T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SABİT NOKTA YAKLAŞIMLARIYLA BAZI DİFERANSİYEL VE İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

YUNUS ATALAN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
PROF. DR. VATAN KARAKAYA

İSTANBUL, 2017

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SABİT NOKTA YAKLAŞIMLARIYLA BAZI DİFERANSİYEL VE İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

Yunus ATALAN tarafından hazırlanan tez çalışması 25.04.2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Yıldız Teknik Üniversitesi ______________________

Prof. Dr. Hamdullah ŞEVLİ

İstanbul Ticaret Üniversitesi ______________________

Doç. Dr. Necip ŞİMŞEK

İstanbul Ticaret Üniversitesi ______________________

Doç. Dr. Murat SARI

Yıldız Teknik Üniversitesi ______________________

Doç. Dr. Bayram Ali ERSOY

Yıldız Teknik Üniversitesi ______________________

Bu çalışma, Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü’ nün BAPK 2016-07-03-DOP02 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Doktora eğitimim boyunca desteğini ve anlayışını benden esirgemeyen, birlikte çalışmaktan onur duyduğum değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Vatan KARAKAYA'ya, tez izleme komitesinde bulunan Sayın Doç. Dr. Necip ŞİMŞEK ve Sayın Doç. Dr. Bayram Ali ERSOY hocalarıma en kalbi duygularımla teşekkür ederim. Tez savunma sınavı jüri üyeliğini kabul ederek beni onurlandıran Sayın Prof. Dr. Hamdullah ŞEVLİ ve Sayın Doç. Dr. Murat SARI hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Doktora eğitimim boyunca beni maddi olarak destekleyen YTÜ Bilimsel Araştırmalar Proje Koordinatörlüğü'ne teşekkür ederim.

Desteğini her an yanımda hissettiğim değerli abim Prof. Dr. Ekrem ATALAN'a, çalışmalarım boyunca anlayış ve destekleriyle yanımda olan aileme, ayrıca sevgili eşim Hatice ATALAN'a, kızlarım Nisanur ATALAN ile Esma Zühre ATALAN'a ve çalışma arkadaşlarıma en içten duygularımla teşekkür ederim.

Nisan, 2017

Yunus ATALAN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
K	Cisim ($\mathrm{K} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$)
F_T	T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
$cardF_T$	F_T nin eleman sayısı
$T : X \to Y$	X kümesinden Y kümesine tanımlı T dönüşümü
$B(x;r)$	x merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar
$\overline{B}(x;r)$	x merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar
$(X,\Vert\cdot\Vert)$	X Normlu uzayı
(X,d)	X Metrik uzayı
$\Vert\cdot\Vert : X \to \mathrm{F}$	X üzerinde tanımlı norm fonksiyonu
$d : X \times X \to \mathbb{R}^+$	X üzerinde tanımlı uzaklık fonksiyonu
$C^1(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$ ’de sürekli türeve sahip fonksiyonların uzayı
$L_2(0,1)$	$(0,1)$ kümesinde Lebesque integrallenebilir fonksiyonların uzayı
$C(\mathbb{R}_+^2, B)$	$\mathbb{R}_+^2$ uzayından B Banach uzayına sürekli fonksiyonların uzayı
$C(\mathbb{R}_+^2 \times B, B)$	$\mathbb{R}_+^2 \times B$ uzayından B Banach uzayına sürekli fonksiyonların uzayı
$C(\mathbb{R}_+^4 \times B, B)$	$\mathbb{R}_+^4 \times B$ uzayından B Banach uzayına sürekli fonksiyonların uzayı

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

ÖZET

SABİT NOKTA YAKLAŞIMLARIYLA BAZI DİFERANSİYEL VE İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

Yunus ATALAN

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Bu tez çalışmasında literatürde var olan iterasyon yöntemi ile yeni tanımlanan ancak mevcut iterasyonlardan daha hızlı olduğu gösterilen iterasyon yönteminin diferansiyel ve integral denklemlere uygulanması problemleri üzerinde çalışılmıştır.

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde literatür özeti, tezin amacı ve hipotez verilmiştir.

İkinci bölümde tezin tamamında kullanılacak olan temel kavramlar, tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde ilk olarak yeni tanımlanan iterasyon yöntemi için kuvvetli yakınsaklık, yakınsamanın denkliği, yakınsaklık hızı ve veri bağlılığı sonuçları elde edilmiştir. Daha sonra bu sonuçlar S* iterasyon yöntemi için de ispatlanmış olup, bu iterasyondan elde edilen dizinin gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümüne kuvvetli yakınsadığı ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümde yeni tanımlanan iterasyon yöntemi kullanılarak fonksiyonel Volterra-Fredholm integral denklemi için kuvvetli yakınsaklık ve çözümün veri bağlı olduğu sonuçları elde edilmiştir. Ayrıca mixed type Volterra-Fredholm integral denklemi için de aynı sonuçların elde edilebileceği gösterilmiştir.

Beşinci bölümde lineer olmayan Volterra-Fredholm integrodiferansiyel denklem tipi için Hyers-Ulam kararlılık ve Hyers-Ulam Rassias kararlılık sonuçları elde edilmiştir.

Altıncı bölümde ise bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar özetle verilmiş ve bundan sonra yapılabilecek olası çalışmalar ifade edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sabit nokta teori, yeni iterasyon metodu, kuvvetli yakınsaklık, yakınsamanın denkliği, yakınsaklık hızı, veri bağlılığı, integral denklemler ve diferansiyel denklemler, Hyers-Ulam kararlılığı, Hyers-Ulam Rassias kararlılığı.

ABSTRACT

SOLUTIONS OF SOME DIFFERENTIAL AND INTEGRAL EQUATIONS WITH FIXED POINT APPROACH

Yunus ATALAN

Department of Mathematics

Ph.D. Thesis

Advisor: Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

In this thesis, it has been studied on the problems of application of the iteration methods which are in the literature and newly defined but has been shown to be faster than the existing iterations to the differential and integral equations.

