V_5(s)$ elde edilir.

$\langle V_4(s),V_5(s)\rangle=0$ ifadesinin türevi alınırsa, $\langle V_4'(s),V_5(s)\rangle+\langle V_4(s),V_5'(s)\rangle=0$ elde edilir. Buradan $\langle V_5'(s),V_4(s)\rangle=-k_4(s)$ olur. Yani $a_{54}=-k_4(s)$ dir.

$\langle V_5(s),V_5(s)\rangle=1$ olduğundan $\langle V_5'(s),V_5(s)\rangle=0$ dır. Böylece $a_{55}=0$ elde edilir. Ayrıca $k_5(s)=\langle V_5'(s),V_6(s)\rangle$ tanımı gereğince $a_{56}=k_5(s)$ bulunur.

Diğer taraftan $\langle V_5'(s),V_1(s)\rangle=\langle V_5'(s),V_2(s)\rangle=\langle V_5'(s),V_3(s)\rangle=\langle V_5'(s),V_7(s)\rangle=0$ ifadeleri kullanılırsa,

$a_{51}=a_{52}=a_{53}=a_{57}=0$ olur. Bu durumda, $V_5'(s)=-k_4(s)V_4(s)+k_5(s)V_6(s)$ elde edilir.

$\langle V_5(s),V_6(s)\rangle=0$ ifadesinin türevi alınırsa, $\langle V_5'(s),V_6(s)\rangle+\langle V_5(s),V_6'(s)\rangle=0$ elde edilir. Buradan $\langle V_6'(s),V_5(s)\rangle=-k_5(s)$ olur. Yani $a_{65}=-k_5(s)$ dir.

$\langle V_6(s),V_6(s)\rangle=1$ olduğundan $\langle V_6'(s),V_6(s)\rangle=0$ dır. Böylece $a_{66}=0$ elde edilir. Ayrıca $k_6(s)=\langle V_6'(s),V_7(s)\rangle$ tanımı gereğince $a_{67}=k_6(s)$ bulunur.

Diğer taraftan $\langle V_6'(s),V_1(s)\rangle=\langle V_6'(s),V_2(s)\rangle=\langle V_6'(s),V_3(s)\rangle=\langle V_6'(s),V_4(s)\rangle=0$ ifadeleri kullanılırsa,

$a_{61}=a_{62}=a_{63}=a_{64}=0$ olur. Bu durumda, $V_6'(s)=-k_5(s)V_5(s)+k_6(s)V_7(s)$ elde edilir.

$\langle V_6(s),V_7(s)\rangle=0$ ifadesinin türevi alınırsa, $\langle V_6'(s),V_7(s)\rangle+\langle V_6(s),V_7'(s)\rangle=0$ elde edilir. Buradan $\langle V_7'(s),V_6(s)\rangle=-k_6(s)$ olur. Yani $a_{76}=-k_6(s)$ dir.

$\langle V_7(s),V_7(s)\rangle=1$ olduğundan $\langle V_7'(s),V_7(s)\rangle=0$ dır. Böylece $a_{77}=0$ elde edilir.

Diğer taraftan

$$\left\langle V_7'(s), V_1(s)\right\rangle = \left\langle V_7'(s), V_2(s)\right\rangle = \left\langle V_7'(s), V_3(s)\right\rangle = \left\langle V_7'(s), V_4(s)\right\rangle = \left\langle V_7'(s), V_5(s)\right\rangle = 0$$

ifadeleri kullanılırsa,

$a_{71} = a_{72} = a_{73} = a_{74} = a_{75} = 0$ olur. Bu durumda, $V_7'(s) = -k_6(s)V_6(s)$ elde edilir.

Benzer şekilde aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.3 E^8 de bir M eğrisi (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere Serret-Frenet 8-ayaklısı $\{V_1(s), \dots, V_8(s)\}$ ve eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğrilikleri $k_i(s)$, $1 \leq i < 8$ ise,

$$V_1'(s) = k_1(s)V_2(s)$$

$$V_2'(s) = -k_1(s)V_1(s) + k_2(s)V_3(s)$$

$$V_3'(s) = -k_2(s)V_2(s) + k_3(s)V_4(s)$$

$$V_4'(s) = -k_3(s)V_3(s) + k_4(s)V_5(s)$$

$$V_5'(s) = -k_4(s)V_4(s) + k_5(s)V_6(s)$$

$$V_6'(s) = -k_5(s)V_5(s) + k_6(s)V_7(s)$$

$$V_7'(s) = -k_6(s)V_6(s) + k_7(s)V_8(s)$$

$$V_8'(s) = -k_7(s)V_7(s)$$

dir.

2.11 **Helisler (Eğilim Çizgileri)**

Tanım 2.31 M **,** E^n de (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall s \in I$ için $\alpha'(s)$ hız vektörü, u sabit birim vektörü ile sabit açı yapıyorsa, M eğrisine bir eğilim çizgisi ve $Sp\{u\}$ ya da M eğilim çizgisinin eğilim ekseni adı verilir [38].

Tanım 2.32 M **,** E^n de (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall \alpha \in I$ ya karşılık gelen

$\alpha(s)\in M$ M nin birinci ve ikinci eğrilikleri, sırasıyla, $k_1(s)$ ve $\mathrm{k}_2(s)$ olsun. $H_1 : I \to \mathbb{R}$, $H_1(s)=\dfrac{k_1(s)}{k_2(s)}$, $\forall s$ için $k_2(s)\neq 0$, şeklinde tanımlı H_1 fonksiyonuna, M eğrisinin 1. inci harmonik eğriliği denir [38].

Tanım 2.33 M **,** E^n de (I,α) koordinat komşuluğu ile verilsin. s yay parametresi ve u sabit birim vektörü için α nın $\alpha(s)$ noktasında Serret-Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s),\ldots,V_r(s)\}$, $3\leq r\leq n$ olsun. $\forall s\in I$ için $\alpha'(s)$ hız vektörünün u sabit birim vektörü ile yaptığı sabit açı $\varphi=\varphi(s)$ ise,

$$H_i : I \to \mathbb{R},\ \ 3\leq i\leq r-2$$
$$\langle V_{i+2}(s),u\rangle = H_i(s)\cos\varphi,\ \varphi\neq \frac{\pi}{2}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona α nın $\alpha(s)$ noktasındaki i. inci harmonik eğriliği denir [38].

BÖLÜM 3

OKTONİYONLAR

Bu bölümde oktoniyonlar ile ilgili genel bilgilere yer verilecektir.

3.1 Reel Oktoniyonlar

$1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ ve e_7 sembolleri, sırası ile, $\mathbb{R}^8$ uzayının $(1,0,0,0,0,0,0,0)$, $(0,1,0,0,0,0,0,0), (0,0,1,0,0,0,0,0), (0,0,0,1,0,0,0,0), (0,0,0,0,1,0,0,0)$, $(0,0,0,0,0,1,0,0), (0,0,0,0,0,0,1,0)$ ve $(0,0,0,0,0,0,0,1)$ standart baz vektörleri olsun.

Tanım 3.1 Bir A reel oktoniyonu, e_i'ler $(i = 0,1,\ldots,7)$ baz elemanları ve a_i'ler de reel sayılar olmak üzere

$$A = \sum_{i=0}^{7} a_i e_i$$

şeklinde tanımlanır [2, 3, 48, 49]. Reel oktoniyonların kümesi ***O*** olmak üzere,

O **=** $\{A = \sum_{i=0}^{7} a_i e_i \mid a_i \in \mathbb{R},\ e_0 = +1$ çarpımsal birim elemanı

$e_0 e_i = e_i e_0 = e_i$, $e_0 e_0 = e_0$, $e_i e_j = -\delta_{ij} e_0 + \varepsilon_{ijk} e_k$,

δ_{ij}, Kronecker Deltası, ε_{ijk}, tamamen antisimetrik tensör,

$(ijk) = (123), (145), (176), (246), (257), (347), (365)$ iken

$\varepsilon_{ijk} = +1\}$

şeklinde gösterilir [2, 3, 48, 49, 50]. Eğer i, j, k indislerinden herhangi iki indis aynı ise, $\varepsilon_{ijk} = 0$ olur. $(ijk) = (123)$ olsun. Bu durumda, $\varepsilon_{123} = +1,\ \varepsilon_{231} = 1,\ \varepsilon_{312} = 1,\ \varepsilon_{213} = -1,$ $\varepsilon_{321} = -1,\ \ \varepsilon_{132} = -1,\ \ \varepsilon_{111} = 0,\ \varepsilon_{222} = 0,\ \varepsilon_{333} = 0,\ \ \varepsilon_{112} = 0,\ \varepsilon_{113} = 0,\ \varepsilon_{221} = 0,\ \varepsilon_{223} = 0,$ $\varepsilon_{331} = 0,\ \varepsilon_{332} = 0,$ dir. Benzer şekilde $(ijk) = (145),(176),(246),(257),(347),(365)$ durumları da verilebilir.

Böylece, ***O*** ; $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}^7$ ün bir direkt toplamı olarak ifade edilebilir [18]. Ayrıca reel sayılar, kompleks sayılar ve kuaterniyon sayılar kümesinin ***O*** nun alt kümeleri olduğu söylenebilir, yani

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \boldsymbol{H} \subset \boldsymbol{O}$$

dir [3, 18, 21]. Reel oktoniyonlar, reel sayılara $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$ elemanlarının eklenmesiyle kuaterniyonların birleşmeli olmayan bir genişletilmesi olarak elde edilmiştir. Reel oktoniyonlar kümesinin her bir A elemanı

$$\begin{aligned} S, V : \boldsymbol{O} &\to \boldsymbol{O} \\ A &\to S(A) = S_A = a_0 \\ A &\to V(A) = V_A = \sum_{i=1}^{7} a_i e_i \end{aligned}$$

olmak üzere

$$A = S_A + V_A$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $S_A = a_0$ reel sayısına A reel oktoniyonunun reel kısmı ve $V_A = \sum_{i=1}^{7} a_i e_i$ vektörüne de A reel oktoniyonunun uzaysal kısmı (vektörel veya pure kısmı) denir [3].

Kompleks sayılar ve kuaterniyonlar reel ve uzaysal kısımlarının direkt toplamı olarak yazılabilirler, benzer şekilde bir reel oktoniyon da reel ve uzaysal kısımlarının direkt toplamı olarak yazılabilir [3, 18, 21]. Ayrıca, ***O*** reel oktoniyonlar kümesinden özel olarak $\mathbb{R}$ reel sayılar, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar, ***H*** reel kuaterniyonlar kümesi ve $\mathbb{R}^7$ vektör uzayı elde edilebilir. Ayrıca Oktoniyonlar $\mathbb{R}^8$ in noktalarını tanımlamakta kullanılır [14].

Tanım 3.2 $\boldsymbol{O}$ kümesi üzerinde toplama işlemi

$$\oplus : \boldsymbol{O} \times \boldsymbol{O} \to \boldsymbol{O}$$

$$\begin{aligned}(A, B) \to A \oplus B &= (S_A + V_A) \oplus (S_B + V_B) \\ &= (S_A + S_B) + (V_A + V_B) \\ &= S_{A+B} + V_{A+B}\end{aligned}$$

veya

$\forall\ A = \sum_{i=0}^{7} a_i e_i,\ \ B = \sum_{i=0}^{7} b_i e_i \in \boldsymbol{O}$ reel oktoniyonları için

$$A \oplus B = \sum_{i=0}^{7} (a_i + b_i) e_i$$

şeklinde tanımlanır [3]. Bu işlemle birlikte $(\boldsymbol{O}, \oplus)$ ikilisi bir Abel grubudur. $\boldsymbol{O}$ nın $\oplus$ işlemine göre birim elemanı $\sum_{i=0}^{7} 0 e_i$ dır.

Tanım 3.3 $\boldsymbol{O}$ kümesi üzerinde skalerle çarpma işlemi

$$\odot : \mathbb{R} \times \boldsymbol{O} \to \boldsymbol{O}$$

$$\begin{aligned}(\lambda, A) \to \lambda \odot A &= \lambda \odot (S_A + V_A) \\ &= \lambda S_A + \lambda V_A\end{aligned}$$

veya

$\forall\ A = \sum_{i=0}^{7} a_i e_i \in \boldsymbol{O}$ reel oktoniyonu ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\lambda \odot A = \sum_{i=0}^{7} (\lambda a_i) e_i$$

şeklinde tanımlanır.

Böylece $\odot : \mathbb{R} \times \boldsymbol{O} \to \boldsymbol{O}$ dış işlemi aşağıdaki özellikleri sağlar.

i) $\lambda \odot (A \oplus B) = (\lambda \odot A) \oplus (\lambda \odot B)$

ii) $(\lambda_1+\lambda_2)\odot A=(\lambda_1\odot A)\oplus(\lambda_2\odot A)$

iii) $(\lambda_1\lambda_2)\odot A=\lambda_1\odot(\lambda_2\odot A)$

iv) $1\odot A=A$

O halde $\{\boldsymbol{O},\oplus,\mathbb{R},+,\cdot,\odot\}$ altılısı bir vektör uzayıdır. $\boldsymbol{O}=Sp\{1,e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7\}$ olduğundan $boy\boldsymbol{O}=8$ dır. Ayrıca $A=\sum_{i=0}^{7}a_ie_i\in\boldsymbol{O}\cong\mathbb{R}\times\mathbb{R}^7$ yazılabilir.

Teorem 3.1 $\{\boldsymbol{O},\oplus,\mathbb{R},+,\cdot,\odot\}$ vektör uzayı $\{\mathbb{R}^8,[+],\mathbb{R},+,\cdot,[\cdot]\}$ vektör uzayına izomorftur. Burada $[+]$ işlemi $\mathbb{R}^8$ de iki vektörün toplamı işlemi, $[\cdot]$ işlemi ise bir skalerle $\mathbb{R}^8$ de bir vektörün çarpımı olan dış işlemdir.

İspat

$$\varphi:\boldsymbol{O}\to\mathbb{R}^8$$
$$A\to\varphi(A)=(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)$$

dönüşümünü tanımlayalım.

- φ dönüşümü lineerdir:

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda\odot A\oplus\mu\odot B)&=\varphi\left(\lambda\odot\left(\sum_{i=0}^{7}a_ie_i\right)\oplus\mu\odot\left(\sum_{i=0}^{7}b_ie_i\right)\right)\\
&=\varphi\left(\sum_{i=0}^{7}(\lambda a_i+\mu b_i)e_i\right)\\
&=(\lambda a_0+\mu b_0,\lambda a_1+\mu b_1,\ldots,\lambda a_7+\mu b_7)\\
&=(\lambda a_0,\lambda a_1,\ldots,\lambda a_7)[+](\mu b_0,\mu b_1,\ldots,\mu b_7)\\
&=\lambda[\cdot](a_0,a_1,\ldots,a_7)[+]\mu[\cdot](b_0,b_1,\ldots,b_7)\\
&=\lambda[\cdot]\varphi\left(\sum_{i=0}^{7}a_ie_i\right)[+]\mu[\cdot]\varphi\left(\sum_{i=0}^{7}b_ie_i\right)\\
&=\lambda[\cdot]\varphi(A)[+]\mu[\cdot]\varphi(B)
\end{aligned}$$

elde edilir.

- φ dönüşümü birebirdir:

$\varphi(A)=\varphi(B)$ olsun. Bu durumda $\varphi\left(\sum_{i=0}^{7} a_i e_i\right)=\varphi\left(\sum_{i=0}^{7} b_i e_i\right)$ yazılır. φ nin tanımı göz önüne alınırsa, $(a_0,a_1,\ldots,a_7)=(b_0,b_1,\ldots,b_7)$ elde edilir. Böylece $A=B$ olur. Yani φ birebirdir.

- φ dönüşümü örtendir:

$boy\boldsymbol{O}=8$, $boy\mathbb{R}^8=8$ ve φ birebir olduğundan φ örtendir.

Sonuç olarak φ bir izomorfizmdir. Böylece $\boldsymbol{O}$ reel oktoniyonların kümesi $\mathbb{R}^8$' e izomorftur [3, 16, 17].

Tanım 3.4 Reel kısmı sıfır olan reel oktoniyona uzaysal oktoniyon (vektör oktoniyon veya pure oktoniyon) adı verilir [3, 4, 8].

Uzaysal Oktoniyonlar İçin Özellikler

$V_A=\sum_{i=1}^{7} a_i e_i$, $V_B=\sum_{i=1}^{7} b_i e_i$ ve $V_C=\sum_{i=1}^{7} c_i e_i$ uzaysal oktoniyon, $\wedge$, $\mathbb{R}^7$ deki vektörel çarpım ve ϕ de V_A ile V_B arasındaki açı olsun. m herhangi bir reel sayı olmak üzere

1) $V_A\wedge(V_B+V_C)=V_A\wedge V_B+V_A\wedge V_C$

2) $V_A\wedge V_A=0$

3) $V_A\wedge V_B=-V_B\wedge V_A$

4) $m\,(V_A\wedge V_B)=\langle(mV_A)\wedge(V_BV_A),V_A\wedge V_B\rangle$

5) $\langle V_A,V_A\wedge V_B\rangle=\langle V_B,V_A\wedge V_B\rangle=0$

6) $\|V_A\wedge V_B\|=\|V_A\|\|V_B\|\sin\phi$

7) $\langle V_A\wedge V_B,V_C\rangle=\langle V_B\wedge V_C,V_A\rangle=\langle V_C\wedge V_A,V_B\rangle$

8) $V_A\wedge(V_A\wedge V_B)=\langle V_A,V_B\rangle V_A-\langle V_A,V_A\rangle V_B$

özellikleri sağlanmaktadır [4, 8, 28].

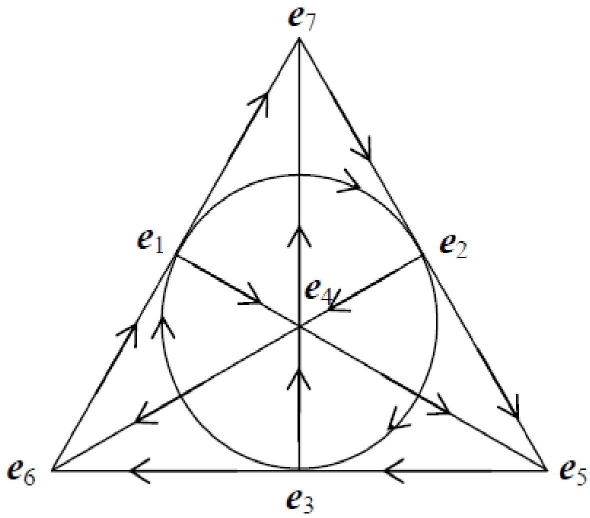
İki Oktoniyonun Çarpımı

İki reel oktoniyonun çarpımı, reel oktoniyonların bütün elemanlarının birbirleriyle çarpılıp ardından toplanmasıyla formülize edilmektedir. Fakat bundan önce çarpımda karşımıza çıkan baz elemanlarının çarpımlarının tanımlanması gerekmektedir. Oktoniyonların baz elemanları arasında $(ijk)=(123),(145),(176),(246),(257),(347)$, (365) olmak üzere $e_0=+1$, $e_0e_i=e_ie_0=e_i$ ve $e_ie_j=-\delta_{ij}e_0+\varepsilon_{ijk}e_k$ bağıntısı vardır. Baz elemanlarının çarpım kuralı aşağıdaki tablo ile verilebilir [3, 51].

Çizelge 3.1 Oktoniyonların Baz Elemanlarının Cayley Dickson Yöntemine Göre Çarpım Tablosu

$\times$	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	-1	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1

Baz elemanlarının farklı bir gösterimi aşağıdaki gibidir [3, 9, 51, 52 ,53].



Şekil 3. 1 Oktoniyonların Baz Elemanlarının Fano Düzlemindeki Gösterimi

Tanım 3.5

$\times : \boldsymbol{O} \times \boldsymbol{O} \to \boldsymbol{O}$

$$(A, B) \to A \times B$$

olmak üzere

$\forall\ A = \sum_{i=0}^{7} a_i e_i,\ B = \sum_{i=0}^{7} b_i e_i \in \boldsymbol{O}$ reel oktoniyonları için iki reel oktoniyonun çarpımı

$$A \times B = \left(\sum_{i=0}^{7} a_i e_i\right) \times \left(\sum_{i=0}^{7} b_i e_i\right)$$

$$= \left[\left(a_0 \mathrm{b}_0\right) - \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 + a_5 b_5 + a_6 b_6 + a_7 b_7\right)\right] 1 +$$

$$\left[a_0 \left(\sum_{i=1}^{7} b_i e_i\right) + b_0 \left(\sum_{i=1}^{7} a_i e_i\right)\right] +$$

$$\left[a_2 b_3 - a_3 b_2 + a_4 b_5 - a_5 b_4 - a_6 b_7 + a_7 b_6\right] e_1 +$$

$$\left[-a_1 b_3 + a_3 b_1 + a_4 b_6 - a_6 b_4 + a_5 b_7 - a_7 b_5\right] e_2 +$$

$$\left[a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_4 b_7 - a_7 b_4 - a_5 b_6 + a_6 b_5\right] e_3 +$$

$$\left[-a_1 b_5 - a_2 b_6 - a_3 b_7 + a_5 b_1 + a_6 b_2 + a_7 b_3\right] e_4 +$$

$$\left[a_1b_4 - a_2b_7 + a_3b_6 - a_4b_1 - a_6b_3 + a_7b_2\right]e_5 +$$

$$\left[a_1b_7 - a_3b_5 + a_2b_4 - a_4b_2 + a_5b_3 - a_7b_1\right]e_6 +$$

$$\left[-a_1b_6 + a_2b_5 + a_3b_4 - a_4b_3 - a_5b_2 + a_6b_1\right]e_7$$

şeklindedir.

Bu ifade düzenlenirse aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$A \times B = S_A S_B - \langle V_A, V_B \rangle + S_A V_B + S_B V_A + V_A \wedge V_B$$

[4, 23-25, 30]. Burada $\wedge$ işlemi $\mathbb{R}^7$ de iki vektörün vektörel çarpımı, $\langle , \rangle$ işlemi $\mathbb{R}^7$ de iki vektörün iç çarpımıdır. İki reel oktoniyonun çarpımının özellikleri

1. İki reel oktoniyonun çarpımı da bir reel oktoniyondur.

2. Reel oktoniyon çarpımı birleşmeli değildir.

   A, B ve C oktoniyonlarından herhangi ikisinin uzaysal kısımları paralel ise

   $$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

eşitliği sağlanır [21].

3. Reel oktoniyon çarpımı değişmeli değildir.

   i) A ve B birer skaler veya

   ii) A ve B nin uzaysal kısımları orantılı ise (yani $V_A = \mu V_B$)

   $$A \times B = B \times A$$

eşitliği sağlanır [21].

4. Reel oktoniyon çarpımı sağdan ve soldan dağılımlıdır.

   Ayrıca,

   $$(\lambda \odot A) \times B = A \times (\lambda \odot B) = \lambda \odot (A \times B)$$

özelliği de sağlanmaktadır [21].

5. $(A \times B) \times C + (B \times A) \times C = A \times (B \times C) + B \times (A \times C)$

6. $(A\times B)\times A = A\times(B\times A)$

7. $(A\times B)\times C + (A\times C)\times B = A\times(B\times C) + A\times(C\times B)$

8. $(A\times B)\times C + C\times(A\times B) = (C\times A)\times B + A\times(B\times C)$

9. $(A\times B)\times(C\times A) = A\times(B\times C)\times A$

özellikleri sağlanır [21].

Sonuç 3.1 $\times$oktoniyon çarpım işlemi birleşmeli olmadığından $(\boldsymbol{O},\oplus,\times)$ üçlüsü bir halka değildir.

Sonuç 3.2 $\boldsymbol{O}-\left\{\sum_{i=0}^{7}0e_i\right\}=\boldsymbol{O}^*$ olmak üzere $(\boldsymbol{O}^*,\times)$ Abel grubu olmadığı için $(\boldsymbol{O},\oplus,\times)$ üçlüsü cisim değildir.

Sonuç 3.3 $\{\boldsymbol{O},\oplus,\mathbb{R},+,\cdot,\odot,\times\}$ yedilisi değişmeli ve birleşimli olmayan cebirdir.

3.2 Reel Oktoniyonlar Üzerinde İşlemler

Tanım 3.6 Reel oktoniyonlar için eşitlik $A=S_A+V_A,\ B=S_B+V_B\in\boldsymbol{O}$ olmak üzere

$$A=B\Leftrightarrow S_A=S_B \text{ ve } V_A=V_B$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.7 Toplama ve skalar ile çarpma işlemlerinden $A=S_A+V_A,\ B=S_B+V_B\in\boldsymbol{O}$ reel oktoniyonlarının farkı

$$A-B=(S_A-S_B)+(V_A-V_B)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.8 Eşlenik işlemi

$$\overline{}:\boldsymbol{O}\to\boldsymbol{O}$$

$$A\to\overline{A}=a_0-\sum_{i=1}^{7}a_ie_i=S_A-V_A$$

şeklinde tanımlanır ve $\overline{A}$ reel oktoniyonuna A reel oktoniyonunun eşleniği denir [3, 4, 8].

$\forall\ A=\sum_{i=0}^{7} a_i e_i = S_A + V_A$ reel oktoniyonu için $A\times\overline{A}=\overline{A}\times A$ çarpımı hesaplanırsa,

$$
\begin{aligned}
A\times\overline{A} &= \left(S_A+V_A\right)\times\left(S_A-V_A\right)\\
&= {S_A}^2-\left\langle V_A,-V_A\right\rangle+S_AV_A-S_AV_A+V_A\wedge V_A\\
&= {S_A}^2+\left\langle V_A,V_A\right\rangle\\
&= \sum_{i=0}^{7}{a_i}^2
\end{aligned}
$$

elde edilir. O halde

$$A\times\overline{A}=\overline{A}\times A\geq 0$$

dır ve

$$A\times\overline{A}=\overline{A}\times A=0\Leftrightarrow A=0$$

dır. Eşlenik işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$\forall\ A,B\in\boldsymbol{O}$ reel oktoniyonları için

i) $\overline{\left(A+B\right)}=\overline{A}+\overline{B}$,

ii) $\overline{\left(A\times B\right)}=\overline{B}\times\overline{A}$,

$\forall\ A\in\boldsymbol{O}$ reel oktoniyonu ve $\lambda\in\mathbb{R}$ reel sayısı için

iii) $\overline{\overline{A}}=A$,

iv) $\overline{\lambda A}=\lambda\overline{A}$,

v) $A=a_0\in\mathbb{R}$ ise $\overline{A}=A$,

vi) $A\in\mathbb{R}^7$ ise $\overline{A}=-A$,

vii) $S_A=\dfrac{A+\overline{A}}{2}$ ve $V_A=\dfrac{A-\overline{A}}{2}$,

viii) $A\times\left(B\times\overline{B}\right)=\left(A\times B\right)\times\overline{B}$ ve $\left(\overline{A}\times A\right)\times B=\overline{A}\times\left(A\times B\right)$**,** [5, 6, 20, 52, 54].

Tanım 3.9

$\|\ \| : \boldsymbol{O} \to \mathbb{R}$

$$A \to \|A\| = \sqrt{A \times \overline{A}} = \sqrt{\overline{A} \times A}$$

veya

$A = \sum_{i=0}^{7} a_i e_i \in \boldsymbol{O}$ ise

$$\|A\| = \sqrt{A \times \overline{A}} = \sqrt{\overline{A} \times A} = \sqrt{\sum_{i=0}^{7} a_i^{\,2}}$$

pozitif reel sayısına A nın normu denir [3].

Tanım 3.10 A_0 reel oktoniyonu için $\|A_0\| = 1$ ise A_0 a birim reel oktoniyon denir [3, 4, 7, 8].

Norm işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$\forall\ A, B \in \boldsymbol{O}$ reel oktoniyonları için

i) $\|A \times B\| = \|A\|\,\|B\|$

ii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

iii) $\|A\|^2 + \|B\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|A+B\|^2 + \|A-B\|^2\right)$ dır [7].

$\forall\ A \in \boldsymbol{O}$ reel oktoniyonu için

iv) $\|A\| = \|\overline{A}\|$

v) $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

vi) A_0 birim reel oktoniyon olmak üzere $A = \|A\| A_0$ dır.

Tanım 3.11

$\left(\| \ \|\right)^{-1} : \boldsymbol{O} - \{0\} \to \boldsymbol{O} - \{0\}$ işlemi

$$A \to A^{-1} = \frac{\overline{A}}{\|A\|^2}$$

şeklinde tanımlanır. Burada A^{-1} reel oktoniyonuna A reel oktoniyonunun tersi denir [3, 9, 10].

Ters işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i) $\|A^{-1}\| = \|A\|^{-1}$

ii) $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A$

iii) A ve B herhangi iki reel oktoniyon olmak üzere $\left(B \times A^{-1}\right) \times A = B$ ve $A^{-1} \times \left(A \times B\right) = B$ dir [21].

Ayrıca,

$$A \times A^{-1} = A \times \left(\|A\|^{-2}\,\overline{A}\right) = \|A\|^{-2}\left(A \times \overline{A}\right) = \|A\|^{-2}\,\|A\|^{2} = 1$$

dır.

Sonuç 3.4 $A \neq 0, \ \forall A \in \boldsymbol{O}$ reel oktoniyonu $A^{-1} = \|A\|^{-2}\,\overline{A}$ tersine sahip ve bir reel oktoniyonun normu tanımlı olduğundan $\boldsymbol{O}$ normlu bölüm cebiridir.

Böylece $\boldsymbol{O}$ bölüm cebirinde bölme işlemi tanımlanabilir.

Tanım 3.12 $A \neq 0$ olmak üzere $A \in \boldsymbol{O}$ reel oktoniyonunu $B \in \boldsymbol{O}$ reel oktoniyonuna bölmek için A yi B^{-1} ile çarpmak gerekir. Fakat oktoniyon çarpımı değişimli olmadığından bu çarpma işlemi iki türlüdür. Bundan dolayı, A yı B ye iki türlü bölmek gerekir.

$$R_1 = A \times B^{-1}$$

veya

$$R_2 = B^{-1} \times A.$$

Burada

R_1 reel oktoniyonuna; A nin B ile sağdan,

R_2 reel oktoniyonuna; A nin B ile soldan bölümü denir.

Genel olarak, $R_1 \neq R_2$ olduğundan $\frac{A}{B}$ notasyonu kullanılamaz.

Genelleme ile

İ) $\overline{(A_1 + \ldots + A_n)} = \overline{A_n} + \ldots + \overline{A_1}$

ii) $\overline{(A_1 \times \ldots \times A_n)} = \overline{A_n} \times \ldots \times \overline{A_1}$

iii) $\|A_1 \times \ldots \times A_n\| = \|A_1\| \ldots \|A_n\|$

iv) $(A_1 \times \ldots \times A_n)^{-1} = A_n^{-1} \times \ldots \times A_1^{-1}$

bağıntıları elde edilir.

Uzaysal Oktoniyonların Çarpımı

$A = V_A = \sum_{i=1}^{7} a_i e_i$, $B = V_B = \sum_{i=1}^{7} b_i e_i$ gibi iki uzaysal oktoniyonun oktoniyon çarpımı, $S_A = S_B = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \times : \boldsymbol{O} \times \boldsymbol{O} &\to \boldsymbol{O} \\ (A, B) &\to A \times B = -\langle A, B \rangle + A \wedge B \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada A ve B uzaysal oktoniyonlarının vektörel çarpımı $A \wedge B = \vec{V}_{A \times B}$ şeklinde tanımlanır. A ve B iki uzaysal oktoniyon olduğundan aynı zamanda $\mathbb{R}^7$ de birer vektördür. $A \times B = -\langle A, B \rangle + A \wedge B$ ifadesinden iki sonuç çıkarılabilir.

i) İki uzaysal oktoniyon dik ise $A \times B = A \wedge B$ dir.

ii) İki uzaysal oktoniyon paralel ise $A \times B = -\langle A, B \rangle$ dir.

3.3 Reel Oktoniyonların Kutupsal Gösterimi

Reel eksen ile A reel oktoniyonu arasındaki açı θ olsun.

$\cos\theta = \dfrac{a_0}{\|A\|}$ ve $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{\sum_{i=1}^{7} a_i^2}}{\|A\|}$, $\|A\| \neq 0$ olmak üzere

$$A = \sum_{i=0}^{7} a_i e_i = \|A\| \frac{\sum_{i=0}^{7} a_i e_i}{\|A\|}, \ \|A\| \neq 0$$

veya

$$A = \|A\| \left[\frac{a_0}{\|A\|} + \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{7} a_i^2}}{\|A\|} \left(\frac{\sum_{i=1}^{7} a_i e_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{7} a_i^2}} \right) \right], \ \|A\| \neq 0$$

yazılabilir. Burada,

$$\boldsymbol{L} = \frac{\sum_{i=1}^{7} a_i e_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{7} a_i^2}}$$

alınırsa bir reel oktoniyonun kutupsal gösterimi

$$A = \|A\| \left(\cos\theta + \boldsymbol{L} \sin\theta \right)$$

şeklinde elde edilir [11, 13, 29, 55, 56].

3.4 Birim Reel Oktoniyonların Kutupsal Gösterimi

$A = \sum_{i=0}^{7} a_i e_i$ birim reel oktoniyonu verilsin.

$a_0 = \cos\theta$ olmak üzere dik üçgenden $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{1 - a_0^2}}{1} = \dfrac{\sqrt{\sum_{i=1}^{7} a_i^2}}{1}$ yazılır. Eğer $A = a_0 + \dfrac{\sum_{i=1}^{7} a_i e_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{7} a_i^2}} \sqrt{\sum_{i=1}^{7} a_i^2}$ yazılırsa $\boldsymbol{L} = \dfrac{\sum_{i=1}^{7} a_i e_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{7} a_i^2}}$ olduğundan

$$A = \cos\theta + \boldsymbol{L}\sin\theta$$

elde edilir [12, 55, 56]. Bu ise birim uzaysal oktoniyonun kutupsal gösterimidir. Burada, θ; $A \in \mathbb{R}^8$ vektörü ile reel eksen arasındaki açı ve $\boldsymbol{L}\sin\theta$; A nın uzaysal oktoniyonların $\mathbb{R}^7$ alt uzayı üzerine izdüşümüdür.

Ayrıca burada $\boldsymbol{L}$ birim oktoniyonu kompleks sayılarda i kompleks biriminin oynadığı rolü oynamaktadır [12, 26, 27]. Oktoniyon operatörü kavramına daha sonra değinilecektir.

3.5 Reel Oktoniyonlar için De Moivre Formülü

Tanım 3.13 Tüm birim reel oktoniyonların kümesi

$$\mathbb{S}^7 = \left\{ A \in \mathbb{R}^8 \,\middle|\, \|A\| = 1 \right\}$$

ile gösterilir, [19]. Tüm birim uzaysal reel oktoniyonların kümesi

$$\mathbb{S}^6 = \left\{ \boldsymbol{L} \in \mathbb{R}^7 \,\middle|\, \|\boldsymbol{L}\| = 1, \overline{\boldsymbol{L}} = -\boldsymbol{L} \right\}$$

ile gösterilir [14, 19, 29, 55].

Örnek 3.1 Herhangi bir $\boldsymbol{L} \in \mathbb{S}^6$ için $\boldsymbol{L} \wedge \boldsymbol{L} = 0$ ve $\langle \boldsymbol{L}, \boldsymbol{L} \rangle = 1$ olduğundan $\boldsymbol{L}^2 = \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{L} = -1$ dir.

Gerçekten $\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{7} l_i e_i$, $l_i = \dfrac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{7} a_i^2}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L}^2 &= \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{L} \\
&= S_{\boldsymbol{L}} S_{\boldsymbol{L}} + S_{\boldsymbol{L}} V_{\boldsymbol{L}} + S_{\boldsymbol{L}} V_{\boldsymbol{L}} - \langle V_{\boldsymbol{L}}, V_{\boldsymbol{L}} \rangle + V_{\boldsymbol{L}} \wedge V_{\boldsymbol{L}} \\
&= -\langle \boldsymbol{L}, \boldsymbol{L} \rangle + \boldsymbol{L} \wedge \boldsymbol{L} \\
&= -\langle \boldsymbol{L}, \boldsymbol{L} \rangle \\
&= -\left(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_5^2 + l_6^2 + l_7^2 \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\boldsymbol{L}^2 = -\left(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_5^2 + l_6^2 + l_7^2\right) = -1$$

elde edilir.

Lemma 3.1 $\boldsymbol{L} \in \mathbb{S}^6$ için

$$(\cos\alpha + \boldsymbol{L}\sin\alpha) \times (\cos\beta + \boldsymbol{L}\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + \boldsymbol{L}\sin(\alpha+\beta)$$

dır [29, 55, 56].

İspat

$\boldsymbol{L} \in \mathbb{S}^6$ için $\boldsymbol{L} \wedge \boldsymbol{L} = 0$ ve $\langle \boldsymbol{L}, \boldsymbol{L} \rangle = 1$ olduğundan $\boldsymbol{L}^2 = \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{L} = -1$ dir.

$$\begin{aligned}(\cos\alpha + \boldsymbol{L}\sin\alpha) \times (\cos\beta + \boldsymbol{L}\sin\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \boldsymbol{L}(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) + \left(\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{L}\right)\sin\alpha\sin\beta \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + \boldsymbol{L}(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) \\ &= \cos\left(\alpha+\beta\right) + \boldsymbol{L}\sin\left(\alpha+\beta\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\cos\left(\alpha+\beta\right) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

ve

$$\sin\left(\alpha+\beta\right) = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta$$

eşitlikleri kullanılmıştır.

Teorem 3.2 $A = \cos\theta + \boldsymbol{L}\sin\theta \in \mathbb{S}^7$ için $\theta \in \mathbb{R}$ ve $\boldsymbol{L} \in \mathbb{S}^6$ olmak üzere

$$A^k = (\cos\theta + \boldsymbol{L}\sin\theta)^k = \cos\left(k\theta\right) + \boldsymbol{L}\sin\left(k\theta\right)$$

bağıntısı elde edilir [13, 29, 55, 56].

İspat

İspat tümevarım yöntemi ile yapılacaktır. k negatif olmayan bir sayı olsun.

- $k = 2$ için teoremin doğruluğu Lemma 3.1 kullanılarak

$$\begin{aligned}\left(\cos\theta + \boldsymbol{L}\sin\theta\right)^2 &= \left(\cos\theta + \boldsymbol{L}\sin\theta\right) \times \left(\cos\theta + \boldsymbol{L}\sin\theta\right) \\ &= \cos\left(\theta+\theta\right) + \boldsymbol{L}\sin\left(\theta+\theta\right) \\ &= \cos\left(2\theta\right) + \boldsymbol{L}\sin\left(2\theta\right)\end{aligned}$$

şeklinde görülür.

- $(\cos\theta+\boldsymbol{L}\sin\theta)^k=\cos(k\theta)+\boldsymbol{L}\sin(k\theta)$ olduğunu kabul edelim.
- $(\cos\theta+\boldsymbol{L}\sin\theta)^{k+1}=\cos((k+1)\theta)+\boldsymbol{L}\sin((k+1)\theta)$ olduğu gösterilmelidir:

$$\begin{aligned}(\cos\theta+\boldsymbol{L}\sin\theta)^{k+1}&=(\cos\theta+\boldsymbol{L}\sin\theta)^k\times(\cos\theta+\boldsymbol{L}\sin\theta)\\&=\left(\cos(k\theta)+\boldsymbol{L}\sin(k\theta)\right)\times(\cos\theta+\boldsymbol{L}\sin\theta)\\&=\cos(k\theta+\theta)+\boldsymbol{L}\sin(k\theta+\theta)\\&=\cos((k+1)\theta)+\boldsymbol{L}\sin((k+1)\theta).\end{aligned}$$

Böylece $k+1$ için ifadenin doğruluğu görülür.

k negatif bir tamsayı olsun.

$$\begin{aligned}A^{-1}&=(\cos\theta-\boldsymbol{L}\sin\theta)\\A^{-k}&=\cos(k\theta)-\boldsymbol{L}\sin(k\theta)\\&=\cos(-k\theta)+\boldsymbol{L}\sin(-k\theta)\end{aligned}$$

olur [13]. Bu durumda ispat tamamlanır.

3.6 Reel Oktoniyonlar için Euler Formülü

Euler formülü kompleks sayılarda ve kuaterniyonlarda olduğu gibi reel oktoniyonlarda da geçerlidir [14, 29, 55, 56]. $\boldsymbol{L}\in\mathbb{S}^6$ için $\boldsymbol{L}\wedge\boldsymbol{L}=0$ ve $\langle\boldsymbol{L},\boldsymbol{L}\rangle=1$ olduğundan $\boldsymbol{L}^2=\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{L}=-1$ dir. Bu bilgiler kullanılırsa $\boldsymbol{L}^3=-\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{L}^4=1$,... dir. Herhangi bir θ için

$$\begin{aligned}e^{\boldsymbol{L}\theta}&=1+\boldsymbol{L}\theta+\frac{(\boldsymbol{L}\theta)^2}{2!}+\frac{(\boldsymbol{L}\theta)^3}{3!}+\frac{(\boldsymbol{L}\theta)^4}{4!}+\frac{(\boldsymbol{L}\theta)^5}{5!}+\ldots\\&=1+\boldsymbol{L}\theta-\frac{\theta^2}{2!}-\boldsymbol{L}\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^4}{4!}+\boldsymbol{L}\frac{\theta^5}{5!}\ldots\\&=\left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}+\ldots\right)+\boldsymbol{L}\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}+\ldots\right)\end{aligned}$$

elde edilir. $\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonunun Maclaurin açılımları göz önüne alınırsa

$$e^{\boldsymbol{L}\theta}=\cos\theta+\boldsymbol{L}\sin\theta$$

elde edilir [13, 14, 29, 55, 56].

3.7 Reel Oktoniyonların Kuaterniyon Katsayılı Gösterimi

Tanım 3.14 $A = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5 + a_6e_6 + a_7e_7$ bir reel oktoniyon olmak üzere

$$e_1e_4 = e_5,\ e_2e_4 = e_6,\ e_3e_4 = e_7$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$A = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + \left(a_4 + a_5e_1 + a_6e_2 + a_7e_3\right)e_4$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $q = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3,\ p = a_4 + a_5e_1 + a_6e_2 + a_7e_3 \in \boldsymbol{H}$ ve $e_4 = e$ gösterimleri kullanıldığında bir reel oktoniyon

$$A = q + pe$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda

$$\boldsymbol{O_H} = \{A = q + pe \mid q = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3,\ p = a_4 + a_5e_1 + a_6e_2 + a_7e_3 \in \boldsymbol{H}$$
$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_1e_2e_3 = -1,\ e_1e_2 = e_3, e_2e_3 = e_1, e_3e_1 = e_2,$$
$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 \in \mathbb{R}, e = e_4, e^2 = -1\}$$

şeklinde tanımlanır [5].

Bu küme üzerinde toplama ve çarpma işlemi

- **Toplama**

$$\oplus_{\mathrm{H}} : \boldsymbol{O_H} \times \boldsymbol{O_H} \to \boldsymbol{O_H}$$

$$\left(A, B\right) \to A \oplus_{\mathrm{H}} B = \left(q + pe\right) \oplus_{\mathrm{H}} \left(q' + p'e\right)$$
$$= \left(q \oplus q'\right) + \left(p \oplus p'\right)e$$

şeklinde tanımlanır.

- **Çarpma**

$$\times_H : \boldsymbol{O_H} \times \boldsymbol{O_H} \to \boldsymbol{O_H}$$

$$\left(A, B\right) \to A \times_H B = \left(q + pe\right) \times_H \left(q' + p'e\right)$$

$$=\left(q\times q'-\overline{p'}\times p\right)+\left(p'\times q+p\times\overline{q'}\right)e$$

şeklinde tanımlanır [5]. Burada × işlemi iki kuaterniyonun çarpımı işlemidir. Bu çarpım işlemi

$$S_{A\times_{\mathrm{H}}B}=S_{B\times_{\mathrm{H}}A}$$

özelliğini sağlamaktadır.

- **Eşlenik**

$A=q+pe$ reel oktoniyonunun eşleniği $\overline{A}=\overline{q}-pe$ şeklindedir.

Bu eşlenik işlemi de

i) $\overline{\overline{A}}=A$

ii) $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$

iii) $\overline{A\times_{\mathrm{H}}B}=\overline{B}\times_{\mathrm{H}}\overline{A}$

özelliklerini sağlar. Ayrıca eşlenik tanımı kullanılarak

$$S_A=\frac{1}{2}\left(A\oplus_{\mathrm{H}}\overline{A}\right)=S_q$$

ve

$$V_A=V_q+pe$$

olduğu görülür.

- **Norm**

$A=q+pe$ reel oktoniyonunun normu $\|A\|=\sqrt{A\times_H\overline{A}}=\sqrt{\overline{A}\times_H A}=\sqrt{\|q\|^2+\|p\|^2}$ şeklindedir. Bu norm işlemi

$$\|A\times_H B\|=\|A\|\|B\|$$

özelliğini sağlamaktadır.

- **Dış İşlem**

$\boldsymbol{O_H}$ üzerinde skaler ile çarpma işlemi $\forall q = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \in \boldsymbol{H}$ ve $q' = b_0 + b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3,\ p' = b_4 + b_5e_1 + b_6e_2 + b_7e_3 \in \boldsymbol{H}$ olmak üzere

$B = \sum_{i=0}^{7} b_ie_i = q' + p'e \in \boldsymbol{O}$ için

$$\odot_H : \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{O_H} \to \boldsymbol{O_H}$$

$$\begin{aligned}(q, B) \to q \odot_H B &= q \odot_H (q' + p'e)\\ &= (q \times q') + (q \times p')e\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada × işlemi iki kuaterniyonun çarpımı işlemidir.

Sonuç 3.5 $(\boldsymbol{O_H}, \oplus_{\boldsymbol{H}})$ ikilisi Abel grubudur.

İspat

i) $\forall A = q + pe,\ B = q' + p'e$ ve $C = q'' + p''e \in \boldsymbol{O_H}$ için

$$\begin{aligned}A \oplus_{\boldsymbol{H}} (B \oplus_{\boldsymbol{H}} C) &= (q + pe) \oplus_{\boldsymbol{H}} \left[(q' + p'e) \oplus_{\boldsymbol{H}} (q'' + p''e)\right]\\ &= (q + pe) \oplus_{\boldsymbol{H}} \left[(q' \oplus q'') + (p' \oplus p'')e\right]\\ &= q \oplus (q' \oplus q'') + \left[p \oplus (p' \oplus p'')\right]e\\ &= (q \oplus q') \oplus q'' + \left[(p \oplus p') \oplus p''\right]e\\ &= \left[(q + pe) \oplus_{\boldsymbol{H}} (q' + p'e)\right] \oplus_{\boldsymbol{H}} (q'' + p''e)\\ &= A \oplus_{\boldsymbol{H}} (B \oplus_{\boldsymbol{H}} C)\end{aligned}$$

birleşme özelliği sağlanır.

ii) $\forall A = q + pe \in \boldsymbol{O_H}$ için

$$\begin{aligned}A \oplus_{\boldsymbol{H}} 0 &= (q + pe) \oplus_{\boldsymbol{H}} (0 + 0e)\\ &= (q \oplus 0) + (p \oplus 0)e\end{aligned}$$

$= q + pe$

$= A$

elde edilir. Benzer şekilde $0 \oplus_{\boldsymbol{H}} A = A$ bulunur. Böylece 0, $\boldsymbol{O_H}$ nin $\oplus_{\boldsymbol{H}}$ işlemine göre birim elemanıdır.

iii) $\forall A = q + pe \in \boldsymbol{O_H}$ için

$$A \oplus_{\boldsymbol{H}} A' = (q + pe) \oplus_{\boldsymbol{H}} (q' + p'e)$$

$$= (q \oplus q') + (p \oplus p')e$$

$$= 0 + 0e$$

olmak üzere $q' = -q$ ve $p' = -p$ elde edilir. Sonuç olarak $A' = -q + (-p)e$, A nın invers elemanıdır.

iv) $A \oplus_{\boldsymbol{H}} B = (q + pe) \oplus_{\boldsymbol{H}} (q' + p'e)$

$$= (q \oplus q') + (p \oplus p')e$$

$$= (q' \oplus q) + (p' \oplus p)e$$

$$= (q' + p'e) \oplus_{\boldsymbol{H}} (q + pe)$$

$$= B \oplus_{\boldsymbol{H}} A$$

değişme özelliği sağlanır. Böylece $(\boldsymbol{O_H}, \oplus_{\boldsymbol{H}})$ ikilisi Abel grubudur.

Sonuç 3.6 $\boldsymbol{O_H}$, $(\boldsymbol{H}, \oplus, \times)$ yarı cismi üzerinde 2 boyutlu bir vektör uzayıdır.

İspat

i) $\forall q_1, q_2 \in \boldsymbol{H}$ ve $\forall A = q + pe \in \boldsymbol{O_H}$ için

$$(q_1 \oplus q_2) \odot_{\boldsymbol{H}} A = (q_1 \oplus q_2) \odot_{\boldsymbol{H}} (q + pe)$$

$$= \left[(q_1 \oplus q_2) \times q\right] + \left[(q_1 \oplus q_2) \times p\right]e$$

$$= (q_1 \times q) \oplus (q_2 \times q) + \left[(q_1 \times p) \oplus (q_2 \times p)\right]e$$

$$=\left[(q_1\times q)+(q_1\times p)e\right]\oplus_{\boldsymbol{H}}\left[(q_2\times q)+(q_2\times p)e\right]$$

$$=\left[q_1\odot_{\boldsymbol{H}}(q+pe)\right]\oplus_{\boldsymbol{H}}\left[q_2\odot_{\boldsymbol{H}}(q+pe)\right]$$

$$=(q_1\odot_{\boldsymbol{H}}A)\oplus_{\boldsymbol{H}}(q_2\odot_{\boldsymbol{H}}A)$$

bulunur.

ii) $\forall q_1\in\boldsymbol{H}$ ve $\forall A=q+pe$, $B=q'+p'e\in\boldsymbol{O_H}$ için

$$q_1\odot_{\boldsymbol{H}}(A\oplus_{\boldsymbol{H}}B)=q_1\odot_{\boldsymbol{H}}\left[(q+pe)\oplus_{\boldsymbol{H}}(q'+p'e)\right]$$

$$=q_1\odot_{\boldsymbol{H}}\left[(q\oplus q')+(p\oplus p')e\right]$$

$$=q_1\times(q\oplus q')+\left[q_1\times(p\oplus p')\right]e$$

$$=\left[(q_1\times q)\oplus(q_1\times q')\right]+\left[(q_1\times p)\oplus(q_1\times p')\right]e$$

$$=\left[(q_1\times q)+(q_1\times p)e\right]\oplus_{\boldsymbol{H}}\left[(q_1\times q')+(q_1\times p')e\right]$$

$$=(q_1\odot_{\boldsymbol{H}}A)\oplus_{\boldsymbol{H}}(q_1\odot_{\boldsymbol{H}}B)$$

bulunur.

iii) $\forall q_1,q_2\in\boldsymbol{H}$ ve $\forall A=q+pe\in\boldsymbol{O_H}$ için

$$(q_1\times q_2)\odot_{\boldsymbol{H}}A=(q_1\times q_2)\odot_{\boldsymbol{H}}(q+pe)$$

$$=\left[(q_1\times q_2)\times q\right]+\left[(q_1\times q_2)\times p\right]e$$

$$=q_1\times(q_2\times q)+\left[q_1\times(q_2\times p)\right]e$$

$$=q_1\odot_{\boldsymbol{H}}\left[(q_2\times q)+(q_2\times p)e\right]$$

$$=q_1\odot_{\boldsymbol{H}}\left[q_2\odot_{\boldsymbol{H}}(q+pe)\right]$$

$$=q_1\odot_{\boldsymbol{H}}(q_2\odot_{\boldsymbol{H}}A)$$

bulunur.

iv) $\forall A = q + pe \in \boldsymbol{O_H}$ için 1, $\boldsymbol{H}$ nin $\times$ işlemine göre birim elemanı olduğuna göre bu durumda

$$\begin{aligned} 1 \odot_{\boldsymbol{H}} A &= 1 \odot_{\boldsymbol{H}} (q + pe) \\ &= (1 \times q) + (1 \times p) e \\ &= q + pe \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu durumda $\boldsymbol{O_H}$ kümesi $(\boldsymbol{H}, \oplus, \times)$ yarı cismi üzerinde 2 boyutlu vektör uzayıdır. Bu uzayın bazı da $\{1, e\}$ dir.

Oktoniyonlarda değişme özelliği olmadığı için sağ ve sol çarpım tanımlanır.

Tanım 3.15 X herhangi bir reel oktoniyon olmak üzere $\boldsymbol{O_H}$ de sol çarpım

$$\begin{aligned} L_A : \boldsymbol{O_H} &\to \boldsymbol{O_H} \\ X &\to L_A(X) = A \times_{\boldsymbol{H}} X \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.16 X herhangi bir reel oktoniyon olmak üzere $\boldsymbol{O_H}$ de sağ çarpım

$$\begin{aligned} R_A : \boldsymbol{O_H} &\to \boldsymbol{O_H} \\ X &\to R_A(X) = X \times_{\boldsymbol{H}} A \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.3 L_A ve R_A dönüşümleri lineerdir.

İspat $A = q + pe,\ X_1 = q_1 + p_1 e$ ve $X_2 = q_2 + p_2 e \in \boldsymbol{O_H}$ olmak üzere,

i) $$\begin{aligned} L_A(X_1 \oplus_{\boldsymbol{H}} X_2) &= A \times_{\boldsymbol{H}} (X_1 \oplus_{\boldsymbol{H}} X_2) \\ &= (A \times_{\boldsymbol{H}} X_1) \oplus_{\boldsymbol{H}} (A \times_{\boldsymbol{H}} X_2) \\ &= L_A(A_1) \oplus_{\boldsymbol{H}} L_A(A_2) \end{aligned}$$

$\lambda \in \boldsymbol{H}$ olmak üzere

ii) $L_A\left(\lambda \odot_{\boldsymbol{H}} X\right) = A \times_{\boldsymbol{H}} \left(\lambda \odot_{\boldsymbol{H}} X\right)$

$$= \lambda \odot_{\boldsymbol{H}} \left(A \times_{\boldsymbol{H}} X\right)$$

$$= \lambda \odot_{\boldsymbol{H}} L_A\left(X\right)$$

Benzer şekilde R_A dönüşümünün de lineer dönüşüm olduğu gösterilebilir.

3.8 Reel Oktoniyonların Matris Gösterimleri

3.8.1 Reel Oktoniyonların Kuaterniyon Matris Gösterimi

Her lineer dönüşüme bir matris karşılık geldiği için L_A ve R_A lineer dönüşümlerine de birer matris karşılık gelir.

