T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Z_3- DERECELİ $GL_q(2)$ KUANTUM GRUBU ÜZERİNE BİR DİFERANSİYEL HESAP

FATMA BULUT

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
YRD. DOÇ. DR. SALİH ÇELİK

İSTANBUL, 2016

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Z_3- DERECELİ $GL_q(2)$ KUANTUM GRUBU ÜZERİNE BİR DİFERANSİYEL HESAP

Fatma BULUT tarafından hazırlanan tez çalışması 08.01.2016 tarihinde aşağıdaki jüriler tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Yrd. Doç. Dr. Salih ÇELİK

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Yrd. Doç. Dr. Salih ÇELİK

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Prof. Dr. Metin ARIK

Boğaziçi Üniversitesi ________________________

Prof. Dr. Emanullah HIZEL

İstanbul Teknik Üniversitesi ________________________

Prof. Dr. Salim YÜCE

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Yrd. Doç. Dr. Şeyda Canan TEKİN

İstanbul Teknik Üniversitesi ________________________

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasının her safhasında büyük bir özveri ile bana yardımcı olan, destekleri ve fikirleriyle bana yol gösteren, bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, her zaman minnetle anacağım çok değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Salih ÇELİK'e saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman yanımda olan, bugünlere gelmemdeki en büyük emeğin sahibi canım aileme sevgi ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, babamı rahmetle anıyorum.

Ocak, 2016

Fatma BULUT

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ

S	A cebiri üzerindeki eş-ters operatörü
Δ	A cebiri üzerindeki eş-çarpım operatörü
ε	A cebiri üzerindeki eş-birim operatörü
$\otimes$	Tensör çarpım
$\dot{\otimes}$	Matris-tensörel çarpım
∂	Kısmi türev operatörü
$\boldsymbol{\delta}$	Dış diferansiyel operatörü
$[\,,\,]$	Lie parantezi
$\deg(f)$	f fonksiyonunun derecesi
$D_q(T)$	T matrisinin kuantum determinantı
$GL_q(2)$	Z_3-dereceli kuantum grubu
$R_q(2)$	Kuantum düzlem
$R_q^*(2)$	$R_q(2)$ nin duali

Z_3- DERECELİ $GL_q(2)$ KUANTUM GRUBU ÜZERİNE BİR DİFERANSİYEL HESAP

Fatma BULUT

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Salih ÇELİK

Tersi mevcut lineer tasvirler bir grup oluşturur. Böyle lineer tasvirlerin matris temsilleri ile elde edilen grup, nxn-matrislerin grubu olarak $GL(\mathrm{n})$ ile gösterilir. $GL(2)$ genel lineer grubu, $GL(2)$ deki lineer tasvirlerin kuantum düzlem [1] ve dualine etki ettiğinde sonuçların kuantum düzlem ve dualinin sağladığı komutasyon bağıntıları altında invaryant kaldığı kabul edilerek deforme edilir [2].

Bu çalışmada, Z_3-dereceli kuantum düzlem [3] kullanılarak, Z_3-dereceli $GL_q(2)$ kuantum grubu elde edilmiş ve bu grup üzerine sağ- ve sol-kovaryant olan bir diferansiyel hesap kurulmuştur.

Tez, altı bölümden oluşmaktadır ve orijinal kısımlar, üçüncü bölümden başlamaktadır.

İlk bölümde, konuya dair bir literatür özeti verilmiş ve tezin amacı belirtilmiştir.

İkinci bölümde, tezin orijinal kısımlarında kullanılacak olan cebir, cebirlerin tensör çarpımı, Hopf Cebiri [4] gibi temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümün ilk başlığında, Z_3-dereceli kuantum düzlem [3], onun Hopf cebir yapısı ve diferansiyel geometrisi hakkında, tezde kullanılacak kadar bilgi verilmiştir. İkinci başlığında, ilk başlıkta verilen Z_3-dereceli kuantum düzlem üzerine etki eden tersi mevcut lineer tasvirler göz önüne alınarak, onların matris temsilleriyle oluşturulan bir

kuantum grubu elde edilmiş ve bu gruba Z_3-dereceli $GL_q(2)$ kuantum grubu adı verilmiştir.

Dördüncü bölümde, Z_3-dereceli $GL_q(2)$ kuantum grubu üzerine bir diferansiyel hesap kurulmuştur. Bu yapılırken, $GL_q(2)$'deki bir matris göz önüne alınarak, matris elemanlarının birinci ve ikinci mertebe diferansiyelleri ve onların kendi arasındaki q-komutasyon bağıntıları bulunmuştur. Daha sonra, Cartan-Maurer formları tanımlanmış ve onlar ile ilgili q-komutasyon bağıntıları elde edilmiştir.

Son bölümde ise, Z_3-dereceli $GL_q(2)$ kuantum grubunun Z_3-dereceli kuantum Lie cebiri bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Z_3-dereceli kuantum düzlem, Z_3-dereceli kuantum grup, Hopf cebiri, dış diferansiyel operatör, kuantum Lie cebiri.

ABSTRACT

A DİFFERENTİAL CALCULUS OF ON Z_3- GRADED QUANTUM GROUP $GL_q(2)$

Fatma BULUT

Department of Mathematics

PhD. Thesis

Adviser: Yrd. Doç. Dr. Salih ÇELİK

Linear transformations whose inverse exist constitute a group. The group which is obtained by matrix representation of such linear transformations, is indicated by $GL(n)$ as a group of nxn-matrices. The general linear group $GL(2)$, is deformed by assuming the results, which are obtained when the linear transformations in $GL(2)$ effect quantum plane [1] and its dual, stay invariant under commutation relations, which are provided by quantum plane and its dual [2].

In this study, Z_3-graded quantum group $GL_q(2)$ is obtained by using Z_3-graded quantum plane [3] and a right- and left- covariant differential calculus is constructed on this group.

In the first chapter of the thesis which consists of six chapters, the literature concerning the subject is given and the purpose of the study is explained.

In the second chapter, the basic concepts which are used in the sections such as algebra, tensor product and Hopf Algebra [1] are given.

In the third chapter, by considering invertible present linear transformations which have an action on Z_3-graded quantum plane, a quantum group which is formed by their matrix representations is obtained and this group is called Z_3-graded $GL_q(2)$ quantum group. As the Hopf algebra construction is introduced, some new definitions such as Z_3-graded tensor product of algebras are given.

In the fourth chapter, a differential calculation on Z_3-graded $GL_q(2)$ quantum group is constructed. During this process, by considering a matrix in $GL_q(2)$, first and second order differentials of the entries of the matrix are calculated and q-commutation relations between themselves are determined. Then, Cartan-Maurer forms are defined and their q-commutation relations are obtained.

In the last chapter, Z_3-graded quantum Lie algebra of Z_3-graded quantum group of $GL_q(2)$ is constructed.

Keywords: Z_3-graded quantum group, Hopf algebra, Z_3-graded quantum plane, exterior differential operator, quantum Lie algebra.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Geçtiğimiz yirmi-yirmi beş yıllık süreç içerisinde, kuantum grupları [5], matematiğin yeni bir dalı ve matematiksel fiziğin önemli bir dalı olmuştur. Bir kuantum grubu, aslında bilinen manada bir grup değildir. Fakat bir kuantum grup, grup özelliklerini yansıtan belli bir yapının deformasyonu anlamında bir grup ile ilgilidir. Diğer bir deyişle, bir kuantum grubu deformasyon parametresinin özel değerleri için grup ile çakışmaktadır.

Kuantum grupların diferansiyel geometrisi üzerine birçok çalışma mevcuttur. Kuantum gruplar üzerinde değişmeli olmayan diferansiyel hesap, Connes' in [6] genel fikirleri ile birlikte Woronowicz tarafından geliştirilmiştir [7]. Manin, bir kuantum matris grubunu elde ederken, grubun elemanlarını uygun uzaya etki ettirmiştir $[1]$. Bu uzayın elemanları yine q parametresine bağlı bağıntılar sağlamaktadır. Manin bu şekildeki uzayları kuantum uzaylar olarak adlandırmıştır.

Bir diğer yaklaşım, kuantum uzaylar üzerine Manin' in vurgusunu takip eden Wess ve Zumino [8] tarafından başlatılmıştır. Wess ve Zumino bu genel teoriyi soyut bir biçimde yeniden formüle etmişlerdir. Kuantum gruplar üzerindeki değişmeli olmayan diferansiyel geometri yapısı için diğer bazı yöntemler çeşitli yazarlar tarafından sunulmuş ve tartışılmıştır [9-17].

Wess ve Zumino'nun ortaya koyduğu teknik kullanılarak kuantum uzaylar üzerine diferansiyel hesap, Z_2-dereceli uzaylara genelleştirilmiştir [18-20].

Daha sonra, Z_2-dereceli kuantum uzay üzerine yapılan diferansiyel hesap da Z_3-dereceli kuantum uzaylara genelleştirilmiştir [21-23].

1.2 Tezin Amacı

Amacımız Z_3-dereceli $GL_q(2,C)$ kuantum grubu üzerine bir ikili-kovaryant diferansiyel hesap kurmaktır. Bu hesap içerisinde, koordinat fonksiyonları, onların birinci ve ikinci mertebe diferansiyelleri ve kismi türevler yer almaktadır. Dolayısıyla kurulum, bunlar arasındaki *q*-komutasyon bağıntılarının bulunması ile gerçekleştirilecektir. Daha sonra, Z_3-dereceli $GL_q(2,C)$ kuantum grubunun Z_3-dereceli kuantum Lie cebiri edilmek-tedir.

1.3 Hipotez

Bu çalışmada, ilk olarak, Z_3-dereceli kuantum grubu elde edilip onun Hopf cebiri yapısına sahip olduğu gösterilecektir. Daha sonra, bu grup üzerine bir Z_3-dereceli diferansiyel hesap geliştirilecektir. Son olarak, Z_3-dereceli kuantum grubun Z_3-dereceli Lie cebiri elde edilecektir.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı önemli kavramlara yer verilmiştir.

2.1 Cebirler

Tanım 2.1.1 Üzerinde toplama ve çarpma tanımlanmış bir R kümesine, aşağıdaki özellikler sağlanırsa bir halka denir:

$(R,+)$ bir değişmeli grup,

$\forall\ a,b,c \in R$ için $a.(b+c)=a.b+a.c$ ve $(a+b)c=a.c+b.c$,

$\forall\ a \in R$ için $a.1=1.a$ olacak şekilde $1\in R$ elamanı mevcut,

$\forall\ a,b,c\in R$ için $a.(b.c)=(a.b).c$.

Eğer $\forall\ a,b \in R$ için $a.b=b.a$ oluyorsa R' ye değişmeli halka denir.

Tanım 2.1.2 $(M,+)$ bir değişmeli grup ve R bir halka olsun. Eğer

$$\varphi : R\mathrm{x}M \to M,\ (a,x)\mapsto a.x,\quad (\varphi : M\mathrm{x}R \to M,\ (x,a)\mapsto x.a)$$

şeklinde tanımlanan tasvir aşağıdaki şartları sağlarsa, M'ye bir sol (sağ) R-modül, kısaca sol (sağ) modül, φ tasvirine de sol (sağ) R - modül M'nin yapı tasviri adı verilir:

$\forall a,b\in R$ ve $\forall x,y\in M$ için,

$$a(x+y)=ax+ay,\quad ((x+y)a=xa+ya)$$

$$\left(a+b\right)x=ax+bx, \qquad \left(x\left(a+b\right)=xa+xb\right)$$

$$\left(a.b\right)x=a\left(bx\right), \qquad \left(x\ \left(a.b\right)=(xa)b\right)$$

$$1_R x=x, \qquad \left(x1_R=x\right)$$

Eğer M hem sağ hem sol R-modül ise M'ye kısaca modül denir. Ek olarak R halkası bir cisim ise, M modülüne vektör uzayı denir.

Tanım 2.1.3 Aynı F skaler cismi üzerinde tanımlanmış U ve V vektör uzayları arasındaki bir $T:U\rightarrow V$ dönüşümü her $u,u_1,u_2\in U$ ve $\alpha\in\mathrm{F}$ için

$$T\left(u_1+u_2\right)=T\left(u_1\right)+T\left(u_2\right), \quad T\left(\alpha u\right)=\alpha T\left(u\right)$$

şartlarını gerçekliyorsa bu dönüşüme bir lineer tasvir denilir.

Tanım 2.1.4 $T_1:U_1\rightarrow V_1$, $T_2:U_2\rightarrow V_2$, birer lineer tasvir olsun. Bu takdirde $u_1\in U_1$ ve $u_2\in U_2$ için

$$\Phi:U_1\otimes U_2\rightarrow V_1\otimes V_2\ ,\ \Phi(u_1\otimes u_2)=T_1(u_1)\otimes T_2(u_2)$$

şeklinde tanımlanan bir lineer tasvir mevcuttur. Buradaki Φ'ye T_1 ve T_2'nin tensör çarpımı denir ve $\Phi=T_1\otimes T_2$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.5 L, bir vektör uzayı olmak üzere eğer,

$$[\ ,\ ]:L\times L\mapsto L$$

2-lineer tasviri aşağıdaki iki şartı sağlarsa L'ye bir Lie cebiri denir:

$$[x\ ,y\ ]=-[y\ ,\ x],$$

$$[x\ ,[y\ ,\ z]\ ]+[z\ ,[x\ ,\ y]\ ]+[y\ ,[z\ ,\ x]\ ]=0, \quad \forall x,y,z\in L.$$

Tanım 2.1.6 Bir A cebiri, iki adet lineer tasvir ile birlikte bir K-vektör uzayı olarak düşünülür:

$$\mu:A\otimes A\rightarrow A,\ \mu(a\otimes b)=a\cdot b\ ,$$
$$\eta:K\rightarrow A,\ \eta(k)=k\cdot I.$$

Burada I, A'nın birim elamanıdır. Bu tasvirler için, $id:A\rightarrow A$ özdeşlik tasviri olmak üzere

$$\begin{aligned} &\mu \circ (\mathrm{id} \otimes \mu) = \mu \circ (\mu \otimes \mathrm{id}) \quad (\mathrm{Ass}) \\ &\mu \circ (\mathrm{id} \otimes \eta) = \mu \circ (\eta \otimes \mathrm{id}) \quad (\mathrm{Uni}) \end{aligned} \tag{2.1}$$

özellikleri geçerlidir. (Ass) aksiyomu, μ *çarpma* tasvirinin asosyatifliğini ifade ederken, (uni) aksiyomu, $\eta(1)$'in A'nın hem sağ hem de sol birim elamanı olduğunu ifade etmektedir.

Böylece ortaya çıkan (A, μ, η) üçlüsüne bir cebir diyeceğiz.