This thesis consist of six sections.

In the first section, the review of literature, the aim of the thesis and hypothesis are given.

In the second section, the basic concepts, definitions and theorems which will be used throughout the thesis are presented.

In the third section, firstly the results of strong convergence, equivalency of convergence, rate of convergence and data dependence are obtained for the new iteration method. After that these results are obtained for S* iteration method and it has been proved that the sequence which is obtained this iteration method strongly converges to the solution of delay differential equation.

In the fourth section, the results of strong convergence and data dependence of solution are obtained for functional Volterra-Fredholm integral equation by using new iteration method. Also it has been shown that the same results can be obtained for mixed type Volterra-Fredholm integral equation.

In the fifth section, the Hyers-Ulam stability and Hyers-Ulam Rassias stability results are obtained for the nonlinear Volterra-Fredholm integrodifferential equation.

In the last section, the results obtained in this thesis are summarized and possible studies that can be done in the future are stated.

Key words: Fixed point theory, new iteration method, strong convergence, equivalence of convergence, rate of convergence, data dependence, integral equations and differential equations, Hyers-Ulam stability, Hyers-Ulam Rassias stability.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

“*Doğanın muazzam kitabının dili matematiktir*.”

Galileo

Tarih boyunca bilimsel bilginin gerçek hayatta ortaya çıkışı Fizik, Kimya, Biyoloji, Tıp, Ekonomi, Bilgisayar gibi değişik isimlerle adlandırılmıştır. Bu isimler altında her bir saha kendi içerisinde ya da birinin diğerleriyle olan ilişkileri sonucunda uygulamaya dönük soyut ya da pratik birçok problem içermektedir. Bu tür problemlerin matematiksel modelleri ya bir denklem çeşidi ya da bir denklem sistemi olmaktadır. Elde edilen denklem sistemlerinin çözümü için kullanılabilecek metotlar diferansiyel-integral denklemler ya da operatör-fonksiyonel denklemler olarak sıralanabilir. Bu nedenle Galileo’nun yukarıda alıntıladığımız sözü, matematiğin günlük hayattaki yerini bizlere bir kez daha hatırlatmaktadır.

Genel anlamda integral denklemler, diferansiyel denklemler, kısmi diferansiyel denklemler, dinamik programlama, diferansiyel içermeler, sistem analizi ve fraktal modellemeye ait birçok problemin çözümünün varlığına dair araştırmalarda sabit nokta teorisi kullanışlı bir yöntem olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu teori ayrıca yaklaşım teorisinde, oyun teorisinde, matematiksel ekonomiler ve uygulamalı bilimlerde karşılaşılan problemlere de uygulanabilir [1-13].

Tarihsel gelişim içerisinde gerçek hayat probleminin matematiksel modellemesi ilk olarak Isaac Newton’un “mekanik kanunlarıyla gezegenlerin hareketlerini modelleme” fikriyle başlamıştır [14]. Newton ve Leibniz'in eş zamanlı olarak buldukları diferansiyel hesapta, dinamik sistemler için Euler denklemi, hareket için Lagrange denklemi, ısı difüzyon için Fourier denklemi, viskozite ve sıvıların hareketi için Navier–Stokes denklemi, elektromanyetik alan için Maxwell denklemi ve kuantum mekanik için Schrodinger ve Dirac denklemi diferansiyel denklemler yardımıyla çözülmüş ve böylece birçok bilimsel ve teknolojik gelişmenin önü açılmıştır. Diferansiyel hesabın bu şekilde hızlı gelişimiyle birlikte birçok denklem kapalı formda çözülebiliyordu. Ancak bazı denklemler için önemli olan başlangıç ve sınır değerleriyle birlikte probleme ait nitel ve nicel ayrıntılar Picard [15]'ın diferansiyel denklemlerin çözümleri için geliştirdiği ardışık yaklaşım (iterasyon) yöntemini uygulaması ile belirgin hale gelmiştir. Çözülmek istenen integral veya diferansiyel denklemlerde kullanılan iterasyon yöntemi ile elde edilen dizinin limiti denklemin çözümünü verir. Bu nedenle iterasyon yöntemleri, çözümleri f fonksiyonunun sabit noktaları olan $f(x)=x$ tipindeki birkaç denklemden aşamalı olarak geliştirilir.

Ancak temel diferansiyel ve integral denklemlerin kapsamı dışındaki uygulamaların soyut bir çerçeve içine yerleştirilmesinde en büyük pay Stefan Banach'a aittir. Banach [16]'ın doktora tezinde ortaya koyduğu ve Banach Contraction Prensibi (BCP) olarak adlandırılan teorem, Hilbert uzaylarından metrik uzaylara kadar birçok uzayda herhangi bir dönüşümün sabit noktasının varlığının araştırılmasına dair çalışmalara yeni bir yön kazandırmıştır. Farklı türde diferansiyel ve integral denklemi çözmekte oldukça kullanışlı olan BCP, lineer olmayan problemlerin çözümünde de etkin bir araç olarak kullanılmaktadır. Geniş bir uygulanabilirliğe sahip olmasının yanında, araştırmacılar dönüşüm üzerine yeni şartlar koyarak ya da çalışılan uzayı değiştirerek BCP'yi genelleştirmiştir [17-32].

İterasyon yöntemleri bilimde geniş uygulama alanlarına sahip olduklarından birçok araştırmacının ilgisini çekmiş ve Picard ile başlayan süreçle birlikte, geniş bir çalışma sahası olarak günümüze kadar gelmiştir. Bu süreçte çok sayıda iterasyon yöntemi geliştirilerek belirli dönüşüm sınıfları için bu yöntemlerin kuvvetli yakınsaklığı (norm yakınsama), yakınsaklığının denkliği, yakınsaklık hızı ve bu dönüşümlerin sabit noktalarının veri bağlı olup olmadığı araştırılmıştır.