L_A lineer dönüşümüne karşılık gelen matris

$$L_A(1) = A \times_{\boldsymbol{H}} 1 = (q + pe) \times_{\boldsymbol{H}} 1 = q + pe$$

$$L_A(e) = A \times_{\boldsymbol{H}} e = (q + pe) \times_{\boldsymbol{H}} (0 + e) = -p + qe$$

olmak üzere

$$A_{L_A} = \begin{bmatrix} q & -p \\ p & q \end{bmatrix}, \ \det A_{L_A} = q^2 + p^2$$

dir. Benzer şekilde R_A dönüşümüne karşılık gelen matris

$$A_{R_A} = \begin{bmatrix} q & -\bar{p} \\ p & \bar{q} \end{bmatrix}, \ \det A_{R_A} = \|q\|^2 + \|p\|^2 = \|A\|^2$$

dir.

3.8.2 Reel Oktoniyonların Reel Matris Gösterimi

Bilindiği gibi ***H*** reel kuaterniyonların bölüm cebiri cebirsel olarak 4×4 tipindeki matrislerin cebirine izomorftur. Fakat ***O*** reel oktoniyonlar, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde birleşmeli olmayan bölüm cebiri olduğundan $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde herhangi bir matris cebirine cebirsel olarak izomorf değildir. Buna rağmen ***O*** reel oktoniyonlar kümesi ***H*** reel kuaterniyonların genişmesi ve sonlu boyutlu olduğundan reel kuaterniyonların reel matris gösterimi yardımıyla reel oktoniyonların reel matris gösterimi bulunabilir [5].

Sonlu boyutlu birleşmeli bir cebirin herhangi bir elemanı bir matris gösterimine sahiptir. Örneğin, $\boldsymbol{H}$ reel kuaterniyonlar cebirinin herhangi bir $q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ elemanı

$$\phi : q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \rightarrow \phi(q) = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

birebir ve örten fonksiyon olmak üzere yukarıdaki gibi matris gösterimine sahiptir ve $|\phi(q)| = 1$ dir [5, 21, 57]. Ayrıca $\boldsymbol{H}$ reel kuaterniyonlar cebiri, cebirsel olarak

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \middle| \quad a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}, \right\} \subset \mathbb{R}_4^4$$

matris cebirine izomorftur [5, 21, 52, 57].

$A = q + pe$ ve

$$\times_H : \boldsymbol{O_H} \times \boldsymbol{O_H} \rightarrow \boldsymbol{O_H}$$

$$(A, B) \rightarrow A \times_H B = (q + pe) \times_H (q' + p'e)$$

$$= \left(q \times q' - \overline{p'} \times p\right) + \left(p' \times q + p \times \overline{q'}\right) e$$

çarpım işlemi temel alınarak, $\phi(q)$ nin de q nun matris gösterimi olduğu kullanılarak reel oktoniyonun reel matris gösterimine ulaşılacaktır. Fakat bundan önce reel kuaterniyonların reel matris gösterimi ile ilgili bazı önemli sonuçlardan bahsedilecektir [5].

Lemma 3.2 [5, 57] $q, q' \in \boldsymbol{H}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

i) $q = q' \Leftrightarrow \phi(q) = \phi(q')$,

ii) $\phi(q \oplus q') = \phi(q) + \phi(q')$

iii) $\phi(q \times q') = \phi(q)\phi(q')$

iv) $\phi(\lambda \odot q) = \lambda\phi(q),\ \phi(1) = I_4$

v) $E_4 = \begin{bmatrix} 1 & i & j & k \end{bmatrix}$ ve $E_4^* = \begin{bmatrix} 1 & -i & -j & -k \end{bmatrix}^t$ olmak üzere

$q = \frac{1}{4} E_4 \phi(q) E_4^*$,

vi) $\phi(\overline{q}) = \phi^t(q)$

vii) $\phi(q^{-1}) = \phi^{-1}(q), q \neq 0$

vii) $\det\left[\phi(q)\right] = \|q\|^4$

dir. Bilindiği gibi reel kuaterniyonların reel matris gösterimi kuaterniyon çarpımı değişmeli olmadığından dolayı diğer bir reel matris gösterimi

$$\tau : q = K\phi^t(q)K = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir [5], burada

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

diyagonal matrisidir.

Lemma 3.3 [5, 57] $q, q' \in \boldsymbol{H}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

i) $q = q' \Leftrightarrow \tau(q) = \tau(q')$,

ii) $\tau(q \oplus q') = \tau(q) + \tau(q')$,

iii) $\tau(q\times q')=\tau(q')\tau(q)$,

iv) $\tau(\lambda\odot q)=\lambda\tau(q),\ \tau(1)=I_4$,

v) $\tau(\overline{q})=\tau^t(q)$

vi) $\tau(q^{-1})=\tau^{-1}(q), q\neq 0$

vii) $\det\left[\tau(q)\right]=\|q\|^4$

dir.

Lemma 3.4 [5, 57] $q\in \boldsymbol{H}$ verilmiş olsun. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} q & 0 & 0 & 0\\ 0 & q & 0 & 0\\ 0 & 0 & q & 0\\ 0 & 0 & 0 & q\end{bmatrix}$$

diyagonal matris olmak üzere

$$Q\begin{bmatrix} q & 0 & 0 & 0\\ 0 & q & 0 & 0\\ 0 & 0 & q & 0\\ 0 & 0 & 0 & q\end{bmatrix}Q^*=\begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3\\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2\\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1\\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0\end{bmatrix}$$

dir [5]. Burada Q matrisi aşağıdaki gibidir.

$$Q=Q^*=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & i & j & k\\ -i & 1 & k & -j\\ -j & -k & 1 & i\\ -k & j & -i & 1\end{bmatrix}$$

dir.

Şimdi reel kuaterniyonların reel matris gösterimi temel alınarak oktoniyonların reel matris gösterimi verilecektir.

Tanım 3.17 $A=q+pe\in \boldsymbol{O_H}$, $q=a_0+a_1i+a_2j+a_3k$, $q=a_4+a_5i+a_6j+a_7k\in \boldsymbol{H}$ olmak üzere 8×8 tipindeki

$$\omega(A)=\begin{bmatrix}\phi(q) & -\tau(p)K_4\\ \phi(p)K_4 & \tau(q)\end{bmatrix}$$

reel matris reel oktoniyonların $\mathbb{R}$ cismi üzerinde sol matris gösterimi olarak adlandırılır. Burada

$$K_4=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

dir. Yukarıdaki matris açık bir şekilde yazılırsa,

$$\omega(A)=\begin{bmatrix}a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & -a_5 & -a_6 & -a_7\\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 & -a_5 & a_4 & a_7 & -a_6\\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 & -a_6 & -a_7 & a_4 & a_5\\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 & -a_7 & a_6 & -a_5 & a_4\\ a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3\\ a_5 & -a_4 & a_7 & -a_6 & a_1 & a_0 & a_3 & -a_2\\ a_6 & -a_7 & -a_4 & a_5 & a_2 & -a_3 & a_0 & a_1\\ a_7 & a_6 & -a_5 & -a_4 & a_3 & a_2 & -a_1 & a_0\end{bmatrix}$$

elde edilir [5, 21, 52]. Benzer şekilde

Tanım 3.18 $A=q+pe\in \boldsymbol{O_H}$, $q=a_0+a_1i+a_2j+a_3k$, $q=a_4+a_5i+a_6j+a_7k\in \boldsymbol{H}$ olmak üzere 8×8 tipindeki

$$\nu(A)=K_8\omega^t(A)K_8\begin{bmatrix}\tau(q) & -\phi(\overline{p})\\ \phi(p) & \tau(\overline{q})\end{bmatrix}$$

reel matris reel oktoniyonların $\mathbb{R}$ cismi üzerinde sağ matris gösterimi olarak adlandırılır. Burada

$$K_8=diyagonal(K_4,I_4)$$

dir. Yukarıdaki matris açık bir şekilde yazılırsa,

$$\nu(A)=\begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & -a_5 & -a_6 & -a_7 \\ a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 & a_5 & -a_4 & -a_7 & a_6 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 & a_6 & a_7 & -a_4 & -a_5 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 & a_7 & -a_6 & a_5 & -a_4 \\ a_4 & -a_5 & -a_6 & -a_7 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_5 & a_4 & -a_7 & a_6 & -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_6 & a_7 & a_4 & -a_5 & -a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_7 & -a_6 & a_5 & a_4 & -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

bulunur [5, 21, 52].

Teorem 3.4 [5] $A, B \in \boldsymbol{O}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

i) $A=B \Leftrightarrow \omega(A)=\omega(B)$**,**

ii) $\omega(A \oplus_{\boldsymbol{H}} B)=\omega(A)+\omega(B)$

iii) $\omega(\lambda \odot_{\boldsymbol{H}} A)=\lambda\omega(A),\ \omega(1)=I_8$

vi) $\omega(\overline{A})=\omega^t(A)$

Teorem 3.5 [5] $A, B \in \boldsymbol{O}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

i) $A=B \Leftrightarrow \nu(A)=\nu(B)$**,**

ii) $\nu(A \oplus_{\boldsymbol{H}} B)=\nu(A)+\nu(B)$

iii) $\nu(\lambda \odot_{\boldsymbol{H}} A)=\lambda\nu(A),\ \nu(1)=I_8$

vi) $\nu(\overline{A})=\nu^t(A)$

Teorem 3.6 [5] $A \in \boldsymbol{O}$ verilsin. $\det[\omega(A)]=\det[\nu(A)]=\|A\|^8$ dir.

İspat

$$\det[\omega(A)]=\det[\nu(A)]=\det\left(\begin{bmatrix} \tau(q) & -\phi(\overline{p}) \\ \phi(p) & \tau(\overline{q}) \end{bmatrix}\right)$$

$$=\det\left[\tau(q)\tau(\overline{q})+\phi(p)\phi(\overline{p})\right]$$

$$=\det\left[\tau\left(q\times\overline{q}\right)+\phi\left(p\times\overline{p}\right)\right]$$

$$=\det\left[\tau\left(\|q\|^2\times 1\right)+\phi\left(\|p\|^2\times 1\right)\right]$$

$$=\det\left[\|q\|^2\,\tau(1)+\|p\|^2\,\phi(1)\right]$$

$$=\det\left[\|q\|^2\,I_4+\|p\|^2\,I_4\right]$$

$$=\left(\|q\|^2+\|p\|^2\right)^4$$
$$=\|A\|^8$$

dir.

3.9 Reel Oktoniyonlar Üzerinde İç Çarpım

O kümesi üzerinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemi ile birlikte $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır.

$\forall\, A=\sum_{i=0}^{7}a_ie_i,\; B=\sum_{i=0}^{7}b_ie_i\in\boldsymbol{O}$ için

$\langle,\rangle:\boldsymbol{O}\times\boldsymbol{O}\to\mathbb{R}$, $\langle A,B\rangle=\frac{1}{2}\left(A\times\overline{B}+B\times\overline{A}\right)$

$$=S_AS_{\overline{B}}-\langle V_A,V_{\overline{B}}\rangle$$

$$=S_{A\times\overline{B}}$$

$$=a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4+a_5b_5+a_6b_6+a_7b_7$$

şeklinde tanımlı fonksiyon

i) Simetri özelliği: $\forall\, A=\sum_{i=0}^{7}a_ie_i,\; B=\sum_{i=0}^{7}b_ie_i\in\boldsymbol{O}$ için

$\langle A,B\rangle=S_{A\times\overline{B}}=S_{\overline{A\times\overline{B}}}=S_{B\times\overline{A}}=\langle B,A\rangle$,

ii) Bilineerlik özelliği: $\forall\ A=\sum_{i=0}^{7} a_i e_i,\ B=\sum_{i=0}^{7} b_i e_i, C=\sum_{i=0}^{7} C_i e_i \in \boldsymbol{O}$ için

$$\langle A, B\oplus C\rangle = S_{\overline{A\times \overline{B\oplus C}}} = S_{A\times\overline{B}+A\times\overline{C}} = S_{A\times\overline{B}} + S_{A\times\overline{C}} = \langle A,B\rangle + \langle A,C\rangle,$$

$$\langle A\oplus B, C\rangle = S_{\overline{A\oplus B}\times C} = S_{\overline{A}\times C+\overline{B}\times C} = S_{\overline{A}\times C} + S_{\overline{B}\times C} = \langle A,C\rangle + \langle B,C\rangle$$

ve

$$\langle \lambda\odot A, B\rangle = S_{\overline{\lambda\odot A}\times B} = S_{\lambda\odot\left(\overline{A}\times B\right)} = \lambda S_{\overline{A}\times B} = \lambda\langle A,B\rangle,$$

iii) Pozitif tanımlılık: $\forall\ A=\sum_{i=0}^{7} a_i e_i \in \boldsymbol{O}$ için

$\langle A, A\rangle = {a_0}^2+{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+{a_4}^2+{a_5}^2+{a_6}^2+{a_7}^2 \geq 0$ ve $\langle A,A\rangle = 0 \Leftrightarrow A=0$ olmasıdır,

özelliklerini sağladığından dolayı $\langle,\rangle$ fonksiyonu $\boldsymbol{O}$ üzerinde iç çarpım fonksiyonu olup $\boldsymbol{O}$ reel oktoniyonların kümesi de bu iç çarpım ile birlikte bir iç çarpım uzayıdır.

Not: $\|A\| = \sqrt{A\times\overline{A}} = \sqrt{\overline{A}\times A} = \sqrt{A\times_H \overline{A}} = \sqrt{\overline{A}\times_H A} = \sqrt{\langle A,A\rangle} = \sqrt{\sum_{i=0}^{7} a_i^2}$ şeklindedir.

Tanım 3.19 A ve B reel oktoniyonları arasındaki λ açısı

$$\cos\lambda = \frac{\langle A,B\rangle}{\|A\|\|B\|},\ A,B\neq 0$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $-1\leq\cos\lambda\leq 1$ dir.

θ; A nin skaler eksenle yaptığı açı ve ω da S_A ile A arasındaki açı olmak üzere

$$\cos\omega = \frac{\langle S_A, A\rangle}{\|S_A\|\|A\|} = \frac{S_{S_A\times\overline{A}}}{S_A\|A\|} = \frac{\left(S_A\right)^2}{S_A\|A\|} = \frac{S_A}{\|A\|} = \cos\theta$$

dir [21].

Eğer $A=\|A\|\left(\cos\mu+\boldsymbol{L}_1\sin\mu\right)$ ve $B=\|B\|\left(\cos\sigma+\boldsymbol{L}_2\sin\sigma\right)$ olmak üzere A ve B oktoniyonları arasındaki λ açısı

$$\cos\lambda = \frac{\langle A,B\rangle}{\|A\|\|B\|} = \frac{S_{A\times\overline{B}}}{\|A\|\|B\|} = \frac{S_{\|A\|\,\|B\|(\cos\mu+\boldsymbol{L}_1\sin\mu)\times(\cos\sigma-\boldsymbol{L}_2\sin\sigma)}}{\|A\|\|B\|}$$

$$=\left(\cos\mu\cos\sigma-\sin\mu\sin\sigma\right)S_{\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2}$$

şeklindedir [21]. Burada $\boldsymbol{L}_1$ ve $\boldsymbol{L}_2$ birim uzaysal oktoniyonlardır.

Sonuç 3.7 [21]

1) $\boldsymbol{L}_1$ ve $\boldsymbol{L}_2$ birim uzaysal oktoniyonları arasındaki açı γ ise $\cos\gamma=S_{\boldsymbol{L}_1\times\overline{\boldsymbol{L}_2}}=-S_{\boldsymbol{L}_1\times\boldsymbol{L}_2}$ dir.

2) $S_{A\times\overline{B}}=\langle A,B\rangle=0$ ise A ve B diktir.

3) $V_{A\times\overline{B}}=0$ ise A ve B paraleldir.

4) Bir oktoniyonun reel kısmı uzaysal kısmına her zaman diktir. Gerçekten,

$$S_{\overline{S_A\times V_A}}=\frac{1}{4}S_{\left[\left(\overline{A}+A\right)\times\left(\overline{A}-A\right)\right]}$$

$$=\frac{1}{4}S_{\left[\left(\overline{A}\times\overline{A}\right)-\left(A\times A\right)\right]}$$

$$=\frac{1}{8}S_{\left(\overline{A}\times\overline{A}\right)-\left(A\times A\right)+\left[\overline{\overline{A}\times\overline{A}-A\times A}\right]}$$

$$=\frac{1}{8}S_{\overline{A}\times\overline{A}-A\times A+A\times A-\overline{A}\times\overline{A}}$$

$$=0$$

elde edilir.

3.10 **Oktoniyon Operatörü**

$A=\cos\theta+\boldsymbol{L}\sin\theta$ birim oktoniyonunu $q=\cos\theta+\boldsymbol{n}\sin\theta$ kuaterniyon operatörüne benzetmek gerekirse A birim oktoniyonunun $\boldsymbol{L}$ birim vektörü q birim kuaterniyonunun $\boldsymbol{n}$ birim vektörünün yerini alır ve

$$A:\mathbb{R}\to\boldsymbol{O}$$
$$\theta\to A(\theta)$$

operatörüne oktoniyon operatörü denir [26, 27]. $\boldsymbol{V}$, $\mathbb{R}^7$ de birim vektör olsun. Bu durumda oktoniyon çarpımı olan

$\boldsymbol{V}'=A\times\boldsymbol{V}$

vektörü $\boldsymbol{V}$ vektörünü $\boldsymbol{L}$ etrafında pozitif yönde (negatif yönde) θ kadar döndürmek sonucuyla elde edilen $\{\boldsymbol{V},\boldsymbol{V}'\}$ düzleminde bir vektördür.

3.11 **Oktoniyonlarla Dönme**

$\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V}' \in \mathbb{R}^7$ birim vektörler olsun. Bu vektörler aynı zamanda birim uzaysal oktoniyonlar veya birim vektör oktoniyonlar olarak da düşünülebilir.

$\boldsymbol{L} = \dfrac{\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{V}'}{\|\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{V}'\|}$ ve θ da $\boldsymbol{V}$ ile $\boldsymbol{V}'$ arasındaki açı

olmak üzere

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}' \times \boldsymbol{V} &= -\langle \boldsymbol{V}', \boldsymbol{V} \rangle + \boldsymbol{V}' \wedge \boldsymbol{V} \\ &= -\langle \boldsymbol{V}, \boldsymbol{V}' \rangle + \frac{\boldsymbol{V}' \wedge \boldsymbol{V}}{\|\boldsymbol{V}' \wedge \boldsymbol{V}\|} \|\boldsymbol{V}' \wedge \boldsymbol{V}\| \\ &= -\langle \boldsymbol{V}, \boldsymbol{V}' \rangle - \frac{\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{V}'}{\|\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{V}'\|} \|\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{V}'\|\end{aligned}$$

şeklindedir.

$$\langle \boldsymbol{V}, \boldsymbol{V}' \rangle = \|\boldsymbol{V}\| \, \|\boldsymbol{V}'\| \cos\theta = \cos\theta$$

ve

$$\|\boldsymbol{V} \wedge \boldsymbol{V}'\| = \|\boldsymbol{V}\| \, \|\boldsymbol{V}'\| \sin\theta = \sin\theta$$

olduğundan

$$\boldsymbol{V}' \times \boldsymbol{V} = -\cos\theta - \boldsymbol{L}\sin\theta = -\left(\cos\theta + \boldsymbol{L}\sin\theta\right) = -A$$

dir. Böylece

$$\boldsymbol{V}' \times \boldsymbol{V} = -A$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki yanı $\boldsymbol{V}$ ile çarpılırsa,

$$\boldsymbol{V}' \times \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} = -A \times \boldsymbol{V}$$

ve

$\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} = -1$

olduğundan

$\boldsymbol{V}' = A \times \boldsymbol{V}$

yazılır. Sonuç olarak

$A = \cos\theta + \boldsymbol{L}\sin\theta$ birim reel oktoniyonu bir $\boldsymbol{V}$ birim vektörünü normali $\boldsymbol{L}$ olan $\{\boldsymbol{V}, \boldsymbol{V}'\}$ düzleminde θ kadar döndürür.

Diğer bir ifadeyle, $A = \cos\theta + \boldsymbol{L}\sin\theta$, ($\theta \in \mathbb{R}$ $\langle \boldsymbol{L}, \boldsymbol{L} \rangle = 1$, $\boldsymbol{L} \in \mathbb{R}^7$) birim reel oktoniyonu, birim kompleks sayının özelliklerini taşır. Yani $\mathbb{R}^2$ de birim kompleks sayının yaptığı işi, $\mathbb{R}^7$ de birim reel oktoniyon yapmaktadır [26, 27].

3.12 **7 Boyutlu Öklid Uzayında Dönmeler**

A ve X oktoniyonlar olmak üzere

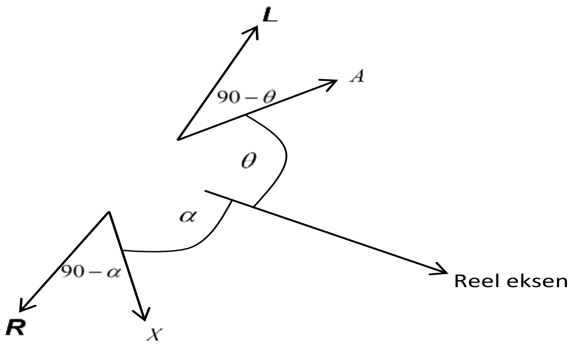
$\psi_A(X) = X' = A \times (X \times A^{-1})$

operasyonunu ele alalım. Ayrıca,

$X = \|X\|(\cos\alpha + \boldsymbol{R}\sin\alpha)$, $A = \|A\|(\cos\theta + \boldsymbol{L}\sin\theta)$, $\boldsymbol{L}^2 = \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{L} = -1$, $\boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} = -1$

olduğunu kabul edelim.

Oktoniyon ile reel eksen arasındaki açı diyagramı aşağıda verilmiştir [21].



Şekil 3. 2 Oktoniyonun reel eksen ile arasındaki ilişki

Teorem 3.7 $A = S_A + V_A$ olmak üzere V_A vektörel kısmı,

$\psi_A : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8,\ \psi_A(X) = X' = A \times (X \times A^{-1})$ dönüşümü altında değişmez kalır [21].

İspat

$$\psi_A(V_A) = A \times (V_A \times A^{-1})$$

olmak üzere,

$$\psi_A(V_A) = (S_A + V_A) \times \left[V_A \times \frac{(S_A - V_A)}{\|A\|^2} \right]$$

$$= \frac{1}{\|A\|^2}(S_A + V_A) \times (S_A V_A - V_A \times V_A)$$

$$= \frac{1}{\|A\|^2}(S_A + V_A) \times \left[(S_A - V_A) \times V_A \right]$$

$$= (S_A + V_A) \times \left(\frac{S_A - V_A}{\|A\|^2} \times V_A \right)$$

$$= A \times (A^{-1} \times V_A)$$

elde edilir. Ayrıca reel oktoniyonunun tersinin özelliklerinden **iii)** dikkate alınırsa $A \times (A^{-1} \times V_A) = V_A$ olduğundan $\psi_A(V_A) = V_A$ bulunur. Böylece V_A nın dönme ekseni olduğu gösterilmiş olunur.

Teorem 3.8 A ve X birer oktoniyon olmak üzere $\psi_A(X) = A \times (X \times A^{-1})$ dönüşümü altında X in normu ve skaler kısmı korunur [21].

İspat $\psi_A(X) = X'$ olsun. Bu durumda

$$\|X'\| = \|A \times (X \times A^{-1})\| = \|A\| \, \|X \times A^{-1}\| = \|A\| \| X \| \|A^{-1}\| = \|A\| \|A\|^{-1} \| X \| = \| X \|$$

elde edilir ki bu ise X in normunun korunduğunu göstermektedir.

Ayrıca herhangi iki oktoniyon için $S_{(B \times C)} = S_{(C \times B)}$ ve $(X \times A^{-1}) \times A = X$ olduğundan

$$S_{X'} = S_{A \times (X \times A^{-1})} = S_{(X \times A^{-1}) \times A} = S_X$$

elde edilir. Böylece ψ_A dönüşümü altında X in skaler kısmı korunur.

Teorem 3.9 A ve $X = S_X + V_X$ oktoniyonu için $A \times (V_X \times A^{-1})$ bir uzaysal oktoniyondur [21].

İspat

$$\begin{aligned} A \times (X \times A^{-1}) &= A \times [(S_X + V_X) \times A^{-1}] \\ &= A \times (S_X \times A^{-1}) + A \times (V_X \times A^{-1}) \\ &= A \times (A^{-1} \times S_X) + A \times (V_X \times A^{-1}) \\ &= S_X + A \times (V_X \times A^{-1}) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $V_{A \times (X \times A^{-1})} = A \times (V_X \times A^{-1})$ olup $A \times (V_X \times A^{-1})$ uzaysal oktoniyondur.

Not 3.1 $X = \|X\| (\cos\alpha + \boldsymbol{R} \sin\alpha)$ herhangi bir reel oktoniyon olsun. X in vektör kısmı $\|X\| \boldsymbol{R} \sin\alpha$, $\boldsymbol{R}$ ye paraleldir [21]. Gerçekten

$$(\|X\| \boldsymbol{R} \sin\alpha) \wedge \boldsymbol{R} = \|X\| \sin\alpha (\boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{R}) = 0$$

dır.

- $X' = \psi_A(X)$ nün vektör kısmı da $A \times (\boldsymbol{R} \times A^{-1}) = \boldsymbol{R}' = \psi_A(\boldsymbol{R}')$ ye paraleldir.

ϕ, X' ile reel eksen arasındaki açı olmak üzere

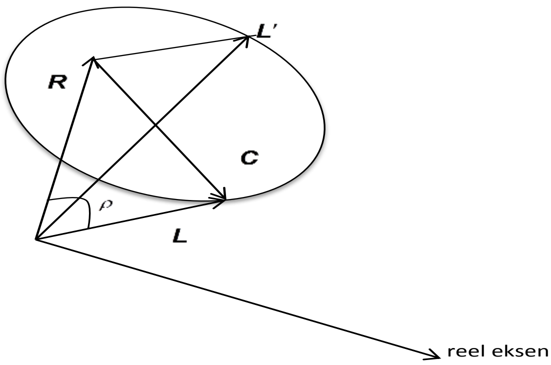
$$X' = A \times (X \times A^{-1}) = \|X'\|(\cos\phi + \boldsymbol{R}' \sin\phi)$$

şeklinde bir reel oktoniyondur. Böylece X' ün vektör kısmı $\|X'\|\boldsymbol{R}'\sin\phi$ dir. Bu durumda,

$$(\|X'\|\boldsymbol{R}'\sin\phi) \wedge \boldsymbol{R}' = \|X'\|\sin\phi(\boldsymbol{R}' \wedge \boldsymbol{R}') = 0$$

dır.

Not 3.2 $\boldsymbol{C}$ normali $\boldsymbol{L}$ olan bir düzlemde birim püre oktoniyon olsun $(\langle \boldsymbol{L}, \boldsymbol{C} \rangle = \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{L}\times\overline{\boldsymbol{C}}} = 0)$ [21]. $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{C}$ ve $\boldsymbol{R}$ arasındaki ilişki aşağıdaki şekildeki gibidir [21].



Şekil 3. 3 $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{C}$ ve $\boldsymbol{R}$ arasındaki ilişki

Eğer $\boldsymbol{L}$ ve $\boldsymbol{R}$ arasındaki açı ρ ise,

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{L}\cos\rho + \boldsymbol{C}\sin\rho$$

şeklinde yazılabilir ($\overline{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{L}^{-1} = -\boldsymbol{L}$ ve $\overline{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}^{-1} = -\boldsymbol{C}$).

Sonuç 3.8 $\boldsymbol{R} \times \overline{\boldsymbol{R}} = 1$ dir [21].

İspat

$$\boldsymbol{R} \times \overline{\boldsymbol{R}} = (\boldsymbol{L}\cos\rho + \boldsymbol{C}\sin\rho) \times (-\boldsymbol{L}\cos\rho - \boldsymbol{C}\sin\rho)$$

$$= -(\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{L})\cos^2\rho - \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{C}\cos\rho\sin\rho - \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{L}\cos\rho\sin\rho - (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{C})\sin^2\rho$$

$$=\cos^2\rho-(\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{C})\cos\rho\sin\rho+(\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{C})\cos\rho\sin\rho+\sin^2\rho$$

$$=1$$

elde edilir.

Not 3.3 $\boldsymbol{C}$ ve $\boldsymbol{L}$ uzaysal reel oktoniyon olduğundan

$$\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{L}=-\langle\boldsymbol{C},\boldsymbol{L}\rangle+\boldsymbol{C}\wedge\boldsymbol{L}$$

dir [21].

Not 3.4 $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{L}$ normaline sahip bir düzlemde olduğundan $\boldsymbol{C}$ ve $\boldsymbol{L}$ diktir [21].

Not 3.5 $\boldsymbol{C}$ ve $\boldsymbol{L}$ dik olduğundan $\boldsymbol{C}$ ve $\boldsymbol{L}$ nin oktoniyonik çarpımı

$\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{L}=\boldsymbol{C}\wedge\boldsymbol{L}=-\boldsymbol{L}\wedge\boldsymbol{C}=-\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{C}$ dir [21].

Not 3.6 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{L}\cos\rho+\boldsymbol{C}\sin\rho$ olmak üzere

$$\boldsymbol{R}'=A\times(\boldsymbol{R}\times A^{-1})$$

$$=A\times\left[(\boldsymbol{L}\cos\rho+\boldsymbol{C}\sin\rho)\times A^{-1}\right]$$

$$=A\times(\boldsymbol{L}\times A^{-1})\cos\rho+A\times(\boldsymbol{C}\times A^{-1})\sin\rho$$

dir[21].

Teorem 3.10 $A\times(\boldsymbol{L}\times A^{-1})=\boldsymbol{L}$ ve $A\times(\boldsymbol{C}\times A^{-1})$, $\boldsymbol{L}$ etrafında 2θ açısı kadar dönen bir uzaysal oktoniyondur [21].

İspat

- $A\times(\boldsymbol{L}\times A^{-1})=\boldsymbol{L}$ ($\boldsymbol{L}$ nin dönme ekseni) olduğunu gösterelim:

$$V_A\times\boldsymbol{L}=S_{V_A}S_{\boldsymbol{L}}+S_{V_A}V_{\boldsymbol{L}}+S_{\boldsymbol{L}}V_{V_A}-\langle V_A,\boldsymbol{L}\rangle+V_A\wedge\boldsymbol{L}$$

$$V_A\times\boldsymbol{L}=-\langle V_A,\boldsymbol{L}\rangle+V_A\wedge\boldsymbol{L}$$

V_A ve $\boldsymbol{L}$ paralel olduğundan $V_A\wedge\boldsymbol{L}=0$ dır. Böylece

$$V_A\times\boldsymbol{L}=-\langle V_A,\boldsymbol{L}\rangle$$

dır.

Buradan $\boldsymbol{L}\times V_A=-\langle \boldsymbol{L},V_A\rangle=-\langle V_A,\boldsymbol{L}\rangle$ olup $V_A\times\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}\times V_A=0$ olduğundan

$$A\times\left(\boldsymbol{L}\times A^{-1}\right)=\left(S_A+V_A\right)\times\frac{1}{\|A\|^2}\left[\boldsymbol{L}\times\left(S_A-V_A\right)\right]$$

$$=\left(S_A+V_A\right)\times\frac{1}{\|A\|^2}\left[S_A\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}\times V_A\right]$$

$$=\frac{1}{\|A\|^2}\left\{\boldsymbol{L}\left(S_A\right)^2+S_A\left[V_A\times\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}\times V_A\right]-V_A\times\left(\boldsymbol{L}\times V_A\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{\|A\|^2}\left\{\boldsymbol{L}\left(S_A\right)^2-V_A\times\left(\boldsymbol{L}\times V_A\right)\right\}$$

ve

$\left(V_A\right)^{-1}=-\dfrac{V_A}{\|V_A\|^2}$ olduğundan $V_A=-\|V_A\|^2\left(V_A\right)^{-1}$ yazılırsa

$$V_A\times\left(\boldsymbol{L}\times V_A\right)=V_A\times\left[\boldsymbol{L}\times\left(-\|V_A\|^2\left(V_A\right)^{-1}\right)\right]$$

$$=-\|V_A\|^2\left\{\left[\boldsymbol{L}\times\left(V_A\right)^{-1}\right]\times V_A\right\}$$

$$=-\|V_A\|^2\boldsymbol{L}$$

bulunur. Böylece

$$A\times\left(\boldsymbol{L}\times A^{-1}\right)=\frac{1}{\|A\|^2}\left[\left(S_A\right)^2+\|V_A\|^2\right]\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}$$

bulunur ve $A\times\left(\boldsymbol{L}\times A^{-1}\right)=\boldsymbol{L}$ yani $\boldsymbol{L}$ dönme eksenidir.

- $A\times\left(\boldsymbol{C}\times A^{-1}\right)$ nin $\boldsymbol{L}$ etrafında 2θ açısı kadar dönen bir uzaysal oktoniyon

olduğunu gösterelim:

$$A\times\left(\boldsymbol{C}\times A^{-1}\right)=\left(S_A+V_A\right)\times\frac{1}{\|A\|^2}\left[\boldsymbol{C}\times\left(S_A-V_A\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\|A\|^2}\left\{\boldsymbol{C}\left(S_A\right)^2+S_A\left[V_A\times\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}\times V_A\right]-V_A\times\left(\boldsymbol{C}\times V_A\right)\right\}$$

V_A ve $\boldsymbol{C}$ birbirlerine dik olduğundan,

$$\boldsymbol{C}\times V_A=S_{\boldsymbol{C}}S_{V_A}+S_{\boldsymbol{C}}V_{V_A}+S_{V_A}V_{\boldsymbol{C}}-\langle\boldsymbol{C},V_A\rangle+\boldsymbol{C}\wedge V_A$$

$$=-\langle\boldsymbol{C},V_A\rangle+\boldsymbol{C}\wedge V_A$$

$$=\boldsymbol{C}\wedge V_A$$

dır. Buradan

$$V_A\times\left(\boldsymbol{C}\times V_A\right)=V_A\times\left(\boldsymbol{C}\wedge V_A\right)$$

$$=S_{V_A}S_{(\boldsymbol{C}\wedge V_A)}+S_{V_A}V_{(\boldsymbol{C}\wedge V_A)}+S_{(\boldsymbol{C}\wedge V_A)}V_{V_A}-\left\langle V_A,\left(\boldsymbol{C}\wedge V_A\right)\right\rangle+V_A\wedge\left(\boldsymbol{C}\wedge V_A\right)$$

$$=V_A\wedge\left(\boldsymbol{C}\wedge V_A\right)$$

$$=\langle V_A,V_A\rangle\boldsymbol{C}-\langle V_A,\boldsymbol{C}\rangle V_A$$

$$=\|V_A\|^2\boldsymbol{C}$$

bulunur. Böylece

$$A\times\left(\boldsymbol{C}\times A^{-1}\right)=\frac{1}{\|A\|^2}\left\{\left[\left(S_A\right)^2-\|V_A\|^2\right]\boldsymbol{C}+S_A\left[V_A\times\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}\times V_A\right]\right\}$$

dır.

$\boldsymbol{C}'=A\times\left(\boldsymbol{C}\times A^{-1}\right)$ olmak üzere $\boldsymbol{C}'$, $\boldsymbol{L}$ vektörüne diktir (yani $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{L}$ etrafında dönmektedir). Bunun için $S_{\left\{\left[A\times\left(\boldsymbol{C}\times A^{-1}\right)\right]\times\bar{\boldsymbol{L}}\right\}}=\left\langle A\times\left(\boldsymbol{C}\times A^{-1}\right),\boldsymbol{L}\right\rangle=0$ olduğunu göstermek gerekir. Diğer taraftan $S_{\left(\boldsymbol{C}\times\bar{\boldsymbol{L}}\right)}=-S_{(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{L})}=0$ oldukları bilinmektedir. Ayrıca

$$\left\langle A\times\left(\boldsymbol{C}\times A^{-1}\right),\boldsymbol{L}\right\rangle=\frac{1}{\|A\|^2}\left[\left(S_A\right)^2-\|V_A\|^2\right]\langle\boldsymbol{C},\boldsymbol{L}\rangle+S_A\left\langle\left(V_A\times\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}\times V_A\right),\boldsymbol{L}\right\rangle$$

$$=S_A\left\langle\left(V_A\times\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}\times V_A\right),\boldsymbol{L}\right\rangle$$

olduğundan, $\left\langle\left(V_A \times \boldsymbol{C} - \boldsymbol{C} \times V_A\right), \boldsymbol{L}\right\rangle = S_{\left[(V_A \times \boldsymbol{C} - \boldsymbol{C} \times V_A) \times \bar{\boldsymbol{L}}\right]} = -S_{\left[(V_A \times \boldsymbol{C} - \boldsymbol{C} \times V_A) \times \boldsymbol{L}\right]} = 0$ olması

$S_{\left\{\left[A \times \left(\boldsymbol{C} \times A^{-1}\right)\right] \times \bar{\boldsymbol{L}}\right\}} = \left\langle A \times \left(\boldsymbol{C} \times A^{-1}\right), \boldsymbol{L}\right\rangle = 0$ demektir.

$S_{\left[(V_A \times \boldsymbol{C} - \boldsymbol{C} \times V_A) \times \boldsymbol{L}\right]} = 0$ ifadesi veya V_A ve $\boldsymbol{L}$ paralel olduğundan buna eşit olarak

$$S_{\left[(\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{C} - \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{L}) \times \boldsymbol{L}\right]} = 0$$

olduğu gösterilmelidir.

$\boldsymbol{C}$ ile $\boldsymbol{L}$ dik olduklarından

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{C}) \times \boldsymbol{L} &= -(\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{L}) \times \boldsymbol{L} \\ &= \left(\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{L}^{-1}\right) \times \boldsymbol{L} \\ &= \boldsymbol{C}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}-(\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{L}) \times \boldsymbol{L} &= \left(\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{L}^{-1}\right) \times \boldsymbol{L} \\ &= \left(\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{L}^{-1}\right) \times \boldsymbol{L} \\ &= \boldsymbol{C}\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$S_{\left[(\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{C} - \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{L}) \times \boldsymbol{L}\right]} = S_{2\boldsymbol{C}} = 0$$

dır. Böylece $\boldsymbol{C}'$, $\boldsymbol{L}$ vektörüne diktir.

- Şimdi dönme açısını belirleyelim:

$\boldsymbol{C}'$ den $\boldsymbol{C}$ ye dönme açısı ϕ olsun. Bu durumda

$$\cos\phi = \frac{\left\langle \boldsymbol{C}', \boldsymbol{C}\right\rangle}{\left\|\boldsymbol{C}'\right\|\left\|\boldsymbol{C}\right\|}$$

yazılabilir.

$\boldsymbol{C}' = A \times \boldsymbol{C} \times A^{-1}$ ise, $\|\boldsymbol{C}'\| = \|A \times \boldsymbol{C} \times A^{-1}\| = \|A\| \, \|\boldsymbol{C}\| \, \|A^{-1}\| = 1$ olur. Böylece $\cos\phi = \langle \boldsymbol{C}', \boldsymbol{C} \rangle$ dır.

$$
\begin{aligned}
\cos\phi &= \langle \boldsymbol{C}', \boldsymbol{C} \rangle \\
&= \frac{1}{\|A\|^2}\left[(S_A)^2 - \|V_A\|^2 \right] \langle \boldsymbol{C}, \boldsymbol{C} \rangle + \frac{S_A}{\|A\|^2} \langle V_A \times \boldsymbol{C} - \boldsymbol{C} \times V_A, \boldsymbol{C} \rangle \\
&= \frac{1}{\|A\|^2}\left[(S_A)^2 - \|V_A\|^2 \right] + \frac{S_A}{\|A\|^2} \langle V_A \times \boldsymbol{C}, \boldsymbol{C} \rangle - \langle \boldsymbol{C} \times V_A, \boldsymbol{C} \rangle \\
&= \frac{1}{\|A\|^2}\left[(S_A)^2 - \|V_A\|^2 \right] + \frac{S_A}{\|A\|^2} \langle V_A \wedge \boldsymbol{C}, \boldsymbol{C} \rangle - \langle \boldsymbol{C} \wedge V_A, \boldsymbol{C} \rangle \\
&= \frac{1}{\|A\|^2}\left[(S_A)^2 - \|V_A\|^2 \right] \\
&= \frac{1}{\|A\|^2}\left[\|A\|^2 \cos^2\theta - \|A\|^2 \sin^2\theta \right] \\
&= \cos 2\theta
\end{aligned}
$$

yani $\phi = 2\theta$ olur. Sonuç olarak

$$\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{L}\cos\rho + \boldsymbol{C}'\sin\rho$$

dir. Burada

$$\boldsymbol{C}' = \boldsymbol{C}\cos 2\theta + (\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{C})\sin 2\theta = (\cos 2\theta + \boldsymbol{L}\sin 2\theta) \times \boldsymbol{C}$$

veya

$$\boldsymbol{C}' = A \times \boldsymbol{C} \times A^{-1} = (\cos 2\theta + \boldsymbol{L}\sin 2\theta) \times \boldsymbol{C}$$

dir. Bu ise $\boldsymbol{C}$ nin $\boldsymbol{L}$ eksenin etrafında 2θ açısı kadar dönmesini göstermektedir. Diğer taraftan $\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{C}$ hem $\boldsymbol{L}$ ye hem de $\boldsymbol{C}$ ye diktir. Böylece $A \times (X \times A^{-1})$ çarpımı 7 boyutlu uzayda X in vektörel kısmının A nın vektör kısmı etrafında 2θ açısı kadar dönme yaptığını gösterir [21].

3.13 8 Boyutlu Öklid Uzayında Dönmeler

Oktoniyonlar cebirinde değişme özelliği olmadığı için sağ ve sol çarpım olarak iki çarpım tanımlandığını biliyoruz. Bu durumda A birim oktoniyon ve X herhangi bir oktoniyon olmak üzere,

$$L_A : \boldsymbol{O} \rightarrow \boldsymbol{O} \quad L_A(X) = A \times X$$

ve

$$R_A : \boldsymbol{O} \rightarrow \boldsymbol{O} \quad R_A(X) = X \times A$$

dönüşümlerini tanımlayalım [21].

Teorem 3.11 A birim oktoniyon olmak üzere L_A ve R_A dönüşümleri normu korur [21].

İspat A birim reel oktoniyon olduğundan $\|A\| = 1$ dir. Ayrıca

$L_A : \boldsymbol{O} \rightarrow \boldsymbol{O} \quad L_A(X) = A \times X$ olmak üzere

$\|A \times X\| = = \|A\| \, \|X\| = \|X\|$ elde edilir. Benzer sonuç R_A için de elde edilir.

Teorem 3.12 L_A ve R_A dönüşümleri açıları korur [21].

İspat X ve Y oktoniyonları arasındaki açı dönmeden önce λ ise

$$\cos\lambda = \frac{S_{X \times \bar{Y}}}{\|X\| \, \|Y\|}$$

yazılabilir. X ve Y oktoniyonları A oktoniyonu ile çarpıldığında yani dönme sonrasındaki açı λ' olmak üzere

$$\cos\lambda' = \frac{S_{(A \times X) \times \overline{A \times Y}}}{\|A \times X\| \|A \times Y\|}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\cos\lambda' = \frac{S_{A \times X \times \left(\bar{Y} \times \bar{A}\right)}}{\|X\| \|Y\|}$$

$$= \frac{\|A\| S_{X \times \bar{Y}}}{\|X\| \, \|Y\|}$$

$$= \frac{S_{X \times \bar{Y}}}{\|X\| \, \|Y\|}$$

$$= \cos \lambda$$

elde edilir. Burada vektörler arasındaki açılar $[0,1]$ aralığında olduğundan $\lambda' = \lambda + 2k\pi$ denkleminin tek çözümü $\lambda = \lambda'$ olarak bulunur. Yani, $L_A(X) = A \times X$ sol çarpım dönüşümü açıyı korur. Benzer sonuç sağ çarpım için de elde edilir.

8 boyutlu uzayda dönmeyi daha iyi analiz edebilmek için öncelikle Hamilton üçgenleri ile ilgili bilgiye ihtiyaç vardır [21].

Hamilton Üçgenleri

$\langle L_A(X), L_A(X) \rangle = S_{(A \times X) \times (\overline{A \times Y})} = S_{(A \times X) \times (\bar{Y} \times \bar{A})} = S_{(X \times \bar{Y})} = \langle X, Y \rangle$ olduğundan L_A ve R_A dönüşümleri ortogonal dönüşümlerdir. Ayrıca L_A ve R_A dönüşümleri yönlendirmeyi koruyan dönüşümlerdir. Bu durumda L_A ve R_A dönüşümleri $\mathbb{R}^8$ de dönme tanımlar.

Bir reel oktoniyonun baz elemanları $1 = (1,0,0,0,0,0,0,0)$, $e_1 = (0,1,0,0,0,0,0,0)$, $e_2 = (0,0,1,0,0,0,0,0)$, $e_3 = (0,0,0,1,0,0,0,0)$, $e_4 = (0,0,0,0,1,0,0,0)$, $e_5 = (0,0,0,0,0,1,0,0)$, $e_6 = (0,0,0,0,0,0,1,0)$ ve $e_7 = (0,0,0,0,0,0,0,1)$

dır. Bu baz elemanlar

$$e_0 e_i = e_i e_0 = e_i,$$
$$e_i e_j = -\delta_{ij} e_0 + \varepsilon_{ijk} e_k, \; e_0 = +1$$

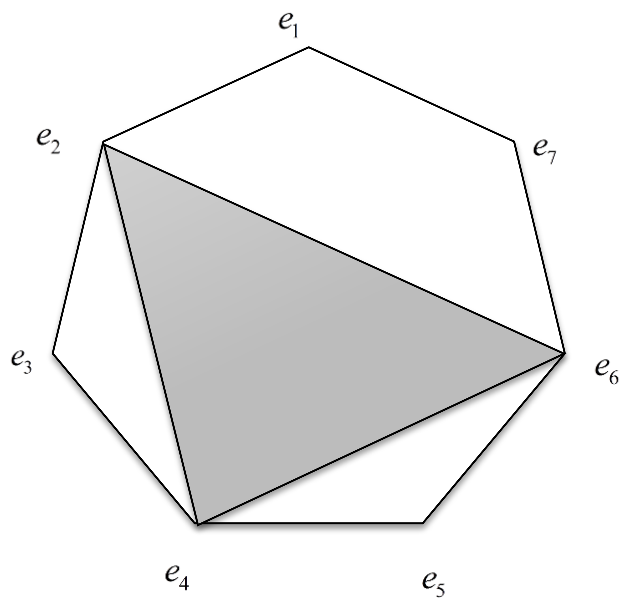
denklemleri ile tanımlıdır. Burada (e_i, e_j, e_k) üçlüsü Hamilton üçgeni olarak adlandırılır, $\{e_i, e_j, e_k\}$ üçlüsü 3 boyutlu uzaydaki $\{i, j, k\}$ ortonormal üçlüsüne benzemektedir [21, 58].

$$e_0 e_i = e_i e_0 = e_i, \; e_i e_j = -\delta_{ij} e_0 + \varepsilon_{ijk} e_k,$$

ve

$$(ijk) = (123), (145), (176), (246), (257), (347), (365)$$

olduğundan 7 tane Hamilton üçgeni vardır. Aşağıdaki şekilde üçgenler görülür[21].



Şekil 3. 4 Hamilton üçgenleri

Şekil 3.4 de taralı olan (e_2, e_4, e_6) üçgeni bu üçgenlerden sadece biridir. Diğer Hamilton üçgenleri (e_2, e_4, e_6) üçgeninin $e_1,\ e_7,\ e_6,\ e_5,\ e_4,\ e_3$ köşeleri üzerinde hareket etmesiyle oluşmaktadır. Yukarıda bahsedildiği gibi (e_2, e_4, e_6) üçlüsünün dışında (e_1, e_2, e_3), $(e_1, e_4, e_5), (e_1, e_7, e_6), (e_2, e_5, e_7), (e_3, e_4, e_7)$ ve (e_3, e_6, e_5) üçlüleri elde edilir. Bir Cayley (Hamilton) üçgeni karşılıklı ortogonal ve

$$S_{h\times(l\times m)} = S_{l\times(m\times h)} = S_{m\times(h\times l)} = 0$$

özelliğine sahip olan (h, l, m) birim normlu püre oktoniyonların üçlüsüdür [21].

Örnek 3.2 $\{e_1, e_3, e_4\}$ dikkate alınırsa buradaki elemanlar karşılıklı ortogonaldir. Ayrıca

$$S_{e_1\times(e_3\times e_4)} = S_{e_3\times(e_4\times e_1)} = S_{e_4\times(e_1\times e_3)} = S_{e_6} = 0$$

olduğundan (e_1, e_3, e_4) bir Cayley üçgenidir [21].

Not 3.7 Bir Cayley üçgeninden uzaysal oktoniyonların kümesi için ortonormal baz kurulabilir [21].

Örnek 3.3 (e_1, e_3, e_4) Cayley üçgeninden uzaysal oktoniyonların kümesi için ortonormal baz kurulabilir [21].

Çözüm $e_1 \times e_3 = -e_2$ tanımlayalım. Bu durumda,

$$\{e_1, e_3, -e_2, e_4, e_1 \times e_4, e_3 \times e_4, (-e_2) \times e_4\}$$

sistemi uzaysal oktoniyonlar için bir ortonormal bazdır [21].

- Hamilton üçgenleri ile ilgili verilen bilginin ardından 8 boyutlu Öklid uzayındaki

dönmelere devam edelim:

Tanım 3.17 de reel oktoniyonların $\mathbb{R}$ cismi üzerinde sol matris gösterimi

$$M_{L_A} = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & -a_5 & -a_6 & -a_7 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 & -a_5 & a_4 & a_7 & -a_6 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 & -a_6 & -a_7 & a_4 & a_5 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 & -a_7 & a_6 & -a_5 & a_4 \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_5 & -a_4 & a_7 & -a_6 & a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ a_6 & -a_7 & -a_4 & a_5 & a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ a_7 & a_6 & -a_5 & -a_4 & a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunmuştur. Bu matris

$$B = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -a_4 & -a_5 & -a_6 & -a_7 \\ -a_5 & a_4 & a_7 & -a_6 \\ -a_6 & -a_7 & a_4 & a_5 \\ -a_7 & a_6 & -a_5 & a_4 \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$D = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$M_{L_A} = \begin{bmatrix} B & C \\ -C^t & D \end{bmatrix}$$

yazılabilir.

$$BB^t + CC^t = \left(\|B\|^2 + \|C\|^2\right) I_4 \ , \ \|B\|^2 + \|C\|^2 = \sum_{i=0}^{7} a_i^2 = \|A\|^2 = 1$$

ve

$$-BC + CD^t = 0$$

dır. Bu durumda $M_{L_A}\left(M_{L_A}\right)^t = I_8$ olduğundan M_{L_A} ortogonaldir. M_{L_A} ortogonal matris olduğundan $\det\left[M_{L_A}\left(M_{L_A}\right)^t\right] = \left[\det\left(M_{L_A}\right)\right]^2 = \det\left(I_8\right) = 1$ ve $\det M_{L_A} = \pm 1$ dir [21]. $\det M_{L_A} = \left(\sum_{i=0}^{7} a_i^2\right)^4 = 1$ olur, böylece L_A yönlendirmeyi koruyan dönüşümdür. Yani, L_A $SO(8)$ in elemanıdır. Sonuç olarak, L_A, $\mathbb{R}^8$ de dönme tanımlar [21].

Reel oktoniyonların $\mathbb{R}$ cismi üzerinde sağ matris gösterimi ise

$$M_{R_A} = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & -a_5 & -a_6 & -a_7 \\ a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 & a_5 & -a_4 & -a_7 & a_6 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 & a_6 & a_7 & -a_4 & -a_5 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 & a_7 & -a_6 & a_5 & -a_4 \\ a_4 & -a_5 & -a_6 & -a_7 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_5 & a_4 & -a_7 & a_6 & -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_6 & a_7 & a_4 & -a_5 & -a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_7 & -a_6 & a_5 & a_4 & -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu matris

$$F = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} -a_4 & -a_5 & -a_6 & -a_7 \\ a_5 & -a_4 & -a_7 & a_6 \\ a_6 & a_7 & -a_4 & -a_5 \\ a_7 & -a_6 & a_5 & -a_4 \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$D = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$M_{R_A} = \begin{bmatrix} F & G \\ -G^t & D^t \end{bmatrix}$$

yazılabilir.

$$FF^t + GG^t = \left(\|F\|^2 + \|G\|^2\right) I_4 \text{ , } \|F\|^2 + \|G\|^2 = \sum_{i=0}^{7} a_i^2 = \|A\|^2 = 1$$

ve

$$-FG + GD = 0$$

dır. Bu durumda $M_{R_A}\left(M_{R_A}\right)^t = I_8$ olduğundan M_{R_A} ortogonaldir. M_{R_A} ortogonal matris olduğundan $\det\left[M_{R_A}\left(M_{R_A}\right)^t\right] = \left[\det\left(M_{R_A}\right)\right]^2 = \det\left(I_8\right) = 1$ ve $\det M_{R_A} = \pm 1$ dir [21]. $\det M_{R_A} = \left(\sum_{i=0}^{7} a_i^2\right)^4 = 1$ olur, böylece R_A yönlendirmeyi koruyan dönüşümdür. Yani, R_A, $SO(8)$ in elemanıdır. Sonuç olarak, R_A, $\mathbb{R}^8$ de dönme tanımlar [21].

3.14 8 Boyutlu Dönmenin Geometrisi

$\mathbb{R}^8$ de $A = \cos\theta + \boldsymbol{L}\sin\theta$, $\|A\| = 1$ oktoniyonu verilsin. Burada $\boldsymbol{L}$ birim vektördür ve $\langle \boldsymbol{L}, \boldsymbol{L} \rangle = 1, \boldsymbol{L}^2 = \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{L} = -\langle \boldsymbol{L}, \boldsymbol{L} \rangle + \boldsymbol{L} \wedge \boldsymbol{L} = -1$ dir.

X herhangi bir oktoniyon olmak üzere

$$\begin{aligned} A \times X &= (\cos\theta + \boldsymbol{L}\sin\theta) \times X \\ &= X\cos\theta + (\boldsymbol{L} \times X)\sin\theta \end{aligned}$$

dir. Burada $\boldsymbol{L} \times X = X'$ olarak tanımlansın. Böylece

$$A \times X = X\cos\theta + X'\sin\theta \tag{3.1}$$

yazılabilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} A \times X' &= A \times (\boldsymbol{L} \times X) \\ &= (\cos\theta + \boldsymbol{L}\sin\theta) \times (\boldsymbol{L} \times X) \end{aligned}$$

$$=(\boldsymbol{L}\times X)\cos\theta+\boldsymbol{L}\times(\boldsymbol{L}\times X)\sin\theta$$

$$=(\boldsymbol{L}\times X)\cos\theta+((\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{L})\times X)\sin\theta$$

bulunur. Buradan

$$A\times X'=-X\sin\theta+X'\cos\theta \tag{3.2}$$

elde edilir. Yani, herhangi bir X oktoniyonunu A ile soldan çarpmak demek X vektörünü X ve X' nü içeren düzlemde θ açısı kadar pozitif yönde döndürmek demektir [21]. Gerçekten (3.1) ve (3.2) den

$$\begin{cases} A\times X=X\cos\theta+X'\sin\theta \\ A\times X'=-X\sin\theta+X'\cos\theta \end{cases}$$

veya

$$\begin{bmatrix} A\times X \\ A\times X' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ X' \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Buradan

$$A(\theta)=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

yazılır. Gerçekten $\mathbb{R}^8$ deki bir X vektörü $S_p\{X,X'\}$ düzleminde θ kadar dönerek $A\times X$ vektörü elde edilir. Buradan $\mathbb{R}^8$ de A yı X ile çarpmak demek $S_p\{X,X'\}$ düzleminde θ kadar döndürmek demektir sonucuna varılır. A birim oktoniyonu ile herhangi bir X oktoniyonunun çarpımı yani $A\times X$; $X\in\mathbb{R}^8$ vektörünün $\boldsymbol{L}\times X=X'$ olmak üzere $S_p\{X,X'\}$ düzleminde θ açılı dönmesiyle oluşan $\mathbb{R}^8$ deki vektördür [21].

