

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

TORSİYONLU ALANLARIN KÜTLEÇEKİM İLE ETKİLEŞMESİ



HASAN TUNCAY ÖZÇELİK

**DOKTORA TEZİ
FİZİK ANABİLİM DALI
FİZİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. REYHAN KAYA**

**EŞ DANIŞMAN
Prof. Dr. MAHMUT HORTAÇSU**

İSTANBUL, 2016

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TORSİYONLU ALANLARIN KÜTLEÇEKİM İLE ETKİLEŞMESİ

Hasan Tuncay Özçelik tarafından hazırlanan tez çalışması 16.11.2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Fizik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Reyhan KAYA
Yıldız Teknik Üniversitesi

Eş Danışman

Prof. Dr. Mahmut HORTAÇSU
Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Reyhan KAYA
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Kubilay KUTLU
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Murat ÖZER
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Hakkı Tuncay ÖZER
İstanbul Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Tolga BİRKANDAN
İstanbul Teknik Üniversitesi

ÖNSÖZ

Bu çalışmam süresince her türlü yardım ve fedakârlığı sağlayan, bilgi, tecrübe ve güler yüzü ile çalışmama ışık tutan, ayrıca bana bu çalışmayı vererek kendimi geliştirmeye yönelik de birkaç adım ileride olmamı sağlayan Prof. Dr. Mahmut Hortaçsu ve Doç. Dr. Reyhan Kaya'ya teşekkürü bir borç bilirim.

Bu çalışmayı bitirmemde emeği geçen ve benden maddi, manevi hiçbir desteği esirgemeyen babam RAFET ÖZÇELİK, annem NURİYE ÖZÇELİK ve kardeşlerime ithaf ederim.

Kasım, 2016

Hasan Tuncay Özçelik

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	vi
KISALTIMA LİSTESİ.....	vii
ŞEKİL LİSTESİ.....	viii
ÖZET	ix
ABSTRACT.....	x
BÖLÜM 1	
GİRİŞ.....	1
1.1 Literatür Özeti.....	1
1.2 Tezin Amacı.....	3
1.3 Hipotez.....	4
BÖLÜM 2	
EINSTEIN-CARTAN TEOREMİ.....	5
BÖLÜM 3	
(2+1) BOYUTTA SPİN $\frac{1}{2}$ PARÇACIĞIN KÜTLEÇEKİM ALANI İLE ETKİLEŞMESİ.....	9
BÖLÜM 4	
(2+1) BOYUTTA SKALER ALANIN KÜTLEÇEKİM ALANI İLE ETKİLEŞMESİ.....	20
BÖLÜM 5	
SONUÇ VE ÖNERİLER	33
KAYNAKLAR.....	34

EK-A	
RIEMANN VE RICCI TENSÖRÜ	36
A-1 (2+1) Boyutta Spin $\frac{1}{2}$ Parçacığın Kütleçekim Alanı ile Etkileşmesi	36
A-2 (2+1) Boyutta Skaler Alanın Kütleçekim Alanı ile Etkileşmesi	40
ÖZGEÇMİŞ	44



SİMGE LİSTESİ

S	Eylem
L_g	Kütleçekim Alanın Lagranjiyeni
L_m	Maddenin Lagranjiyeni
L_{int}	Etkileşim Lagranjiyeni
$g_{\mu\nu}$	Metrik
$\{\Gamma_{\mu\nu}^\rho\}$	Christoffel Sembolü
$R_{\mu\nu}^\rho$	Riemann Eğrilik Tensörü
$R_{\mu\nu}$	Ricci Eğrilik Tensörü
R	Torsiyonlu Ricci Eğrilik Skalari
\tilde{R}	Torsiyonsuz Ricci Eğrilik Skalari
e_ν^a	Tetrad
$\Gamma_{\mu\nu}^\rho$	Afin Bağıntısı
$T_{\mu\nu}^\rho$	Torsiyon Tensörü
$K_{\mu\nu}^\rho$	Kontorsiyon Tensörü
Γ_μ	Spinör Bağıntısı
γ^μ	Dirac Gama Matrisleri
φ	Skaler Alan
Ψ	Spinör
Λ	Kozmolojik Sabit
ξ	Etkileşim Sabiti
C	Yük Eşlenik Matrisi
G	Kütleçekim Sabiti
c	Işığın Boşluktaki Hızı

KISALTMA LİSTESİ

EC	Einstein-Cartan
KG	Klein-Gordon
RK	Runge-Kutta



ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 4. 1 $J(r) \neq 0$ için skaler alanın r' 'ye göre grafiği	25
Şekil 4. 2 $J(r) \neq 0$ için skaler alanın r' 'ye göre birinci türevinin grafiği.....	25
Şekil 4. 3 $J(r) \neq 0$ için $v(r)$ 'nin r' 'ye göre grafiği.....	26
Şekil 4. 4 $J(r) \neq 0$ için $w(r)$ 'nin r' 'ye göre grafiği.....	26
Şekil 4. 5 $J(r)$ 'nin r' 'ye göre grafiği	26
Şekil 4. 6 $J(r)$ 'nin r' 'ye göre birinci türevinin grafiği	27
Şekil 4. 7 $J(r) \neq 0$ için Ricci skalerinin r' 'ye göre grafiği.....	27
Şekil 4. 8 $J(r)=0$ için skaler alanın r' 'ye göre grafiği	29
Şekil 4. 9 $J(r)=0$ için skaler alanın r' 'ye göre birinci türevinin grafiği.....	29
Şekil 4. 10 $J(r)=0$ için $v(r)$ 'nin r' 'ye göre grafiği.....	29
Şekil 4. 11 $J(r)=0$ için $w(r)$ 'nin r' 'ye göre grafiği	30
Şekil 4. 12 $J(r)=0$ için Ricci skalerinin r' 'ye göre grafiği	30
Şekil 4. 13 $J(r) \neq 0$ ve $J(r)=0$ için skaler alanın r' 'ye göre grafiği	31
Şekil 4. 14 $J(r) \neq 0$ ve $J(r)=0$ için $v(r)$ 'nin r' 'ye göre grafiği.....	31
Şekil 4. 15 $J(r) \neq 0$ ve $J(r)=0$ için $w(r)$ 'nin r' 'ye göre grafiği.....	32
Şekil 4. 16 $J(r) \neq 0$ ve $J(r)=0$ için R 'nin r' 'ye göre grafiği	32

TORSİYONLU ALANLARIN KÜTLEÇEKİM İLE ETKİLEŞMESİ

Hasan Tuncay ÖZÇELİK

Fizik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Reyhan KAYA

Eş Danışman: Prof. Dr. Mahmut HORTAÇSU

Bu tez çalışmasında (2+1) boyutta torsiyon terimi içeren spinör ve skaler alanlar ile kütleçekimi arasındaki etkileşim incelenmiş ve sonuçlar tartışılmıştır. Eylemin metrik ve kontorsiyona göre varyasyonu alınarak Einstein ve Cartan denklemleri bulundu. Spinör alan için bulunan denklemlerin çözümünde, spinör alan ile spinör alanın kompleks eşleğinin çarpımı sabit olarak bulundu. Skaler alan için bulunan denklemler analitik olarak çözülemediğinden dolayı Runge-Kutta yöntemiyle nümerik olarak çözüldü. Elde edilen grafiklerden konuma bağlı olan skaler alanın sonsuzda sifıra gittiği görülmektedir.

Anahtar Kelimeler: Einstein, Cartan, torsiyon, spinör alan, skaler alan

**INTERACTION OF QUANTUM FIELDS COUPLED TO GRAVITY WITH
TORSION**

Hasan Tuncay ÖZÇELİK

Department of Physics

PhD. Thesis

Adviser: Assoc. Prof. Dr. Reyhan KAYA

Co-Adviser: Prof. Dr. Mahmut HORTAÇSU

In this thesis, we study spinor and scalar fields, coupled to gravity with torsion (Einstein-Cartan model) in (2+1) dimensions. To find the Einstein and Cartan equations, we take the variation of the action with respect to metric and contortion. We solve these equations for the spinor field and find the product of the spinor field and its complex conjugate to take a constant value. We were not able to solve these equations analytically when a scalar field is coupled to gravity. We, instead, plot the solutions to these equations using the Runge-Kutta method. We find that the space dependent scalar field goes to zero as we approach infinity.

Keywords: Einstein, Cartan, torsion, spinor field, scalar field

1.1 Literatür Özeti

Özel görelilik teorisi 1905 yılında Einstein tarafından yayınlandıktan sonra Einstein dört temel etkileşmeden biri olan kütleçekimini özel görelilik teorisine katmak için yaptığı çalışmaları 1915 yılında tamamladı ve genel görelilik teorisini yayınladı. Genel görelilik teorisi Riemann geometrisi ve Christoffel sembollerine dayanmaktadır. Christoffel sembolleri 1869 yılında Gustav Dirichlet'in öğrencisi olan Elwin Bruno Christoffel tarafından bulunmuştur. Bu teori Gregorio Ricci-Curbastro ve onun öğrencisi Tullio Levi-Civita tarafından geliştirilmiştir. Riemann eğrilik tensörü, Bernhard Riemann ve Elwin Bruno Christoffel tarafından bulunmuştur. Bu iki tensör genel görelilik teorisinde çok önemli rol oynamaktadır [1, 2].

Genel görelilik teorisinde afin bağıntısına torsiyon tensörü eklenerek Einstein-Cartan (EC) teorisi elde edilmiştir. EC teorisi 1922 yılında Elie Cartan tarafından bulunmuştur. Bu teori genel göreliliğin genişletilmiş hali olarak kabul edilmektedir [3, 4]. EC teorisi uzay-zaman ile torsion arasında bağlantı kurulmasını mümkün kılmaktadır. Torsiyon terimi hesaba katılmadığı zaman EC teorisi Einstein teorisine indirgenmektedir. Einstein'ın genel göreliliği makrofizik alanındaki tüm deneysel gerçeklerle uyumludur. Bununla birlikte, mikroskobik düzeyde, uzay-zamanın bir torsiyona sahip olması ve dolayısıyla mikroskopik kütleçekim etkileşimlerinin EC teorisi tarafından tanımlanması gerektiği savunuldu [5]. Torsiyonun, kütleçekiminin tam bir teorisi için gerekli olduğu da gösterilmiştir [6]. Maddenin spini ve kütlesi, EC teorisinde önemli bir rol oynamaktadır [7, 8]. Spin-kütleçekim etkileşmesi ilgi çekmektedir. Madde alanları

(skaler, ayar, spinor) ile çalışan birçok yazarın makalesinde spin-kütleçekim etkileşmesi bulunmaktadır [9, 10].

ArXiv'de Einstein-Cartan teorisi üzerine yazılmış en yeni yayınlardan biri olan Ivanov ve Wellenzohn'un makalesinde torsiyon alanının kozmolojik sabit veya karanlık enerji yoğunluğunun kaynağı gibi davrandığı gösterilmiştir [11].

Son zamanlarda, skaler alan ve kütleçekiminin minimal olmayan bağlanımının bir torsiyon oluşturduğu gösterilmiştir. Skaler alan ve kütleçekiminin minimal olmayan bağlanımları genel relativistik kütleçekim teorileri için ilgi çekicidir ve enflasyonist kozmolojide önemli rol oynamaktadır [12]. Skaler alan ve kütleçekiminin minimal olmayan etkileşmelerini içeren açık Friedmann modelleri için EC denklemlerinin tam genel çözümleri elde edilmiştir [13]. Galiakhmetov bu alanda çalışmaya devam etti ve torsion ve eğriliği birleştiren skaler alanın ilginç sonuçlar doğurduğunu gösteren çalışmalar yaptı [14, 15]. Eğrilik ve torsiyonlu minimal olmayan metrik-skaler kuplajların kullanıldığı çok yeni çalışma bir çalışma vardır [16]. Burada karanlık enerji, torsiyonlu metrik-skaler kuplajlarla açıklanmaktadır.

(2 + 1) boyutlardaki genel görelilik, kütleçekimi dinamiklerinin temel özelliklerini anlamak için gittikçe yaygınlaşan bir model haline gelmiştir. 2+1 boyutta kütleçekim ile ilgili çalışmalar çok sayıda belirgin sonuçlara neden olmuştur. Bu sonuçlardan önemli olanlardan biri Banados, Teitelboim and Zanelli (BTZ) kara deliğinin keşfidir [17, 18]. Skaler alanla etkileşen (2 + 1) boyutlardaki Einstein kütleçekimi literatürde incelenmiştir [19-22].

Genel görelilik teorisinde torsiyon tensörü tanımlanmadan önce afin bağıntısı Christoffel sembolüne eşit olarak tanımlanıyordu. Christoffel sembolleri simetrik olduğu için afin bağıntısı da simetrik olmaktadır. Bu yüzden torsiyon tensörü sıfır olmaktadır [23, 24]. Christoffel sembolleri metrik veya tetrad tensörüne, afin bağıntısı Christoffel sembolleri ve torsiyon tensörüne bağlıdır. Afin bağıntısının antisimetrik kısmı torsiyon tensörünü oluşturur [25, 26, 27]. Afin bağıntısından yararlanarak Riemann eğrilik tensörü elde edilir. Eylem Riemann eğrilik tensörü skaler alan veya spinör alana bağlı olarak elde edilir. Kontorsiyon tensörü, torsiyon tensörüne bağlıdır. Einstein denklemleri, eylemin metrik tensörü veya tetrad tensörüne göre varyasyonu

alınarak elde edilir. Cartan denklemleri, eylemin kontorsiyon tensörüne göre varyasyonu alınarak elde edilmektedir. Eylemin skaler alana göre varyasyonu alınarak Klein-Gordon (KG) ve spinöre göre varyasyonu alınarak Dirac denklemleri elde edilir. Spinör alan için Cartan denklemlerinden yararlanarak kontorsiyon tensörünün bileşenleri hesaplanır. Bu bileşenleri Dirac denklemlerinde yerlerine yazılır ve Dirac denklemlerinden yararlanarak spinör alanın bileşenlerinin türevleri bulunur. Spinör alanın bileşenlerinin türevleri Einstein denklemlerinde yerlerine yazılır ve Einstein denklemlerinden metrik tensörünün bileşenleri hesaplanır. Metrik tensörünün bileşenlerinden yararlanarak ise Dirac denklemleri çözülür ve spinör alanın bileşenleri hesaplanır.

Skaler alan için Cartan denklemlerinden yararlanarak kontorsiyon tensörünün bileşenleri hesaplanır. Bu bileşenleri KG denklemlerinde yerlerine yazılır ve KG denklemlerinden yararlanarak skaler alanın türevi bulunur. Skaler alanın türevi Einstein denklemlerinde yerlerine yazılır ve Einstein denklemlerinden metrik tensörünün bileşenlerinin türevleri hesaplanır. Skaler alanın ve metrik tensörünün bileşenleri Runge-Kutta (RK) yöntemiyle nümerik olarak çözümlenerek skaler alan ve metrik tensörünün bileşenlerinin grafikleri bulunur. Skaler alanın büyük ve küçük değerleri için yaklaşım yapılarak açık çözümler bulunur.

1.2 Tezin Amacı

Genel görelilik içinde yer alan genel bağıntılar tanımlanacaktır. İlk olarak spinör alan için tanımlanan eylemin varyasyonu alınarak Einstein-Cartan ve Dirac denklemleri bulunacaktır. Denklemler çözüldükten sonra spinör alan ve metrik tensörü hesaplanacaktır. Spinör alan ve metrik tensörü için analitik çözümler bulunacaktır. İkinci olarak skaler alan için tanımlanan eylemin varyasyonu alınarak Einstein-Cartan ve Klein-Gordon denklemleri bulunacaktır. Denklemler analitik olarak çözülemediği için Runge-Kutta yöntemi kullanılarak nümerik olarak çözülecektir. Skaler alan üzerinde belirli koşullar tanımlayarak skaler alanın analitik çözümü bulunacaktır.