Picard iterasyonu nonexpansive dönüşüm altında sabit noktaya yakınsamadığından yeni iterasyon yöntemleri geliştirme ihtiyacı doğmuştur. Krasnoselskii tanımladığı iterasyon yöntemi ile bu problemi aşmıştır. Chidume ve Mutangadura [33], Mann iterasyonunun pseudo-contractive dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsamadığını, ancak Ishikawa iterasyonunun bir Lipschitzian pseudo-contractive dönüşümün sabit noktasına yakınsadığını göstermiştir. Bu durum Rhoades ve Şoltuz [34]-[35] tarafından bir problem olarak şu şekilde ifade edilmiştir:

"Belirli bir dönüşüm sınıfı için, Mann iterasyon yöntemi bu dönüşümlerin sabit noktalarına yakınsak iken Ishikawa iterasyon yöntemi de yakınsak mıdır? Veya Ishikawa iterasyon yöntemi yakınsak iken Mann iterasyon yöntemi de yakınsak mıdır?"

Bu problemden hareketle birçok araştırmacı tarafından çeşitli dönüşüm sınıfları için iterasyon yöntemlerinin yakınsaklıklarının denkliği çalışılmış ve bu anlamda geniş bir literatür oluşturulmuştur [36-42].

Yakınsaklıkları denk olan iki iterasyon yöntemi için hangi yöntemin daha hızlı yakınsadığı bilgisi uygulamalı matematikte büyük önem taşımaktadır. Bu bağlamda Rhoades [43] artan ve azalan fonksiyonlar için Mann ve Ishikawa iterasyon yöntemlerinin yakınsama hızlarının farkını, bilgisayar programlarını kullanarak örnekler üzerinden göstermiştir. Berinde [44], Picard iterasyonunun quasi-contractive operatörlerin sabit noktasına Mann iterasyonundan daha hızlı yakınsadığını ispatlamıştır. Hüseyin vd. [45], Agarwal S iterasyon yönteminin quasi-contractive operatörlerin sabit noktasına Mann ve Ishikawa iterasyonlarından daha hızlı yakınsadığını göstermiştir. Phuengrattana ve Suantai [46], SP iterasyon yönteminin azalmayan ve sürekli fonksiyonlar için Mann, Ishikawa ve Noor iterasyonlarından daha hızlı olduğunu ispatlamıştır. Ayrıca Rana vd. [47], kompleks uzayda Picard iterasyonunun Mann ve Ishikawa iterasyonlarından, Ishikawa iterasyonunun ise Mann iterasyonundan daha hızlı yakınsadığını göstermiştir.

Bir iterasyon inşa edilirken kullanılan dönüşüme yakın olan ve yaklaşım operatörü adı verilen başka bir dönüşüm kullanılabilir. Bu yaklaşım operatörünün farklı bir sabit noktaya sahip olduğundan hareketle, dönüşümün sabit noktası ile yaklaşım operatörünün sabit noktasının birbirlerine ne kadar yakın olduğu ve aralarındaki mesafenin nasıl hesaplanacağı soruları, sabit noktaların veri bağlılığı kavramını karşımıza çıkarmaktadır.

Literatürde sabit noktaların veri bağlılığı konusu ile ilgili çok sayıda çalışma mevcut olmakla birlikte, yoğun olarak metrik uzaylarda Picard iterasyonu için Berinde [48], Chifu ve Petruşel [49], Espínola ve Petruşel [50], Markin [51], Rus ve Muresan [52], Rus vd. [53] tarafından çalışılmıştır. Son zamanlarda normlu lineer uzaylarda ve Banach uzaylarında diğer iterasyon yöntemleri için çalışılmaya başlanan bu konuya katkıda bulunan bazı yazarlar, Chugh ve Kumar [54]-[55], Karakaya vd. [56], Olatinwo [57]-[58], Şoltuz ve Grosan [59] ve Şoltuz [60]-[61] dir.

Kararlılık kavramı birçok bilim dalında uzun zamandan beri yaygın olarak kullanılmaktadır. Magnus [62]'a göre kararlılık çalışmalarının kaynağı Aristo ve Arşimet'in eserlerinde bulunabilir. Aynı zamanda, belirli bir problemin özel gereksinim ve ihtiyaçlarına göre ayarlanmış olan evrensel bir kararlılık tanımlaması yoktur. Sonuç olarak kararlılık çok anlamlı bilimsel terimlerden biridir. Geniş anlamda kararlılık, bir sistemin dışsal bozulmalara rağmen içyapıyı değiştirmeden işleyişini sürdürme kabiliyeti olarak anlaşılır.

Matematik problemlerinin kararlılık kavramı ise şöyle açıklanabilir: Bir teoremin hipotezlerinde küçük bir değişiklik yaparak teoremin ana sonucunun doğru ya da yaklaşık olarak doğru kaldığını hangi durumlarda söyleyebiliriz?

Matematikte kararlılık teorisinin başlangıcı, Ulam'ın [63] no'lu referansta ortaya koyduğu şu probleme dayanmaktadır:

Hemen-hemen homomorfizma (almost homomorphisms) olan herhangi bir dönüşüme yakın başka bir homomorfizma hangi şartlar altında vardır? Hyers [64], 1941 yılında Banach uzaylarında tanımladığı yaklaşık toplamsal fonksiyonlar için (approximately additive functions) Ulam'ın sorusunu cevapladı. Rassias [65], 1978 yılında Hyers'in sonucunu Cauchy farkını sınırsız alarak genelleştirdi. Hyers tarafından kullanılan metot (genellikle direkt metot olarak adlandırılır) kararlılık çalışmalarında birçok denklem türüne başarılı bir şekilde uygulanmıştır. Fonksiyonel denklemlerin kararlılığını göstermede direkt metodun dışında ikinci popüler yöntem olarak sabit nokta metodu karşımıza çıkmaktadır. Kararlılık analizi için bu metot ilk kez Baker [66] tarafından kullanılmıştır. Baker, tek değişkenli fonksiyonel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığını elde etmek için Banach Contraction Prensibi'nin bir çeşidini uygulamıştır.