Eğer herhangi bir X oktoniyonu $X=1+\sum_{i=1}^{7}0e_i$ ve $X'=\boldsymbol{L}\times X=\boldsymbol{L}\times 1=\boldsymbol{L}$ seçilirse, $X=1$ ve $X'=\boldsymbol{L}$ yi kapsayan düzlem sol çarpım altında değişmez kalır:

$$\begin{cases} A\times 1=1\cos\theta+\boldsymbol{L}\sin\theta \\ A\times\boldsymbol{L}=-1\sin\theta+\boldsymbol{L}\cos\theta \end{cases}$$

Benzer işlemler sağdan çarpım içinde yapılabilir. $X\times L=X''$ olmak üzere

$$\begin{cases} X \times A = X\cos\theta + X''\sin\theta \\ X''\times A = -X\sin\theta + X''\cos\theta \end{cases}$$

ifadesinden

$$\begin{bmatrix} X\times A \\ X'\times A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ X'' \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

yazılır. Gerçekten $\mathbb{R}^8$ deki bir X vektörü $S_p\{X, X''\}$ düzleminde θ kadar dönerek $X\times A$ vektörü elde edilir. Buradan $\mathbb{R}^8$ de A yı X ile sağdan çarpmak demek $S_p\{X, X''\}$ düzleminde θ kadar döndürmek demektir (buradaki dönme doğrultusu soldan çarpmadaki dönmeyle aynıdır). A birim oktoniyonu ile herhangi bir X oktoniyonunun sağdan çarpımı yani $X\times A$; $X\in\mathbb{R}^8$ vektörünün $X\times L = X''$ olmak üzere $S_p\{X, X''\}$ düzleminde θ açılı dönmesiyle oluşan $\mathbb{R}^8$ deki vektördür [21].

Eğer herhangi bir X oktoniyonu $X = 1 + \sum_{i=1}^{7} 0e_i$ ve $X'' = X\times \boldsymbol{L} = 1\times \boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}$ seçilirse, $X = 1$ ve $X'' = \boldsymbol{L}$ yi kapsayan düzlem sağ çarpım altında değişmez kalır.

Herhangi bir X oktoniyonu A^{-1} ile çarpmak demek elemanı θ açısı kadar zıt yönde döndürmek demektir [21].

$\mathbb{R}^4$ deki dönmenin geometrisine göre sağ ve sol kuaterniyon çarpımı elemanları $\boldsymbol{n}$ ye dik olan düzlemde döndürmek demekti. Oktoniyonlar için dönme biraz daha komplikedir. Fakat bundan önce uzaysal oktoniyonların uzayının 7 tane elemandan oluşan bir ortonormal baza sahip olduğu gösterilmelidir. Burada elemanlar için $e_1, e_2, \ldots, e_7$ temel alınacaktır. A nın aracılığıyla $\boldsymbol{L}$ seçilsin. Diğer iki eleman $\boldsymbol{U}$ ve $\boldsymbol{V}$ olsun, böylece $(\boldsymbol{L},\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})$ bir ortonormal kümedir ve $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{U}$ ya ortogonaldir:

$$\boldsymbol{V}\times(\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{U}) = -(\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{U})\times\boldsymbol{V}\,.$$

Ayrıca

$\boldsymbol{L} \times (\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V}) = -(\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V}) \times \boldsymbol{L}$ ve $\boldsymbol{U} \times (\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{L}) = -(\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{L}) \times \boldsymbol{U}$

olduğu görülür [21].

Teorem 3.13 $(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})$ bir Cayley üçgenidir [21].

İspat $\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{V} = -\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{L}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L} \times (\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V}) + (\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{U}) \times \boldsymbol{V} &= \boldsymbol{L} \times (\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V}) - \boldsymbol{V} \times (\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{U}) \\
&= -\boldsymbol{L} \times (\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{U}) - \boldsymbol{V} \times (\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{U}) \\
&= (\boldsymbol{L}^2 + \boldsymbol{V}^2) \times \boldsymbol{U} - (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{V}) \times (\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{U} + \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{U}) \\
&= (\boldsymbol{L}^2 + \boldsymbol{V}^2) \times \boldsymbol{U} - (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{V}) \times (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{V}) \times \boldsymbol{U} \\
&= (\boldsymbol{L}^2 + \boldsymbol{V}^2) \times \boldsymbol{U} - (\boldsymbol{L} + \boldsymbol{V})^2 \times \boldsymbol{U} \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$(\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{U}) \times \boldsymbol{L} + \boldsymbol{V} \times (\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{L}) = 0$$

dır. Yukarıdaki eşitlikler kullanılırsa $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{L}$ ye ortogonal olduğundan

$$\begin{aligned}
S_{\mathrm{L} \times (\mathrm{U} \times \mathrm{V})} &= -(\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{U}) \times \boldsymbol{L} + \boldsymbol{L} \times (\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V}) \\
&= \boldsymbol{V} \times (\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{L}) - (\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{U}) \times \boldsymbol{V} \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$S_{\mathrm{U} \times (\mathrm{L} \times \mathrm{V})} = 0$$

dır. Bu durumda $(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})$ bir Cayley üçgenidir [21].

Geometrik Yorum

$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{U}$ olsun. Bu durumda

$(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{V}, \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{V}, \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{V})$

bir ortonormal bazdır. Bu durumda 7 Hamilton üçgeni elde edilir. Bunlardan sadece 3 ü $\boldsymbol{L}$ nin doğrultusundadır. Hamilton üçgenleri

$$(\boldsymbol{L},\boldsymbol{U},\boldsymbol{Z}),\ (\boldsymbol{L},\boldsymbol{V},\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{V}),(\boldsymbol{L},\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{V},\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V})$$

dir.

Bir X oktoniyonunu $A=\cos\theta+\boldsymbol{L}\sin\theta$ ile soldan çarpmak demek $(\boldsymbol{U},\boldsymbol{Z})$, $(\boldsymbol{V},\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{V})$ ve $(\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{V},\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V})$ yi içeren üç düzlemde $\boldsymbol{L}$ ekseni boyunca sağ el kuralına göre pozitif yönde θ açısı kadar döndürmek demektir [21].

Bir X oktoniyonunu $A=\cos\theta+\boldsymbol{L}\sin\theta$ ile sağdan çarpmak demek $(\boldsymbol{U},\boldsymbol{Z})$, $(\boldsymbol{V},\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{V})$ ve $(\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{V},\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{V})$ yi içeren üç düzlemde sağ el kuralına göre negatif yönde θ açısı kadar döndürmek demektir.

Herhangi bir oktoniyon 1, $\boldsymbol{L}$ ve $\boldsymbol{L}$ yi içeren Hamilton üçgeninden alınan üç tane çiftin oluşturduğu bazın elemanlarına göre tek bir şekilde yazıldığından $A\times\left(X\times A^{-1}\right)$ operasyonu göz önüne alınırsa,

i) 1 ve $\boldsymbol{L}$ yi içeren düzlemdeki elemanlar $A\times\left(X\times A^{-1}\right)$ operasyonu altında değişmez; çünkü A ile soldan çarpım yani $A\times$ çarpımı elemanları θ açısı kadar döndürmek iken $\times A^{-1}$ çarpımı elemanı tekrar θ açısı kadar geri döndürmek demektir, yani elemanlar dönme sonucunda ilk duruma dönerler [21].

ii) A^{-1} ile sağdan çarptığında pozitif θ açısı, A ile soldan çarptığında ortak $\boldsymbol{L}$ elemanlı Hamilton üçgenindeki elemanlar $\boldsymbol{L}$ ekseni boyunca pozitif θ açısı kadar döner, yani toplamda $\boldsymbol{L}$ ekseni boyunca 2θ açısı kadar dönme belirtir. $\boldsymbol{L}$ etrafında 2θ açılı püre oktoniyon uzayında, $A\times\left(X\times A^{-1}\right)$ nin etkisi bir dönme etkisi yapmaktır [21].

3.15 **Oktoniyonik Uzayda Analiz**

Bu bölümde vektör değerli fonksiyonlara benzer olarak, oktoniyonik fonksiyonlar tanıtılıp, oktoniyonik fonksiyonların limit, süreklilik ve türevleri tanımlanacaktır.

3.15.1 Uzaysal Oktoniyonik Analiz

Tanım 3.20 A, $\mathbb{R}$ nin bir alt aralığı, $\boldsymbol{O_P}$ de uzaysal oktoniyonların uzayı ve $f_i : A \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$f : A \to \boldsymbol{O_P}$, $f(s) = \sum_{i=1}^{7} f_i(s) e_i$ şeklinde tanımlanan fonksiyona uzaysal oktoniyonik fonksiyon denir [59, 60].

Teorem 3.14 [59, 60] f ve g uzaysal oktoniyonik, c ve d de reel değerli fonsiyonlar olsun. Bu durumda

$f+g$, $f-g$, cf, $\langle f,g \rangle$, $f \times g$, $f \wedge g$, $f \circ d$ uzaysal oktoniyonik fonksiyonları

i) $(f+g)(s) = f(s) + g(s)$

ii) $(f-g)(s) = f(s) - g(s)$

iii) $(cf)(s) = c(s) f(s)$

iv) $\langle f,g \rangle (s) = \langle f(s), g(s) \rangle$

v) $(f \times g)(s) = f(s) \times g(s)$

vi) $(f \wedge g)(s) = f(s) \wedge g(s)$

vii) $(f \circ d)(s) = f(d(s))$

Tanım 3.21 $f(s) = \sum_{i=1}^{7} f_i(s) e_i$ fonksiyonu verildiğinde

$$\|f(s)\| = \sqrt{\langle f(s), f(s) \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{7} \left(f_i(s) \right)^2}$$

şeklinde tanımlanan $\|f\|$ fonksiyonuna f nin normu veya büyüklüğü denir [59, 60].

Tanım 3.22 $f : A \subset \mathbb{R} \to \boldsymbol{O_P}$ bir uzaysal oktoniyonik fonksiyon ve s_0 da A kümesinin bir yığılma noktası olsun. f uzaysal oktoniyonik fonksiyonunun s_0 noktasındaki limitinin l olması için gerek ve yeter koşul $\forall\varepsilon>0$ için $\exists\delta>0$ öyleki $0<|s-s_0|<\delta$ eşitsizliğini sağlayan her bir s için $\|f(s)-l\|<\varepsilon$ olmasıdır. Bu limit

$$\lim_{s\to s_0} f(s)=l$$

şeklinde gösterilir [59, 60].

Teorem 3.15 $f(s)=\sum_{i=1}^{7} f_i(s)e_i$ olsun. f uzaysal oktoniyonik fonksiyonunun s_0 noktasındaki limitinin olması için gerek ve yeter koşul f_i fonksiyonlarının s_0 da birer limite sahip olmasıdır. Limitin var olması durumunda,

$$\lim_{s\to s_0} f(s)=\sum_{i=1}^{7} f_i(s)ei$$

olur [59, 60].

Teorem 3.16 f ve g uzaysal oktoniyonik, c de reel değerli fonsiyonlar olup s_0 noktasının bir komşuluğunda tanımlı olsun.

$\lim_{s\to s_0} f(s)=l$, $\lim_{s\to s_0} g(s)=m$ ve $\lim_{s\to s_0} c(s)=k$ ise

i) $\lim_{s\to s_0}\left[f(s)+g(s)\right]=l+m$

ii) $\lim_{s\to s_0}\left[f(s)-g(s)\right]=l-m$

iii) $\lim_{s\to s_0}\left[c(s)\,f(s)\right]=km$

iv) $\lim_{s\to s_0}\left[\langle f(s),g(s)\rangle\right]=\langle l,m\rangle$

v) $\lim_{s\to s_0}\left[f(s)\times g(s)\right]=l\times m$

vi) $\lim_{s\to s_0}\left[f(s)\wedge g(s)\right]=l\wedge m$

dır [59, 60].

Tanım 3.23 $f: A \subset \mathbb{R} \to \boldsymbol{O_P}$ bir uzaysal oktoniyonik fonksiyon ve s_0 da A kümesinin bir yığılma noktası olsun. $\lim\limits_{s \to s_0} f(s) = f(s_0)$ ise f uzaysal oktoniyonik fonksiyonuna s_0 noktasında süreklidir denir [59, 60].

Bu tanıma göre

1) f uzaysal oktoniyonik fonksiyonu s_0 noktasında tanımlı olmalı,

2) $\lim\limits_{s \to s_0} f(s)$ limiti var olmalı,

3) Bu limit $f(s_0) = \sum\limits_{i=1}^{7} f_i(s_0) e_i$ uzaysal oktoniyonuna eşit olmalıdır.

Teorem 3.17 f uzaysal oktoniyonik fonksiyonunun A üzerinde sürekli olması için gerek ve yeter koşul f nin A nın her noktasında sürekli olmasıdır [59, 60].

Teorem 3.18 f uzaysal oktoniyonik fonksiyonunun s_0 noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul f_i fonksiyonlarının s_0 noktasında sürekli olmasıdır [59, 60].

Teorem 3.19 f **,** g ve c fonksiyonları s_0 noktasında sürekli ise $f+g$, $f-g$, cf, $\langle f, g \rangle$, $f \times g$, $f \wedge g$ uzaysal oktoniyonik fonksiyonları da s_0 noktasında süreklidir [59, 60].

Tanım 3.24 $f: A \subset \mathbb{R} \to \boldsymbol{O_P}$ bir uzaysal oktoniyonik fonksiyon ve s_0 da A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Eğer

$$\lim_{s \to s_0} \frac{f(s) - f(s_0)}{s - s_0}$$

limiti varsa bu limite f fonksiyonunun s_0 noktasındaki türevi denir,

$$f'(s_0) = \lim_{s \to s_0} \frac{f(s) - f(s_0)}{s - s_0}$$

şeklinde gösterilir [59, 60].

Teorem 3.20 $f(s)=\sum_{i=1}^{7} f_i(s)e_i$ olsun. f uzaysal oktoniyonik fonksiyonunun s_0 noktasında türevli olması için gerek ve yeter koşul f_i fonksiyonlarının s_0 da türevli olmasıdır. Türevin var olması durumunda,

$$f'(s)=\sum_{i=1}^{7} f_i'(s)e_i$$

olur [59, 60].

Teorem 3.21 f **,** g ve c fonksiyonları s_0 noktasında türevli olsun. u de $u(t)=s$ eşitliğini sağlayan t noktasında türevli bir fonksiyon ise

i) $\left[f(s)+g(s)\right]'=f'(s)+g'(s)$

ii) $\left[f(s)-g(s)\right]'=f'(s)-g'(s)$

iii) $\left[c(s)\,f(s)\right]'=c'(s)\,f(s)+c(s)\,f'(s)$

iv) $\langle f(s),g(s)\rangle'=\langle f'(s),g(s)\rangle+\langle f(s),g'(s)\rangle$

v) $\left[f(s)\times g(s)\right]'=f'(s)\times g(s)+f(s)\times g'(s)$

vi) $\left[f(s)\wedge g(s)\right]'=f'(s)\wedge g(s)+f(s)\wedge g'(s)$

vii) $\left[(f\circ u)(t)\right]'=f'(u(t))u'(t)$

dır [59, 60].

Tanım 3.25 f_i **,** $[a,b]$ üzerinde integrallenebilen fonksiyonlar olmak üzere,

$$f(s)=\sum_{i=1}^{7} f_i(s)e_i$$

fonksiyonunun belirsiz integrali

$$\int f(s)=\sum_{i=1}^{7}\left(\int f_i(s)\right)e_i+C$$

uzaysal oktoniyonik fonksiyondur. Burada $C=\sum_{i=1}^{7} c_i e_i$ herhangi bir sabit uzaysal oktoniyondur.

f nin $[a,b]$ aralığındaki belirli integrali

$$\int_a^b f(s)=\sum_{i=1}^{7}\left(\int_a^b f_i(s)\right)e_i$$

dir [59, 60].

3.15.2 Oktoniyonik Analiz

Tanım 3.26 A, $\mathbb{R}$ nin bir alt aralığı, ***O*** oktoniyonların uzayı ve $F_i : A \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$F : A \to$ ***O***, $F(s)=\sum_{i=0}^{7} F_i(s)e_i$ şeklinde tanımlanan fonksiyona oktoniyonik fonksiyon denir [59, 60].

Teorem 3.22 [59, 60] F ve G oktoniyonik, v ve w de reel değerli fonsiyonlar olsun. Bu durumda

$F+G$, $F-G$, vF, $\langle F,G\rangle$, $F\times G$, $F\circ w$ oktoniyonik fonksiyonları

i) $(F+G)(s)=F(s)+G(s)$

ii) $(F-G)(s)=F(s)-G(s)$

iii) $(vF)(s)=v(s)F(s)$

iv) $\langle F,G\rangle(s)=\langle F(s),G(s)\rangle$

v) $(F\times G)(s)=F(s)\times G(s)$

vi) $(F\circ w)(s)=F(w(s))$

Tanım 3.27 $F(s)=\sum_{i=0}^{7} F_i(s)e_i$ fonksiyonu verildiğinde

$$\|F(s)\| = \sqrt{\langle F(s), F(s)\rangle} = \sqrt{\sum_{i=0}^{7}\left(F_i(s)\right)^2}$$

şeklinde tanımlanan $\|F\|$ fonksiyonuna F nin normu veya büyüklüğü denir [59, 60].

Tanım 3.28 $F : A \to \boldsymbol{O}$ bir oktoniyonik fonksiyon ve s_0 da A kümesinin bir yığılma noktası olsun. F oktoniyonik fonksiyonunun s_0 noktasındaki limitinin L olması için gerek ve yeter koşul $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyleki $0 < |s - s_0| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her bir s için $\|F(s) - L\| < \varepsilon$ olmasıdır. Bu limit

$$\lim_{s \to s_0} F(s) = L$$

şeklinde gösterilir [59, 60].

Teorem 3.23 $F(s) = \sum_{i=0}^{7} F_i(s) e_i$ olsun. F oktoniyonik fonksiyonunun s_0 noktasındaki limitinin olması için gerek ve yeter koşul F_i fonksiyonlarının s_0 da birer limite sahip olmasıdır. Limitin var olması durumunda,

$$\lim_{s \to s_0} F(s) = \sum_{i=0}^{7}\left(\lim_{s \to s_0} F_i(s)\right)e_i$$

olur [59, 60].

Teorem 3.24 F ve G oktoniyonik, v de reel değerli fonsiyonlar olup s_0 noktasının bir komşuluğunda tanımlı olsun.

$\lim_{s \to s_0} F(s) = L$, $\lim_{s \to s_0} G(s) = M$ ve $\lim_{s \to s_0} v(s) = r$ ise

i) $\lim_{s \to s_0}\left[F(s) + G(s)\right] = L + M$

ii) $\lim_{s \to s_0}\left[F(s) - G(s)\right] = L - M$

iii) $\lim_{s \to s_0}\left[v(s) F(s)\right] = rM$

iv) $\lim_{s \to s_0}\left[\langle F(s), G(s)\rangle\right] = \langle L, M\rangle$

v) $\lim_{s \to s_0} \left[F(s) \times G(s) \right] = L \times M$

dır [59, 60].

Tanım 3.29 $F : A \to \boldsymbol{O}$ bir oktoniyonik fonksiyon ve s_0 da A kümesinin bir yığılma noktası olsun. $\lim_{s \to s_0} F(s) = F(s_0)$ ise F oktoniyonik fonksiyonuna s_0 noktasında süreklidir denir.

Bu tanıma göre

1) F oktoniyonik fonksiyonu s_0 noktasında tanımlı olmalı,

2) $\lim_{s \to s_0} F(s)$ limiti var olmalı,

3) Bu limit $F(s_0) = \sum_{i=0}^{7} F_i(s_0) e_i$ oktoniyonuna eşit olmalıdır [59, 60].

Teorem 3.25 F oktoniyonik fonksiyonunun A üzerinde sürekli olması için gerek ve yeter koşul F nin A nın her noktasında sürekli olmasıdır [59, 60].

Teorem 3.26 F oktoniyonik fonksiyonunun s_0 noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul F_i fonksiyonlarının s_0 noktasında sürekli olmasıdır [59, 60].

Teorem 3.27 F **,** G ve v fonksiyonları s_0 noktasında sürekli ise $F+G$, $F-G$, vF, $\langle F, G \rangle$, $F \times G$ oktoniyonik fonksiyonları da s_0 noktasında süreklidir [59, 60].

Tanım 3.30 $F : A \subset \mathbb{R} \to \boldsymbol{O}$ bir oktoniyonik fonksiyon ve s_0 da A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Eğer

$$\lim_{s \to s_0} \frac{F(s) - F(s_0)}{s - s_0}$$

limiti varsa bu limite F fonksiyonunun s_0 noktasındaki türevi denir,

$$F'(s_0) = \lim_{s \to s_0} \frac{F(s) - F(s_0)}{s - s_0}$$

şeklinde gösterilir [59, 60].

Teorem 3.28 $F(s)=\sum_{i=0}^{7}F_i(s)e_i$ olsun. F oktoniyonik fonksiyonunun s_0 noktasında türevli olması için gerek ve yeter koşul F_i fonksiyonlarının s_0 da türevli olmasıdır. Türevin var olması durumunda,

$$F'(s)=\sum_{i=0}^{7}F_i'(s)e_i$$

olur [59, 60].

Teorem 3.29 F **,** G ve v fonksiyonları s_0 noktasında türevli olsun. w de $w(t)=s$ eşitliğini sağlayan t noktasında türevli bir fonksiyon ise

i) $\left[F(s)+G(s)\right]'=F'(s)+G'(s)$

ii) $\left[F(s)-F(s)\right]'=F'(s)-G'(s)$

iii) $\left[v(s)F(s)\right]'=v'(s)F(s)+v(s)F'(s)$

iv) $\left\langle F(s),G(s)\right\rangle'=\left\langle F'(s),G(s)\right\rangle+\left\langle F(s),G'(s)\right\rangle$

v) $\left[F(s)\times G(s)\right]'=F'(s)\times G(s)+F(s)\times G'(s)$

vi) $\left[(F\circ w)(t)\right]'=F'(w(t))w'(t)$

dır [59, 60].

Tanım 3.31

F_i **,** $[a,b]$ üzerinde integrallenebilen fonksiyonlar olmak üzere, $F(s)=\sum_{i=0}^{7}F_i(s)e_i$ fonksiyonunun belirsiz integrali

$$\int F(s)=\sum_{i=0}^{7}\left(\int F_i(s)\right)e_i+C$$

oktoniyonik fonksiyondur. Burada $C=\sum_{i=0}^{7}c_ie_i$ herhangi bir sabit oktoniyondur.

F nin $[a,b]$ aralığındaki belirli integrali

$$\int_a^b F(s) = \sum_{i=0}^{7} \left(\int_a^b F_i(s) \right) e_i$$

dir [59, 60].

BÖLÜM 4

OKTONİYONİK EĞRİLER İÇİN SERRET-FRENET FORMÜLLERİ

Tezin orijinal olan bu ilk bölümünde $\boldsymbol{O_P}$ uzaysal oktoniyonların uzayında uzaysal oktoniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri verilecektir. Daha sonra, $\boldsymbol{O}$ uzayında oktoniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri araştırılacaktır. Bu bölümde elde edilen sonuçlar, [61] çalışmasında bildiri olarak sunulmuş, [62] çalışmasında da makale olarak gönderilmiştir.

4.1 $\boldsymbol{O_P}$ Uzayında Uzaysal Oktoniyonik Eğriler İçin Serret-Frenet Formülleri

Tanım 4.1 Uzaysal oktoniyonların uzayı $\boldsymbol{O_P} = \left\{ \gamma \in \mathrm{O} \middle| \gamma + \overline{\gamma} = 0 \right\}$ olsun. $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, bir $s \in I$ yay parametresi için

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \boldsymbol{O_P}$

$$s \to \gamma(s) = \sum_{i=1}^{7} \gamma_i(s) e_i, \;\; \gamma_i : I \to \mathbb{R}$$

diferensiyellenebilir eğrisine uzaysal *oktoniyonik eğri* veya 7*-boyutlu Öklid uzayında oktoniyonik eğri* denir.

Tanım 4.2 $\boldsymbol{O_P}$ uzayında $I = [0,1]$ birim aralık olmak üzere bir $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \boldsymbol{O_P}$ uzaysal oktoniyonik eğrisi verilsin. Eğrinin her noktasındaki hız vektörü birim ise yani

$$\|\gamma'(s)\| = \sqrt{\gamma'(s) \times \overline{\gamma'(s)}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{7} \gamma_i'(s) \times \overline{\sum_{i=1}^{7} \gamma_i'(s)}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{7} \gamma_i'^{\,2}(s)} = 1, \;\; \forall s \in I$$

ise bu eğriye birim hızlı uzaysal oktoniyonik eğri denir. Burada $s \in I$ yay parametresidir.

Teorem 4.1 $\boldsymbol{O_P}$ uzayında $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \boldsymbol{O_P}$ birim hızlı uzaysal oktoniyonik eğrisi verilsin. γ eğrisinin birim teğet vektörü $t(s) = \gamma'(s) = \sum_{i=1}^{7} \gamma_i'(s) e_i$ olmak üzere

i) t ile t' ortogonaldir,

ii) $t' \times \bar{t}$ bir uzaysal oktoniyondur.

İspat Birim hızlı γ uzaysal oktoniyonik eğrisi, $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \boldsymbol{O_P}$

$$s \to \gamma(s) = \sum_{i=1}^{7} \gamma_i(s) e_i$$

parametrik denklemiyle verilsin. O halde $\forall s \in I$ için, $t(s) = \sum_{i=1}^{7} \gamma_i'(s) e_i$ olduğundan

$$\|t(s)\|^2 = \langle t(s), t(s) \rangle = \frac{1}{2}\left[t(s) \times \overline{t(s)} + t(s) \times \overline{t(s)} \right] = t(s) \times \overline{t(s)} = \sum_{i=1}^{7} \gamma_i'^2(s) = 1$$

dır. $t(s) \times \overline{t(s)} = 1$ ifadesinin türevi alınırsa, iki uzaysal oktoniyonun oktoniyonik çarpımının türevi tanımına göre,

$$t' \times \bar{t} + t \times (\bar{t})' = 0$$

elde edilir. $t = \sum_{i=1}^{7} \gamma_i' e_i$ bir uzaysal oktoniyon olduğuna göre eşlenik tanımı gereğince $\bar{t} = -\sum_{i=1}^{7} \gamma_i' e_i$ yazılabilir. Bu durumda $(\bar{t})' = -\sum_{i=1}^{7} \gamma_i'' e_i$ dir. Dikkat edilecek olursa $\overline{t'} = -\sum_{i=1}^{7} \gamma_i'' e_i$ olduğundan $\overline{t'} = (\bar{t})'$ elde edilir. Böylece

$$t' \times \bar{t} + t \times \overline{t'} = 0 \tag{4.1}$$

yazılabilir.

i) (4.1) ifadesi $\frac{1}{2}$ ile çarpılırsa,

$$\langle t,t'\rangle=\frac{1}{2}\left[t'\times\bar{t}+t\times\overline{t'}\right]=0$$

elde edilir. Bu ifadeden t nin t' ne ortogonal olduğu görülür.

ii) Oktoniyon eşlenik kuralları göz önüne alınırsa

$$t'\times\bar{t}+t\times\overline{t'}=0$$

ifadesinden

$$t'\times\bar{t}+\bar{\bar{t}}\times\overline{t'}=0$$

yazılabilir. Buradan

$$t'\times\bar{t}+\overline{\left(t'\times\bar{t}\right)}=0$$

bulunur. Böylece $t'\times\bar{t}$ bir uzaysal oktoniyondur.

Tanım 4.3 $I=[0,1]\subset\mathbb{R}$ olmak üzere $\gamma:I\subset\mathbb{R}\to\boldsymbol{O_P}$ birim hızlı uzaysal oktoniyonik eğrisi verilsin.

n_1 ve n_2 uzaysal oktoniyonlarını,

$$t\times n_1=-\langle t,n_1\rangle+t\wedge n_1=n_2$$

ve

$$n_1\times t=-\langle n_1,t\rangle+n_1\wedge t=-n_2$$

olacak şekilde tanımlayalım. Böylece

$$t\times n_1=-n_1\times t=n_2 \tag{4.2}$$

elde edilir. Ayrıca

$$t\times n_2=-\langle t,n_2\rangle+t\wedge n_2=-n_1$$

ve

$n_2 \times t = -\langle n_2, t \rangle + n_2 \wedge t = n_1$

eşitliklerinden

$t \times n_2 = -n_2 \times t = -n_1$

elde edilir. Benzer düşünceyle

$n_1 \times n_2 = -\langle n_1, n_2 \rangle + n_1 \wedge n_2 = t$

ve

$n_2 \times n_1 = -\langle n_2, n_1 \rangle + n_2 \wedge n_1 = -t$

eşitliklerinden

$n_2 \times n_1 = -n_1 \times n_2 = -t$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse, şu tablo verilebilir:

Çizelge 3.2 Uzay Oktoniyonik Eğrisinin Elemanlarının Çarpım Tablosu

$\times$	t	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6
t	-1	n_2	$-n_1$	n_4	$-n_3$	$-n_6$	n_5
n_1	$-n_2$	-1	t	n_5	n_6	$-n_3$	$-n_4$
n_2	n_1	$-t$	-1	n_6	$-n_5$	n_4	$-n_3$
n_3	$-n_4$	$-n_5$	$-n_6$	-1	t	n_1	n_2
n_4	n_3	$-n_6$	n_5	$-t$	-1	$-n_2$	n_1
n_5	n_6	n_3	$-n_4$	$-n_1$	n_2	-1	$-t$
n_6	$-n_5$	n_4	n_3	$-n_2$	$-n_1$	t	-1

Böylece, $\mathbb{R}^7$ de aşağıdaki ifadeler doğrulanır.

$$\langle t, n_1 \rangle = \frac{1}{2}\left[t \times \overline{n_1} + n_1 \times \bar{t} \right] = \frac{1}{2}\left(n_2 + \overline{n_2} \right) = 0$$

$$\langle n_1, n_2 \rangle = \frac{1}{2}\left[n_1 \times \overline{n_2} + n_2 \times \overline{n_1} \right] = \frac{1}{2}\left(\bar{t} + t \right) = 0$$

$$\langle t, n_2 \rangle = \frac{1}{2}\left[t \times \overline{n_2} + n_2 \times \bar{t} \right] = \frac{1}{2}\left(n_1 + \overline{n_1} \right) = 0$$

$$\langle t, n_3 \rangle = \frac{1}{2}\left[t \times \overline{n_3} + n_3 \times \bar{t} \right] = \frac{1}{2}\left(\overline{n_4} + n_4 \right) = 0$$

$$\langle n_3, n_4 \rangle = \frac{1}{2}\left[n_3 \times \overline{n_4} + n_4 \times \overline{n_3} \right] = \frac{1}{2}\left(\bar{t} + t \right) = 0$$

$$\langle t, n_4 \rangle = \frac{1}{2}\left[t \times \overline{n_4} + n_4 \times \bar{t} \right] = \frac{1}{2}\left(n_3 + \overline{n_3} \right) = 0$$

$$\langle t, n_6 \rangle = \frac{1}{2}\left[t \times \overline{n_6} + n_6 \times \bar{t} \right] = \frac{1}{2}\left(\overline{n_5} + n_5 \right) = 0$$

$$\langle n_6, n_5 \rangle = \frac{1}{2}\left[n_6 \times \overline{n_5} + n_5 \times \overline{n_6} \right] = \frac{1}{2}\left(\bar{t} + t \right) = 0$$

$$\langle t, n_5 \rangle = \frac{1}{2}\left[t \times \overline{n_5} + n_5 \times \bar{t} \right] = \frac{1}{2}\left(n_6 + \overline{n_6} \right) = 0$$

$$\langle n_1, n_3 \rangle = \frac{1}{2}\left[n_1 \times \overline{n_3} + n_3 \times \overline{n_1} \right] = \frac{1}{2}\left(\overline{n_5} + n_5 \right) = 0$$

$$\langle n_3, n_5 \rangle = \frac{1}{2}\left[n_3 \times \overline{n_5} + n_5 \times \overline{n_3} \right] = \frac{1}{2}\left(\overline{n_1} + n_1 \right) = 0$$

$$\langle n_1, n_5 \rangle = \frac{1}{2}\left[n_1 \times \overline{n_5} + n_5 \times \overline{n_1} \right] = \frac{1}{2}\left(n_3 + \overline{n_3} \right) = 0$$

$$\langle n_1, n_4 \rangle = \frac{1}{2}\left[n_1 \times \overline{n_4} + n_4 \times \overline{n_1} \right] = \frac{1}{2}\left(\overline{n_6} + n_6 \right) = 0$$

$$\langle n_4, n_6 \rangle = \frac{1}{2}\left[n_4 \times \overline{n_6} + n_6 \times \overline{n_4} \right] = \frac{1}{2}\left(\overline{n_1} + n_1 \right) = 0$$

$$\langle n_1, n_6 \rangle = \frac{1}{2}\left[n_1 \times \overline{n_6} + n_6 \times \overline{n_1} \right] = \frac{1}{2}\left(n_4 + \overline{n_4} \right) = 0$$

$$\langle n_2,n_3\rangle=\frac{1}{2}\left[n_2\times\overline{n_3}+n_3\times\overline{n_2}\right]=\frac{1}{2}\left(\overline{n_6}+n_6\right)=0$$

$$\langle n_3,n_6\rangle=\frac{1}{2}\left[n_3\times\overline{n_6}+n_6\times\overline{n_3}\right]=\frac{1}{2}\left(\overline{n_2}+n_2\right)=0$$

$$\langle n_2,n_6\rangle=\frac{1}{2}\left[n_2\times\overline{n_6}+n_6\times\overline{n_2}\right]=\frac{1}{2}\left(n_3+\overline{n_3}\right)=0$$

$$\langle n_2,n_5\rangle=\frac{1}{2}\left[n_2\times\overline{n_5}+n_5\times\overline{n_2}\right]=\frac{1}{2}\left(\overline{n_4}+n_4\right)=0$$

$$\langle n_5,n_4\rangle=\frac{1}{2}\left[n_5\times\overline{n_4}+n_4\times\overline{n_5}\right]=\frac{1}{2}\left(\overline{n_2}+n_2\right)=0$$

$$\langle n_2,n_4\rangle=\frac{1}{2}\left[n_2\times\overline{n_4}+n_4\times\overline{n_2}\right]=\frac{1}{2}\left(n_5+\overline{n_5}\right)=0\,.$$

Böylece $\gamma(s)$ noktasındaki Frenet 7-ayaklısı

$$\{t(s),n_1(s),n_2(s),n_3(s),n_4(s),n_5(s),n_6(s)\}$$

olur.

Tanım 4.4 $\boldsymbol{O_P}$ uzayında bir $\gamma:I\subset\mathbb{R}\to\boldsymbol{O_P}$ uzaysal oktoniyonik eğrisi verilsin. Bu eğrinin $\gamma(s)$ noktasındaki Frenet 7-ayaklısı $\{V_1(s)=t(s),\ V_i(s)=n_{i-1}(s)\},\ 2\le i\le 7$ olsun. Buna göre

$k_i:I\to\mathbb{R}$

$$k_i(s)=\left\langle V_i'(s),V_{i+1}(s)\right\rangle=\frac{1}{2}\left(V_i'(s)\times\overline{V_{i+1}(s)}+V_{i+1}(s)\times\overline{V_i'(s)}\right)$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna γ uzaysal oktoniyonik eğrisinin i-inci eğrilik fonksiyonu, $k_i(s)$ reel sayısına da γ eğrisinin i-inci eğriliği denir.

Teorem 4.2 Uzaysal oktoniyonların uzayı $\boldsymbol{O_P}=\left\{\gamma\in\mathrm{O}\,\middle|\,\gamma+\overline{\gamma}=0\right\}$ olsun. $I=[0,1]\subset\mathbb{R}$ olmak üzere, bir $s\in I$ yay parametresi için

$$\gamma:I\subset\mathbb{R}\to\boldsymbol{O_P}\ ,\ \ s\to\gamma(s)=\sum_{i=1}^{7}\gamma_i(s)e_i$$

diferensiyellenebilir eğrisi verilsin. $t(s)=\sum_{i=1}^{7}\gamma_i'(s)e_i$ olmak üzere $\forall s\in I$ için $\gamma(s)$ noktasındaki Frenet 7-ayaklısı $\{t(s),n_1(s),n_2(s),n_3(s),n_4(s),n_5(s),n_6(s)\}$, $t(s)$, $n_1(s)$, $n_2(s)$, $n_3(s)$, $n_4(s)$, $n_5(s)$, $n_6(s)\in \boldsymbol{O_P}$ ve eğrilikler de $k_1(s)\neq 0$, $k_2(s)$, $k_3(s)$, $k_4(s)$, $k_5(s)$, $k_6(s)$ olsun. Bu durumda γ eğrisi boyunca

$$t'(s)=k_1(s)n_1(s)$$

$$n_1'(s)=-k_1(s)t(s)+k_2(s)n_2(s)$$

$$n_2'(s)=-k_2(s)n_1(s)+k_3(s)n_3(s)$$

$$n_3'(s)=-k_3(s)n_2(s)+k_4(s)n_4(s)$$

$$n_4'(s)=-k_4(s)n_3(s)+k_5(s)n_5(s)$$

$$n_5'(s)=-k_5(s)n_4(s)+k_6(s)n_6(s)$$

$$n_6'(s)=-k_6(s)n_5(s)$$

bağıntıları sağlanır. Bu bağıntılara uzaysal oktoniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri denir.

İspat

t' bir uzaysal oktoniyon olduğundan, n_1 birim uzaysal oktoniyon ve k_1 de negatif olmayan fonksiyon olmak üzere

$$t'=k_1 n_1 \tag{4.3}$$

biçiminde yazılabilir :

Gerçekten, $a_{11},\ a_{12},\ a_{13}, a_{14},\ a_{15},\ a_{16},\ a_{17}\in\mathbb{R}$ için

$$t'=a_{11}t+a_{12}n_1+a_{13}n_2+a_{14}n_3+a_{15}n_4+a_{16}n_5+a_{17}n_6$$

ifadesi sırasıyla $t,\ldots,n_6$ ile iç çarpılırsa

- $\langle t', t\rangle = a_{11}\langle t, t\rangle + a_{12}\langle n_1, t\rangle + a_{13}\langle n_2, t\rangle + a_{14}\langle n_3, t\rangle + a_{15}\langle n_4, t\rangle + a_{16}\langle n_5, t\rangle + a_{17}\langle n_6, t\rangle$

yazılır. Buradan da

$$\langle t', t\rangle = a_{11}\cdot 1 + a_{12}\cdot 0 + a_{13}\cdot 0 + a_{14}\cdot 0 + a_{15}\cdot 0 + a_{16}\cdot 0 + a_{17}\cdot 0 = a_{11}$$

bulunur. Böylece t ve t' ortogonal olduğundan

$$a_{11} = 0$$

elde edilir.

- $\langle t', n_1\rangle = a_{11}\langle t, n_1\rangle + a_{12}\langle n_1, n_1\rangle + a_{13}\langle n_2, n_1\rangle + a_{14}\langle n_3, n_1\rangle + a_{15}\langle n_4, n_1\rangle + a_{16}\langle n_5, n_1\rangle + a_{17}\langle n_6, n_1\rangle$

biçiminde yazılırsa

$$\langle t', n_1\rangle = a_{11}\cdot 0 + a_{12}\cdot 1 + a_{13}\cdot 0 + a_{14}\cdot 0 + a_{15}\cdot 0 + a_{16}\cdot 0 + a_{17}\cdot 0$$

bulunur. Bu durumda

$$a_{12} = \langle t', n_1\rangle = k_1$$

elde edilir.

- $\langle t', n_2\rangle = a_{11}\langle t, n_2\rangle + a_{12}\langle n_1, n_2\rangle + a_{13}\langle n_2, n_2\rangle + a_{14}\langle n_3, n_2\rangle + a_{15}\langle n_4, n_2\rangle + a_{16}\langle n_5, n_2\rangle + a_{17}\langle n_6, n_2\rangle$

eşitliğinden

$$\langle t', n_2\rangle = a_{11}\cdot 0 + a_{12}\cdot 0 + a_{13}\cdot 1 + a_{14}\cdot 0 + a_{15}\cdot 0 + a_{16}\cdot 0 + a_{17}\cdot 0$$

bulunur. Buradan

$$a_{13} = 0$$

elde edilir.

- Benzer şekilde devam edilirse

$$a_{14} = a_{15} = a_{16} = 0$$

dır.

Son olarak

- $\langle t', n_6 \rangle = a_{11}\langle t, n_6\rangle + a_{12}\langle n_1, n_6\rangle + a_{13}\langle n_2, n_6\rangle + a_{14}\langle n_3, n_6\rangle + a_{15}\langle n_4, n_6\rangle + a_{16}\langle n_5, n_6\rangle + a_{17}\langle n_6, n_6\rangle$

eşitliğinden

$$\langle t', n_6 \rangle = a_{11}\cdot 0 + a_{12}\cdot 0 + a_{13}\cdot 0 + a_{14}\cdot 0 + a_{15}\cdot 0 + a_{16}\cdot 0 + a_{17}\cdot 1$$

bulunur. Buradan

$$a_{17} = 0$$

elde edilir.

Sonuç olarak $\forall s \in I$ için

$$t'(s) = k_1 n_1(s)$$

biçiminde olduğu görülür.

I. $n_1' + k_1 t$ hem t uzaysal oktoniyonuna hem de n_1 uzaysal oktoniyonuna ortogonaldir. Gerçekten,

$$\langle t, n_1 \rangle = \frac{1}{2}\left[t \times \overline{n_1} + n_1 \times \overline{t}\right] = 0$$

ifadesinin her iki yanının türevi alınırsa, iki pure oktoniyonik fonksiyonun çarpımının türevi tanımından,

$$\frac{1}{2}\left[t' \times \overline{n_1} + t \times \overline{n_1'} + n_1' \times \overline{t} + n_1 \times \overline{t'}\right] = 0$$

veya

$$\frac{1}{2}\left[t' \times \overline{n_1} + n_1 \times \overline{t'}\right] + \frac{1}{2}\left[t \times \overline{n_1'} + n_1' \times \overline{t}\right] = 0$$

bulunur. Buradan da

$\langle t', n_1 \rangle + \langle n_1', t \rangle = 0$ olmak üzere $\langle n_1', t \rangle = -k_1$

elde edilir.

Ayrıca

$\langle n_1, n_1 \rangle = \frac{1}{2}\left[n_1 \times \overline{n_1} + n_1 \times \overline{n_1} \right] = n_1 \times \overline{n_1} = 1$ olduğundan bu ifadenin her iki yanının türevi alınır ise,

$n_1' \times \overline{n_1} + n_1 \times \overline{n_1'} = 0$ olmak üzere $\frac{1}{2}\left[n_1' \times \overline{n_1} + n_1 \times \overline{n_1'} \right] = \left\langle n_1, n_1' \right\rangle = 0$

dir. Bu bulunan ifadeler kullanılırsa,

$$\left\langle n_1' + k_1 t, t \right\rangle = \left\langle n_1', t \right\rangle + k_1 \langle t, t \rangle = -k_1 + k_1 \cdot 1 = 0$$

ve

$$\left\langle n_1' + k_1 t, n_1 \right\rangle = \left\langle n_1', n_1 \right\rangle + k_1 \langle t, n_1 \rangle = 0 + k_1 \cdot 0 = 0$$

olur. Bu durumda, $n_1' + k_1 t \,//\, t \times n_1$ olup

$$n_1' + k_1 t = \lambda\left(t \times n_1\right)$$

yazılabilir. Bu durumda $t \times n_1 = n_2$ olduğundan

$$\left\langle n_1' + k_1 t, n_2 \right\rangle = \langle \lambda n_2, n_2 \rangle$$

veya

$$\left\langle n_1', n_2 \right\rangle + k_1 \langle t, n_2 \rangle = \lambda \langle n_2, n_2 \rangle$$

yazılabilir. Eğrilik tanımı göz önüne alınırsa

$$\left\langle n_1', n_2 \right\rangle = \lambda = k_2$$

elde edilir. Böylece $n_1' + k_1 t = k_2 n_2$ olup

$$n_1' = -k_1\, t + k_2\, n_2 \tag{4.4}$$

bulunur.

***II*.** $n_2' + k_2 n_1$ hem n_1 uzaysal oktoniyonuna hem de $-n_5$ uzaysal oktoniyonuna ortogonaldir. Gerçekten,

$$\langle n_2, n_1 \rangle = \frac{1}{2}\left[n_2 \times \overline{n_1} + n_1 \times \overline{n_2} \right] = 0$$

ifadesinin her iki yanının türevi alınırsa, iki pure oktoniyonik fonksiyonun çarpımının türevi tanımından,

$$\frac{1}{2}\left[n_2{}' \times \overline{n_1} + n_2 \times \overline{n_1{}'} + n_1{}' \times \overline{n_2} + n_1 \times \overline{n_2{}'} \right] = 0$$

ve

$$\frac{1}{2}\left[n_2{}' \times \overline{n_1} + n_1 \times \overline{n_2{}'} \right] + \frac{1}{2}\left[n_2 \times \overline{n_1{}'} + n_1{}' \times \overline{n_2} \right] = 0$$

bulunur. O halde

$\left\langle n_2{}', n_1 \right\rangle + \left\langle n_2, n_1{}' \right\rangle = 0$ olmak üzere $\left\langle n_2{}', n_1 \right\rangle = -k_2$

elde edilir. Ayrıca

$$\left\langle n_2{}' + k_2 n_1, n_1 \right\rangle = \left\langle n_2{}', n_1 \right\rangle + k_2 \langle n_1, n_1 \rangle = -k_2 + k_2 \cdot 1 = 0$$

ve

$$\left\langle n_2{}' + k_2 n_1, -n_5 \right\rangle = \left\langle n_2{}', -n_5 \right\rangle + k_2 \langle n_1, -n_5 \rangle = 0 + k_2.0$$

bulunur. Bu durumda, $n_2{}' + k_2 n_1 // n_1 \times (-n_5)$ olup

$$n_2{}' + k_2 n_1 = \mu\left[n_1 \times (-n_5) \right]$$

yazılabilir. Bu durumda $n_1 \times (-n_5) = n_3$ olduğundan

$$\left\langle n_2{}' + k_2 n_1, n_3 \right\rangle = \langle \mu n_3, n_3 \rangle$$

$$\left\langle n_2{}', n_3 \right\rangle + k_2 \langle n_1, n_3 \rangle = \mu \langle n_3, n_3 \rangle$$

olur. Eğrilik tanımı göz önüne alınırsa

$$\left\langle n_2{}', n_3 \right\rangle = \mu = k_3$$

elde edilir. Böylece $n_2' + k_2 n_1 = k_3 n_3$ olup

$$n_2' = -k_2\, n_1 + k_3\, n_3 \tag{4.5}$$

bulunur.

III. $n_3' + k_3 n_2$ hem n_2 uzaysal oktoniyonuna hem de n_5 uzaysal oktoniyonuna ortogonaldir. Gerçekten,

$$\langle n_3, n_2 \rangle = \frac{1}{2}\left[n_3 \times \overline{n_2} + n_2 \times \overline{n_3} \right] = 0$$

ifadesinin her iki yanının türevi alınırsa, iki pure oktoniyonik fonksiyonun çarpımının türevi tanımından,

$$\frac{1}{2}\left[n_3' \times \overline{n_2} + n_3 \times \overline{n_2'} + n_2' \times \overline{n_3} + n_2 \times \overline{n_3'} \right] = 0$$

ve

$$\frac{1}{2}\left[n_3' \times \overline{n_2} + n_2 \times \overline{n_3'} \right] + \frac{1}{2}\left[n_3 \times \overline{n_2'} + n_2' \times \overline{n_3} \right] = 0$$

bulunur. O halde

$\left\langle n_3', n_2 \right\rangle + \left\langle n_2', n_3 \right\rangle = 0$ olmak üzere $\left\langle n_3', n_2 \right\rangle = -k_3$

elde edilir. Ayrıca

$$\left\langle n_3' + k_3 n_2, n_2 \right\rangle = \left\langle n_3', n_2 \right\rangle + k_3 \langle n_2, n_2 \rangle = -k_3 + k_3 \cdot 1 = 0$$

ve

$$\left\langle n_3' + k_3 n_2, n_5 \right\rangle = \left\langle n_3', n_5 \right\rangle + k_3 \langle n_2, n_5 \rangle = 0 + k_3 \cdot 0 = 0$$

olur. Bu durumda, $n_3' + k_3 n_2 \,//\, n_2 \times n_5$ olup

$$n_3' + k_3 n_2 = \rho\left(n_2 \times n_5 \right)$$

yazılabilir. Bu durumda $n_2 \times n_5 = n_4$ olduğundan

$$\left\langle n_3' + k_3 n_2, n_4 \right\rangle = \left\langle \rho n_4, n_4 \right\rangle$$

$$\left\langle n_3', n_4 \right\rangle + k_3 \left\langle n_2, n_4 \right\rangle = \rho \left\langle n_4, n_4 \right\rangle$$

olur. Eğrilik tanımı göz önüne alınırsa

$$\left\langle n_3', n_4 \right\rangle = \rho = k_4$$

elde edilir. Böylece $n_3' + k_3 n_2 = k_4 n_4$ olup

$$n_3' = -k_3\, n_2 + k_4\, n_4 \tag{4.6}$$

bulunur.

IV. $n_4' + k_4 n_3$ hem n_3 uzaysal oktoniyonuna hem de $-n_1$ uzaysal oktoniyonuna ortogonaldir. Gerçekten,

$$\left\langle n_4, n_3 \right\rangle = \frac{1}{2}\left[n_4 \times \overline{n_3} + n_3 \times \overline{n_4} \right] = 0$$

ifadesinin her iki yanının türevi alınırsa,

$$\frac{1}{2}\left[n_4' \times \overline{n_3} + n_4 \times \overline{n_3'} + n_3' \times \overline{n_4} + n_3 \times \overline{n_4'} \right] = 0$$

ve

$$\frac{1}{2}\left[n_4' \times \overline{n_3} + n_3 \times \overline{n_4'} \right] + \frac{1}{2}\left[n_4 \times \overline{n_3'} + n_3' \times \overline{n_4} \right] = 0$$

buradan da

$\left\langle n_4', n_3 \right\rangle + \left\langle n_3', n_4 \right\rangle = 0$ olmak üzere $\left\langle n_4', n_3 \right\rangle = -k_4$

elde edilir. Ayrıca

$$\left\langle n_4' + k_4 n_3, -n_1 \right\rangle = \left\langle n_4', -n_1 \right\rangle + k_4 \left\langle n_3, -n_1 \right\rangle = 0 + k_4 \cdot 0 = 0$$

ve

$$\left\langle n_4' + k_4 n_3, n_3 \right\rangle = \left\langle n_4', n_3 \right\rangle + k_4 \left\langle n_3, n_3 \right\rangle = -k_4 + k_4 \cdot 1 = 0$$

bulunur. Bu durumda, $n_4' + k_4 n_3 \,//\left[n_3 \times (-n_1) \right]$ olup

$$n_4' + k_4 n_3 = \eta \left[n_3 \times (-n_1) \right]$$

yazılabilir. Bu durumda $n_3 \times (-n_1) = n_5$ olduğundan

$$\left\langle n_4' + k_4 n_3, n_5 \right\rangle = \left\langle \eta n_5, n_5 \right\rangle$$

$$\left\langle n_4', n_5 \right\rangle + k_4 \left\langle n_3, n_5 \right\rangle = \eta \left\langle n_5, n_5 \right\rangle$$

olur. Eğrilik tanımı göz önüne alınırsa

$$\left\langle n_4', n_5 \right\rangle = \eta = k_5$$

elde edilir. Böylece $n_4' + k_4 n_3 = k_5 n_5$ olup

$$n_4' = -k_4\, n_3 + k_5\, n_5 \tag{4.7}$$

bulunur.

V. $n_5' + k_5 n_4$ hem n_4 uzaysal oktoniyonuna hem de $-n_1$ uzaysal oktoniyonuna ortogonaldir. Gerçekten,

$$\left\langle n_5, n_4 \right\rangle = \frac{1}{2}\left[n_5 \times \overline{n_4} + n_4 \times \overline{n_5} \right] = 0$$

ifadesinin her iki yanının türevi alınırsa,

$$\frac{1}{2}\left[n_5' \times \overline{n_4} + n_5 \times \overline{n_4'} + n_4' \times \overline{n_5} + n_4 \times \overline{n_5'} \right] = 0$$

ve

$$\frac{1}{2}\left[n_5' \times \overline{n_4} + n_4 \times \overline{n_5'} \right] + \frac{1}{2}\left[n_5 \times \overline{n_4'} + n_4' \times \overline{n_5} \right] = 0$$

buradan da

$$\left\langle n_5', n_4 \right\rangle + \left\langle n_4', n_5 \right\rangle = 0$$ olmak üzere $$\left\langle n_5', n_4 \right\rangle = -k_5$$

elde edilir. Ayrıca

$$\left\langle n_5' + k_5 n_4, -n_1 \right\rangle = \left\langle n_5', -n_1 \right\rangle + k_5 \left\langle n_4, -n_1 \right\rangle = 0 + k_5 \cdot 0 = 0$$

ve

$$\left\langle n_5' + k_5 n_4, n_4 \right\rangle = \left\langle n_5', n_4 \right\rangle + k_5 \left\langle n_4, n_4 \right\rangle = -k_5 + k_5 \cdot 1 = 0$$

bulunur. Bu durumda, $n_5' + k_5 n_4 // \left[n_4 \times (-n_1) \right]$ olup

$$n_5' + k_5 n_4 = \omega \left[n_4 \times (-n_1) \right]$$

yazılabilir. Bu durumda $n_4 \times (-n_1) = n_6$ olduğundan

$$\left\langle n_5' + k_5 n_4, n_6 \right\rangle = \left\langle \omega n_6, n_6 \right\rangle$$

$$\left\langle n_5', n_6 \right\rangle + k_5 \left\langle n_4, n_6 \right\rangle = \omega \left\langle n_6, n_6 \right\rangle$$

olur. Eğrilik tanımı göz önüne alınırsa

$$\left\langle n_5', n_6 \right\rangle = \omega = k_6$$

elde edilir. Böylece $n_5' + k_5 n_4 = k_6 n_6$ olup

$$n_5' = -k_5 n_4 + k_6 n_6 \tag{4.8}$$

bulunur.