1.3 Hipotez

Spinör alan ile kütleçekim alanının etkileşmesinde açısal momentum sıfır alındığında ve torsiyon tensörü alan denklemlerine katılmadığında bulunan çözümler bütün Einstein-Cartan denklemlerini sağlamamaktadır. Skaler alan ile kütleçekim alanın etkileşmesinde, etkileşme terimi sıfır alındığı zaman bütün Einstein denklemlerini sağlayan çözüm bulunmasına karşın torsiyon tensörünün bileşenleri sıfır olmaktadır. Bu sonuç, etkileşme teriminin Einstein-Cartan denklemlerinin çözümünde etkin olduğunu göstermektedir.



EINSTEIN-CARTAN TEOREMİ

Modern spin kavramı bulunmadan önce torsiyon ile maddenin kendine özgü açısal momentumu arasında bir bağlantı olduğu Cartan tarafından önerilmişti. Bu teoriye Dennis Sciama ve Tom Kibble tarafından katkıda bulunulduğu için Einstein–Cartan–Sciama–Kibble teorisi de denilmektedir.

Eylem aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$S = \int d^3x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2k} (R - 2\Lambda) + L_m + L_{int} \right) \quad (2.1)$$

Ricci eğrilik skaleri,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (2.2)$$

şeklindedir.

Ricci tensörü,

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^{\rho} \quad (2.3)$$

şeklindedir.

Riemann eğrilik tensörü,

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu} \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \quad (2.4)$$

olarak tanımlanır.

Afin bağıntısı ve torsiyon aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \{^{\rho}_{\mu\nu}\} - K_{\mu\nu}^{\rho} \quad (2.5)$$

$$T_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}(\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}) \quad (2.6)$$

olarak tanımlanır.

Torsiyon iz vektörü,

$$T_{\mu} = T_{\mu\rho}^{\rho} \quad (2.7)$$

olarak ifade edilir [28].

Kontorsiyon ile torsiyon arasındaki bağıntı,

$$K_{\mu\nu}^{\rho} = -T_{\mu\nu}^{\rho} + T_{\mu}^{\rho}{}_{\nu} - T^{\rho}{}_{\mu\nu} \quad (2.8)$$

olarak verilir.

Christoffel sembolü,

$$\{\rho_{\mu\nu}\} = g^{\rho\sigma}(g_{\nu\sigma,\mu} + g_{\mu\sigma,\nu} - g_{\mu\nu,\sigma}) \quad (2.9)$$

olarak tanımlanır.

Metrik bağıntısı,

$$ds^2 = -(v + \frac{J^2}{r^2})dt^2 + w^2 dr^2 + (rd\phi + \frac{1}{r}dt)^2 \quad (2.10)$$

olarak tanımlanabilir. Torsiyon içermeyen Einstein denklemleri bu metrik için boşluk durumunda çözüldüğünde (2+1) boyuttaki kara delik çözümüne karşılık gelmektedir. Burada v, w ve J r 'ye bağlıdır.

(2.5), (2.6), (2.8) ve (2.10) bağıntılarından aşağıdaki denklemler bulunur.

$$-J^2(K_{11}^1 + K_{13}^3 - K_{31}^3) - r^2 K_{11}^1 v + J(K_{13}^1 - K_{31}^1)v = 0 \quad (2.11)$$

$$-w^2 K_{11}^2 + J(-K_{12}^3 + K_{21}^3) + (K_{12}^1 - K_{21}^1)v = 0 \quad (2.12)$$

$$-J^2 K_{11}^3 + J(-K_{13}^3 + K_{31}^3)v + v(-r^2 K_{11}^3 + (K_{13}^1 - K_{31}^1)v) = 0 \quad (2.13)$$

$$-J^2(K_{12}^1 + K_{21}^1 + K_{23}^3 - K_{32}^3) - 2r^2 K_{21}^1 v + J(r^2(-K_{12}^3 + K_{21}^3) + (K_{23}^1 - K_{32}^1)v + (-K_{13}^2 + K_{31}^2)w^2) = 0 \quad (2.14)$$

$$-2J^2 K_{21}^3 + J(-K_{12}^1 + K_{21}^1 - K_{23}^3 + K_{32}^3)v + v(-r^2(K_{12}^3 + K_{21}^3) + (K_{23}^1 - K_{32}^1)v + (-K_{13}^2 + K_{31}^2)w^2) = 0 \quad (2.15)$$

$$-J^2 K_{13}^1 + r^2 J(-K_{13}^3 + K_{31}^3) - r^2 K_{31}^1 v = 0 \quad (2.16)$$

$$r^2(-K_{12}^3 + K_{21}^3) + J(-K_{12}^1 + K_{21}^1 + K_{23}^3 - K_{32}^3) + (-K_{23}^1 + K_{32}^1)v - (K_{13}^2 + K_{31}^2)w^2 = 0 \quad (2.17)$$

$$-J^2 K_{31}^3 - r^2 K_{13}^3 v + J(-K_{13}^1 + K_{31}^1)v = 0 \quad (2.18)$$

$$K_{12}^2 = 0 \quad (2.19)$$

$$-(J^2 + r^2 v)K_{22}^1 + (r^2(-K_{12}^2 + K_{21}^2) + J(-K_{23}^2 + K_{32}^2))w^2 = 0 \quad (2.20)$$

$$K_{22}^2 = 0 \quad (2.21)$$

$$-(J^2 + r^2 v)K_{22}^3 + (J(K_{12}^2 - K_{21}^2) + (-K_{23}^2 + K_{32}^2)v)w^2 = 0 \quad (2.22)$$

$$-2J^2 K_{23}^1 + r^2 J(-K_{12}^1 + K_{21}^1 - K_{23}^3 + K_{32}^3) - r^2(r^2(K_{12}^3 - K_{21}^3) + (K_{23}^1 + K_{32}^1)v + (K_{13}^2 - K_{31}^2)w^2) = 0 \quad (2.23)$$

$$K_{32}^3 = 0 \quad (2.24)$$

$$J^2(K_{12}^1 - K_{21}^1 - K_{23}^3 - K_{32}^3) - 2r^2 K_{23}^3 v + J(r^2(K_{12}^3 - K_{21}^3) + (-K_{23}^1 + K_{32}^1)v + (K_{13}^2 - K_{31}^2)w^2) = 0 \quad (2.25)$$

$$-J^2 K_{13}^1 + r^2 J(-K_{13}^3 + K_{31}^3) - r^2 K_{31}^1 v = 0 \quad (2.26)$$

$$-(J^2 + r^2 v)K_{33}^1 + r^2(J(-K_{13}^1 + K_{31}^1) + r^2(-K_{13}^3 + K_{31}^3)) = 0 \quad (2.27)$$

$$J(K_{23}^1 - K_{32}^1) + r^2(K_{23}^3 - K_{32}^3) - K_{33}^2 w^2 = 0 \quad (2.28)$$

$$-(J^2 + r^2 v)K_{33}^3 + J(J(K_{13}^1 - K_{31}^1) + r^2(K_{13}^3 - K_{31}^3)) = 0 \quad (2.29)$$

(2.5), (2.6), (2.8) ve (2.10) bağıntılarından bulunan denklemler çözümlerse aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$K_{11}^1 = \frac{JK_{13}^1}{r^2},$$

$$K_{12}^2 = 0,$$

$$K_{11}^2 = \frac{vK_{12}^1 - JK_{12}^3}{w^2}, \quad (2.30)$$

$$K_{11}^3 = \frac{vK_{13}^1}{r^2},$$

$$K_{13}^2 = -\frac{J K_{12}^1 - r^2 K_{12}^3}{w^2},$$

$$K_{13}^3 = -\frac{J K_{13}^1}{r^2},$$

$$K_{21}^1 = \frac{J K_{23}^1}{r^2},$$

$$K_{21}^3 = \frac{v K_{23}^1}{r^2},$$

$$K_{22}^1 = \frac{w^2(r^2 K_{21}^2 - J K_{23}^2)}{J^2 + r^2 v},$$

$$K_{22}^2 = 0,$$

$$K_{22}^3 = \frac{w^2(J K_{21}^2 + v K_{23}^2)}{J^2 + r^2 v},$$

$$K_{23}^3 = -\frac{J K_{23}^1}{r^2},$$

$$K_{31}^1 = \frac{J K_{33}^1}{v},$$

$$K_{32}^1 = \frac{w^2(r^2 K_{31}^2 - J K_{33}^2)}{J^2 + r^2 v},$$

$$K_{32}^2 = 0,$$

$$K_{32}^3 = -\frac{w^2(J K_{31}^2 + v K_{33}^2)}{J^2 + r^2 v},$$

$$K_{33}^1 = \frac{r^2 K_{31}^3}{v},$$

$$K_{33}^3 = -\frac{J K_{31}^3}{v}.$$

(2+1) BOYUTTA SPİN ½ PARÇACIĞIN KÜTLEÇEKİM ALANI İLE ETKİLEŞMESİ

Eylem ve Lagranjiyen,

$$S = \int d^3x \sqrt{-g} L,$$

$$L = \frac{1}{2k} (R - 2\Lambda) + \frac{i}{2} (\bar{\Psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \Psi - (\nabla_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi) - M \bar{\Psi} \Psi \quad (3.1)$$

olarak tanımlanır. Burada Ψ ve $\bar{\Psi}$ r'ye bağlıdır.

Spinör ve spinörün kompleks eşleniği,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{12} \end{pmatrix},$$

$$\bar{\Psi} = (\psi_{21} \quad \psi_{22}) \quad (3.2)$$

olarak gösterilir.

C “yük eşlenik matris” olmak üzere spinör ve spinörün kompleks eşleniği arasındaki bağıntı;

$$\bar{\Psi} = \Psi C \quad (3.3)$$

olarak tanımlanır.

Spinör bağıntı terimi,

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{8} [\gamma^a, \gamma^b] e_a^\rho (e_{\rho b, \mu} - \Gamma_{\mu\rho}^\tau e_{\tau b}) \quad (3.4)$$

olarak gösterilir.

Latin alfabesinin harfleri ile belirtilen indisler Minkowski uzayında, Yunan alfabesinin harfleri ile belirtilen indisler eğri uzayda kullanılacaktır.

Spinörün kovaryant türevi,

$$\nabla_{\mu}\Psi = \partial_{\mu}\Psi + \Gamma_{\mu}\Psi,$$

$$\nabla_{\mu}\bar{\Psi} = \partial_{\mu}\bar{\Psi} - \bar{\Psi}\Gamma_{\mu} \quad (3.5)$$

olarak gösterilir.

$\eta_{ab} = (-, +, +)$ olmak üzere metrik ve eğri uzaydaki gama matrisleri tetrad formunda,

$$g_{\mu\nu} = e_{\mu}^a e_{\nu}^b \eta_{ab} \quad (3.6)$$

$$\gamma^{\mu} = e_{\alpha}^{\mu} \gamma^{\alpha} \quad (3.7)$$

olarak gösterilir.

Dirac gama matrisleri aşağıdaki gibi seçilebilir.

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Metrik,

$$ds^2 = -\left(v + \frac{J^2}{r^2}\right)dt^2 + w^2 dr^2 + \left(r d\phi + \frac{J}{r} dt\right)^2 \quad (3.9)$$

olarak yazılabilir.

Metriğin cotetrad alanları cinsinden diğer bir ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$ds^2 = -(e^1)^2 + (e^2)^2 + (e^3)^2. \quad (3.10)$$

(3.9) ve (3.10) karşılaştırılırsa cotetrad alanları,

$$e^1 = \frac{\sqrt{J^2 + r^2 v}}{r} dt,$$

$$e^2 = w dr,$$

$$e^3 = r d\phi + \frac{J}{r} dt \quad (3.11)$$

olarak bulunur.

$e^a = e_{\mu}^a dx^{\mu}$ bağıntısından tetrad matrisi,

$$e_{\mu}^a = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{J^2+r^2v}}{r} & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 \\ \frac{J}{r} & 0 & r \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

elde edilir.

Eylemin kontorsiyona göre varyasyonu alınarak Cartan denklemlerini veren ifade bulunur.

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial K_{\mu\nu}^{\rho}} - \partial_{\sigma} \frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial(\partial_{\sigma} K_{\mu\nu}^{\rho})} = 0 \quad (3.13)$$

(3.13) bağıntısından Cartan denklemleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$K_{22}^1(J^2 + r^2v) - (r^2(K_{21}^2 + K_{31}^3) - K_{33}^1v)w^2 = 0 \quad (3.14)$$

$$J(K_{23}^1 + K_{32}^1) + r^2(-K_{21}^1 + K_{22}^2 + K_{32}^3) = 0 \quad (3.15)$$

$$2JK_{33}^1 + r^2(K_{23}^2 - K_{31}^1 + K_{33}^3) = 0 \quad (3.16)$$

$$-2(K_{21}^1 - K_{22}^2)(J^2 + r^2v) + k U J \sqrt{J^2 + r^2v} w + 2(JK_{31}^2 + K_{33}^2v)w^2 = 0 \quad (3.17)$$

$$-K_{22}^1(J^2 + r^2v) + (r^2K_{21}^2 - JK_{23}^2)w^2 = 0 \quad (3.18)$$

$$-2K_{23}^1(J^2 + r^2v) + kr^2 U \sqrt{J^2 + r^2v} w + 2(r^2K_{31}^2 - JK_{33}^2)w^2 = 0 \quad (3.19)$$

$$K_{22}^3(J^2 + r^2v) + J(K_{21}^2 + 2K_{31}^3) + (-K_{31}^1 + K_{33}^3)v)w^2 = 0 \quad (3.20)$$

$$w(2r^2K_{21}^3 + 2J(K_{22}^2 - K_{23}^3 + K_{32}^3) - 2K_{32}^1v - k U \sqrt{J^2 + r^2v} w) = 0 \quad (3.21)$$

$$JK_{23}^2 + r^2K_{31}^3 - K_{33}^1v = 0 \quad (3.22)$$

$$-2K_{12}^1(J^2 + r^2v) - k U J \sqrt{J^2 + r^2v} w + 2(r^2K_{11}^2 - JK_{31}^2)w^2 = 0 \quad (3.23)$$

$$r^2(-K_{11}^1 + K_{12}^2) + J(K_{13}^1 + K_{31}^1 - K_{32}^2) + K_{33}^1v = 0 \quad (3.24)$$

$$-2K_{32}^1(J^2 + r^2v) - kr^2 U \sqrt{J^2 + r^2v} w + 2(r^2K_{13}^2 - JK_{33}^2)w^2 = 0 \quad (3.25)$$

$$K_{11}^1 - K_{12}^2 + K_{31}^3 = 0 \quad (3.26)$$

$$(K_{12}^1 + K_{32}^3)(J^2 + r^2v) + (-r^2K_{11}^2 + J(K_{13}^2 + K_{31}^2) + K_{33}^2v)w^2 = 0 \quad (3.27)$$

$$K_{13}^1 - K_{32}^2 + K_{33}^3 = 0 \quad (3.28)$$

$$-2K_{12}^3(J^2 + r^2v) - k U v \sqrt{J^2 + r^2v} w - 2(JK_{11}^2 + K_{31}^2v)w^2 = 0 \quad (3.29)$$

$$-r^2 K_{11}^3 + J(-K_{12}^2 + K_{13}^3 + K_{31}^3) + (-K_{32}^2 + K_{33}^3)v = 0 \quad (3.30)$$

$$-2K_{32}^3(J^2 + r^2v) + k U J \sqrt{J^2 + r^2vw} - 2(JK_{13}^2 + K_{33}^2v)w^2 = 0 \quad (3.31)$$

$$r^2 K_{11}^3 + JK_{21}^2 - K_{13}^1 v = 0 \quad (3.32)$$

$$2r^2 K_{12}^3 + 2J(K_{12}^1 - K_{21}^1 + K_{22}^2) - 2K_{23}^1 v + k U \sqrt{J^2 + r^2vw} = 0 \quad (3.33)$$

$$K_{22}^1(J^2 + r^2v) + (r^2(-K_{11}^1 + K_{13}^3) + J(2K_{13}^1 + K_{23}^2))w^2 = 0 \quad (3.34)$$

$$-2K_{21}^3(J^2 + r^2v) + k U v \sqrt{J^2 + r^2vw} - 2(JK_{11}^2 + K_{13}^2v)w^2 = 0 \quad (3.35)$$

$$-K_{22}^3(J^2 + r^2v) - (JK_{21}^2 + K_{23}^2v)w^2 = 0 \quad (3.36)$$

$$2(K_{22}^2 - K_{23}^3)(J^2 + r^2v) - k U J \sqrt{J^2 + r^2vw} + 2(-r^2 K_{11}^2 + JK_{13}^2)w^2 = 0 \quad (3.37)$$

$$-2JK_{11}^3 + (K_{11}^1 - K_{13}^3 + K_{21}^2)v = 0 \quad (3.38)$$

$$J(K_{12}^3 + K_{21}^3) - (K_{12}^1 + K_{22}^2 - K_{23}^3)v = 0 \quad (3.39)$$

$$K_{22}^3(J^2 + r^2v) + (-r^2 K_{11}^3 + (K_{13}^1 + K_{23}^2)v)w^2 = 0 \quad (3.40)$$