Ulam'ın probleminde fonksiyonel denklemler yerine diferansiyel denklemlerin kullanılmasıyla birlikte zengin bir literatüre sahip yeni bir çalışma alanı ortaya çıkmıştır [67-79].

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışmada, literatürde mevcut olan ve yeni tanımlanacak iterasyon yöntemleri kullanılacak ve bu yöntemlerin almost-contraction (hemen-hemen daraltan) dönüşümlerin sabit noktasına yakınsaklığı, yakınsaklıklarının denkliği, yakınsama hızları ve bu dönüşümlerin sabit noktalarının veri bağlılığına ilişkin sonuçlar elde edilecektir. Ek olarak bu sonuçların bir kısmı bilgisayar programları kullanılarak nümerik örneklerle desteklenecektir. Ayrıca bazı integral ve diferansiyel denklemlere karşılık gelen operatörler altında inşa edilecek yeni tanımlanan iterasyondan elde edilen dizinin çözüme kuvvetli yakınsaması ve bu çözümün veri bağlılığı irdelenecektir. Son olarak lineer olmayan integrodiferansiyel denklem çeşidi için Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam-Rassias Kararlılıkları üzerine bazı teoremler ispatlanacaktır.

1.3 Hipotez

X bir Banach uzayı, C kümesi, X uzayının boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi olmak üzere $T: C \to C$ (2.26) şartını sağlayan bir almost contraction dönüşüm olsun. Yeni tanımlanan üç adımlı iterasyon yöntemi ile S* iterasyon yönteminden elde edilen diziler belirli şartlar altında T'nin teklikle belirlenen sabit noktasına yakınsaktırlar. Ayrıca bu dizilerin yakınsaklıkları literatürde bulunan bazı iterasyon yöntemlerinden elde edilen dizilerin yakınsaklıklarına denktirler. Üstelik yeni tanımlanan iterasyon yönteminden elde edilen dizinin yakınsaması diğer iterasyon yöntemlerinden elde edilen dizilerin yakınsamasına göre daha hızlıdır. T operatörü olarak integral veya diferansiyel denklemlere karşılık gelen operatörler alındığında, yeni tanımlanan iterasyon yöntemi ile S* iterasyon yönteminden elde edilen diziler bu operatörlerin sabit noktasına yani bu denklemlerin çözümüne yakınsak olup belirli şartlar altında bu çözümler veri bağlıdır.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışma boyunca ihtiyaç duyulacak olan temel tanım ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 2.1 (Metrik Uzay) X boş olmayan bir küme ve $d: X \times X \to \mathbb{R}^+$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in X$ için;

M1) $d(x,y) \geq 0$

M2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M3) $d(x,y) = d(y,x)$

M4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

şartlarını sağlayan d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik veya uzaklık fonksiyonu, (X,d) ikilisine de bir metrik uzay denir [80].

Tanım 2.2 (Yakınsak Dizi) X bir metrik uzay ve $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda, $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine $x \in X$ noktasına yakınsaktır denir [80].

Tanım 2.3 (Cauchy Dizisi) X bir metrik uzay ve $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_0$ olduğunda, $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ varsa,

$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine Cauchy dizisi denir [80].

Tanım 2.4 (Tam Metrik Uzay) X bir metrik uzay olsun. Bu uzaydaki her $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Cauchy dizisi yakınsak ise, X uzayına tam metrik uzay denir [81].

Tanım 2.5 (Sürekli Dönüşüm) (X,d) ve (Y,ρ) iki metrik uzay, $f:X\to Y$ bir dönüşüm ve $x_0\in X$ olsun. Her bir $\varepsilon>0$ sayısı için,

$d(x,x_0)<\delta$ olduğunda $\rho(f(x),f(x_0))<\varepsilon$

olacak şekilde bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı varsa, f dönüşümüne x_0 noktasında süreklidir denir. f, X'in her noktasında sürekli ise, f dönüşümüne X'te süreklidir denir [82].

Tanım 2.6 (Vektör Uzay) L boş olmayan bir küme ve K bir cisim olsun. $+:\mathrm{L}\times\mathrm{L}\to\mathrm{L}$ ve $\cdot:\mathrm{K}\times\mathrm{L}\to\mathrm{L}$ işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L'ye K cismi üzerinde vektör uzay (lineer uzay) denir:

A. L kümesi $+$ işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

G1. Her $x,y\in\mathrm{L}$ için $x+y\in\mathrm{L}$

G2. Her $x,y,z\in L$ için $x+(y+z)=(x+y)+z$

G3. Her $x\in L$ için $x+\theta=\theta+x=x$ olacak şekilde $\theta\in\mathrm{L}$ vardır,

G4. Her $x\in\mathrm{L}$ için $x+(-x)=(-x)+x=\theta$ olacak şekilde $-x\in\mathrm{L}$ vardır,

G5. Her $x,y\in\mathrm{L}$ için $x+y=y+x$

B. $x,y\in\mathrm{L}$ ve $\alpha,\beta\in\mathrm{K}$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

L1. $\alpha\cdot x\in\mathrm{L}$

L2. $\alpha\cdot(x+y)=\alpha\cdot x+\alpha\cdot y$

L3. $(\alpha+\beta)\cdot x=\alpha\cdot x+\beta\cdot x$

L4. $(\alpha\cdot\beta)\cdot x=\alpha\cdot(\beta\cdot x)$

L5. $1\cdot x=x$ dir (Burada 1, K'nın birim elemanıdır).

$\mathrm{K}=\mathbb{R}$ ise L ye reel vektör uzay, $\mathrm{K}=\mathbb{C}$ ise L'ye kompleks vektör uzay adı verilir [83].

Tanım 2.7 (Konveks Küme) L bir reel vektör uzay ve $A\subseteq\mathrm{L}$ olsun. Her $x,y\in A$ için

$$B=\left\{z\in\mathrm{L}:z=\alpha x+\left(1-\alpha\right)y,0\leq\alpha\leq1\right\}\subseteq A$$

ise, A kümesine konvekstir denir [82].