2.2 Hopf Cebirleri

Eğer G bir grup olmak üzere $A = Map(G, K)$ ve $A \otimes A = Map(G \times G, K)$ olduğunu kabul edersek, G deki işlemi kullanarak aşağıdaki lineer homomorfizmleri tanımlayabiliriz: Her $x, y \in G$ ve $f \in G$ için

$\Delta : A \to A \otimes A,\ \Delta f(x \otimes y) = f(x.y),$

$\varepsilon : A \to K,\ \ \varepsilon(f) = f(e).$

Burada e, G nin birim elamanıdır. Δ'ya cebirin bir ko-çarpması ve ε tasvirine de cebirin ko-birimi denmektedir. Δ ve ε cebir homomorfizmleri, sırasıyla μ ve η tasvirleri için verilen (Ass) ve (Uni) özelliklerine (denklem (2.1)) dual olan özelliklere sahiptir. Yani

$$\begin{aligned} &(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta \quad (\mathrm{coass}) \\ &\mu \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = \mathrm{id} = \mu \circ (\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta \quad (\mathrm{counit}) \end{aligned} \tag{2.2}$$

dır. Genel olarak, K üzerindeki bir lineer A uzayına, yukarıda tanımlanan μ, η, Δ K-lineer tasvirleriyle birlikte bir K-ko-cebir (kısaca ko-cebir) ve A lineer uzayına $\mu, \eta, \Delta, \varepsilon$ K-lineer tasvirleriyle birlikte bir K-bicebir (kısaca ikili-cebir) denir. Ek olarak, $f \in A,\ x \in G$ için

$S : A \to A,\ \ Sf(x) = f(x^{-1})$

şeklinde tanımlanan ve

$$\mu \circ (\mathrm{id} \otimes S)\Delta = \eta \circ \varepsilon = \mu \circ (S \otimes \mathrm{id})\Delta \tag{2.3}$$

özelliğini sağlayan bir S cebir anti-homomorfizm ile $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ altılısına bir Hopf Cebiri denir $[4]$.

2.3 Z_3-Derecelendirme

Devirli gruplar, her elemanı bazı sabit elemanların bir kuvveti olan elemanların oluşturduğu gruplardır. Z_3 devirli grubunu ele alalım. Bu grup, $j = e^{2\pi i/3}$ $\left(i = \sqrt{-1}\right)$

$1 + j + j^2 = 0$ ve $j^3 = 1$

birincil kübik kökleri birimi veren çarpma ile kompleks düzlemde temsil edilebilir.

BÖLÜM 3

Z_3-DERECELİ $GL_q(2)$ KUANTUM GRUBU

Bu bölümde, Z_3-dereceli uzaya etki eden kuantum matrisler gözönüne alınacak ve ilk olarak, onların matris elemanlarının sağladığı Z_3-dereceli q-komutasyon bağıntıları bulunacaktır. Sonra, Z_3-dereceli bir kuantum matrisin tersi ve determinantı elde edilerek, Z_3-dereceli kuantum matrislerin grubuna ulaşılacaktır. Daha sonra, bu grubun bir Hopf Cebir yapısına sahip olduğu gösterilecektir.

3.1 Z_3-Dereceli Kuantum Düzleme Bir Bakış

Bu kısımda, Z_3-dereceli kuantum düzlem üzerindeki fonksiyonların cebiri ve onun dual cebiri tanıtılacaktır.

Tanım 3.1.1 $O\left(R_q(2)\right)=K\{x,y\}/\left(xy-qyx\right)$ fonksiyon cebri ile değişmeli olmayan $R_q(2)$ uzayı; $(q\neq 1)$ $q^3=1$ için bir Z_3-dereceli düzlem olarak adlandırılır [3].

Bu tanım ışığında

$$R_q(2)=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}:\ xy=qyx \ \text{ ve } \ q^3=1\right\} \tag{3.1}$$

yazarız. Bu uzayın dualini $R_q^*(2)$ ile gösterelim. Bu takdirde, aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım 3.1.2 $O\left(R_q^*(2)\right)=K\{\theta,\varphi\}/\left(\theta\varphi-q^{-2}\varphi\theta,\ \theta^3,\ \varphi^3\right)$ fonksiyon cebiri ile değişmeli olmayan $R_q^*(2)$ uzayına Z_3-dereceli dual kuantum düzlem denir [3].

Buna göre,

$$R_q^{*}(2)=\left\{\begin{pmatrix}\theta\\ \varphi\end{pmatrix}:\theta\varphi=q^{-2}\varphi\theta,\ \theta^3=0,\ \varphi^3=0\right\} \tag{3.2}$$

yazarız.

3.2 Z_3-Dereceli Uzaya Etki Eden Kuantum Matrisler

Z_3-dereceli 2×2-tipindeki bir kuantum matrisin elemanlarının sağladığı *q*-komutasyon bağıntıları, Z_3-dereceli kuantum düzlem ve onun dualinin jeneratörlerinin sağladığı (3.1) ve (3.2) deki komutasyon bağıntıları kullanılarak elde edilmektedir.

Klasik durumda, bir lineer tasvir düzleme etki ettiğinde, netice yine düzlemin bir elemanı olur. Yani eğer T, düzleme etki eden bir lineer tasvir ise, $\mathrm{T}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dir. Deformasyon teoride, durum hemen hemen aynıdır.

Kabul edelim ki T, Z_3-dereceli kuantum düzlem ve onun dualine etki edecek bir lineer tasvir ve onun Z_3-dereceli uzaydaki matris temsili

$$T=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \tag{3.3}$$

dir. Böyle matrislerin cebrini $M(2)$ ile gösterelim.

$M(2)$ cebirindeki bir matrisin, matris elemanlarının, birer koordinat fonksiyonu olduğu düşünülmekte ve Z_3-dereceye göre a, b, c ile d nin derecelerinin sıfır olduğu kabul edilmektedir.

Teorem 3.2.1 Bir T kuantum matrisinin matris elemanları

$$\begin{aligned}&ab=ba, \qquad ac=qca, \qquad bc=qcb,\\ &cd=dc, \qquad bd=qdb, \qquad ad-da=(q-1)cb\end{aligned} \tag{3.4}$$

şeklindeki *q*-komutasyon bağıntılarını sağlar.

İspat Z_3-dereceli kuantum düzlemin jeneratörleri $X_1 = x$ ve $X_2 = y$ olmak üzere

$$\delta_L : \mathbb{R}_q(2) \to M(2) \otimes \mathbb{R}_q(2), \quad \delta_L(X_i) = \sum_{j=1}^{2} a_i^j \otimes X_j \tag{3.5}$$

sol eş-etkiyi gözönüne alalım. Bu eş-etki δ_L, bir cebir homomorfizmidir ve T nin matris elemanlarının $\delta_L(xy - qyx) = 0$ olacak şekildeki bir cebiri sağlaması gerekir. Gerçekten,

$$\delta_L(x) = ax + by, \qquad \delta_L(y) = cx + dy$$

olduğundan, düzlemin jeneratörleri ile T nin matris elemanlarının değişmeli olduğunu kabul ettiğimizde,

$$\delta_L(xy) = ac.x^2 + ad.xy + bc.yx + bd.y^2 = ac.x^2 + (bc + qad)yx + bd.y^2$$

$$\delta_L(yx) = ca.x^2 + da.yx + cb.xy + db.y^2 = ca.x^2 + (da + qcb)yx + db.y^2$$

yazarız. Buna göre

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_L(xy - qyx) \\ &= (ac - qca).x^2 + (bc + qad - qda - q^2cb).yx + (bd - qdb).y^2 \end{aligned}$$

olup, x ve y nin bağımsızlığı

$$ac = qca, \qquad bd = qdb, \qquad ad - da = qcb - q^2bc$$

bağıntılarını verir ki bunlar, (3.4) deki bağıntıların bazılarıdır. Geriye kalan bağıntılar ise, δ_L nın dual düzleme etkisi kullanılarak elde edilecektir.

δ_L nın, dual düzlemin jeneratörlerine etkisi, $\hat{X}_1 = \xi$ ve $\hat{X}_2 = \eta$ olmak üzere

$$\delta_L(\hat{X}_i) = \sum_{j=1}^{2} a_i^j \otimes \hat{X}_j \tag{3.6}$$

şeklindedir. Buradaki $\delta_L(\hat{X}_i)$ elemanlarının da (3.2) bağıntılarını sağlaması gerekir. Yukarıdaki işlemlerin benzerleri, (3.2) bağıntıları kullanılarak tekrarlandığında ise, (3.4) deki diğer bağıntılar elde edilir.

Yukarıdaki teoremde elde edilen (3.4) bağıntıları, $M_q(2)$ nin matris cebirinin tanımı için bizi yönlendirir:

Tanım 3.2.2 I_q, (3.4) bağıntıları ile oluşturulmuş $K\{a,\ b,\ c,\ d\}$ serbest cebirinin iki yanlı ideali olsun. Bu halde $M_q(2)$ kuantum matris uzayının $O(M_q(2))$ ile gösterilen koordinat cebiri, $K\{a,\ b,\ c,\ d\}$ cebirinin I_q ideali ile bölümü olarak tanımlanır:

$$O(M_q(2)) := K\{a,\ b,\ c,\ d\}/I_q .$$

Not $GL(2)$ nin iki parametreli deformasyonu [9] da verilmiştir. Yukarıda elde edilen (3.4) bağıntıları, [9] da bulunan (10) bağıntılarının $p=1$ hali gibi görünmesine rağmen, öyle değildir ve burada $q \to 1$ limiti yoktur.

3.3 Z_3-Dereceli Bir Matrisin Kuantum Determinantı ve Tersi

Temel matris teorisinde determinant, önemli bir rol oynar. Dolayısıyla onun, kuantum versiyonunun açıklanması gerekmektedir. $M_q(2)$ daki bir matrisin kuantum determinantı, Gauss ayrışımı kullanılarak

$$D_q(T) = ad - bc = da - q^2bc \tag{3.7}$$

şeklinde bulunmuştur. Gerçekten, (3.3) deki T matrisi, *d* nin tersinin mevcut olduğu kabul edilerek,

$$T = \begin{pmatrix} 1 & bd^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a - bd^{-1}c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d^{-1}c & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla, ortadaki üçgen matrisin determinantı, T nin kuantum determinantı olacaktır.

Gerçekten (3.4) ($dc = cd \Rightarrow d^{-1}(cd) = c$, $bd = qdb \Rightarrow b = qdbd^{-1} \Rightarrow q^2b = dbd^{-1}$) den

$$\begin{aligned} (a - bd^{-1}c)d &= ad - b(d^{-1}cd) = ad - bc, \\ d(a - bd^{-1}c) &= da - (dbd^{-1})c = da - q^2bc. \end{aligned}$$

$D_q(T)$ kuantum determinantı, cebirin bir merkezi elemanı değildir. $D_q(T)$ ile T nin matris elemanları arasında sağlanan q-komutasyon bağıntıları, (3.4) deki bağıntıların yardımıyla bulunabilir ve onlar aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} a\,D_q(T) &= D_q(T)a, \qquad & b\,D_q(T) &= qD_q(T)b, \\ d\,D_q(T) &= D_q(T)d, \qquad & cD_q(T) &= q^2 D_q(T)c. \end{aligned} \tag{3.8}$$

$D^{-1}{}_q(T)$ ile T nin matris elemanları arasında sağlanan bağıntılar, (3.8) deki bağıntıların yardımıyla, eşitliğin her iki yanına sağdan ve soldan $D^{-1}{}_q(T)$ uygulanarak aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$\begin{aligned} D^{-1}{}_q(T)a &= a\,D^{-1}{}_q(T), \qquad & D^{-1}{}_q(T)b &= qb\,D^{-1}{}_q(T), \\ D^{-1}{}_q(T)c &= q^2 c\,D^{-1}{}_q(T), \qquad & D^{-1}{}_q(T)d &= d\,D^{-1}{}_q(T). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Z_3-dereceli $GL_q(2)$ kuantum grubunun koordinat cebiri, $D_q(T)$ kuantum determinantının tersi olan $D^{-1}{}_q(T)$ nin $O(M_q(2))$ cebirine eklenmesiyle elde edilmiştir. Daha tam olarak, $O(GL_q(2))$ cebiri. $tD_q(T)-1$ elemanı ile oluşturulmuş $<tD_q(T)-1>$ iki taraflı ideali ile $O(M_q(2))$ üzerinde *t* ye göre polinomların $O(M_q(2))[t]$ cebirinin bölüm cebiridir. Yani $O(GL_q(2))$ cebiri, 4+1 adet *a*,*b*,*c*,*d* ve *t* jeneratörleri, (3.4), (3.8) bağıntıları ve $tD_q(T)=1=D_q(T)t$ ile oluşturulmuştur.

Z_3-dereceli uzaydaki 2×2-tipindeki bir kuantum T matrisinin tersi,

$$TT^{-1} = I = T^{-1}T$$

eşitliğini sağlamalıdır. Buradan, gerekli işlemleri yaptığımızda, T^{-1} (ters) matrisini

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} D^{-1}{}_q(T)d & -D^{-1}{}_q(T)b \\ -D^{-1}{}_q(T)c & D^{-1}{}_q(T)a \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

olarak buluruz.

3.4 Z_3-Dereceli $GL_q(2)$ Kuantum Grubunun Hopf Cebir Yapısı

Bu kısımda, Z_3-dereceli $GL_q(2)$ kuantum grubunun bir Hopf Cebiri olduğunu göstereceğiz. Bunun için, $GL_q(2)$ kuantum grubu üzerine, eş-çarpım, eş-birim ve eş-ters denen ve sırasıyla, Δ, ε ve S ile göstereceğimiz üç tane operatör tanımlayacağız.

Teorem 3.4.1 $O(GL_q(2))$ cebri, aşağıda tanımlanan eş-çarpım, eş-birim ve eş-ters operatörleri ile bir Hopf Cebiri oluşturur:

Eş-çarpım operatörü olan Δ operatörü,

$$\begin{aligned}&\Delta : O(GL_q(2)) \to O(GL_q(2)) \otimes O(GL_q(2)),\\ &\Delta(a_i^j) = \sum_{k=1}^{2} a_i^k \otimes a_k^j, \quad \Delta(1) = 1 \otimes 1.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Eş-birim operatörü olan ε operatörü,

$$\varepsilon : O(GL_q(2)) \to \mathbb{C}, \quad \varepsilon(a_i^j) = \delta_i^j, \ \ \varepsilon(1) = 1. \tag{3.12}$$

Eş-ters operatörü olan S operatörü,

$$S : O(GL_q(2)) \to O(GL_q(2)), \qquad S(a_i^j) = (S(T))_i^j, \quad S(1) = 1. \tag{3.13}$$

İspat Bunun için, eş tasvirlerin aşağıdaki özdeşlikleri sağladığı gösterilmelidir.

Eş-çarpma operatörü olan Δ, bir cebir homomorfizmidir ve

$$(\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta \tag{3.14}$$

şeklindeki eş-asosyatiflik özelliğini sağlar. Gerçekten, örneğin,

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes id)\Delta(a) &= (id \otimes \Delta)(a \otimes a + b \otimes c)\\ &= a \otimes \Delta(a) + b \otimes \Delta(c)\\ &= a \otimes (a \otimes a + b \otimes c) + b \otimes (c \otimes a + d \otimes c)\\ &= (a \otimes a + b \otimes c) \otimes a + (a \otimes b + b \otimes d) \otimes c\\ &= \Delta(a) \otimes a + \Delta(b) \otimes c\\ &= (id \otimes \Delta)(a \otimes a + b \otimes c)\\ &= (id \otimes \Delta)\Delta(a)\end{aligned}$$

dır. Ko-birim operatörü, bir cebir homomorfizmidir ve

$$m \circ (\varepsilon \otimes id) \circ \Delta = m \circ (id \otimes \varepsilon) \circ \Delta \tag{3.15}$$

özelliğini gerçekler. Burada m, çarpma tasviridir ve $m(a \otimes b) = ab$ ile

$$m \circ (m \otimes id) = m \circ (id \otimes m)$$

şeklindeki birleşme aksiyomunu sağlar.