(2.30) bağıntılarından yararlanarak Cartan denklemleri çözülrse kontorsiyon tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri,

$$K_{12}^1 = -k \frac{wJ}{4F} U,$$

$$K_{12}^3 = -k \frac{vw}{4F} U,$$

$$K_{13}^2 = k \frac{F}{4w} U,$$

$$K_{21}^1 = k \frac{wJ}{4F} U,$$

$$K_{21}^3 = k \frac{vw}{4F} U,$$

$$K_{23}^1 = k \frac{r^2w}{4F} U,$$

$$K_{23}^3 = -k \frac{wJ}{4F} U,$$

$$K_{31}^2 = -k \frac{F}{4w} U,$$

(3.41)

$$K_{32}^1 = -k \frac{r^2 w}{4F} U,$$

$$K_{32}^3 = k \frac{wJ}{4F} U,$$

$$U = \psi_{11}\psi_{21} + \psi_{12}\psi_{22},$$

$$F = \sqrt{r^2 v + J^2}$$

olarak bulunur.

(2.5), (2.6) ve (3.41) den yararlanarak torsiyon tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$T_{12}^1 = \frac{kJw}{4\sqrt{J^2 + r^2 v}} U,$$

$$T_{12}^3 = \frac{kvw}{4\sqrt{J^2 + r^2 v}} U,$$

$$T_{13}^2 = -\frac{k\sqrt{J^2 + r^2 v}}{4w} U,$$

$$T_{21}^1 = -\frac{kJw}{4\sqrt{J^2 + r^2 v}} U,$$

$$T_{21}^3 = -\frac{kvw}{4\sqrt{J^2 + r^2 v}} U,$$

$$T_{23}^1 = -\frac{kr^2 w}{4\sqrt{J^2 + r^2 v}} U,$$

$$T_{23}^3 = \frac{kJw}{4\sqrt{J^2 + r^2 v}} U,$$

$$T_{31}^2 = \frac{k\sqrt{J^2 + r^2 v}}{4w} U,$$

$$T_{32}^1 = \frac{kr^2 w}{4\sqrt{J^2 + r^2 v}} U,$$

$$T_{32}^3 = -\frac{kJw}{4\sqrt{J^2 + r^2 v}} U.$$

(3.42)

(2.7) ve (3.42) denklemlerinden torsiyon iz vektörünün bütün bileşenleri sıfır bulunur.

(3.4) bağıntısından spinör bağıntı teriminin bileşenleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \frac{i(kU\sqrt{J^2 + r^2vw} + 2J')}{8rw} & -\frac{i(kUJ\sqrt{J^2 + r^2vw} + 2JJ' + 2r^2v')}{8r\sqrt{J^2 + r^2vw}} \\ \frac{i(kUJ\sqrt{J^2 + r^2vw} + 2JJ' + 2r^2v')}{8r\sqrt{J^2 + r^2vw}} & -\frac{i(kU\sqrt{J^2 + r^2vw} + 2J')}{8rw} \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-4J + krc4\sqrt{J^2 + r^2vw} + 2rJ'}{8r\sqrt{J^2 + r^2v}} \\ \frac{-4J + krc4\sqrt{J^2 + r^2vw} + 2rJ'}{8r\sqrt{J^2 + r^2v}} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

$$\Gamma_3 = \begin{pmatrix} \frac{i}{2w} & -\frac{i(4J + krc4\sqrt{J^2 + r^2vw} - 2rJ')}{8\sqrt{J^2 + r^2vw}} \\ \frac{i(4J + krc4\sqrt{J^2 + r^2vw} - 2rJ')}{8\sqrt{J^2 + r^2vw}} & -\frac{i}{2w} \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

Eylemin tetradla göre varyasyonu alınarak Einstein denklemlerini veren ifade bulunur.

$$\frac{\partial(\sqrt{-gL})}{\partial e_a^\mu} - \partial_\rho \frac{\partial(\sqrt{-gL})}{\partial(\partial_\rho e_a^\mu)} + \partial_\rho \partial_\sigma \frac{\partial(\sqrt{-gL})}{\partial(\partial_\rho \partial_\sigma e_a^\mu)} = 0 \quad (3.46)$$

$e_1^1, e_2^2, e_3^3, e_1^3$ ve e_3^1 bileşenleri sırasıyla (3.46) bağıntısına yerleştirilir ve işlem yapılırsa aşağıdaki Einstein denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned} & 8kr(J^2 + r^2v)^2 w^2 \psi_{21}^3 (\psi_{12})' + 8kr(J^2 + r^2v)^2 w^2 \psi_{22} (-U + \psi_{12} \psi_{22}) \\ & (\psi_{21})' - 8kr(J^2 + r^2v)^2 w^2 \psi_{21} (-\psi_{22} U' + \psi_{22}^2 (\psi_{12})' + U (\psi_{22})') + \\ & \psi_{21}^2 (w(-8FJ^3 kUw - 8FJkr^2 Uvw + J^4 r w^2 (kU(16M + 3kU) + 16\Lambda) + \\ & r^5 v^2 w^2 (kU(16M + 3kU) + 16\Lambda) + 2J^2 r v (8 + r^2 w^2 (kU(16M + 3kU) + \\ & 16\Lambda))) + 4r(-w((J^2 - r^2v)(J')^2 + JrJ'(6v + rv') + J(Fk(J^2 + r^2v)wU' \\ & - 2Jrv')) - 2(J^2 + r^2v)(2rv + JJ')w' - 2k(J^2 + r^2v)^2 w^2 \psi_{12} (\psi_{21})' + \\ & 2J(J^2 + r^2v)wJ'') = 0 \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$F^2 w^2 (kU(16M + 3kU) + 16\Lambda) + 4(J')^2 + 8rv' = 0 \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} & (8F^4 kr^2 w^2 \psi_{21}^3 (\psi_{12})' + 8F^4 kr^2 w^2 \psi_{22} (-U + \psi_{12} \psi_{22}) (\psi_{21})' - \\ & 8F^4 kr^2 w^2 \psi_{21} (-\psi_{22} U' + \psi_{22}^2 (\psi_{12})' + U (\psi_{22})') + \psi_{21}^2 (w(-16FJ^3 krUw \\ & - 16FJkr^3 Uvw + 2J^2 r^4 vw^2 (kU(16M + 3kU) + 16\Lambda) + r^6 v^2 w^2 \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned}
& (kU(16M + 3kU) + 16\Lambda) + J^4(-16 + r^2w^2(kU(16M + 3kU) + 16\Lambda))) \\
& -4r(3F^2rw(J')^2 + r^5w(v')^2 + 2r^2v'(-2J^2w + F^2rw') + J'(-2w(2J^3 - \\
& 2Jr^2v + F^3krUw) + 4Jr^3wv' + 4F^2Jrw') + 2F^2(F^2krw^2\psi_{12}(\psi_{21})' - \\
& 2J(Jw' + rwJ'') - r^3wv'')) = 0 \\
& 4^3(w - rw') - 2Jr^2(-w(J')^2 + rvv' + 2rvw') + J^2r(J'(-4w + 2rw') \\
& + w(Fkw(2U + rU') - 2rJ'')) + r^3(J'(rvv' + 2v(w + rw')) + \\
& vw(Fkw(2U + rU') - 2rJ'')) = 0
\end{aligned} \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned}
& 8F^4Jkrw^2\psi_{21}^3(\psi_{12})' + 8F^4Jkrw^2\psi_{22}(-U + \psi_{12}\psi_{22})(\psi_{21})' - \\
& 8F^4Jkrw^2\psi_{21}(-\psi_{22}U' + \psi_{22}^2(\psi_{12})' + U(\psi_{22})') + \psi_{21}^2(Jw(-8FJ^3kUw - \\
& 8FJkr^2Uvw + J^4rw^2(kU(16M + 3kU) + 16\Lambda) + r^5v^2w^2(kU(16M + \\
& 3kU) + 16\Lambda) + 2J^2rv(8 + r^2w^2(kU(16M + 3kU) + 16\Lambda))) - 4Jr(J^2 - \\
& 3r^2v)w(J')^2 + 4rJ'(-3F^2rw(2v + rv') - 2(J^4 - r^4v^2)w') - \\
& 4r(F^5kw^2U' + Jr^4w(v')^2 + rv'(w(-2J^3 + 2Jr^2v + F^3krUw) + \\
& 2F^2Jrw') + 2F^2(2Jrvv' + F^2w(Jkw\psi_{12}(\psi_{21})' - J'') - Jr^2wv'')) = 0
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Eylemin spinöre göre varyasyonu alınarak Dirac denklemleri bulunur.

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta L}{\delta \Psi} = 0 \\
& \frac{\delta L}{\delta \bar{\Psi}} = 0
\end{aligned} \tag{3.52}$$

(3.52) bağıntısından Dirac denklemleri bulunur.

$$\begin{aligned}
& 4FJU - rU(3F^2kU + 8M(J^2 + r^2v))w - 2FrUJ' + \psi_{12}(\psi_{22}(-4FJ + \\
& r(8M + 3kU)(J^2 + r^2v)w + 2FrJ') + 2r\psi_{21}(2rv + 2JJ' + r^2v')) - \\
& 8r(J^2 + r^2v)\psi_{21}(\psi_{12})' = 0
\end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}
& \psi_{12}\psi_{21}^2(4FJ - r(8M + 3kU)(J^2 + r^2v)w - 2FrJ') - 8r(-F^2U + (J^2 + \\
& r^2v)\psi_{12}\psi_{22})(\psi_{21})' + 2r\psi_{21}(2U(rv + JJ') - 4(J^2 + r^2v)U' + r^2Uv' + \\
& 4(J^2 + r^2v)\psi_{22}(\psi_{12})' + \psi_{12}(-\psi_{22}(2JJ' + r(2v + rv')) + 4(J^2 + \\
& r^2v)(\psi_{22})')) = 0
\end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned}
& \psi_{21}(-4FJ + r(8M + 3kU)(J^2 + r^2v)w + 2FrJ') + 2r\psi_{22}(2rv + 2JJ' + \\
& r^2v') - 8r(J^2 + r^2v)(\psi_{22})' = 0
\end{aligned} \tag{3.55}$$

$$\psi_{22}(-4FJ + r(8M + 3kU)(J^2 + r^2v)w + 2FrJ') + 2r\psi_{21}(2JJ' + r(2v + rv')) - 8r(J^2 + r^2v)(\psi_{21})' = 0 \quad (3.56)$$

Dirac denklemlerinden,

$$(\psi_{12})' = \frac{1}{8F^2r\psi_{21}}(-FU(-4J + Fr(8M + 3kU)w + 2rJ') + \psi_{12}(F\psi_{22}(-4J + Fr(8M + 3kU)w + 2rJ') + 2r\psi_{21}(2JJ' + r(2v + rv')))), \quad (3.57)$$

$$(\psi_{22})' = \frac{1}{8F^2r\psi_{12}\psi_{21}}(F\psi_{12}\psi_{21}^2(-4J + Fr(8M + 3kU)w + 2rJ') - 2r\psi_{21}(2JUJ' - 4F^2U' + rU(2v + rv')) + F(U - \psi_{12}\psi_{22})(\psi_{22}(-4J + Fr(8M + 3kU)w + 2rJ') - 8Fr(\psi_{21}'))), \quad (3.58)$$

$$(\psi_{21})' = \frac{1}{8F^2r(U - \psi_{12}\psi_{22})}(-F\psi_{22}(-U + \psi_{12}\psi_{22})(-4J + Fr(8M + 3kU)w + 2rJ') + 2r\psi_{21}(2rUv + 2JUJ' - 4F^2U' + r^2Uv' + \psi_{12}\psi_{22}(2JJ' + r(2v + rv')))), \quad (3.59)$$

$$U = C_1 F \quad (3.60)$$

elde edilir.

(3.48) denkleminin çözümünden,

$$v' = -\frac{(16\Lambda + FkC_1(16M + 3FkC_1))F^2w^2 + 4J'^2}{8r} \quad (3.61)$$

olarak bulunur.

(3.61) bağıntısının r 'ye göre türevi alınarak v'' bulunur. v' ve v'' (3.47)'de yerlerine konular ve bulunan denklem çözümlürse,

$$J'' = \frac{1}{32F^2Jw}(-3F^6Jk^3rw^4C_1^3 + 2F^4k^2w^3C_1^2(12J^2 + 6r^2v - 8FJMrw - 3JrJ') - 4F^2kw^2C_1(-4J(rv + 4FJMw - F^2rw^2\Lambda) - 4(F^2 + J^2 - 2FJMrw)J' + Jr(J')^2) - 8w(8v(J^2 + F^2r^2w^2\Lambda) + J'(4Jr(-3v + F^2w^2\Lambda) + J'(2F^2 - 6J^2 + JrJ')))) + 32F^2(2rv + JJ')w') \quad (3.62)$$

olarak bulunur.

v' , v'' ve J'' (3.49)'da yerlerine konulur ve bulunan denklem çözülürse,

$$w' = \frac{1}{16} w (8JkwC_1 + rw^2(16\Lambda - 3F^2k^2C_1^2) - 4krwC_1J' + \frac{4(-2J + rJ')^2}{F^2r}) \quad (3.63)$$

ifadesi elde edilir.

v', v'', w' ve J'' (3.50)'de yerlerine konulur ve bulunan denklem çözülürse $S_1 = \mp 1$ olmak üzere;

$$J' = \frac{4J + S_1 F \sqrt{16 - r^2 w^2 (16\Lambda + FkC_1(16M + 3FkC_1))}}{2r} \quad (3.64)$$

olarak bulunur.

(3.64)'de bulunan J' ifadesinin r ye göre türevi (3.62) ifadesinden çıkarılırsa,

$$(2\Lambda + kM C_1 F) F w^2 = 0 \quad (3.65)$$

bulunur.

(3.65) denkleminde,

$$F = -\frac{2\Lambda}{C_1 k M} \quad (3.66)$$

elde edilir.