Tanım 2.8 (Normlu Uzay) X bir vektör uzay olsun ve K cismi $\mathbb{R}$ olmak üzere, $\|.\|:X\to\mathrm{K}$ fonksiyonunun x noktasındaki değeri $\|x\|$ ile verilsin. Bu fonksiyon

N₁. $\|x\|=0\Leftrightarrow x=\theta$

N₂. Her $\alpha\in\mathrm{K}$ ve her $x\in X$ için $\|\alpha\cdot x\|=|\alpha|\cdot\|x\|$

N₃. Her $x,y\in X$ için $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

şartlarını sağlıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm, $\left(X,\|.\|\right)$ ikilisine de normlu uzay denir [84].

X uzayı üzerinde tanımlanan bir norm bu uzayda,

$$d\left(x,y\right)=\|x-y\|,\ \left(x,y\in X\right) \tag{2.1}$$

ile verilen bir metrik tanımlar ve bu metriğe norm tarafından üretilen metrik denir. (2.1) metriği, vektör uzay yapısı ile uyumluluk gösteren ve sırasıyla öteleme ve homojenlik özelliği olarak adlandırılan aşağıdaki ek özelliklere sahiptir:

$$d\left(x+z,y+z\right)=d\left(x,y\right),\left(z\in X\right) \tag{2.2}$$

$$d\left(\alpha\cdot x,\alpha\cdot y\right)=|\alpha|\cdot d\left(x,y\right),\left(\alpha\in K\right) \tag{2.3}$$

Böylece, bir normlu uzayda hem bir vektör uzayının hem de bir metrik uzayın özellikleri vardır. Bu özellikler (2.2) ve (2.3) anlamında uyumludurlar. Bu durum bize şöyle bir avantaj sağlar: her $x\in X$ ve her $r>0$ için

$$B\left(x;r\right)=\left\{y\in X:\|y-x\|<r\right\}=x+r\cdot B\left(0;1\right)$$

olduğundan yerel (lokal) incelemelerin büyük çoğunluğu

$$B(0;1)=\{x\in X:\|x\|<1\} \text{ veya } \overline{B}(0;1)=\{x\in X:\|x\|\le 1\}$$

birim yuvarına kısıtlanabilir.

Bununla birlikte bir vektör uzaydaki cebirsel işlemler süreklidir yani,

$$x_n\to x,\ y_n\to y,\ \alpha_n\to\alpha \text{ ise } x_n+y_n\to x+y,\ \alpha_n\cdot x_n\to\alpha\cdot x,\ \|x_n\|\to\|x\|$$

dir.

Tanım 2.9 (Banach Uzayı) X normlu vektör uzay olsun**.** X uzayı**,** $d(x,y)=\|x-y\|$ $(x,y\in X)$ norm metriğine göre tam ise X 'e Banach uzayı denir.

X 'in reel veya kompleks vektör uzay oluşuna göre Banach uzayı da reel veya kompleks Banach uzayı olarak adlandırılır [85].

Tanım 2.10 (Sabit Nokta) X boş olmayan bir küme ve $T:X\to X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer

$$Tx=x \tag{2.4}$$

olacak şekilde bir $x\in X$ varsa, bu x noktasına T 'nin sabit noktası denir ve T 'nin tüm sabit noktalarının kümesi F_T, $F(T)$ veya $Fix(T)$ ile gösterilir [86].

Örnek 2.11

(i) Eğer $X=[0,1]$ ve $T:X\to X$ $Tx=x^2$ ise $F_T=\{0,1\}$;

(ii) Eğer $X=C^1(\mathbb{R})$ ve $T:X\to X$ $T(\phi(x))=\phi'(x)$ ise $F_T=\{e^x\}$;

(iii) Eğer $X=[0,\infty)$ ve $T:X\to X$ $Tx=x-1+\dfrac{1}{e^x}$ ise $F_T=\{0\}$;

(iv) Eğer $X=\mathbb{R}$ ve $T:X\to X$ $Tx=\dfrac{\pi}{2}+x-\arctan x$ ise $F_T=\varnothing$

olur.

Tanım 2.12 (Lipschitzian Dönüşüm) X bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda \cdot d(x, y) \tag{2.5}$$

olacak şekilde bir $\lambda > 0$ sayısı mevcut ise T'ye bir Lipschitzian (veya λ-Lipschitzian) dönüşüm denir [86].

Tanımdan da görüldüğü üzere, her T Lipschitzian dönüşümü düzgün süreklidir.

Örnek 2.13 $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: X \to X$ $Tx = 4x$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$d(Tx, Ty) = |4x - 4y| = 4|x - y| = 4d(x, y)$$

elde edilir. Böylece $\lambda \geq 4$ için T dönüşümü Lipschitz şartını sağlar.

Tanım 2.14 (Nonexpansive (Genişlemeyen) Dönüşüm) X bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir Lipschitzian dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için,

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \tag{2.6}$$

ise T'ye bir nonexpansive dönüşüm denir [86].

Örnek 2.15 $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: X \to X$ $Tx = x + 3$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$d(Tx, Ty) = |x + 3 - y - 3| = |x - y| = d(x, y)$$

olduğundan her $x, y \in X$ için $|Tx - Ty| \leq |x - y|$ şartı sağlanır.

Tanım 2.16 (Contraction (Daraltan) Dönüşüm) X bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir Lipschitzian dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda \cdot d(x, y) \tag{2.7}$$

olacak şekilde en az bir $\lambda \in [0,1)$ sayısı bulunabiliyorsa T'ye contraction dönüşüm veya daraltan dönüşüm denir [86].