S ko-ters operatörü de,

$$m \circ (S \otimes id) \circ \Delta = \varepsilon = m \circ (id \otimes S) \circ \Delta \tag{3.16}$$

özdeşliğini sağlayan bir cebir anti-homomorfizmidir. Eğer T^{-1} (ters) matrisini $S(T)$ ile gösterirsek

$$S(T) = T^{-1} = D^{-1}{}_q(T) \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

olacaktır.

BÖLÜM 4

Z_3-DERECELİ $GL_q(2)$ KUANTUM GRUBU ÜZERİNE DİFERANSİYEL HESAP

Bu bölümde, Z_3-dereceli $GL_q(2)$ kuantum grubu üzerine değişmeli olmayan, sağ- ve sol- kovaryant bir diferansiyel hesap kurulacaktır. Bu hesap, $GL_q(2)$ üzerindeki fonksiyon-ları, birinci ve ikinci mertebe diferansiyelleri ve diferansiyel formları içerir.

4.1 Diferansiyel Cebir

Z_3-dereceli diferansiyel hesabın tanımı ile başlayalım. Aksi söylenmedikçe, bir α elemanının derecesini $\tilde{\alpha}$ ile göstereceğiz.

Tanım 4.1.1 A, bir serbest, birleşmeli (genellikle, değişmeli olmayan) cebir ve $\Gamma^{\wedge n}$, bir n- form ve A-ikilimodül ile oluşturulmuş uzay olsun. A cebiri üzerinde Z_3-dereceli bir diferansiyel hesap, birinci dereceden bir $\mathbb{C}$-lineer $\boldsymbol{\delta}:\Gamma^{\wedge} \to \Gamma^{\wedge}$ dış diferansiyel operatörü ile bir Z_3-dereceli $\Gamma^{\wedge} = \oplus_{n=0}^{\infty}\Gamma^{\wedge n}$ cebiridir. Biliner diferansiyel hesabın bir genellemesi aşağıdaki kurallara öncülük eder: $\alpha \in \Gamma^{\wedge n}$ ve $\beta \in \Gamma^{\wedge}$ için

$$
\begin{aligned}
&\delta^3 = 0, \quad (\delta^2 \neq 0) \\
&\delta(\alpha \wedge \beta) = (\delta\alpha) \wedge \beta + q^{\tilde{\alpha}} \alpha \wedge (\delta\beta), \\
&\delta^2(\alpha \wedge \beta) = (\delta^2\alpha) \wedge \beta + (q^{\tilde{\alpha}} + q^{\delta\tilde{\alpha}})(\delta\alpha) \wedge (\delta\beta) + q^{2\tilde{\alpha}} \alpha \wedge (\delta^2\beta)
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

dir.

Klasik geometriden bilindiği üzere, eğer α ve β, birer 1- form ise, $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$ dır. Bu sonuç, dış çarpım ile vektörel çarpımın, anti-komutatif olmaları anlamında benzer bir karakteristik özelliğe sahip olduklarını söylemektedir. Ancak, Z_3-dereceli durumda, iki 1- formun dış çarpımı, $\alpha \wedge \beta = q^{\tilde{\alpha}.\tilde{\beta}} \beta \wedge \alpha$ şeklindedir.

4.2 Bazı Anlaşma ve Kabüller

Lineer δ operatörü, bir koordinat fonksiyonuna uygulandığında Z_3-dereceye göre derecesi 1 olan bir 1-form üretir. Bölüm 3 de gözönüne alınan T matrisinin matris elemanları için, elde ettiğimiz bu 1-formları sırasıyla, δa, δb, δc ve δd ile göstereceğiz. δ lineer operatörü δa ya uygulandığında (veya a ya iki defa uygulandığında), Z_3-derecesi 2 olan bir 1-form elde ederiz. Bunu $\delta^2 a$ ile göstereceğiz. Benzer şekilde, δb ye uygulandığında $\delta^2 b$ ile ve Z_3-derecesi 2 olan bir 1-form, δc ye uygulandığında $\delta^2 c$ ile ve Z_3-derecesi 2 olan bir 1-form ve δd ye uygulandığında $\delta^2 d$ ile göstereceğiz ve Z_3-derecesi 2 olan bir 1-form üretilmiş olacaktır.

4.3 Sol ve Sağ Kovaryantlık

Değişmeli durumda, eş tasvirler, grup üzerindeki fonksiyonların cebirinin cebirsel yapısına göre, grup manifoldunun grup yapısını kodlar. Özel olarak, eş çarpım grup çarpımına dönüşür ve grubun kendi üzerine sol ve sağ etkisini yeniden formüle etmek için kullanılabilir.

Diferansiyel formlar üzerinde grubun üretilmiş etkilerinin tekabül eden genellemeleri vardır. Bu, ikili-kovaryantlık fikrine öncülük eder.

Tanım 4.3.1 A birim elemanı **1** olan bir Hopf cebiri ve $(\Gamma^{\wedge}, \delta)$, A üzerinde bir diferansiyel hesap olsun.

Eğer sol eş-etki denen ve her $u, v \in A$ için

$$\Delta_L(\mathrm{u}\,\delta\,\mathrm{v}) = \Delta(\mathrm{u})(\mathrm{id} \otimes \delta)\Delta(\mathrm{v}) \tag{4.2}$$

eşitliğini gerçekleyen bir $\Delta_L : \Gamma^{\wedge} \to A \otimes \Gamma^{\wedge}$ lineer tasviri varsa, $(\Gamma^{\wedge}, \delta)$ diferansiyel hesabının sol kovaryant olduğu söylenir.

Eğer sağ eş-etki denen ve her $u, v \in A$ için

$$\Delta_R(\mathrm{u}\,\boldsymbol{\delta}\,\mathrm{v}) = \Delta(\mathrm{u})(\boldsymbol{\delta}\otimes\mathrm{id})\Delta(\mathrm{v}). \tag{4.3}$$

eşitliğini gerçekleyen bir $\Delta_R:\Gamma^\wedge \to \Gamma^\wedge \otimes A$ lineer tasviri varsa, $\left(\Gamma^\wedge,\boldsymbol{\delta}\right)$diferansiyel hesabının sağ kovaryant olduğu söylenir.

(4.2) ve (4.3) bağıntılarından aşağıdaki özellikler ortaya çıkar [7]:

$$\begin{aligned} &(\Delta\otimes\mathrm{id})\circ\Delta_L = (\mathrm{id}\otimes\Delta_L)\circ\Delta_L, \quad &&(\mathrm{id}\otimes\Delta)\circ\Delta_R = (\Delta_R\otimes\mathrm{id})\circ\Delta_R. \\ &(\boldsymbol{\varepsilon}\otimes\mathrm{id})\Delta_L(\boldsymbol{\delta}u) = \boldsymbol{\delta}u, &&(\mathrm{id}\otimes\boldsymbol{\varepsilon})\Delta_R(\boldsymbol{\delta}u) = \boldsymbol{\delta}u. \end{aligned} \tag{4.4}$$

4.4 İkili-Kovaryantlık

Eğer

$$(\Delta_L\otimes\mathrm{id})\circ\Delta_R = (\mathrm{id}\otimes\Delta_R)\circ\Delta_L \tag{4.5}$$

eşitliği gerçeklenirse, sol- ve sağ-kovaryant bir hesabın ikili-kovaryant olduğu söylenir. Bir ikili-kovaryant diferansiyel hesap,

$$\begin{aligned} \Delta_L(\mathrm{u}_1\boldsymbol{\delta}\,\mathrm{u}_1+\boldsymbol{\delta}\,\mathrm{u}_2\mathrm{u}_2) &= \Delta(\mathrm{u}_1)\Delta_L(\boldsymbol{\delta}\,\mathrm{u}_1)+\Delta_L(\boldsymbol{\delta}\,\mathrm{u}_2)\Delta(\mathrm{u}_2) \\ \Delta_R(\mathrm{u}_1\boldsymbol{\delta}\,\mathrm{u}_1+\boldsymbol{\delta}\,\mathrm{u}_2\mathrm{u}_2) &= \Delta(\mathrm{u}_1)\Delta_R(\boldsymbol{\delta}\,\mathrm{u}_1)+\Delta_R(\boldsymbol{\delta}\,\mathrm{u}_2)\Delta(\mathrm{u}_2) \end{aligned} \tag{4.6}$$

eşitliğini sağlayan$\Delta_L:\Gamma^\wedge \to A\otimes\Gamma^\wedge$ ve $\Delta_R:\Gamma^\wedge \to \Gamma^\wedge\otimes A$ lineer tasvirleriyle birlikte $\Gamma^\wedge$ *A*-ikili-modül tanımı ile verilen ikili-modüllü ikili-kovaryant diye adlandırılan bir yapının özel bir halidir.

4.5 Komutasyon Bağıntıları

Bu kısımda, koordinat fonksiyonları ($T\in GL_q\left(2\right)$ matrisinin matris elemanları) ile onların birinci ve ikinci mertebe diferansiyelleri arasındaki bağıntılar yanında, birinci ve ikinci mertebe diferansiyellerin kendi aralarındaki bağıntılar elde edilecektir.

4.5.1 Koordinat Fonksiyonları ve Onların Birinci Mertebe Diferansiyelleri Arasındaki Bağıntılar

Bu kısımda, bir $T\in GL_q\left(2\right)$ matrisinin matris elemanları ile onların birinci mertebe diferansiyelleri arasında sağlanan q-komutasyon bağıntıları elde edilecektir.

Önerme 4.5.1 Eğer $T \in GL_q(2)$ ise, T nin matris elemanları ile onların birinci mertebe diferansiyelleri

$$
\begin{aligned}
&a.\delta a = q^2 \delta a.a \\
&a.\delta b = q^2 \delta b.a \\
&b.\delta a = \delta a.b + (q^2 - 1)\delta b.a \\
&b.\delta b = q^2 \delta b.b \\
&c.\delta b = q\delta b.c \\
&a.\delta c = q^2 \delta c.a + q(q-1)\delta a.\mathrm{c} \\
&c.\delta a = q\delta a.c \\
&c.\delta c = q^2 \delta c.c \\
&b.\delta d = q^2 \delta d.b + q(q-1)\delta b.\mathrm{d} \\
&d.\delta b = q\delta b.d \\
&d.\delta d = q^2 \delta d.d \\
&d.\delta c = \delta c.d + (q^2 - 1)\delta d.c \\
&c.\delta d = q^2 \delta d.c \\
&a.\delta d = q^2 \delta d.a + q(q-1)\delta b.c \\
&d.\delta a = q^2 \delta a.d + (q - q^2)\delta b.c \\
&b.\delta c = \delta c.b + q(q-1)\left[(1-q)\delta b.\mathrm{c} + \mathrm{q}\,\delta a.d - q\delta d.a\right]
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

şeklindeki q -komutasyon bağıntılarını sağlar.

İspat İstenilen bağıntıları elde etmek için, Z_3-dereceli kuantum grubundaki bir matrisin matris elemanları ile onların birinci mertebe diferansiyelleri arasındaki sağlanan muhtemel bağıntıların

$$
\begin{aligned}
&a\delta a = X_1\delta aa\\
&a\delta c = F_{11}\delta ca + F_{12}\delta ac\\
&c\delta a = F_{21}\delta ac + F_{22}\delta ca\\
&c\delta c = X_2\delta cc\\
&a\delta b = K_{11}\delta ba + K_{12}\delta ab\\
&b\delta a = K_{21}\delta ab + K_{22}\delta ba\\
&b\delta b = X_3\delta bb\\
&c\delta b = L_{11}\delta bc + L_{12}\delta cb + L_{13}\delta ad + L_{14}\delta da\\
&b\delta c = L_{21}\delta cb + L_{22}\delta bc + L_{23}\delta ad + L_{24}\delta da\\
&d\delta c = M_{11}\delta cd + M_{12}\delta dc\\
&c\delta d = M_{21}\delta dc + M_{22}\delta cd\\
&d\delta d = X_4\delta dd\\
&b\delta d = N_{11}\delta db + N_{12}\delta bd\\
&d\delta b = N_{21}\delta bd + N_{22}\delta db\\
&a\delta d = R_{11}\delta da + R_{12}\delta ad + R_{13}\delta cb + R_{14}\delta bc\\
&d\delta a = R_{21}\delta ad + R_{22}\delta da + R_{23}\delta cb + R_{24}\delta bc
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. Burada, muhtemelen q parametresine bağlı, 36 adet sabit bulunmaktadır.

Amacımız bu bağıntılarda yer alan $X_1, X_2, X_3, X_4, F_{ij}, K_{ij}, L_{ij,} M_{ij}, N_{ij}, R_{ij}$ sabitlerini bulmaktır. Aşağıda ise, a, b ve onların diferansiyelleri göz önüne alınarak (4.7) deki ilk dört bağıntı üzerinde çalışmakla başlanmıştır. Öyleyse,

$$ab = ba$$

bağıntısı ile oluşturulan cebiri A_{ab} ile gösterelim. Bu durumda A_{ab} cebirinin diferansiyel cebiri olan δA_{ab} cebirinin jeneratörleri δa ve δb olup, $A_{ab} \cup \delta A_{ab}$ cebirinin jeneratörleri arasında sağlanması muhtemel komutasyon bağıntıları

$$a\delta a = X_1\delta aa \tag{4.9}$$

$$a\delta b = K_{11}\delta ba + K_{12}\delta ab \tag{4.10}$$

$$b\delta a = K_{21}\delta ab + K_{22}\delta ba \tag{4.11}$$

$$b\delta b = X_3\delta bb \tag{4.12}$$

dır. Buradaki $X_1, X_3, K_{ij}\left(i, j=1,2\right)$ katsayılarını bulmak için değişmeli olmayan hesabın kovaryantlığını kullanacağız.