Uzaysal oktoniyonların özellikleri kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

$k_6 = \left\langle n_5', n_6 \right\rangle$ idi. Ayrıca $n_5 = n_1 \times n_3 = -\left\langle n_1, n_3 \right\rangle + n_1 \wedge n_3 = n_1 \wedge n_3$ ifadesinin türevi alınır ise,

$n_5' = n_1' \wedge n_3 + n_1 \wedge n_3'$ elde edilir. Diğer taraftan,

$$k_6 = \left\langle n_1' \wedge n_3 + n_1 \wedge n_3', n_6 \right\rangle$$

$$= \left\langle n_1' \wedge n_3, n_6 \right\rangle + \left\langle n_1 \wedge n_3', n_6 \right\rangle$$

$$= \left\langle n_1' \wedge n_3, n_2 \wedge n_3 \right\rangle + \left\langle n_1 \wedge n_3', n_2 \wedge n_3 \right\rangle$$

$$= \left\langle n_3 \wedge (n_2 \wedge n_3), n_1' \right\rangle + \left\langle n_3' \wedge (n_2 \wedge n_3), n_1 \right\rangle$$

$$= \left\langle n_3 \wedge (-n_3 \wedge n_2), n_1' \right\rangle + \left\langle n_3' \wedge n_6, n_1 \right\rangle$$

$$= -\left\langle n_3 \wedge (n_3 \wedge n_2), n_1' \right\rangle + \left\langle n_3' \wedge n_6, n_1 \right\rangle$$

$$= -\left\langle \langle n_3, n_2 \rangle n_3 - \langle n_3, n_3 \rangle n_2, n_1' \right\rangle + \left\langle n_3' \wedge n_6, n_1 \right\rangle$$

$$= \left\langle n_2, n_1' \right\rangle + \left\langle n_3' \wedge n_6, n_1 \right\rangle$$

$$= k_2 + \left\langle n_3' \wedge n_6, n_1 \right\rangle$$

bulunur. Ayrıca

$$\left\langle n_3' \wedge n_6, n_1 \right\rangle = \left\langle (-k_3 n_2 + k_4 n_4) \wedge n_6, n_1 \right\rangle$$

$$= -k_3 \left\langle n_2 \wedge n_6, n_1 \right\rangle + k_4 \left\langle n_4 \wedge n_6, n_1 \right\rangle$$

$$= -k_3 \left\langle (-n_3), n_1 \right\rangle + k_4 \left\langle n_1, n_1 \right\rangle$$

$$= k_4$$

elde edilir. Böylece

$$k_6 = k_2 + k_4$$

bulunur.

$n_6 = n_2 \times n_3$ ifadesinin her iki yanının türevi alınır ise,

$$n_6' = n_2' \times n_3 + n_2 \times n_3'$$

$$=\left(-k_2\, n_1 + k_3\, n_3\right)\times n_3 + n_2 \times n_3{}'$$

$$=-k_2\left(n_1\times n_3\right)+k_3\left(n_3\times n_3\right)+n_2\times n_3{}'$$

$$=-k_2 n_5 - k_3 + n_2 \times\left(-k_3\, n_2 + k_4\, n_4\right)$$

$$=-k_2 n_5 - k_3 - k_3\left(n_2\times n_2\right)+k_4\left(\, n_2\times n_4\right)$$

$$=-k_2 n_5 - k_3 + k_3 - k_4 n_5$$

$$=-\left(k_2 + k_4\right)n_5$$

olup

$$n_6{}' = -k_6 n_5 \tag{4.9}$$

bulunur.

Sonuç 4.1 $\boldsymbol{O_P}$ uzaysal oktoniyon uzayında γ uzaysal oktoniyon eğrisinin $t, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5$ ve n_6 vektörlerinin oktoniyonik eğri boyunca türevleri ile ilgili eşitlikler matris formunda

$$\begin{bmatrix} t \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ n_5 \\ n_6 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 & k_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 & 0 & k_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_5 & 0 & k_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ n_5 \\ n_6 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Buradaki amacımız, $\boldsymbol{O_P}$ uzaysal oktoniyonik uzayındaki γ uzaysal oktoniyonik eğrisinin bulunan bu Serret-Frenet formüllerini kullanarak ***O*** oktoniyonik uzayındaki oktoniyonik eğrinin Serret-Frenet formüllerini bulmaktır.

Sonuç 4.2 $\boldsymbol{O_P}$ uzaysal oktoniyonik uzayındaki γ uzaysal oktoniyonik eğrisinin birinci eğriliği olan $k_1(s)$ için $k_1(s)=\left\|t'(s)\right\|$ bağıntısı geçerlidir.

İspat $t(s)=\gamma'(s)$ olduğundan $t'(s)=\gamma''(s)$ ve $n_1(s)=\dfrac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}$ yazılabilir. $\gamma''(s)=n_1(s)\|\gamma''(s)\|$ eşitliğinden $t'(s)=\|t'(s)\|n_1(s)$ bulunur. Bu ifade $n_1(s)$ ile iç çarpılırsa

$$\langle t'(s),n_1(s)\rangle=\|t'(s)\|\langle n_1(s),n_1(s)\rangle=\|t'(s)\|$$

elde edilir. Böylece

$$\langle k_1(s)n_1(s),n_1(s)\rangle=\|t'(s)\|$$

ifadesinden

$$k_1(s)=\|t'(s)\|$$

bulunur.

Not 4.1 t ve t' nin ortogonal olmasından

$$\langle t,t'\rangle=\frac{1}{2}\left[t'\times\bar{t}+t\times\overline{t'}\right]=0$$

yazılabilir. Bu ifadede (4.3) eşitliği kullanılırsa

$$\langle t',t\rangle=\langle k_1n_1,t\rangle=k_1\langle n_1,t\rangle$$

elde edilir. Böylece

$$\langle n_1,t\rangle=\frac{1}{k_1}\langle t',t\rangle=0$$

bulunur. Bu durumda t ve n_1 nin ortogonal olduğu bir kez daha gösterilebilir.

(4.1) dekleminde (4.2) ve (4.3) denklemleri yerlerine yazılırsa

$$t'\times\bar{t}+\overline{\left(t'\times\bar{t}\right)}=0\Rightarrow k_1n_1\times\bar{t}+\overline{\left(k_1n_1\times\bar{t}\right)}=k_1\left(n_1\times\bar{t}\right)+k_1\overline{\left(n_1\times\bar{t}\right)}$$

bulunur. Böylece

$$t\times\overline{n_1}=-\left\langle t,\overline{n_1}\right\rangle+t\wedge\overline{n_1}$$

$$=-\langle t,-n_1\rangle + t\wedge(-n_1)$$

$$=\langle t,n_1\rangle + t\wedge(-n_1)$$

$$=-t\wedge n_1$$
$$=-n_2$$
$$=\overline{n_2}$$

ve

$$n_1\times\bar{t} = -\langle n_1,\bar{t}\rangle + n_1\wedge\bar{t}$$

$$=-\langle n_1,-t\rangle + n_1\wedge(-t)$$

$$=\langle n_1,t\rangle - n_1\wedge t$$

$$=-n_1\wedge t$$
$$=-(-n_2)$$
$$=n_2$$

olduğu kullanılırsa

$k_1\left(n_1\times\bar{t} + t\times\overline{n_1}\right) = k_1\left(n_2+\overline{n_2}\right)=0$ için $n_2+\overline{n_2}=0$

elde edilir. Bu durumda n_2 nin birim uzaysal oktoniyon olduğu bir kez daha gösterilebilir.

4.2 ***O*** Uzayında Oktoniyonik Eğriler İçin Serret-Frenet Formülleri

Tanım 4.5 $I\subset\mathbb{R}$ olmak üzere, bir $s\in I$ yay parametresi için

$\beta : I\subset\mathbb{R}\to\boldsymbol{O}$

$$s\to\beta(s)=\sum_{i=0}^{7}\gamma_i(s)e_i,\ e_0=+1,\ \gamma_i : I\to\mathbb{R}$$

biçiminde verilen diferensiyellenebilir eğriye *oktoniyonik eğri* veya ***O*** *oktoniyon uzayında oktoniyonik eğri* denir.

Tanım 4.6 ***O*** oktoniyon uzayında $\beta : I \subset \mathbb{R} \to$ ***O*** oktoniyonik eğrisi verilsin. Eğrinin her noktasındaki hız vektörü birim ise yani

$$\|\beta'(s)\| = \sqrt{\beta'(s) \times \overline{\beta'(s)}} = \sqrt{\sum_{i=0}^{7} \gamma_i'(s) \times \overline{\sum_{i=0}^{7} \gamma_i'(s)}} = \sqrt{\sum_{i=0}^{7} \gamma_i'^{\,2}(s)} = 1, \ \forall s \in I$$

ise bu eğriye birim hızlı oktoniyonik eğri denir. Burada $s \in I$ yay parametresidir.

Teorem 4.3 ***O*** oktoniyon uzayında $\beta : I \subset \mathbb{R} \to$ ***O*** birim hızlı oktoniyonik eğrisi verilsin. β eğrisinin birim teğet vektörü $T(s) = \beta'(s) = \sum_{i=0}^{7} \gamma_i'(s) e_i$ ve $N_1(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|}$ olmak üzere

i) T ile T' ortogonaldir,

ii) $N_1 \times \overline{T}$ bir uzaysal oktoniyondur.

İspat $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, bir $s \in I$ yay parametresi için

$\beta : I \subset \mathbb{R} \to$ ***O***

$$s \to \beta(s) = \sum_{i=0}^{7} \gamma_i(s) e_i, \ e_0 = +1$$

biçiminde bir diferensiyellenebilir eğri olmak üzere $\forall s \in I$ için $T(s) = \sum_{i=0}^{7} \gamma_i'(s) e_i$ olduğundan $\|T(s)\| = 1$ dir.

$$\|T(s)\|^2 = \langle T(s), T(s) \rangle = \frac{1}{2}\left[T(s) \times \overline{T(s)} + T(s) \times \overline{T(s)}\right] = T(s) \times \overline{T(s)} = 1$$

elde edilir. Bu ifadenin türevi alınırsa,

$$T' \times \overline{T} + T \times \left(\overline{T}\right)' = 0$$

elde edilir. $T=\sum_{i=0}^{7}\gamma_i' e_i$ olduğuna göre $\overline{T}=\gamma_0'-\sum_{i=1}^{7}\gamma_i' e_i$ olacaktır. Bu durumda $\left(\overline{T}\right)'=\gamma_0''-\sum_{i=1}^{7}\gamma_i'' e_i$ dir. Dikkat edilecek olursa $\overline{T'}=\gamma_0''-\sum_{i=1}^{7}\gamma_i'' e_i$ olur, yani $\overline{T'}=\left(\overline{T}\right)'$ dir. Böylece

$$T'\times\overline{T}+T\times\overline{T'}=0$$

yazılır.

i) Bu son eşitliğin her iki yanı $\frac{1}{2}$ ile çarpılırsa,

$$\langle T,T'\rangle=\frac{1}{2}\left[T'\times\overline{T}+T\times\overline{T'}\right]=0$$

bulunur. Bu ifadeden T nin T' ne ortogonal olduğu görülür.

ii) Oktoniyon eşlenik kuralları dikkate alınırsa,

$$N_1\times\overline{T}+\overline{N_1\times\overline{T}}=0$$

olur ki bu da $N_1\times\overline{T}$ nin uzaysal oktoniyon olduğunu göstermektedir.

Not 4.2 $\beta:I\subset\mathbb{R}\to\boldsymbol{O}$ birim hızlı oktoniyonik eğrisi verilsin. Burada β oktoniyonik eğrisini öyle seçelim ki uzaysal oktoniyonik eğrinin birim teğet vektörü olan $t(s)$,

$$t=N_1\times\overline{T} \tag{4.10}$$

bağıntısı ile verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} t\times T&=\left(N_1\times\overline{T}\right)\times T\\ &=\left(N_1\times T^{-1}\right)\times T\\ &=N_1 \end{aligned}$$

$$t\times T=N_1 \tag{4.11}$$

elde edilir.

T ve N_1 birim oktoniyonlar olduklarından,

$$\|t(s)\|^2 = t\times\bar{t} = \left(N_1\times\overline{T}\right)\times\overline{\left(N_1\times\overline{T}\right)}$$

$$= N_1\times\left(\left(\overline{T}\times T\right)\times\overline{N_1}\right)$$

$$= N_1\times\overline{N_1}$$

$$=1$$

bulunur.

Tanım 4.7 $\beta: I\subset\mathbb{R}\to \boldsymbol{O}$ birim hızlı oktoniyonik eğrisi verilsin.

1) $N_2 = n_1\times T$ olmak üzere

i) $\|N_2\|=1$ dir :

$$\langle N_2, N_2\rangle = N_2\times\overline{N_2}$$

$$=(n_1\times T)\times\overline{(n_1\times T)}$$

$$=(n_1\times T)\times\left(\overline{T}\times\overline{n_1}\right)$$

$$=n_1\times\left(\left(T\times\overline{T}\right)\times\overline{n_1}\right)$$

$$=n_1\times\overline{n_1}$$

$$=1$$

ii) T, N_1 ve N_2 nin ortogonal oldukları aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\langle T, N_1\rangle = \frac{1}{2}\left[\left(T\times\overline{N_1}\right)+\left(N_1\times\overline{T}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[T\times\left(\overline{t\times T}\right)+(t\times T)\times\overline{T}\right]$$

olduğundan

$$\langle T, N_1\rangle = \frac{1}{2}\left[T\times\left(\overline{T}\times\bar{t}\right)+(t\times T)\times\overline{T}\right] = \frac{1}{2}\left(\bar{t}+t\right)=0$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\langle T, N_2\rangle = \frac{1}{2}\left(T\times\overline{N_2}+N_2\times\overline{T}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(T\times\left(\overline{n_1\times T}\right)+(n_1\times T)\times\overline{T}\right)\right]$$

olduğundan

$$\langle T, N_2\rangle = \frac{1}{2}\left[T\times\left(\overline{T}\times\overline{n_1}\right)+\left(n_1\times T\right)\times\overline{T}\right] = \frac{1}{2}\left(\overline{n_1}+n_1\right)=0$$

elde edilir.

$$\langle N_1, N_2\rangle = \frac{1}{2}\left[\left(N_1\times\overline{N_2}\right)+\left(N_2\times\overline{N_1}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\left(t\times T\right)\times\left(\overline{n_1\times T}\right)+\left(n_1\times T\right)\times\left(\overline{t\times T}\right)\right]$$

olduğundan

$$\langle N_1, N_2\rangle = \frac{1}{2}\left[t\times\left(\left(T\times\overline{T}\right)\times\overline{n_1}\right)+n_1\times\left(\left(T\times\overline{T}\right)\times\overline{t}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(t\times\overline{n_1}+n_1\times\overline{t}\right)=\langle t, n_1\rangle = 0$$

elde edilir.

2) $N_3 = n_2\times T$ olmak üzere

i) $\|N_3\|=1$ dir :

$$\begin{aligned}\langle N_3, N_3\rangle &= N_3\times\overline{N_3}\\ &= \left(n_2\times T\right)\times\overline{\left(n_2\times T\right)}\\ &= \left(n_2\times T\right)\times\left(\overline{T}\times\overline{n_2}\right)\\ &= n_2\times\left(\left(T\times\overline{T}\right)\times\overline{n_2}\right)\\ &= n_2\times\overline{n_2}\\ &= 1\end{aligned}$$

ii) T, N_1, N_2 ve N_3 ün ortogonal oldukları aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$\langle T, N_1\rangle = \langle T, N_2\rangle = \langle N_1, N_2\rangle = 0$ idi.

$$\langle T, N_3\rangle = \frac{1}{2}\left[\left(T\times\overline{N_3}\right)+\left(N_3\times\overline{T}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[T\times\left(\overline{n_2\times T}\right)+\left(n_2\times T\right)\times\overline{T}\right]$$

olduğundan

$$\langle T, N_3\rangle = \frac{1}{2}\left[T\times\left(\overline{T}\times\overline{n_2}\right)+\left(n_2\times T\right)\times\overline{T}\right] = \frac{1}{2}\left(\overline{n_2}+n_2\right)=0$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\langle N_1, N_3\rangle = \frac{1}{2}\left[\left(N_1 \times \overline{N_3}\right) + \left(N_3 \times \overline{N_1}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[(t \times T) \times \left(\overline{n_2 \times T}\right) + (n_2 \times T) \times \left(\overline{t \times T}\right)\right]$$

olduğundan

$$\langle N_1, N_3\rangle = \frac{1}{2}\left[t \times \left(\left(T \times \overline{T}\right) \times \overline{n_2}\right) + n_2 \times \left(\left(T \times \overline{T}\right) \times \overline{t}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(t \times \overline{n_2} + n_2 \times \overline{t}\right) = \langle t, n_2\rangle = 0$$

elde edilir.

$$\langle N_2, N_3\rangle = \frac{1}{2}\left[\left(N_2 \times \overline{N_3}\right) + \left(N_3 \times \overline{N_2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[(n_1 \times T) \times \left(\overline{n_2 \times T}\right) + (n_2 \times T) \times \left(\overline{n_1 \times T}\right)\right]$$

olduğundan

$$\langle N_2, N_3\rangle = \frac{1}{2}\left[n_1 \times \left(\left(T \times \overline{T}\right) \times \overline{n_2}\right) + n_2 \times \left(\left(T \times \overline{T}\right) \times \overline{n_1}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(n_1 \times \overline{n_2} + n_2 \times \overline{n_1}\right) = \langle n_1, n_2\rangle = 0$$

elde edilir.

3) $N_4 = n_3 \times T$ olmak üzere

i) $\|N_4\| = 1$ dir :

$$\begin{aligned}
\langle N_4, N_4\rangle &= N_4 \times \overline{N_4} \\
&= (n_3 \times T) \times \overline{(n_3 \times T)} \\
&= (n_3 \times T) \times \left(\overline{T} \times \overline{n_3}\right) \\
&= n_3 \times \left(\left(T \times \overline{T}\right) \times \overline{n_3}\right) \\
&= n_3 \times \overline{n_3} \\
&= 1
\end{aligned}$$

ii) T, N_1, N_2, N_3 ve N_4 ün ortogonal oldukları aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$\langle T, N_1\rangle = \langle T, N_2\rangle = \langle T, N_3\rangle = \langle N_1, N_2\rangle = \langle N_1, N_3\rangle = \langle N_2, N_3\rangle = 0$ idi.

$$\langle T, N_4\rangle = \frac{1}{2}\left[\left(T \times \overline{N_4}\right) + \left(N_4 \times \overline{T}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[T \times \left(\overline{n_3 \times T}\right) + (n_3 \times T) \times \overline{T}\right]$$

olduğundan

$$\langle T, N_4\rangle = \frac{1}{2}\left[T\times\left(\overline{T}\times\overline{n_3}\right)+\left(n_3\times T\right)\times\overline{T}\right] = \frac{1}{2}\left(\overline{n_3}+n_3\right)=0$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\langle N_1, N_4\rangle = \frac{1}{2}\left[\left(N_1\times\overline{N_4}\right)+\left(N_4\times\overline{N_1}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\left(t\times T\right)\times\left(\overline{n_3\times T}\right)+\left(n_3\times T\right)\times\left(\overline{t\times T}\right)\right]$$

olduğundan

$$\langle N_1, N_4\rangle = \frac{1}{2}\left[t\times\left(\left(T\times\overline{T}\right)\times\overline{n_3}\right)+n_3\times\left(\left(T\times\overline{T}\right)\times\bar{t}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(t\times\overline{n_3}+n_3\times\bar{t}\right)=\langle t, n_3\rangle = 0$$

elde edilir.

$$\langle N_2, N_4\rangle = \frac{1}{2}\left[\left(N_2\times\overline{N_4}\right)+\left(N_4\times\overline{N_2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\left(n_1\times T\right)\times\left(\overline{n_3\times T}\right)+\left(n_3\times T\right)\times\left(\overline{n_1\times T}\right)\right]$$

olduğundan

$$\langle N_2, N_4\rangle = \frac{1}{2}\left[n_1\times\left(\left(T\times\overline{T}\right)\times\overline{n_3}\right)+n_3\times\left(\left(T\times\overline{T}\right)\times\overline{n_1}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(n_1\times\overline{n_3}+n_3\times\overline{n_1}\right)=\langle n_1, n_3\rangle = 0$$

elde edilir.

$$\langle N_3, N_4\rangle = \frac{1}{2}\left[\left(N_3\times\overline{N_4}\right)+\left(N_4\times\overline{N_3}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\left(n_2\times T\right)\times\left(\overline{n_3\times T}\right)+\left(n_3\times T\right)\times\left(\overline{n_2\times T}\right)\right]$$

olduğundan

$$\langle N_3, N_4\rangle = \frac{1}{2}\left[n_2\times\left(\left(T\times\overline{T}\right)\times\overline{n_3}\right)+n_3\times\left(\left(T\times\overline{T}\right)\times\overline{n_2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(n_2\times\overline{n_3}+n_3\times\overline{n_2}\right)=\langle n_2, n_3\rangle = 0$$

elde edilir.

4) $N_5 = n_4\times T$ olmak üzere

i) $\|N_5\|=1$ dir :

$$\langle N_5, N_5\rangle = N_5\times\overline{N_5}$$

$$= \left(n_4\times T\right)\times\overline{\left(n_4\times T\right)}$$

$$=(n_4\times T)\times(\overline{T}\times\overline{n_4})$$

$$=n_4\times\left((T\times\overline{T})\times\overline{n_4}\right)$$

$$=n_4\times\overline{n_4}$$

$$=1$$

ii) T,N_1,N_2,N_3,N_4 ve N_5 in ortogonal oldukları aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\langle T,N_1\rangle=\langle T,N_2\rangle=\langle T,N_3\rangle=\langle T,N_4\rangle=\langle N_1,N_2\rangle$$
$$\langle N_1,N_3\rangle=\langle N_2,N_3\rangle=\langle N_1,N_4\rangle=\langle N_2,N_4\rangle=\langle N_3,N_4\rangle=0$$

idi.

$$\langle T,N_5\rangle=\frac{1}{2}\left[(T\times\overline{N_5})+(N_5\times\overline{T})\right]=\frac{1}{2}\left[T\times(\overline{n_4\times T})+(n_4\times T)\times\overline{T}\right]$$

olduğundan

$$\langle T,N_5\rangle=\frac{1}{2}\left[T\times(\overline{T}\times\overline{n_4})+(n_4\times T)\times\overline{T}\right]=\frac{1}{2}(\overline{n_4}+n_4)=0$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\langle N_1,N_5\rangle=\frac{1}{2}\left[(N_1\times\overline{N_5})+(N_5\times\overline{N_1})\right]=\frac{1}{2}\left[(t\times T)\times(\overline{n_4\times T})+(n_4\times T)\times(\overline{t\times T})\right]$$

olduğundan

$$\langle N_1,N_5\rangle=\frac{1}{2}\left[t\times\left((T\times\overline{T})\times\overline{n_4}\right)+n_4\times\left((T\times\overline{T})\times\overline{t}\right)\right]=\frac{1}{2}(t\times\overline{n_4}+n_4\times\overline{t})=\langle t,n_4\rangle=0$$

elde edilir.

$$\langle N_2,N_5\rangle=\frac{1}{2}\left[(N_2\times\overline{N_5})+(N_5\times\overline{N_2})\right]=\frac{1}{2}\left[(n_1\times T)\times(\overline{n_4\times T})+(n_4\times T)\times(\overline{n_1\times T})\right]$$

olduğundan

$$\langle N_2,N_5\rangle=\frac{1}{2}\left[n_1\times\left((T\times\overline{T})\times\overline{n_4}\right)+n_4\times\left((T\times\overline{T})\times\overline{n_1}\right)\right]=\frac{1}{2}(n_1\times\overline{n_4}+n_4\times\overline{n_1})=\langle n_1,n_4\rangle=0$$

elde edilir.

$$\langle N_3, N_5\rangle = \frac{1}{2}\Big[\big(N_3 \times \overline{N_5}\big) + \big(N_5 \times \overline{N_3}\big)\Big] = \frac{1}{2}\Big[(n_2 \times T)\times\big(\overline{n_4 \times T}\big) + (n_4 \times T)\times\big(\overline{n_2 \times T}\big)\Big]$$

olduğundan

$$\langle N_3, N_5\rangle = \frac{1}{2}\Big[n_2 \times\Big(\big(T\times\overline{T}\big)\times\overline{n_4}\Big) + n_4 \times\Big(\big(T\times\overline{T}\big)\times\overline{n_2}\Big)\Big] = \frac{1}{2}\Big(n_2\times\overline{n_4} + n_4\times\overline{n_2}\Big) = \langle n_2, n_4\rangle = 0$$

elde edilir.

$$\langle N_4, N_5\rangle = \frac{1}{2}\Big[\big(N_4 \times \overline{N_5}\big) + \big(N_5 \times \overline{N_4}\big)\Big] = \frac{1}{2}\Big[(n_3 \times T)\times\big(\overline{n_4 \times T}\big) + (n_4 \times T)\times\big(\overline{n_3 \times T}\big)\Big]$$

olduğundan

$$\langle N_4, N_5\rangle = \frac{1}{2}\Big[n_3 \times\Big(\big(T\times\overline{T}\big)\times\overline{n_4}\Big) + n_4 \times\Big(\big(T\times\overline{T}\big)\times\overline{n_3}\Big)\Big] = \frac{1}{2}\Big(n_3\times\overline{n_4} + n_4\times\overline{n_3}\Big) = \langle n_3, n_4\rangle = 0$$

elde edilir.

5) $N_6 = n_5 \times T$ olmak üzere

i) $\|N_6\| = 1$ dir :

$$\begin{aligned}
\langle N_6, N_6\rangle &= N_6 \times \overline{N_6} \\
&= (n_5 \times T)\times\big(\overline{n_5 \times T}\big) \\
&= (n_5 \times T)\times\big(\overline{T}\times\overline{n_5}\big) \\
&= n_5 \times\Big(\big(T\times\overline{T}\big)\times\overline{n_5}\Big) \\
&= n_5 \times \overline{n_5} \\
&= 1
\end{aligned}$$

ii) $T, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5$ ve N_6 nın ortogonal oldukları aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\langle T, N_1\rangle = \langle T, N_2\rangle = \langle T, N_3\rangle = \langle T, N_4\rangle = \langle T, N_5\rangle = \langle N_1, N_2\rangle = \langle N_1, N_3\rangle = \langle N_1, N_4\rangle = 0$$
$$\langle N_1, N_5\rangle = \langle N_2, N_3\rangle = \langle N_2, N_4\rangle = \langle N_2, N_5\rangle = \langle N_3, N_4\rangle = \langle N_3, N_5\rangle = \langle N_4, N_5\rangle = 0$$

idi.

$$\langle T, N_6 \rangle = \frac{1}{2}\left[\left(T \times \overline{N_6}\right) + \left(N_6 \times \overline{T}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[T \times \left(\overline{n_5 \times T}\right) + \left(n_5 \times T\right) \times \overline{T}\right]$$

olduğundan

$$\langle T, N_6 \rangle = \frac{1}{2}\left[T \times \left(\overline{T} \times \overline{n_5}\right) + \left(n_5 \times T\right) \times \overline{T}\right] = \frac{1}{2}\left(\overline{n_5} + n_5\right) = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\langle N_1, N_6 \rangle = \frac{1}{2}\left[\left(N_1 \times \overline{N_6}\right) + \left(N_6 \times \overline{N_1}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\left(t \times T\right) \times \left(\overline{n_5 \times T}\right) + \left(n_5 \times T\right) \times \left(\overline{t \times T}\right)\right]$$

olduğundan

$$\langle N_1, N_6 \rangle = \frac{1}{2}\left[t \times \left(\left(T \times \overline{T}\right) \times \overline{n_5}\right) + n_5 \times \left(\left(T \times \overline{T}\right) \times \bar{t}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(t \times \overline{n_5} + n_5 \times \bar{t}\right) = \langle t, n_5 \rangle = 0$$

elde edilir.

$$\langle N_2, N_6 \rangle = \frac{1}{2}\left[\left(N_2 \times \overline{N_6}\right) + \left(N_6 \times \overline{N_2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\left(n_1 \times T\right) \times \left(\overline{n_5 \times T}\right) + \left(n_5 \times T\right) \times \left(\overline{n_1 \times T}\right)\right]$$

olduğundan

$$\langle N_2, N_6 \rangle = \frac{1}{2}\left[n_1 \times \left(\left(T \times \overline{T}\right) \times \overline{n_5}\right) + n_5 \times \left(\left(T \times \overline{T}\right) \times \overline{n_1}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(n_1 \times \overline{n_5} + n_5 \times \overline{n_1}\right) = \langle n_1, n_5 \rangle = 0$$

elde edilir.

$$\langle N_3, N_6 \rangle = \frac{1}{2}\left[\left(N_3 \times \overline{N_6}\right) + \left(N_6 \times \overline{N_3}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\left(n_2 \times T\right) \times \left(\overline{n_5 \times T}\right) + \left(n_5 \times T\right) \times \left(\overline{n_2 \times T}\right)\right]$$

olduğundan

$$\langle N_3, N_6 \rangle = \frac{1}{2}\left[n_2 \times \left(\left(T \times \overline{T}\right) \times \overline{n_5}\right) + n_5 \times \left(\left(T \times \overline{T}\right) \times \overline{n_2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(n_2 \times \overline{n_5} + n_5 \times \overline{n_2}\right) = \langle n_2, n_5 \rangle = 0$$

elde edilir.

$$\langle N_4, N_6 \rangle = \frac{1}{2}\left[\left(N_4 \times \overline{N_6}\right) + \left(N_6 \times \overline{N_4}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\left(n_3 \times T\right) \times \left(\overline{n_5 \times T}\right) + \left(n_5 \times T\right) \times \left(\overline{n_3 \times T}\right)\right]$$

olduğundan

$$\langle N_4, N_6 \rangle = \frac{1}{2}\left[n_3 \times \left(\left(T \times \overline{T}\right) \times \overline{n_5}\right) + n_5 \times \left(\left(T \times \overline{T}\right) \times \overline{n_3}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(n_3 \times \overline{n_5} + n_5 \times \overline{n_3}\right) = \langle n_3, n_5 \rangle = 0$$

elde edilir.

$$\left\langle N_5, N_6 \right\rangle = \frac{1}{2}\left[\left(N_5 \times \overline{N_6}\right) + \left(N_6 \times \overline{N_5}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\left(n_4 \times T\right) \times \left(\overline{n_5 \times T}\right) + \left(n_5 \times T\right) \times \left(\overline{n_4 \times T}\right)\right]$$

olduğundan

$$\left\langle N_5, N_6 \right\rangle = \frac{1}{2}\left[n_4 \times \left(\left(T \times \overline{T}\right) \times \overline{n_5}\right) + n_5 \times \left(\left(T \times \overline{T}\right) \times \overline{n_4}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(n_4 \times \overline{n_5} + n_5 \times \overline{n_4}\right) = \left\langle n_4, n_5 \right\rangle = 0$$

elde edilir.

6) $N_7 = n_6 \times T$ olmak üzere

i) $\left\| N_7 \right\| = 1$ dir :

$$\begin{aligned}
\left\langle N_7, N_7 \right\rangle &= N_7 \times \overline{N_7} \\
&= \left(n_6 \times T\right) \times \overline{\left(n_6 \times T\right)} \\
&= \left(n_6 \times T\right) \times \left(\overline{T} \times \overline{n_6}\right) \\
&= n_6 \times \left(\left(T \times \overline{T}\right) \times \overline{n_6}\right) \\
&= n_6 \times \overline{n_6} \\
&= 1
\end{aligned}$$

ii) $T, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6$ ve N_7 nin ortogonal oldukları aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\left\langle T, N_1 \right\rangle = \left\langle T, N_2 \right\rangle = \left\langle T, N_3 \right\rangle = \left\langle T, N_4 \right\rangle = \left\langle T, N_5 \right\rangle = \left\langle T, N_6 \right\rangle = \left\langle N_1, N_2 \right\rangle = \left\langle N_1, N_3 \right\rangle = \left\langle N_1, N_4 \right\rangle = 0$$
$$\left\langle N_1, N_5 \right\rangle = \left\langle N_1, N_6 \right\rangle = \left\langle N_2, N_3 \right\rangle = \left\langle N_2, N_4 \right\rangle = \left\langle N_2, N_5 \right\rangle = \left\langle N_2, N_6 \right\rangle = \left\langle N_3, N_4 \right\rangle = \left\langle N_3, N_5 \right\rangle = 0$$
$$\left\langle N_3, N_6 \right\rangle = \left\langle N_4, N_5 \right\rangle = \left\langle N_4, N_6 \right\rangle = \left\langle N_5, N_6 \right\rangle = 0$$

idi.

$$\left\langle T, N_7 \right\rangle = \frac{1}{2}\left[\left(T \times \overline{N_7}\right) + \left(N_7 \times \overline{T}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[T \times \left(\overline{n_6 \times T}\right) + \left(n_6 \times T\right) \times \overline{T}\right]$$

olduğundan

$$\langle T, N_7 \rangle = \frac{1}{2}\left[T \times \left(\overline{T} \times \overline{n_6}\right) + \left(n_6 \times T\right) \times \overline{T}\right] = \frac{1}{2}\left(\overline{n_6} + n_6\right) = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\langle N_1, N_7 \rangle = \frac{1}{2}\left[\left(N_1 \times \overline{N_7}\right) + \left(N_7 \times \overline{N_1}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\left(t \times T\right) \times \left(\overline{n_6 \times T}\right) + \left(n_6 \times T\right) \times \left(\overline{t \times T}\right)\right]$$

olduğundan

$$\langle N_1, N_7 \rangle = \frac{1}{2}\left[t \times \left(\left(T \times \overline{T}\right) \times \overline{n_6}\right) + n_6 \times \left(\left(T \times \overline{T}\right) \times \overline{t}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(t \times \overline{n_6} + n_6 \times \overline{t}\right) = \langle t, n_6 \rangle = 0$$

elde edilir.

$$\langle N_2, N_7 \rangle = \frac{1}{2}\left[\left(N_2 \times \overline{N_7}\right) + \left(N_7 \times \overline{N_2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\left(n_1 \times T\right) \times \left(\overline{n_6 \times T}\right) + \left(n_6 \times T\right) \times \left(\overline{n_1 \times T}\right)\right]$$

olduğundan

$$\langle N_2, N_7 \rangle = \frac{1}{2}\left[n_1 \times \left(\left(T \times \overline{T}\right) \times \overline{n_6}\right) + n_6 \times \left(\left(T \times \overline{T}\right) \times \overline{n_1}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(n_1 \times \overline{n_6} + n_6 \times \overline{n_1}\right) = \langle n_1, n_6 \rangle = 0$$

elde edilir.

$$\langle N_3, N_7 \rangle = \frac{1}{2}\left[\left(N_3 \times \overline{N_7}\right) + \left(N_7 \times \overline{N_3}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\left(n_2 \times T\right) \times \left(\overline{n_6 \times T}\right) + \left(n_6 \times T\right) \times \left(\overline{n_2 \times T}\right)\right]$$

olduğundan

$$\langle N_3, N_7 \rangle = \frac{1}{2}\left[n_2 \times \left(\left(T \times \overline{T}\right) \times \overline{n_6}\right) + n_6 \times \left(\left(T \times \overline{T}\right) \times \overline{n_2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(n_2 \times \overline{n_6} + n_6 \times \overline{n_2}\right) = \langle n_2, n_6 \rangle = 0$$

elde edilir.

$$\langle N_4, N_7 \rangle = \frac{1}{2}\left[\left(N_4 \times \overline{N_7}\right) + \left(N_7 \times \overline{N_4}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\left(n_3 \times T\right) \times \left(\overline{n_6 \times T}\right) + \left(n_6 \times T\right) \times \left(\overline{n_3 \times T}\right)\right]$$

olduğundan

$$\langle N_4, N_7 \rangle = \frac{1}{2}\left[n_3 \times \left(\left(T \times \overline{T}\right) \times \overline{n_6}\right) + n_6 \times \left(\left(T \times \overline{T}\right) \times \overline{n_3}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(n_3 \times \overline{n_6} + n_6 \times \overline{n_3}\right) = \langle n_3, n_6 \rangle = 0$$

elde edilir.

$$\langle N_5, N_7 \rangle = \frac{1}{2}\left[\left(N_5 \times \overline{N_7}\right) + \left(N_7 \times \overline{N_5}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\left(n_4 \times T\right) \times \left(\overline{n_6 \times T}\right) + \left(n_6 \times T\right) \times \left(\overline{n_4 \times T}\right)\right]$$

olduğundan

$$\langle N_5, N_7\rangle = \frac{1}{2}\left[n_4 \times \left(\left(T\times\overline{T}\right)\times\overline{n_6}\right) + n_6 \times \left(\left(T\times\overline{T}\right)\times\overline{n_4}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(n_4\times\overline{n_6} + n_6\times\overline{n_4}\right) = \langle n_4, n_6\rangle = 0$$

elde edilir.

$$\langle N_6, N_7\rangle = \frac{1}{2}\left[\left(N_6\times\overline{N_7}\right) + \left(N_7\times\overline{N_6}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\left(n_5\times T\right)\times\left(\overline{n_6\times T}\right) + \left(n_6\times T\right)\times\left(\overline{n_5\times T}\right)\right]$$

olduğundan

$$\langle N_6, N_7\rangle = \frac{1}{2}\left[n_5 \times \left(\left(T\times\overline{T}\right)\times\overline{n_6}\right) + n_6 \times \left(\left(T\times\overline{T}\right)\times\overline{n_5}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(n_5\times\overline{n_6} + n_6\times\overline{n_5}\right) = \langle n_5, n_6\rangle = 0$$

elde edilir. Böylece $\forall s\in I$ için $\beta(s)$ noktasındaki $\{T(s), N_1(s), N_2(s), N_3(s), N_4(s), N_5(s), N_6(s), N_7(s)\}$ sistemine oktoniyonik eğrinin Frenet $8-$ayaklısı adı verilir.

Tanım 4.8 ***O*** oktoniyon uzayında bir $\beta : I\subset\mathbb{R}\to\boldsymbol{O}$ oktoniyonik eğrisi verilsin. Bu eğrinin $\beta(s)$ noktasındaki Frenet $8-$ayaklısı

$\{V_1(s) = T(s),\ V_i(s) = N_{i-1}(s)\},\ 2\le i\le 8$ olsun. Buna göre

$K_i : I\to\mathbb{R}$

$$K_i(s) = \left\langle V_i'(s), V_{i+1}\right\rangle = \frac{1}{2}\left(V_i'(s)\times\overline{V_{i+1}} + V_{i+1}\times\overline{V_i'(s)}\right)$$

şeklinde tanımlı K_i fonksiyonuna β oktoniyonik eğrisinin i-inci eğrilik fonksiyonu, $K_i(s)$ reel sayısına da β oktoniyonik eğrisinin i-inci eğriliği denir.

Teorem 4.4 ***O*** oktoniyon uzayında bir C^∞ eğrisi, $I\subset\mathbb{R}$ olmak üzere, bir $s\in I$ yay parametresi için

$\beta : I\subset\mathbb{R}\to\boldsymbol{O}$

$$s\to\beta(s) = \sum_{i=0}^{7}\gamma_i(s)e_i,\ e_0 = +1$$

biçiminde verilsin. $\forall s \in I$ için $\beta(s)$ noktasındaki Frenet $8-$ayaklısı $T(s)=\sum_{i=0}^{7}\gamma_i'(s)e_i$ olmak üzere $\{T(s),N_1(s),N_2(s),N_3(s),N_4(s),N_5(s),N_6(s),N_7(s)\}$ ve eğrilikler de $K_i, 1\le i\le 7$ olmak üzere $K_1=K(s)\neq 0$, $K_2=k_1(s)$, $K_3=(k_2-K)(s)$, $K_4=k_3(s)$, $K_5=(k_4-K)(s)$, $K_6=k_5(s)$ ve $K_7=(k_6+K)(s)$ dir. Bu durumda β oktoniyonik eğrisi boyunca $T,N_1,N_2,N_3,N_4,N_5,N_6$ ve N_7 nin türevleri ile eğrilikler arasındaki ilişki

$$T'(s)=K(s)\,N_1(s)$$

$$N_1'(s)=-K(s)T(s)+k_1(s)\,N_2(s)$$

$$N_2'(s)=-k_1(s)\,N_1(s)+\left(k_2-K\right)(s)\,N_3(s)$$

$$N_3'(s)=-\left(k_2-K\right)(s)\,N_2(s)+k_3(s)\,N_4(s)$$

$$N_4'(s)=-k_3(s)\,N_3(s)+\left(k_4-K\right)N_5(s)$$

$$N_5'(s)=-\left(k_4-K\right)(s)\,N_4(s)+k_5(s)\,N_6(s)$$

$$N_6'(s)=-k_5(s)\,N_5(s)+\left(k_6+K\right)(s)N_7(s)$$

$$N_7'(s)=-\left(k_6+K\right)(s)N_6(s)$$

biçimindedir. Yukarıdaki bağıntılara oktoniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri denir.

İspat $b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{14}, b_{15}, b_{16}, b_{17}, b_{18}\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$T'=b_{11}T+b_{12}N_1+b_{13}N_2+b_{14}N_3+b_{15}N_4+b_{16}N_5+b_{17}N_6+b_{18}N_7$$

ifadesi sırasıyla $T,\ldots,N_7$ ile iç çarpılırsa

$$\begin{aligned}\langle T',T\rangle &= b_{11}\langle T,T\rangle+b_{12}\langle N_1,T\rangle+b_{13}\langle N_2,T\rangle+b_{14}\langle N_3,T\rangle+\\ &\quad b_{15}\langle N_4,T\rangle+b_{16}\langle N_5,T\rangle+b_{17}\langle N_6,T\rangle+b_{18}\langle N_7,T\rangle\end{aligned}$$

yazılır. Buradan da

$$\langle T', T\rangle = b_{11}\cdot 1 + b_{12}\cdot 0 + b_{13}\cdot 0 + b_{14}\cdot 0 + b_{15}\cdot 0 + b_{16}\cdot 0 + b_{17}\cdot 0 + b_{18}\cdot 0$$

bulunur. Böylece

$$\langle T', T\rangle = b_{11} \Rightarrow b_{11} = 0$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\langle T', N_1\rangle = {} & b_{11}\langle T, N_1\rangle + b_{12}\langle N_1, N_1\rangle + b_{13}\langle N_2, N_1\rangle + b_{14}\langle N_3, N_1\rangle + \\ & b_{15}\langle N_4, N_1\rangle + b_{16}\langle N_5, N_1\rangle + b_{17}\langle N_6, N_1\rangle + b_{18}\langle N_7, N_1\rangle\end{aligned}$$

biçiminde yazılırsa

$$\langle T', N_1\rangle = b_{11}\cdot 0 + b_{12}\cdot 1 + b_{13}\cdot 0 + b_{14}\cdot 0 + b_{15}\cdot 0 + b_{16}\cdot 0 + b_{17}\cdot 0 + b_{18}\cdot 0$$

bulunur. Buradan

$$b_{12} = K$$

seçilebilir.

$$\begin{aligned}\langle T', N_2\rangle = {} & b_{11}\langle T, N_2\rangle + b_{12}\langle N_1, N_2\rangle + b_{13}\langle N_2, N_2\rangle + b_{14}\langle N_3, N_2\rangle + \\ & b_{15}\langle N_4, N_2\rangle + b_{16}\langle N_5, N_2\rangle + b_{17}\langle N_6, N_2\rangle + b_{18}\langle N_7, N_2\rangle\end{aligned}$$

biçiminde yazılırsa

$$\langle T', N_2\rangle = b_{11}\cdot 0 + b_{12}\cdot 0 + b_{13}\cdot 1 + b_{14}\cdot 0 + b_{15}\cdot 0 + b_{16}\cdot 0 + b_{17}\cdot 0 + b_{18}\cdot 0$$

bulunur. Buradan

$$b_{13} = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde devam edilirse

$$b_{14} = b_{15} = b_{16} = b_{17} = 0$$

dır. Son olarak

$$\begin{aligned}\langle T', N_7\rangle = {} & b_{11}\langle T, N_7\rangle + b_{12}\langle N_1, N_7\rangle + b_{13}\langle N_2, N_7\rangle + b_{14}\langle N_3, N_7\rangle + \\ & b_{15}\langle N_4, N_7\rangle + b_{16}\langle N_5, N_7\rangle + b_{17}\langle N_6, N_7\rangle + b_{18}\langle N_7, N_7\rangle\end{aligned}$$

biçiminde yazılırsa

$$\langle T', N_7 \rangle = b_{11}\cdot 0 + b_{12}\cdot 0 + b_{13}\cdot 0 + b_{14}\cdot 0 + b_{15}\cdot 0 + b_{16}\cdot 0 + b_{17}\cdot 0 + b_{18}\cdot 1$$

bulunur. Buradan

$$b_{18} = 0$$

elde edilir. Böylece, $\forall s \in I$ için

$$T'(s) = KN_1(s) \tag{4.12}$$

biçiminde olduğu görülür.

(4.11) denkleminin türevi alınır ve burada (4.3) ve (4.12) denklemleri kullanılırsa

$$N_1' = t' \times T + t \times T'$$

$$= k_1 n_1 \times T + t \times KN_1, \quad t \times N_1 = -T$$

$$N_1' = -KT + k_1 N_2 \tag{4.13}$$

elde edilir.

$N_2 = n_1 \times T$ ifadesinin türevi alınarak (4.4) ve (4.12) denklemleri de kullanılırsa

$$N_2' = n_1' \times T + n_1 \times T' = (-k_1 t + k_2 n_2) \times T + n_1 \times KN_1$$

elde edilir. Burada (4.11) kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$N_2' = -k_1 (t \times T) + k_2 (n_2 \times T) + K (n_1 \times N_1), \quad n_1 \times N_1 = -N_3$$

olacağı için

$$N_2' = -k_1 N_1 + (k_2 - K) N_3 \tag{4.14}$$

bulunur.

$N_3 = n_2 \times T$ ifadesinin türevi alınarak (4.5)ve (4.12) denklemleri de kullanılırsa

$$N_3' = n_2' \times T + n_2 \times T' = (-k_2 n_1 + k_3 n_3) \times T + n_2 \times KN_1$$

elde edilir. Burada (4.11) , (4.13) ve (4.14) kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$N_3' = -k_2 (n_1 \times T) + k_3 (n_3 \times T) + K (n_2 \times N_1), \quad n_2 \times N_1 = N_2$$

olacağı için

$$N_3' = k_3 N_4 - (k_2 - K) N_2 \tag{4.15}$$

bulunur.

$N_4 = n_3 \times T$ ifadesinin türevi alınarak (4.6) ve (4.12) denklemleri de kullanılırsa

$$N_4' = n_3' \times T + n_3 \times T' = (-k_3 n_2 + k_4 n_4) \times T + n_3 \times K N_1$$

elde edilir. Burada (4.11) ve (4.14) kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$N_4' = -k_3 (n_2 \times T) + k_4 (n_4 \times T) + K (n_3 \times N_1), \ \ n_3 \times N_1 = -N_5$$

olacağı için

$$N_4' = -k_3 N_3 + (k_4 - K) N_5 \tag{4.16}$$

bulunur.

$N_5 = n_4 \times T$ ifadesinin türevi alınarak (4.7) ve (4.12) denklemleri de kullanılırsa

$$N_5' = n_4' \times T + n_4 \times T' = (-k_4 n_3 + k_5 n_5) \times T + n_4 \times K N_1$$

elde edilir. Burada (4.11) ve (4.15) kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$N_5' = -k_4 (n_3 \times T) + k_5 (n_5 \times T) + K (n_4 \times N_1), \ \ n_4 \times N_1 = N_4$$

olacağı için

$$N_5' = -(k_4 - K) N_4 + k_5 N_6 \tag{4.17}$$

bulunur.

$N_6 = n_5 \times T$ ifadesinin türevi alınarak (4.8) ve (4.12) denklemleri de kullanılırsa

$$N_6' = n_5' \times T + n_5 \times T' = (-k_5 n_4 + k_6 n_6) \times T + n_5 \times K N_1$$

elde edilir. Burada (4.11) ve (4.16) kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$N_6' = -k_5 (n_4 \times T) + k_6 (n_6 \times T) + K (n_5 \times N_1), \ \ n_5 \times N_1 = N_7$$

olacağı için

$$N_6{}' = -k_5 N_5 + \left(k_6 + K\right) N_7 \qquad (4.18)$$

bulunur.

$N_7 = n_6 \times T$ (4.18) denklemi ile verilen N_7 ifadesinin türevi alınarak (4.9) ve (4.12) denklemleri de kullanılırsa

$$N_7{}' = n_6{}' \times T + n_6 \times T' = \left(-k_6 n_5\right) \times T + n_6 \times K N_1$$

elde edilir. Burada (4.11) ve (4.17) kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$N_7{}' = -k_6\left(n_5 \times T\right) + K\left(n_6 \times N_1\right), \quad n_6 \times N_1 = -N_6$$

olacağı için

$$N_7{}' = -\left(k_6 + K\right) N_6 \qquad (4.19)$$

bulunur.

Böylece β eğrisi için (4.12), (4.13), (4.14), (4.15), (4.16), (4.17), (4.18) ve (4.19) denklemlerinin Serret-Frenet formüllerini verdiği görülür. Buradan da Frenet elemanları $\left\{T, N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, K, k_1, \left(k_2 - K\right), k_3, \left(k_4 - K\right), k_5, \left(k_6 + K\right)\right\}$ biçimindedir.

Sonuç 4.3 ***O*** oktoniyonik uzayında Serret-Frenet vektörlerinin oktoniyonik eğri boyunca türevleri ile ilgili eşitlikler matris formunda

$$\begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K & 0 & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_1 & 0 & \left(k_2 - K\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(k_2 - K\right) & 0 & k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_3 & 0 & \left(k_4 - K\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\left(k_4 - K\right) & 0 & k_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_5 & 0 & \left(k_6 + K\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\left(k_6 + K\right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Sonuç 4.4 Uzaysal oktoniyonik uzaydaki bir γ uzaysal oktoniyonik eğrisi için bulunan Serret-Frenet formülleri yardımıyla, β oktoniyonik eğrisinin Frenet elemanları ve Serret-Frenet formülleri bulunmuştur. Bu kısımda β oktoniyonik eğrisi, γ uzaysal oktoniyonik eğrisinin birim teğeti olan uzaysal oktoniyonu, β oktoniyonik eğrisinin birinci normali ile birim teğet oktoniyonunun eşleniğinin oktoniyonik çarpımı olarak, yani $t = N_1 \times \overline{T}$ olacak şekilde verilmiştir. Sonuç olarak, β oktoniyonik eğrisinin ikinci eğriliğinin γ uzaysal oktoniyonik eğrisinin birinci eğriliği, β oktoniyonik eğrisinin dördüncü eğriliğinin γ uzaysal oktoniyonik eğrisinin üçüncü eğriliği ve β oktoniyonik eğrisinin altıncı eğriliğinin γ uzaysal oktoniyonik eğrisinin beşinci eğriliği olduğu elde edilmiştir. Ayrıca, γ uzaysal oktoniyonik eğrisinin ikinci eğriliği k_2, dördüncü eğriliği k_4 ve altıncı eğriliği k_6 ve β oktoniyonik eğrisinin birinci eğriliği K olmak üzere, $(k_2 - K)$, β oktoniyonik eğrisinin üçüncü eğriliği, $(k_4 - K)$, β oktoniyonik eğrisinin beşinci eğriliği ve $(k_6 + K)$ β oktoniyonik eğrisinin beşinci eğriliği olduğu görülmüştür.

Sonuç 4.5 ***O*** oktoniyonik uzayındaki β uzaysal oktoniyonik eğrisinin birinci eğriliği olan $K(s)$ için $K(s) = \|T'(s)\|$ bağıntısı geçerlidir.

İspat $T(s) = \beta'(s)$ olduğundan $T'(s) = \beta''(s)$ ve $N_1(s) = \dfrac{\beta''(s)}{\|\beta''(s)\|}$ yazılabilir. $\beta''(s) = N_1(s)\|\beta''(s)\|$ eşitliğinden $T'(s) = \|T'(s)\| N_1(s)$ bulunur. Bu ifade $N_1(s)$ ile iç çarpılırsa

$$\langle T'(s), N_1(s) \rangle = \|T'(s)\| \langle N_1(s), N_1(s) \rangle = \|T'(s)\|$$

elde edilir. Böylece

$$\langle K(s) N_1(s), N_1(s) \rangle = \|T'(s)\|$$

ifadesinden $K(s) = \|T'(s)\|$ bulunur.

BÖLÜM 5

OKTONİYONİK EĞİLİM ÇİZGİLERİ VE KARAKTERİZASYONLARI

Tezin ikinci orijinal kısmı olan bu bölümünde, oktoniyonik eğriler için bulunan Serret-Frenet formülleri yardımıyla, $\boldsymbol{O_P}$ ve $\boldsymbol{O}$ oktoniyonik uzaylarında tanımlanan oktoniyonik eğriler için oktoniyonik eğilim çizgisi ve oktoniyonik harmonik eğrilik ifadeleri tanıtılmış ve oktoniyonik harmonik eğrilikler oktoniyonik eğrilerin eğrilikleri cinsinden elde edilmiştir. Ayrıca, $\boldsymbol{O_P}$ ve $\boldsymbol{O}$ oktoniyonik uzaylarındaki oktoniyonik eğrilerin birer oktoniyonik eğilim çizgileri olmaları için gerek ve yeter şartlar verilmiştir. Ayrıca, uzaysal oktoniyonik eğilim çizgisinden elde edilen bir oktoniyonik eğrinin de eğilim çizgisi olduğu gösterilmiştir. Son olarak, $\boldsymbol{O_P}$ ve $\boldsymbol{O}$ oktoniyonik uzaylarındaki oktoniyonik eğrilerin oktoniyonik harmonik eğrilikleri ile eğrilikleri arasındaki ilişkiler verilmiştir.

Bu bölümde elde edilen sonuçlar, SCI-Expanded kapsamında bir dergide makale olarak yayınlanmış [63] ve [64] çalışmasında bildiri olarak sunulmuştur.

5.1 $\boldsymbol{O_P}$ Uzayında Uzaysal Oktoniyonik Eğilim Çizgileri ve Karakterizasyonları

Tanım 5.1 $\boldsymbol{O_P}$ uzayında $\gamma(I)$, $I \subset \mathbb{R}$ uzaysal oktoniyonik eğrisini göz önüne alalım. u sabit birim uzay oktoniyon olmak üzere, $\forall s \in I$ için

$$\langle \gamma'(s), u \rangle = \cos\varphi = sbt, \ \ \varphi \neq \frac{\pi}{2} \qquad (5.1)$$

ise, $\gamma(I)$ uzaysal oktoniyonik eğrisine uzaysal oktoniyonik eğilim çizgisi denir.