Örnek 2.17 $A: L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ olmak üzere $A(y) = \lambda \int_0^1 (x-s) y(s) ds$ operatörü verilsin. $y(x)$ ve $z(x)$ fonksiyonları $L_2(0,1)$ uzayında sürekli olsun. O halde

$$\begin{aligned}
\|A(y) - A(z)\|^2 &= \lambda^2 \int_0^1 dx \left[\int_0^1 (x-s)[y(s) - z(s)] ds \right]^2 \\
&\le \lambda^2 \int_0^1 \left\{ \int_0^1 (x-s)^2 ds \int_0^1 [y(s) - z(s)]^2 ds \right\} dx \\
&= \lambda^2 \|y - z\|^2 \int_0^1 \int_0^1 (x-s)^2 ds dx \\
&= \frac{1}{6} \lambda^2 \|y - z\|^2
\end{aligned}$$

olup $A: L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ operatörü $|\lambda| < \sqrt{6}$ için bir contraction dönüşümdür.

Lipschitz koşulunu sağlayan her dönüşüm düzgün sürekli olduğundan contraction dönüşümler de düzgün süreklidir. Bu nedenle T sürekli değilse bir contraction dönüşüm olamaz. Buna karşın, T contraction dönüşüm olmasa bile herhangi bir n için T^n bir contraction dönüşüm olabilir.

Örnek 2.18 $T: [0,2] \to [0,2]$ dönüşümü $T(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \sqrt{2}] \\ 1, & x \in (\sqrt{2}, 2] \end{cases}$ olarak tanımlansın. T dönüşümü $x = \sqrt{2}$ de süreksiz olduğundan contraction dönüşüm olamaz. Diğer taraftan, $T^2 : \{0,1\} \to \{0,1\}$, $T^2(x) = 0$ olup bir contraction dönüşümdür. Ayrıca $x = 0$ T'nin tek sabit noktasıdır [87].

Klasik BCP sabit nokta teorideki en kullanışlı sonuçlardan biridir. Lineer ve lineer olmayan denklemlerin çözümünde birçok uygulamaya sahip olan bu önemli sonuç şu şekilde ifade edilir:

Teorem 2.19 (Banach Contraction Prensibi) X bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ (2.7) şartını sağlayan bir contraction dönüşüm olsun. Bu durumda

(i) T, X'te bir tek x sabit noktasına sahiptir;

(ii) Herhangi bir $x_0 \in X$ için

$$x_{n+1} = Tx_n,\ n = 0,1,2,\dots \tag{2.8}$$

ile tanımlı Picard iterasyonu tarafından üretilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ iterasyon dizisi x noktasına yakınsar [16].

İspat Herhangi bir $x_0 \in X$ için $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu, dolayısıyla $x \in X$ noktasına yakınsadığı ve bu x'in $Tx = x$ denkleminin bir tek çözümü olduğu gösterilmelidir. O halde $n \geq 1$ ve $p \geq 1$ için (2.7) şartından

$$
\begin{aligned}
d\left(x_{n+p}, x_n\right) &= d\left(T^{n+p-1}x_0, T^{n-1}x_0\right) \\
&\leq \lambda d\left(x_{n+p-1}, x_{n-1}\right) = \lambda d\left(T^{n+p-1}x_0, T^{n-1}x_0\right) \leq \lambda^2 d\left(x_{n+p-2}, x_{n-2}\right) \leq \ldots \\
&\leq \lambda^n d\left(x_{n+p-n}, x_{n-n}\right) = \lambda^n d\left(x_p, x_0\right) \\
&\leq \lambda^n \left(d(x_p, x_{p-1}) + d(x_{p-1}, x_0)\right) \\
&\leq \lambda^n \left(\lambda d(x_{p-1}, x_{p-2}) + d(x_{p-1}, x_{p-2}) + d(x_{p-2}, x_0)\right) \\
&= \lambda^n \left(d(x_{p-2}, x_0) + d(x_{p-1}, x_{p-2}) + \lambda d(x_{p-1}, x_{p-2})\right) \\
&\leq \lambda^n \left[d(x_{p-2}, x_0) + \lambda d(x_{p-2}, x_{p-3}) + \lambda^2 d(x_{p-2}, x_{p-3})\right] \\
&\qquad \vdots \\
&\leq \lambda^n \left[d(x_1, x_0) + \lambda d(x_1, x_0) + \lambda^2 d(x_1, x_0) + \ldots\right] \\
&= \lambda^n d(x_1, x_0)(1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \ldots) \\
&= \lambda^n d(x_1, x_0)\left(\frac{1}{1-\lambda}\right) \ (n \to \infty)
\end{aligned}
$$

bulunur. Yani

$$d\left(x_{n+m}, x_n\right) \leq \left(\frac{\lambda^n}{1-\lambda}\right) d\left(x_1, x_0\right)$$

olduğu elde edilir. $0 \leq \lambda < 1$ olduğundan $n \to \infty$ için limit alınırsa $d\left(x_{n+m}, x_n\right) \to 0$ olur. Bu da $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. (X, d) uzayı tam olduğundan $x_n \to x$ dolaysıyla da $x_{n+1} \to x$. T dönüşümü sürekli olduğundan dizisel süreklidir, yani $Tx_n \to Tx$. $x_{n+1} = Tx_n$ denkleminde $n \to \infty$ için limit alınırsa $x = Tx$ elde edilir.

Şimdi bu sabit noktanın tek olduğu gösterilmelidir. T operatörünün y gibi başka bir sabit noktası olsun. O halde

$$d\left(x, y\right) = d\left(Tx, Ty\right) \leq \lambda \cdot d\left(x, y\right) \Rightarrow (1-\lambda) d\left(x, y\right) \leq 0, \ \lambda \in [0,1)$$

olduğu elde edilir ki buda bir çelişkidir. Dolayısıyla T bir tek sabit noktaya sahiptir.

Örnek 2.20 $(M)_{n\times n}$ girdileri $\frac{1}{n}$ den küçük olan reel değerli matris olsun. Bu durumda $I-M$ terslenebilirdir.