Eğer Δ_L lineer tasvirini (4.9) bağıntısına uygularsak, sol taraf

$$\begin{aligned}
\Delta_L(a\boldsymbol{\delta} a) &= \Delta\left(a\right)\Delta_L\left(\boldsymbol{\delta} a\right) \\
&= (a\otimes a+b\otimes c)(a\otimes \boldsymbol{\delta} a+b\otimes \boldsymbol{\delta} c) \\
&= a^2\otimes a\boldsymbol{\delta} a+ab\otimes a\boldsymbol{\delta} c+ba\otimes c\boldsymbol{\delta} a+b^2\otimes c\boldsymbol{\delta} c \\
&= X_1a^2\otimes \boldsymbol{\delta} aa+F_{11}ab\otimes \boldsymbol{\delta} ca+F_{12}ab\otimes \boldsymbol{\delta} ac+F_{21}ab\otimes \boldsymbol{\delta} ac \\
&\quad +F_{22}ab\otimes \boldsymbol{\delta} ca+X_2b^2\otimes \boldsymbol{\delta} cc \\
&= X_1a^2\otimes \boldsymbol{\delta} aa+(F_{12}+F_{21})ab\otimes \boldsymbol{\delta} ac+\left(F_{11}+F_{22}\right)ab\otimes \boldsymbol{\delta} ca+X_2b^2\otimes \boldsymbol{\delta} cc
\end{aligned}$$

ve sağ taraf

$$\begin{aligned}
\Delta_L(X_1\boldsymbol{\delta} aa) &= X_1\Delta_L\left(\boldsymbol{\delta} a\right)\Delta(a) \\
&= X_1(a\otimes \boldsymbol{\delta} a+b\otimes \boldsymbol{\delta} c)(a\otimes a+b\otimes c) \\
&= X_1a^2\otimes \boldsymbol{\delta} aa+X_1\,ab\otimes \boldsymbol{\delta} ac+X_1ab\otimes \boldsymbol{\delta} ca+X_1b^2\otimes \boldsymbol{\delta} cc
\end{aligned}$$

şeklini alır. Buna göre,

$$X_1=F_{12}+F_{21}=F_{11}+F_{22}=X_2 \tag{4.13}$$

elde edilir. Δ_R lineer tasvirini (4.9) bağıntısına uygularsak, sol taraf

$$\begin{aligned}
\Delta_R(a\boldsymbol{\delta} a) &= \Delta\left(a\right)\Delta_R\left(\boldsymbol{\delta} a\right) \\
&= (a\otimes a+b\otimes c)(\boldsymbol{\delta} a\otimes a+\boldsymbol{\delta} b\otimes c) \\
&= a\boldsymbol{\delta} a\otimes a^2+a\boldsymbol{\delta} b\otimes ac+b\boldsymbol{\delta} a\otimes ca+b\boldsymbol{\delta} b\otimes c^2 \\
&= X_1\boldsymbol{\delta} aa\otimes a^2+qK_{11}\boldsymbol{\delta} ba\otimes ca+qK_{12}\boldsymbol{\delta} ab\otimes ca+K_{21}\boldsymbol{\delta} ab\otimes ca \\
&\quad +K_{22}\boldsymbol{\delta} ba\otimes ca+X_3\boldsymbol{\delta} bb\otimes c^2 \\
&= X_1\boldsymbol{\delta} aa\otimes a^2+(qK_{11}+K_{22})\boldsymbol{\delta} ba\otimes ca+\left(qK_{12}+K_{21}\right)\boldsymbol{\delta} ab\otimes ca+X_3\boldsymbol{\delta} bb\otimes c^2
\end{aligned}$$

ve sağ taraf

$$\begin{aligned}
\Delta_R(X_1\boldsymbol{\delta} aa) &= X_1\Delta_R\left(\boldsymbol{\delta} a\right)\Delta(a) \\
&= X_1(\boldsymbol{\delta} a\otimes a+\boldsymbol{\delta} b\otimes c)(a\otimes a+b\otimes c) \\
&= X_1\boldsymbol{\delta} aa\otimes a^2+qX_1\boldsymbol{\delta} ab\otimes ca+X_1\boldsymbol{\delta} ba\otimes ca+X_1\boldsymbol{\delta} bb\otimes c^2
\end{aligned}$$

olup,

$$X_1 = qK_{11} + K_{22} = X_3, \quad qX_1 = qK_{12} + K_{21} \tag{4.14}$$

elde edilir. Benzer şekilde, Δ_L ve Δ_R lineer tasvirlerini (4.8) in tamamına uygulayarak benzer denklemleri elde ederiz. Şimdi, $L_{11} = Q_1,\ L_{12} = Q_{2,}\ L_{13} = Q_{3,}\ L_{14} = Q_4$ diyelim. Bu takdirde,

$$\begin{aligned}
&R_{13} = qQ_3,\ qQ_{13} = (\mathrm{q}-1)\mathrm{Q}_1 + qR_{24},\ R_{24} = Q_3 + (1-q)Q_1,\\
&R_{22} = Q_2 + (1-q)Q_4,\ R_{23} = qQ_4,\ R_{11} = qQ_1,\ R_{21} = qQ_1,\\
&R_{12} = Q_2 + (\mathrm{q}-1)Q_3,\ R_{13} = qQ_3,\ R_{14} = (\mathrm{q}-1)\mathrm{Q}_1 + Q_4
\end{aligned} \tag{4.15}$$

olur. Bu denklemlerde bulunan $X_1, X_2, X_3, X_4, F_{ij}, K_{ij}, L_{ij,} M_{ij}, N_{ij}, R_{ij}\ (i, j = 1,2,3,4)$ katsayılarını $Q_1,\ Q_{2,}\ Q_{3,}\ Q_4$ cinsinden yazarsak:

$$\begin{aligned}
&a.\delta a = (qQ_1 + Q_2 + qQ_3 + Q_4)\delta a.a\\
&a.\delta c = (qQ_1 + qQ_3)\delta c.a + ((q-1)Q_1 + Q_2 + (q-1)Q_3 + Q_4)\delta a.c\\
&c.\delta a = (Q_1 + Q_3)\delta a.c + (Q_2 + Q_4)\delta c.a\\
&c.\delta c = (qQ_1 + Q_2 + qQ_3 + Q_4)\delta c.c\\
&a.\delta b = (qQ_1 + Q_4)\delta b.a + (Q_2 + qQ_3)\delta a.b\\
&b.\delta a = (q^2Q_1 + qQ_4)\delta a.b + \left((q-q^2)Q_1 + Q_2 + qQ_3 + (1-q)Q_4\right)\delta ba\\
&b.\delta b = (qQ_1 + Q_2 + qQ_3 + Q_4)\delta b.b\\
&c.\delta b = Q_1\delta b.c + Q_2\delta cb + Q_3\delta a.d + Q_4\delta d.a\\
&b.\delta c = q^2Q_1\delta cb + \left((q-q^2+q-1)Q_1 + Q_2 + (q-1)Q_3 + (1-q)Q_4\right)\delta bc\\
&\qquad + \left((q^2-q)Q_1 + qQ_4\right)\delta ad) + \left((q-q^2)Q_1 + qQ_3\right)\delta da\\
&d.\delta c = \left(q^2Q_1 + qQ_4\right)\delta cd + \left((q-q^2)Q_1 + Q_2 + qQ_3 + (1-q)Q_4\right)\delta dc\\
&c.\delta d = (qQ_1 + Q_4)\delta dc + (Q_2 + qQ_3)\delta cd\\
&d.\delta d = (qQ_1 + Q_2 + qQ_3 + Q_4)\delta d.d\\
&b.\delta d = (qQ_1 + qQ_3)\delta db + ((q-1)Q_1 + Q_2 + (q-1)Q_3 + Q_4)\delta bd\\
&d.\delta b = (Q_1 + Q_3)\delta bd + (Q_2 + Q_4)\delta db\\
&a.\delta d = qQ_1\delta d.a + (Q_2 + (q-1)Q_3)\delta a.d + qQ_3\delta c.b + ((q-1)Q_1 + Q_4)\delta b.c\\
&d.\delta a = qQ_1\delta a.d + (Q_2 + (1-g)Q_4)\delta d.a + qQ_4\delta c.b + ((1-q)Q_1 + Q_3)\delta b.c
\end{aligned} \tag{4.16}$$

olur. Şimdi, eğer $ab - ba = 0$ denklemini sağdan δb ile çarpıp (4.7) deki üçüncü bağıntıyı kullanırsak $Q_2 + qQ_3 = 0$ elde edilir. Benzer olarak $(bd - qdb)\delta d = 0$ ve $(ab - ba)\delta d = 0$ bağıntılarından sırasıyla $Q_2 + Q_4 = 0$ $Q_4 = 0$ elde edilir. (4.16) daki sekizinci ve dokuzuncu bağıntılarından yararlanılarak $cb - qcb = 0$ denklemine δ diferansiyel operatörü uygulanırsa $Q_1 = q$ elde edilir.

4.5.2 Birinci Mertebe Diferansiyeller Arasındaki Bağıntılar

Bu kısımda, üstteki kısımda tanımladığımız değişmeli olmayan diferansiyel hesabın kovaryantlığını kullanarak, birinci mertebe diferansiyeller arasında sağlanan bağıntıları aşağıdaki önerme ile buluruz.

Önerme 4.5.2 Eğer $T \in GL_q(2)$ ise, T nin matris elemanlarının birinci mertebe diferansiyelleri arasında aşağıdaki q-komutasyon bağıntıları vardır.

$$\begin{aligned}
&\delta a \wedge \delta b = \delta b \wedge \delta a \\
&\delta a \wedge \delta c = q \delta c \wedge \delta a \\
&\delta a \wedge \delta d = \delta d \wedge \delta a + \left(1 - q^2\right) \delta b \wedge \delta c \\
&\delta b \wedge \delta c = q \delta c \wedge \delta b \\
&\delta b \wedge \delta d = q \delta d \wedge \delta b \\
&\delta c \wedge \delta d = \delta d \wedge \delta c
\end{aligned} \tag{4.17}$$

İspat Z_3-dereceli $GL_q(2)$ kuantum grubundaki bir matrisin matris elemanlarının birinci mertebe diferansiyelleri arasındaki bağıntılar

$$\begin{aligned}
&\delta a \wedge \delta b = E_1 \delta b \wedge \delta a \\
&\delta a \wedge \delta c = E_2 \delta c \wedge \delta a \\
&\delta a \wedge \delta d = E_3 \delta d \wedge \delta a + E_4 \delta b \wedge \delta c \\
&\delta b \wedge \delta c = E_5 \delta c \wedge \delta b + E_6 \delta d \wedge \delta a \\
&\delta b \wedge \delta d = E_7 \delta d \wedge \delta b \\
&\delta c \wedge \delta d = E_8 \delta d \wedge \delta c
\end{aligned} \tag{4.18}$$

şeklinde olsun. q-parametresine bağlı olan E_i $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ sabitlerini (katsayılarını) bulmak için, değişmeli olmayan diferansiyel hesabın kovaryantlığını kullanacağız.

Aşağıda, (4.17) deki ilk bağıntı elde edilmekte ve dolayısıyla E_1 katsayısı bulunmaktadır. Δ_R ve Δ_L lineer tasvirlerini (4.18) deki ilk bağıntıya uygularsak,

$$
\begin{aligned}
\Delta_R(\delta a\wedge\delta b)&=\Delta_R(\delta a)\wedge\Delta_R(\delta b)\\
&=(\delta a\otimes a+\delta b\otimes c)\wedge(\delta a\otimes b+\delta b\otimes d)\\
&=\delta a\wedge\delta a\otimes ab+\delta a\wedge\delta b\otimes ad+\delta b\wedge\delta a\otimes cb+\delta b\wedge\delta b\otimes cd\\
&=\delta a\wedge\delta a\otimes ab+E_1\delta b\wedge\delta a\otimes da+((q-1)E_1+1)\delta b\wedge\delta a\otimes cb+\delta b\wedge\delta b\otimes cd
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_R(E_1\delta b\wedge\delta a)&=E_1\Delta_R(\delta b)\wedge\Delta_R(\delta a)\\
&=E_1(\delta a\otimes b+\delta b\otimes d)\wedge(\delta a\otimes a+\delta b\otimes c)\\
&=E_1\delta a\wedge\delta a\otimes ab+qE_1\delta a\wedge\delta b\otimes cb+E_1\delta b\wedge\delta a\otimes da+E_1\delta b\wedge\delta b\otimes cd
\end{aligned}
$$

buradan

$$\Delta_R(\delta a\wedge\delta b)=\Delta_R(E_1\delta b\wedge\delta a) \tag{4.19}$$

deki katsayıların eşitliğinden,

$E_1=1,\ qE_1^2-(q-1)E_1-1=0$ ve dolayısıyla $E_1=1$ olması gereklidir.

$$
\begin{aligned}
\Delta_L(\delta a\wedge\delta b)&=\Delta_L(\delta a)\Delta_L(\delta b)\\
&=(a\otimes\delta a+b\otimes\delta c)(a\otimes\delta b+b\otimes\delta d)\\
&=a^2\otimes\delta a\wedge\delta b+ab\otimes\delta a\wedge\delta d+ab\otimes\delta c\wedge\delta b+b^2\otimes\delta c\wedge\delta d\\
&=E_1a^2\otimes\delta b\wedge\delta a+E_3ab\otimes\delta d\wedge\delta a+(1+E_4)ab\otimes\delta c\wedge\delta b+E_8b^2\otimes\delta d\wedge\delta c
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_L(E_1\delta b\wedge\delta a)&=E_1\Delta_L(\delta b)\Delta_L(\delta a)\\
&=E_1(a\otimes\delta b+b\otimes\delta d)(a\otimes\delta a+b\otimes\delta c)\\
&=E_1a^2\otimes\delta b\wedge\delta a+E_1E_5ab\otimes\delta c\wedge\delta b+(E_1E_6+E_1)ab\otimes\delta d\wedge\delta a+E_1b^2\otimes\delta d\wedge\delta c
\end{aligned}
$$

$E_1=1$ olup, $E_1=E_8=1,\ \ 1+E_6-E_3=0,\ \ 1+E_4-E_5=0$ (4.20)

çıkar. Benzer işlemlerle diğer katsayılar da hesaplanabilir ve (4.17) bağıntıları elde edilir.

4.5.3 Koordinat Fonksiyonları ve İkinci Mertebe Diferansiyeller Arasındaki Bağıntılar

Bu kısımda, A cebirinin jeneratörleri olan $T\in GL_q(2)$ matrisinin matris elemanları ile onların ikinci mertebe diferansiyelleri arasında sağlanan bağıntılar Z_3-dereceli Leibniz kuralı kullanılarak aşağıdaki lemma ile verilecektir.

Lemma 4.5.3 Eğer $T \in GL_q(2)$ ise T nin matris elemanları ile onların ikinci mertebe diferansiyelleri aşağıdaki q-komutasyon bağıntılarını sağlar:

$$
\begin{aligned}
&a\ \delta^2 a = q^2 \delta^2 a\ a \\
&a\ \delta^2 b = q^2 \delta^2 b\ a \\
&b\ \delta^2 a = \delta^2 a\ b + \left(q^2 - 1\right)\delta^2 b\ a \\
&b\ \delta^2 b = q^2 \delta^2 b\ b \\
&a\ \delta^2 c = q^2 \delta^2 c\ a + q\left(q-1\right)\delta^2 a\ c \\
&c\ \delta^2 a = q\delta^2 a\ c \\
&c\ \delta^2 c = q^2 \delta^2 c\ c \\
&a\ \delta^2 d = q^2 \delta^2 d\ a + q\left(q-1\right)\delta^2 b\ c \\
&d\ \delta^2 a = q^2 \delta^2 a\ d + \left(q - q^2\right)\delta^2 b\ c \\
&d\ \delta^2 d = q^2 \delta^2 d\ d \\
&b\ \delta^2 c = \delta^2 c\ b - q\left(1-q\right)^2 \delta^2 b\ c + \left(1-q^2\right)\delta^2 a\ d + \left(q^2 - 1\right)\delta^2 d\ a \\
&c\ \delta^2 b = q\delta^2 b\ c \\
&b\ \delta^2 d = q^2 \delta^2 d\ b + q\left(q-1\right)\delta^2 b\ d \\
&d\ \delta^2 b = q\delta^2 b\ d \\
&c\ \delta^2 d = q^2 \delta^2 d\ c \\
&d\ \delta^2 c = \delta^2 c\ d + \left(q^2 - 1\right)\delta^2 d\ c
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

İspat Yukarıdaki bağıntıları elde etmek için, (4.7) deki bağıntılara Z_3-dereceli Leibniz kuralı' nı uygularız. Bir örnek olması bakımından,

$$a\ \delta b = q^2 \delta b\ a \tag{4.22}$$

bağıntısını göz önüne alarak δ operatörünü uygulayalım. Bu takdirde sol taraf

$$\delta\left(a\delta b\right) = \delta a \wedge \delta b + a\delta^2 b$$

ve sağ taraf

$$\delta\left(q^2 \delta b a\right) = q^2 \delta^2 b a + \delta b \wedge \delta a$$

şeklini alır. Elde edilen bu iki ifadeyi eşitler ve (4.17) bağıntılarını da kullanarak düzenlersek, son eşitliği

$$a\delta^2 b = q^2\delta^2 ba$$

şeklinde yazarız. Bu, (4.21) deki ikinci bağıntıdır. Diğer bağıntılar da benzer işlemlerle kolayca elde edilebilir.