(3.41) ve (3.66) denkleminde,

$$v = \frac{\left(\frac{2\Lambda}{C_1 k M}\right)^2 - J^2}{r^2} \quad (3.67)$$

olarak bulunur.

(3.63) denklemini çözülerek C_2 sabit ve $S_2 = \mp 1$ olmak üzere aşağıdaki ifade bulunur.

$$w = \frac{S_2 M r}{\sqrt{C_2^2 + C_2 r^2 \Lambda - r^4 \Lambda (M^2 - \Lambda)}} \quad (3.68)$$

(3.64) denklemi çözümlenerek C_3 sabit olmak üzere,

$$J = r^2 C_3 - \frac{(r^2 \Lambda + 2C_2) S_1}{\sqrt{C_2} \sqrt{\frac{(r^2 \Lambda + 2C_2)^2}{r^4 \Lambda (-M^2 + \Lambda) + r^2 \Lambda C_2 + C_2^2}}} \quad (3.69)$$

olarak bulunur.

Açısal momentumun $r \rightarrow \infty$ iken sonlu bir değere gitmesi için,

$$C_3 = \frac{\Lambda S_1}{\sqrt{\frac{\Lambda}{-M^2 + \Lambda}} \sqrt{C_2}} \quad (3.70)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} J = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Lambda}{-M^2 + \Lambda}} \sqrt{C_2} S_1 \quad (3.71)$$

ifadesi elde edilir.

Aşağıdaki dönüşümü yapılırsa,

$$Q' = \frac{M(w - rw')}{2r^2 \Lambda w^2} \quad (3.72)$$

Dirac denklemleri,

$$\psi_{21} Q' + \psi_{12}' = 0 \quad (3.73)$$

$$\psi_{22} Q' + \psi_{21}' = 0 \quad (3.74)$$

$$(2\Lambda + kM\psi_{12}\psi_{22})Q' + k\psi_{21}\psi_{12}' = 0 \quad (3.75)$$

olarak bulunur.

(3.73), (3.74) ve (3.75) denklemlerinden C_4 sabit olmak üzere,

$$\psi_{21} = S_3 \psi_{22},$$

$$\psi_{22} = e^{-S_3 Q} C_4,$$

$$\psi_{12} = -\frac{\Lambda}{C_4 k M} e^{S_3 Q},$$

$$\psi_{11} = -\frac{\Lambda S_3}{C_4 k M} e^{S_3 Q}$$

$$S_3 = \mp 1 \quad (3.76)$$

bulunur.

(3.72) ve (3.76)'dan yararlanarak;

$$Q = C_5 - \frac{1}{4S_2} \left(\text{Log} \left[\frac{-2C_2 - r^2 \Lambda - 2 \frac{MrS_2}{w}}{C_2 r^2} \right] + \frac{2i\sqrt{M^2 - \Lambda} \text{Log} \left[\frac{i\sqrt{\Lambda}(C_2 + 2r^2(-M^2 + \Lambda))}{\sqrt{M^2 - \Lambda}} + 2 \frac{MrS_2}{w} \right]}{\sqrt{\Lambda}} \right) \quad (3.77)$$

bulunur.

$r \rightarrow \infty$ iken;

$$\lim_{r \rightarrow \infty} Q = -\frac{iS_2 \sqrt{\text{Sign}[M^2 - \Lambda]}}{\sqrt{\text{Sign}[\Lambda]}} \infty \quad (3.78)$$

(EK-A.29) 'dan yararlanarak Ricci eğrilik skaleri,

$$R = 2\Lambda$$

bulunur.

Metriği tekil yapan değerler aşağıdaki gibi bulunur.

$$r_{1,2} = \mp \sqrt{2} \sqrt{\frac{C_2}{-\Lambda + \sqrt{-\Lambda} \sqrt{-4M^2 + 3\Lambda}}} \quad (3.79)$$

$$r_{3,4} = \mp \sqrt{2} \sqrt{-\frac{C_2}{\Lambda + \sqrt{-\Lambda} \sqrt{-4M^2 + 3\Lambda}}}$$

(2+1) BOYUTTA SKALER ALANIN KÜTLEÇEKİM ALANI İLE ETKİLEŞMESİ

Eylem ve Lagranjiyen,

$$S = \int d^3x \sqrt{-g} L \quad (4.1)$$

$$L = \left(\frac{1}{2k}((1 - k\xi\varphi^2)R - 2\Lambda)\right) - \frac{1}{2}\nabla^\mu\varphi\nabla_\mu\varphi \quad (4.2)$$

olarak tanımlanır.

(2.30) ve (3.13) bağıntısından Cartan denklemleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$vw^2(-1 + k\xi\varphi^2)K_{23}^2 = 0 \quad (4.3)$$

$$w^2(1 - k\xi\varphi^2)K_{33}^2 + 2kr^2\xi\varphi\varphi' = 0 \quad (4.4)$$

$$J^3(-1 + k\xi\varphi^2)K_{23}^1 + r^2J(-1 + k\xi\varphi^2)(vK_{23}^1 - w^2K_{31}^2) + 2kr^2\xi J^2\varphi\varphi' + r^2v(w^2(1 - k\xi\varphi^2)K_{33}^2 + 2kr^2\xi\varphi\varphi') = 0 \quad (4.5)$$

$$(J^2 + r^2v)K_{23}^1 + w^2(-r^2K_{31}^2 + JK_{33}^2) = 0 \quad (4.6)$$

$$(-1 + k\xi\varphi^2)((J^2 + r^2v)K_{23}^1 - r^2w^2K_{31}^2) + 2Jkr^2\xi\varphi\varphi' = 0 \quad (4.7)$$

$$JK_{12}^1 + r^2K_{12}^3 + w^2K_{31}^2 = 0 \quad (4.8)$$

$$(-1 + k\xi\varphi^2)K_{31}^3 = 0 \quad (4.9)$$

$$JK_{13}^1 + r^2K_{31}^3 = 0 \quad (4.10)$$

$$-vK_{13}^1 + JK_{31}^3 = 0 \quad (4.11)$$

$$(-1 + k\xi\varphi^2)K_{13}^1 = 0 \quad (4.12)$$

$$vw^2(-1 + k\xi\varphi^2)K_{21}^2 = 0 \quad (4.13)$$

$$(-1 + k\xi\varphi^2)(-Jr^2K_{12}^1 - r^4K_{12}^3 + (J^2 + r^2v)K_{23}^1) - 2Jkr^2\xi\varphi\varphi' = 0 \quad (4.14)$$

$$r^2K_{12}^3 - vK_{23}^1 = 0 \quad (4.15)$$

$$(-1 + k\xi\varphi^2)(r^2K_{12}^1 - JK_{23}^1) + 2kr^2\xi\varphi\varphi' = 0 \quad (4.16)$$

$$(-1 + k\xi\varphi^2)(vK_{12}^1 - JK_{12}^3) + 2kv\xi\varphi\varphi' = 0 \quad (4.17)$$

Cartan denklemleri çözümlerse kontorsiyon tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$K_{11}^2 = -\frac{v}{w^2}H,$$

$$K_{12}^1 = -H,$$

$$K_{13}^2 = \frac{J}{w^2}H,$$

$$K_{31}^2 = \frac{J}{w^2}H, \quad (4.18)$$

$$K_{32}^3 = -H,$$

$$K_{33}^2 = \frac{r^2}{w^2}H,$$

$$H = \frac{2k\xi\varphi\varphi'}{(-1 + k\xi\varphi^2)}$$

(2.5), (2.6) ve (4.18)'den yararlanarak torsiyon tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri elde edilir.

$$T_{12}^1 = -\frac{H}{2},$$

$$T_{23}^3 = -\frac{H}{2}, \quad (4.19)$$

$$T_{32}^3 = \frac{H}{2}.$$

(2.7) bağıntısından torsiyon iz vektörünün sıfırdan farklı bileşeni aşağıdaki şekilde bulunur.

$$T_2 = H \quad (4.20)$$

Eylemin metriğe göre varyasyonu alınarak

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial g_{\mu\nu}} - \partial_\rho \frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial(\partial_\rho g_{\mu\nu})} = 0 \quad (4.21)$$

Einstein denklemlerini veren ifade bulunur.

$J \neq 0$ Durumu

$P = -1 + k\xi\varphi^2$ olmak üzere g_{11} , g_{22} , g_{33} ve g_{13} bileşenleri sırasıyla (4.21) bağıntısına yerleştirilir ve işlem yapılırsa aşağıdaki Einstein denklemler elde edilir.

$$4w(Pr^4vw^2\Lambda + J^2P(-P + r^2w^2\Lambda)) + r(4JP^2wJ' - P^2rw(J')^2 + 2(J^2 + r^2v)(2Pw'(P + 2kr\xi\varphi\varphi') + kw(\varphi'(-4P\xi\varphi + r(-1 + 4\xi + k\xi(1 + 4\xi)\varphi^2)\varphi') - 4Pr\xi\varphi\varphi'')) = 0 \quad (4.22)$$

$$P(-4(J^2 + r^2v)w^2\Lambda + P(J')^2 + 2Prv') + 4kP\xi\varphi(2JJ' + r(2v + rv'))\varphi' + 2k(J^2 + r^2v)(-1 + k\xi(1 + 8\xi)\varphi^2)(\varphi')^2 = 0 \quad (4.23)$$

$$P^2vw(J')^2 - 2JP^2wJ'v' - P^2r^2w(v')^2 - 2P(J^2 + r^2v)v'(Pw' - 2kw\xi\varphi\varphi') - 2(J^2 + r^2v)(4kPv\xi\varphi w'\varphi' + w(kv(-1 + 4\xi + k\xi\varphi^2 + 4k\xi^2\varphi^2)(\varphi')^2 - P(-2vw^2\Lambda + Pv'' + 4kv\xi\varphi\varphi''))) = 0 \quad (4.24)$$

$$-JP^2w(J')^2 - PJ'(2Prvw + Pr^2wv' + 2(J^2 + r^2v)(Pw' - 2kw\xi\varphi\varphi')) - 2(-JP^2rvv' + (J^2 + r^2v)(4JkP\xi\varphi w'\varphi' + w(Jk(-1 + 4\xi + k\xi(1 + 4\xi)\varphi^2)(\varphi')^2 - P(-2Jw^2\Lambda + PJ'' + 4Jk\xi\varphi\varphi''))) = 0 \quad (4.25)$$

Eylemin skaler alana göre varyasyonu alınarak

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial\varphi} - \partial_\rho \frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial(\partial_\rho\varphi)} = 0 \quad (4.26)$$

Klein-Gordon denklemini veren ifade bulunur.

(4.26) bağıntısından Klein-Gordon denklemi bulunur.

$$-P^2(J^2 - 3r^2v)w\xi\varphi(J')^2 - P^2r^4w\xi\varphi(v')^2 + 2JPJ'(-2Prw\xi\varphi(2v + rv')) - 2P(J^2 + r^2v)\xi\varphi w' + (J^2 + r^2v)w(-1 + k\xi(1 + 8\xi)\varphi^2)\varphi' + Prv'(2P(3J^2 + r^2v)w\xi\varphi + r(J^2 + r^2v)(-2P\xi\varphi w' + w(-1 + k\xi(1 + 8\xi)\varphi^2)\varphi')) + 2(2J^2P^2vw\xi\varphi + P(J^2 + r^2v)w'(-2Prv\xi\varphi - (J^2 + r^2v)(-1 + k\xi(1 + 8\xi)\varphi^2)\varphi') - (J^2 + r^2v)w(-Prv(-1 + k\xi(1 + 8\xi)\varphi^2)\varphi' + 8k(J^2 + r^2v)\xi^2\varphi(\varphi')^2 + \quad (4.27)$$

$$P(-P\xi\varphi(2JJ'' + r^2v'') - (J^2 + r^2v)(-1 + k\xi(1 + 8\xi)\varphi^2)\varphi'')) = 0$$

(4.22) denkleminde;

$$\varphi'' = \frac{1}{8kPr^2(J^2 + r^2v)w\xi\varphi} (4w(Pr^4vw^2\Lambda + J^2(Pr^2w^2\Lambda - (-1 + k\xi\varphi^2)^2)) + r(4JP^2wJ' - P^2rw(J')^2 + 2(J^2 + r^2v)(2P^2w' + 4k\xi\varphi(w - kw\xi\varphi^2 + Prw')\varphi' + krw(-1 + 4\xi + k\xi(1 + 4\xi)\varphi^2)(\varphi')^2))) \quad (4.28)$$

elde edilir.

(4.23) denkleminde $S_1 = \mp 1$ olmak üzere,

$$v' = \frac{1}{2Pr(P + 2kr\xi\varphi\varphi')} (P(4(J^2 + r^2v)w^2\Lambda - P(J')^2) - 8k\xi\varphi(rv(-1 + k\xi\varphi^2) + JPJ')\varphi' - 2k(J^2 + r^2v)(-1 + k\xi(1 + 8\xi)\varphi^2)(\varphi')^2) \quad (4.29)$$

veya

$$\varphi' = \frac{\sqrt{2}\sqrt{u} - 2kP\xi\varphi(2JJ' + r(2v + rv'))}{2k(J^2 + r^2v)(-1 + k\xi(1 + 8\xi)\varphi^2)} \quad (4.30)$$

$$u = -8kP(J^2 + r^2v)(-1 + k\xi(1 + 8\xi)\varphi^2)(-4(J^2 + r^2v)w^2\Lambda + P(J')^2 + 2Prv') + 16k^2\xi^2\varphi^2(2JPJ' + r(2Pv + Prv'))^2$$

olarak bulunur.

(4.28) ve (4.29)'da bulunan sonuçlardan yararlanarak (4.25) denklemini çözümlerse;

$$w' = -\frac{1}{(4Pr(J^2 + r^2v)(-2J + rJ')(P + 2kr\xi\varphi\varphi'))} (w(8(-JPr^4vw^2\Lambda + J^3(-Pr^2w^2\Lambda + (-1 + k\xi\varphi^2)^2)) + r(6JP^2r(J')^2 - P^2r^2(J')^3 + 2J'(2(J^2(Pr^2w^2\Lambda - 2(-1 + k\xi\varphi^2)^2) + r^2v(Pr^2w^2\Lambda + (-1 + k\xi\varphi^2)^2))) - kr(J^2 + r^2v)\varphi'(4\xi\varphi(-1 + k\xi\varphi^2) + r(-1 + k\xi(1 + 16\xi)\varphi^2)\varphi')) + 4(J^2 + r^2v)(Jk\varphi'(8\xi\varphi(-1 + k\xi\varphi^2) + r(-1 + k\xi(1 + 16\xi)\varphi^2)\varphi') - Pr(P + 2kr\xi\varphi\varphi')J''))) \quad (4.31)$$

elde edilir.