Çözüm $\mathbb{R}^n$ uzayında $d_\infty(x,y)=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i-y_i|$ metriği verilsin. $(M)_{n\times n}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ şeklinde bir dönüşüm olarak kabul edilebilir. Bu dönüşümün contraction olduğu gösterilmelidir. $x,y\in\mathbb{R}^n$ için $x'=Mx,\ y'=My$ olsun. O halde

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12}\cdots m_{1n} \\ m_{21} & m_{22}\cdots m_{2n} \\ \vdots & \vdots \ \ddots \ \vdots \\ m_{n1} & m_{n2}\cdots m_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

olur. Benzer şekilde bu eşitlik y' ve y için de yazılabilir. $d_\infty(x',y')\le n.\max\limits_{1\le i,j\le n}|m_{ij}|.d_\infty(x,y)$ olduğu kolaylıkla görülebilir. $(M)_{n\times n}$ matrisinin her bir girdisi $\frac{1}{n}$'den küçük olduğundan $|m_{ij}|<\frac{1}{n}$ yazılabilir. Dolayısıyla $\max\limits_{1\le i,j\le n}|m_{ij}|<\frac{1}{n}$ dir. Yani M bir contraction dönüşümdür. Banach Contraction Prensibi'nden $Mx=x$ olacak şekilde bir tek x çözümü vardır. Bu çözüm $x=(0,0\cdots,0)$ olmak zorundadır çünkü

$$\begin{aligned} x\in\ker(I-M) &\Leftrightarrow (I-M)x=0 \\ &\Leftrightarrow x=Mx \\ &\Leftrightarrow x=0 \end{aligned}$$

olur. Bu çarpım sıfır olduğundan $(I-M)$ terslenebilirdir [88].

Teorem 2.21 $X=[a,b],\ d(x,y)=|x-y|$ ve $T:X\to X$ diferansiyellenebilir dönüşüm olsun. T'nin $[a,b]$ kapalı aralığında contraction dönüşüm olması için gerek ve yeter koşul her $x\in(a,b)$ için $k<1$ olmak üzere $|T'x|\le k$ olmasıdır [88].

İspat T bir contraction dönüşüm olmak üzere sabit bir $x\in(a,b)$ için $x+\delta x\in[a,b]$ olsun. Bu durumda T'nin X'te bir tek sabit noktası vardır. O halde her $x,y\in[a,b]$ için

$$|T(x+\delta x)-Tx| \le k|(x+\delta x)-x| = k\cdot|\delta x|$$

olur. Dolayısıyla $\left|\dfrac{T(x+\delta x)-T(x)}{\delta x}\right| \le k$ olup $\delta x \to 0$ için limite geçilirse $|T'(x)| \le k$ elde edilir. Tersine, $x,y \in [a,b]$ olmak üzere her $x \in [a,b]$ için $|T'(x)| \le k$ olsun. Ortalama Değer Teoremi'nden $\dfrac{T(x)-T(y)}{x-y} = T'(c)$ olacak şekilde bir $c \in (x,y)$ vardır. Kabul gereği $|T'(c)| \le k$ yazılabilir. O halde $\left|\dfrac{T(x)-T(y)}{x-y}\right| \le k$ olur. Dolayısıyla T bir contraction dönüşümdür.

Tanım 2.22 (Strict Contraction (Kesin Daraltan) Dönüşüm) X bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y \in X$ ve $x \ne y$ için,

$$d(Tx,Ty) < d(x,y) \tag{2.9}$$

ise T'ye strict contraction dönüşüm veya kesin daraltan dönüşüm denir [86].

Örnek 2.23 $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$ ve $T: X \to X$ $Tx = 1+\ln(1+e^x)$ olsun. T dönüşümü strict contraction olup contraction değildir. Çünkü

$$T'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} < 1$$

dir. Üstelik Ortalama Değer Teoremi'nden

$$T'(c) = \left|\frac{T(x)-T(y)}{x-y}\right|$$

elde edilir. Dolayısıyla $T'(c) < 1$ olur. Yani

$$T'(c) = \left|\frac{T(x)-T(y)}{x-y}\right| < 1$$
$$\Rightarrow |T(x)-T(y)| < |x-y|$$

bulunur [89]. Sonuç olarak T dönüşümü strict contraction dönüşümdür ancak contraction değildir.

Örnek 2.24 $X=[1,\infty)$, $d(x,y)=|x-y|$ ve $T:X\to X$ dönüşümü $Tx=x+\frac{1}{x}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $x\neq y$ olacak şekildeki her $x,y\in X$ için,

$$d(Tx,Ty)=|Tx-Ty|=\left|x+\frac{1}{x}-y-\frac{1}{y}\right|$$
$$=\left|\frac{x^2y-x-xy^2+y}{xy}\right|=\left|\frac{(x-y)(xy-1)}{xy}\right|$$
$$\leq\frac{|x-y||xy-1|}{|xy|}$$

olur. Burada her $x,y\in X=[1,\infty)$ için $\frac{|xy-1|}{|xy|}<1$ olacağından

$$d(Tx,Ty)\leq\frac{|x-y||xy-1|}{|xy|}<|x-y|=d(x,y)$$

olur ki bu da $d(Tx,Ty)<d(x,y)$ şartının sağlandığını gösterir. Böylece, T bir strict contraction dönüşümdür. Ayrıca,

$$x+\frac{1}{x}=x\Rightarrow\frac{1}{x}=0$$

eşitliğini sağlayan bir $x\in[1,\infty)$ bulunamaz, yani T dönüşümü bir sabit noktaya sahip değildir [88].

Bu dönüşümlerin sabit noktalarının varlığını garantilemek için çalışılan uzayın kompakt olması yeterli olacaktır.

Teorem 2.19'daki (i) ve (ii) şartını sağlayan bir dönüşüme bir Picard operatörü denir [90].

Banach Contraction Prensibi'nde dikkat edilmesi gereken nokta, T'nin X üzerinde sürekli olmasıdır. 1968 yılında Kannan [25], T'nin X üzerinde sürekli olmasını gerektirmeyen bir contractive olma şartı tanımlayarak, Banach Contraction Prensibini aşağıdaki şekilde genelleştirmiştir:

Teorem 2.25 (Kannan Teoremi) X bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \le a \cdot \left[d(x, Tx) + d(y, Ty) \right] \tag{2.10}$$

olacak şekilde en az bir $a \in [0, 1/2)$ sayısı mevcut ise, T bir Picard operatörüdür.