4.5.4 Birinci ve İkinci Mertebe Diferansiyeller Arasındaki Bağıntılar

Bu kısımda, Z_3-dereceli Leibniz kuralı kullanarak, A cebrinin jenaratörlerinin birinci ve ikinci mertebeden diferansiyelleri arasındaki bağıntıları elde edeceğiz.

Önerme 4.5.4 Eğer $T \in GL_q(2)$ ise T nin matris elemanlarının birinci mertebe diferansiyelleri ile ikinci mertebe diferansiyelleri arasında

$$\begin{aligned}
&\delta a \wedge \delta^2 a = q\delta^2 a \wedge \delta a \\
&\delta a \wedge \delta^2 b = q\delta^2 b \wedge \delta a \\
&\delta b \wedge \delta^2 a = q^2\delta^2 a \wedge \delta b + \left(q - q^2\right)\delta^2 b \wedge \delta a \\
&\delta b \wedge \delta^2 b = q\delta^2 b \wedge \delta b \\
&\delta a \wedge \delta^2 c = q\delta^2 c \wedge \delta a + (q-1)\delta^2 a \wedge \delta c \\
&\delta c \wedge \delta^2 a = \delta^2 a \wedge \delta c \\
&\delta c \wedge \delta^2 c = q\delta^2 c \wedge \delta c \\
&\delta a \wedge \delta^2 d = q\delta^2 d \wedge \delta a + (q-1)\delta^2 b \wedge \delta c \\
&\delta d \wedge \delta^2 a = q\delta^2 a \wedge \delta d + (1-q)\delta^2 b \wedge \delta c \\
&\delta d \wedge \delta^2 d = q\delta^2 d \wedge \delta d \\
&\delta b \wedge \delta^2 c = q^2\delta^2 c \wedge \delta b + (q-1)\left[(1-q)\delta^2 b \wedge \delta c + q\delta^2 a \wedge \delta d - q\delta^2 d \wedge \delta a\right] \\
&\delta c \wedge \delta^2 b = \delta^2 b \wedge \delta c \\
&\delta b \wedge \delta^2 d = q\delta^2 d \wedge \delta b + (q-1)\delta^2 b \wedge \delta d \\
&\delta d \wedge \delta^2 b = \delta^2 b \wedge \delta d \\
&\delta c \wedge \delta^2 d = q\delta^2 d \wedge \delta c \\
&\delta d \wedge \delta^2 c = q^2\delta^2 c \wedge \delta d + \left(q - q^2\right)\delta^2 d \wedge \delta c
\end{aligned} \tag{4.23}$$

şeklindeki q-komutasyon bağıntıları sağlanır.

İspat Bu bağıntılar, (4.21) deki bağıntılara Z_3-dereceli Leibniz kuralı uygulanarak elde edilebilmektedir.

$$b\delta^2 a = \delta^2 ab + \left(q^2 - 1\right)\delta^2 ba$$

bağıntısını göz önüne alalım. Bu bağıntıya $\delta^3 = 0$ olduğunu da göz önüne alınacak δ diferansiyel operatörünü uygulanırsa;

$$\delta b \wedge \delta^2 a = q^2\, \delta^2 a \wedge \delta b + \left(q - q^2\right)\delta^2 b \wedge \delta a$$

eşitliği ile (4.23) ün üçüncü bağıntısı elde edilir. Diğer bağıntılar da benzer işlemlerle elde edilebilir.

4.5.5 İkinci Mertebe Diferansiyeller Arasındaki Bağıntılar

Bu kısımda, T nin matris elemanlarının ikinci mertebe diferansiyelleri arasında sağlanan komutasyon bağıntıları verilmiştir.

Önerme 4.5.5 Eğer $T \in GL_q\left(2\right)$ ise T nin matris elemanlarının ikinci mertebe diferansiyelleri arasında

$$\begin{aligned}
&\delta^2 a \wedge \delta^2 b = \delta^2 b \wedge \delta^2 a \\
&\delta^2 a \wedge \delta^2 c = q\delta^2 c \wedge \delta^2 a \\
&\delta^2 a \wedge \delta^2 d = \delta^2 d \wedge \delta^2 a + \left(1 - q^2\right)\delta^2 b \wedge \delta^2 c \\
&\delta^2 b \wedge \delta^2 c = q\delta^2 c \wedge \delta^2 b \\
&\delta^2 b \wedge \delta^2 d = q\delta^2 d \wedge \delta^2 b \\
&\delta^2 c \wedge \delta^2 d = \delta^2 d \wedge \delta^2 c
\end{aligned} \tag{4.24}$$

şeklindeki q-komutasyon bağıntıları vardır.

İspat Burada tekrar Z_3-dereceli Leibniz kuralı kullanılarak (4.21) deki bağıntılara $\delta^3 = 0$ olduğu göz önüne alınarak δ diferansiyel operatörünün uygulanmasıyla (4.22) bağıntıları elde edilecektir. (4.21) deki,

$$\delta a \wedge \delta^2 c = q\delta^2 c \wedge \delta a + \left(q - 1\right)\delta^2 a \wedge \delta c$$

bağıntısına δ diferansiyel operatörünün uygulanması ile,

$$\delta\left(\delta a \wedge \delta^2 c\right) = \delta\left[q\delta^2 c \wedge \delta a + \left(q - 1\right)\delta^2 a \wedge \delta c\right]$$

den

$$\delta^2 a \wedge \delta^2 c = \delta^2 c \wedge \delta^2 a + \left(1 - q^2\right)\delta^2 a \wedge \delta^2 c$$

elde edilir. Son eşitlik düzenlenirse,

$\delta^2 a \wedge \delta^2 c = q\delta^2 c \wedge \delta^2 a$

ile (4.24) ün ikinci bağıntısı elde edilir. Diğer bağıntılar da benzer işlemlerle elde edilebilir.

4.6 Cartan-Maurer Formları

$\Gamma^\wedge$ ve A'nın elemanları arasındaki *q*-komutasyon bağıntılarını belirlemek amacıyla

$\Gamma^\wedge$'nın uygun bir tabanını kullanalım. Bu yapı, Maurer-Cartan 1-formların kuantum analoglarını içerir ve

$$w=\delta T\ S(T) \tag{4.25}$$

ile tanımlanılır. Açıkça,

$$\begin{aligned} w_1 &= (\delta ad - \delta bc)D_q^{-1}(T), & w_2 &= (\delta ba - \delta ab)D_q^{-1}(T), \\ w_3 &= (\delta da - \delta cb)D_q^{-1}(T), & w_4 &= (\delta da - \delta cb)D_q^{-1}(T). \end{aligned} \tag{4.26}$$

Bu formlar arasında sağlanan komutasyon bağıntıları, aşağıdaki üç lemmadan sonra verilecektir.

Lemma 4.6.1 Eğer $T \in GL_q(2)$ ise T nin matris elemanları ile w nın matris elemanları

$$
\begin{aligned}
aw_1 &= q^2 w_1 a + (q^2 - 1) w_2 . c \\
aw_2 &= q^2 w_2 a \\
aw_3 &= q^2 w_3 a + (1 - q^2)[w_1 - w_4] . c \\
aw_4 &= q^2 w_4 a + (q^2 - q) w_2 c \\
bw_1 &= q^2 w_1 b + (q^2 - 1) w_2 . d \\
bw_2 &= q^2 w_2 b \\
bw_3 &= q^2 w_3 b + (1 - q^2)[w_1 - w_4] . d \\
bw_4 &= q^2 w_4 b + (q^2 - q) w_2 . d \\
cw_1 &= q^2 w_1 c \\
cw_2 &= q w_2 c \\
cw_3 &= w_3 c \\
cw_4 &= q^2 w_4 c \\
dw_1 &= q^2 w_1 d \\
dw_2 &= q w_2 d \\
dw_3 &= w_3 d \\
dw_4 &= q^2 w_4 d
\end{aligned} \tag{4.27}
$$

şeklindeki q-komutasyon bağıntılarını sağlar.

İspat Yukarıda verilen bağıntıları elde etmek için (3.4) ve (4.7) de verilen bağıntılar kullanılacaktır. Bir örnek olması bakımından, ilk bağıntı aşağıda elde edilmiştir. Diğer bağıntılar, benzer şekilde bulunulabilir.

$$
\begin{aligned}
aw_1 &= a\left((\delta ad - \delta bc) D_q^{-1}(T)\right) = (a\delta ad - a\delta bc) D_q^{-1}(T) \\
&= \left(q^2 \delta a.ad - q^2 \delta b.ac\right) D_q^{-1}(T) \\
&= q^2 \delta a\left(da + (q-1) cb\right) D_q^{-1}(T) - q^2 \delta b\left(qca\right) D_q^{-1}(T) \\
&= q^2 \delta ad.aD_q^{-1}(T) - q^2 \delta bc.aD_q^{-1}(T) + q^2\left(1 - q^2\right) \delta abcD_q^{-1}(T) + q^2\left(q^2 - 1\right) \delta bacD_q^{-1}(T) \\
&= q^2 w_1 a + \left(q^2 - 1\right) w_2 c.
\end{aligned}
$$

Not $T \in GL_q\left(2\right)$ nin matris elemanlarının birinci mertebe diferansiyelleri ile *T* nin determinantı olan $D_q(T)$ arasında

$$
\begin{aligned}
\delta aD_q(T) &= q^2 D_q(T) \delta a \Rightarrow D_q^{-1}(T) \delta a = q^2 \delta aD_q^{-1}(T) \\
\delta bD_q(T) &= D_q(T) \delta b \Rightarrow D_q^{-1}(T) \delta b = \delta bD_q^{-1}(T) \\
\delta cD_q(T) &= qD_q(T) \delta c \Rightarrow D_q^{-1}(T) \delta c = q\delta cD_q^{-1}(T) \\
\delta dD_q(T) &= D_q(T) \delta d \Rightarrow D_q^{-1}(T) \delta d = \delta dD_q^{-1}(T)
\end{aligned} \tag{4.28}
$$

şeklindeki q -komutasyon bağıntıları mevcuttur.

Lemma 4.6.2 Eğer $T \in GL_q(2)$ ise *T* nin matris elemanlarının birinci mertebe diferansiyelleri ile *w* in matris elemanları aşağıdaki *q*-komutasyon bağıntılarını sağlar:

$$\begin{aligned}
&\delta a \wedge w_1 = q^2 w_1 \wedge \delta a \\
&\delta a \wedge w_2 = q w_2 \wedge \delta a \\
&\delta a \wedge w_3 = w_3 \wedge \delta a \\
&\delta a \wedge w_4 = q^2 w_4 \wedge \delta a \\
&\delta b \wedge w_1 = q^2 w_1 \wedge \delta b \\
&\delta b \wedge w_2 = q w_2 \wedge \delta b \\
&\delta b \wedge w_3 = w_3 \wedge \delta b \\
&\delta b \wedge w_4 = q^2 w_4 \wedge \delta b \\
&\delta c \wedge w_1 = q^2 w_1 \wedge \delta c + \left(q^2 - 1\right) w_3 \wedge \delta a \\
&\delta c \wedge w_2 = q w_2 \wedge \delta c + (q-1) w_1 \wedge \delta a + (q-1)^2 w_1^2 a + \left(q^2 - q\right)(w_2 w_3 - w_1 w_4) a \\
&\delta c \wedge w_3 = q^2 w_3 \wedge \delta c \\
&\delta c \wedge w_4 = q^2 w_4 \wedge \delta c + \left(q^2 - q\right) w_3 \wedge \delta a \\
&\delta d \wedge w_1 = q^2 w_1 \wedge \delta d + \left(q^2 - 1\right) w_3 \wedge \delta b \\
&\delta d \wedge w_2 = q w_2 \wedge \delta d + (q-1) w_1 \wedge \delta b + \left(q - q^2\right)\left(q^2 - 1\right) w_1^2 b + \left(q^2 - q\right)(w_2 w_3 - w_1 w_4) b \\
&\delta d \wedge w_3 = q^2 w_3 \wedge \delta d \\
&\delta d \wedge w_4 = q^2 w_4 \wedge \delta d + \left(q^2 - q\right) w_3 \wedge \delta b.
\end{aligned}$$

İspat Yukarıdaki bağıntıları elde etmek için (3.4), (4.7), (4.18) ve (4.28) bağıntılarını birlikte kullanacağız. Aşağıda ilk bağıntının ortaya çıkarılışı açık bir şekilde yapılmaktadır.

$$
\begin{aligned}
\delta a \wedge w_1 &= \delta a\Big((\delta ad - \delta bc)D_q^{-1}(T)\Big) = (\delta a\delta ad - \delta a\delta bc)D_q^{-1}(T) \\
&= (\delta a\delta ad - \delta b\delta ac)D_q^{-1}(T) \\
&= \delta a\Big(qd.\delta a + \left(1-q^2\right)\delta bc\Big)D_q^{-1}(T) - q^2\delta b\left(c\delta a\right)D_q^{-1}(T) \\
&= q\delta ad.\delta aD_q^{-1}(T) - q^2\delta bc.\delta aD_q^{-1}(T) + \left(q^2-q\right)\delta bc\delta aD_q^{-1}(T) \\
&= q^2\delta adD_q^{-1}(T)\delta a - q^2\delta bcD_q^{-1}(T)\delta a \\
&= q^2\{\left(\delta ad - \delta bc\right)D_q^{-1}(T)\}\delta a \\
&= q^2 w_1 \wedge \delta a.
\end{aligned}
$$

Diğer bağıntılar da benzer şekilde elde edilebilir.