Diğer taraftan, $\forall s \in I$ için

$$\langle t(s), u \rangle = \cos\varphi \tag{5.2}$$

olduğundan, $\boldsymbol{O_P}$ uzayında bir eğri eğilim çizgisi ise bu eğri ile eşlenen uzay oktoniyonik eğri de eğilim çizgisidir. Bunun karşıtı da doğrudur.

Tanım 5.2 $\gamma : I \to \boldsymbol{O}_P$ uzaysal oktoniyonik eğrisi s yay parametresi ile verilsin. O_P nin birim ve sabit bir vektörü u ve $\{t(s), n_1(s), n_2(s), n_3(s), n_4(s), n_5(s), n_6(s)\}$, γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki Frenet $7-$ayaklısı olsun. Bu durumda $t(s)$ ile u arasındaki açı $\varphi = \varphi(s)$ olmak üzere

$$H_i : I \to \mathbb{R},\ H_i = \frac{\langle n_{i+1}(s), u \rangle}{\cos\varphi},\ \varphi \neq \frac{\pi}{2},\ 1 \leq i \leq 5 \tag{5.3}$$

fonksiyonuna, γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki u ya göre i. inci Harmonik eğriliği denir. Ayrıca $H_0 = 0$ tanımlanır.

Teorem 5.1 $\gamma : I \to \boldsymbol{O}_P$ s yay parametresi ile verilen uzaysal oktoniyonik eğilim çizgisi olsun. γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki eğrilikleri $k_i(s) \neq 0$, $\zeta_i = \dfrac{1}{k_i(s)}$ ve Harmonik eğrilikleri de $H_i(s)$ olmak üzere,

$$H_1 = \frac{k_1}{k_2},\ H_2 = \frac{H_1'}{k_3},\ H_i = \left(H_{i-1}' + H_{i-2}' k_i\right)\zeta_{i+1}$$

dir.

İspat $\gamma : I \to \boldsymbol{O}_P$ uzaysal oktoniyonik eğilim çizgisinin teğetinin u ile yapmış olduğu açı $\varphi = \varphi(s)$ olsun. $\gamma(s)$ noktasındaki Frenet $7-$ayaklısı $\{t(s), n_1(s), n_2(s), n_3(s), n_4(s), n_5(s), n_6(s)\}$ olmak üzere,

$$\langle t(s), u \rangle = \cos\varphi = sbt$$

yazılabilir. Burada s ye göre türev alınırsa,

$$\langle t'(s),u\rangle+\langle t(s),u'\rangle=0$$

veya

$$\langle t'(s),u\rangle=0$$

elde edilir. Burada (4.3) ifadesi yerine yazılırsa

$$\langle k_1(s)n_1(s),u\rangle=0$$

dan

$$k_1(s)\langle n_1(s),u\rangle=0$$

bulunur. $k_1(s)\neq 0$ olacağından

$$\langle n_1(s),u\rangle=0$$

dır. Bu son ifade de türev alınırsa,

$$\langle n_1'(s),u\rangle+\langle n_1(s),u'\rangle=0$$

veya (4.4) göz önüne alınırsa,

$$\langle -k_1(s)t(s)+k_2(s)n_2(s),u\rangle=0$$

elde edilir.

$$-k_1(s)\langle t(s),u\rangle+k_2(s)\langle n_2(s),u\rangle=0$$

Bu son eşitlikte (5.2) ve (5.3) ifadeleri kullanılırsa,

$-k_1(s)\cos\varphi+k_2(s)H_1\cos\varphi=0$, $\cos\varphi=sbt\neq 0$,

bulunur. Böylece

$H_1=\dfrac{k_1}{k_2}$, $k_2\neq 0$ olmak üzere

elde edilir. Böylece (5.3) eşitliği gereğince

$$\langle n_2(s), u\rangle = H_1 \cos\varphi$$

elde edilebilir. Ayrıca son eşitliğin, s ye göre türevi alınırsa,

$$\langle n_2'(s), u\rangle + \langle n_2(s), u'\rangle = H_1' \cos\varphi$$

veya

$$\langle n_2'(s), u\rangle = H_1' \cos\varphi$$

elde edilir. Bu son eşitlikte (4.5) ifadesinin kullanılmasıyla

$$-k_2(s)\langle n_1(s), u\rangle + k_3(s)\langle n_3(s), u\rangle = H_1' \cos\varphi$$

ve (5.3) eşitlikleri yardımıyla

$$k_3(s) H_2 \cos\varphi = H_1' \cos\varphi$$

bulunur. Böylece

$$H_2 = \frac{H_1'}{k_3}$$

bulunur. (5.3) eşitliğinin her iki yanının s ye göre türev alınırsa,

$$\langle n_{i+1}'(s), u\rangle = H_i' \cos\varphi$$

den

$$\langle -k_{i+1}(s) n_i(s) + k_{i+1}(s) n_{i+2}(s), u\rangle = H_i' \cos\varphi$$

elde edilir. Buradan,

$$-k_{i+1}(s)\langle n_i(s), u\rangle + k_{i+1}(s)\langle n_{i+2}(s), u\rangle = H_i' \cos\varphi$$

bulunur. Böylece

$$H_i = \left(H_{i-1}' + H_{i-2} k_i\right)\zeta_{i+1},\ 2 \le i \le 5$$

elde edilir.

Sonuç 5.1 $\gamma : I \to \boldsymbol{O}_P$ s yay parametresi ile verilen uzaysal oktoniyonik eğilim çizgisi olsun. γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki eğrilikleri $k_i(s) \neq 0$, $\zeta_i = \dfrac{1}{k_i(s)}$ ve Harmonik eğrilikleri de $H_i(s)$ olmak üzere,

$$H_1'(s) = k_3(s) H_2(s),\ H_{i-1}'(s) = -k_i(s) H_{i-2}(s) + k_{i+1}(s) H_i(s),\ H_5' = -k_6 H_4$$

dir.

İspat Teorem 5.1 gereğince, $H_2(s) = \dfrac{H_1'(s)}{k_3(s)}$ ve $H_i(s) = \left(H_{i-1}'(s) + H_{i-2}(s) k_i(s)\right)\xi_{i+1}$ olduğundan, $H_1'(s) = k_3(s) H_2(s)$ ve $H_{i-1}'(s) = -k_i(s) H_{i-2}(s) + k_{i+1}(s) H_i(s)$, $3 \le i \le 5$ bulunur. Diğer taraftan

$$\langle n_6, u \rangle = H_5 \cos\varphi$$

ifadesinin her iki yanının türevi alınırsa

$$\left\langle n_6', u \right\rangle = H_5' \cos\varphi$$

veya (4.9) denklemi kullanılmasıyla

$$-k_6 \langle n_5, u \rangle = H_5' \cos\varphi$$

bulunur. Buradan da

$$-k_6 H_4 \cos\varphi = H_5' \cos\varphi\ ,\ \cos\varphi \neq 0$$

veya

$$H_5' = -k_6 H_4$$

elde edilir.

Teorem 5.2 γ, s yay parametresi ile verilen bir uzaysal oktoniyonik eğri ve $H_i(s)$, $1 \le i \le 5$, $\gamma(s)$ noktasındaki harmonik eğrilikler olsun. Bu durumda γ nın Frenet 7 - ayaklısı $\{t(s), n_1(s), n_2(s), n_3(s), n_4(s), n_5(s), n_6(s)\}$ olmak üzere, γ nın uzaysal oktoniyonik eğilim çizgisi olması için gerek ve yeter şart $\sum_{i=1}^{5} H_i^2(s)$ nin sabit olmasıdır.

İspat

$(\Rightarrow)$: γ uzaysal oktoniyonik eğilim çizgisi olsun. Bu durumda, $\forall s \in I$ yay parametresi için

$$\langle \gamma'(s), u \rangle = \cos\varphi = sbt \text{ , } \varphi \neq \frac{\pi}{2}$$

olacak şekilde bir u sabit birim uzay oktoniyonu vardır.

$$u = \lambda_1 t(s) + \lambda_2 n_1(s) + \lambda_3 n_2(s) + \lambda_4 n_3(s) + \lambda_5 n_4(s) + \lambda_6 n_5(s) + \lambda_7 n_6(s)$$

olmak üzere son ifade sırasıyla $t(s),\, n_1(s),\, n_2(s),\, n_3(s),\, n_4(s),\, n_5(s),\, n_6(s)$ ile iç çarpılırsa;

$$\lambda_1 = \langle t(s), u \rangle,\ \lambda_{i+1} = \langle n_i, u \rangle,\ 1 \leq i \leq 6$$

elde edilir. Bu durumda u oktoniyonu; γ uzaysal oktoniyonik eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki $\{t(s), n_1(s), n_2(s), n_3(s), n_4(s), n_5(s), n_6(s)\}$ bazı cinsinden

$$u = \langle t(s), u \rangle t(s) + \sum_{i=1}^{6} \langle n_i(s), u \rangle n_i(s) \tag{5.4}$$

şekilde yazılır. u birim olduğundan

$$\|u\|^2 = 1 \text{ veya } u \times \overline{u} = 1 \tag{5.5}$$

dir. (5.4) denkleminin (5.5) de kullanılmasıyla

$$1 = \left\{ \langle t(s), u \rangle t(s) + \sum_{i=1}^{6} \langle n_i(s), u \rangle n_i(s) \right\} \times \overline{\left\{ \langle t(s), u \rangle t(s) + \sum_{i=1}^{6} \langle n_i(s), u \rangle n_i(s) \right\}}$$

$$= \{\cos\varphi t + H_1 \cos\varphi n_2 + H_2 \cos\varphi n_3 + H_3 \cos\varphi n_4 + H_4 \cos\varphi n_5 + H_5 \cos\varphi n_6\} \times$$

$$\{\cos\varphi \overline{t} + H_1 \cos\varphi \overline{n_2} + H_2 \cos\varphi \overline{n_3} + H_3 \cos\varphi \overline{n_4} + H_4 \cos\varphi \overline{n_5} + H_5 \cos\varphi \overline{n_6}\}$$

veya

$$1=\cos^2\varphi\left(t\times\bar{t}\right)+H_1\cos^2\varphi\left(t\times\overline{n_2}\right)+H_2\cos^2\varphi\left(t\times\overline{n_3}\right)+H_3\cos^2\varphi\left(t\times\overline{n_4}\right)+H_4\cos^2\varphi\left(t\times\overline{n_5}\right)+$$

$$H_5\cos^2\varphi\left(t\times\overline{n_6}\right)+H_1\cos^2\varphi\left(n_2\times\bar{t}\right)+H_1^{\,2}\cos^2\varphi\left(n_2\times\overline{n_2}\right)+H_1H_2\cos^2\varphi\left(n_2\times\overline{n_3}\right)+$$

$$H_1H_3\cos^2\varphi\left(n_2\times\overline{n_4}\right)+H_1H_4\cos^2\varphi\left(n_2\times\overline{n_5}\right)+H_1H_5\cos^2\varphi\left(n_2\times\overline{n_6}\right)+$$

$$H_2\cos^2\varphi\left(n_3\times\bar{t}\right)+H_2H_1\cos^2\varphi\left(n_3\times\overline{n_2}\right)+H_2^{\,2}\cos^2\varphi\left(n_3\times\overline{n_3}\right)+$$

$$H_2H_3\cos^2\varphi\left(n_3\times\overline{n_4}\right)+H_2H_4\cos^2\varphi\left(n_3\times\overline{n_5}\right)+H_2H_5\cos^2\varphi\left(n_3\times\overline{n_6}\right)+$$

$$H_3\cos^2\varphi\left(n_4\times\bar{t}\right)+H_3H_1\cos^2\varphi\left(n_4\times\overline{n_2}\right)+$$

$$H_3H_2\cos^2\varphi\left(n_4\times\overline{n_3}\right)+H_3^{\,2}\cos^2\varphi\left(n_4\times\overline{n_4}\right)+H_3H_4\cos^2\varphi\left(n_4\times\overline{n_5}\right)+$$

$$H_3H_5\cos^2\varphi\left(n_4\times\overline{n_6}\right)+H_4\cos^2\varphi\left(n_5\times\bar{t}\right)+H_4H_1\cos^2\varphi\left(n_5\times\overline{n_2}\right)+$$

$$H_4H_2\cos^2\varphi\left(n_5\times\overline{n_3}\right)+H_4H_3\cos^2\varphi\left(n_5\times\overline{n_4}\right)+H_4^{\,2}\cos^2\varphi\left(n_5\times\overline{n_5}\right)+$$

$$H_4H_5\cos^2\varphi\left(n_5\times\overline{n_6}\right)+H_5\cos^2\varphi\left(n_6\times\bar{t}\right)+H_5H_1\cos^2\varphi\left(n_6\times\overline{n_2}\right)+$$

$$H_5H_2\cos^2\varphi\left(n_6\times\overline{n_3}\right)+H_5H_3\cos^2\varphi\left(n_6\times\overline{n_4}\right)+H_5H_4\cos^2\varphi\left(n_6\times\overline{n_5}\right)+$$

$$H_5^{\,2}\cos^2\varphi\left(n_6\times\overline{n_6}\right)$$

elde edilir. Burada oktoniyonik çarpım ve eşlenik özellikleri kullanılırsa,

$$1=\cos^2\varphi-H_1\cos^2\varphi\left(t\times n_2\right)-H_2\cos^2\varphi\left(t\times n_3\right)-H_3\cos^2\varphi\left(t\times n_4\right)-H_4\cos^2\varphi\left(t\times n_5\right)-$$

$$H_5\cos^2\varphi\left(t\times n_6\right)+H_1\cos^2\varphi\left(t\times n_2\right)+H_1^{\,2}\cos^2\varphi-H_1H_2\cos^2\varphi\left(n_2\times n_3\right)-$$

$$H_1H_3\cos^2\varphi\left(n_2\times n_4\right)-H_1H_4\cos^2\varphi\left(n_2\times n_5\right)-H_1H_5\cos^2\varphi\left(n_2\times n_6\right)+$$

$$H_2\cos^2\varphi\left(t\times n_3\right)+H_1H_2\cos^2\varphi\left(n_2\times n_3\right)+H_2^{\,2}\cos^2\varphi-H_2H_3\cos^2\varphi\left(n_3\times n_4\right)-$$

$$H_2H_4\cos^2\varphi\left(n_3\times n_5\right)-H_2H_5\cos^2\varphi\left(n_3\times n_6\right)+H_3\cos^2\varphi\left(t\times n_4\right)+$$

$$H_1H_3\cos^2\varphi\left(n_2\times n_4\right)+H_2H_3\cos^2\varphi\left(n_3\times n_4\right)+H_3^{\,2}\cos^2\varphi-$$

$$H_3H_4\cos^2\varphi(n_4\times n_5)-H_3H_5\cos^2\varphi(n_4\times n_6)+H_4\cos^2\varphi(t\times n_5)+$$

$$H_1H_4\cos^2\varphi(n_2\times n_5)+H_2H_4\cos^2\varphi(n_3\times n_5)+H_3H_4\cos^2\varphi(n_4\times n_5)+$$

$$H_4{}^2\cos^2\varphi-H_4H_5\cos^2\varphi(n_5\times n_6)+H_5\cos^2\varphi(t\times n_6)+H_1H_5\cos^2\varphi(n_2\times n_6)+$$

$$H_2H_5\cos^2\varphi(n_3\times n_6)+H_3H_5\cos^2\varphi(n_4\times n_6)+H_4H_5\cos^2\varphi(n_5\times n_6)+$$

$$H_5{}^2\cos^2\varphi$$

veya

$$1=\cos^2\varphi+\sum_{i=1}^{5}H_i^{\,2}\cos^2\varphi$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{i=1}^{5}H_i^{\,2}=\frac{1-\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}=\tan^2\varphi=sbt$$

bulunur.

$(\Leftarrow)$: γ uzaysal oktoniyonik eğrisi için $\sum_{i=1}^{5}H_i^{\,2}=a=sbt$ eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda $\tan^2\varphi=a$ olacak şekilde u vektörü ile t arasında bir φ açısı vardır. O halde,

$$u=\cos\varphi t(s)+\sum_{i=2}^{6}H_{i-1}(s)\cos\varphi n_i(s) \tag{5.6}$$

olacak şekilde bir u uzaysal oktoniyonu tanımlayalım.

I. t ile u arasındaki φ açısının sabit olduğunu gösterelim:

$$\langle t(s),u\rangle=\frac{1}{2}\left[t(s)\times\bar{u}+u\times\overline{t(s)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[t(s)\times\{\cos\varphi\bar{t}+H_1\cos\varphi\overline{n_2}+H_2\cos\varphi\overline{n_3}+H_3\cos\varphi\overline{n_4}+$$

$$H_4\cos\varphi\overline{n_5}+H_5\cos\varphi\overline{n_6}\}+\{\cos\varphi t+H_1\cos\varphi n_2+H_2\cos\varphi n_3+$$

$$H_3\cos\varphi n_4 + H_4\cos\varphi n_5 + H_5\cos\varphi n_6\}\times\overline{t(s)}]$$

$$=\frac{1}{2}[\cos\varphi - H_1\cos\varphi(t\times n_2) - H_2\cos\varphi(t\times n_3) - H_3\cos\varphi(t\times n_4) -$$

$$H_4\cos\varphi(t\times n_5) - H_5\cos\varphi(t\times n_6) + \cos\varphi + H_1\cos\varphi(t\times n_2) +$$

$$H_2\cos\varphi(t\times n_3) + H_3\cos\varphi(t\times n_4) + H_4\cos\varphi(t\times n_5) + H_5\cos\varphi(t\times n_6)]$$

$$=\frac{1}{2}(2\cos\varphi)$$

$$=\cos\varphi$$

$$=sbt$$

elde edilir.

II. *u* uzaysal oktoniyonunun birim olduğunu gösterelim:

$$\langle u,u\rangle = \left\{\cos\varphi t(s) + \sum_{i=2}^{6} H_{i-1}(s)\cos\varphi n_i(s)\right\}\times\overline{\left\{u = \cos\varphi t(s) + \sum_{i=2}^{6} H_{i-1}(s)\cos\varphi n_i(s)\right\}}$$

$$=\{\cos\varphi t + H_1\cos\varphi n_2 + H_2\cos\varphi n_3 + H_3\cos\varphi n_4 + H_4\cos\varphi n_5 + H_5\cos\varphi n_6\}\times$$

$$\{\cos\varphi\bar{t} + H_1\cos\varphi\overline{n_2} + H_2\cos\varphi\overline{n_3} + H_3\cos\varphi\overline{n_4} + H_4\cos\varphi\overline{n_5} + H_5\cos\varphi\overline{n_6}\}$$

yazılabilir. Buradan

$$\langle u,u\rangle = \cos^2\varphi\left(t\times\bar{t}\right) + H_1\cos^2\varphi\left(t\times\overline{n_2}\right) + H_2\cos^2\varphi\left(t\times\overline{n_3}\right) + H_3\cos^2\varphi\left(t\times\overline{n_4}\right) +$$

$$H_4\cos^2\varphi\left(t\times\overline{n_5}\right) + H_5\cos^2\varphi\left(t\times\overline{n_6}\right) + H_1\cos^2\varphi\left(n_2\times\bar{t}\right) + H_1^{\,2}\cos^2\varphi\left(n_2\times\overline{n_2}\right) +$$

$$H_1H_2\cos^2\varphi\left(n_2\times\overline{n_3}\right) + H_1H_3\cos^2\varphi\left(n_2\times\overline{n_4}\right) + H_1H_4\cos^2\varphi\left(n_2\times\overline{n_5}\right) +$$

$$H_1H_5\cos^2\varphi\left(n_2\times\overline{n_6}\right) + H_2\cos^2\varphi\left(n_3\times\bar{t}\right) + H_2H_1\cos^2\varphi\left(n_3\times\overline{n_2}\right)$$

$$H_2^{\,2}\cos^2\varphi\left(n_3\times\overline{n_3}\right) + H_2H_3\cos^2\varphi\left(n_3\times\overline{n_4}\right) + H_2H_4\cos^2\varphi\left(n_3\times\overline{n_5}\right) +$$

$$H_2H_5\cos^2\varphi\left(n_3\times\overline{n_6}\right) + H_3\cos^2\varphi\left(n_4\times\bar{t}\right) + H_3H_1\cos^2\varphi\left(n_4\times\overline{n_2}\right) +$$

$$H_3H_2\cos^2\varphi\left(n_4\times\overline{n_3}\right)+H_3^{\,2}\cos^2\varphi\left(n_4\times\overline{n_4}\right)+H_3H_4\cos^2\varphi\left(n_4\times\overline{n_5}\right)+$$

$$H_3H_5\cos^2\varphi\left(n_4\times\overline{n_6}\right)+H_4\cos^2\varphi\left(n_5\times\bar{t}\right)+H_4H_1\cos^2\varphi\left(n_5\times\overline{n_2}\right)+$$

$$H_4H_2\cos^2\varphi\left(n_5\times\overline{n_3}\right)+H_4H_3\cos^2\varphi\left(n_5\times\overline{n_4}\right)+H_4^{\,2}\cos^2\varphi\left(n_5\times\overline{n_5}\right)+$$

$$H_4H_5\cos^2\varphi\left(n_5\times\overline{n_6}\right)+H_5\cos^2\varphi\left(n_6\times\bar{t}\right)+H_5H_1\cos^2\varphi\left(n_6\times\overline{n_2}\right)+$$

$$H_5H_2\cos^2\varphi\left(n_6\times\overline{n_3}\right)+H_5H_3\cos^2\varphi\left(n_6\times\overline{n_4}\right)+H_5H_4\cos^2\varphi\left(n_6\times\overline{n_5}\right)+$$

$$H_5^{\,2}\cos^2\varphi\left(n_6\times\overline{n_6}\right)$$

elde edilir. Burada oktoniyonik çarpım ve eşlenik özellikleri kullanılırsa,

$$\langle u,u\rangle=\cos^2\varphi-H_1\cos^2\varphi\left(t\times n_2\right)-H_2\cos^2\varphi\left(t\times n_3\right)-H_3\cos^2\varphi\left(t\times n_4\right)-$$

$$H_4\cos^2\varphi\left(t\times n_5\right)-H_5\cos^2\varphi\left(t\times n_6\right)+H_1\cos^2\varphi\left(t\times n_2\right)+H_1^{\,2}\cos^2\varphi-$$

$$H_1H_2\cos^2\varphi\left(n_2\times n_3\right)-H_1H_3\cos^2\varphi\left(n_2\times n_4\right)-H_1H_4\cos^2\varphi\left(n_2\times n_5\right)-$$

$$H_1H_5\cos^2\varphi\left(n_2\times n_6\right)+H_2\cos^2\varphi\left(t\times n_3\right)+H_1H_2\cos^2\varphi\left(n_2\times n_3\right)+H_2^{\,2}\cos^2\varphi-$$

$$H_2H_3\cos^2\varphi\left(n_3\times n_4\right)-H_2H_4\cos^2\varphi\left(n_3\times n_5\right)-H_2H_5\cos^2\varphi\left(n_3\times n_6\right)+$$

$$H_3\cos^2\varphi\left(t\times n_4\right)+H_1H_3\cos^2\varphi\left(n_2\times n_4\right)+H_2H_3\cos^2\varphi\left(n_3\times n_4\right)+$$

$$H_3^{\,2}\cos^2\varphi-H_3H_4\cos^2\varphi\left(n_4\times n_5\right)-H_3H_5\cos^2\varphi\left(n_4\times n_6\right)+$$

$$H_4\cos^2\varphi\left(t\times n_5\right)+H_1H_4\cos^2\varphi\left(n_2\times n_5\right)+H_2H_4\cos^2\varphi\left(n_3\times n_5\right)+$$

$$H_3H_4\cos^2\varphi\left(n_4\times n_5\right)+H_4^{\,2}\cos^2\varphi-H_4H_5\cos^2\varphi\left(n_5\times n_6\right)+H_5\cos^2\varphi\left(t\times n_6\right)+$$

$$H_1H_5\cos^2\varphi\left(n_2\times n_6\right)+H_2H_5\cos^2\varphi\left(n_3\times n_6\right)+H_3H_5\cos^2\varphi\left(n_4\times n_6\right)+$$

$$H_4H_5\cos^2\varphi\left(n_5\times n_6\right)+H_5^{\,2}\cos^2\varphi$$

veya

$$\langle u,u\rangle=\cos^2\varphi+\sum_{i=1}^{5}H_i^{\,2}\cos^2\varphi$$

$$=\cos^2\varphi\left(1+\tan^2\varphi\right)$$

$$=\cos^2\varphi+\cos^2\varphi\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}$$

$$=1$$

elde edilir.

***III*.** u uzaysal oktoniyonun sabit ve birim olduğunu gösterelim:

(5.6) ifadesinin türevi alınırsa,

$$\frac{du}{ds}=\cos\varphi t'(s)+\sum_{i=2}^{6}H_{i-1}{}'(s)\cos\varphi n_i(s)+\sum_{i=2}^{6}H_{i-1}(s)\cos\varphi n_i{}'(s)$$

den $\varphi\neq\frac{\pi}{2}$ olmak üzere

$$\frac{1}{\cos\varphi}\frac{du}{ds}=t'(s)+\sum_{i=2}^{6}H_{i-1}{}'(s)n_i(s)+\sum_{i=2}^{6}H_{i-1}(s)n_i{}'(s)$$

elde edilir. Bu son eşitlikte (4.3), (4.5), (4.6), (4.7), (4.8), (4.9) ve Sonuç 5.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos\varphi}\frac{du}{ds}=\ & k_1(s)n_1(s)+k_3(s)n_2(s)H_2(s)+\left[-k_3(s)H_1(s)+k_4(s)H_3(s)\right]n_3(s)+\\ & \left[-k_4(s)H_2(s)+k_5(s)H_4(s)\right]n_4(s)+\\ & \left[-k_5(s)H_3(s)+k_6(s)H_5(s)\right]n_5(s)+\left[-k_6(s)H_4(s)\right]n_6(s)+\\ & \left[-k_2(s)n_1(s)+k_3(s)n_3(s)\right]H_1(s)+\\ & \left[-k_3(s)n_2(s)+k_4(s)n_4(s)\right]H_2(s)+\left[-k_4(s)n_3(s)+k_5(s)n_5(s)\right]H_3(s)+\\ & \left[-k_5(s)n_4(s)+k_6(s)n_6(s)\right]H_4(s)+\left[-k_6(s)n_5(s)\right]H_5(s)\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos\varphi}\frac{du}{ds}=\ & k_1(s)n_1(s)+k_3(s)n_2(s)H_2(s)-k_3(s)n_3(s)H_1(s)+k_4(s)n_3(s)H_3(s)\\ & -k_4(s)n_4(s)H_2(s)+k_5(s)n_4(s)H_4(s)\\ & -k_5(s)n_5(s)H_3(s)+k_6(s)n_5(s)H_5(s)-k_6(s)n_6(s)H_4(s)\\ & -k_2(s)n_1(s)H_1(s)+k_3(s)n_3(s)H_1(s)\\ & -k_3(s)n_2(s)H_2(s)+k_4(s)n_4(s)H_2(s)-k_4(s)n_3(s)H_3(s)+k_5(s)n_5(s)H_3(s)\\ & -k_5(s)n_4(s)H_4(s)+k_6(s)n_6(s)H_4(s)-k_6(s)n_5(s)H_5(s)\end{aligned}$$

$$= k_1(s)n_1(s) - k_2(s)n_1(s)H_1(s)$$

$$= k_1(s)n_1(s) - \frac{k_1(s)}{k_2(s)}k_2(s)n_1(s)$$

$$= 0$$

elde edilir. Böylece,

$$\frac{1}{\cos\varphi}\frac{du}{ds} = 0$$

olup

$$\frac{du}{ds} = 0$$

bulunur. O halde u sabit bir uzay oktoniyondur. Dolayısıyla γ bir uzaysal oktoniyonik eğilim çizgisidir.

5.2 *O* Uzayında Oktoniyonik Eğilim Çizgileri ve Karakterizasyonları

Tanım 5.3 $\beta : I \to$ ***O*****,** s yay parametresi ile verilen oktoniyonik eğri, u da sabit birim uzaysal oktoniyon olmak üzere, $\forall s \in I$ için

$$\langle \beta'(s), u \rangle = \cos\theta = sbt, \ \ \theta \neq \frac{\pi}{2} \tag{5.7}$$

ise, β oktoniyonik eğrisine oktoniyonik eğilim çizgisi denir.

Tanım 5.4 $\beta : I \to$ ***O*** oktoniyonik eğrisi s yay parametresi ile verilsin. u birim sabit uzaysal oktoniyon ve $\{T(s), N_1(s), N_2(s), N_3(s), N_4(s), N_5(s), N_6(s), N_7(s)\}$ de β eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki Frenet 8 ayaklısı olsun. Bu durumda $T(s)$ ile u arasındaki açı $\theta = \theta(s)$ olmak üzere

$$H_i : I \to \mathbb{R}, \ H_i = \frac{\langle N_{i+1}(s), u \rangle}{\cos\theta}, \ \ \cos\theta = sbt, \ \theta \neq \frac{\pi}{2}, \ 1 \leq i \leq 6 \tag{5.8}$$

fonksiyonuna, β eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki u ya göre i. inci

Harmonik eğriliği denir. Ayrıca $H_0 = 0$ olacak şekilde tanımlanır.

Teorem 5.3 $\gamma : I \to \boldsymbol{O}_P$ bir uzaysal oktoniyonik eğilim çizgisi olsun. $\gamma = \sum_{i=1}^{7} \gamma_i(s) e_i$, olmak üzere, γ dan türetilen her $\beta = \sum_{i=0}^{7} \gamma_i(s) e_i$ oktoniyonik eğrisi de bir oktoniyonik eğilim çizgisidir.

İspat $\beta : I \to \boldsymbol{O}$ s yay parametresi ile verilen bir eğri olsun. γ uzaysal oktoniyonik eğilim çizgisi ile belli, sabit bir doğrultuyu gösteren birim uzaysal oktoniyonu u ve β nın $\beta(s)$ noktasındaki Frenet 8 ayaklısı

$\{T(s), N_1(s), N_2(s), N_3(s), N_4(s), N_5(s), N_6(s), N_7(s)\}$ olmak üzere

$$\langle \beta'(s), u \rangle = \langle T(s), u \rangle$$

$$= \frac{1}{2}\left(T(s) \times \bar{u} + u \times \overline{T(s)} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left\{ \left(S_{T(s)} + \vec{V}_{T(s)} \right) \times \bar{u} \right\} + \left\{ u \times \left(S_{T(s)} + \vec{V}_{T(s)} \right) \right\} \right]$$

yazılabilir. Burada u bir uzaysal oktoniyon olduğundan $S_u = 0$ ve $\bar{u} = -u$ dır. Dolayısıyla oktoniyonik çarpım dikkate alınırsa,

$$\langle T(s), u \rangle = \frac{1}{2}\left(T(s) \times \bar{u} + u \times \overline{T(s)} \right)$$
$$= \frac{1}{2}\Big[\left\{ S_{T(s)} \cdot 0 - \langle \vec{V}_{T(s)}, -u \rangle + S_{T(s)}(-u) + 0 \cdot \vec{V}_{T(s)} + \vec{V}_{T(s)} \wedge (-u) \right\} +$$
$$\left\{ 0 \cdot S_{T(s)} - \langle u, -\vec{V}_{T(s)} \rangle + S_{T(s)} u + 0 \cdot \vec{V}_{T(s)} + u \wedge \left(-\vec{V}_{T(s)} \right) \right\} \Big]$$

$$= \frac{1}{2}\left(T(s) \times \bar{u} + u \times \overline{T(s)} \right)$$
$$= \frac{1}{2}\left[\langle \vec{V}_{T(s)}, u \rangle - S_{T(s)} u - \vec{V}_{T(s)} \wedge u + \langle u, \vec{V}_{T(s)} \rangle + S_{T(s)} u - u \wedge \vec{V}_{T(s)} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\langle \vec{V}_{T(s)}, u \rangle - \vec{V}_{T(s)} \wedge u + \vec{V}_{T(s)} \wedge u \right]$$

olmak üzere

$$\langle T(s),u\rangle=\langle \vec{V}_{T(s)},u\rangle=\cos\theta \tag{5.9}$$

bulunur. Böylece β eğrisinin oktoniyonik eğilim çizgisi olduğu görülür.

Teorem 5.4 $\beta:I\to \boldsymbol{O}$ s yay parametresi ile verilen bir oktoniyonik eğilim çizgisi olsun. $\beta(s)$ noktasındaki eğrilikler

$K(s),k_1(s),(k_2-K)(s),k_3(s),(k_4-K)(s),k_5(s),(k_6+K)(s)$ ve harmonik eğrilikleri $H_i(s),\ 1\le i\le 6$ olmak üzere

$$H_1(s)=\frac{K(s)}{k_1(s)},\ k_1(s)\neq 0$$

$$H_2(s)=\frac{H_1'(s)}{(k_2-K)(s)},\ (k_2-K)(s)\neq 0$$

$$H_3(s)=\frac{H_2'(s)+(k_2-K)(s)H_1(s)}{k_3(s)},\ k_3(s)\neq 0$$

$$H_4(s)=\frac{H_3'(s)-k_3(s)H_2(s)}{(k_4-K)(s)},\ (k_4-K)(s)\neq 0$$

$$H_5(s)=\frac{H_4'(s)+(k_4-K)(s)H_3(s)}{k_5(s)},\ k_5(s)\neq 0$$

$$H_6(s)=\frac{H_5'(s)+k_5(s)H_4(s)}{(k_6+K)(s)},\ (k_4-K)(s)\neq 0$$

dir.

İspat $\beta:I\to \boldsymbol{O}$ oktoniyonik eğrisi verilsin. u sabit birim uzaysal oktoniyon ve β nın $\beta(s)$ noktasındaki Frenet 8 ayaklısı

$\{T(s),N_1(s),N_2(s),N_3(s),N_4(s),N_5(s),N_6(s),N_7(s)\}$ olmak üzere,

$$\langle T(s),u\rangle=\cos\theta=sbt$$

yazılabilir. Bu ifadenin s ye göre türevi alınırsa,

$$\langle T'(s),u\rangle+\langle T(s),u'\rangle=0$$

veya

$$\langle K(s)N_1(s),u\rangle=0$$

bulunur. Burada $K(s)\neq 0$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\langle N_1(s),u\rangle=0$$

olur. Burada da s ye göre türev alınırsa,

$$\langle N_1'(s),u\rangle=0$$

elde edilir. (4.13) denkleminin kullanılmasıyla

$$\langle -K(s)T(s)+k_1(s)N_2(s),u\rangle=0$$

veya

$$-K(s)\langle T(s),u\rangle+k_1(s)\langle N_2(s),u\rangle=0$$

bulunur. Diğer taraftan (5.8) denkleminde $i=1$ için elde edilen

$$\langle N_2(s),u\rangle=H_1(s)\cos\theta \tag{5.10}$$

ifadesi ile (5.9) eşitliği göz önüne alınırsa, yukarıdaki eşitlikten

$$-K(s)\cos\theta+k_1(s)H_1(s)\cos\theta=0$$

veya

$$\left[-K(s)+k_1(s)H_1(s)\right]\cos\theta=0,\ \cos\theta\neq 0$$

veya

$$H_1(s)=\frac{K(s)}{k_1(s)},\ k_1(s)\neq 0$$

elde edilir. Bu sonuç, diferensiyel geometride reel eğriler için bilinen harmonik eğrilik kavramıyla tam bir benzerlik göstermektedir. Ayrıca (5.10) denkleminin türevi alınırsa

$$\left\langle N_2'(s),u\right\rangle = H_1'(s)\cos\theta \tag{5.11}$$

bulunur. (4.14) ün dikkate alınmasıyla

$$\left\langle -k_1(s)N_1(s)+(k_2-K)(s)N_3(s),u\right\rangle = H_1'(s)\cos\theta$$

veya

$$-k_1(s)\left\langle N_1(s),u\right\rangle+(k_2-K)(s)\left\langle N_3(s),u\right\rangle = H_1'(s)\cos\theta$$

bulunur. Diğer taraftan (5.8) denkleminde $i=2$ için elde edilen

$$\left\langle N_3(s),u\right\rangle = H_2(s)\cos\theta \tag{5.12}$$

ifadesi ile $H_0=0$ olduğundan, yukarıdaki eşitlikten

$$-k_1(s)\cdot 0+(k_2-K)(s)\left\langle N_3(s),u\right\rangle = H_1'(s)\cos\theta$$

veya

$$(k_2-K)(s)H_2(s)\cos\theta = H_1'(s)\cos\theta,\ \cos\theta\neq 0$$

veya

$$H_2(s)=\frac{H_1'(s)}{(k_2-K)(s)},\ (k_2-K)(s)\neq 0$$

elde edilir.

(5.12) denkleminin türevi alınırsa

$$\left\langle N_3'(s),u\right\rangle = H_2'(s)\cos\theta \tag{5.13}$$

bulunur. (4.15) ün dikkate alınmasıyla

$$\left\langle -(k_2-K)N_2(s)+k_3(s)N_4(s),u\right\rangle = H_2'(s)\cos\theta$$

veya

$$-(k_2-K)\left\langle N_2(s),u\right\rangle+k_3(s)\left\langle N_4(s),u\right\rangle = H_2'(s)\cos\theta$$

bulunur. Diğer taraftan (5.8) denkleminde $i=3$ için elde edilen

$$\langle N_4(s),u\rangle = H_3(s)\cos\theta \tag{5.14}$$

ifadesi ile (5.10) dikkate alınırsa, yukarıdaki eşitlikten

$$-(k_2-K)H_1(s)\cos\theta + k_3(s)H_3(s)\cos\theta = H_2'(s)\cos\theta$$

veya

$$k_3(s)H_3(s)\cos\theta = \left[H_2'(s)+(k_2-K)H_1(s)\right]\cos\theta,\ \cos\theta\neq 0$$

veya

$$H_3(s)=\frac{H_2'(s)+(k_2-K)(s)H_1(s)}{k_3(s)},\ k_3(s)\neq 0$$

elde edilir.

(5.14) denkleminin türevi alınırsa

$$\langle N_4'(s),u\rangle = H_3'(s)\cos\theta \tag{5.15}$$

bulunur. (4.16) ün dikkate alınmasıyla

$$\langle k_3(s)N_3(s)+(k_4-K)(s)N_5(s),u\rangle = H_3'(s)\cos\theta$$

veya

$$k_3(s)\langle N_3(s),u\rangle + (k_4-K)(s)\langle N_5(s),u\rangle = H_3'(s)\cos\theta$$

bulunur. Diğer taraftan (5.8) denkleminde $i=4$ için elde edilen

$$\langle N_5(s),u\rangle = H_4(s)\cos\theta \tag{5.16}$$

ifadesi ile (5.12) dikkate alınırsa, yukarıdaki eşitlikten

$$k_3(s)H_2(s)\cos\theta + (k_4-K)(s)H_4(s)\cos\theta = H_3'(s)\cos\theta$$

veya

$$(k_4-K)(s)H_4(s)\cos\theta=\left[H_3'(s)-k_3(s)H_2(s)\right]\cos\theta,\ \cos\theta\neq 0$$

$$H_4(s)=\frac{H_3'(s)-k_3(s)H_2(s)}{(k_4-K)(s)},\ (k_4-K)(s)\neq 0$$

elde edilir.

(5.16) denkleminin türevi alınırsa

$$\left\langle N_5'(s),u\right\rangle=H_4'(s)\cos\theta \tag{5.17}$$

bulunur. (4.17) ün dikkate alınmasıyla

$$\left\langle -(k_4-K)N_4(s)+k_5(s)N_6(s),u\right\rangle=H_4'(s)\cos\theta$$

veya

$$-(k_4-K)\left\langle N_4(s),u\right\rangle+k_5(s)\left\langle N_6(s),u\right\rangle=H_4'(s)\cos\theta$$

bulunur. Diğer taraftan (5.8) denkleminde $i=5$ için elde edilen

$$\left\langle N_6(s),u\right\rangle=H_5(s)\cos\theta \tag{5.18}$$

ifadesi ile (5.14) dikkate alınırsa, yukarıdaki eşitlikten

$$-(k_4-K)H_3(s)\cos\theta+k_5(s)H_5(s)\cos\theta=H_4'(s)\cos\theta$$

veya

$$k_5(s)H_5(s)\cos\theta=\left[H_4'(s)+(k_4-K)H_3(s)\right]\cos\theta,\ \cos\theta\neq 0$$

veya

$$H_5(s)=\frac{H_4'(s)+(k_4-K)H_3(s)}{k_5(s)},\ k_5(s)\neq 0$$

elde edilir.

(5.18) denkleminin türevi alınırsa

$$\left\langle N_6'(s),u\right\rangle=H_5'(s)\cos\theta \tag{5.19}$$

bulunur. (4.18) ün dikkate alınmasıyla

$$\left\langle -k_5(s)N_5(s)+(k_6+K)N_7(s),u\right\rangle = H_5'(s)\cos\theta$$

veya

$$-k_5(s)\left\langle N_5(s),u\right\rangle+(k_6+K)(s)\left\langle N_7(s),u\right\rangle = H_5'(s)\cos\theta$$

bulunur. Diğer taraftan (5.8) denkleminde $i=6$ için elde edilen

$$\left\langle N_7(s),u\right\rangle = H_6(s)\cos\theta \tag{5.20}$$

ifadesi ile (5.16) dikkate alınırsa, yukarıdaki eşitlikten

$$-k_5(s)H_4(s)\cos\theta+(k_6+K)(s)H_6(s)\cos\theta = H_5'(s)\cos\theta$$

veya

$$(k_6+K)(s)H_6(s)\cos\theta = \left[H_5'(s)+k_5(s)H_4(s)\right]\cos\theta,\ \cos\theta\neq 0$$

veya

$$H_6(s)=\frac{H_5'(s)+k_5(s)H_4(s)}{(k_6+K)(s)},\ (k_4-K)(s)\neq 0$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 5.2 $\beta : I \to \mathbf{O}$ s yay parametresi ile verilen bir oktoniyonik eğilim çizgisi olsun. $\beta(s)$ noktasındaki eğrilikler $K(s),k_1(s),(k_2-K)(s),k_3(s),(k_4-K)(s),k_5(s),(k_6+K)(s)$ ve harmonik eğrilikleri $H_i(s),\ 1\leq i\leq 6$ olmak üzere

$$H_1'(s)=(k_2-K)(s)H_2(s),$$

$$H_2'(s)=-(k_2-K)(s)H_1(s)+k_3(s)H_3(s),$$

$$H_3'(s)=(k_4-K)(s)H_4(s)-k_3(s)H_2(s)$$

$$H_4'(s)=-(k_4-K)(s)H_3(s)+k_5(s)H_5(s)$$

$$H_5'(s)=(k_6+K)(s)H_4(s)-k_5(s)H_4(s)$$

dır.

İspat Teorem 5.4 gereğince,

$$H_1'(s)=(k_2-K)(s)H_2(s),$$

$$H_2'(s)=-(k_2-K)(s)H_1(s)+k_3(s)H_3(s),$$

$$H_3'(s)=(k_4-K)(s)H_4(s)-k_3(s)H_2(s)$$

$$H_4'(s)=-(k_4-K)(s)H_3(s)+k_5(s)H_5(s)$$

$$H_5'(s)=(k_6+K)(s)H_4(s)-k_5(s)H_4(s)$$

$$H_6'(s)=-(k_6+K)(s)H_5(s)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\langle N_7,u\rangle=H_6\cos\theta$$

ifadesinin her iki yanının türevi alınırsa

$$\left\langle N_7',u\right\rangle=H_6'\cos\theta$$

veya (4.19) denklemi kullanılmasıyla

$$-(k_6+K)\langle N_6,u\rangle=H_6'\cos\theta$$

bulunur. Buradan da

$$-(k_6+K)H_5\cos\theta=H_6'\cos\theta\ ,\ \cos\theta\neq 0$$

veya

$$H_6'=-(k_6+K)H_5$$

elde edilir.

Teorem 5.5 $\beta : I \to \boldsymbol{O}$, s yay parametresi ile verilen bir oktoniyonik eğri olsun. $\beta(s)$ noktasındaki harmonik eğrilikler $H_i(s),\ 1 \le i \le 6$ ve β eğrisinin Frenet 8 ayaklısı $\{T(s), N_1(s), N_2(s), N_3(s), N_4(s), N_5(s), N_6(s), N_7(s)\}$ olmak üzere, β nın oktoniyonik eğilim çizgisi olması için gerek ve yeter şart $\sum_{i=1}^{6} H_i^2(s)$ nin sabit olmasıdır.

İspat

$(\Rightarrow)$ β oktoniyonik eğrisinin bir eğilim çizgisi olsun. Bu durumda, $\forall s \in I$ yay parametresi için

$$\langle \beta'(s), u \rangle = \cos\theta = sbt \tag{5.21}$$

olacak şekilde bir u sabit birim oktoniyonu vardır.

$$u = \mu_1 T(s) + \mu_2 N_1(s) + \mu_3 N_2(s) + \mu_4 N_3(s) + \mu_5 N_4(s) + \mu_6 N_5(s) + \mu_7 N_6(s) + \mu_8 N_7(s)$$

olmak üzere son ifade sırasıyla

$T(s),\ N_1(s),\ N_2(s),\ N_3(s),\ N_4(s),\ N_5(s),\ N_6(s),\ N_7(s)$ ile iç çarpılırsa;

$$\mu_1 = \langle T(s), u \rangle,\ \lambda_{i+1} = \langle N_i(s), u \rangle,\ 1 \le i \le 7$$

elde edilir. Bu durumda u, β oktoniyonik eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki $\{T(s), N_1(s), N_2(s), N_3(s), N_4(s), N_5(s), N_6(s), N_7(s)\}$ bazı cinsinden

$$u = \langle T(s), u \rangle T(s) + \sum_{i=1}^{7} \langle N_i(s), u \rangle N_i(s) \tag{5.22}$$

olacak şekilde yazılabilir. u birim olduğundan

$\|u\|^2 = 1$ veya $u \times \bar{u} = 1$

dir. Bu son eşitlik (5.22) da kullanılırsa

$$1 = \left\{ \langle T(s), u \rangle T(s) + \sum_{i=1}^{7} \langle N_i(s), u \rangle N_i(s) \right\} \times \overline{\left\{ \langle T(s), u \rangle T(s) + \sum_{i=1}^{7} \langle N_i(s), u \rangle N_i(s) \right\}}$$

$$= \{\cos\theta T + H_1 \cos\theta N_2 + H_2 \cos\theta N_3 + H_3 \cos\theta N_4 + H_4 \cos\theta N_5 + H_5 \cos\theta N_6 +$$

$$H_6 \cos\theta N_7\}\times\{\cos\theta\overline{T}+H_1\cos\theta\overline{N_2}+H_2\cos\theta\overline{N_3}+H_3\cos\theta\overline{N_4}+H_4\cos\theta\overline{N_5}+$$

$$H_5\cos\theta\overline{N_6}+H_6\cos\theta\overline{N_7}\}$$

$$=\cos^2\theta\left(T\times\overline{T}\right)+H_1\cos^2\theta\left(T\times\overline{N_2}\right)+H_2\cos^2\theta\left(T\times\overline{N_3}\right)+H_3\cos^2\theta\left(T\times\overline{N_4}\right)+$$

$$H_4\cos^2\theta\left(T\times\overline{N_5}\right)+H_5\cos^2\theta\left(T\times\overline{N_6}\right)+H_6\cos^2\theta\left(T\times\overline{N_7}\right)+H_1\cos^2\theta\left(N_2\times\overline{T}\right)+$$

$$H_1^{\,2}\cos^2\theta\left(N_2\times\overline{N_2}\right)+H_1H_2\cos^2\theta\left(N_2\times\overline{N_3}\right)+H_1H_3\cos^2\theta\left(N_2\times\overline{N_4}\right)+$$

$$H_1H_4\cos^2\theta\left(N_2\times\overline{N_5}\right)+H_1H_5\cos^2\theta\left(N_2\times\overline{N_6}\right)+H_1H_6\cos^2\theta\left(N_2\times\overline{N_7}\right)+$$

$$H_2\cos^2\theta\left(N_3\times\overline{T}\right)+H_2H_1\cos^2\theta\left(N_3\times\overline{N_2}\right)+H_2^{\,2}\cos^2\theta\left(N_3\times\overline{N_3}\right)+$$

$$H_2H_3\cos^2\theta\left(N_3\times\overline{N_4}\right)+H_2H_4\cos^2\theta\left(N_3\times\overline{N_5}\right)+H_2H_5\cos^2\theta\left(N_3\times\overline{N_6}\right)+$$

$$H_2H_6\cos^2\theta\left(N_3\times\overline{N_7}\right)+H_3\cos^2\theta\left(N_4\times\overline{T}\right)+H_3H_1\cos^2\theta\left(N_4\times\overline{N_2}\right)+$$

$$H_3H_2\cos^2\theta\left(N_4\times\overline{N_3}\right)+H_3^{\,2}\cos^2\theta\left(N_4\times\overline{N_4}\right)+H_3H_4\cos^2\theta\left(N_4\times\overline{N_5}\right)+$$

$$H_3H_5\cos^2\theta\left(N_4\times\overline{N_6}\right)+H_3H_6\cos^2\theta\left(N_4\times\overline{N_7}\right)+H_4\cos^2\theta\left(N_5\times\overline{T}\right)+$$

$$H_4H_1\cos^2\theta\left(N_5\times\overline{N_2}\right)+H_4H_2\cos^2\theta\left(N_5\times\overline{N_3}\right)+H_4H_3\cos^2\theta\left(N_5\times\overline{N_4}\right)+$$

$$H_4^{\,2}\cos^2\theta\left(N_5\times\overline{N_5}\right)+H_4H_5\cos^2\theta\left(N_5\times\overline{N_6}\right)+H_4H_6\cos^2\theta\left(N_5\times\overline{N_7}\right)+$$

$$H_5\cos^2\theta\left(N_6\times\overline{T}\right)+H_5H_1\cos^2\theta\left(N_6\times\overline{N_2}\right)+H_5H_2\cos^2\theta\left(N_6\times\overline{N_3}\right)+$$

$$H_5H_3\cos^2\theta\left(N_6\times\overline{N_4}\right)+H_5H_4\cos^2\theta\left(N_6\times\overline{N_5}\right)+H_5^{\,2}\cos^2\theta\left(N_6\times\overline{N_6}\right)+$$

$$H_5H_6\cos^2\theta\left(N_6\times\overline{N_7}\right)+H_6\cos^2\theta\left(N_7\times\overline{T}\right)+H_6H_1\cos^2\theta\left(N_7\times\overline{N_2}\right)+$$

$$H_6H_2\cos^2\theta\left(N_7\times\overline{N_3}\right)+H_6H_3\cos^2\theta\left(N_7\times\overline{N_4}\right)+H_6H_4\cos^2\theta\left(N_7\times\overline{N_5}\right)+$$

$$H_6H_5\cos^2\theta\left(N_7\times\overline{N_6}\right)+H_6H_6\cos^2\theta\left(N_7\times\overline{N_7}\right)$$

elde edilir. Oktoniyonik çarpım ve eşlenik özellikleri kullanılırsa,

$$1=\cos^2\theta+H_1\cos^2\theta\overline{n_1}+H_2\cos^2\theta\overline{n_2}+H_3\cos^2\theta\overline{n_3}+H_4\cos^2\theta\overline{n_4}+$$

$$H_5\cos^2\theta\overline{n_5}+H_6\cos^2\theta\overline{n_6}+H_1\cos^2\theta n_1+H_1{}^2\cos^2\theta+$$

$$H_1H_2\cos^2\theta\left(n_1\times\overline{n_2}\right)+H_1H_3\cos^2\theta\left(n_1\times\overline{n_3}\right)+H_1H_4\cos^2\theta\left(n_1\times\overline{n_4}\right)+$$

$$H_1H_5\cos^2\theta\left(n_1\times\overline{n_5}\right)+H_1H_6\cos^2\theta\left(n_1\times\overline{n_6}\right)+$$

$$H_2\cos^2\theta n_2+H_1H_2\cos^2\theta\left(n_2\times\overline{n_1}\right)+H_2{}^2\cos^2\theta+$$

$$H_2H_3\cos^2\theta\left(n_2\times\overline{n_3}\right)+H_2H_4\cos^2\theta\left(n_2\times\overline{n_4}\right)+H_2H_5\cos^2\theta\left(n_2\times\overline{n_5}\right)+$$

$$H_2H_6\cos^2\theta\left(n_2\times\overline{n_6}\right)+H_3\cos^2\theta n_3+H_1H_3\cos^2\theta\left(n_3\times\overline{n_1}\right)+$$

$$H_2H_3\cos^2\theta\left(n_3\times\overline{n_2}\right)+H_3{}^2\cos^2\theta+H_3H_4\cos^2\theta\left(n_3\times\overline{n_4}\right)+$$

$$H_3H_5\cos^2\theta\left(n_3\times\overline{n_5}\right)+H_3H_6\cos^2\theta\left(n_3\times\overline{n_6}\right)+H_4\cos^2\theta n_4+$$

$$H_1H_4\cos^2\theta\left(n_4\times\overline{n_1}\right)+H_2H_4\cos^2\theta\left(n_4\times\overline{n_2}\right)+H_3H_4\cos^2\theta\left(n_4\times\overline{n_3}\right)+$$

$$H_4{}^2\cos^2\theta+H_4H_5\cos^2\theta\left(n_4\times\overline{n_5}\right)+H_4H_6\cos^2\theta\left(n_4\times\overline{n_6}\right)+$$

$$H_5\cos^2\theta n_5+H_1H_5\cos^2\theta\left(n_5\times\overline{n_1}\right)+H_2H_5\cos^2\theta\left(n_5\times\overline{n_2}\right)+$$

$$H_3H_5\cos^2\theta\left(n_5\times\overline{n_3}\right)+H_4H_5\cos^2\theta\left(n_5\times\overline{n_4}\right)+H_5{}^2\cos^2\theta+$$

$$H_5H_6\cos^2\theta\left(n_5\times\overline{n_6}\right)+H_6\cos^2\theta n_6+H_1H_6\cos^2\theta\left(n_6\times\overline{n_1}\right)+$$

$$H_2H_6\cos^2\theta\left(n_6\times\overline{n_2}\right)+H_3H_6\cos^2\theta\left(n_6\times\overline{n_3}\right)+H_4H_6\cos^2\theta\left(n_6\times\overline{n_4}\right)+$$

$$H_5H_6\cos^2\theta\left(n_6\times\overline{n_5}\right)+H_6H_6\cos^2\theta$$

veya

$$1=\cos^2\theta+\sum_{i=1}^{6}H_i^2\cos^2\theta$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{i=1}^{6} H_i^2 = \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta = sbt$$

bulunur.

$(\Leftarrow)$ $\beta : I \to \boldsymbol{O}$ oktoniyonik eğrisi için $\sum_{i=1}^{6} H_i^2 = a = sbt$ eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda $\tan^2\theta = a$ olacak şekilde u ile T arasında bir θ açısı vardır. O halde,

$$u = \cos\theta T(s) + \sum_{i=2}^{7} H_{i-1}(s)\cos\theta N_i(s) \tag{5.23}$$

olacak şekilde bir u oktoniyonu tanımlayalım.