(4.28), (4.29) ve (4.31)'de bulunan sonuçlardan yararlanarak (4.24) ve (4.27) denklemini çözümlürse;

$$\begin{aligned}
J'' = & \frac{1}{P^2 r (J^2 + r^2 v) (P + 2kr\xi\varphi\varphi')} (-6JkP^2 r^2 \xi \varphi (J')^2 \varphi' + kP^2 r^3 \xi \varphi \\
& (J')^3 \varphi' + 2Jkr(12(J^2 + r^2 v)w^2 \Lambda \xi^2 \varphi^2 (-1 + k\xi \varphi^2) + \varphi' (4r\xi \varphi (J^2 w^2 \Lambda \\
& (-1 + k\xi(1 + 6\xi)\varphi^2) + v((-1 + k\xi \varphi^2)^2 + r^2 w^2 \Lambda (-1 + k\xi(1 + 6\xi) \\
& \varphi^2))) + (J^2 + r^2 v)\varphi'((-1 + k\xi \varphi^2)(-1 + 2\xi + k\xi(1 + 8\xi)\varphi^2) + 4kr\xi^2 \\
& \varphi\varphi')) - J'((J^2 + r^2 v)(-1 + k\xi \varphi^2)(-1 + k\xi \varphi^2(2 + 12r^2 w^2 \Lambda \xi - \\
& k\xi \varphi^2)) + kr\varphi'(2\xi \varphi (J^2 (-5(-1 + k\xi \varphi^2)^2 + 2r^2 w^2 \Lambda (-1 + k\xi(1 + 6\xi) \\
& \varphi^2)) + r^2 v((-1 + k\xi \varphi^2)^2 + 2r^2 w^2 \Lambda (-1 + k\xi(1 + 6\xi)\varphi^2))) + r(J^2 + \\
& r^2 v)\varphi'((-1 + k\xi \varphi^2)(-1 + 2\xi + k\xi(1 + 8\xi)\varphi^2) + 4kr\xi^2 \varphi\varphi'))))
\end{aligned} \tag{4.32}$$

olarak bulunur.

Bulunan değerler (EK-A.54), (EK-A.55), (EK-A.56), (EK-A.57), (EK-A.58) ve (EK-A.59) bağıntılarında yerlerine yerleştirilirse,

$$R_{11} = \frac{2\Lambda v}{-1 + k\xi \varphi^2}, \tag{4.33}$$

$$R_{22} = \frac{2\Lambda w^2 + k\varphi'^2}{1 - k\xi \varphi^2}, \tag{4.34}$$

$$R_{33} = \frac{2r^2 \Lambda}{1 - k\xi \varphi^2}, \tag{4.35}$$

$$R_{31} = \frac{2\Lambda J}{1 - k\xi \varphi^2}, \tag{4.36}$$

$$R_{13} = \frac{2\Lambda J}{1 - k\xi \varphi^2}, \tag{4.37}$$

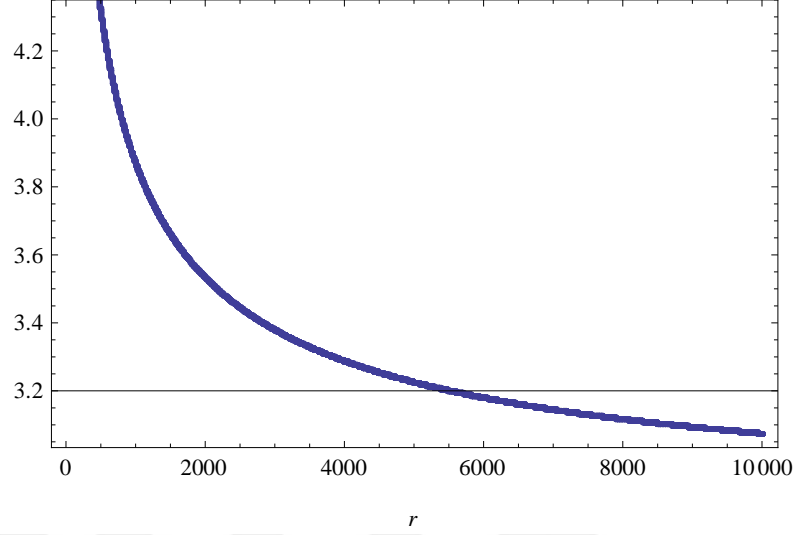
$$R = \frac{6\Lambda w^2 + k\varphi'^2}{w^2(1 - k\xi \varphi^2)} \tag{4.38}$$

bulunur.

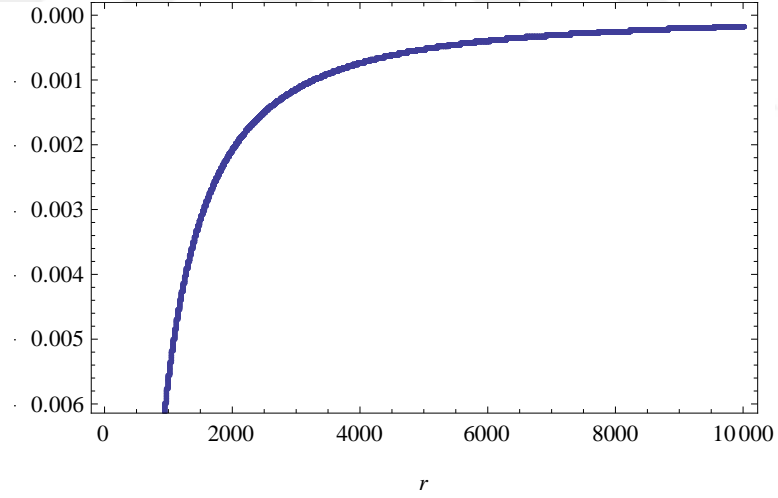
Aşağıdaki değerler kullanılarak

$$\begin{aligned}
k = 1, \Lambda = 10^{-8}, \xi = \frac{1}{8}, \varphi(1) = 10, \varphi'(1) = -2.065, v(1) = 10^2, v'(1) = \Lambda, w(1) = 10^{-1} \\
J(1) = 10^{-2}, J'(1) = 10^{-4}.
\end{aligned}$$

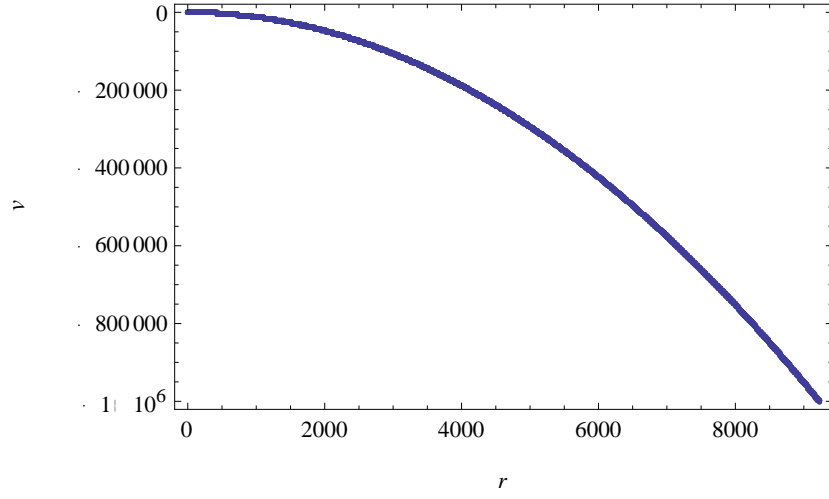
(4.28), (4.29), (4.31) ve (4.32) denklemleri 4. seviye Runge-Kutta yöntemiyle ile nümerik olarak çözülebilir. Böylece sırasıyla skaler alanın, skaler alanın birinci türevinin, metrik bileşenlerinin, açısal momentumun, açısal momentumun birinci türevinin ve Ricci skalerinin r 'ye göre grafikleri aşağıda verilmiştir.



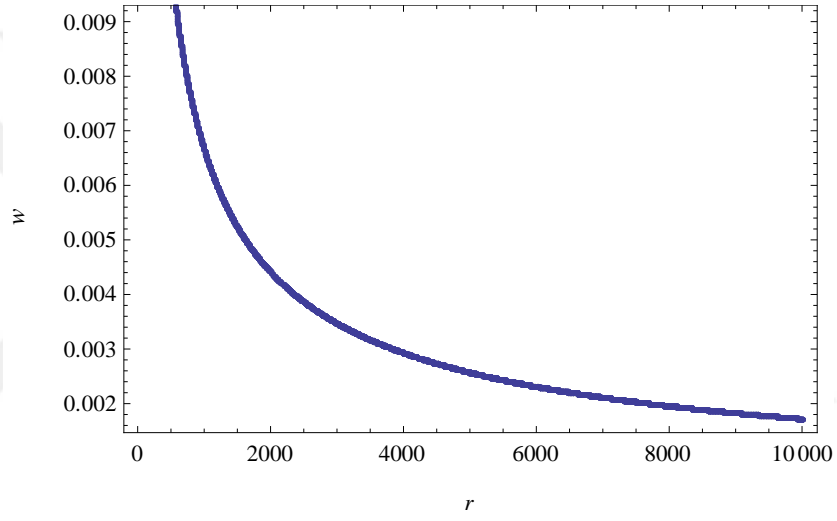
Şekil 4. 1 $J(r) \neq 0$ için skaler alanın r 'ye göre grafiği



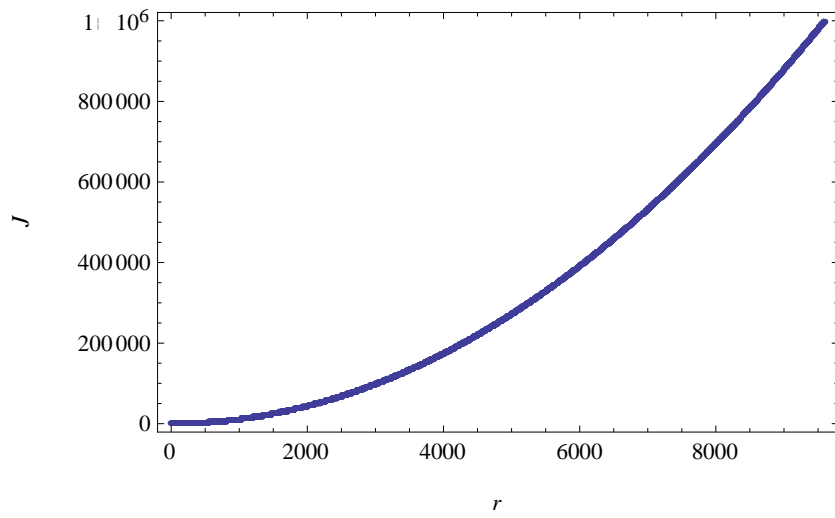
Şekil 4. 2 $J(r) \neq 0$ için skaler alanın r 'ye göre birinci türevinin grafiği



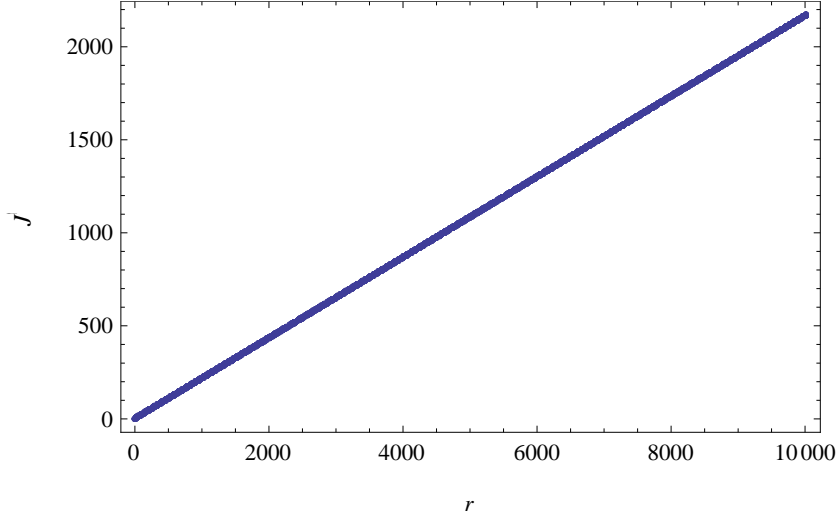
Şekil 4. 3 $J(r) \neq 0$ için $v(r)$ 'nin r 'ye göre grafiği



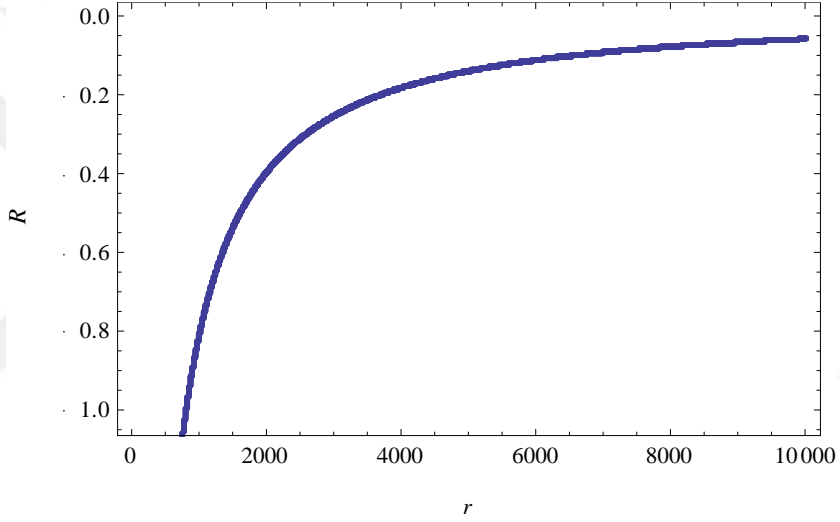
Şekil 4. 4 $J(r) \neq 0$ için $w(r)$ 'nin r 'ye göre grafiği



Şekil 4. 5 $J(r)$ 'nin r 'ye göre grafiği



Şekil 4. 6 $J(r)$ 'nin r 'ye göre birinci türevinin grafiği



Şekil 4. 7 $J(r) \neq 0$ için Ricci skalerinin r 'ye göre grafiği

$J = a r^2 + b$ Durumu

Şekil 4. 5 ve Şekil 4. 6 grafiklerinden açısal momentum için tahminde bulunarak yaklaşık bir çözüm bulabiliriz. (4.28)'den yararlanarak,

$$\varphi'' - \frac{\varphi'}{r} - \frac{(-1 + 2\xi + k\xi(1 + 10\xi)\varphi^2)\varphi'^2}{2\xi\varphi(-1 + k\xi\varphi^2)} = 0 \quad (4.39)$$

bulunur.

$k\xi\varphi^2 \gg 1$ durumu için (4.39) denklemini çözümlerse C_7 ve C_8 sabit olmak üzere,

$$\varphi = C_7(r^2(1 + 8\xi) - 4\xi C_8)^{\frac{2\xi}{1+8\xi}} \quad (4.40)$$

olarak bulunur.

$1 \gg k\xi\varphi^2 > 0$ durumu için (4.39) denklemi çözülürse C_7 ve C_8 sabit olmak üzere,

$$\varphi = C_7(r^2(1 - 4\xi) - 4\xi C_8)^{\frac{2\xi}{-1+4\xi}} \quad (4.41)$$

elde edilir. Skaler alanın çok küçük değeri için bulunan çözüm aynı zamanda torsiyon içermeyen çözüm ile aynıdır [21].