Önerme 4.6.3 Eğer $T \in GL_q(2)$ ise *T* nin matris elemanlarının ikinci mertebe diferansiyelleri ile w in matris elemanları aşağıdaki q-komutasyon bağıntılarını sağlar:

$$
\begin{aligned}
&\delta^2 a \wedge w_1 = qw_1 \wedge \delta^2 a \\
&\delta^2 a \wedge w_2 = w_2 \wedge \delta^2 a \\
&\delta^2 a \wedge w_3 = q^2 w_3 \wedge \delta^2 a \\
&\delta^2 a \wedge w_4 = qw_4 \wedge \delta^2 a \\
&\delta^2 b \wedge w_1 = qw_1 \wedge \delta^2 b \\
&\delta^2 b \wedge w_2 = w_2 \wedge \delta^2 b \\
&\delta^2 b \wedge w_3 = q^2 w_3 \wedge \delta^2 b \\
&\delta^2 b \wedge w_4 = qw_4 \wedge \delta^2 b \\
&\delta^2 c \wedge w_1 = q^2 w_1 \wedge \delta^2 c + \left(q^2-q\right)\delta^2 a \wedge w_3 \\
&\delta^2 c \wedge w_2 = qw_2 \wedge \delta^2 c + \left(q-1\right)\left[w_1 - w_4\right] \wedge \delta^2 a \\
&\delta^2 c \wedge w_4 = qw_4 \wedge \delta^2 c + \left(q-1\right)w_3 \wedge \delta^2 a \\
&\delta^2 d \wedge w_1 = qw_1 \wedge \delta^2 d + \left(q-q^2\right)w_3 \wedge \delta^2 b \\
&\delta^2 d \wedge w_2 = qw_2 \wedge \delta^2 d + \left(q-1\right)\left[w_1 - w_4\right] \wedge \delta^2 b \\
&\delta^2 d \wedge w_3 = qw_3 \wedge \delta^2 d \qquad\qquad (4.29) \\
&\delta^2 d \wedge w_4 = qw_4 \wedge \delta^2 d + \left(q-1\right)\delta^2 a \wedge w_3
\end{aligned}
$$

İspat Yukarıdaki bağıntıları elde etmek için (3.4), (4.7), (4.18) ve (4.28) bağıntılarını birlikte kullanacağız. Aşağıda ilk bağıntının ortaya çıkarılışı açık bir şekilde yapılmaktadır.

$$\begin{aligned}\delta^2 a \wedge w_1 &= \delta a\left((\delta ad - \delta bc)D_q^{-1}(T)\right) = (\delta a\delta ad - \delta a\delta bc)D_q^{-1}(T)\\ &= (\delta a\delta ad - \delta b\delta ac)D_q^{-1}(T)\\ &= \delta a\left(qd.\delta a + \left(1-q^2\right)\delta bc\right)D_q^{-1}(T) - q^2\delta b\left(c\delta a\right)D_q^{-1}(T)\\ &= q\delta ad.\delta aD_q^{-1}(T) - q^2\delta bc.\delta aD_q^{-1}(T) + \left(q^2-q\right)\delta bc\delta aD_q^{-1}(T)\\ &= q^2\delta adD_q^{-1}(T)\delta a - q^2\delta bcD_q^{-1}(T)\delta a\\ &= q^2\{\left(\delta ad - \delta bc\right)D_q^{-1}(T)\}\delta a\\ &= q^2 w_1 \wedge \delta a\end{aligned}$$

olup, diğer bağıntılar da benzer şekilde elde edilebilir.

Lemma 4.6.4 w nın matris elemanları arasında aşağıdaki q-komutasyon bağıntıları vardır:

$$\begin{aligned}&w_1 \wedge w_2 = q^2 w_2 \wedge w_1,\\ &w_1 \wedge w_3 = q\, w_3 \wedge w_1,\\ &w_1 \wedge w_4 = w_4 \wedge w_1,\\ &w_2 \wedge w_3 = w_3 \wedge w_2 + \left(q^2-1\right)\left[w_1 - w_4\right]w_1,\\ &w_2 \wedge w_4 = w_4 \wedge w_2 + \left(q-q^2\right)w_2 \wedge w_1,\\ &w_3 \wedge w_4 = w_4 \wedge w_3 + \left(1-q^2\right)w_3 \wedge w_1,\\ &w_1^3 = w_2^3 = w_3^3 = w_4^3 = 0\end{aligned} \tag{4.30}$$

İspat Yukarıdaki bağıntıları elde etmek için (4.7), (4.18) ve (4.29) bağıntılarını birlikte kullanacağız. Aşağıda, üçüncü bağıntının ortaya çıkarılışı açık bir şekilde aşağıdaki şekilde yapılmaktadır.

$$\begin{aligned}w_1 \wedge w_2 &= (\delta ad - \delta bc)D_q^{-1}(T)w_2\\ &= \left(\delta ad\ w_2 - \delta bc\ w_2\right)D_q^{-1}(T)\\ &= \left[q\left(\delta a\right)w_2 d - q\left(\delta b\right)w_2 c\right]D_q^{-1}(T)\\ &= \left[q^2 w_2\left(\delta ad - \delta bc\right)\right]D_q^{-1}(T)\\ &= q^2 w_2 \wedge w_1\end{aligned}$$

olup, diğer bağıntılar da benzer şekilde elde edilebilir.

4.7 Koordinat Fonksiyonları ile Kısmi Türevler Arasındaki Bağıntılar

Bu kısımda, ilk olarak A cebrinin jeneratörleri ile onların kısmi türevleri arasındaki q-komutasyon bağıntılarını elde edeceğiz.

Lemma 4.7.1 Eğer $T \in GL_q(2)$ ise T nin matris elemanları ile onların kısmi türevleri arasında

$$
\begin{aligned}
&\partial_a\, a = 1 + q^2 a\,\partial_a + \left(q^2 - q\right)\mathrm{c}\,\partial_c,\\
&\partial_b\, a = q^2 a\,\partial_b + \left(q^2 - q\right)\mathrm{c}\,\partial_d,\\
&\partial_c\, a = q^2 a\,\partial_c,\\
&\partial_d\, a = q^2 a\,\partial_d,\\
&\partial_a\, b = b\partial_a + \left(1 - q^2\right) d\,\partial_c,\\
&\partial_b\, b = 1 + \left(q^2 - 1\right) a\,\partial_a + q^2 b\partial_b - q\left(q-1\right)^2 \mathrm{c}\,\partial_c + \left(q^2 - q\right)\mathrm{d}\,\partial_d,\\
&\partial_c\, b = b\partial_c\ ,\\
&\partial_d\, b = \left(q^2 - 1\right) a\partial_c + \mathrm{q}^2\, b\partial_d\ ,\\
&\partial_a\, c = qc\partial_a,\\
&\partial_b\, c = q\,c\,\partial_b,\\
&\partial_c\, c = 1 + q^2 c\,\partial_c\ ,\\
&\partial_d\, c = q^2\, c\partial_d,\\
&\partial_a\, d = q^2 d\,\partial_a,\\
&\partial_b\, d = q\,d\,\partial_b + \left(q - q^2\right)\mathrm{c}\,\partial_a,\\
&\partial_c\, d = d\,\partial_c,\\
&\partial_d\, d = 1 + q^2\, d\,\partial_d + \left(q^2 - 1\right) c\,\partial_c
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

şeklindeki q-komutasyon bağıntıları vardır

İspat Yukarıdaki bağıntıları elde etmek için, Kısım 4.1 de tanımladığımız $\boldsymbol{\delta}$ dış diferansiyel operatörünü

$$\boldsymbol{\delta} f = \left(\boldsymbol{\delta} a\,\partial_a + \boldsymbol{\delta} b\,\partial_b + \boldsymbol{\delta} c\,\partial_c + \boldsymbol{\delta} d\,\partial_d\right) f \tag{4.32}$$

şeklinde yazalım. T nin matris elemanlarını bu eşitliğin her iki yanına etki ettirirsek istenilen bağıntıları kolayca elde ederiz. Aşağıda sadece a üreteci kullanılarak $\partial_a\, a$, $\partial_b\, a$, $\partial_c\, a$ ve $\partial_d\, a$ bağıntılarının nasıl çıktığı açıkça ortaya konacaktır. Diğer bağıntılar da benzer şekilde b, c ve d üreteçleri kullanılarak kolayca elde edilebilir. (4.32) nin sol tarafında f yerine $a\,f$ yazarak (4.7) bağıntılarını kullanırsak;

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta}\left(a\,f\right) &= \boldsymbol{\delta} a\, f + a\, \boldsymbol{\delta} f \\
&= \boldsymbol{\delta} a\, f + a\left(\boldsymbol{\delta} a\, \partial_a + \boldsymbol{\delta} b\, \partial_b + \boldsymbol{\delta} c\, \partial_c + \boldsymbol{\delta} d\, \partial_d\right) f \\
&= \left(\boldsymbol{\delta} a + a\boldsymbol{\delta} a\, \partial_a + a\boldsymbol{\delta} b\, \partial_b + a\boldsymbol{\delta} c\, \partial_c + a\boldsymbol{\delta} d\, \partial_d\right) f \\
&= (\boldsymbol{\delta} a + q^2\boldsymbol{\delta} aa\, \partial_a + q^2\boldsymbol{\delta} ba\, \partial_b + q^2\boldsymbol{\delta} ca\, \partial_c + \\
&\quad + (q^2-q)\boldsymbol{\delta} ac\, \partial_c + q^2\boldsymbol{\delta} da\, \partial_d + (q^2-q)\boldsymbol{\delta} bc\, \partial_d) f
\end{aligned} \tag{4.33}$$

buluruz. Şimdi de (4.32) nin sağ tarafında f yerine $a\,f$ yazarsak

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta}\left(a\,f\right) &= \left(\boldsymbol{\delta} a\, \partial_a + \boldsymbol{\delta} b\, \partial_b + \boldsymbol{\delta} c\, \partial_c + \boldsymbol{\delta} d\, \partial_d\right)\left(a\,f\right) \\
&= \left(\boldsymbol{\delta} a\, (\partial_a a) + \boldsymbol{\delta} b (\partial_b a) + \boldsymbol{\delta} c (\partial_c\, a) + \boldsymbol{\delta} d\, (\partial_d a)\right) f
\end{aligned} \tag{4.34}$$

olur. Böylece, (4.32) deki eşitliği gerçekleştirmek için (4.33) ve (4.34) de elde edilen bağıntıları birbirine eşitlersek

$$\begin{aligned}
&\partial_a\, a = 1 + q^2 a\, \partial_a + \left(q^2 - q\right) \mathrm{c}\, \partial_c, \\
&\partial_b\, a = q^2 a\, \partial_b + \left(q^2 - q\right) \mathrm{c}\, \partial_d, \\
&\partial_c\, a = q^2 a\, \partial_c, \\
&\partial_d\, a = q^2 a\, \partial_d,
\end{aligned}$$

elde ederiz ki bu, (4.31) de elde etmek istediğimiz ilk dört bağıntıdır. Diğerleri de benzer şekilde elde edilir.

4.8 Kısmi Türevlerin Kendi Arasındaki Bağıntılar

Bu kısımda, *A* cebirin üreteçlerinin kısmi türevlerinin kendi arasında sağlanan q-komutasyon bağıntıları verilecektir.

Lemma 4.8.1 Eğer $T \in GL_q\left(2\right)$ ise T nin matris elemanlarının kısmi türevleri arasında aşağıdaki gibi q-komutasyon bağıntıları vardır.

$$\begin{aligned}
&\partial_a \partial_b = q^2 \partial_b \partial_a, \\
&\partial_a \partial_c = q^2 \partial_c \partial_a, \\
&\partial_b \partial_c = q^2 \partial_c \partial_b + \left(q^2 - q\right) \partial_d \partial_a, \\
&\partial_a \partial_d = q^2 \partial_d \partial_a \\
&\partial_c \partial_d = q^2 \partial_d \partial_c, \\
&\partial_b \partial_d = q^2 \partial_b \partial_d
\end{aligned} \tag{4.35}$$

İspat İstenilen bağıntıların elde edilişi oldukça uzun olduğundan ayrıntıya girilmeden anlatılacaktır. İlk olarak, (4.32) de tanımladığımız eşitliğin her iki yanına δ dış diferansiyel operatörünü

$$\begin{aligned}
&\delta = \delta a.\partial_a + \delta b.\partial_b + \delta c.\partial_c + \delta d.\partial_d \\
&\delta^2 f = \delta(\delta f) = \delta(\delta a.\partial_a + \delta b.\partial_b + \delta c.\partial_c + \delta d.\partial_d) f \\
&\qquad = \left\{ \delta^2 a.\partial_a + q\delta a.(\delta a.\partial_a + \delta b.\partial_b + \delta c.\partial_c + \delta d.\partial_d)\partial_a + \ldots \right\} f \\
&\delta^3 f = 0 = \delta(\delta^2 f) \\
&\qquad = \delta \left\{ \delta^2 a.\partial_a + q\delta a.(\delta a.\partial_a + \delta b.\partial_b + \delta c.\partial_c + \delta d.\partial_d)\partial_a + \ldots \right\} f \\
&\qquad = \left\{ q^2 \delta^2 a(\delta a.\partial_a + \delta b.\partial_b + \delta c.\partial_c + \delta d.\partial_d)\partial_a + \right. \\
&\qquad\quad + q\delta^2 a(\delta a.\partial_a + \delta b.\partial_b + \delta c.\partial_c + \delta d.\partial_d)\partial_a + q^2 \delta a \delta(\delta a.\partial_a + \\
&\qquad\quad \left. + \delta b.\partial_b + \delta c.\partial_c + \delta d.\partial_d)\partial_a + \ldots \right\} f
\end{aligned}$$

olacak şekilde uyguladığımızda (4.18), (4.27) ve (4.28) bağıntılarından yararlanılarak elde edeceğimiz ifadeyi düzenlersek istenilen (4.35) bağıntılarını elde ederiz.

4.9 Kısmi Türevler ile Birinci Mertebe Diferansiyeller Arasındaki Bağıntılar

Bu kısımda, *A* cebrinin jeneratörlerinin kısmi türevleri ile onların birinci mertebe diferansiyelleri arasında sağlanan komutasyon bağıntılarını gösterelim.