$\boldsymbol{I}$. Şimdi T ile u arasındaki açının sabit olduğunu gösterelim:

$$\langle T(s), u\rangle = \frac{1}{2}\left[T(s)\times\bar{u} + u\times\overline{T(s)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[T(s)\times\{\cos\theta\overline{T} + H_1\cos\theta\overline{N_2} + H_2\cos\theta\overline{N_3} + H_3\cos\theta\overline{N_4} +$$

$$H_4\cos\theta\overline{N_5} + H_5\cos\theta\overline{N_6} + H_6\cos\theta\overline{N_7}\} + \{\cos\theta T + H_1\cos\theta N_2 +$$

$$H_2\cos\theta N_3 + H_3\cos\theta N_4 + H_4\cos\theta N_5 + H_5\cos\theta N_6 + H_6\cos\theta N_7\}\times\overline{T(s)}]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos\theta\left(T\times\overline{T}\right) + H_1\cos\theta\left(T\times\overline{N_2}\right) + H_2\cos\theta\left(T\times\overline{N_3}\right) + H_3\cos\theta\left(T\times\overline{N_4}\right) +$$

$$H_4\cos\theta\left(T\times\overline{N_5}\right) + H_5\cos\theta\left(T\times\overline{N_6}\right) + H_6\cos\theta\left(T\times\overline{N_7}\right) + \cos\theta\left(T\times\overline{T}\right) +$$

$$H_1\cos\theta\left(N_2\times\overline{T}\right) + H_2\cos\theta\left(N_3\times\overline{T}\right) + H_3\cos\theta\left(N_4\times\overline{T}\right) +$$

$$H_4\cos\theta\left(N_5\times\overline{T}\right) + H_5\cos\theta\left(N_6\times\overline{T}\right) + H_6\cos\theta\left(N_7\times\overline{T}\right)]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos\theta + H_1\cos\theta\overline{n_1} + H_2\cos\theta\overline{n_2} + H_3\cos\theta\overline{n_3} +$$

$$H_4\cos\theta\overline{n_4} + H_5\cos\theta\overline{n_5} + H_6\cos\theta\overline{n_6} + \cos\theta +$$

$$H_1\cos\theta n_1 + H_2\cos\theta n_2 + H_3\cos\theta n_3 +$$

$$H_4\cos\theta n_4+H_5\cos\theta n_5+H_6\cos\theta n_6]$$

$$=\frac{1}{2}(2\cos\theta)$$

$$=\cos\theta$$

$$=sbt$$

elde edilir.

II. u nun birim olduğunu gösterelim:

$$\langle u,u\rangle=\left\{\langle T(s),u\rangle T(s)+\sum_{i=1}^{7}\langle N_i(s),u\rangle N_i(s)\right\}\times\overline{\left\{\langle T(s),u\rangle T(s)+\sum_{i=1}^{7}\langle N_i(s),u\rangle N_i(s)\right\}}$$

$$=\{\cos\theta T+H_1\cos\theta N_2+H_2\cos\theta N_3+H_3\cos\theta N_4+H_4\cos\theta N_5+H_5\cos\theta N_6+$$

$$H_6\cos\theta N_7\}\times\{\cos\theta\overline{T}+H_1\cos\theta\overline{N_2}+H_2\cos\theta\overline{N_3}+H_3\cos\theta\overline{N_4}+H_4\cos\theta\overline{N_5}+$$

$$H_5\cos\theta\overline{N_6}+H_6\cos\theta\overline{N_7}\}$$

yazılabilir. Buradan

$$\langle u,u\rangle=\cos^2\theta\left(T\times\overline{T}\right)+H_1\cos^2\theta\left(T\times\overline{N_2}\right)+H_2\cos^2\theta\left(T\times\overline{N_3}\right)+H_3\cos^2\theta\left(T\times\overline{N_4}\right)+$$

$$H_4\cos^2\theta\left(T\times\overline{N_5}\right)+H_5\cos^2\theta\left(T\times\overline{N_6}\right)+H_6\cos^2\theta\left(T\times\overline{N_7}\right)+H_1\cos^2\theta\left(N_2\times\overline{T}\right)+$$

$$H_1^2\cos^2\theta\left(N_2\times\overline{N_2}\right)+H_1H_2\cos^2\theta\left(N_2\times\overline{N_3}\right)+H_1H_3\cos^2\theta\left(N_2\times\overline{N_4}\right)+$$

$$H_1H_4\cos^2\theta\left(N_2\times\overline{N_5}\right)+H_1H_5\cos^2\theta\left(N_2\times\overline{N_6}\right)+H_1H_6\cos^2\theta\left(N_2\times\overline{N_7}\right)+$$

$$H_2\cos^2\theta\left(N_3\times\overline{T}\right)+H_2H_1\cos^2\theta\left(N_3\times\overline{N_2}\right)+H_2^2\cos^2\theta\left(N_3\times\overline{N_3}\right)+$$

$$H_2H_3\cos^2\theta\left(N_3\times\overline{N_4}\right)+H_2H_4\cos^2\theta\left(N_3\times\overline{N_5}\right)+H_2H_5\cos^2\theta\left(N_3\times\overline{N_6}\right)+$$

$$H_2H_6\cos^2\theta\left(N_3\times\overline{N_7}\right)+H_3\cos^2\theta\left(N_4\times\overline{T}\right)+H_3H_1\cos^2\theta\left(N_4\times\overline{N_2}\right)+$$

$$H_3H_2\cos^2\theta\left(N_4\times\overline{N_3}\right)+H_3^2\cos^2\theta\left(N_4\times\overline{N_4}\right)+H_3H_4\cos^2\theta\left(N_4\times\overline{N_5}\right)+$$

$$H_3H_5\cos^2\theta\left(N_4\times\overline{N_6}\right)+H_3H_6\cos^2\theta\left(N_4\times\overline{N_7}\right)+H_4\cos^2\theta\left(N_5\times\overline{T}\right)+$$

$$H_4H_1\cos^2\theta\left(N_5\times\overline{N_2}\right)+H_4H_2\cos^2\theta\left(N_5\times\overline{N_3}\right)+H_4H_3\cos^2\theta\left(N_5\times\overline{N_4}\right)+$$

$$H_4{}^2\cos^2\theta\left(N_5\times\overline{N_5}\right)+H_4H_5\cos^2\theta\left(N_5\times\overline{N_6}\right)+H_4H_6\cos^2\theta\left(N_5\times\overline{N_7}\right)+$$

$$H_5\cos^2\theta\left(N_6\times\overline{T}\right)+H_5H_1\cos^2\theta\left(N_6\times\overline{N_2}\right)+H_5H_2\cos^2\theta\left(N_6\times\overline{N_3}\right)+$$

$$H_5H_3\cos^2\theta\left(N_6\times\overline{N_4}\right)+H_5H_4\cos^2\theta\left(N_6\times\overline{N_5}\right)+H_5{}^2\cos^2\theta\left(N_6\times\overline{N_6}\right)+$$

$$H_5H_6\cos^2\theta\left(N_6\times\overline{N_7}\right)+H_6\cos^2\theta\left(N_7\times\overline{T}\right)+H_6H_1\cos^2\theta\left(N_7\times\overline{N_2}\right)+$$

$$H_6H_2\cos^2\theta\left(N_7\times\overline{N_3}\right)+H_6H_3\cos^2\theta\left(N_7\times\overline{N_4}\right)+H_6H_4\cos^2\theta\left(N_7\times\overline{N_5}\right)+$$

$$H_6H_5\cos^2\theta\left(N_7\times\overline{N_6}\right)+H_6H_6\cos^2\theta\left(N_7\times\overline{N_7}\right)$$

elde edilir. Oktoniyonik çarpım ve eşlenik özellikleri kullanılırsa,

$$\langle u,u\rangle=\cos^2\theta+H_1\cos^2\theta\overline{n_1}+H_2\cos^2\theta\overline{n_2}+H_3\cos^2\theta\overline{n_3}+H_4\cos^2\theta\overline{n_4}+$$

$$H_5\cos^2\theta\overline{n_5}+H_6\cos^2\theta\overline{n_6}+H_1\cos^2\theta n_1+H_1{}^2\cos^2\theta+$$

$$H_1H_2\cos^2\theta\left(n_1\times\overline{n_2}\right)+H_1H_3\cos^2\theta\left(n_1\times\overline{n_3}\right)+H_1H_4\cos^2\theta\left(n_1\times\overline{n_4}\right)+$$

$$H_1H_5\cos^2\theta\left(n_1\times\overline{n_5}\right)+H_1H_6\cos^2\theta\left(n_1\times\overline{n_6}\right)+$$

$$H_2\cos^2\theta n_2+H_1H_2\cos^2\theta\left(n_2\times\overline{n_1}\right)+H_2{}^2\cos^2\theta+$$

$$H_2H_3\cos^2\theta\left(n_2\times\overline{n_3}\right)+H_2H_4\cos^2\theta\left(n_2\times\overline{n_4}\right)+H_2H_5\cos^2\theta\left(n_2\times\overline{n_5}\right)+$$

$$H_2H_6\cos^2\theta\left(n_2\times\overline{n_6}\right)+H_3\cos^2\theta n_3+H_1H_3\cos^2\theta\left(n_3\times\overline{n_1}\right)+$$

$$H_2H_3\cos^2\theta\left(n_3\times\overline{n_2}\right)+H_3{}^2\cos^2\theta+H_3H_4\cos^2\theta\left(n_3\times\overline{n_4}\right)+$$

$$H_3H_5\cos^2\theta\left(n_3\times\overline{n_5}\right)+H_3H_6\cos^2\theta\left(n_3\times\overline{n_6}\right)+H_4\cos^2\theta n_4+$$

$$H_1H_4\cos^2\theta\left(n_4\times\overline{n_1}\right)+H_2H_4\cos^2\theta\left(n_4\times\overline{n_2}\right)+H_3H_4\cos^2\theta\left(n_4\times\overline{n_3}\right)+$$

$$H_4{}^2\cos^2\theta+H_4H_5\cos^2\theta\left(n_4\times\overline{n_5}\right)+H_4H_6\cos^2\theta\left(n_4\times\overline{n_6}\right)+$$

$$H_5\cos^2\theta n_5+H_1H_5\cos^2\theta\left(n_5\times\overline{n_1}\right)+H_2H_5\cos^2\theta\left(n_5\times\overline{n_2}\right)+$$

$$H_3H_5\cos^2\theta\left(n_5\times\overline{n_3}\right)+H_4H_5\cos^2\theta\left(n_5\times\overline{n_4}\right)+H_5{}^2\cos^2\theta+$$

$$H_5H_6\cos^2\theta\left(n_5\times\overline{n_6}\right)+H_6\cos^2\theta n_6+H_1H_6\cos^2\theta\left(n_6\times\overline{n_1}\right)+$$

$$H_2H_6\cos^2\theta\left(n_6\times\overline{n_2}\right)+H_3H_6\cos^2\theta\left(n_6\times\overline{n_3}\right)+H_4H_6\cos^2\theta\left(n_6\times\overline{n_4}\right)+$$

$$H_5H_6\cos^2\theta\left(n_6\times\overline{n_5}\right)+H_6H_6\cos^2\theta\ \langle u,u\rangle=\cos^2\varphi\left(1+\sum_{i=1}^{6}H_i{}^2\right)$$

veya

$$\langle u,u\rangle=\cos^2\theta\left(1+\sum_{i=1}^{6}H_i^2\right)$$

elde edilir. Buradan,

$$\langle u,u\rangle=\cos^2\theta\left(1+\tan^2\theta\right)$$

$$=1$$

elde edilir.

III**.** u oktoniyonun sabit ve birim olduğunu göstermeye çalışacağız. (5.23) ifadesinin türevi alınırsa,

$$\frac{du}{ds}=\cos\theta T'(s)+\sum_{i=2}^{7}H_{i-1}{}'(s)\cos\theta N_i(s)+\sum_{i=2}^{7}H_{i-1}(s)\cos\theta N_i'(s)$$

ve

$$\frac{1}{\cos\theta}\frac{du}{ds}=T'(s)+\sum_{i=2}^{7}H_{i-1}{}'(s)N_i(s)+\sum_{i=2}^{7}H_{i-1}(s)N_i'(s)$$

elde edilir. Bu son eşitlikte (4.10), (4.14), (4.15), (4.16), (4.17), (4.18), (4.19) ve Sonuç 5.2 dikkate alınırsa,

$$\frac{1}{\cos\theta}\frac{du}{ds} = K(s)N_1(s) + (k_2 - K)(s)N_2(s)H_2(s) +$$

$$\left[-(k_2 - K)(s)H_1(s) + k_3(s)H_3(s)\right]N_3(s) +$$

$$\left[-k_3(s)H_2(s) + (k_4 - K)(s)H_4(s)\right]N_4(s) +$$

$$\left[-(k_4 - K)(s)H_3(s) + k_5(s)H_5(s)\right]N_5(s) +$$

$$\left[-k_5(s)H_4(s) + (k_6 + K)(s)H_6(s)\right]N_6(s) +$$

$$\left[-(k_6 + K)(s)H_5(s)\right]N_7(s) +$$

$$\left[-k_1(s)N_1(s) + (k_2 - K)(s)N_3(s)\right]H_1(s) +$$

$$\left[-(k_2 - K)(s)N_2(s) + k_3(s)N_4(s)\right]H_2(s) +$$

$$\left[-k_3(s)N_3(s) + (k_4 - K)(s)N_5(s)\right]H_3(s) +$$

$$\left[-(k_4 - K)(s)N_4(s) + k_5(s)N_6(s)\right]H_4(s) +$$

$$\left[-k_5(s)N_5(s) + (k_6 + K)(s)N_7(s)\right]H_5(s) +$$

$$\left[-(k_6 + K)(s)N_6(s)\right]H_6(s)$$

veya

$$\frac{1}{\cos\theta}\frac{du}{ds} = K(s)N_1(s) + (k_2 - K)(s)N_2(s)H_2(s) -$$

$$(k_2 - K)(s)N_3(s)H_1(s) + k_3(s)N_3(s)H_3(s) -$$

$$k_3(s)N_4(s)H_2(s) + (k_4 - K)(s)N_4(s)H_4(s) -$$

$$(k_4 - K)(s)N_5(s)H_3(s) + k_5(s)N_5(s)H_5(s) -$$

$$k_5(s)N_6(s)H_4(s) + (k_6 + K)(s)N_6(s)H_6(s) -$$

$$(k_6 + K)(s)N_7(s)H_5(s) -$$

$$k_1(s)N_1(s)H_1(s)+(k_2-K)(s)N_3(s)H_1(s)-$$

$$(k_2-K)(s)N_2(s)H_2(s)+k_3(s)N_4(s)H_2(s)-$$

$$k_3(s)N_3(s)H_3(s)+(k_4-K)(s)N_5(s)H_3(s)-$$

$$(k_4-K)(s)N_4(s)H_4(s)+k_5(s)N_6(s)H_4(s)-$$

$$k_5(s)N_5(s)H_5(s)+(k_6+K)(s)N_7(s)H_5(s)-$$

$$(k_6+K)(s)N_6(s)H_6(s)$$

$$=K(s)N_1(s)-k_1(s)N_1(s)H_1(s)$$

$$=N_1(s)-\frac{K(s)}{k_1(s)}k_1(s)N_1(s)$$

$$=0$$

olur. Böylece,

$$\frac{1}{\cos\varphi}\frac{du}{ds}=0$$

olup

$$\frac{du}{ds}=0$$

bulunur. O halde u sabittir.

Dolayısıyla β bir oktoniyonik eğilim çizgisidir.

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, $\boldsymbol{O_P}$ uzaysal oktoniyonik uzayında, uzaysal oktoniyonlar kullanılarak uzaysal oktoniyonik eğriler için Serret-Frenet formülleri elde edilmiştir. Elde edilen Serret-Frenet formülleri kullanılarak $\boldsymbol{O}$ oktoniyonik uzayındaki oktoniyonik eğrilerin Serret-Frenet formülleri verilmiştir. Daha sonra oktoniyonik eğriler için bulunan Serret-Frenet formülleri göz önünde bulundurularak $\boldsymbol{O_P}$ ve $\boldsymbol{O}$ oktoniyonik uzaylarındaki oktoniyonik eğriler için oktoniyonik eğilim çizgisi ve oktoniyonik harmonik eğrilik ifadeleri tanıtılmış ve oktoniyonik harmonik eğrilikler oktoniyonik eğrilerin eğrilikleri cinsinden elde edilmiştir. Bunlara ek olarak, $\boldsymbol{O_P}$ ve $\boldsymbol{O}$ oktoniyonik uzaylarındaki oktoniyonik eğrilerin birer oktoniyonik eğilim çizgileri olmaları için gerek ve yeter şartlar verilmiştir. Ayrıca, uzaysal oktoniyonik eğilim çizgisinden elde edilen bir oktoniyonik eğrinin de eğilim çizgisi olduğu gösterilmiştir. Son olarak, $\boldsymbol{O_P}$ ve $\boldsymbol{O}$ oktoniyonik uzaylarındaki oktoniyonik eğrilerin oktoniyonik harmonik eğrilikleri ile eğrilikleri arasındaki ilişkiler verilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Hamilton, W. R., (1848). Four and Eight Square Theorems, in Appendix 3 of The Mathematical Papers of William Rowan Hamilton, 3, eds. H. Halberstam and R.E. Ingram, Cambridge University Press, Cambridge, 648-656.

[2] Cayley, A. (1845). “On Jacobi’s Elliptic Functions, in Reply to the Rev. B. Bronwin; and on Quaternions”, Philos. Mag., 26:208-211.

[3] Wikipedia, Octonion, http://en.wikipedia.org/wiki/Octonion, 9 December 2013.

[4] Lounesto, P., (1997). Clifford Algebras and Spinors, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

[5] Tian, Y., (2000). “Matrix Representations of Octonions and Their Applications”, Advances in Applied Clifford Algebras, 10 (1):61-90.

[6] Conway, H.C. and Smith, A.S., (2003). On Quaternions and Octonions: Their Geometry, Arithmetic, and Symmetry, A K Peters, Natick, USA.

[7] Ablamowicz, R., Lounesto, P. and Parra, J.M., (1996). Clifford Algebras with Numeric and Symbolic Computations, Birkhaerser, Boston, USA.

[8] Fenn, R., (2007). Geometry, Springer Undergraduate Mathematics Series, London.

[9] Baez, J.C., (2002). “The Octonios”, Bulletin American Mathematical Society, 39: 145-205.

[10] Dixson, G.M., (1994). Division Algebras: Octonions, Quaternions, Complex Numbers, and The Algebric Designs of Physics, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands.

[11] Corinne, A. M. and Tevian, D., (2013). “Octonions, E^6, and Particle Physics”, http://arxiv.org/pdf/0911.2253.pdf, 20 Nisan 2013.

[12] Dixon, G., (2013). “Octonion, $X,Y-$ Product G_2 Variants”, http://arxiv.org/pdf/hep-th/9604116v1.pdf, 10 Mayıs 2013.

[13] Bryukhov, D., (2013). Axially Symmetric Generalization of the Cauchy-Riemann System and Modified Clifford Analysis, http://arxiv.org/pdf/math/0302186v1.pdf, 17 Temmuz 2013.

[14] Aaron, D. W., (2013). “The Structure of E^6”, http://arxiv.org/pdf/0711.3447v2.pdf, 20 November 2013.

[15] Cederwall, A. and Preitschopf, C.R ., (1995). “S^7 and S^7 Commun. Math. Phys.” 167:373-393.

[16] Urhammer, E., (2013). Real Division Algebras, http://www.math.ku.dk/~moller/un dervisning/aktuel/rap2/emil2.pdf, 14 Mart 2013.

[17] Brendan, O., (2012). Lecture Notes 3: Quotient Spaces, Projective Spaces (Geometry and Topology), CW Complexes, SMSTC.

[18] Lounesto, P., (2001). “Octonions and Triality”, Advances in Applied Clifford Algebras, 11(2):191-213.

[19] Wikipedia, N Sphere, http://en.wikipedia.org/wiki/N-sphere, 22 April 2013.

[20] Tevian, D., (2012). The Geometry of the Octonions, Oregon State University, Word Scientific Publishing Company.

[21] Ward, J.P., (1997). Quaternions and Cayley Numbers Algebra and Applications, Kluwer Academic Publishers, London.

[22] Okubo, S., (1995). Introduction the Octonion and Other Non Associative Algebras in Physics, Cambridge University Press, Cambridge.

[23] Massey, W., (1983). “Cross Products of Vectors in Higher Dimensional Euclidean Space”, Amer. Math. Monthly, 90, 697-701.

[24] Calabi, E., (1958). “Construction and Properties of Some 6- Dimensional Almost Complex Manifolds”, Trans. Amer. Math. Soc, 87, 407-458.

[25] Sotelo, A., (2013). Cross product in Higher Dimensions, Dipigen Instute of Technology. http://www.adriansotelo.com/Writing.html, 20 April 2013.

[26] Yaylı, Y. and Bükçü, B., (1995). “Homothetic Motions at E^8 With Cayley Numbers”, Mech. Mach. Theory, 30(3):417-420.

[27] Yaylı, Y., (1997). “Unit Octonions and Some Geometrical Interpretations”, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol, 28(5):749-783.

[28] Bhupendra, C.C., Chauhan and Negi, O. P. S., (2011). “Octonion Formulation of Seven Dimensional Vector Space”, Fundamental J. Math. Physics, 1(1):41-52.

[29] Flaut, C. and Shpakivskyi, V., (2014). “De Moivre’s and Euler’s Formula for Octonion, http://www.researchgate.net/profile/Cristina_Flaut/publications 22 May 2014.

[30] Pendeza, C.A., Borges, M.F., Machado, J.M. and Oliveria, A.C., (2008). “De Moivre Extended Equation for Octonions and Power Series”, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 45(2):165-170.

[31] Hacısalihoğlu, H.H., (1983). Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, Ankara.

[32] Cho, E., (1988). “De-Moivre’s Formula for Quaternions”, Appl. Math. Lett., 11 (6):33-35.

[33] Eberly, D., (2010). Quaternion Algebra and Calculus, Geometric Tools, LLC.

[34] Coxeter, H.S.M., (1946). “Quaternions and Reflections”, American Math. Mon., 53(3):136-146.

[35] Girard, P. R., (2007). Quaternions, Clifford Algebras Relativistic Physics, Birkhäuse Verlag GmbH.

[36] Nagaraj, M. and Bharathi, K., (1985). “Geometry of Quaternionic and Pseudo Quaternionic Multiplications”, Indian J. Pure Appl. Math., 16(7):741-756.

[37] Bharathi, K. and Nagaraj M., (1987). “Quaternion Valued Function of a Real Variable Serret-Frenet Formulae”, Indian J. Pure. Appl. Math., 18(6):507-511.

[38] Özdamar, E. and Hacısalihoğlu, H.H., (1975). “A Characterization of Inclined Curves in Euclidean n Space”, Comm Fac. Sci. Univ. Ankara, series A1 24A, 15-23.

[39] Karadağ, M. ve Sivridağ A. İ., (1997). “Tek Değişkenli Kuaterniyon Değerli Fonksiyonlar ve Eğilim Çizgileri”, Erc. Ünv. Fen Bil. Derg., 13(1-2):23-36.

[40] Karadağ, M., (1992). Kuaterniyon Değerli Fonksiyonların Serret-Frenet Vektörleri ve Eğilim Çizgileri, Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Malatya.

[41] Karadağ, M. ve Sivridağ A. İ., (1997). Kuaterniyonik Eğilim Çizgileri için Karakterizasyonlar, Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, 13(1-2):37-53.

[42] Tuna, A., (2004). Yarı Öklid Uzayındaki Kuaterniyonik Eğriler için Serret-Frenet Formülleri, Yüksek Lisans Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Isparta.

[43] Çöken, A.C. and Tuna, A., (2004). “On the Quaternionic Inclined Curves in the Semi Euclidean Space E_2^4”, Applied Mathematics and Computations, 155, 373-389.

[44] Hacısalihoğlu, H.H., (1983). Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen Fakültesi Yayını, Malatya.

[45] Yüce, S., (2014). Diferensiyel Geometri, Sürat Yayını, İstanbul.

[46] Yüce, S., (2014). Analitik Geometri, Sürat Yayını, İstanbul.

[47] Gluck, H., (1966). “Higher Curvatures of Curves in Euclidean Space”, The American Mathematical Monthly, 73(7):699-704.

[48] Sabinin, L.V., Sbitneva, L. and Shestakov, I.P., (2006). Non Associative Algebra and its Applications, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, ISBN 0-8247-2669-3.

[49] Schray, J. and Mongue, A.A., (1996). "Octonionic Representations of Clifford Algebras and Triality ", Foundations of Physics, 26:17-70.

[50] Graves. (1845). "On a Connection Between the General Theory of Normal Couples and Theory of Complete Quadratic Functions of two Variables", Philos. Mag., 26:315-320.

[51] Gentili, G.H., Stoppato, C., Struppa, D.C. and Vlacci, F., (2008). "Recent Developments for Regular Functions of a Hypercomplex Variable", In Hypercomplex Analysis, ed. by Sabadini, I., Shapiro, S.V., ve Sommen, F., (2009). Trends in Mathematics, Birkhauser, Basel.

[52] Daboul, J. and Delbourgo R., (1999). "Matrix Representation of Octonions and Generalizations", Journal of Mathematical Physics, 40:4134-4150.

[53] Geocities, Zero http://www.geocities.com/zerodivisor/orepresentation.html, 8 Aralık 2013.

[54] Arxiv, http://arxiv.org/PScache/hep-th/pdf/0302/0302079.pdf, 8 Aralık 2013.

[55] Flaut, C. and Shpakivskyi, V., (2014). "An Efficient Method for Solving Equations in Generalized Quaternion and Octonion Algebras, Advances in Applied Clifford Algebras, DOI 10.1007/soooo6-014-0493-x, 5: 1-14.

[56] Leite, F.S. and Vitoria, J., (1987). "Generalization of the De Moivre Formulas for Quaternions and Octonions. In Estudos de Matematica, Homenagem a Luis de Albuquerque, E. M. Sa and J. Vitoria, editors, University of Coimbra, printed in 1994, 121-133.

[57] Tian, Y., (1998). "Universal Factorization Equalities over Real Clifford Algebras", Adv. Appl. Clifford Algebras, 8:365-402.

[58] Porteous, I. R., (1969). Topological Geometry, Van Nostrand Company.

[59] Balcı, M. (2011). Matematik Analiz, Balcı Yayınları, Ankara.

[60] Thomas, G.B., Weir, M.D. and Hass, J.R., (2009). Thomas' Calculus, 12th Edition, Pearson.

[61] Bektaş, Ö. and Yüce, S., (2014). "Real Variable Serret-Frenet Formulae of an Octonion Valued Function (Octonionic Curves)", in Proceedings of the 33nd Colloquium on Combinatorics, Ilmenau, Germany, November 2014.

[62] Bektaş, Ö. and Yüce, S., (2014). "Real Variable Serret-Frenet Formulae of an Octonion Valued Function (Octonionic Curves)", submitted.

[63] Bektaş, Ö. and Yüce, S., (2015). "On the Octonionic Inclined Curves in the 8 Dimensional Euclidean Space", in Proceedings of the 2015 Joint Mathematics, San Antonio, Texas, United State of America, January 2015.

[64] Bektaş, Ö. and Yüce, S., (2014). “On the Octonionic Inclined Curves in the 8 Dimensional Euclidean Space”, Mathematical Problems in Engineering, http://dx.doi.org/10.1155/2014/218638, 2014 (8): Article ID 218638.

[65] Wikipedia, Complex Number, http://en.wikipedia.org/wiki/Complex_number, 9 February 2013.

[66] Wikipedia, Quaternion, http://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion, 9 January 2013.

[67] Jacobson, N., (1974). Basic Algebra I, W. H. Freeman and Company, San Francisco, CA.

[68] Meral, M., (2009). Kuaterniyonlara Ait Matrisler İçin De Moivre ve Euler Formülleri, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

[69] Mercan, Y., (2007). Pseudo Kuaterniyonlar, Pseudo Hiperbolik Uzay ve Pseudo Küresel Uzaylar, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

[70] Ercan, Z., (2010). Dual Kuaterniyonlar, Lisans Bitirme Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, İstanbul.

[71] Wikipedia, Quaternions and Spatial Rotation, http://en.wikipedia.org/wiki/Quaternions_and_spatial_rotation, 17 May 2013.

[72] Wikipedia, Rodrigues’ Rotation Formula, http://en.wikipedia.org/wiki/Rodrigues’_rotation_formula, 22 March 2013.

[73] Peng, L. and Yang, L., (1999). “The Curl in Seven Dimensional Space and Its Applications”, Approx. Theory and Its and Appl., 15 (3): 66-80.

EK-A

KOMPLEKS UZAYLAR

A-1 **Temel Kavramlar**

Kompleks sayılar $\mathbb{C}=\left\{z=x+iy \middle| x,y\in\mathbb{R}, i^2=-1\right\}$ kümesi ile tanımlanır.

Tanım A.1 $\mathbb{C}$ üzerinde toplama işlemi

$z_1=x_1+iy_1,\ z_2=x_2+iy_2\in\mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned} z_1+z_2 &= (x_1+iy_2)+(x_2+iy_2) \\ &= x_1+x_2+i(y_1+y_2) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece $+:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ bir iç işlemdir.

Tanım A.2 $\mathbb{C}$ üzerinde çarpma işlemi

$z_1=x_1+iy_1,\ z_2=x_2+iy_2\in\mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned} z_1\bullet z_2 &= (x_1+iy_1)\bullet(x_2+iy_2) \\ &= x_1\bullet x_2+ix_1y_2+iy_1x_2-y_1y_2 \\ &= (x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. Böylece $\bullet:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ bir iç işlemdir.

Tanım A.3 $\mathbb{C}$ de eşitlik

$z_1=x_1+iy_1,\ z_2=x_2+iy_2\in\mathbb{C}$ için $z_1=z_2\Leftrightarrow x_1=x_2$ ve $y_1=y_2$ dir.

Tanım A.1 $z=x+iy$ olmak üzere,

z nin eşleniği $\overline{z} = x - iy$ dir.

Burada x reel kısım y ise sanal kısımdır.

Sonuç A.1 $(\mathbb{C}, +, \bullet)$ üçlüsü bir halkadır.

i) kapalılık

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için

$z_1 + z_2 = z \in \mathbb{C}$ olduğundan kapalıdır.

ii) Birleşme

$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ için $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ dir.

iii) Etkisiz (birim) eleman

$\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$ için, $z + z_e = z_e + z = z$ olacak şekilde $z_e \in \mathbb{C}$ var mı?

$$(x + iy) + (a + ib) = x + iy$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + a = x \\ y + b = y \end{array}\right\} \Rightarrow a = 0, b = 0 \Rightarrow z_e = 0 + i0 \Rightarrow z_e = 0$$

iv) Ters eleman

$\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$ için, $z + z^{-1} = z_e = 0$ olacak şekilde z^{-1} var mıdır.

$$(x + iy) + (a + ib) = 0$$

$$\Rightarrow a = -x, b = -y \Rightarrow z^{-1} = -z \text{ dir.}$$

v) Değişme özelliği

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ dir.

$(\mathbb{C}, +)$ bir abel gruptur.

1) $(z_1.z_2).z_3 = z_1.(z_2.z_3)$ ve

2) $(z_1 + z_2).z_3 = (z_1.z_3) + (z_2.z_3)$

$$z_3.(z_1+z_2)=(z_3.z_1)+(z_3.z_2)$$

olduğundan $(\mathbb{C},+,\bullet)$ bir halkadır.

Sonuç A.2 $(\mathbb{C},+,\bullet)$ halkasının etkisiz (birim) elamanı $1_{\mathbb{C}}=1+i0=1$ dir.

Sonuç A.3 $(\mathbb{C},+,\bullet)$ halkası değişmelidir.

$\forall z_1=x_1+iy_1,\quad z_2=x_2+iy_2\in\mathbb{C}$ için

$$z_1.z_2=z_2.z_1$$

olduğunu gösterilmelidir.

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= (x_1+iy_1)(x_2+iy_2) \\ &= (x_1x_2+y_1y_2)+i(y_1x_2+x_1y_2) \\ &= (x_2x_1+y_2y_1)+i(x_2y_1+y_2x_1) \\ &= z_2.z_1 \end{aligned}$$

olduğundan değişmelidir.

Sonuç A.4 $(\mathbb{C},+,\bullet)$ cisimdir. Çünkü $\forall z\neq 0\in\mathbb{C}$ sayısının çarpma işlemine göre tersi vardır.

$\mathbb{C}$ nin, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde vektör uzayı yapısı

I . $(\mathbb{C},\oplus)$ abel grubudur.

II . $\lambda\in\mathbb{R}$ ve $\forall z=x+iy\in\mathbb{C}$ için $\lambda z=\lambda x+i\lambda y\in\mathbb{C}$ olacak şekilde

$$\odot:\mathbb{R}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$$

dış işlemini tanımlansın.

Bu dış işlem vektör uzayı aksiyomlarını sağlar.

1) $\forall z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2\in\mathbb{C}$ ve $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ için $\alpha\odot(z_1\oplus z_2)=\alpha\odot z_1\oplus\alpha\odot z_2$

2) $\forall z=x+iy\in\mathbb{C}$ ve $\forall\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ için $(\alpha_1+\alpha_2)\odot z=\alpha_1\odot z\oplus\alpha_2\odot z$

3) $\forall z=x+iy\in\mathbb{C}$ ve $\forall\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ için $(\alpha_1.\alpha_2)\odot z=\alpha_1(\alpha_2\odot z)$

4) $(\mathbb{C},+,.)$ halkasının 2. işleme göre birim elemanı $1_{\mathbb{C}}$ olsun. $\forall z \in \mathbb{C}$ için $1_{\mathbb{C}} \odot z = z$ dir.

Böylece $\{\mathbb{C},\oplus,\mathbb{R},+,.,\odot\}$ altılısı bir vektör uzayıdır.

$\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$ için

$x + iy = x.1 + i.y$

olduğundan $\mathbb{C}$ kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde $\{1, i\}$ bazına sahip 2 boyutlu bir vektör uzayıdır.

Kompleks sayılar $\mathbb{R}$ cismi üzerinde 2 boyutlu vektör uzayı olduğundan $\mathbb{R}^2$ nin noktaları olarak tanımlanabilir. $\{1, i\}$ standart bazını kullanarak $z = x + iy$, (x, y) noktası ile gösterilir.

Tanım A.4 $\mathbb{C}$ kümesi üzerinde iç çarpım,

$z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned}
&\langle , \rangle : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R} \\
&\quad (\mathbf{z_1}, \mathbf{z_2}) \to \langle \mathbf{z_1}, \mathbf{z_2} \rangle = \mathbf{z_1}\overline{\mathbf{z_2}} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = x_1 x_2 + y_1 y_2
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım A.5 Bir kompleks sayının normu

$$\mathbf{z} = x + iy \in \mathbb{C} \text{ için } \|\mathbf{z}\| = \sqrt{\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle} = \sqrt{\mathbf{z}\overline{\mathbf{z}}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

şeklindedir.

Tanım A.6 İki kompleks sayı arasındaki uzaklık

$z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned}
d(\mathbf{z_1}, \mathbf{z_2}) &= \|\mathbf{z_1} - \mathbf{z_2}\| \\
&= \sqrt{(\mathbf{z_1} - \mathbf{z_2})\overline{(\mathbf{z_1} - \mathbf{z_2})}} \\
&= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım A.7 $z = x + iy \in \mathbb{C}$ olsun.

$|z|^2 = z\overline{z} = r^2$ ifadesi merkezi orijin olan r yarıçaplı çemberdir. Denklemi ise

$|z| = r$

olmak üzere

$z\overline{z} = r^2$

için

$x^2 + y^2 = r^2$

elde edilir.

A-2 Kompleks Sayıların Matris Gösterimi

$\mathbb{C} = \{z = x + iy \,|\, x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ kümesinin $\mathbb{R}$ üzerinde $\{1, i\}$ bazına sahip 2 boyutlu bir vektör uzayı olduğu bilinmektedir.

$$
\begin{aligned}
f_z &: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\
& w \to f_z(w) = zw
\end{aligned}
$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlayalım.

$$f_z(w_1 + w_2) = f_z(w_1) + f_z(w_2)$$

$$f_z(\lambda w) = \lambda f_z(w)$$

olduğundan bu dönüşüm lineerdir. Her lineer dönüşüme bir matris karşılık geleceğinden $\{1, i\}$ bazını kullanarak bu lineer dönüşüme karşılık gelen matris bulunabilir.

$$f_z(1) = z.1 = (x + iy).1 = x + iy$$

$$f_z(i) = z.i = (x + iy).i = -y + ix$$

elde edilir. O halde f_z lineer dönüşümüne karşılık gelen matris $\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$ olarak elde edilir.

Özel olarak, $z = 0 + i.1 = i$ alınırsa $f_i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olarak elde edilir ve

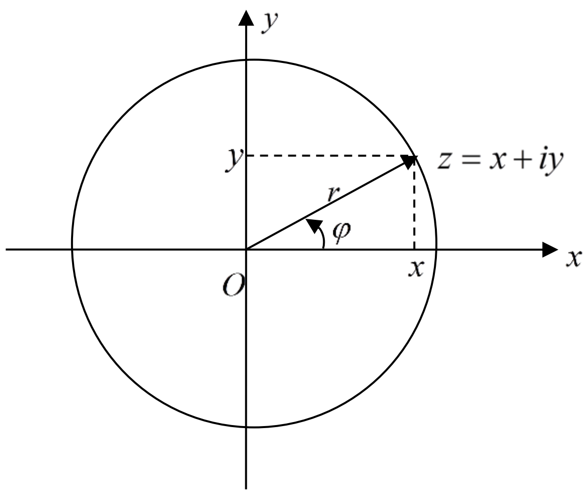
$$i^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1$$

olduğu görülür.

A-3 Kompleks Sayıların Kutupsal Formu

Sıfırdan farklı her kompleks sayı kutupsal formda yazılabilir.

$\|z\| = \sqrt{z.\overline{z}} = r$ olmak üzere z nin orijine olan uzaklığı olmak üzere, bir kompleks sayının kutupsal formu



Şekil EK-A. 1

$z = x + iy,\ x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ olmak üzere,

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = re^{i\varphi}$$

şeklinde elde edilir.

Kutupsal Formda Çarpma

$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ olmak üzere,

$z_1.z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

yazılabilir.

$e^{i\varphi}$ **ile Çarpma**

$\{1, i\} \to \{e^{i\varphi}, ie^{i\varphi}\}$

$z \to ze^{i\varphi}$

dönüşümü dönmeye karşılık gelir. $e^{i\varphi}$ ile çarpma φ açısı kadar dönmeye karşılık gelir.

i **nin geometrik yorumu**

Herhangi bir kompleks sayı $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$ olsun.

$i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ olduğundan

$$z.i = re^{i\varphi}.e^{i\frac{\pi}{2}} = re^{i\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)} = r\left[\cos(\varphi+\frac{\pi}{2}) + i\sin(\varphi+\frac{\pi}{2})\right]$$

dir. Buradan bir kompleks sayıyı i ile çapmanın $\dfrac{\pi}{2}$ kadar dönme olduğu söylenebilir.

i^n **nin geometrik yorumu**

Herhangi bir kompleks sayı $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$ olsun.

$i^n = \left(c\,\mathrm{os}\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)^n = e^{in\frac{\pi}{2}}$ olduğundan bir kompleks sayıyı i^n ile çapmak $n\dfrac{\pi}{2}$ kadar dönmeye tekabül eder.

Bu bölümdeki bilgilere ve daha fazla bilgiye [65] kaynağından ulaşılabilinir.

EK-B

KUATERNİYONLAR

B-1 Reel Kuaterniyonlar

Tanım B.1 $1, i, j$ ve k sembolleri, sırası ile $\mathbb{R}^4$ uzayının $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$ ve $(0,0,0,1)$ standart baz vektörleri olsun.

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \\ &\ (a,b) \to ab \end{aligned}$$

işlemi

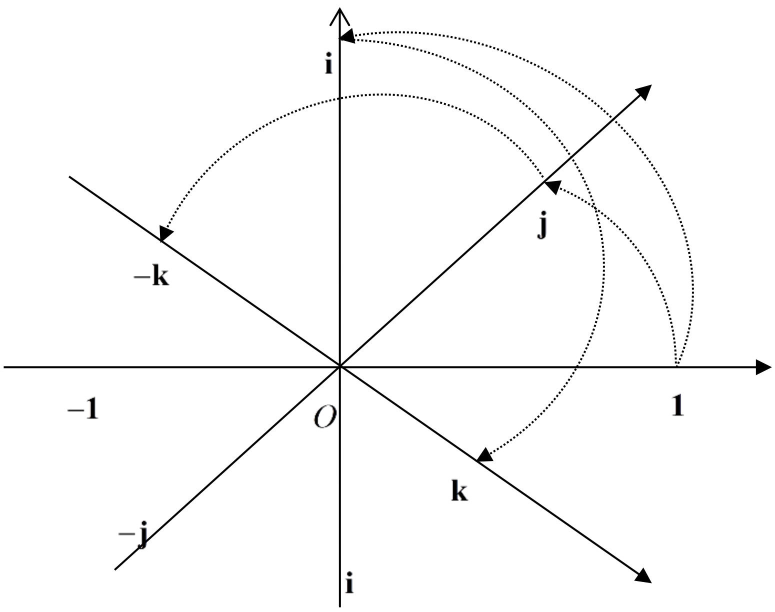
$$\left.\begin{aligned} ij &= k = -ji \\ jk &= i = -kj \\ ki &= j = -ik \end{aligned}\right\} \text{ ve } \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1, ijk = -1$$

denklemleri vasıtasıyla tanımlansın. Bu 1 birimli (bilineer) çarpıma $\mathbb{R}^4$ uzayında kuaterniyon çarpımı denir [66, 67].

Önerme B.1 $\mathbb{R}^4$ üzerinde tanımlı kuaterniyonlar çarpımı işlemi iyi tanımlı bir birleşimli çarpımdır.

Not B.1 Bu kuaterniyon çarpımı $ij = -ji$ olduğundan değişimli değildir.

Kuaterniyonlarla ilgili olarak aşağıdaki şekil verilebilir [66, 67].



Şekil B. 1 4D-uzayındaki 90° dönme olarak kuaterniyon birim çarpımın grafik ifadesi

Not B.2 Reel ve kompleks sayılardaki çarpmanın aksine kuaterniyonlar çarpımı değişimli değildir. Bundan dolayı kuaterniyonlar üzerinde polinom denklemleri polinomun derecesinden çok farklı çözümleri olabilir.

Örneğin; $z^2+1=0$ denklemi $a_0{}^2+a_1{}^2+a_2{}^2=1$ olacak şekilde $z=a_0+a_1i+a_2j$ kuaterniyon çözümüne sahiptir. Bu çözümler kuaterniyonların 3 boyutlu pure imajiner altuzayı da "sıfır" merkezli bir birim kürede bulunmaktadır ve bu imajiner kürenin kompleks düzlemle arakesiti yalnızca i ve $-i$ pol noktalarıdır.

Tanım B.2 Bir q reel kuaterniyonu $1,\ i,\ j,\ k$ baz elemanları ve a_i'ler reel sayılar olmak üzere

$$q=a_0+a_1i+a_2j+a_3k$$

şeklinde tanımlanır. Reel kuaterniyonların kümesi ***H*** olmak üzere,

H = $\left\{q=a_0 1+a_1i+a_2j+a_3k \,\middle|\, a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R},\ i^2=j^2=k^2=-1, ijk=-1\right\}$

şeklinde tanımlanır [31, 66, 67].

Böylece, $\boldsymbol{H}$; $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}^3$ ün bir direkt toplamı olarak ifade edilebilir. Ayrıca, hem reel sayılar hem de kompleks sayılar kümesinin $\boldsymbol{H}$ nın alt uzayı olduğu söylenebilir. Yani

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \boldsymbol{H}$$

yazılabilir. Kuaterniyonlar, reel sayılara i, j ve k elemanlarının eklenmesiyle kompleks sayıların bir genelleştirilmesi olarak elde edilir. Bundan dolayı,

$\boldsymbol{H} = \left\{ q = a_0 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \,\middle|\, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R},\ i^2 = j^2 = k^2 = -1, ijk = -1 \right\}$ kuaterniyonlar kümesinin her bir q elemanı

$$\begin{aligned} S,V : \boldsymbol{H} &\to \boldsymbol{H} \\ q &\to S(q) = S_q = a_0 \\ q &\to V(q) = V_q = a_1 i + a_2 j + a_3 k \end{aligned}$$

olmak üzere

$$q = S_q + V_q$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $S_q = a_0$ reel sayısına q kuaterniyonunun reel kısmı ve $V_q = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ vektörüne de q kuaterniyonunun uzaysal kısmı (vektörel veya pure kısmı) denir denir [31, 66, 67].

Kompleks sayıların reel ve imajinar kısımlarının direkt toplamına benzer olarak bir kuaterniyon reel ve uzaysal kuaterniyon kısımlarının direkt toplamı olarak yazılabilir. Ayrıca, $a_0 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ şeklindeki bir kuaterniyon $(a_0 + a_1 i) + (a_2 + a_3 i) j = \alpha + \beta j$ yazılabilir. Kompleks sayılar j ile birlikte değişimli değil fakat $\beta j = \overline{\beta} j$ sağlanır. Ayrıca, $\boldsymbol{H}$ kuaterniyonlar kümesinden özel olarak $\mathbb{R}$ reel sayılar, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar ve $\mathbb{R}^3$ 3 boyutlu vektör uzayı kümeleri elde edilebilir.

Tanım B.3 $\boldsymbol{H}$ kümesi üzerinde toplama işlemi

$$\begin{aligned} \oplus : \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H} &\to \boldsymbol{H} \\ (q, p) \to q \oplus p &= \left(S_q + V_q\right) \oplus \left(S_p + V_p\right) \\ &= \left(S_q + S_p\right) + \left(V_q + V_p\right) \end{aligned}$$

$$= S_{q+p} + V_{q+p}$$

veya

$\forall\ q = a_0 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k,\ \ p = b_0 1 + b_1 i + b_2 j + b_3 k \in \boldsymbol{H}$ kuaterniyonları için

$q \oplus p = (a_0 + b_0)1 + (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k$

şeklinde tanımlanır. Bu işlemle birlikte $(\boldsymbol{H}, \oplus)$ ikilisi bir Abel grubudur. $\boldsymbol{H}$ nın $\oplus$ işlemine göre birim elemanı $0 + 0i + 0j + 0k$ dır [31].

Tanım B.4 $\boldsymbol{H}$ kümesi üzerinde skalerle çarpma işlemi

$\odot : \mathbb{R} \times \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$

$$(\lambda, q) \to \lambda \odot q = \lambda \odot (S_q + V_q)$$

$$= \lambda S_q + \lambda V_q$$

veya

$\forall\ q = a_0 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \boldsymbol{H}$ kuaterniyonu ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$\lambda \odot q = (\lambda a_0)1 + (\lambda a_1)i + (\lambda a_2)j + (\lambda a_3)k$

şeklinde tanımlanır.

Böylece $\odot : \mathbb{R} \times \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$ dış işlemi aşağıdaki özellikleri sağlar:

i) $\lambda \odot (q \oplus p) = (\lambda \odot q) \oplus (\lambda \odot p)$

ii) $(\lambda_1 + \lambda_2) \odot q = (\lambda_1 \odot q) \oplus (\lambda_2 \odot q)$

iii) $(\lambda_1 \lambda_2) \odot q = \lambda_1 \odot (\lambda_2 \odot q)$

iv) $1 \odot q = q$

O halde $\{\boldsymbol{H}, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ altılısı bir vektör uzayıdır. $\boldsymbol{H} = Sp\{1, i, j, k\}$ olduğundan $boy\boldsymbol{H} = 4$ dır. Ayrıca $q = a_0 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ yazılabilir [31, 66].

Teorem B.1 $\{\boldsymbol{H}, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$ vektör uzayı $\{\mathbb{R}^4, [\boldsymbol{+}], \mathbb{R}, +, \cdot, [\cdot]\}$ vektör uzayına izomorftur. Burada $[\boldsymbol{+}]$ işlemi $\mathbb{R}^4$ de iki vektörün toplamı işlemi $[\cdot]$ işlemi ise bir skalerle $\mathbb{R}^4$ de bir vektörün dış çarpımı işlemidir [31].

İspat

- $$\begin{aligned} \varphi &: \boldsymbol{H} \to \mathbb{R}^4 \\ q &\to \varphi(q) = (a_0, a_1, a_2, a_3) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm lineerdir:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda \odot q \oplus \mu \odot p) &= \varphi\big(\lambda \odot (a_0 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) \oplus \mu \odot (b_0 1 + b_1 i + b_2 j + b_3 k)\big) \\ &= \varphi\big((\lambda a_0 + \mu b_0) + (\lambda a_1 + \mu b_1) i + (\lambda a_2 + \mu b_2) j + (\lambda a_3 + \mu b_3) k\big) \\ &= (\lambda a_0 + \mu b_0, \lambda a_1 + \mu b_1, \lambda a_2 + \mu b_2, \lambda a_3 + \mu b_3) \\ &= (\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)[+](\mu b_0, \mu b_1, \mu b_2, \mu b_3) \\ &= \lambda[\cdot](a_0, a_1, a_2, a_3)[+]\mu[\cdot](b_0, b_1, b_2, b_3) \\ &= \lambda \odot \varphi(a_0 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) \oplus \mu \odot \varphi(b_0 1 + b_1 i + b_2 j + b_3 k) \\ &= \lambda \odot \varphi(q) \oplus \mu \odot \varphi(p) \end{aligned}$$

- φ birebirdir:

$\varphi(q) = \varphi(p)$ olsun .Bu durumda $\varphi(a_0 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) = \varphi(b_0 1 + b_1 i + b_2 j + b_3 k)$ yazılır. φ nin tanımı göz önüne alınırsa, $(a_0, a_1, a_2, a_3) = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ elde edilir. Böylece $q = p$ olur.

$boy\boldsymbol{H} = 4$, $boy\mathbb{R}^4 = 4$ ve φ birebir olduğundan φ örtendir. Sonuç olarak φ bir izomorfizmdir.

Tanım B.5

$$\begin{aligned} \times &: \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H} \\ &(q, p) \to q \times p \end{aligned}$$

kuaterniyon çarpımı

$\times$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

tablosu kullanılarak $\forall\ q = a_0 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k,\ \ p = b_0 1 + b_1 i + b_2 j + b_3 k \in \boldsymbol{H}$ kuaterniyonları için

$$\begin{aligned} q \times p &= \left(a_0 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k\right) \times \left(\mathrm{b}_0 1 + b_1 i + b_2 j + b_3 k\right) \\ &= \left[\left(a_0 \mathrm{b}_0\right) - \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3\right)\right] 1 + \left[a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_2 b_3 - a_3 b_2\right] i + \\ &+ \left[a_0 b_2 + a_2 b_0 + a_3 b_1 - a_1 b_3\right] j + \left[a_0 b_3 + a_3 b_0 + a_1 b_2 - b_2 a_1\right] k \end{aligned}$$

elde edilir veya

$$q \times p = S_q S_p - \left\langle V_q, V_p \right\rangle + S_q V_p + S_p V_q + V_q \wedge V_p$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\wedge$ işlemi iki vektörün vektörel çarpımı, $\langle , \rangle$ işlemi iki vektörün iç çarpımıdır. İki kuaterniyonun çarpımının özellikleri

1. İki kuaterniyonun çarpımı da bir kuaterniyondur.
2. Kuaterniyon çarpımı birleşimlidir.
3. Kuaterniyon çarpımı değişmeli değildir.
4. Kuaterniyon çarpımı sağdan ve soldan dağılımlıdır.
5. $(\lambda \odot q) \times p = q \times (\lambda \odot p) = \lambda \odot (q \times p)$

dır [31, 66].

Sonuç B.1 $\left(\boldsymbol{H}, \oplus, \times\right)$ üçlüsü bir halkadır.

Sonuç B.2 $\boldsymbol{H} - \left\{0 + 0i + 0j + 0k\right\} = \boldsymbol{H}^*$ olmak üzere $\left(\boldsymbol{H}^*, \times\right)$ Abel grubu olmadığı için $\left(\boldsymbol{H}, \oplus, \times\right)$ üçlüsü cisim değildir.

Sonuç B.3 $\{\boldsymbol{H}, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot, \times\}$ yedilisi bir birleşimli cebirdir. Bu cebire kuaterniyon cebiri denir.

Ayrıca

Özel olarak,

i) q ve p birer skalar veya

ii) q ve p nin vektörel kısımları orantılı ise (yani $V_q = \mu V_p$) ise

$q \times p = p \times q$

eşitliği sağlanır.

B.1.1 Reel Kuaterniyonlar Üzerinde Temel İşlemler

Tanım B.6 Kuaterniyonlar için eşitlik $q = S_q + V_q,\ p = S_p + V_p \in \boldsymbol{H}$ olmak üzere

$q = p \Leftrightarrow S_q = S_p$ ve $V_q = V_p$

şeklinde tanımlanır [31, 66].

Tanım B.7 Toplama ve skalar ile çarpma işlemlerinden $q = S_q + V_q,\ p = S_p + V_p \in \boldsymbol{H}$ kuaterniyonlarının farkı

$q - p = \left(S_q - S_p\right) + \left(V_q - V_p\right)$

şeklinde tanımlanır [31, 66].

Tanım B.8

$\overline{} : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$

$$q \to \overline{q} = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k = S_q - V_q$$

şeklinde tanımlanır ve $\overline{q}$ kuaterniyonuna q kuaterniyonunun eşleniği denir.

Böylece, $\forall\ q = a_0 1 + a_1 i + a_2 j + a_3 k = S_q + V_q$ kuaterniyonu için $q \times \overline{q} = \overline{q} \times q$ çarpımı hesaplanırsa,

$$
\begin{aligned}
q\times\overline{q} &= \left(S_q+V_q\right)\times\left(S_q-V_q\right)\\
&= S_q{}^2-\left\langle V_q,-V_q\right\rangle+S_qV_q-S_qV_q+V_q\wedge V_q\\
&= S_q{}^2+\left\langle V_q,V_q\right\rangle\\
&= a_0{}^2+a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2
\end{aligned}
$$

elde edilir. O halde

$$q\times\overline{q}=\overline{q}\times q\geq 0$$

dır ve

$$q\times\overline{q}=\overline{q}\times q=0\Leftrightarrow q=0$$

dır [31, 66].

Eşlenik işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$\forall\ q,p\in\boldsymbol{H}$ kuaterniyonları için

i) $\overline{(q+p)}=\overline{q}+\overline{p}$

ii) $\overline{(q\times p)}=\overline{q}\times\overline{p}$

$\forall\ q\in\boldsymbol{H}$ kuaterniyonı ve $\lambda\in\mathbb{R}$ reel sayısı için

iii) $\overline{\overline{q}}=q$

iv) $\overline{\lambda q}=\lambda\overline{q}$

v) $q\in\mathbb{R}$ ise $\overline{q}=q$

vi) $q\in\mathbb{R}^3$ ise $\overline{q}=-q$

vii) $S_q=\dfrac{q+\overline{q}}{2}$

viii) $V_q=\dfrac{q-\overline{q}}{2}$

Tanım B.9

$\| \ \| : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}$

$$q \to \|q\| = \sqrt{q \times \overline{q}} = \sqrt{\overline{q} \times q}$$

veya

$q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ ise

$\|q\| = \sqrt{q \times \overline{q}} = \sqrt{a_0{}^2 + a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}$

pozitif reel sayısına q nun normu denir [31, 66].