$J = 0$ Durumu

(4.28), (4.29) ve (4.30) denklemleri $J = 0$ için aşağıdaki gibi bulunur.

$$\varphi'' = \frac{1}{r(-1 + k\xi\varphi^2)^2} (\varphi'(-(-1 + k\xi\varphi^2)^2 + kr\xi\varphi(-1 + k\xi\varphi^2)\varphi' - 2kr^2\xi\varphi'^2) + 2r\Lambda w^2(r\varphi' + \xi\varphi(3 - k\varphi(3\xi\varphi + r(1 + 6\xi)\varphi')))) \quad (4.42)$$

$$v' = \frac{1}{(-1 + k\xi\varphi^2)(-1 + k\xi\varphi(\varphi + 2r\varphi'))} v(2r\Lambda w^2(-1 + k\xi\varphi^2) + k\varphi'(r\varphi' + \xi\varphi(4 - k\varphi(4\xi\varphi + r(1 + 8\xi)\varphi')))) \quad (4.43)$$

$$\varphi' = \frac{k\xi\varphi(2v + rv') - k^2\xi^2\varphi^3(2v + rv') + sk\sqrt{u}}{krv(-1 + k\xi(1 + 8\xi)\varphi^2)} \quad (4.44)$$

$$u = k(-1 + k\xi\varphi^2)(k\xi^2\varphi^2(-1 + k\xi\varphi^2)(2v + rv')^2 - rv(-1 + k\xi(1 + 8\xi)\varphi^2)(-2rvw^2\Lambda + (-1 + k\xi\varphi^2)v')) \quad (4.45)$$

(4.42) ve (4.43) den yararlanarak (4.25) denklemi çözülürse;

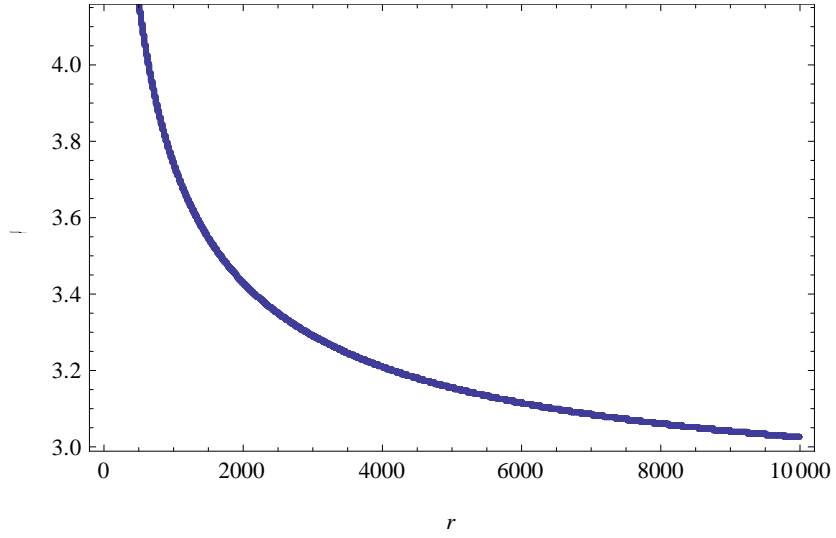
$$w' = \left(\frac{1}{2(-1 + k\xi\varphi^2)^2(-1 + k\xi\varphi(\varphi + 2r\varphi'))} (rw(-k(\varphi')^2(1 - 4\xi + k\xi\varphi(\varphi(-2 + \xi(4 + k\varphi^2)) + 8r\xi\varphi')) + 2w^2\Lambda(-1 + k\xi\varphi(4r\varphi' + \varphi(2 + 12\xi - k\xi\varphi(\varphi + 12\xi\varphi + 4(r + 6r\xi)\varphi')))))) \right) \quad (4.46)$$

olarak bulunur.

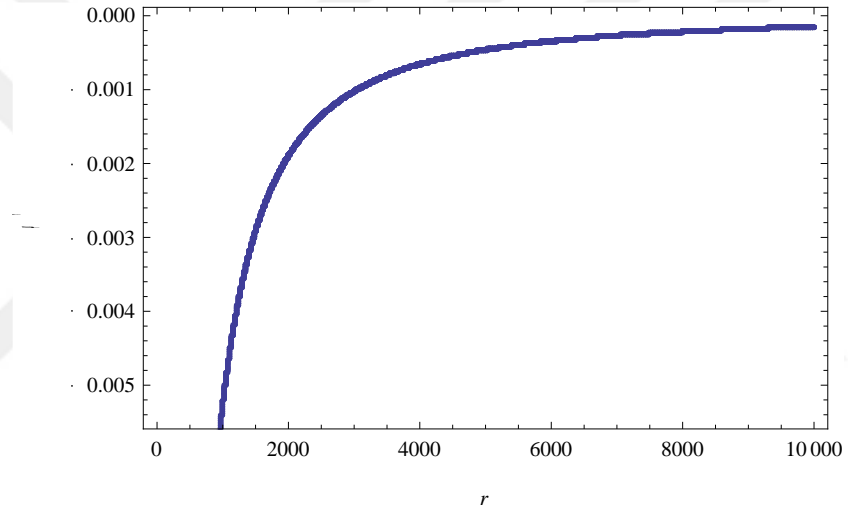
(4.42), (4.43) ve (4.46) denklemleri nümerik olarak 4. seviye Runge-Kutta yöntemiyle nümerik olarak çözülebilir.

$$k = 1, \Lambda = 10^{-8}, \xi = \frac{1}{8}, \varphi(1) = 10, \varphi'(1) = -2.39, v(1) = 10^2, v'(1) = \Lambda, w(1) = 10^{-1}$$

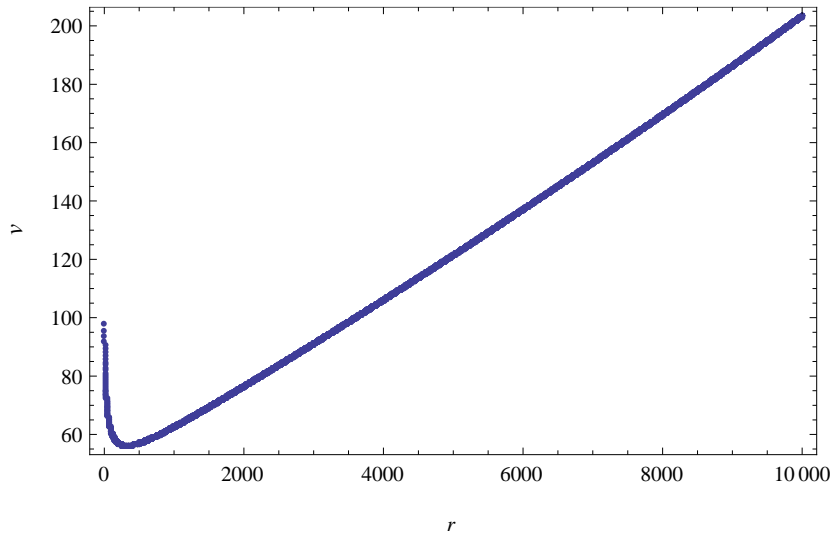
değerleri kullanılarak sırasıyla skaler alanın, skaler alanın birinci türevinin, metrik bileşenlerinin ve Ricci skalerinin r' 'ye göre grafikleri aşağıda verilmiştir.



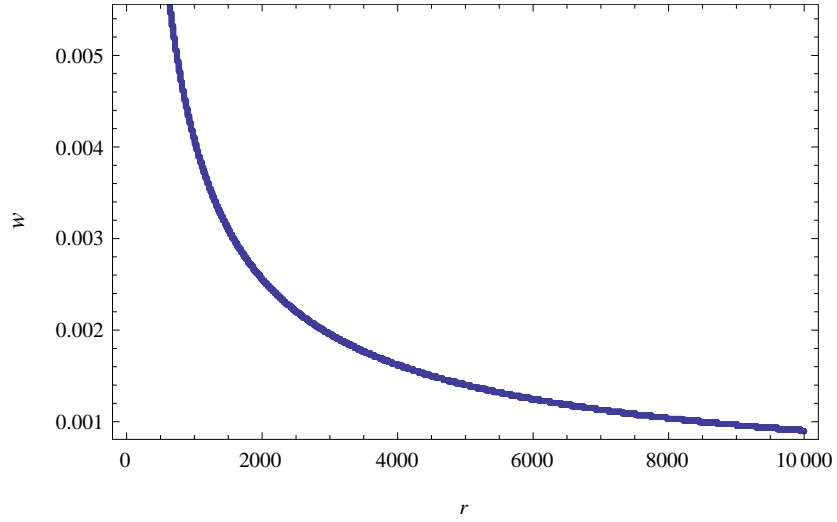
Şekil 4. 8 $J(r)=0$ için skaler alanın r 'ye göre grafiği



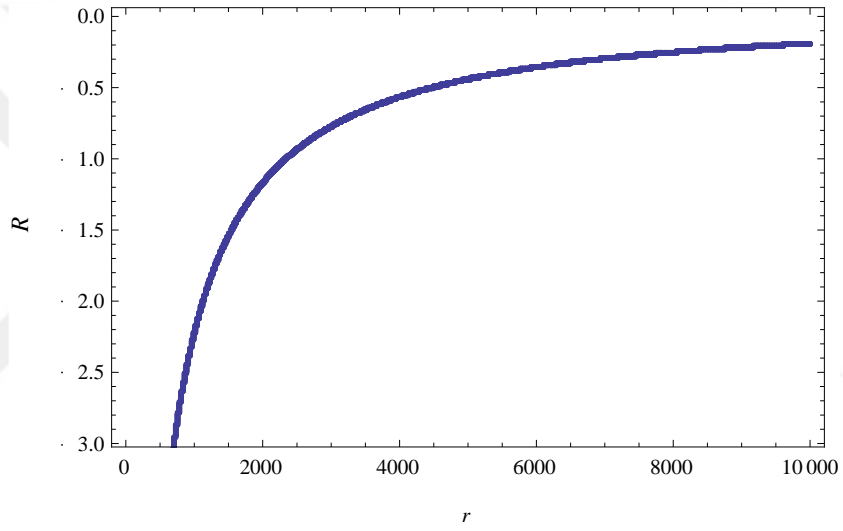
Şekil 4. 9 $J(r)=0$ için skaler alanın r 'ye göre birinci türevinin grafiği



Şekil 4. 10 $J(r)=0$ için $v(r)$ 'nin r 'ye göre grafiği



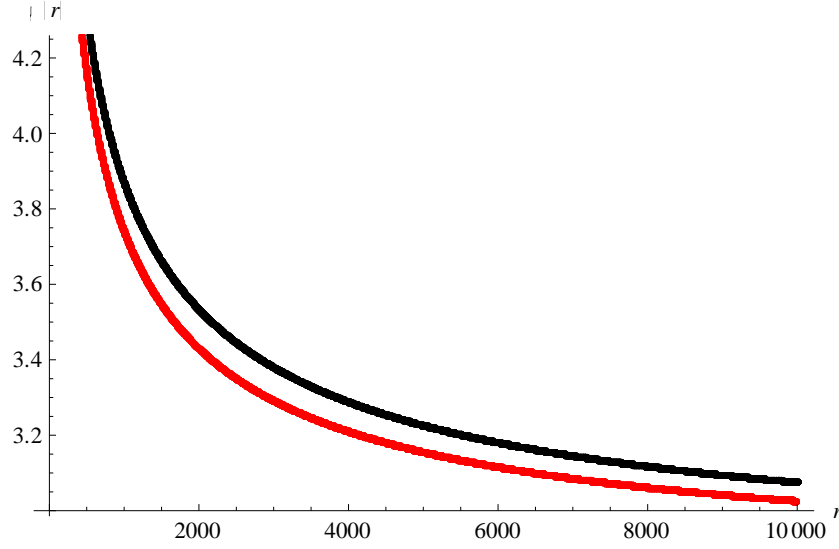
Şekil 4. 11 $J(r)=0$ için $w(r)$ 'nin r 'ye göre grafiği



Şekil 4. 12 $J(r)=0$ için Ricci skalerinin r 'ye göre grafiği

$J \neq 0$ ve $J = 0$ Durumlarının Karşılaştırılması

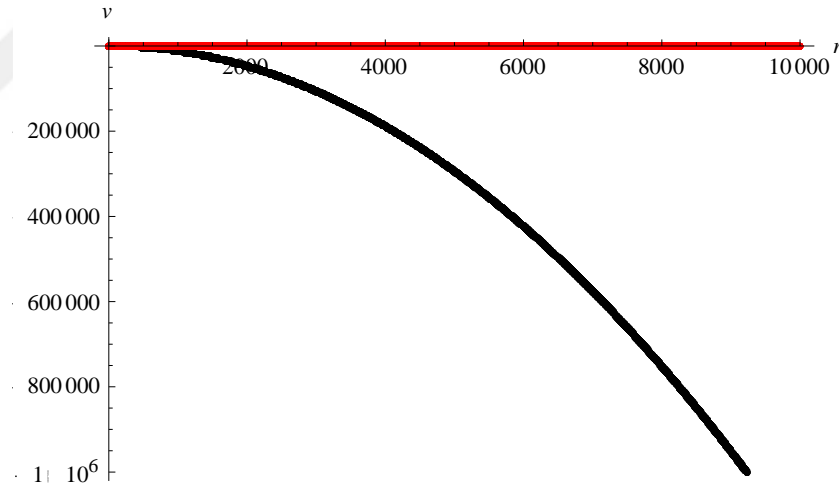
Şekil 4.8 ve Şekil 4.12'den yararlanarak aşağıdaki şekil elde edilebilir.



Şekil 4. 13 $J(r) \neq 0$ ve $J(r)=0$ için skaler alanın r 'ye göre grafiği

Şekil 4.13'de üste yer alan grafik $J(r) \neq 0$ ve altta yer alan grafik $J(r)=0$ durumunu göstermektedir. Grafikten, açısal momentum sıfır olduğu durumda skaler alanın değerinin azaldığı görülmektedir.

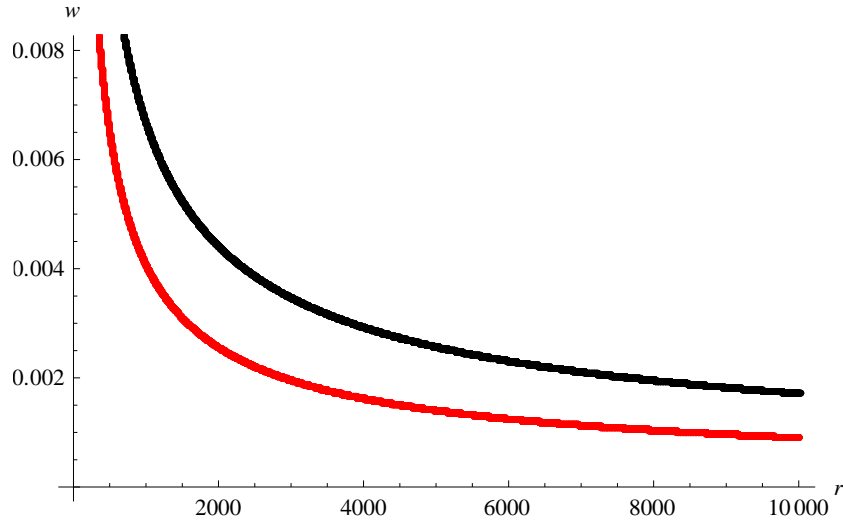
Şekil 4.3 ve Şekil 4.10'dan yararlanarak aşağıdaki şekil elde edilir.



Şekil 4. 14 $J(r) \neq 0$ ve $J(r)=0$ için $v(r)$ 'nin r 'ye göre grafiği

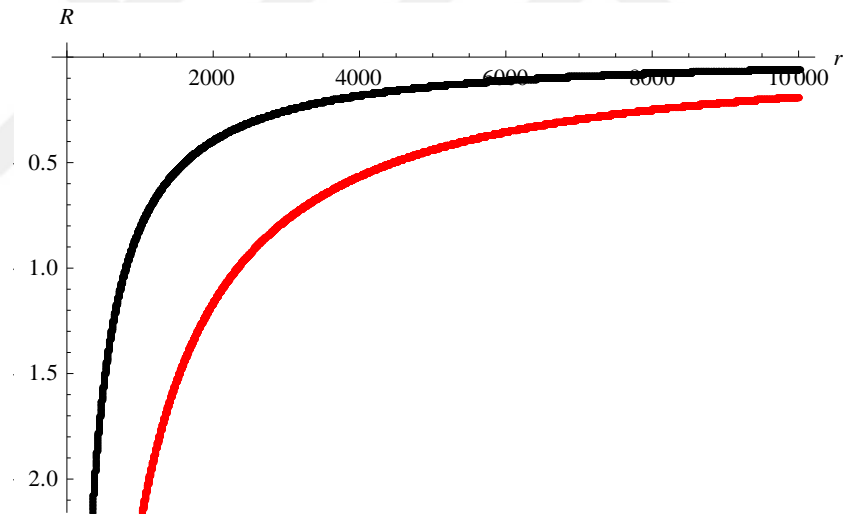
Şekil 4.14'de üste yer alan grafik $J(r)=0$ ve altta yer alan grafik $J(r) \neq 0$ durumunu göstermektedir. Grafikten, açısal momentum sıfır olduğu durumda $v(r)$ 'nin mutlak değerinin azaldığı görülmektedir.