Lemma 4.9.1 Eğer $T \in GL_q(2)$ ise T nin matris elemanlarının kısmi türevleri ile birinci mertebe diferansiyelleri arasında aşağıdaki gibi q-komutasyon bağıntıları vardır.

$$\begin{aligned}
&\partial_a \delta a = q\delta a \partial_a + (q-1)\delta b \partial_b, \\
&\partial_a \delta b = q\delta b \partial_a, \\
&\partial_a \delta c = q\delta c \partial_a + (q-1)\delta d \partial_b, \\
&\partial_a \delta d = q\delta d \partial_a,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\partial_b\,\delta a=\delta a\,\partial_b,\\
&\partial_b\,\delta b=q\delta b\,\partial_b,\\
&\partial_b\,\delta c=\delta c\partial_b\,,\\
&\partial_b\,\delta d=q\delta d\partial_b,\\
&\partial_c\,\delta a=q^2\delta a\partial_c+\left(q^2-q\right)\delta b\,\partial_d,\\
&\partial_c\,\delta b=q^2\delta b\,\partial_c,\\
&\partial_c\,\delta c=\left(q-q^2\right)\delta a\,\partial_a+\left(q-q^2+q-1\right)\delta b\,\partial_b+q\delta c\,\partial_c+\left(q-1\right)\delta d\,\partial_d,\\
&\partial_c\,\delta d=q\delta d\,\partial_c+\left(q-q^2\right)\delta b\,\partial_a,\\
&\partial_d\,\delta a=q\delta a\,\partial_d,\\
&\partial_d\,\delta b=q^2\delta b\,\partial_d,\\
&\partial_d\,\delta c=\delta c\,\partial_d+\left(1-q\right)\delta a\,\partial_b,\\
&\partial_d\,\delta d=\left(q-q^2\right)\delta b\,\partial_b+q\delta d\,\partial_d
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

İspat Yukarıdaki bağıntıları elde etmek için, kuantum grubundaki bir matrisin matris elemanlarının kısmi türevleri ile birinci mertebe diferansiyelleri arasındaki muhtemel bağıntılar;

$$
\begin{aligned}
&\partial_a\,\delta a=B_1\,\delta a\,\partial_a+B_2\,\delta b\,\partial_b+B_3\,\delta c\,\partial_c+B_4\,\delta d\,\partial_d,\\
&\partial_a\,\delta b=B_5\,\delta b\,\partial_a+B_6\,\delta a\,\partial_b+B_7\,\delta d\,\partial_c+B_8\,\delta c\,\partial_d,\\
&\partial_a\,\delta c=B_9\,\delta c\,\partial_a+B_{10}\,\delta a\,\partial_c+B_{11}\,\delta d\,\partial_b+B_{12}\,\delta b\,\partial_d,\\
&\partial_a\,\delta d=B_{13}\,\delta d\,\partial_a+B_{14}\,\delta a\,\partial_d+B_{15}\,\delta b\,\partial_c+B_{16}\,\delta c\,\partial_b,\\
&\partial_b\,\delta a=B_{17}\,\delta a\,\partial_b+B_{18}\,\delta b\,\partial_a+B_{19}\,\delta c\,\partial_d+B_{20}\,\delta d\,\partial_c,\\
&\partial_b\,\delta b=B_{21}\,\delta a\,\partial_a+B_{22}\,\delta b\,\partial_b+B_{23}\,\delta c\,\partial_c+B_{24}\,\delta d\,\partial_d,\\
&\partial_b\,\delta c=B_{25}\,\delta c\,\partial_b+B_{26}\,\delta b\,\partial_c+B_{27}\,\delta a\,\partial_d+B_{28}\,\delta d\,\partial_a,\\
&\partial_b\,\delta d=B_{29}\,\delta d\,\partial_b+B_{30}\,\delta b\,\partial_d+B_{31}\,\delta c\,\partial_a+B_{32}\,\delta a\,\partial_c,\\
&\partial_c\,\delta a=B_{33}\,\delta a\,\partial_c+B_{34}\,\delta c\,\partial_a+B_{35}\,\delta b\,\partial_d+B_{36}\,\delta d\,\partial_b,\\
&\partial_c\,\delta b=B_{37}\,\delta b\,\partial_c+B_{38}\,\delta c\,\partial_b+B_{39}\,\delta a\,\partial_d+B_{40}\,\delta d\,\partial_a,\\
&\partial_c\,\delta c=B_{41}\,\delta a\,\partial_a+B_{42}\,\delta b\,\partial_b+B_{43}\,\delta c\,\partial_c+B_{44}\,\delta d\,\partial_d,\\
&\partial_c\,\delta d=B_{45}\,\delta d\,\partial_c+B_{46}\,\delta c\,\partial_d+B_{47}\,\delta b\,\partial_a+B_{48}\,\delta a\,\partial_b,\\
&\partial_d\,\delta a=B_{49}\,\delta a\,\partial_d+B_{50}\,\delta d\,\partial_a+B_{51}\,\delta b\,\partial_c+B_{52}\,\delta c\,\partial_b,\\
&\partial_d\,\delta b=B_{53}\,\delta b\,\partial_d+B_{54}\,\delta d\,\partial_b+B_{55}\,\delta a\,\partial_c+B_{56}\,\delta c\,\partial_a,\\
&\partial_d\,\delta c=B_{57}\,\delta c\,\partial_d+B_{58}\,\delta d\,\partial_c+B_{59}\,\delta a\,\partial_b+B_{60}\,\delta b\,\partial_a,\\
&\partial_d\,\delta d=B_{61}\,\delta a\,\partial_a+B_{62}\,\delta b\,\partial_b+B_{63}\,\delta c\,\partial_c+B_{64}\,\delta d\,\partial_d
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

şeklinde yazalım. Burada q parametresine bağlı 64 adet sabit bulunmaktadır. Amacımız bu bağıntılarda yer alan $B_i\left(i=1,2,\ldots 64\right)$ katsayılarını bulmaktır. Bunun için, (4.7) deki bağıntılara ∂_a, ∂_b, ∂_c ve ∂_d kısmi türevlerini soldan etki ettirirsek $B_i\left(i=1,2,...64\right)$ katsayılarını buluruz. Aşağıda ilk bağıntı için:

$\boldsymbol{\delta}$ dış diferansiyel operatörü ile (4.35) bağıntılarından faydalanarak

$$\begin{aligned}\partial_a\left(a\boldsymbol{\delta}a-q^2\boldsymbol{\delta}a\,a\right) &= \left(\partial_a a\right)\boldsymbol{\delta}a-q^2\left(\partial_a\boldsymbol{\delta}a\right)a\\ &=\boldsymbol{\delta}a-q^2\left(B_1\boldsymbol{\delta}a\,\partial_a+B_2\boldsymbol{\delta}b\,\partial_b+B_3\boldsymbol{\delta}c\,\partial_c+B_4\boldsymbol{\delta}d\,\partial_d\right)a\\ &=\boldsymbol{\delta}a-q^2B_1\boldsymbol{\delta}a\\ &=\left(1-q^2B_1\right)\boldsymbol{\delta}a\end{aligned}$$

yazarız. Burada, $a\boldsymbol{\delta}a-q^2\boldsymbol{\delta}a\,a=0$ olduğundan, yukarıdaki eşitlikten $1-q^2B_1=0$ veya $B_1=q$ buluruz. Benzer şekilde (4.7) deki altıncı bağıntıdan

$$\begin{aligned}\partial_a\left(b\boldsymbol{\delta}a-\boldsymbol{\delta}a\,b+(1-q^2)\boldsymbol{\delta}ba\right) &= \left(\partial_a b\right)\boldsymbol{\delta}a-\left(\partial_a\boldsymbol{\delta}a\right)b+\left(\partial_a\boldsymbol{\delta}b\right)a\\ &=-\left(B_1\boldsymbol{\delta}a\,\partial_a+B_2\boldsymbol{\delta}b\,\partial_b+B_3\boldsymbol{\delta}c\,\partial_c+B_4\boldsymbol{\delta}d\,\partial_d\right)b+(1-q^2)\left(\partial_a\boldsymbol{\delta}b\right)a\\ &=\left((1-q^2)B_5-B_2\right)\boldsymbol{\delta}b\\ &=0\end{aligned}$$

eşitliğini buluruz ki, buradan $B_2=(1-q^2)B_5$ çıkar.

$$\begin{aligned}\partial_a\left(c\boldsymbol{\delta}a-q\boldsymbol{\delta}a\,c\right) &= \left(\partial_a c\right)\boldsymbol{\delta}a-q\left(\partial_a\boldsymbol{\delta}a\right)c\\ &=-q\left(B_1\boldsymbol{\delta}a\,\partial_a+B_2\boldsymbol{\delta}b\,\partial_b+B_3\boldsymbol{\delta}c\,\partial_c+B_4\boldsymbol{\delta}d\,\partial_d\right)c\\ &=-q\,B_3\boldsymbol{\delta}c\\ &=0\end{aligned}$$

buluruz ki, buradan $B_3=0$ çıkar. (4.37) deki ilk bağıntıda yer alan son katsayıyı bulmak için (4.7) deki on beşinci bağıntıyı kullanıyoruz. Böyle yapınca,

$$\begin{aligned}\partial_a\left(d\boldsymbol{\delta}a-q^2\boldsymbol{\delta}a\,d+(q^2-q)\boldsymbol{\delta}bc\right) &= \left(\partial_a d\right)\boldsymbol{\delta}a-q^2\left(\partial_a\boldsymbol{\delta}a\right)d+(q^2-q)\left(\partial_a\boldsymbol{\delta}b\right)c\\ &=-q^2\left(B_1\boldsymbol{\delta}a\,\partial_a+B_2\boldsymbol{\delta}b\,\partial_b+B_3\boldsymbol{\delta}c\,\partial_c+B_4\boldsymbol{\delta}d\,\partial_d\right)d+\\ &\quad(q^2-q)\left(B_5\boldsymbol{\delta}b\,\partial_a+B_6\boldsymbol{\delta}a\,\partial_b+B_7\boldsymbol{\delta}d\,\partial_c+B_8\boldsymbol{\delta}c\,\partial_d\right)c\\ &=-q^2B_4\boldsymbol{\delta}d+(q^2-q)B_7\boldsymbol{\delta}d=0\end{aligned}$$

eşitliğinden $q^2B_4=(q^2-q)B_7$ elde ederiz.

$$
\begin{aligned}
\partial_a\left(c\delta b-q\delta bc\right)&=\left(\partial_a\ c\right)\delta b-q\left(\partial_a\delta b\right)c\\
&=-q\left(B_5\,\delta b\,\partial_a+B_6\,\delta a\,\partial_b+B_7\,\delta d\,\partial_c+B_8\,\delta c\,\partial_d\right)c\\
&=-qB_7\,\delta d=0
\end{aligned}
$$

Buradan $B_7=B_4=0$ elde edilir.

$$
\begin{aligned}
\partial_a\left(a\delta b-q^2\delta ba\right)&=\left(\partial_a a\right)\delta b-q^2\left(\partial_a\delta b\right)a\\
&=\delta b-q^2\left(B_5\,\delta b\,\partial_a+B_6\,\delta a\,\partial_b+B_7\,\delta d\,\partial_c+B_8\,\delta c\,\partial_d\right)a\\
&=\left(1-q^2B_5\right)\delta b=0
\end{aligned}
$$

eşitliğinden $B_5=q\Rightarrow B_2=\left(q-1\right)$ buluruz. Sonuç olarak, (4.36) daki ilk bağıntı olan $\partial_a\,\delta a=q\delta a\,\partial_a+\left(q-1\right)\delta b\partial_b$ bağıntısını elde etmiş oluruz. Diğer bağıntılarda benzer şekilde elde edilir.

4.10 Kısmi Türevler ile İkinci Mertebeden Diferansiyeller Arasındaki Bağıntılar

Bu kısımda, *A* cebrinin jeneratörlerinin kısmi türevleri ile onların ikinci mertebe diferansiyelleri arasında sağlanan komutasyon bağıntıları verilmiştir. İspatı, Lemma 4.6.1 in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Lemma 4.10.1 Eğer $T\in GL_q\left(2\right)$ ise T nin matris elemanlarının kısmi türevleri ile ikinci mertebe diferansiyelleri arasında aşağıdaki gibi q-komutasyon bağıntıları vardır.

$$
\begin{aligned}
&\partial_a\,\delta^2 a=q\,\delta^2 a\,\partial_a+\left(q-1\right)\delta^2 b\,\partial_b,\\
&\partial_a\,\delta^2 b=q\delta^2 b\,\partial_a\,,\\
&\partial_a\,\delta^2 c=q\,\delta^2 c\,\partial_a\,+\left(q-1\right)\delta^2 d\,\partial_b,\\
&\partial_a\,\delta^2 d=q\,\delta^2 d\,\partial_a,\\
&\partial_b\,\delta^2 a=\delta^2 a\,\partial_b,\\
&\partial_b\,\delta^2 b=q\,\delta^2 b\,\partial_b,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\partial_b\, \boldsymbol{\delta}^2 c = \boldsymbol{\delta}^2 c\, \partial_b, \\
&\partial_b\, \boldsymbol{\delta}^2 d = q\, \boldsymbol{\delta}^2 d\, \partial_b, \\
&\partial_c\, \boldsymbol{\delta}^2 a = q^2 \boldsymbol{\delta}^2 a\, \partial_c + C_{35}\, \boldsymbol{\delta}^2 b\, \partial_d\,, \\
&\partial_c\, \boldsymbol{\delta}^2 b = q^2\, \boldsymbol{\delta}^2 b\, \partial_c\,, \\
&\partial_c\, \boldsymbol{\delta}^2 c = \left(q - q^2\right) \boldsymbol{\delta}^2 a\, \partial_a + q\, \boldsymbol{\delta}^2 b\, \partial_b + q\, \boldsymbol{\delta}^2 c\, \partial_c + \left(q-1\right) \boldsymbol{\delta}^2 d\, \partial_d\,, \\
&\partial_c\, \boldsymbol{\delta}^2 d = q\, \boldsymbol{\delta}^2 d\, \partial_c + \left(q - q^2\right) \boldsymbol{\delta}^2 b\, \partial_a\,, \\
&\partial_d\, \boldsymbol{\delta}^2 a = q\, \boldsymbol{\delta}^2 a\, \partial_d\,, \\
&\partial_d\, \boldsymbol{\delta}^2 b = q^2\, \boldsymbol{\delta}^2 b\, \partial_d\,, \\
&\partial_d\, \boldsymbol{\delta}^2 c = \boldsymbol{\delta}^2 c\, \partial_d + \left(1-q\right) \boldsymbol{\delta}^2 a\, \partial_b\,, \\
&\partial_d\, \boldsymbol{\delta}^2 d = \left(q - q^2\right) \boldsymbol{\delta}^2 c\, \partial_c + q\, \boldsymbol{\delta}^2 d\, \partial_d\,.
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

BÖLÜM 5

Z_3-DERECELİ KUANTUM LIE CEBİRİ

Bu bölümde, Lie cebiri üreteçlerinin Z_3- dereceli kuantum Lie cebrini elde edeceğiz. Cartan-Maurer formlarının komutasyon bağıntıları üreteçlerin cebirsel yapısını bildirir. Lie cebiri üreteçlerinin Z_3- dereceli kuantum Lie cebrini elde etmek için ilk önce Cartan-Maurer formlarını aşağıdaki gibi yazalım:

$$\begin{aligned} \delta a &= w_1 a + w_2 c, \qquad & \delta b &= w_1 b + w_2 d, \\ \delta c &= w_3 a + w_4 c, \qquad & \delta d &= w_3 b + w_4 d \end{aligned} \tag{5.1}$$

Öyleyse δ diferansiyeli $T_k \, (k = 1,..,4)$ vektör alanları ile

$$\delta f = (w_1 T_1 + w_2 T_2 + w_3 T_3 + w_4 T_4) f \tag{5.2}$$

şeklinde açıklanabilir. Bu vektör alanlarının komutasyon bağıntılarını elde edebiliriz.

5.1 Lie Cebir Jeneratörleri ile Koordinat Fonksiyonları Arasındaki Bağıntılar

Bu kısımda, $GL_q(2)$'nin Lie cebir üreteçleriyle A cebrinin üreteçleri (jeneratörleri) arasında sağlanan q- komutasyon bağıntıları verilmiştir.