Tanım B.10 q_0 reel kuaterniyonu için $\|q_0\| = 1$ ise q_0 a birim reel kuaterniyon denir.

Norm işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$\forall\ q, p \in \boldsymbol{H}$ kuaterniyonları için

i) $\|q \times p\| = \|q\| \|p\| = \|p \times q\|$

ii) $\|q + p\| \leq \|q\| + \|p\|$

iii) $\|q\|^2 + \|p\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|q + p\|^2 + \|q - p\|^2\right)$ dır.

$\forall\ q \in \boldsymbol{H}$ kuaterniyonı için

iv) $\|q\| = \|\overline{q}\|$

v) $\|q\| = 0 \Leftrightarrow q = 0$

vi) q_0 birim kuaterniyon olmak üzere $q = \|q\| q_0$ dır [31, 66].

Tanım B.11

$\left(\| \ \|\right)^{-1} : \boldsymbol{H} - \{0\} \to \boldsymbol{H} - \{0\}$ işlemi

$$q \to q^{-1} = \frac{\overline{q}}{\|q\|^2}$$

şeklinde tanımlanır. Burada q^{-1} e q kuaterniyonun tersi denir [31, 66].

Ters işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i) $\left\| q^{-1} \right\| = \left\| q \right\|^{-1}$

ii) $q \times q^{-1} = q^{-1} \times q$

$q \times q^{-1} = q \times \left(\left\| q \right\|^{-2} \overline{q} \right) = \left\| q \right\|^{-2} \left(q \times \overline{q} \right) = \left\| q \right\|^{-2} \left\| q \right\|^{2} = 1$.

Sonuç B.4 $q \neq 0, \ \forall\, q \in \boldsymbol{H}$ kuaterniyonu $q^{-1} = \left\| q \right\|^{-2} \overline{q}$ tersine sahip olduğundan $\boldsymbol{H}$ cebiri *bölüm cebiri*dir.

Böylece $\boldsymbol{H}$ cebirinde *bölme işlemi* tanımlanabilir.

Tanım B.12 $q \neq 0$ olmak üzere $p \in \boldsymbol{H}$ kuaterniyonunu $q \in \boldsymbol{H}$ kuaterniyonuna bölmek için p yi q^{-1} ile çarpmak gerekir. Fakat kuaterniyon çarpımı değişimli olmadığından bu çarpma işlemi iki türlüdür. Bundan dolayı, p yi q ya iki türlü bölmek gerekir.

$r_1 = p \times q^{-1}$

veya

$r_2 = q^{-1} \times p$.

Burada

r_1 kuaterniyonuna; p nin q ile *sağdan*,

r_2 kuaterniyonuna; p nin q ile *soldan bölümü* denir.

Genel olarak, $r_1 \neq r_2$ olduğundan $\dfrac{p}{q}$ notasyonu kullanılamaz.

Genelleme ile

İ) $\overline{\left(q_1 + q_2 + \ldots + q_n \right)} = \overline{q}_1 + \overline{q}_2 + \ldots + \overline{q}_n$

ii) $\overline{\left(q_1 \times q_2 \times \ldots \times q_n \right)} = \overline{q}_n \times \overline{q}_{n-1} \times \ldots \times \overline{q}_1$

iii) $\left\| q_1 \times q_2 \times \ldots \times q_n \right\| = \left\| q_1 \right\| \left\| q_2 \right\| \ldots \left\| q_n \right\|$

iv) $(q_1 \times q_2 \times ... \times q_n)^{-1} = q_n^{-1} \times ... \times q_2^{-1} \times q_1^{-1}$

bağıntıları elde edilir [31, 66].

Tanım B.13 Skalar kısmı sıfır olan kuaterniyona vektör veya uzaysal kuaterniyon adı verilir.

Sonuç B.5 $q = V_q = a_1 i + a_2 j + a_3 k,\ \ p = V_p = b_1 i + b_2 j + b_3 k \in \boldsymbol{H}$ gibi iki uzaysal kuaterniyonun kuaterniyon çarpımı

$$\begin{aligned} &\times : \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H} \\ &\quad (q, p) \to q \times p = -\langle q, p \rangle + q \wedge p \end{aligned}$$

şeklindedir.

q ve p kuaterniyonlarının vektörel çarpımı

$$q \wedge p = V_{(p \times q)}$$

şeklinde tanımlanır. Burada q ve p iki uzaysal kuaterniyon olduğundan $\mathbb{R}^3$ de birer vektörlerdir ve $\wedge$ ise $\mathbb{R}^3$ deki vektörel çarpım işlemidir [31, 66].

Önerme B.2

1) $\begin{aligned} &\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ &\quad (p \wedge q) \to V_{(p \times q)} \end{aligned}$ dönüşümü bilineerdir.

2) $q \wedge p = -(p \times q)$

3) $p \wedge p = \langle p, p \wedge q \rangle = \langle q, p \wedge q \rangle = 0$

4) $q \times p = \overline{(p \times q)}$

5) $q \times p = -\langle q, p \rangle + q \wedge p$ ifadesinden iki sonuç çıkarılabilir.

i) İki uzaysal kuaterniyon dik ise $q \times p = q \wedge p$ dir.

ii) İki uzaysal kuaterniyon paralel ise $q \times p = -\langle q, p \rangle$ dir [31, 66].

B.1.2 Reel Kuaterniyonların Kutupsal Gösterimi

Reel eksen ile q reel kuaterniyonu arasındaki açı θ olsun.

$\cos\theta = \dfrac{a_0}{\|q\|}$ ve $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{\|q\|}$ olup, buna göre

$$q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k = \|q\| \frac{a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k}{\|q\|}$$

veya

$$q = \|q\| \left[\frac{a_0}{\|q\|} + \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{\|q\|} \left(\frac{a_1 i + a_2 j + a_3 k}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \right) \right]$$

ve

$$\boldsymbol{n} = \frac{a_1 i + a_2 j + a_3 k}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

alınırsa bir reel kuaterniyonun kutupsal gösterimi

$$q = \|q\| \left(\cos\theta + \boldsymbol{n} \sin\theta \right)$$

elde edilir [66].

B.1.3 Birim Reel Kuaterniyonların Kutupsal Gösterimi

$q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ birim kuaterniyonu verilsin.

$a_0 = \cos\theta$ olmak üzere dik üçgenden $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{1 - a_0^2}}{1} = \dfrac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{1}$ yazılır. Eğer $q = a_0 + \dfrac{a_1 i + a_2 j + a_3 k}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ yazılırsa $\boldsymbol{n} = \dfrac{a_1 i + a_2 j + a_3 k}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$ olduğundan

$$q = \cos\theta + \boldsymbol{n} \sin\theta$$

elde edilir. Bu ise birim uzaysal kuaterniyonun kutupsal gösterimidir. Ayrıca, θ; $q \in \mathbb{R}^4$ vektörü ile reel eksen arasındaki açı ve $\boldsymbol{n}\sin\theta$; q nın uzaysal kuaterniyonların $\mathbb{R}^3$ alt uzayı üzerine izdüşümüdür.

B.1.4 Reel Kuaterniyonlar için De Moivre Formülü

Tanım B.14 $\boldsymbol{H}$ reel kuaterniyon cebirindeki tüm birim reel kuaterniyonların kümesi

$$\mathbb{S}^3 = \left\{ q \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \|q\| = 1 \right\}$$

ile gösterilir. $\boldsymbol{H}$ reel kuaterniyon cebirindeki tüm birim uzaysal reel kuaterniyonların kümesi

$$\mathbb{S}^2 = \left\{ \boldsymbol{n} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \|\boldsymbol{n}\| = 1, \overline{\boldsymbol{n}} = -\boldsymbol{n} \right\}$$

ile gösterilir [32]. $\mathbb{S}^3$ ve $\mathbb{S}^2$, $\boldsymbol{H}$ kümesinin birer alt kümesidir. Ayrıca $\mathbb{S}^3$ kuaterniyonların çarpım işlemi ile birlikte bir gruptur. Bu grup, determinantı 1 olan 2×2 tipindeki matrislerin $SU(2)$ grubuna izomorftur.

Örnek B.1 Herhangi bir $\boldsymbol{n} \in \mathbb{S}^2$ için $\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{n} = 0$ ve $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{n} \rangle = 1$ olduğundan $\boldsymbol{n}^2 = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n} = -1$ dir [21].

Çözüm Gerçekten $\boldsymbol{n} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}^2 &= \left(a_1 i + a_2 j + a_3 k\right) \times \left(a_1 i + a_2 j + a_3 k\right) \\ &= a_1{}^2 i^2 + a_2{}^2 j^2 + a_3{}^2 k^2 + a_1 a_2 ij + a_1 a_3 ik + a_2 a_1 ji + a_2 a_3 jk + a_3 a_1 ki + a_3 a_2 kj \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $ij = k = -ji,\ jk = i = -kj,\ ki = j = -ik,$ olduğundan

$$\boldsymbol{n}^2 = -\left(a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2\right) = -1$$

elde edilir.

Lemma B.1 $\boldsymbol{n} \in \mathbb{S}^2$ için

$$(\cos\alpha + \boldsymbol{n}\sin\alpha) \times (\cos\beta + \boldsymbol{n}\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + \boldsymbol{n}\sin(\alpha+\beta)$$

dır [32].

İspat

$\boldsymbol{n} \in \mathbb{S}^2$ için $\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{n} = 0$ ve $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{n} \rangle = 1$ olduğundan $\boldsymbol{n}^2 = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n} = -1$ dir.

$$
\begin{aligned}
(\cos\alpha+\boldsymbol{n}\sin\alpha)\times(\cos\beta+\boldsymbol{n}\sin\beta) &= \cos\alpha\cos\beta+\boldsymbol{n}(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta)+(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n})\sin\alpha\sin\beta \\
&= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+\boldsymbol{n}(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta) \\
&= \cos(\alpha+\beta)+\boldsymbol{n}\sin(\alpha+\beta)
\end{aligned}
$$

elde edilir, burada

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

ve

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta$$

eşitlikleri kullanılmıştır.

Teorem B.2 $q=\cos\theta+\boldsymbol{n}\sin\theta\in\mathbb{S}^3$ için

$$q^k=(\cos\theta+\boldsymbol{n}\sin\theta)^k=\cos(k\theta)+\boldsymbol{n}\sin(k\theta)$$

burada θ reel sayı ve $\boldsymbol{n}\in\mathbb{S}^2$ dir [32].

İspat

İspat tümevarım yöntemi ile yapılacaktır. k negatif olmayan bir sayı olsun.

$k=2$ için teoremin doğruluğu Lemma B.1 kullanılarak

$$
\begin{aligned}
(\cos\theta+\boldsymbol{n}\sin\theta)^2 &= (\cos\theta+\boldsymbol{n}\sin\theta)\times(\cos\theta+\boldsymbol{n}\sin\theta) \\
&= \cos(\theta+\theta)+\boldsymbol{n}\sin(\theta+\theta) \\
&= \cos(2\theta)+\boldsymbol{n}\sin(2\theta)
\end{aligned}
$$

şeklinde görülür.

$(\cos\theta+\boldsymbol{n}\sin\theta)^k=\cos(k\theta)+\boldsymbol{n}\sin(k\theta)$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda

$(\cos\theta+\boldsymbol{n}\sin\theta)^{k+1}=\cos((k+1)\theta)+\boldsymbol{n}\sin((k+1)\theta)$ olduğu gösterilmelidir.

$$
\begin{aligned}
(\cos\theta+\boldsymbol{n}\sin\theta)^{k+1} &= (\cos\theta+\boldsymbol{n}\sin\theta)^k\times(\cos\theta+\boldsymbol{n}\sin\theta) \\
&= \left(\cos(k\theta)+\boldsymbol{n}\sin(k\theta)\right)\times(\cos\theta+\boldsymbol{n}\sin\theta) \\
&= \cos(k\theta+\theta)+\boldsymbol{n}\sin(k\theta+\theta) \\
&= \cos((k+1)\theta)+\boldsymbol{n}\sin((k+1)\theta).
\end{aligned}
$$

Böylece $k+1$ için ifadenin doğruluğu görülür.

k negatif bir tamsayı olsun.

$$
\begin{aligned}
q^{-1} &= (\cos\theta - \boldsymbol{n}\sin\theta) \\
q^{-k} &= \cos(k\theta) - \boldsymbol{n}\sin(k\theta) \\
&= \cos(-k\theta) + \boldsymbol{n}\sin(-k\theta)
\end{aligned}
$$

olur. Bu durumda ispat tamamlanır.

B.1.5 Reel Kuaterniyonlar için Euler Formülü

$\boldsymbol{n} \in \mathbb{S}^2$ için $\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{n} = 0$ ve $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{n} \rangle = 1$ olduğundan $\boldsymbol{n}^2 = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n} = -1$ dir. Bu bilgiler kullanılırsa $\boldsymbol{n}^3 = -\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}^4 = 1$,... dir. O halde herhangi bir θ için

$$
\begin{aligned}
e^{\boldsymbol{n}\theta} &= 1 + \boldsymbol{n}\theta + \frac{(\boldsymbol{n}\theta)^2}{2!} + \frac{(\boldsymbol{n}\theta)^3}{3!} + \frac{(\boldsymbol{n}\theta)^4}{4!} + \frac{(\boldsymbol{n}\theta)^5}{5!} + \ldots \\
&= 1 + \boldsymbol{n}\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \boldsymbol{n}\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \boldsymbol{n}\frac{\theta^5}{5!} \ldots \\
&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \ldots\right) + \boldsymbol{n}\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \ldots\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonunun Maclaurin açılımları göz önüne alınırsa

$$
e^{\boldsymbol{n}\theta} = \cos\theta + \boldsymbol{n}\sin\theta
$$

elde edilir [32].

B.1.6 Reel Kuaterniyonların Reel Matris Gösterimi

Tanım B.15 Kuaterniyonlar cebirinde değişme özelliği olmadığı için sağ ve sol çarpım tanımlanır. x herhangi bir reel kuaterniyon olmak üzere

Sol çarpım

$$
\begin{aligned}
L_q &: \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H} \\
&\quad x \to L_q(x) = q \times x
\end{aligned}
$$

ve sağ çarpım

$$
\begin{aligned}
R_q &: \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H} \\
&\quad x \to R_q(x) = x \times q
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

Teorem B.3 L_q ve R_q dönüşümleri lineer dönüşümdür.

İspat

i) $$\begin{aligned} L_q\left(q_1 \oplus q_2\right) &= q \times \left(q_1 \oplus q_2\right) \\ &= \left(q \times q_1\right) \oplus \left(q \times q_2\right) \\ &= L_q\left(q_1\right) \oplus L_q\left(q_2\right) \end{aligned}$$

ii) $$\begin{aligned} L_q\left(\lambda \odot q'\right) &= q \times \left(\lambda \odot q'\right) \\ &= \lambda \odot \left(q \times q'\right) \\ &= \lambda \odot L_q\left(q'\right) \end{aligned}$$

Benzer şekilde R_q dönüşümünün de lineer dönüşüm olduğu gösterilebilir.

Sonuç B.6 Her lineer dönüşüme bir matris karşılık geldiği için L_q ve R_q lineer dönüşümlerine de birer matris karşılık gelir.

L_q lineer dönüşümüne karşılık gelen matris $q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ ve $\|q\| = 1$ alınırsa,

$$\begin{aligned} L_q(1) &= q \times 1 = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \\ L_q(i) &= q \times i = -a_1 + a_0 i + a_3 j - a_2 k \\ L_q(j) &= q \times j = -a_2 - a_3 i + a_0 j + a_1 k \\ L_q(k) &= q \times k = -a_3 + a_2 i - a_1 j + a_0 k \end{aligned}$$

ve $\boldsymbol{H} = Sp\{1, i, j, k\}$ olduğundan

$$A_{L_q} = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Benzer şekilde R_q lineer dönüşümüne karşılık gelen matris

$$A_{R_q} = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

bulunur [21]. Ayrıca, $A_{L_q} A_{L_q}{}^t = I_4$ ve $A_{R_q} A_{R_q}{}^t = I_4$ ve $\det\left(A_{L_q}\right) = 1$, $\det\left(A_{R_q}\right) = 1$ olduğundan A_{L_q} ve A_{R_q} ortogonal matrislerdir. O halde A_{L_q} matrislerinin kümesini ***G*** ile gösterirsek

$$\mathrm{S}^3 = \mathrm{G} = \left\{ \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \middle| \quad a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R},\ a_0{}^2 + a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}_4^4$$

kümesi (birim küre) çarpma işlemine göre $SO(4)$ ün alt grubudur, [6]. Burada $q \times x$, $\mathbb{R}^4$ de x in dönmesine karşılık gelir [21].

Not B.3

1) $\mathrm{S}^0 = \{\pm 1\}$.

2) $\mathrm{S}^1 = \left\{ z = x + iy \middle| \ x^2 + y^2 = 1 \right\}$ olmak üzere $\left(\mathrm{S}^1, \cdot\right)$ gruptur. Buradaki $\cdot$ işlemi iki kompleks sayının çarpımı işlemidir. S^1 2 boyutlu küredir.

3) $\mathrm{S}^2 = \left\{ (x, y, z) \middle| \ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^3$ kümesi bilinen küredir ve grup yapısı özelliği taşımaz.

4) $\mathrm{S}^3 = \left\{ q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \middle| \quad a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R},\ a_0{}^2 + a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^4$ gruptur.

B.1.7 Reel Kuaterniyona Karşılık Gelen Reel Matris İçin De Moivre Formülü

Reel kuaterniyon uzayı ile bileşenleri reel sayılar olan 4×4 tipindeki matrisler uzayı arasında

$\phi : (\boldsymbol{H}, \oplus, \times) \to \left(\mathbb{R}_4^4, (+), (\cdot)\right)$

$$\phi\left(a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k\right) \to \phi_q = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

dönüşümü tanımlayalım [21].

Teorem B.4

$\phi:(\boldsymbol{H},\oplus,\times)\rightarrow\left(\mathbb{R}_4^4,(+),(\cdot)\right)$

$$\phi\left(a_0+a_1i+a_2j+a_3k\right)\rightarrow\phi_q\begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan ϕ dönüşümü bir izomorfizmdir, [21].

İspat

- ϕ homomorfizmdir:

$q=a_0+a_1i+a_2j+a_3k$ ve $p=b_0+b_1i+b_2j+b_3k$ olsun.

$$\begin{aligned}\phi(q\oplus p)&=\phi\left(\left(a_0+a_1i+a_2j+a_3k\right)\oplus\left(b_0+b_1i+b_2j+b_3k\right)\right)\\&=\phi\left(\left(a_0+b_0\right)+\left(a_1+b_1\right)i+\left(a_2+b_2\right)j+\left(a_3+b_3\right)k\right)\end{aligned}$$

$$=\begin{bmatrix} a_0+b_0 & -a_1-b_1 & -a_2-b_2 & -a_3-b_3 \\ a_1+b_1 & a_0+b_0 & -a_3-b_3 & a_2+b_2 \\ a_2+b_2 & a_3+b_3 & a_0+b_0 & -a_1-b_1 \\ a_3+b_3 & -a_2-b_2 & a_1+b_1 & a_0+b_0 \end{bmatrix}$$

$$=\phi(q)(+)\phi(p)$$

ve

$$\begin{aligned}\phi(q\times p)&=\phi\left(\left(a_0+a_1i+a_2j+a_3k\right)\times\left(b_0+b_1i+b_2j+b_3k\right)\right)\\&=\phi\left(A_0+A_1i+Aj+A_3k\right)\end{aligned}$$

$$=\begin{bmatrix} A_0 & -A_1 & -A_2 & -A_3 \\ A_1 & A_0 & -A_3 & A_2 \\ A_2 & A_3 & A_0 & -A_1 \\ A_3 & -A_2 & A_1 & A_0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} (\cdot) \begin{bmatrix} b_0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ b_1 & b_0 & -b_3 & b_2 \\ b_2 & b_3 & b_0 & -b_1 \\ b_3 & -b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix}$$

$$=\phi(q)(\cdot)\phi(p).$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 \\ A_1 &= a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2 \\ A_2 &= a_0b_2 - a_1b_3 + a_2b_0 + a_3b_1 \\ A_3 &= a_0b_3 + a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_0 \end{aligned}$$

dir.

- ϕ birebirdir.

$\phi(q)=\phi(p)$ olsun Bu durumda,

$$\phi(a_0 + a_1i + a_2j + a_3k) = \phi(b_0 + b_1i + b_2j + b_3k)$$

$$\begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ b_1 & b_0 & -b_3 & b_2 \\ b_2 & b_3 & b_0 & -b_1 \\ b_3 & -b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix}$$

olur. O halde $q = p$ olur.

- Herhangi bir $\phi_q \in \mathbb{R}_4^4$ için $\phi_q = \phi(q)$ olacak şekilde en az bir $q \in \boldsymbol{H}$ olduğunda

ϕ örtendir.

Bu durumda ϕ bir izomorfizmdir.

Sonuç B.7 q birim kuaterniyon olmak üzere

$$q = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$$

$$=(\cos\theta + \boldsymbol{n}\sin\theta)$$

$$= \cos\theta + \mathrm{n}_1 \sin\theta + \mathrm{n}_2 \sin\theta + \mathrm{n}_3 \sin\theta$$
$$= (\cos\theta, \mathrm{n}_1 \sin\theta, \mathrm{n}_2 \sin\theta, \mathrm{n}_3 \sin\theta)$$

ve

H vektör uzayı $\mathbb{R}^4$ vektör uzayına izomorf olduğundan $q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ yazılabilir. Bu durumda

$$a_0 = \cos\theta$$
$$a_1 = \mathrm{n}_1 \sin\theta$$
$$a_2 = \mathrm{n}_2 \sin\theta$$
$$a_3 = \mathrm{n}_3 \sin\theta$$

dır. Böylece A_{L_q} matrisi kutupsal formda

$$\begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\mathrm{n}_1 \sin\theta & -\mathrm{n}_2 \sin\theta & -\mathrm{n}_3 \sin\theta \\ \mathrm{n}_1 \sin\theta & \cos\theta & -\mathrm{n}_3 \sin\theta & \mathrm{n}_2 \sin\theta \\ \mathrm{n}_2 \sin\theta & \mathrm{n}_3 \sin\theta & \cos\theta & -\mathrm{n}_1 \sin\theta \\ \mathrm{n}_3 \sin\theta & -\mathrm{n}_2 \sin\theta & \mathrm{n}_1 \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

Lemma B.2

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\mathrm{n}_1 \sin\alpha & -\mathrm{n}_2 \sin\alpha & -\mathrm{n}_3 \sin\alpha \\ \mathrm{n}_1 \sin\alpha & \cos\alpha & -\mathrm{n}_3 \sin\alpha & \mathrm{n}_2 \sin\alpha \\ \mathrm{n}_2 \sin\alpha & \mathrm{n}_3 \sin\alpha & \cos\alpha & -\mathrm{n}_1 \sin\alpha \\ \mathrm{n}_3 \sin\alpha & -\mathrm{n}_2 \sin\alpha & \mathrm{n}_1 \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\mathrm{n}_1 \sin\beta & -\mathrm{n}_2 \sin\beta & -\mathrm{n}_3 \sin\beta \\ \mathrm{n}_1 \sin\beta & \cos\beta & -\mathrm{n}_3 \sin\beta & \mathrm{n}_2 \sin\beta \\ \mathrm{n}_2 \sin\beta & \mathrm{n}_3 \sin\beta & \cos\beta & -\mathrm{n}_1 \sin\beta \\ \mathrm{n}_3 \sin\beta & -\mathrm{n}_2 \sin\beta & \mathrm{n}_1 \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$A(\cdot)B = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\mathrm{n}_1 \sin(\alpha+\beta) & -\mathrm{n}_2 \sin(\alpha+\beta) & -\mathrm{n}_3 \sin(\alpha+\beta) \\ \mathrm{n}_1 \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) & -\mathrm{n}_3 \sin(\alpha+\beta) & \mathrm{n}_2 \sin(\alpha+\beta) \\ \mathrm{n}_2 \sin(\alpha+\beta) & \mathrm{n}_3 \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) & -\mathrm{n}_1 \sin(\alpha+\beta) \\ \mathrm{n}_3 \sin(\alpha+\beta) & -\mathrm{n}_2 \sin(\alpha+\beta) & \mathrm{n}_1 \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}$$

şeklindedir, [68].

İspat

$A(\cdot)B=\left[c_{ij}\right]$ olsun.

$$c_{11}=c_{22}=c_{33}=c_{44}=\cos\alpha\cos\beta-n_1^2\sin\alpha\sin\beta-n_2^2\sin\alpha\sin\beta-n_3^2\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\cos\alpha\cos\beta-\left(n_1^2+n_2^2+n_3^2\right)\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\cos\left(\alpha+\beta\right)$$

$$c_{21}=c_{43}=-c_{12}=-c_{34}=n_1\sin\left(\alpha+\beta\right)$$

$$c_{31}=c_{24}=-c_{13}=-c_{42}=n_2\sin\left(\alpha+\beta\right)$$

$$c_{41}=c_{32}=-c_{14}=-c_{23}=n_3\sin\left(\alpha+\beta\right)$$

böylece ispat tamamlanır.

Teorem B.5 Her k tamsayısı için

$$A=\begin{bmatrix} \cos\theta & -n_1\sin\theta & -n_2\sin\theta & -n_3\sin\theta \\ n_1\sin\theta & \cos\theta & -n_3\sin\theta & n_2\sin\theta \\ n_2\sin\theta & n_3\sin\theta & \cos\theta & -n_1\sin\theta \\ n_3\sin\theta & -n_2\sin\theta & n_1\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

matrisinin k. Kuvveti

$$A^k=\begin{bmatrix} \cos(k\theta) & -n_1\sin(k\theta) & -n_2\sin(k\theta) & -n_3\sin(k\theta) \\ n_1\sin(k\theta) & \cos(k\theta) & -n_3\sin(k\theta) & n_2\sin(k\theta) \\ n_2\sin(k\theta) & n_3\sin(k\theta) & \cos(k\theta) & -n_1\sin(k\theta) \\ n_3\sin(k\theta) & -n_2\sin(k\theta) & n_1\sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{bmatrix}$$

dir, [68].

İspat

İspat tümevarım yöntemi ile yapılacaktır. k negatif olmayan bir sayı olsun.

$k=2$ için teoremin doğruluğu Lemma B.2 de $\alpha=\beta=\theta$ alınarak açıkca görülür. İfadenin k için doğru olduğu kabul edilsin. Bu durumda $k+1$ için doğru olduğu gösterilmelidir.

$$A^{k+1}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -n_1\sin\theta & -n_2\sin\theta & -n_3\sin\theta \\ n_1\sin\theta & \cos\theta & -n_3\sin\theta & n_2\sin\theta \\ n_2\sin\theta & n_3\sin\theta & \cos\theta & -n_1\sin\theta \\ n_3\sin\theta & -n_2\sin\theta & n_1 s\text{in}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{k+1}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\theta & -n_1\sin\theta & -n_2\sin\theta & -n_3\sin\theta \\ n_1\sin\theta & \cos\theta & -n_3\sin\theta & n_2\sin\theta \\ n_2\sin\theta & n_3\sin\theta & \cos\theta & -n_1\sin\theta \\ n_3\sin\theta & -n_2\sin\theta & n_1\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{k}(\cdot)\begin{bmatrix} \cos\theta & -n_1\sin\theta & -n_2\sin\theta & -n_3\sin\theta \\ n_1\sin\theta & \cos\theta & -n_3\sin\theta & n_2\sin\theta \\ n_2\sin\theta & n_3\sin\theta & \cos\theta & -n_1\sin\theta \\ n_3\sin\theta & -n_2\sin\theta & n_1\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos(k\theta) & -n_1\sin(k\theta) & -n_2\sin(k\theta) & -n_3\sin(k\theta) \\ n_1\sin(k\theta) & \cos(k\theta) & -n_3\sin(k\theta) & n_2\sin(k\theta) \\ n_2\sin(k\theta) & n_3\sin(k\theta) & \cos(k\theta) & -n_1\sin(k\theta) \\ n_3\sin(k\theta) & -n_2\sin(k\theta) & n_1\sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{bmatrix}(\cdot)\begin{bmatrix} \cos\theta & -n_1\sin\theta & -n_2\sin\theta & -n_3\sin\theta \\ n_1\sin\theta & \cos\theta & -n_3\sin\theta & n_2\sin\theta \\ n_2\sin\theta & n_3\sin\theta & \cos\theta & -n_1\sin\theta \\ n_3\sin\theta & -n_2\sin\theta & n_1\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos(k\theta+\theta) & -n_1\sin(k\theta+\theta) & -n_2\sin(k\theta+\theta) & -n_3\sin(k\theta+\theta) \\ n_1\sin(k\theta+\theta) & \cos(k\theta+\theta) & -n_3\sin(k\theta+\theta) & n_2\sin(k\theta+\theta) \\ n_2\sin(k\theta+\theta) & n_3\sin(k\theta+\theta) & \cos(k\theta+\theta) & -n_1\sin(k\theta+\theta) \\ n_3\sin(k\theta+\theta) & -n_2\sin(k\theta+\theta) & n_1\sin(k\theta+\theta) & \cos(k\theta+\theta) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos((k+1)\theta) & -n_1\sin((k+1)\theta) & -n_2\sin((k+1)\theta) & -n_3\sin((k+1)\theta) \\ n_1\sin((k+1)\theta) & \cos((k+1)\theta) & -n_3\sin((k+1)\theta) & n_2\sin((k+1)\theta) \\ n_2\sin((k+1)\theta) & n_3\sin((k+1)\theta) & \cos((k+1)\theta) & -n_1\sin((k+1)\theta) \\ n_3\sin((k+1)\theta) & -n_2\sin((k+1)\theta) & n_1\sin((k+1)\theta) & \cos((k+1)\theta) \end{bmatrix}$$

elde edilir.

k negatif tamsayı olsun.

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \cos\theta & n_1\sin\theta & n_2\sin\theta & n_3\sin\theta \\ -n_1\sin\theta & \cos\theta & n_3\sin\theta & -n_2\sin\theta \\ -n_2\sin\theta & -n_3\sin\theta & \cos\theta & n_1\sin\theta \\ -n_3\sin\theta & n_2\sin\theta & -n_1\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -n_1\sin(-\theta) & -n_2\sin(-\theta) & -n_3\sin(-\theta) \\ n_1\sin(-\theta) & \cos(-\theta) & -n_3\sin(-\theta) & n_2\sin(-\theta) \\ n_2\sin(-\theta) & n_3\sin(-\theta) & \cos(-\theta) & -n_1\sin(-\theta) \\ n_3\sin(-\theta) & -n_2\sin(-\theta) & -n_1\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos(-k\theta) & -n_1\sin(-k\theta) & -n_2\sin(-k\theta) & -n_3\sin(-k\theta) \\ n_1\sin(-k\theta) & \cos(-k\theta) & -n_3\sin(-k\theta) & n_2\sin(-k\theta) \\ n_2\sin(-k\theta) & n_3\sin(-k\theta) & \cos(-k\theta) & -n_1\sin(-k\theta) \\ n_3\sin(-k\theta) & -n_2\sin(-k\theta) & -n_1\sin(-k\theta) & \cos(-k\theta) \end{bmatrix}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

B.1.8 Reel Kuaterniyona Karşılık Gelen Reel Matris İçin Euler Formülü

Bir A matrisi

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -n_1 & -n_2 & -n_3 \\ n_1 & 0 & -n_3 & n_2 \\ n_2 & n_3 & 0 & -n_1 \\ n_3 & -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde seçilsin. Bu durumda

$$A^2=\begin{bmatrix} 0 & -n_1 & -n_2 & -n_3 \\ n_1 & 0 & -n_3 & n_2 \\ n_2 & n_3 & 0 & -n_1 \\ n_3 & -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix}(\cdot)\begin{bmatrix} 0 & -n_1 & -n_2 & -n_3 \\ n_1 & 0 & -n_3 & n_2 \\ n_2 & n_3 & 0 & -n_1 \\ n_3 & -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -\left(n_1^2+n_2^2+n_3^2\right) & -n_2n_3+n_2n_3 & -n_1n_3+n_1n_3 & -n_1n_2+n_1n_2 \\ -n_2n_3+n_2n_3 & -\left(n_1^2+n_2^2+n_3^2\right) & -n_1n_2+n_1n_2 & -n_1n_3+n_1n_3 \\ -n_1n_3+n_1n_3 & -n_1n_2+n_1n_2 & -\left(n_1^2+n_2^2+n_3^2\right) & -n_2n_3+n_2n_3 \\ -n_1n_2+n_1n_2 & -n_1n_3+n_1n_3 & -n_2n_3+n_2n_3 & -\left(n_1^2+n_2^2+n_3^2\right) \end{bmatrix}$$

$$=-\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$= -I_4$

elde edilir. Böylece $e^{A\theta}$ matrisi,

$$e^{A\theta} = 1 + A\theta + \frac{(A\theta)^2}{2!} + \frac{(A\theta)^3}{3!} + \frac{(A\theta)^4}{4!} + \frac{(A\theta)^5}{5!} + \ldots$$

$$= I_4 + A\theta - \frac{\theta^2}{2!} - A\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + A\frac{\theta^5}{5!} \ldots$$

$$= I_4\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots\right) + A\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots\right)$$

$$= I_4 \cos\theta + A \sin\theta$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cos\theta + \begin{bmatrix} 0 & -n_1 & -n_2 & -n_3 \\ n_1 & 0 & -n_3 & n_2 \\ n_2 & n_3 & 0 & -n_1 \\ n_3 & -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix} \sin\theta$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -n_1\sin\theta & -n_2\sin\theta & -n_3\sin\theta \\ n_1\sin\theta & \cos\theta & -n_3\sin\theta & n_2\sin\theta \\ n_2\sin\theta & n_3\sin\theta & \cos\theta & -n_1\sin\theta \\ n_3\sin\theta & -n_2\sin\theta & n_1\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir [68].

B.1.9 Reel Kuaterniyonların Kompleks Matris Gösterimi

1) $\forall q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \boldsymbol{H}$ olmak üzere

$$q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k = (a_0 + a_1 i) + j(a_2 - a_3 i) \in \boldsymbol{H}$$

yazılabilir.

$z = a_0 + a_1 i,\ w = a_2 - a_3 i \in \mathbb{C},\quad j^2 = -1$ şeklinde gösterilirse

$$q = z + jw \in \boldsymbol{H}$$

elde edilir.

Sonuç B.8 $\boldsymbol{H}$ kuaterniyonlar kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde 4 boyutlu vektör uzayıdır. $q = z + jw \in \boldsymbol{H}$ elemanlarının kümesi $\boldsymbol{H}_{\mathbb{C}}$ ile gösterilirse bu küme $\mathbb{C}$ üzerinde 2 boyutlu vektör uzayıdır. Bu durumda $\boldsymbol{H}_{\mathbb{C}} = Sp\{1, j\}$ dir.

Tanım B.16 Kuaterniyonlar cebirinde değişme özelliği olmadığı için sağ ve sol çarpım tanımlanır. x herhangi bir reel kuaterniyon olmak üzere $\boldsymbol{H}_{\mathbb{C}}$ de

sol çarpım

$$\begin{aligned} L_q : \boldsymbol{H}_{\mathbb{C}} &\to \boldsymbol{H}_{\mathbb{C}} \\ q_1 &\to L_q(q_1) = q \times q_1 \end{aligned}$$

ve sağ çarpım

$$\begin{aligned} R_q : \boldsymbol{H}_{\mathbb{C}} &\to \boldsymbol{H}_{\mathbb{C}} \\ q_1 &\to R_q(q_1) = x \times q_1 \end{aligned}$$

şeklindedir.

Teorem B.6 L_q ve R_q dönüşümleri lineer dönüşümdür.

İspat

i) $$L_q(q_1 \oplus q_2) = z + jw \times \left((z_1 + jw_1) \oplus (z_2 + jw_2)\right)$$

$$= (z + jw) \times \left((z_1 + z_2) + j(w_1 + w_2)\right)$$

$$= z(z_1 + z_2) - w(w_1 + w_2) + j\left(z(w_1 + w_2) + w(z_1 + z_2)\right)$$

$$= (zz_1 - ww_1) + j(zw_1 + wz_1) \oplus (zz_2 - ww_2) + j(zw_2 + wz_2)$$

$$= (q \times q_1) \oplus (q \times q_2)$$

$$= L_q(q_1) \oplus L_q(q_2)$$

ii) $$L_q(\lambda \odot q_1) = (z + jw) \times \left(\lambda \odot (z_1 + jw_1)\right)$$

$$= (z + jw) \times \left(\lambda z_1 + j\lambda(w_1)\right)$$

$$= \lambda(zz_1 - ww_1) + j\lambda(zw_1 + wz_1)$$

$$=\lambda \odot \left(\left(zz_1 - ww_1 \right) + j\left(zw_1 + wz_1 \right) \right)$$

$$=\lambda \odot L_q \left(q_1 \right)$$

sağlanır. O halde L_q dönüşümü lineerdir.

Benzer şekilde R_q dönüşümünün de lineer dönüşüm olduğu gösterilebilir.

Sonuç B.9 Her lineer dönüşüme bir matris karşılık geldiği için L_q ve R_q lineer dönüşümlerine de birer matris karşılık gelir.

Ayrıca, $jw = j\left(a+bi\right) = aj + bji = aj - bk$ ve $\overline{w}j = \left(a-bi\right)j = aj - bij = aj - bk$ dır. Bu durumda $jw = \overline{w}j$ dir. L_q lineer dönüşümüne karşılık gelen matris

$$L_q\left(1\right) = q \times 1 = \left(z + jw\right) \times 1 = z + jw$$
$$L_q\left(j\right) = q \times j = \left(z + jw\right) \times j = zj + jwj = zj + \overline{w}jj = -\overline{w} + zj = -\overline{w} + j\overline{z}$$

olmak üzere

$$A_{L_q} = \begin{bmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_2^2$$

elde edilir.

Burada, $\det\left(A_{L_q}\right) = z\overline{z} + w\overline{w} = \left\| q \right\|^2$ dir.

Benzer şekilde R_q dönüşümüne karşılık gelen matris

$$A_{R_q} = \begin{bmatrix} z & -w \\ w & z \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_2^2$$

şeklinde bulunur.

2) $\forall q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \boldsymbol{H}$ olmak üzere

$$q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k = \left(a_0 + a_1 i\right) + \left(a_2 + a_3 i\right) j \in \boldsymbol{H}$$

yazılabilir.

$\alpha = a_0 + a_1 i,\ \beta = a_2 + a_3 i \in \mathbb{C},\quad j^2 = -1$ şeklinde gösterilirse

$q=\alpha+\beta j\in \boldsymbol{H}$

elde edilir. Buradan

$$L_q(1)=q\times 1=(\alpha+\beta j)\times 1=(\alpha+\beta j)$$
$$L_q(j)=q\times j=(\alpha+\beta j)\times j=\alpha j+\beta jj=-\beta+\alpha j$$

olmak üzere

$$A_{L_q}=\begin{bmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}\in\mathbb{C}_2^2$$

elde edilir.Benzer şekilde R_q dönüşümüne karşılık gelen matris

$$A_{R_q}=\begin{bmatrix}\alpha & -\overline{\beta}\\ \beta & \overline{\alpha}\end{bmatrix}\in\mathbb{C}_2^2$$

şeklinde bulunur.

Özel Durum

1) $q=k$ alınırsa $q=0+0i+0j+1k=(0+0i)+j(0-i)$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda $z=0+0i, w=-i$ olmak üzere

$$A_{L_k}=\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}\in\mathbb{C}_2^2$$

elde edilir.

2) $q=j$ alınırsa $q=0+0i+1j+0k=(0+0i)+j(1+0i)$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda $z=0+0i, w=1$ olmak üzere

$$A_{L_j}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\in\mathbb{C}_2^2$$

elde edilir.

3) $q=i$ alınırsa $q=0+1i+0j+0k=(0+i)+j(0+0i)$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda $z=i, w=0+0i$ olmak üzere

$$A_{L_i}=\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}\in\mathbb{C}_2^2$$

elde edilir.

4) $q=1$ alınırsa $q=1+0i+0j+0k=(1+0i)+j(0+0i)$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda $z=1, w=0+0i$ olmak üzere

$$A_{L_1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\in\mathbb{C}_2^2$$

elde edilir.

Sonuç B.10 $\forall q=a_0+a_1i+a_2j+a_3k=(a_0+a_1i)+j(a_2-a_3i)=z+jw\in \boldsymbol{H}_{\mathbb{C}}$ için

$$A_{L_q}=\begin{bmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_0+a_1i & -a_2-a_3i \\ a_2-a_3i & a_0-a_1i \end{bmatrix}$$

$$=a_0\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}+a_1\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}+a_3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$=a_0A_{L_k}+a_1A_{L_j}+a_2A_{L_i}+a_3A_{L_1}$$

elde edilir.

Özellikler

1) $i^2=j^2=k^2=-1$ iken $\left(A_{L_k}\right)^2=\left(A_{L_j}\right)^2=\left(A_{L_i}\right)^2=-I_2$ dir.

2) $ij=-ji=k$ iken $A_{L_i}A_{L_j}=-A_{L_j}A_{L_i}=A_{L_k}$ dir.

$jk=-kj=i$ iken $A_{L_j}A_{L_k}=-A_{L_k}A_{L_j}=A_{L_i}$ dir.

$ij=-ji=k$ iken $A_{L_k}A_{L_i}=-A_{L_{ji}}A_{L_k}=A_{L_j}$ dir.

Burada $\left\{A_{L_i}, A_{L_j}, A_{L_k}\right\}$ matrislerine Pauli Spin matrisleri denir.

B.1.10 Kuaterniyonlar Üzerinde İç Çarpım

$\boldsymbol{H}$ kümesi üzerinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemi ile birlikte $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olduğu bilinmektedir [21].

$\forall\ q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k,\ p = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k \in \boldsymbol{H}$ için

$$\langle , \rangle : \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H} \to \mathbb{R},\ \langle q, p \rangle = \frac{1}{2}\left(q \times \overline{p} + p \times \overline{q}\right)$$

$$= S_q S_{\overline{p}} - \left\langle V_q, V_{\overline{p}} \right\rangle$$

$$= S_{q \times \overline{p}}$$

$$= a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

şeklinde tanımlı dönüşüm

i) Simetri özelliği: $\forall\ q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k,\ p = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k \in \boldsymbol{H}$ için

$$\langle q, p \rangle = S_{q \times \overline{p}} = S_{\overline{q \times \overline{p}}} = S_{p \times \overline{q}} = \langle p, q \rangle$$

dir.

ii) Bilineerlik özelliği:

$\forall\ q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k,\ p = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k,\ r = c_0 + c_1 i + c_2 j + c_3 k \in \boldsymbol{H}$ için

$$\langle q, p \oplus r \rangle = S_{q \times \overline{p \oplus r}} = S_{q \times \overline{p} + q \times \overline{r}} = S_{q \times \overline{p}} + S_{q \times \overline{r}} = \langle q, p \rangle + \langle q, r \rangle,$$

$$\langle q \oplus p, r \rangle = S_{\overline{q \oplus p} \times r} = S_{\overline{q} \times r + \overline{p} \times r} = S_{\overline{q} \times r} + S_{\overline{p} \times r} = \langle q, r \rangle + \langle p, r \rangle$$

ve

$$\langle \lambda \odot q, p \rangle = S_{\overline{\lambda \odot q} \times p} = S_{\lambda \odot \left(\overline{q} \times p\right)} = \lambda S_{\overline{q} \times p} = \lambda \langle q, p \rangle$$

dir.

iii) Pozitif tanımlılık: $\forall\ q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \boldsymbol{H}$ için $\langle q, q \rangle = a_0^{\ 2} + a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2} \geq 0$ ve $\langle q, q \rangle = 0 \Leftrightarrow q = 0$ olmasıdır.

özelliklerini sağladığından dolayı $\boldsymbol{H}$ üzerinde iç çarpım fonksiyonu $\boldsymbol{H}$ reel kuaterniyonların kümesi de bu iç çarpım ile birlikte bir iç çarpım uzayıdır, [4].

Tanım B.17

- p ve q kuaterniyonları arasındaki λ açısı

$$\cos\lambda = \frac{S_{p\times\bar{q}}}{\|p\|\|q\|}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $-1 \le \cos\lambda \le 1$ dir.

- θ ; p nin skaler eksenle yaptığı açı ve ω da S_p ile p arasındaki açı olmak üzere

$$\cos\omega = \frac{\langle S_p, p\rangle}{\|S_p\|\|p\|} = \frac{S_{S_p\times\bar{p}}}{S_p\|p\|} = \frac{(S_p)^2}{S_p\|p\|} = \frac{S_p}{\|p\|} = \cos\theta$$

dir.

- Eğer $p = \|p\|(\cos\mu + \boldsymbol{n}_1 \sin\mu)$ ve $q = \|q\|(\cos\sigma + \boldsymbol{n}_2 \sin\sigma)$ olmak üzere p ve q kuaterniyonları arasındaki λ açısı

$$\cos\lambda = \frac{S_{p\times\bar{q}}}{\|p\|\|q\|} = \frac{S_{\|p\|\|q\|(\cos\mu+\boldsymbol{n}_1\sin\mu)\times(\cos\sigma-\boldsymbol{n}_2\sin\sigma)}}{\|p\|\|q\|}$$

$$= (\cos\mu\cos\sigma - \sin\mu\sin\sigma) S_{\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2}$$

şeklindedir [21, 69]. Burada $\boldsymbol{n}_1$ ve $\boldsymbol{n}_2$ birim püre kuaterniyonlardır.

Sonuç B.11

1) $\boldsymbol{n}_1$ ve $\boldsymbol{n}_2$ birim uzaysal kuaterniyonları arasındaki açı γ ise $\cos\gamma = S_{\boldsymbol{n}_1\times\overline{\boldsymbol{n}_2}} = -S_{\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2}$ dir.

2) $S_{p\times\bar{q}} = \langle p, q\rangle = 0$ ise p ve q diktir.

3) $V_{p\times\bar{q}} = 0$ ise p ve q paraleldir.

4) Bir kuaterniyonun skaler kısmı vektörel kısmına her zaman diktir. Gerçekten, $\forall\, q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \boldsymbol{H}$ kuaterniyonun reel kısmı $p = a_0 = a_0 + 0i + 0j + 0k$

şeklinde bir kuaterniyon olarak düşünülebilir. Ayrıca q kuaterniyonunun vektörel kısmı $r = a_1 i + a_2 j + a_3 k = 0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ yazılabileceğinden

$$\langle p, r \rangle = 0a_0 + a_1 0 + a_2 0 + a_3 0 = 0$$

dır [21, 69].

B.2 Kuaterniyonlarla Dönme

Bu bölümde kuaterniyonların dönme ile ilişkisi anlatılacaktır.

$\mathbb{R}^4$ de $q = \cos\theta + \boldsymbol{n}\sin\theta$, $\|q\| = 1$ yani q birim kuaterniyonu verilsin. Burada $\boldsymbol{n}$ birim vektördür ve $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{n} \rangle = 1$, $\boldsymbol{n}^2 = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n} = -\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{n} \rangle + \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{n} = -1$ dir [21, 69].

B.2.1 $\mathbb{R}^4$ de Birim Kuaterniyonun Geometrik Yorumu

x herhangi bir kuaterniyon olsun.

$$q \times x = (\cos\theta + \boldsymbol{n}\sin\theta) \times x$$

$$= x\cos\theta + (\boldsymbol{n} \times x)\sin\theta$$

dir. Burada $\boldsymbol{n} \times x = x'$ olarak tanımlansın. Böylece

$$q \times x = x\cos\theta + x'\sin\theta$$

yazılır. Dikkat edilirse,

$$\langle x, x' \rangle = S_{x \times \bar{x}'} = S_{x \times \overline{\boldsymbol{n} \times x}} = S_{x \times \bar{x} \times \bar{\boldsymbol{n}}} = S_{x \times \bar{x} \times (-\boldsymbol{n})} = S_{-x \times \bar{x} \times \boldsymbol{n}} = -x \times \bar{x} S_{\boldsymbol{n}} = 0$$

olduğu görülür [21, 69].

Sonuç B.12 $\langle \boldsymbol{n} \times x, x \rangle = \langle x', x \rangle = 0$ dır [21, 69].

Teorem B.7 $\mathbb{R}^4$ de dönmeler düzlemde dönmeler şeklinde ifade edilir [21, 69].

İspat

$$q \times x' = q \times (\boldsymbol{n} \times x)$$

$$= (\cos\theta + \boldsymbol{n}\sin\theta) \times (\boldsymbol{n} \times x)$$

$$=(\boldsymbol{n}\times x)\cos\theta+\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times x)\sin\theta$$

$$=(\boldsymbol{n}\times x)\cos\theta+((\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n})\times x)\sin\theta$$

olmak üzere

$$q\times x'=-x\sin\theta+x'\cos\theta$$

elde edilir.

Bu işlemler x ve x' nin oluşturduğu düzlemde θ açısı kadar pozitif yönde dönme yaptığını gösterir. Buradan

$$\begin{cases} q\times x = x\cos\theta+(\boldsymbol{n}\times x)\sin\theta \\ q\times x'=-x\sin\theta+x'\cos\theta \end{cases}$$

ifadeleri

$$\begin{bmatrix} q\times x \\ q\times x' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. O halde

$$A(\theta)=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

düzlemsel dönme matrisi elde edilir. Gerçekten $\mathbb{R}^4$ deki bir x vektörü $S_p\{x,x'\}$ düzleminde θ kadar dönerek $q\times x$ vektörü elde edilir. Buradan $\mathbb{R}^4$ de q yu x ile çarpmak demek $S_p\{x,x'\}$ düzleminde θ kadar döndürmek demektir sonucuna varılır. q birim kuaterniyonu ile herhangi bir x kuaterniyonunun çarpımı yani $q\times x$; $x\in\mathbb{R}^4$ vektörünün $\boldsymbol{n}\times x=x'$ olmak üzere $S_p\{x,x'\}$ düzleminde θ açılı dönmesiyle oluşan $\mathbb{R}^4$ deki vektördür [21, 69].

Not B.4 x herhangi bir kuaterniyon, olmak üzere $\|x\|=\|x'\|$ dır [21, 69]. Gerçekten,

$$\|x'\|=\sqrt{\langle x',x'\rangle}=\sqrt{S_{x'\times\overline{x'}}}=\sqrt{S_{\boldsymbol{n}\times x\times\overline{\boldsymbol{n}\times x}}}=\sqrt{S_{\boldsymbol{n}\times x\times\bar{x}\times(-\boldsymbol{n})}}=\sqrt{(-x\times\bar{x})S_{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}}=\sqrt{(-x\times\bar{x})S_{(-1)}}=\sqrt{S_{x\times\bar{x}}}=\|x\|$$

dır.

Not B.5 q bir birim reel kuaterniyon x herhangi bir kuaterniyon olmak üzere $\|q\times x\|=\|x\|$ dır. Gerçekten

$$\|q\times x\|=\sqrt{\langle q\times x, q\times x\rangle}$$

$$=\sqrt{\cos^2\theta\langle x,x\rangle+2\cos\theta\sin\theta\langle x,x'\rangle+\mathrm{s}\,in^2\theta\langle x',x'\rangle}$$

$$=\sqrt{\cos^2\theta\|x\|^2+\mathrm{s}\,in^2\theta\|x'\|^2}$$

$$=\sqrt{\cos^2\theta\|x\|^2+\mathrm{s}\,in^2\theta\|x\|^2}$$

$$=\|x\|$$

dir [21, 69].

Not B.6 $\{p=ax+bx'\}=S_p\{x,x'\}$ düzlemi $L_q:\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{H},\ x\to L_q(x)=q\times x$ sol çarpımı altında değişmez.

$$\begin{bmatrix} q\times x \\ q\times x' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q\times x \\ q\times x' \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$ax+bx'=a\big((q\times x)\cos\theta-(q\times x')\sin\theta\big)+b\big((q\times x)\sin\theta+(q\times x')\cos\theta\big)$$

$$=(a\cos\theta+b\sin\theta)(q\times x)+(b\cos\theta-a\sin\theta)(q\times x')$$

$$=a'(q\times x)+b'(q\times x')$$

$$=q\times(a'x+bx')$$

olduğundan $S_p\{x,x'\}$ düzlemi sol çarpım altında değişmez kalır [21, 69].

Sonuç B.13 Herhangi bir x kuaterniyonu $x = 1 + 0i + 0j + 0k$ ve $x' = \boldsymbol{n} \times x = \boldsymbol{n} \times 1 = \boldsymbol{n}$ seçilirse, $x = 1$ ve $x' = \boldsymbol{n}$ yi kapsayan düzlem sol çarpım altında değişmez kalır [21, 69].

İspat

$$\begin{cases} q \times 1 = \cos\theta + \boldsymbol{n}\sin\theta \\ q \times \boldsymbol{n} = -\sin\theta + \boldsymbol{n}\cos\theta \end{cases}$$

ve buradan da

$$\begin{bmatrix} q \times 1 \\ q \times \boldsymbol{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \boldsymbol{n} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada sağ el kuralına uygun ortogonal vektörler $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$ olsun. Yani $\{\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ de ortonormaldir.

Ayrıca,

$\boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}$

$\boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{n} = \boldsymbol{l}$

$\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{l} = \boldsymbol{m}$

dir. $x' = \boldsymbol{n} \times x = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{l} = -\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{l} \rangle + \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{l} = \boldsymbol{m}$ seçilirse,

$$q \times \boldsymbol{l} = (\cos\theta + \boldsymbol{n}\sin\theta) \times \boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}\cos\theta + (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{l})\sin\theta = \boldsymbol{l}\cos\theta + \boldsymbol{m}\sin\theta$$
$$q \times \boldsymbol{m} = (\cos\theta + \boldsymbol{n}\sin\theta) \times \boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}\cos\theta + (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{m})\sin\theta = -\boldsymbol{l}\sin\theta + \boldsymbol{m}\cos\theta$$

olmak üzere

$$\begin{cases} q \times \boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}\cos\theta + \boldsymbol{m}\sin\theta \\ q \times \boldsymbol{m} = -\boldsymbol{l}\sin\theta + \boldsymbol{m}\cos\theta \end{cases}$$

yazılır. Buradan

$$\begin{bmatrix} q \times \boldsymbol{l} \\ q \times \boldsymbol{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{l} \\ \boldsymbol{m} \end{bmatrix}$$

ifadesi $\boldsymbol{l}$ ve $\boldsymbol{m}$ yi kapsayan düzlemde θ açısı kadar dönmeyi gösterir.

Bu yapılanlar benzer şekilde $R_q : \boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H},\ x \to R_q(x) = x \times q$ sağ çarpımı için de yapılabilir.