Şekil 4.4 ve Şekil 4.11'den yararlanarak aşağıdaki şekil elde edilir.



Şekil 4. 15 $J(r) \neq 0$ ve $J(r)=0$ için $w(r)$ 'nin r 'ye göre grafiği

Şekil 4.15'de üste yer alan grafik $J(r) \neq 0$ ve altta yer alan grafik $J(r)=0$ durumunu göstermektedir. Grafikten, açısal momentum sıfır olduğu durumda $w(r)$ 'nin değerinin azaldığı görülmektedir.



Şekil 4. 16 $J(r) \neq 0$ ve $J(r)=0$ için R 'nin r 'ye göre grafiği

Şekil 4.16'da üste yer alan grafik $J(r) \neq 0$ ve altta yer alan grafik $J(r)=0$ durumunu göstermektedir. Grafikten, açısal momentum sıfır olduğu durumda Ricci eğrilik skalerinin mutlak değerinin arttığı görülmektedir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada (2+1) boyutta Einstein-Cartan kütleçekim teorisini inceledik. Eylemin varyasyonunu alarak Einstein-Cartan denklemlerini veren ifadeleri elde ettik. Bu ifadelerden yararlanarak Einstein-Cartan denklemlerini bulduk. Denklemleri çözdükten sonra metrik bileşenleri, skaler alan ve spinör bileşenlerini hesapladık. Spinör için açık çözüm bulunmasına karşın skaler alan için nümerik çözüm bulduk ve Runge-Kutta yöntemi ile hesaplayarak metrik bileşenlerinin ve skaler alanın grafiğini çizdik. Beklendiğini gibi spinör alan ve skaler alanın r sonsuza giderken sıfıra gittiğini görülmektedir. Spinör alan çözümlerinde Ricci eğrilik skaleri kozmolojik sabitin 2 katı olarak bulundu. Vakum çözümünde bu değer kozmolojik sabitin 6 katıdır. Bu sonuç spinör alan olduğu zaman eğriliğin azaldığını göstermesi açısından önemlidir. Skaler alanın çok küçük değeri için bulunan çözüm aynı zamanda torsiyon içermeyen çözüm ile aynıdır [21].

KAYNAKLAR

- [1] Grøn, Ø. ve Hervik, S., (2007). Einstein's General Theory of Relativity, Springer, New York.
- [2] Chang, S., (2012). Academic Genealogy of Mathematicians, World Scientific, Danvers.
- [3] Sabbata, V. ve Gasperini, M., (1985). Introduction to Gravitation, World Scientific, Singapore.
- [4] Trautman, A., (2006), "Einstein-Cartan Theory", Encyclopedia of Mathematical Physics, 2: 189-195.
- [5] Hehl, F.W., (1985), "On the Kinematics of the Torsion of Space-time", Foundations of Physics, 15:451-471.
- [6] Hammond, R.T., (2010), "The Necessity of Torsion in Gravity", General Relativity and Gravitation, 42:2345-2348.
- [7] Hehl, F.W., Heyde, P. ve Kerlick, G.D., (1976), "General Relativity with Spin and Torsion: Foundations and Prospects", Reviews of Modern Physics, 48:393-416.
- [8] Shapiro, I.L., (2002), "Physical Aspects of the Space-Time Torsion", Physics Reports D, 357: 113-219.
- [9] Saa, A., (1993), Einstein-Cartan Theory of Gravity Revisited, <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9309027>, 10 Mayıs 2016.
- [10] Dzhunushaliev, V. ve Singleton, D., (1999), "Einstein-Cartan-Heisenberg Theory of Gravity with Dynamical Torsion", Physics Letters A, 257:7-13.
- [11] Ivanov, A.N. ve Wellenzohn, A., (2016), Einstein-Cartan Gravity with Torsion Field Serving as Origin for Cosmological Constant or Dark Energy Density, <https://arxiv.org/abs/1607.01128>, 14 Ağustos 2016.
- [12] Galiakhmetov, A.M., (2001), "Cosmological Consequences of Two Sources of Torsion in the Einstein-Cartan Theory", Russian Physics Journal, 44:1316-1322.
- [13] Galiakhmetov, A.M., (2004), "Exact Solutions in Einstein-Cartan Cosmology with Scalar Field", Gravitation and Cosmology, 10:300-304.

- [14] Galiakhmetov, A.M., (2008), “Bianchi-I Cosmologies with A Scalar Field and An Ultrarelativistic Gas in Einstein-Cartan Theory”, *Gravitation and Cosmology*, 14:190–196.
- [15] Galiakhmetov, A.M., (2013), “Einstein-Cartan and General Relativity Cosmologies with A Nonminimally Coupled Ghost Scalar Field”, *General Relativity and Gravitation*, 45:275–303.
- [16] Sur , S. ve Bhatia , A.S., (2016), Weakly Dynamic Dark Energy via Metric-Scalar Couplings with Torsion, <https://arxiv.org/abs/1611.00654>, 08 Kasım 2016.
- [17] Banados, M., Teitelboim, C. ve Zanelli , J., (1992), “Black Hole in Three-Dimensional Spacetime”, *Physical Review Letters*, 69:1849-1851.
- [18] Banados, M., Henneaux, M., Teitelboim, C. ve Zanelli, J., (1993), “Geometry of the 2+1 Black Hole”, *Physical Review D*, 48:1506-1525.
- [19] Martinez, C. ve Zanelli, J., (1996), “Conformally Dressed Black Hole in 2+1 Dimensions”, *Physical Review D*, 54:3830-3833.
- [20] Henneaux, M., Martinez, C., Troncoso, R. ve Zanelli, J., (2002), “Black Holes and Asymptotics of 2+1 Gravity Coupled to A Scalar Field”, *Physical Review D*, 65:104007-104014.
- [21] Hortaçsu, M., Özçelik, H.T. ve Yapişkan, B., (2003), “Properties of Solutions in 2+1 Dimensions”, *General Relativity and Gravitation*, 35:1209-1221.
- [22] Hasanpour, M., Loran, F. ve Razaghian, H., (2013), “Gravity/CFT Correspondence for Three Dimensional Einstein Gravity with A Conformal Scalar Field”, *Nuclear Physics B*, 867: 483-505.
- [23] Poplawski, N.J., (2006), “Propagating Torsion in the Einstein Frame”, *Journal of Mathematical Physics*, 47:112504-112513.
- [24] Poplawski, N.J., (2012), “Affine Theory of Gravitation”, *General Relativity and Gravitation*, 46:1625-1632.
- [25] Galiakhmetov, A.M., (2012), “Nonminimally Coupled Scalar Field and Perfect Fluid in Einstein–Cartan Cosmology”, *General Relativity and Gravitation*, 44:1043–1056.
- [26] Galiakhmetov, A.M., (2006), “The Role of A Scalar-Field Potential in The Einstein–Cartan Cosmology”, *Russian Physics Journal* , 49: 642-647.
- [27] Galiakhmetov, A.M., (2010), “Exact Isotropic Scalar Field Cosmologies in Einstein–Cartan Theory”, *Classical and Quantum Gravity*, 27: 55008-55022.
- [28] Poplawski, N.J., 2009, Spacetime and Fields, <https://arxiv.org/abs/0911.0334>, 18 Ekim 2015.

RIEMANN VE RICCI TENSÖRÜ

A-1 (2+1) Boyutta Spin ½ Parçacığın Kütleçekim Alanı ile Etkileşmesi

(2.4), (2.5), (2.6), (2.9) ve (2.10) bağıntılarından Riemann tensörününü sıfırdan farklı bileşenleri aşağıdaki şekilde bulunur.

$$R_{111}^3 = \frac{J(k^2 U^2 (J^2 + r^2 v) w^2 - 4(J'^2 + 2rv'))}{16(J^2 + r^2 v) w^2} \quad (\text{EK-A.1})$$

$$R_{113}^1 = -\frac{J(k^2 U^2 (J^2 + r^2 v) w^2 - 4(J'^2 + 2rv'))}{16(J^2 + r^2 v) w^2} \quad (\text{EK-A.2})$$

$$R_{122}^1 = \frac{1}{16} \left(-k^2 U^2 w^2 + \frac{4JkwU'}{\sqrt{J^2 + r^2 v}} - \frac{2r(-rv(J')^2 + 2r^2 v'(2v + rv') + JJ'(v + 6rv'))}{(J^2 + r^2 v)^2} + \frac{-2(JJ' + r^2 v')w' + 2w(-2(J')^2 + JJ'' + r(v' + rv''))}{(J^2 + r^2 v)w} \right) \quad (\text{EK-A.3})$$

$$R_{122}^3 = \frac{1}{4} \left(\frac{kr^2 w U'}{\sqrt{J^2 + r^2 v}} + \frac{r^2 (2J(-2v + J'^2 - rv') + rJ'(6v + rv'))}{(J^2 + r^2 v)^2} + \frac{4J(w - rw') + 2r(J'(-2w + rw') - rwJ'')}{(J^2 + r^2 v)w} \right) \quad (\text{EK-A.4})$$

$$R_{123}^2 = \frac{1}{4} \left(-\frac{kr^2 w U'}{\sqrt{J^2 + r^2 v}} - \frac{r^2 (2J(-2v + J'^2 - rv') + rJ'(6v + rv'))}{(J^2 + r^2 v)^2} \right) + \quad (\text{EK-A.5})$$

$$\frac{-4J(w - rw') + 2r(J'(2w - rw') + rwJ'')}{(J^2 + r^2v)w}$$

$$R_{131}^3 = \frac{r^2(k^2U^2(J^2 + r^2v)w^2 - 4(J'^2 + 2rv'))}{16(J^2 + r^2v)w^2} \quad (\text{EK-A.6})$$

$$R_{133}^1 = -\frac{r^2(k^2U^2(J^2 + r^2v)w^2 - 4(J'^2 + 2rv'))}{16(J^2 + r^2v)w^2} \quad (\text{EK-A.7})$$

$$R_{211}^2 = \frac{1}{16(J^2 + r^2v)w^3} (k^2U^2v(J^2 + r^2v)w^3 + 4(v'(2JwJ' + r^2wv' + 2J^2w') - 2J^2wv'' - v(-2r^2v'w' + w(J'^2 + 2r^2v'')))) \quad (\text{EK-A.8})$$

$$R_{212}^1 = \frac{1}{16(J^2 + r^2v)w^3} (-k^2U^2v(J^2 + r^2v)w^3 + 4(-v'(2JwJ' + r^2wv' + 2J^2w') + 2J^2wv'' + v(-2r^2v'w' + w(J'^2 + 2r^2v'')))) \quad (\text{EK-A.9})$$

$$R_{212}^3 = \frac{1}{16} (k^2U^2J + \frac{1}{w^3} 4(k\sqrt{J^2 + r^2v}w^2U' + 2J'w' - 2wJ'' + w(\frac{J'(2rv + JJ') + r(-2J + rJ')v'}{J^2 + r^2v}))) \quad (\text{EK-A.10})$$

$$R_{213}^2 = \frac{1}{16} (-k^2U^2J + \frac{1}{w^3} 4(-k\sqrt{J^2 + r^2v}w^2U' - 2J'w' + 2wJ'' + w(\frac{-J'(2rv + JJ') + r(2J - rJ')v'}{J^2 + r^2v}))) \quad (\text{EK-A.11})$$

$$R_{231}^2 = \frac{1}{16} (-k^2U^2J + \frac{1}{w^3} 4(k\sqrt{J^2 + r^2v}w^2U' - 2J'w' + 2wJ'' + w(\frac{-J'(2rv + JJ') + r(2J - rJ')v'}{J^2 + r^2v}))) \quad (\text{EK-A.12})$$

$$R_{232}^1 = \frac{1}{16} (k^2U^2J + \frac{1}{w^3} 4(-k\sqrt{J^2 + r^2v}w^2U' + 2J'w' - 2wJ'' + w(\frac{J'(2rv + JJ') + r(-2J + rJ')v'}{J^2 + r^2v}))) \quad (\text{EK-A.13})$$

$$R_{232}^3 = \frac{1}{16} k^2r^2U^2 - \frac{(-2J + rJ')^2}{4(J^2 + r^2v)w^2} + \frac{rw'}{w^3} \quad (\text{EK-A.14})$$

$$R_{233}^2 = -\frac{1}{16w^3} \left(\frac{1}{J^2 + r^2v} w(k^2r^4U^2vw^2 + J^2(-16 + k^2r^2U^2w^2) + 16rJJ' - 4r^2J'^2) + 16rw' \right) \quad (\text{EK-A.15})$$

$$R_{311}^3 = \frac{v(k^2U^2(J^2 + r^2v)w^2 - 4(J'^2 + 2rv'))}{16(J^2 + r^2v)w^2} \quad (\text{EK-A.16})$$

$$R_{313}^1 = -\frac{v(k^2U^2(J^2 + r^2v)w^2 - 4(J'^2 + 2rv'))}{16(J^2 + r^2v)w^2} \quad (\text{EK-A.17})$$

$$R_{321}^2 = \frac{1}{4} \left(-\frac{kvwU'}{\sqrt{J^2 + r^2v}} + \frac{2Jv(J')^2 - Jrv'(2v + rv') + rvJ'(2v + 3rv')}{(J^2 + r^2v)^2} - \frac{2(Jv'w' + J'(wv' - vw')) + vWJ'' - Jwv''}{(J^2 + r^2v)w} \right) \quad (\text{EK-A.18})$$

$$R_{322}^1 = \frac{1}{4} \left(\frac{kvwU'}{\sqrt{J^2 + r^2v}} + \frac{-2Jv(J')^2 + Jrv'(2v + rv') - rvJ'(2v + 3rv')}{(J^2 + r^2v)^2} + \frac{2(Jv'w' + J'(wv' - vw')) + vWJ'' - Jwv''}{(J^2 + r^2v)w} \right) \quad (\text{EK-A.19})$$

$$R_{322}^3 = \frac{1}{16} \left(-k^2U^2w^2 - \frac{4JkwU'}{\sqrt{J^2 + r^2v}} - \frac{2r(-rv(J')^2 + 2rv(v + 2rv') + JJ'(3v + 2rv'))}{(J^2 + r^2v)^2} + \frac{16vw - 4w(J')^2 + 8rvv' - 16rvw' - 8JJ'w' + 8JwJ''}{J^2w + r^2vw} \right) \quad (\text{EK-A.20})$$

$$R_{323}^2 = \frac{1}{16} \left(k^2U^2w^2 + \frac{4JkwU'}{\sqrt{J^2 + r^2v}} + \frac{4r(-2rv(J')^2 + 2rv(2v + rv') + JJ'(6v + rv'))}{(J^2 + r^2v)^2} + \frac{4(w(J')^2 + 2JJ'w' - 2(2vw + rvv' - 2rvw' + JwJ''))}{(J^2 + r^2v)w} \right) \quad (\text{EK-A.21})$$

$$R_{331}^3 = -\frac{J(k^2U^2(J^2 + r^2v)w^2 - 4(J'^2 + 2rv'))}{16(J^2 + r^2v)w^2} \quad (\text{EK-A.22})$$

$$R_{333}^1 = \frac{J(k^2U^2(J^2 + r^2v)w^2 - 4(J'^2 + 2rv'))}{16(J^2 + r^2v)w^2} \quad (\text{EK-A.23})$$