Lemma 5.1.1 Eğer $T \in GL_q(2)$ ise $GL_q(2)$ nin Lie cebir jeneratörleriyle T nin matris elemanları arasında sağlanan q-komutasyon bağıntıları aşağıda verilmiştir.

$$
\begin{aligned}
&T_1\, a = a + q^2\, a T_1 + \left(1 - q^2\right) c\, T_3,\\
&T_1\, b = b + q^2\, b T_1 + \left(1 - q^2\right) d\, T_3,\\
&T_1\, c = q^2 c\, T_1,\\
&T_1\, d = q^2 d\, T_1\ ,\\
&T_2\, a = c + q^2 a T_2 + \left(q^2 - 1\right) c\, T_1 + \left(q^2 - q\right) c\, T_4,\\
&T_2\, b = d\ + q^2 b T_2 + \left(q^2 - 1\right) d\, T_1 + \left(q^2 - q\right) d\, T_4,\\
&T_2\, c = q\ c\, T_2,\\
&T_2\, d\ = q\, d\, T_2,\\
&T_3\, a = q^2 a\, T_3,\\
&T_3\, b = q^2 b\, T_3,\\
&T_3\, c = a + c\, T_3\ ,\\
&T_3\, d = b +\ d\, T_3\ ,\\
&T_4\, a = q^2 a\, T_4 + \left(q^2 - 1\right) c\, T_3,\\
&T_4\, b = q^2\, b\, T_4 + \left(q^2 - 1\right) d\, T_3,\\
&T_4\, c = c + q^2\, c\, T_4,\\
&T_4\, d = d + q^2\, d\, T_4
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

İspat Yukarıdaki bağıntıları elde etmek için (4.3), (4.31) ve (4.38) bağıntılarından yararlanacağız. Aşağıda, birinci bağıntı elde edilmektedir.

$$
\begin{aligned}
T_1\, a &= \left(a\partial_a + b\partial_b\right) a\\
&= a\left(\partial_a\, a\right) + b\left(\partial_b\, a\right)\\
&= a\left\{1 + q^2 a\,\partial_a + \left(q^2 - q\right) \mathrm{c}\,\partial_c\right\} + b\left\{q^2 a\,\partial_b + \left(q^2 - q\right) \mathrm{c}\,\partial_d\right\}\\
&= a + q^2\, a^2\, \partial_a + q^2 ab\,\partial_b + \left(q^2 - q\right) a\, c\,\partial_c + \left(q^2 - q\right) b\, c\,\partial_d\\
&= a + q^2\, a\left(a\,\partial_a + b\,\partial_b\ \right) + \left(q^2 - q\right) qc\left\{\ a\,\partial_c + b\,\partial_d\right\}\\
&= a + q^2\, a T_1 + \left(1 - q^2\right) c T_3
\end{aligned}
$$

Diğer bağıntılar da benzer şekilde elde edilebilir.

Önerme 5.1.2 $GL_q\left(2\right)$ nin Lie cebir jeneratörlerinin kendi aralarında aşağıdaki gibi q -komutasyon bağıntıları vardır.

$$
\begin{aligned}
&[T_1,T_2]=(1-q)T_2T_4-T_2,\\
&[T_1,T_3]=\left(1-q^2\right)T_3T_4+q^2T_3,\\
&[T_1,T_4]=0,\\
&[T_2,T_3]=(1-q)T_1T_4+T_4-T_1,\\
&[T_2,T_4]=-q^2T_2-\left(q^2-1\right)T_4T_2,\\
&[T_3,T_4]=T_3+(q-1)T_4T_3
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

İspat Yukarıdaki bağıntıları elde etmek için (5.4) deki ikinci bağıntının elde edilişi verilecek olup diğer bağıntılar da benzer şekilde elde edilebilecektir. İkinci bağıntı için (4.38) deki birinci ve üçüncü bağıntıyı, (4.31) bağıntılarını da kullanarak düzenlersek

$$
\begin{aligned}
T_1T_3&=\left(a\partial_a+b\partial_b\right)\left(a\partial_c+b\partial_d\right)\\
&=a\left(\partial_a a\right)\partial_c+a\left(\partial_a b\right)\partial_d+b\left(\partial_b a\right)\partial_c+b\left(\partial_b b\right)\partial_d\\
&=a\Big(1+q^2a\partial_a+\left(q^2-q\right)\mathrm{c}\partial_c\Big)\partial_c+a\Big(b\partial_a+\left(1-q^2\right)d\,\partial_c\Big)\partial_d\\
&\quad+b\Big(q^2a\partial_b+\left(q^2-q\right)\mathrm{c}\partial_d\Big)\partial_c+b\Big(1+\left(q^2-1\right)a\partial_a+q^2b\partial_b)\Big)\partial_d\\
&\quad\Big(-q(q-1)^2\,\mathrm{c}\partial_c+\left(q^2-q\right)\mathrm{d}\Big)\partial_d
\end{aligned}
$$

burada, (4.35) bağıntılarını da kullanarak düzenlemeye devam edersek

$$
\begin{aligned}
T_1T_3&=a\partial_c+b\partial_d+q^2aa\partial_c\partial_a+\left(1-q^2\right)ca\partial_c\partial_c+\left(q^2-q\right)ad\partial_d\partial_c\\
&\quad+\left(q^2-q\right)(1-q)cb\partial_d\partial_c+\left(1-q^2\right)cb\partial_d\partial_c+q^2ab\partial_d\partial_a\\
&\quad+q^2ab\partial_c\partial_b+q^2bb\partial_d\partial_b+\left(1-q^2\right)db\partial_d\partial_d\\
&=T_3+a\partial_c\left\{a\partial_a+b\partial_b+\left(1-q^2\right)\left(c\partial_c+d\partial_d\right)+q^2-1\right\}\\
&\quad+b\partial_d\left\{a\partial_a+b\partial_b+\left(1-q^2\right)\left(c\partial_c+d\partial_d\right)+q^2-1\right\}
\end{aligned}
$$

Bu eşitliği (4.31) ve (4.35) bağıntılarıyla tekrar düzenlersek;

$$
\begin{aligned}
T_1T_3&=a\partial_c\left\{T_1+\left(1-q^2\right)T_4+q^2-1\right\}+b\partial_d\left\{T_1+\left(1-q^2\right)T_4+q^2-1\right\}\\
&=\left(a\partial_c+b\partial_d\right)\left\{T_1+\left(1-q^2\right)T_4+q^2-1\right\}\\
&=T_3\left\{T_1+\left(1-q^2\right)T_4+q^2-1\right\}
\end{aligned}
$$

Bu ifadeden gerekli düzenlemeler yapıldığı takdirde

$$
[T_1,T_3]=T_1T_3-T_3T_1\;=\left(1-q^2\right)T_3T_4+q^2T_3
$$

Böylece istenilen ikinci bağıntı ortaya çıkar ve diğer bağıntılar da benzer şekilde elde edilebilir.

5.2 Lie Cebir Jeneratörlerinin Kendi Arasındaki Bağıntılar

Bu alt bölümde, deforme kuantum cebrini aşağıdaki Lemma ile elde edeceğiz.

Önerme 5.2.1 $GL_q(2)$ nin Lie cebir jeneratörleri aşağıdaki bağıntıları sağlayarak,

$$\begin{aligned}
&[T_1,[T_2,T_3]]+[T_2,[T_3,T_1]]+[T_3,[T_1,T_2]]=0\\
&[T_1,[T_2,T_4]]+[T_2,[T_4,T_1]]+[T_4,[T_1,T_2]]=0\\
&[T_1,[T_3,T_4]]+[T_3,[T_4,T_1]]+[T_4,[T_1,T_3]]=0\\
&[T_2,[T_3,T_4]]+[T_3,[T_4,T_2]]+[T_4,[T_2,T_3]]=0
\end{aligned} \tag{5.5}$$

bir kuantum Lie cebrini oluşturur.

İspat $GL_q(2)$ nin Lie cebir jeneratörlerinin kendi aralarında sağlanan q-komutasyon bağıntılarını kullanarak, (5.5) deki üçüncü bağıntının elde edilişi verilecektir. Diğer bağıntılar da benzer şekilde elde edilebilir. Bunun için (5.4) den,

$$\begin{aligned}
[T_1,[T_3,T_4]]+[T_3,[T_4,T_1]]+[T_4,[T_1,T_3]] &= [T_1,\ T_3+(q-1)T_4T_3]+[T_3,0]\\
&\quad+[T_4,(1-q^2)T_3T_4+q^2T_3]\\
&=[T_1,T_3]+(q-1)[T_1,T_4]T_3\\
&\quad+(q-1)T_4[T_1,T_3]+(1-q^2)[T_4,T_3]T_4\\
&\quad+(1-q^2)T_3[T_4,T_4]+q^2[T_4,T_3]
\end{aligned}$$

Bu eşitlik $[T_4,T_4]=0$ ve $[T_1,T_4]=0$ bağıntılarıyla tekrar düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
[T_1,[T_3,T_4]]+[T_3,[T_4,T_1]]+[T_4,[T_1,T_3]] &= (1-q^2)T_3T_4+q^2T_3\\
&\quad+(1-q^2)(q-1)T_4T_3T_4+(1-q^2)T_4T_3+\\
&\quad(q^2-1)T_3T_4-q^2T_3+(q^2-1)T_4T_3\\
&\quad(q^2-1)(q-1)T_4T_3T_4\\
&=0
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer bağıntılar da benzer şekilde elde edilebilir.

Not Burada, (5.1) de verilen diferansiyel formları (5.2) de kullanırsak

$$
\begin{aligned}
\delta f &= \left(\delta a\,\partial_a + \delta b\,\partial_b + \delta c\,\partial_c + \delta d\,\partial_d\right) f \\
&= \left[\left(w_1\,a + w_2\,\mathrm{c}\right)\partial_a + \left(w_1\,b + w_2 d\right)\partial_b + \left(w_3\,a + w_4 c\right)\partial_c + \left(w_3\,b + w_4 d\right)\partial_d\right] f \\
&= w_1\left(a\partial_a + b\partial_b\right) f + w_2\left(c\partial_a + d\,\partial_b\right) f + w_3\left(a\partial_c + b\partial_d\right) f + w_4\left(c\partial_c + d\partial_d\right) f
\end{aligned}
$$

olacaktır. Bu, (5.2) de verilen ifadeye eşitlendiğinde, yani

$$
\begin{aligned}
\delta f &= w_1\left(a\partial_a + b\partial_b\right) f + w_2\left(c\partial_a + d\,\partial_b\right) f + w_3\left(a\partial_c + b\partial_d\right) f + w_4\left(c\partial_c + d\partial_d\right) f \\
&= \left(w_1\,T_1 + w_2\,T_2 + w_3 T_3 + w_4 T_4\right) f
\end{aligned}
$$

yazıldığında, Lie cebrinin jeneratörleri olan T_1, T_2, T_3 ve T_4 için

$$
T_1 = a\partial_a + b\partial_b,\quad T_2 = c\partial_a + d\,\partial_b,\quad T_3 = a\partial_c + b\partial_d,\quad T_4 = c\partial_c + d\partial_d
$$

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Z_3-Dereceli kuantum düzlem kullanılarak, yeni bir kuantum grup olarak, Z_3-dereceli $GL_q(2,C)$ kuantum grubu elde edilmiş ve bu kuantum grup üzerine bir Z_3-dereceli sol- ve sağ- kovaryant diferansiyel hesap oluşturulmuştur. Daha sonra, bu kuantum grubun Z_3-dereceli kuantum Lie cebri bulunmuştur.

KAYNAKLAR

[1] Manin, Y. I., (1988). Quantum Groups and Noncommutative Geometry, Montreal Univ. Preprint, Centre De Recherches Mathematiques, Canada.

[2] Woronowicz, S. L., (1987). “Compact Matrix Pseudogroups”, Comm. Math. Phys., 111: 613–665.

[3] Celik, S., (2002). “ Z_3-Graded Differential Geometry of the Quantum Plane”, J. Phys. A. Math. Gen., 35: 6307-6318.

[4] Abe, E., (1980). Hopf algebras, Cambridge University Press, 284, New York.

[5] Drinfeld, V. G., (1986). “Quantum groups”, Amer. Math. Soc., 798–820.

[6] Connes, A., (1985). “Noncommutative differential geometry”, Publ. Math. IHES, 62: 257-360.

[7] Woronowicz, S. L., (1989). “Differential calculus on compact matrix pseudogroups”, Comm. Math. Phys., 122: 125-170.

[8] Wess, J. and Zumino, B., (1990). “Covariant Differential Calculus on the Quantum Hyperplane”, Nucl. Phys., 18: 302-312.

[9] Schirrmacher, A., Wess, J. and Zumino, B., (1991). ‘’The Two Parameter Deformation of $GL(2)$ its Differential Calculus and Lie Algebra’’, Zeitschrift für Physik C Particles and Fields, 49: 317-324.

[10] Muller-Hoissen, F., (1992). “Differential Calculi on the Quantum Group $GL_{p,q}(2)$ ’’, Journal of Physics A: Mathematical and General, 25: 625-1703.

[11] Aschieri, P. ve Castellani, L., (1992). “Bicovariant Differential Geometry of the Quantum Group $GL_q(3)$ ’’, Phys. Lett. B., 293: 299-308.

[12] Schupp, P., Watts, P. ve Zumino, B., (1992). “Differential Geometry on Linear Quantum Groups’’, Lett. Math. Phys., 25: 139-148.

[13] Muller-Hoissen, F. ve Reuten, C., (1993). “Bicovariant Differential Calculi

on $GL_{p,q}(2)$ and Quantum Subgroups'', J. Phys. A: Math. Gen., 26: 2955.

[14] Brzezinski, T., (1993). "Remarks on Bicovariant Differential Calculi and Exterior Hopf Algebras'', Lett. Math. Phys., 27: 287-300.

[15] Aschieri, P. ve Castellani, L., (1993). "An Introduction to Noncommutative Differential Geometry on Quantum Groups'', Int. J. Mod. Phys. A8: 1667-1706.

[16] Schmudgen, K. ve Schuler, A., (1994). "Classication of Bicovariant Differential Calculi on Quantum Groups of Type A, B, C and D'', Comm. Math. Phys., 167: 635–670.

[17] Schmudgen, K., (1994). "Classification of Bicovariant Differential Calculi on Quantum General Linear Groups'', LEIPZIG, 12: 6-94.

[18] Soni, S., (1990). "Differential Calculus on the Quantum Superplane'', Journal of Physics A: Mathematical and General, 24: 619-624.

[19] Celik, S., (1998). "Differential Geometry of the *q*-Superplane'', Journal of Physics A: Mathematical and General, 31: 9695-9701.

[20] Celik, S., (2006). "Cartan Calculi on the Quantum Superplane'', Journal of Physics A: Mathematical and General, 47: 10-38.

[21] Dubois-Violette, M., (1996). "Generalized Differential Spaces with $D^N = 0$ and the *q*-Differential Calculus'', Czechoslovak Journal of Physics, 46: 1227-1233.

[22] Kerner, R. ve Abramov, V., (1999). "On Certain Realizations of the *q*-Deformed Exterior Differential Calculus'', Reports on Mathematical Physics, 43: 179-194.

[23] Celik, S., (2002). "Differential Geometry of Z_3-Graded Quantum Super-plane'', Journal of Physics A: Mathematical and General,, 35: 4257-4268.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Fatma BULUT

Doğum Tarihi ve Yeri : 09.09.1985 - ELAZIĞ

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : fbulut@yildiz.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Fırat Üniversitesi	2010
Lisans	Matematik	Fırat Üniversitesi	2008
Lise	Sayısal	Elazığ Balakgazi Lisesi	2004

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2011 - Devam Ediyor	Yıldız Teknik üniversitesi Matematik Bölümü	Araştırma Görevlisi
2010 - 2011	Bitlis Eren üniversitesi Matematik Bölümü	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

Makale

1. Celik, S. ve Bulut, F., (2015). “A Differential Calculus on the Z_3-graded Quantum Group $GL_q(2)$”, Advances in Applied Clifford Algebras, (baskıda).

Bildiri

1. Bulut, F., (2015). “Maurer-Cartan One forms on Z_3-Graded Quantum Group $GL_q(2)$”, The 14th International Conference on Mathematics and its Applications (ICMA) Congress, 4-8 Kasım 2015, Timisoara.

2. Bulut, F., (2015). “Z_3-Graded Quantum Group $GL_q(2)$”, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM) Congress, 8-12 Haziran 2015, İstanbul.