$x'' = x \times \boldsymbol{n}$ olmak üzere

$$x \times q = x \times (\cos\theta + \boldsymbol{n}\sin\theta) = x\cos\theta + (x \times \boldsymbol{n})\sin\theta$$
$$x'' \times q = (x \times \boldsymbol{n}) \times (\cos\theta + \boldsymbol{n}\sin\theta) = (x \times \boldsymbol{n})\cos\theta + (x \times \boldsymbol{n}) \times \boldsymbol{n}\sin\theta$$

olup

$$\begin{cases} x \times q = x\cos\theta + x''\sin\theta \\ x'' \times q = -x\sin\theta + x''\cos\theta \end{cases}$$

elde edilir. Bu $S_p\{x, x''\}$ düzleminde θ açılık dönme belirtir. [21, 69].

Sonuç B.14 Herhangi bir x kuaterniyonu $x = 1 + 0i + 0j + 0k$ ve $x'' = x \times \boldsymbol{n} = 1 \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}$ seçilirse, $x = 1$ ve $x'' = \boldsymbol{n}$ yi kapsayan düzlem sağ çarpım altında değişmez kalır [21, 69].

İspat

$$\begin{cases} 1 \times q = \cos\theta + \boldsymbol{n}\sin\theta \\ \boldsymbol{n} \times q = -\sin\theta + \boldsymbol{n}\cos\theta \end{cases}$$

dir. Eğer $x = \boldsymbol{l}$ seçilirse $x'' = x \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{n} = -\langle \boldsymbol{l}, \boldsymbol{n} \rangle + \boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{m}$ olur. Böylece

$$\boldsymbol{l} \times q = \boldsymbol{l} \times (\cos\theta + \boldsymbol{n}\sin\theta) = \boldsymbol{l}\cos\theta + (\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{n})\sin\theta = \boldsymbol{l}\cos\theta - \boldsymbol{m}\sin\theta$$
$$\boldsymbol{m} \times q = \boldsymbol{m} \times (\cos\theta + \boldsymbol{n}\sin\theta) \times = \boldsymbol{m}\cos\theta + (\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n})\sin\theta = \boldsymbol{l}\sin\theta + \boldsymbol{m}\cos\theta$$

olmak üzere

$$\begin{cases} \boldsymbol{l} \times q = \boldsymbol{l}\cos\theta - \boldsymbol{m}\sin\theta \\ \boldsymbol{m} \times q = \boldsymbol{l}\sin\theta + \boldsymbol{m}\cos\theta \end{cases}$$

yazılır. Buradan

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{l} \times q \\ \boldsymbol{m} \times q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{l} \\ \boldsymbol{m} \end{bmatrix}$$

ifadesi $\boldsymbol{l}$ ve $\boldsymbol{m}$ yi kapsayan düzlemde θ açısı kadar ters dönmeyi gösterir [21, 69].

Sonuç B.15 $\mathbb{R}^4$ uzayında iki tip dönme vardır [21, 69]:

1) Skaler ekseni içeren düzlemde orijin etrafında dönme,

2) $\boldsymbol{n}$ ve $\boldsymbol{n}$ nin dik olduğu püre kuaterniyon tarafından gerilen düzlemdeki dönme.

Teorem B.8 L_q ve R_q dönüşümleri açıları korur [21, 69].

İspat

x ve y kuaterniyonları arasındaki açı λ ise

$$\cos\lambda = \frac{S_{x\times\bar{y}}}{\|x\|\|y\|}$$

dir. Burada $-1 \le \cos\lambda \le 1$ dir. x ve y kuaterniyonları q kuaterniyonu ile çarpıldığında

$$\cos\lambda' = \frac{S_{(q\times x)\times\overline{q\times y}}}{\|q\times x\|\|q\times y\|}$$

$$= \frac{S_{\overline{q\times y}\times(q\times x)}}{\|q\|^2\ \|x\|\ \|y\|}$$

$$= \frac{S_{\bar{y}\times\bar{q}\times q\times x}}{\|q\|^2\ \|x\|\ \|y\|}$$

$$= \frac{S_{\bar{y}\times\|q\|^2\times x}}{\|q\|^2\ \|x\|\ \|y\|}$$

$$= \frac{S_{\bar{y}\times x}}{\|x\|\ \|y\|}$$

$$= \cos\lambda$$

dir. Vektörler arasındaki açılar $[0,1]$ aralığında olduğundan $\lambda' = \lambda + 2k\pi$ denklemini tek çözümü $\lambda = \lambda'$ olur. Görüldüğü gibi sol çarpım açıyı korur. Benzer sonuç sağ çarpım için de elde edilir.

Teorem B.9 L_q ve R_q dönüşümleri açıları dönmenin yönünü korur [21, 69].

Teorem B.10 x **,** $q\times x$ arasındaki açı ile q nun dönme açısı eşittir [21, 69].

İspat

$q = \cos\theta + \boldsymbol{n}\sin\theta$ alınırsa**,** q nun dönme açısı θ olur. Böylece

$$\cos\upsilon = \frac{S_{x\times\overline{q\times x}}}{\|x\|\,\|q\times x\|} = \frac{S_{x\times\bar{x}\times\bar{q}}}{\|x\|^2\,\|q\|} = \frac{\|x\|^2\,S_{\bar{q}}}{\|x\|^2\,\|q\|} = \frac{S_q}{\|q\|} = \cos\theta$$

elde edilir.

Örnek B.2 $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ ve $q = \cos\dfrac{\pi}{2} + (1,0,0)\sin\dfrac{\pi}{2}$ olsun. Bu durumda $\boldsymbol{x} = (1,1,1,1)$ olmak üzere

1) $q \times x$ ifadesini hesaplayınız.

2) x , $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ kadar dönmüştür. Bu dönme hangi düzlemde olmalıdır.

Çözüm

$$q = \cos\frac{\pi}{2} + (1,0,0)\sin\frac{\pi}{2} = 0 + (1,0,0) = 0 + i + 0j + 0k$$

ve

$$\boldsymbol{x} = (1,1,1,1) = 1 + (1,1,1) = 1 + i + j + k$$

olmak üzere

$$q \times \boldsymbol{x} = (0 + i + 0j + 0k)\times(1 + i + j + k) = (-1,1,-1,1)$$

Burada dönme $\boldsymbol{x} = (1,1,1,1)$ ve $\boldsymbol{x}' = (-1,1,-1,1)$ olmak üzere $S_p\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\}$ düzleminde olmuştur.

Dikkat edilecek olunursa, $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}'\rangle = 0$ olup $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{x}'$ dir.

Bu örnekte $q = i$ alınırsa $q \times \boldsymbol{x} = i \times \boldsymbol{x} = (-1,1,-1,1) = \boldsymbol{x}'$ elde edilir.

Özel olarak, $\boldsymbol{x} = 1$ için $q = \cos\theta + \boldsymbol{n}\sin\theta$ dır. Bu durumda

$$\begin{cases} q \times 1 = 1\cos\theta + \boldsymbol{n}\sin\theta \\ q \times \boldsymbol{n} = -\sin\theta + \boldsymbol{n}\cos\theta \end{cases}$$

eşitlikleri 1 ve $\boldsymbol{n}$ düzlemindeki dönmeyi belirtir.

B.2.3 Kompleks Sayı ve Kuaterniyon Operatörü

$|z_1| = |z_2| = 1$ olmak üzere z_1 ve z_2 kompleks sayıları verilsin. $z_1 = \cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1 = e^{i\alpha_1}$ ve $z_2 = \cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2 = e^{i\alpha_2}$ yazılabilir. Bu durumda

$z_1 z_2 = \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2)$ olup z_1 ve z_2 kompleks sayıları arasındaki açı $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$ olmak üzere

$$\frac{z_1}{z_2} = e^{i(\alpha_2 - \alpha_1)} = e^{i\theta}$$

elde edilir. Buradan

$$z_1 = e^{i\theta} z_2$$

yazılabilir. $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &\mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ &\theta \to e^{i\theta} \end{aligned}$$

operatörüne kompleks sayı operatörü denir. Kompleks düzlemde, yani xOy düzleminde, bir kompleks sayıyı $e^{i\theta}$ ile çarpmak demek, bu kompleks sayının argümentini θ kadar arttırmak demektir. Diğer bir ifadeyle, kompleks sayıya karşılık gelen vektörü O başlangıç noktasına göre θ kadar döndürmek demektir. $\theta > 0$ ise dönme pozitif yönde ve $\theta < 0$ ise dönme negatif yönde ve $\theta = 0$ ise dönme yoktur. Bu bilgiler ışığında $q = \cos\theta + \boldsymbol{n}\sin\theta$ kuaterniyonunun $e^{i\theta}$ kompleks sayı operatörüne benzetmek gerekirse q birim kuaterniyonun $\boldsymbol{n}$ birim vektörü i kompleks sayısının yerini alır ve

$$\begin{aligned} &\mathbb{R} \to \boldsymbol{H} \\ &\theta \to q \end{aligned}$$

operatörüne kuaterniyon operatörü denir. Sonuç olarak

$$q = \cos\theta + \boldsymbol{n}\sin\theta$$

olmak üzere $\boldsymbol{n}$ vektörüne dik bir P düzlemi içinde yatan bir $\boldsymbol{v}$ vektörünü q ile soldan çarpmak demek (sağdan çarpmak demek) $\boldsymbol{v}$ vektörünü $\boldsymbol{n}$ etrafında pozitif yönde (negatif yönde) θ kadar döndürmek demektir.

B.2.4 3 Boyutlu Uzayda Dönme

Birim kuaterniyonlar 3 boyutlu uzayda dönme için diğer yöntemlere göre daha kolay bir notasyon imkanı sunar [70].

a) $\boldsymbol{v}$,$\boldsymbol{v}' \in \mathbb{R}^3$ birim vektörler olsun. Bu vektörler aynı zamanda birim uzaysal kuaterniyonlar veya birim vektör kuaterniyonlar olarak da düşünülebilir [70, 71, 72].

$\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{v}'}{\|\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{v}'\|}$ ve θ da $\boldsymbol{v}$ ile $\boldsymbol{v}'$ arasındaki açı

olmak üzere

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{v} &= -\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \rangle + \boldsymbol{v}' \wedge \boldsymbol{v} \\ &= -\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \rangle + \frac{\boldsymbol{v}' \wedge \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}' \wedge \boldsymbol{v}\|}\|\boldsymbol{v}' \wedge \boldsymbol{v}\|\end{aligned}$$

şeklindedir.

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \rangle = \|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{v}'\|\cos\theta = \cos\theta$$

ve

$$\|\boldsymbol{v}' \wedge \boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{v}'\|\,\|\boldsymbol{v}\|\sin\theta = \sin\theta$$

olduğundan

$$\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{v} = -\cos\theta - \boldsymbol{n}\sin\theta = -(\cos\theta + \boldsymbol{n}\sin\theta)$$

dir. Böylece

$$\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{v} = -q$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki yanı $\boldsymbol{v}$ ile çarpılırsa,

$$\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = -q \times \boldsymbol{v}$$

$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = -1$ olduğundan

$\boldsymbol{v}' = q \times \boldsymbol{v}$

yazılır.

Yani, q birim reel kuaterniyonu bir $\boldsymbol{v}$ vektörünü normali $\boldsymbol{n}$ olan düzlemde θ kadar döndürür. Diğer bir ifadeyle, $q = \cos\theta + \boldsymbol{n}\sin\theta$, $\left(\theta \in \mathbb{R}, \langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{n} \rangle = 1, \boldsymbol{n} \in \mathbb{R}^3\right)$ birim reel kuaterniyonu, birim kompleks sayının özelliklerini taşır. Yani $\mathbb{R}^2$ de birim kompleks sayının yaptığı işi, $\mathbb{R}^3$ de birim reel kuaterniyon yapmaktadır.

Ayrıca,

$q = \cos\alpha + \boldsymbol{n}\sin\alpha$ ve $p = \cos\beta + \boldsymbol{n}\sin\beta$ olmak üzere,

$$q \times p = (\cos\alpha + \boldsymbol{n}\sin\alpha) \times (\cos\beta + \boldsymbol{n}\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + \boldsymbol{n}\sin(\alpha+\beta)$$

elde edilir. Bu ise $\mathbb{R}^3$ deki dönme matrislerine benzemektedir.

b) $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ birim kuaterniyonunu kendisine dik $\boldsymbol{n}$ birim vektörü etrafında yukarıdaki gibi $q = \cos\theta + \boldsymbol{n}\sin\theta$ birim kuaterniyonu ile çarparak elde ettiğimiz vektör $\boldsymbol{v}'$ olsun. Bu $\boldsymbol{v}'$ vektörü sağdan q^{-1} ile çarpılırsa

$$\boldsymbol{v}' \times q^{-1} = \boldsymbol{v}' \times \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} = \boldsymbol{v}' \times \bar{q}$$

elde edilir. $\bar{q} = \cos\theta - \boldsymbol{n}\sin\theta$ olduğundan

$$\boldsymbol{v}' \times \bar{q} = \boldsymbol{v}' \times (\cos\theta - \boldsymbol{n}\sin\theta)$$

olur. Kuaterniyon çarpımı gereğince

$$\boldsymbol{v}' \times \bar{q} = \boldsymbol{v}'\cos\theta + \langle \boldsymbol{v}', \boldsymbol{n}\sin\theta \rangle - \boldsymbol{v}' \wedge (\boldsymbol{n}\sin\theta)$$

dir. $\langle \boldsymbol{v}', \boldsymbol{n} \rangle = 0$ ve $-\boldsymbol{v}' \wedge \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v}'$ olduğundan dolayı,

$$\boldsymbol{v}' \times \bar{q} = \boldsymbol{v}'\cos\theta + \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v}'(\sin\theta)$$

ve

$\boldsymbol{v}' \times \bar{q} = (\cos\theta + \boldsymbol{n}\sin\theta) \times \boldsymbol{v}'$

yazılır.

Yukarıda belirtildiği üzere, $q = \cos\theta + \boldsymbol{n}\sin\theta$ birim reel kuaterniyonunu bir $\boldsymbol{v}'$ birim vektörü ile soldan çarpmak $\boldsymbol{v}'$ vektörünü kendisine dik $\boldsymbol{n}$ ekseni etrafında θ kadar döndürmüştür. Elde edilen yeni vektör $\boldsymbol{v}''$ ile gösterilsin. Bu durumda

$$\boldsymbol{v}'' = \boldsymbol{v}' \times \bar{q} = q \times \boldsymbol{v} \times \bar{q} = q \times \boldsymbol{v} \times q^{-1}$$

yazılabilir. Buradan herhangi bir $\boldsymbol{v}$ birim vektörünün, $q = \cos\theta + \boldsymbol{n}\sin\theta$ birim reel kuaterniyon olmak üzere $q \times \boldsymbol{v} \times q^{-1}$ çarpımı ile $\boldsymbol{n}$ birim vektörü etrafında 2θ kadar döndürülebileceği gösterilmiş olur [70, 71, 72].

c) $\boldsymbol{v}$ herhangi bir vektör ve $\boldsymbol{n}$ de herhangi bir birim vektör olmak üzere, $q \times \boldsymbol{v} \times q^{-1}$ çarpımının $\boldsymbol{v}$ vektörünü $\boldsymbol{n}$ ekseni etrafında 2θ kadar döndürdüğünü gösterelim.

$$\begin{aligned} q \times \boldsymbol{v} \times q^{-1} &= q \times \boldsymbol{v} \times \bar{q} = (\cos\theta + \boldsymbol{n}\sin\theta) \times \boldsymbol{v} \times (\cos\theta - \boldsymbol{n}\sin\theta) \\ &= (\boldsymbol{v}\cos\theta + (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v})\sin\theta) \times (\cos\theta - \boldsymbol{n}\sin\theta) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$q \times \boldsymbol{v} \times q^{-1} = \boldsymbol{v}\cos^2\theta + (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n})\sin\theta\cos\theta - (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n})\sin^2\theta \qquad \text{(B.1)}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} &= (-\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{v} \rangle + \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{v}) - (-\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n} \rangle + \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{n}) \\ &= -\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{v} \rangle + \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{v} + \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n} \rangle - \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{n} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} = 2\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{v} \qquad \text{(B.2)}$$

ve

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} &= (-\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{v} \rangle + \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{n} \\ &= -\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{v} \rangle \boldsymbol{n} - \langle \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n} \rangle + (\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{v}) \wedge \boldsymbol{n} \end{aligned}$$

$$= -\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{v}\rangle \boldsymbol{n} - \det(\boldsymbol{n},\boldsymbol{v},\boldsymbol{n}) + \langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{n}\rangle \boldsymbol{v} - \langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{n}\rangle \boldsymbol{n}$$

olmak üzere

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n} = \langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{n}\rangle \boldsymbol{v} - 2\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{v}\rangle \boldsymbol{n} \qquad \text{(B.3)}$$

elde edilir. böylece. (B.2) ve (B.3) eşitlikleri (B.1) ifadesinde yerlerine yazılırsa

$$q\times\boldsymbol{v}\times q^{-1} = \boldsymbol{v}\cos^2\theta + 2(\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{v})\sin\theta\cos\theta - (\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{n}\rangle \boldsymbol{v} - 2\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{v}\rangle \boldsymbol{n})\sin^2\theta \qquad \text{(B.4)}$$

elde edilir. Bu son denklem düzenlenirse,

$$q\times\boldsymbol{v}\times q^{-1} = \boldsymbol{v}\cos^2\theta + 2(\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{v})\sin\theta\cos\theta - \boldsymbol{v}\sin^2\theta + 2\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{v}\rangle \boldsymbol{n}\sin^2\theta$$

$$= \boldsymbol{v}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2\sin\theta\cos\theta(\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{v}) + 2\sin^2\theta\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{v}\rangle \boldsymbol{n}$$

$$q\times\boldsymbol{v}\times q^{-1} = \boldsymbol{v}\cos 2\theta + (\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{v})\sin 2\theta + \langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{v}\rangle \boldsymbol{n}(1-\cos 2\theta) \qquad \text{(B.5)}$$

bulunur. Şimdi

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3{}_3$$

$$\boldsymbol{n} = (\mathrm{n}_1,\mathrm{n}_2,\mathrm{n}_3) \to f(\mathrm{n}) = N = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{n}_3 & \mathrm{n}_2 \\ \mathrm{n}_3 & 0 & -\mathrm{n}_1 \\ -\mathrm{n}_2 & \mathrm{n}_1 & 0 \end{bmatrix} \text{(Anti-simetrik Matris)}$$

ve

$$\varphi:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3{}_1$$

$$\boldsymbol{n} \to \varphi(\boldsymbol{n}) = \begin{bmatrix} \mathrm{n}_1 \\ \mathrm{n}_2 \\ \mathrm{n}_3 \end{bmatrix}$$

dönüşümlerini tanımlayalım.

Özellikler:

1) $\boldsymbol{n}\wedge\boldsymbol{v} = N\boldsymbol{v}$

2) $\langle \boldsymbol{n}, x\rangle = \boldsymbol{n}^t x$

3) $\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^t = I_3 + N^2$

dir.

(B.5) eşitliği matris formunda yazılırsa

$$q \times \boldsymbol{v} \times q^{-1} = \boldsymbol{v}\cos 2\theta + (\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{v})\sin 2\theta + \langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{v} \rangle \boldsymbol{n}(1-\cos 2\theta)$$

$$= \boldsymbol{v} I_3 \cos 2\theta + N\boldsymbol{v}\sin 2\theta + \boldsymbol{n}^t \boldsymbol{v} \boldsymbol{n}(1-\cos 2\theta)$$

$$= \boldsymbol{v} I_3 \cos 2\theta + N\boldsymbol{v}\sin 2\theta + (I_3 + N^2)\boldsymbol{v}(1-\cos 2\theta)$$

$$= \left(I_3 \cos 2\theta + N\sin 2\theta + (I_3 + N^2)(1-\cos 2\theta)\right)\boldsymbol{v}$$

$$= \left(I_3 + N\sin 2\theta + (1-\cos 2\theta)N^2\right)\boldsymbol{v}$$

veya

$$q \times \boldsymbol{v} \times q^{-1} = R(2\theta, \boldsymbol{n}) = I_3 + N\sin 2\theta + (1-\cos 2\theta)N^2$$

Olin-Rodrigues dönme formülü elde edilir. Böylece $q = \cos\theta + \boldsymbol{n}\sin\theta$ birim reel kuaterniyon olmak üzere $q \times \boldsymbol{v} \times q^{-1}$ çarpımı $\boldsymbol{v}$ vektörünü $\boldsymbol{n}$ ekseni etrafında 2θ kadar döndürür sonucuna varılır.

Eğer döndürme açısı θ olarak alınmak istenirse q birim reel kuaterniyonunu $q = \cos\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{n}\sin\frac{\theta}{2}$ olarak seçilmelidir.

Ayrıca eğer bir $\boldsymbol{v}$ vektörünü önce q ve sonra da p kuaterniyonları aracılığıyla döndürmek istenirse $p \times q$ çarpım kuaterniyonu ile döndürmek yeterlidir [70, 71, 72].

Not B.7

$$D_q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\boldsymbol{v} \to D_q(\boldsymbol{v}) = q \times \boldsymbol{v} \times q^{-1}$$

dönüşümü lineerdir [21, 69].

İspat

$\forall \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ ve $\mu, \eta \in \mathbb{R}$ için

$$D_q(\mu\boldsymbol{v}+\eta\boldsymbol{u})=q\times(\mu\boldsymbol{v}+\eta\boldsymbol{u})\times q^{-1}$$

$$=q\times(\mu\boldsymbol{v})\times q^{-1}+q\times(\eta\boldsymbol{u})\times q^{-1}$$

$$=\mu\left(q\times\boldsymbol{v}\times q^{-1}\right)+\eta\left(q\times\boldsymbol{u}\times q^{-1}\right)$$

$$=\mu D_q(\boldsymbol{v})+\eta D_q(\boldsymbol{u})$$

elde edilir. Böylece D_q dönüşümü lineerdir.

Sonuç B.16 Bu lineer dönüşüme karşılık gelen matris, $q\times\boldsymbol{v}\times q^{-1}$ çarpımı $\boldsymbol{v}$ vektörünü $\boldsymbol{n}$ ekseni etrafında 2θ açısı kadar döndürmesinden dolayı bu dönmeye karşılık gelen matristir. q birim reel kuaterniyonunun elemanları verilirse,

$$D_q(i)=q\times i\times q^{-1}$$

$$=q\times i\times\overline{q}$$

$$=(a_0+a_1i+a_2j+a_3k)\times i\times(a_0-a_1i-a_2j-a_3k)$$

$$=(-a_1+a_0i+a_3j-a_2k)\times(a_0-a_1i-a_2j-a_3k)$$

$$=\left(a_0^{\,2}+a_1^{\,2}-a_2^{\,2}-a_3^{\,2}\right)i+(2a_1a_2+2a_0a_3)\,j+(2a_1a_3-2a_0a_2)k$$

$$D_q(j)=q\times j\times q^{-1}$$

$$=q\times j\times\overline{q}$$

$$=(a_0+a_1i+a_2j+a_3k)\times j\times(a_0-a_1i-a_2j-a_3k)$$

$$=(-a_2-a_3i+a_0j+a_1k)\times(a_0-a_1i-a_2j-a_3k)$$

$$=(2a_1a_2-2a_0a_3)i+\left(a_0^{\,2}-a_1^{\,2}+a_2^{\,2}-a_3^{\,2}\right)j+(2a_2a_3+2a_0a_1)k$$

$$D_q(k)=q\times k\times q^{-1}$$

$$=q\times k\times\overline{q}$$

$$=(a_0+a_1i+a_2j+a_3k)\times k\times(a_0-a_1i-a_2j-a_3k)$$

$$=\left(-a_3+a_2i+a_0k-a_1j\right)\times\left(a_0-a_1i-a_2j-a_3k\right)$$

$$=\left(2a_0a_2+2a_1a_3\right)i+\left(2a_2a_3-2a_0a_1\right)j+\left(a_0{}^2-a_1{}^2-a_2{}^2+a_3{}^2\right)k$$

olmak üzere R dönme matrisi

$$R=\begin{bmatrix} a_0{}^2+a_1{}^2-a_2{}^2-a_3{}^2 & 2a_1a_2-2a_0a_3 & 2a_0a_2+2a_1a_3 \\ 2a_1a_2+2a_0a_3 & a_0{}^2-a_1{}^2+a_2{}^2-a_3{}^2 & 2a_2a_3-2a_0a_1 \\ 2a_1a_3-2a_0a_2 & 2a_2a_3+2a_0a_1 & a_0{}^2-a_1{}^2-a_2{}^2+a_3{}^2 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Tersine R dönme matrisinin elemanları verilirse bu matrise karşılık gelen q birim reel kuaterniyonun elemanları

$$a_0{}^2=\frac{1}{4}\left(1+R_{11}+R_{22}+R_{33}\right)$$

$$a_1{}^2=\frac{1}{4}\left(1+R_{11}-R_{22}-R_{33}\right)$$

$$a_2{}^2=\frac{1}{4}\left(1-R_{11}+R_{22}-R_{33}\right)$$

$$a_3{}^2=\frac{1}{4}\left(1-R_{11}-R_{22}+R_{33}\right)$$

ve

$$a_0a_1=\frac{1}{4}\left(R_{32}-R_{23}\right),\quad a_1a_2=\frac{1}{4}\left(R_{12}+R_{21}\right)$$

$$a_0a_2=\frac{1}{4}\left(R_{13}-R_{31}\right),\quad a_1a_3=\frac{1}{4}\left(R_{13}+R_{31}\right)$$

$$a_0a_3=\frac{1}{4}\left(R_{12}-R_{21}\right),\quad a_2a_3=\frac{1}{4}\left(R_{23}+R_{32}\right)$$

elde dilir. Dikkat edilirse burada R dönme matrisi ortogonaldir ve $\det R=1$ dir [21].

Örnek B.3 $q=i$ olmak üzere q birim reel kuaterniyonuna karşılık gelen dönme matrisini bulunuz.

Çözüm

$q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k = i$ ise, $a_0 = a_2 = a_3 = 0,\ a_1 = 1$ dir. Bu durumda dönme matrisi

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

dir. Burada dikkat edilecek olunursa, R matrisi ortogonal bir matristir ve $\det R = 1$ dir.

Örnek B.4 $(1,1,1)$ ekseni etrafında 180° lik dönme yaptıran matrisi bulunuz.

Çözüm

$q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k = i + j + k$ ve q birim reel kuaterniyon olması gerektiği için $q = \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)$ dır. Bu durumda $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{\sqrt{3}},\ a_0 = 0$ dır. Böylece 180° lik dönme yaptıran matris

$$R = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Teorem B.11 $q = \cos\theta + \boldsymbol{n}\sin\theta$ ve $x = \cos\alpha + \boldsymbol{r}\sin\alpha$ herhangi iki kuaterniyon olmak üzere $q \times x \times q^{-1}$ çarpımı $S_p\{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n} \times x\}$ düzleminde 2θ açısı kadar dönme gösterir, [4, 21, 69].

İspat

$$q \times x \times q^{-1} = q \times x \times \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} = \|q\|(\cos\theta + \boldsymbol{n}\sin\theta) \times x \times \frac{\|q\|(\cos\theta - \boldsymbol{n}\sin\theta)}{\|q\|^2}$$

$$= (x\cos\theta + (\boldsymbol{n} \times x)\sin\theta) \times (\cos\theta - \boldsymbol{n}\sin\theta)$$

$$= x\cos^2\theta + (\boldsymbol{n} \times x - x \times \boldsymbol{n})\sin\theta\cos\theta - (\boldsymbol{n} \times x \times \boldsymbol{n})\sin^2\theta$$

$$= x\cos^2\theta + (\boldsymbol{n}\times x - x\times\boldsymbol{n})\sin\theta\cos\theta - x\sin^2\theta$$

$$= x\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) + 2(\boldsymbol{n}\times x)\sin\theta\cos\theta$$

$$= x\cos 2\theta + (\boldsymbol{n}\times x)\sin 2\theta$$

$$= (\cos 2\theta + \boldsymbol{n}\sin 2\theta)\times x$$

dır. Bu ise Teorem B.7 e göre $S_p\{\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}\times x\}$ düzleminde 2θ açısı kadar dönme gösterir.

Teorem B.12 $q = S_q + V_q$ olmak üzere V_q**,** $D_q(x) = q\times x\times q^{-1}$ dönüşümü altında değişmez kalır [21, 69].

İspat

$D_q(V_q) = q\times V_q\times q^{-1}$

olmak üzere,

$$D_q(V_q) = (S_q + V_q)\times V_q\times\frac{(S_q - V_q)}{\|q\|^2}$$

$$= \frac{1}{\|q\|^2}\left[(S_q + V_q)\times V_q\times(S_q - V_q)\right]$$

$$= \frac{1}{\|q\|^2}\left[(S_q + V_q)\times(S_q - V_q)\times V_q\right]$$

$$= \frac{1}{\|q\|^2}\left(\|q\|^2\times V_q\right)$$

$$= V_q$$

dır. Böylece $\boldsymbol{n}$ nin yani V_q dönme ekseni olduğu gösterilmiş olunur.

Teorem B.13 $D_q(x) = q\times x\times q^{-1}$ dönüşümü altında x in normu ve skaler kısmı korunur [21, 69].

İspat

$\|x''\| = \|q \times x \times q^{-1}\| = \|q\| \, \|x\| \, \|q^{-1}\| = \|q\| \, \|q^{-1}\| \|x\| = \|q \times q^{-1}\| \, \|x\| = \|x\|$ olması x in normunun korunduğunu göstermektedir. Ayrıca,

$$S_{x''} = S_{q \times x \times q^{-1}} = S_{x \times q^{-1} \times q} = S_x$$

dir. Böylece x in skaler kısmı korunur.

Teorem B.14 $q \times V_x \times q^{-1}$ uzaysal kuaterniyondur [21, 69].

İspat

$q = S_q + V_q$ ve $x = \|x\| (\cos\alpha + \boldsymbol{r} \sin\alpha)$ olsun.

$x = S_x + V_x$ olmak üzere,

$$S_x = \|x\| \cos\alpha$$
$$V_x = \|x\| \boldsymbol{r} \sin\alpha$$

dir. Bu son eşitlikten V_x ile $\boldsymbol{r}$ nin paralel olduğu söylenebilir.

$$V_{x'} = q \times V_x \times q^{-1}$$

kuaterniyonunu ele alalım. $V_x = \|x\| \boldsymbol{r} \sin\alpha$ olduğu kullanılırsa,

$$V_{x'} = (\|x\| \sin\alpha) q \times \boldsymbol{r} \times q^{-1}$$

bulunur. Bu durumda $V_{x'}$, $q \times \boldsymbol{r} \times q^{-1}$ e paraleldir.

$x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ kuaterniyonu için kutupsal gösterimi göz önüne alınırsa,

$$r = \frac{x_1 i + x_2 j + x_3 k}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

dir.

$$q \times \boldsymbol{r} \times q^{-1} = (a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k) \times \frac{x_1 i + x_2 j + x_3 k}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \times \frac{a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k}{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

hesaplanırsa,

$$A = a_1\left(x_1a_1 + 2x_2a_2 + 2x_3a_3\right) + a_0\left(x_1a_0 - 2x_2a_3 + 2x_3a_2\right) - x_1\left(a_3^2 + a_2^2\right)$$
$$B = a_2\left(2x_1a_1 + x_2a_2 + 2x_3a_3\right) + a_0\left(2x_1a_3 + x_2a_0 - 2x_3a_1\right) - x_2\left(a_1^2 + a_3^2\right)$$
$$C = a_3\left(2x_1a_1 + 2x_2a_2 + x_3a_3\right) + a_0\left(-2x_1a_2 + 2x_2a_1 + x_3a_0\right) - x_3\left(a_2^2 + x_3a_1^2\right)$$

olmak üzere

$$q \times \boldsymbol{r} \times q^{-1} = \frac{Ai + Bj + Ck}{\sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + x_3^{\,2}}\left(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)}$$

dır. Bu durumda $q \times \boldsymbol{r} \times q^{-1}$ uzaysal kuaterniyondur. $V_{x'} = \left(\|x\| \sin\alpha\right) q \times \boldsymbol{r} \times q^{-1}$ olmasından dolayı $V_{x'}$ uzaysal kuaterniyondur. Böylece $q \times V_x \times q^{-1}$ uzaysal kuaterniyondur.

Not B.8 $\boldsymbol{n}$ normaline sahip düzlemde $\boldsymbol{c}$ birim uzaysal reel kuaterniyon olsun. Eğer $\boldsymbol{n}$ ve $\boldsymbol{r}$ arasındaki açı ρ ise,

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{n}\cos\rho + \boldsymbol{c}\sin\rho$$

şeklinde yazılabilir [21, 69].

Sonuç B.17 $\boldsymbol{r} \times \overline{\boldsymbol{r}} = 1$ dir [21, 69].

İspat

$$\boldsymbol{r} \times \overline{\boldsymbol{r}} = \left(\boldsymbol{n}\cos\rho + \boldsymbol{c}\sin\rho\right) \times \left(-\boldsymbol{n}\cos\rho - \boldsymbol{c}\sin\rho\right)$$

$$= -\left(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}\right)\cos^2\rho - \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{c}\cos\rho\sin\rho - \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{n}\cos\rho\sin\rho - \left(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{c}\right)\sin^2\rho$$

$$= \cos^2\rho - \left(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{c}\right)\cos\rho\sin\rho + \left(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{c}\right)\cos\rho\sin\rho + \sin^2\rho$$

$$= 1$$

elde edilir.

Teorem B.15 $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{n}$ kuaterniyonu sadece vektörel kısımdan oluşur [21, 69].

İspat $\boldsymbol{c}$ ve $\boldsymbol{n}$ uzaysal reel kuaterniyon olduğundan

$$\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{n} = -\left\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{n} \right\rangle + \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{n}$$

dir. Ayrıca $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{n}$ normaline sahip düzlemde bulunduğu için $\boldsymbol{c} \perp \boldsymbol{n}$ olup $\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{n} \rangle = 0$ bulunur. Böylece

$$\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{c} = -\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{c}$$

yazılır. Bu ise $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{n}$ ifadesinin sadece vektörel kısımdan oluştuğunu göstermektedir**.**

Not B.9 $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{c}$ dir [21, 69].

İspat

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{n} &= \boldsymbol{n} \times (-\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{c}) \\
&= -\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{c} \\
&= -(-1) \times \boldsymbol{c} \\
&= \boldsymbol{c}
\end{aligned}$$

dır.

Sonuç B.18 $q \times \boldsymbol{n} \times q^{-1} = \boldsymbol{n}$ **,** $q \times \boldsymbol{r} \times q^{-1} = \boldsymbol{r}$ ve $q \times \boldsymbol{c} \times q^{-1} = \boldsymbol{c} \cos 2\theta + (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{c}) \sin 2\theta$ olacak şekilde uzaysal kuaterniyonlardır [21, 69].

İspat

$$\begin{aligned}
q \times \boldsymbol{n} \times q^{-1} &= q \times \boldsymbol{n} \times \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} \\
&= \|q\| (\cos\theta + \boldsymbol{n} \sin\theta) \times \boldsymbol{n} \times \frac{\|q\| (\cos\theta - \boldsymbol{n} \sin\theta)}{\|q\|^2} \\
&= (\boldsymbol{n} \cos\theta + (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}) \sin\theta) \times (\cos\theta - \boldsymbol{n} \sin\theta) \\
&= (\boldsymbol{n} \cos\theta - \sin\theta) \times (\cos\theta - \boldsymbol{n} \sin\theta) \\
&= \boldsymbol{n} \cos^2\theta + \boldsymbol{n} \sin^2\theta \\
&= \boldsymbol{n}
\end{aligned}$$

olur.

Benzer şekilde,

$q \times \boldsymbol{r} \times q^{-1} = \boldsymbol{r}$

olduğu gösterilebilir.

$$q \times \boldsymbol{c} \times q^{-1} = \|q\| \left(\cos\theta + \boldsymbol{n} \sin\theta \right) \times \boldsymbol{c} \times \frac{\|q\| \left(\cos\theta - \boldsymbol{n} \sin\theta \right)}{\|q\|^2}$$

$$= \left(\boldsymbol{c} \cos\theta + \left(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{c} \right) \sin\theta \right) \times \left(\cos\theta - \boldsymbol{n} \sin\theta \right)$$

$$= \boldsymbol{c} \cos^2\theta - \left(\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{n} \right) \sin\theta \cos\theta + \left(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{c} \right) \sin\theta \cos\theta - \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{n} \sin^2\theta$$

$$= \boldsymbol{c} \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta \right) + 2 \left(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{c} \right) \sin\theta \cos\theta$$

$$= \boldsymbol{c} \cos 2\theta + \left(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{c} \right) \sin 2\theta$$

olur.

Sonuç B.19 $\boldsymbol{c}' = q \times \boldsymbol{c} \times q^{-1}$, $\boldsymbol{n}$ vektörüne diktir [21, 69].

İspat

$$\left\langle q \times \boldsymbol{c} \times q^{-1}, \boldsymbol{n} \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{c} \cos 2\theta + \left(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{c} \right) \sin 2\theta, \boldsymbol{n} \right\rangle$$

$$= \left\langle \boldsymbol{c} \cos 2\theta + \left(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{c} \right) \sin 2\theta, \boldsymbol{n} \right\rangle$$

$$= \left\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{n} \right\rangle \cos 2\theta + \left\langle \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{c}, \boldsymbol{n} \right\rangle \sin 2\theta$$

$$= \left\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{n} \right\rangle \cos 2\theta + \left\langle \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{c}, \boldsymbol{n} \right\rangle \sin 2\theta$$

$$= \det\left(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{n} \right) \sin 2\theta$$

$$= 0$$

dır.

Teorem B.16 $q \times x \times q^{-1}$ çarpımı 3 boyutlu uzayda x in vektör kısmının q nun vektör kısmı etrafında 2θ açısı kadar dönme yaptığını gösterir [21, 69].

İspat

$\boldsymbol{c}'$ den $\boldsymbol{c}$ ye dönme açısı ϕ olsun. Bu durumda

$$\cos\phi = \frac{\langle \boldsymbol{c}', \boldsymbol{c} \rangle}{\|\boldsymbol{c}'\| \|\boldsymbol{c}\|} = \frac{S_{\boldsymbol{c}' \times \bar{\boldsymbol{c}}}}{\|\boldsymbol{c}'\| \|\boldsymbol{c}\|}$$

yazılabilir.

$\boldsymbol{c}' = q \times \boldsymbol{c} \times q^{-1}$ ise, $\|\boldsymbol{c}'\| = \|q \times \boldsymbol{c} \times q^{-1}\| = \|q\| \, \|\boldsymbol{c}\| \, \|q^{-1}\| = 1$ olur. Böylece $\cos\phi = S_{\boldsymbol{c}' \times \bar{\boldsymbol{c}}}$ dır.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}' \times \bar{\boldsymbol{c}} &= \left(\boldsymbol{c} \cos 2\theta + (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{c}) \sin 2\theta\right) \times \bar{\boldsymbol{c}} \\ &= \left(\boldsymbol{c} \cos 2\theta + (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{c}) \sin 2\theta\right) \times (-\boldsymbol{c}) \\ &= \left(\boldsymbol{c} \times (-\boldsymbol{c}) \cos 2\theta + \left[\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{c} \times (-\boldsymbol{c})\right] \sin 2\theta\right) \end{aligned}$$

edilir. Burada

$$\boldsymbol{c} \times (-\boldsymbol{c}) = -\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{c} = -\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{c} \rangle + \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{c} = -(-1) = 1$$

olduğundan

$$\boldsymbol{c}' \times \bar{\boldsymbol{c}} = \cos 2\theta + \boldsymbol{n} \sin 2\theta$$

bulunur. Böylece

$$\cos\phi = S_{\boldsymbol{c}' \times \bar{\boldsymbol{c}}} = \cos 2\theta$$

dır. Yani $\phi = 2\theta$ olur.

$$\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{c} \cos 2\theta + (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{c}) \sin 2\theta = (\cos 2\theta + \boldsymbol{n} \sin 2\theta) \times \boldsymbol{c}$$

olduğundan

$$\boldsymbol{c}' = q \times \boldsymbol{c} \times q^{-1} = (\cos 2\theta + \boldsymbol{n} \sin 2\theta) \times \boldsymbol{c}$$

dir. Bu ise $\boldsymbol{c}$ nin $\boldsymbol{n}$ eksenin etrafında 2θ açısı kadar dönmesini göstermektedir.

Örnek B.5 xOy düzleminde bir vektörü θ kadar döndüren q birim reel kuaterniyonunu bulunuz.

Çözüm

$q = \cos\theta + k \sin\theta$ birim reel kuaterniyonu verilsin. Burada xOy düzleminin normali $\boldsymbol{n} = k$ dır.

$i=(1,0,0)$ ve $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ alınırsa,

$$q\times i=\left(\cos\frac{\theta}{2}+k\sin\frac{\theta}{2}\right)\times i=k\times i=j$$

elde edilir.

$\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,v_3)\in\mathbb{R}^3$ olmak üzere

$$q\times\boldsymbol{v}=(\cos\theta+k\sin\theta)\times(v_1 i+v_2 j+v_3 k)$$

$$=v_1\cos\theta i+v_2\cos\theta j+v_3\cos\theta k+v_1\sin\theta(k\times i)+v_2\sin\theta(k\times j)+v_3\sin\theta(k\times k)$$

$$=v_1\cos\theta i+v_2\cos\theta j+v_3\cos\theta k+v_1\sin\theta j-v_2\sin\theta i$$

$$=(v_1\cos\theta-v_2\sin\theta)i+(v_2\cos\theta+v_1\sin\theta)j+v_3\cos\theta k$$

elde edilir.

Eğer $\boldsymbol{v}$ vektörü xOy düzleminde alınırsa

$$q\times\boldsymbol{v}=(v_1\cos\theta-v_2\sin\theta)i+(v_2\cos\theta+v_1\sin\theta)j+0k$$

olur. Buradan

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_1\cos\theta-v_2\sin\theta\\ v_2\cos\theta+v_1\sin\theta\end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_1\cos\theta-v_2\sin\theta\\ v_2\sin\theta+v_2\cos\theta\\ 0\end{bmatrix}$$

yazılabilir. Sonuç olarak

$$q\times\boldsymbol{v}=A\boldsymbol{v}$$

elde edilir, burada

$$A = R(\theta, \boldsymbol{n}) = I_3 + N\sin\theta + (1-\cos\theta)N^2 \text{ ve } \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix} \text{ (Anti-simetrik Matris)}$$

dir.

Not B.10

1) i etrafında θ kadar dönme yaptıran kuaterniyon $q = \cos\theta + i\sin\theta$**,**

2) j etrafında θ kadar dönme yaptıran kuaterniyon $q = \cos\theta + j\sin\theta$**,**

3) k etrafında θ kadar dönme yaptıran kuaterniyon $q = \cos\theta + k\sin\theta$ dır.

Örnek B.6 $x+y+z=0$ düzleminde $\boldsymbol{v} = (2,-1,-1)$ vektörünü $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ kadar döndürüldüğünde elde edilen $\boldsymbol{v}'$ vektörünü bulunuz.

Çözüm

$x+y+z=0$ düzleminin normali $(1,1,1)$ vektörüdür. $\boldsymbol{n}$ birim vektör olduğundan $\boldsymbol{n} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ alınır. $q = \cos\dfrac{\pi}{4} + \boldsymbol{n}\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,1)$ dir. Bu durumda $\boldsymbol{v}'$ vektörü

$$q \times \boldsymbol{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}}i + \frac{1}{\sqrt{6}}j + \frac{1}{\sqrt{6}}k\right) \times (0 + 2i - j - k)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

olarak bulunur.

Örnek B.7 $\boldsymbol{v} = (1,2,1)$ ve $\boldsymbol{v}' = (2,1,1)$ olsun

1) Dönmenin olduğu düzlemi bulunuz.

2) $\boldsymbol{v}$ yi $\boldsymbol{v}'$ ye götüren q kuaterniyonunu bulunuz.

Çözüm

Herhangi bir $\boldsymbol{x}$ vektörü için $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) = \lambda_1\boldsymbol{v} + \lambda_2\boldsymbol{v}'$ yazılabilir. Bu durumda

$$\boldsymbol{x} = (x, y, z) = \lambda_1 (1,2,1) + \lambda_2 (2,1,1) = (\lambda_1 + 2\lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ y &= 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ z &= \lambda_1 + \lambda_2 \end{aligned}$$

olmak üzere, düzlem denklemi

$$x + y - 3z = 0$$

dir. Buradan

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{11}}(1,1,-3)$$

$q \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}'$ iken

$$q = \boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{v}^{-1} = \boldsymbol{v}' \times \frac{\overline{\boldsymbol{v}}}{\|\boldsymbol{v}\|} = (2i + j + k) \times \left(-\frac{1}{6}i - \frac{1}{3}j - \frac{1}{6}k\right) = -\frac{5}{6} - \frac{5}{6}i + \frac{5}{3}j + \frac{3}{6}k$$

bulunur.

Örnek B.8 $2x + y + z = 0$ düzlemi içinde $\boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)$ vektörü $\theta = \frac{\pi}{4}$ kadar döndürüldüğünde elde edilen $\boldsymbol{v}'$ vektörünü bulunuz.

Çözüm

$2x + y + z = 0$ düzleminin normali $(2,1,1)$ vektörüdür. $\boldsymbol{n}$ birim vektör olduğundan dönme ekseni $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,1)$ alınır. $q = \cos\frac{\pi}{4} + \boldsymbol{n}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{12}(2,1,1)$ dir. Bu durumda $\boldsymbol{v}'$ vektörü

$$q \times \boldsymbol{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{12}}i + \frac{1}{\sqrt{12}}j + \frac{1}{\sqrt{12}}k\right) \times \left(0 + \frac{1}{\sqrt{3}}i - \frac{1}{\sqrt{3}}j - \frac{1}{\sqrt{3}}k\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{2}\right)$$

olarak bulunur.

Örnek B.9 $\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ ekseni etrafında $\boldsymbol{v}=\frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1)$ vektörünü $\theta=\frac{\pi}{2}$ açı ile döndüren

1) Dönmeyi yaptıran q kuaterniyonunu bulunuz.

2) Dönme sonucu elde edilen vektörü bulunuz.

3) Dönme hangi düzlemde yapılmıştır.

4) Matris tekniği ile soruyu cevaplayınız.

Çözüm

1) $$q=\cos\theta+\boldsymbol{n}\sin\theta=\cos\theta\frac{\pi}{2}+\boldsymbol{n}\sin\frac{\pi}{2}$$

$$=0+\frac{1}{\sqrt{3}}i+\frac{1}{\sqrt{3}}j+\frac{1}{\sqrt{3}}k$$

dönmeyi yaptıran kuaterniyondur.

2) Dönme sonucu elde edilen vektör

$$q\times\boldsymbol{v}=\left(0+\frac{1}{\sqrt{3}}i+\frac{1}{\sqrt{3}}j+\frac{1}{\sqrt{3}}k\right)\times\left(0+\frac{2}{\sqrt{6}}i-\frac{1}{\sqrt{6}}j-\frac{1}{\sqrt{6}}k\right)$$

$$=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

olarak bulunur.

3) Dönme normali $\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ olan düzlemde yapılacağından düzlem denklemi

$\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}y+\frac{1}{\sqrt{3}}z=0$ yani $x+y+z=0$ dir.

4) $\boldsymbol{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ olmak üzere

$$A = R(\theta, \boldsymbol{n}) = I_3 + N \sin\frac{\pi}{2} + \left(1 - \cos\frac{\pi}{2}\right) N^2$$ ve

$$N = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; N^2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

olup

$$A = I_3 + N + N^2 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} & 1 - \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} & 1 - \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

ortogonal matrisi bulunur.

$$\boldsymbol{v}' = A\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} & 1 - \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} & 1 - \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

dır.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:Özcan BEKTAŞ
Doğum Tarihi ve Yeri	:01.01.1985, Ulubey
Yabancı Dili	:İngilizce
E-posta	:obektas@yildiz.edu.tr ozcanbektas1986@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Doktora	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2015
Y. Lisans	Matematik	Ordu Üniversitesi	2011
Lisans	Matematik	Ondokuz Mayıs Üniversitesi	2008
Lise	Fen Bilimleri	Ordu Fatih Lisesi	2003

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	**Firma/Kurum**	**Görevi**
2011-Devam Ediyor	Yıldız Teknik Üniversitesi (35. Madde uyarınca)	Araştırma Görevlisi
2010-2011	Ordu Üniversitesi (35. Madde uyarınca)	Araştırma Görevlisi
2009-2010	Rize Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

Makale

1. **Bektaş, Ö.** and Yüce, S., (2014). "On the Octonionic Inclined Curves in the 8 Dimensional Euclidean Space", Mathematical Problems in Engineering, http://dx.doi.org/10.1155/2014/218638, Volume 2014, Article ID 218638, 8 pages, **(SCI-Expanded)**.

2. **Bektaş, Ö.** and Şenyurt, S., (2014). "On Some Characterizations of Ruled Surface of a Closed Spacelike Curve with Timelike Binormal in Dual Lorentzian Space", Hadronic Journal, 37(4): 473-489.

3. **Bektaş, Ö.**, Gürses, N.B. and Yüce, S., (2014). "Osculating Spheres a Semi Real Quaternionic Curve in E_2^4", European Journal of Pure and Applied Mathematics, 7(1): 86-96.

4. **Bektaş, Ö.** and Yüce, S., (2013). "Special Involute-Evolute Partner D-Curves in E^3", European Journal of Pure and Applied Mathematics, 6(1): 20-29.

5. **Bektaş, Ö.** and Yüce, S., (2013). "Special Smarandache Curves According to Darboux Frame in E^3",Romanian Journal of Mathematics and Computer Science, 3(1): 48-59.

6. **Bektaş, Ö.** and Şenyurt, S., (2013). "On Some Characterizations of Ruled Surface of a Closed Spacelike Curve with Spacelike Binormal in Dual Lorentzian Space", International Journal of Mathematical Combinatorics, 3: 56-68.

7. **Bektaş, Ö.** and Şenyurt, S., (2012). "On Some Characterizations of Ruled Surface of a Closed Timelike Curve in Dual Lorentzian Space", Advances in Applied Clifford Algebras, 4(22): 939-953, **(SCI-Expanded)**.

8. **Bektaş, Ö.** and Şenyurt, S., (2012). "On Dual Timelike-Spacelike Mannheim Partner Curves in D_1^3", International Mathematical Forum, 2(25): 1357-1370.

9. Şenyurt, S. and **Bektaş, Ö.** (2012). "Timelike-Spacelike Mannheim Partner Curves in $\mathbb{R}_1^3$", International Journal of Physical Sciences, 7(1): 100-106.

10. **Bektaş, Ö.** and Şenyurt, S., (2011). “On Dual Spacelike Mannheim Partner Curves in Dual Lorentzian Space, Ordu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi/Ordu Univ. J. Sci. Tech., 1(1): 1-14.

Bildiri

1. **Bektaş, Ö.** and Yüce, S., (2015). “On The Octonionic Inclined Curves in The 8 Dimensional Euclidean Space”, 2015 Joint Mathematics Meetings, 10-13 January 2015, San Antonio, Texas.
2. **Bektaş, Ö.** and Yüce, S., (2015). “On The Special Octonionic Curves in The 8 Dimensional Euclidean Space”, 2015 Joint Mathematics Meetings, 10-13 January 2015, San Antonio, Texas.
3. **Bektaş, Ö.** and Yüce, S., (2014). “Real Variable Serret-Frenet Formulae Of An Octonion Valued Function”, Colloquium on Combinatorics, 7-8 November 2014, Ilmenau.
4. **Bektaş, Ö.,** Gürses, N.B. and Yüce, S., (2013). “Quaternionic Osculating Curves in Semi Euclidean Space in E_2^4, 2st Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, IECMSA 2013, 26-29 August 2013, Sarajevo-Bosnia and Herzegovina.
5. Gürses, N.B., **Bektaş, Ö.,** Akbıyık, M. and Yüce, S., (2013). “On the Osculating Curves Spheres of a Dual Quaternionic and Dual Split Quaternionic Curve”, 2st Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, IECMSA 2013, 26-29 August 2013, Sarajevo-Bosnia and Herzegovina.
6. **Bektaş, Ö.,** Gürses, N.B. and Yüce, S., (2013). “Quaternionic Osculating Curves in E^4”, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM 2013), 2-5 June 2013, Istanbul.
7. **Bektaş, Ö.,** Gürses, N.B. and Yüce, S., (2013). “Osculating Spheres of a Semi Real Quaternionic Curves in E_2^4”, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM 2013), 2-5 June 2013, Istanbul.

8. Gürses, N.B., **Bektaş, Ö.** and Yüce, S., (2013). "Semi Real Quaternionic Focal Curves in Semi Euclidean Space E_2^4", International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM 2013), 2-5 June 2013, Istanbul.

9. Gürses, N.B., **Bektaş, Ö.** and Yüce, S., (2013). "Quaternionic Focal Curves in E^4", XI. Geometry Symposium, 1-5 July 2013, Ordu.

10. **Bektaş, Ö.** and Yüce, S., (2013). "Special Smarandache Curve According To Darboux Frame in E^3", XI. Geometry Symposium, 1-5 July 2013, Ordu.

11. Gürses, N.B., **Bektaş, Ö.** and Yüce, S., (2012). "Special Smarandache Curves in E_1^3", International Conference on Applied Analysis and Algebra (ICAA 2012), 20-24 June 2012, Istanbul.

12. **Bektaş, Ö.** and Yüce, S., (2012). "Special Involute-Evolute Partner D-Curves in E^3", International Conference on Applied Analysis and Algebra (ICAA 2012), 20-24 June 2012, Istanbul.

13. **Bektaş, Ö.** and Şenyurt, S., (2010). "Dual Lorentz Uzayında Kapalı Timelike Bir Eğrinin Oluşturduğu Paralel Regle Yüzeyin Bazı Karakteristik Özellikleri", VIII. Geometri Sempozyumu, 29 Nisan-02 Mayıs 2010, Antalya.

14. **Bektaş, Ö.** and Şenyurt, S., (2010). "Dual Lorentz Uzayında Timelike Binormalli Kapalı Spacelike Bir Eğrinin Oluşturduğu Paralel Regle Yüzeyin Bazı Karakteristik Özellikleri Üzerine", V. Ankara Matematik Günleri, 03-04 Haziran 2010, Ankara.

15. **Bektaş, Ö.** and Şenyurt, S., (2010). "Dual Lorentz Uzayında Spacelike Binormalli Kapalı Spacelike Bir Eğrinin Oluşturduğu Paralel Regle Yüzeyin Bazı Karakteristik Özellikleri", 23. Ulusal Matematik Sempozyumu, 04-07 Ağustos 2010, Kayseri.

Dergi Hakemlikleri

1. Konuralp Journal of Mathematics
2. Asian Journal of Mathematics and Computer Research
3. MathSciNet
4. Mathematica Moravica

Bilimsel Organizasyonları

1. International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM 2013), 2-5 June 2013, Istanbul, Turkey (Local Committee Member).

Ödülleri

1. TÜBİTAK 2015 Yayın Teşvik Ödülü
2. YTÜ 2013 Yayın Teşvik Ödülü.
3. TÜBİTAK 2012 Yayın Teşvik Ödülü