(2.3) ve (2.4) bağıntılarından Ricci tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri aşağıdaki şekilde bulunur.

$$R_{11} = \frac{1}{8(J^2 + r^2v)w^3} (-k^2U^2v(J^2 + r^2v)w^3 + 2(-v'(2JwJ' + r^2wv' + 2J^2w') + 2J^2wv'' + 2v(-r^2v'w' + w(J'^2 + r(v' + rv'')))))) \quad (\text{EK-A.24})$$

$$R_{22} = \frac{1}{8(J^2 + r^2v)^2w} (k^2U^2J^4w^3 + 8J^3(J'w' - wJ'') + 8rJ(J'(rww' + v(2w + rw')) - rvwJ'') + r^2(k^2r^2U^2v^2w^3 + 2r^2wv'^2 + 8rv^2w' - 4v(-r^2v'w' + w(J'^2 + r^2v'')))) + 2J^2(v(-4w + k^2r^2U^2w^3 + 4rw') + 2(r^2v'w' + w(J'^2 - r(2v' + rv''))))) \quad (\text{EK-A.25})$$

$$R_{33} = \frac{1}{(J^2 + r^2v)8w^3} (w(J^2(-8 + k^2r^2U^2w^2) + 8rJJ' + r^2(k^2r^2U^2vw^2 - 4(J'^2 + rv')))) + 8r(J^2 + r^2v)w' \quad (\text{EK-A.26})$$

$$R_{31} = \frac{1}{8w^3} (k^2U^2Jw^3 + 2(-k(J^2 + r^2v)^{\frac{3}{2}}\sqrt{J^2 + r^2v}w^2U' + rw(2vJ' + (-4J + rJ')v') + (J^2 + r^2v)(2J'w' - 2wJ''))) \quad (\text{EK-A.27})$$

$$R_{13} = \frac{1}{8w^3} (k^2U^2Jw^3 + 2(k(J^2 + r^2v)^{\frac{3}{2}}w^2U' + rw(2vJ' + (-4J + rJ')v') + (J^2 + r^2v)(2J'w' - 2wJ''))) \quad (\text{EK-A.28})$$

(2.2) bağıntısından Ricci skaleri aşağıdaki elde edilir.

$$R = \frac{1}{8(J^2 + r^2v)^2w^3} (3k^2U^2J^4w^3 + 16J^3(J'w' - wJ'') + 16rJ(J'(rww' + v(2w + rw')) - rvwJ'') + 2J^2(v(-8w + 3k^2r^2U^2w^3 + 8rw') + 2(2r^2v'w' + w(J'^2 - 2r(3v' + rv''))))) + r^2(3k^2r^2U^2v^2w^3 + 4(r^2wv'^2 + 4rv^2w' - v(-2r^2v'w' + w(3J'^2 + 2r(v' + rv'')))))) \quad (\text{EK-A.29})$$

A-2 (2+1) Boyutta Skaler Alanın Kütlçekim Alanı ile Etkileşmesi

(2.4), (2.5), (2.6), (2.9) ve (2.10) bağıntılarından Riemann tensörününü sıfırdan farklı bileşenleri aşağıdaki şekilde bulunur.

$$R_{111}^3 = -\frac{1}{4P^2(J^2 + r^2v)w^2}J(P^2(J'^2 + 2rv') + 4k\xi P\varphi(2rv + 2JJ' + r^2v')\varphi' + 16k^2\xi^2(J^2 + r^2v)\varphi^2\varphi'^2) \quad (\text{EK-A.30})$$

$$R_{113}^1 = -R_{111}^3 \quad (\text{EK-A.31})$$

$$R_{121}^2 = \frac{1}{4P^2(J^2 + r^2v)^2w} (16k^2r^4\xi^2v^2w\varphi^2\varphi'^2 + 2J^3P(J'(Pw' - 2k\xi w\varphi\varphi') - PwJ'') + rJP(J'(P(3rww' + 2v(w + rw')) - 4kr\xi vw\varphi\varphi') - 2rPvwJ'') + P^2(r^4wv'^2 - v(-2r^4v'w' + r^2w(J'^2 + 2r^2v'')))) + 8k\xi J^4(\varphi'(P\varphi w' - w(P - 2k\xi\varphi^2)\varphi') - Pw\varphi\varphi'') - 4kr^4\xi P v(\varphi'(-2v\varphi w' + w(\varphi v' + 2v\varphi')) + 2vw\varphi\varphi'') + J^2(32k^2r^2\xi^2vw\varphi^2\varphi'^2 + P^2(2r^2v'w' + w(J'^2 - 2r(v' + rv'')))) - 4kr^2\xi P(\varphi'(-4v\varphi w' + w(\varphi v' + 4v\varphi')) + 4vw\varphi\varphi'')) \quad (\text{EK-A.32})$$

$$R_{122}^1 = -R_{121}^2 \quad (\text{EK-A.33})$$

$$R_{122}^3 = \frac{1}{4P(J^2 + r^2v)^2w} (4J^3(P(w - rw') + 2kr\xi w\varphi\varphi') + 2r^2J(P(w(J'^2 - rv') - 2rvw') + 4kr\xi vw\varphi\varphi') - 2rJ^2(J'(P(2w - rw') + 2kr\xi w\varphi\varphi') + rPwJ'') + r^3(J'(P(rww' + 2v(w + rw')) - 4kr\xi vw\varphi\varphi') - 2rPvwJ'')) \quad (\text{EK-A.34})$$

$$R_{123}^2 = R_{122}^3 \quad (\text{EK-A.35})$$

$$R_{131}^3 = \frac{r^2R_{1,1,1}^3}{J} \quad (\text{EK-A.36})$$

$$R_{133}^1 = -\frac{r^2R_{111}^3}{J} \quad (\text{EK-A.37})$$

$$R_{211}^2 = -R_{212}^1 \quad (\text{EK-A.38})$$

$$R_{212}^1 = \frac{1}{4P^2(J^2 + r^2v)w^3} (-16k^2\xi^2v(J^2 + r^2v)w\varphi^2\varphi'^2 + P^2(-v'(2JwJ' + r^2wv' + 2J^2w') + 2J^2wv'' + v(-2r^2v'w' + w(J'^2 + 2r^2v'')))) + 4k\xi P(J^2 + r^2v)(\varphi'(-2v\varphi w' + w(\varphi v' + 2v\varphi')) + 2vw\varphi\varphi'')) \quad (\text{EK-A.39})$$

$$R_{212}^3 = \frac{R_{121}^2(J^2 + r^2v) + r^2R_{212}^1w^2}{Jw^2} \quad (\text{EK-A.40})$$

$$R_{213}^2 = -\frac{R_{121}^2(J^2 + r^2v) + r^2R_{212}^1w^2}{Jw^2} \quad (\text{EK-A.41})$$

$$R_{231}^2 = -\frac{R_{121}^2(J^2 + r^2v) + r^2R_{212}^1w^2}{Jw^2} \quad (\text{EK-A.42})$$

$$R_{232}^1 = \frac{R_{121}^2(J^2 + r^2v) + r^2R_{212}^1w^2}{Jw^2} \quad (\text{EK-A.43})$$

$$R_{232}^3 = \frac{(r^2R_{1,2,1}^2 - JR_{1,2,2}^3)(J^2 + r^2v) + r^4R_{2,1,2}^1w^2}{J^2w^2} \quad (\text{EK-A.44})$$

$$R_{233}^2 = -\frac{r^4R_{212}^1}{J^2} + \frac{(-r^2R_{121}^2 + JR_{122}^3)(J^2 + r^2v)}{J^2w^2} \quad (\text{EK-A.45})$$

$$R_{311}^3 = \frac{R_{1,1,1}^3}{J} \quad (\text{EK-A.46})$$

$$R_{313}^1 = -\frac{R_{111}^3}{J} \quad (\text{EK-A.47})$$

$$R_{321}^2 = \frac{R_{121}^2v + R_{212}^1w^2}{J} \quad (\text{EK-A.48})$$

$$R_{322}^1 = -\frac{R_{121}^2v + R_{212}^1w^2}{J} \quad (\text{EK-A.49})$$

$$R_{322}^3 = \frac{1}{J^2} (-J^2R_{121}^2 + JR_{122}^3v - r^2(R_{121}^2v + R_{212}^1w^2)) \quad (\text{EK-A.50})$$

$$R_{323}^2 = \frac{1}{J^2} (J^2R_{121}^2 - JR_{122}^3v + r^2(R_{121}^2v + R_{212}^1w^2)) \quad (\text{EK-A.51})$$

$$R_{331}^3 = -R_{111}^3 \quad (\text{EK-A.52})$$

$$R_{333}^1 = R_{111}^3 \quad (\text{EK-A.53})$$

(2.3) ve (2.4) bağıntılarından Ricci tensörünün sıfırdan farklı bileşenleri aşağıdaki şekilde bulunur.

$$R_{11} = \frac{1}{4P(J^2 + r^2v)w^3} (P(-v'(2JwJ' + r^2wv' + 2J^2w') + 2J^2wv'' + 2v(-r^2v'w' + w(J'^2 + r(v' + rv'')))) + 4k\xi(\varphi'(\varphi(w(2v(rv + JJ') + (J^2 + 2r^2v)v') - 2v(J^2 + r^2v)w') + 2v(J^2 + r^2v)w\varphi') + 2v(J^2 + r^2v)w\varphi\varphi'')) \quad (\text{EK-A.54})$$

$$R_{22} = \frac{1}{4P^2(J^2 + r^2v)^2w} (4J^3P(J'(Pw' - 2k\xi w\varphi\varphi') - PwJ'') + 4rJP(J'(P(rwv' + v(2w + rw'))) - 2kr\xi v w\varphi\varphi') - rPv wJ'') + 16k\xi J^4(\varphi'(P\varphi w' - w(P - 2k\xi\varphi^2)\varphi') - Pw\varphi\varphi'') + r^2(32k^2r^2\xi^2v^2w\varphi^2\varphi'^2 + P^2(r^2wv'^2 + 4rv^2w' - 2v(-r^2v'w' + w(J'^2 + r^2v'')))) - 4kr\xi Pv(\varphi'(rw\varphi v' + 2v(\varphi(w - 2rw') + 2rw\varphi')) + 4rvw\varphi\varphi'')) - 2J^2(-32k^2r^2\xi^2vw\varphi^2\varphi'^2 + P^2(-r^2v'w' + 2v(w - rw') + w(-J'^2 + 2rv' + r^2v'')) + 2kr\xi P(\varphi'(rw\varphi v' + 2v(-4r\varphi w' + w(\varphi + 4r\varphi')))) + 8rvw\varphi\varphi'')) \quad (\text{EK-A.55})$$

$$R_{33} = -\frac{1}{2P(J^2 + r^2v)w^3} (-2rJwJ'(P - 2kr\xi\varphi\varphi') + 2J^2(P(w - rw') + 2kr\xi(\varphi'(-r\varphi w' + w(\varphi + r\varphi')) + rw\varphi\varphi'')) + r^2(P(w(J'^2 + rv') - 2rvw') + 2kr\xi(\varphi'(rw\varphi v' + 2v(2w\varphi - r\varphi w' + rw\varphi')) + 2rvw\varphi\varphi'')) \quad (\text{EK-A.56})$$

$$R_{31} = \frac{1}{4P(J^2 + r^2v)w^3} (P(-4rJwv' + r^2wJ'v' + 2J^2(J'w' - wJ'')) + 2rv(J'(w + rw') - rwJ'')) + 4k\xi(\varphi'(\varphi(-w(3J^2J' + r^2vJ' + rJ(2v + rv')) + 2J(J^2 + r^2v)w') - 2J(J^2 + r^2v)w\varphi') - 2J(J^2 + r^2v)w\varphi\varphi'')) \quad (\text{EK-A.57})$$

$$R_{13} = \frac{1}{4P(J^2 + r^2v)w^3} (P(-4rJwv' + r^2wJ'v' + 2J^2(J'w' - wJ'')) + 2rv(J'(w + rw') - rwJ'')) + 4k\xi(\varphi'(\varphi(-w(3J^2J' + r^2vJ' + rJ(2v + rv')) + 2J(J^2 + r^2v)w') - 2J(J^2 + r^2v)w\varphi') - 2J(J^2 + r^2v)w\varphi\varphi'')) \quad (\text{EK-A.58})$$

(2.2) bağıntısından Ricci skaleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
R = & \frac{1}{2P^2(J^2 + r^2v)^2w^3} (-4J^3P(4k\xi w\varphi J'\varphi' + P(-J'w' + wJ'')) + \\
& 4rJP(-4kr\xi v w\varphi J'\varphi' + P(rwJ'v' + v(2wJ' + rJ'w' - rwJ'')))) + \\
& 16k\xi J^4(k\xi w\varphi^2\varphi'^2 - P(w\varphi'^2 + \varphi(-w'\varphi' + w\varphi''))) + \\
& r^2(16k^2r^2\xi^2v^2w\varphi^2\varphi'^2 + P^2(r^2wv'^2 + 4rv^2w' - v(-2r^2v'w' + \\
& w(3J'^2 + 2r(v' + rv''))))) - 8kr\xi Pv(rw\varphi v'\varphi' + 2v(-r\varphi w'\varphi' + \\
& w(r\varphi'^2 + \varphi(\varphi' + r\varphi''))))) + J^2(32k^2r^2\xi^2vw\varphi^2\varphi'^2 + P^2(2r^2v'w' - \\
& 4v(w - rw') + w(J'^2 - 2r(3v' + rv'')))) - 8kr\xi P(rw\varphi v'\varphi' + \\
& 2v(-2r\varphi w'\varphi' + w(2r\varphi'^2 + \varphi(\varphi' + 2r\varphi'')))))
\end{aligned} \tag{EK-A.59}$$

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Hasan Tuncay ÖZÇELİK
Doğum Tarihi ve Yeri : 20/10/1973, Tokat
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : tuncay_ozcelik@yahoo.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Fizik Mühendisliği	İstanbul Teknik Üniversitesi	2002
Lisans	Fizik Mühendisliği	İstanbul Teknik Üniversitesi	1999
Lise	Matematik	İzzet Ünver Lisesi	1992

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2014-Halen	Etiya	Kıdemli Konfigürasyon Yönetimi Uzmanı
2011-2012	Vodafone	Kıdemli Süreç Yönetimi Uzmanı
2010-2011	Vodafone	Kıdemli Değişiklik

		Yönetimi Uzmanı
2006-2010	Vodafone	Değişiklik ve Konfigürasyon Yönetimi Takım Lideri
2005-2006	Telsim	Değişiklik Yönetimi Uzmanı
2004-2005	GATA Biyomedikal ve Klinik Mühendislik Merkezi	Asteğmen/ Teknik Destek Mühendisi
2001-2003	Kocayusuf İlköğretim Okulu	Öğretmen

YAYINLARI

Makale

1. Hortaçsu, M., Özçelik, H.T. ve Yapışkan, B., (2003), "Properties of Solutions in 2+1 Dimensions", General Relativity and Gravitation, 35:1209-1221.

Bildiri

1. Özçelik, H.T. ve Kaya, R., (2016), "Spin $\frac{1}{2}$ Particles in (2+1) Dimensions Coupled to Gravity", International Congress on Fundamental and Applied Sciences, 22-26 August 2016, İstanbul.
2. Özçelik, H.T. ve Kaya, R., (2016), "Scalar Fields in (2+1) Dimensions Coupled to Gravity", 32. Uluslararası Fizik Kongresi, 6-9 Eylül 2016, Bodrum.