İspat: Eğer T dönüşümü (2.10) şartını sağlıyorsa, bu durumda $cardF_T \le 1$ dir.

Şimdi $x_0 \in X$ ve $x_{n+1} = Tx_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Picard iterasyonu olsun. Bu durumda (2.10) eşitsizliğinden

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n) \le a\left[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1}) \right]$$

veya

$$d(x_n, x_{n+1}) = \frac{a}{1-a} \cdot d(x_{n-1}, x_n),\ n = 1, 2, \ldots \tag{2.11}$$

olduğu elde edilir.

$a \in [0, 1/2)$ için $0 \le \dfrac{a}{1-a} < 1$ olduğundan, Teorem 2.19' un ispatına benzer şekilde $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu ve dolayısıyla da yakınsak bir dizi olduğu sonucuna ulaşılır. $x_* \in X$, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin limiti olsun. Bu durumda,

$$d(x_*, Tx_*) \le d(x_*, x_n) + d(x_n, Tx_*) \le d(x_*, x_n) + a\left[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_*, Tx_*) \right]$$

olup, buradan da

$$d(x_*, Tx_*) \le \frac{1}{1-a} \cdot d(x_*, x_n) + \frac{a}{1-a} d(x_{n-1}, x_n),\ \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.12}$$

olduğu elde edilir.

(2.11) ve (2.12) den

$$d(x_*, Tx_*) \le \frac{1}{1-a} \cdot d(x_*, x_n) + \left(\frac{a}{1-a} \right)^n d(x_0, x_1),\ n = 1, 2, \ldots \tag{2.13}$$

olup, (2.13) te $n \to \infty$ için limit durumuna geçilmesiyle

$d\left(x_*, Tx_*\right) = 0 \Leftrightarrow x_* = Tx_*$, yani $F_T = \left\{x_*\right\}$

olduğu elde edilir. Böylece her bir $x_0 \in X$ için , $x_n \to x_* \left(n \to \infty\right)$.

Örnek 2.26 $X = \mathbb{R}$ olsun ve $T : X \to X$ dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$Tx = \begin{cases} 0, \; x \in \left(-\infty, 2\right] \\ -\dfrac{1}{2}, \; x \in \left(2, \infty\right) \end{cases}$$

Bu durumda (i) T sürekli değildir. (ii) T, (2.10) ile verilen şartı sağlar (bu durumda $a = \frac{1}{5}$ tir) ve böylece Kannan teoreminden dolayı T bir Picard operatörüdür.

Kannan Teoremi'nden esinlenilerek, T'nin sürekliliğini gerektirmeyen çeşitli contractive tip dönüşüm sınıfları için çok sayıda sabit nokta teoremleri elde edilmiştir. Bu çalışmalardan bazıları [91-93] de görülebilir.

Bu teoremlerden biri Chatterjea [94] tarafından (2.10) şartına benzer bir şart kullanılarak aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

Teorem 2.27 (Chatterjea Teoremi) X bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d\left(Tx, Ty\right) \leq b \cdot \left[d\left(x, Ty\right) + d\left(y, Tx\right)\right] \tag{2.14}$$

olacak şekilde en az bir $b \in \left[0, 1/2\right)$ sayısı varsa, T bir Picard operatörüdür.

Burada (2.10) şartını sağlayan bir dönüşüm Kannan dönüşümü olarak adlandırılırken, (2.14) şartını sağlayan bir dönüşüm Chatterjea dönüşümü olarak adlandırılmaktadır.

Ayrıca Rhoades [95] tarafından verilen bir örnekte (2.7) ile verilen contractive olma şartı ile (2.10) ve (2.14) ile verilen contractive olma şartlarının birbirlerinden bağımsız oldukları gösterilmiştir.

Zamfirecu [32], (2.7), (2.10) ve (2.14) şartlarını bir araya getirerek aşağıda verilen önemli sonucu elde etti:

Teorem 2.28 (Zamfirescu Teoremi) X bir tam metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x,y\in X$ için

(z_1) $d(Tx,Ty)\le\lambda d(x,y)$,

(z_2) $d(Tx,Ty)\le a\cdot\left[d(x,Tx)+d(y,Ty)\right]$,

(z_3) $d(Tx,Ty)\le b\cdot\left[d(x,Ty)+d(y,Tx)\right]$,

şartlarından en az birisinin doğru olacağı şekilde $\lambda\in[0,1)$, $0<a,b<1/2$ şartlarını sağlayan λ, a ve b reel sayıları varsa T bir Picard operatörüdür.

İspat: $x,y\in X$ olmak üzere (z_1), (z_2) veya (z_3) şartlarından en az biri doğru olsun.

Eğer (z_2) doğru ise, bu durumda

$$d(Tx,Ty)\le a\cdot\left[d(x,Tx)+d(y,Ty)\right]\le a\cdot\left\{d(x,Tx)+\left[d(y,x)+d(x,Tx)+d(Tx,Ty)\right]\right\}$$

olduğu elde edilir. Böylece

$$(1-a)d(Tx,Ty)\le 2ad(x,Tx)+ad(x,y)$$

veya

$$d(Tx,Ty)\le\frac{2a}{1-a}d(x,Tx)+\frac{a}{1-a}d(x,y)$$

olduğu elde edilir.

Eğer (z_3) doğru ise, bu durumda benzer şekilde

$$d(Tx,Ty)\le\frac{2b}{1-b}d(x,Tx)+\frac{b}{1-b}d(x,y)$$

olduğu elde edilir.

$$\delta:=\left\{\lambda,\frac{a}{1-a},\frac{b}{1-b}\right\}$$

şeklinde tanımlanırsa $\delta\in[0,1)$ olur ve her $x,y\in X$ için

$$d(Tx,Ty) \le 2\delta d(x,Tx) + \delta d(x,y) \tag{2.15}$$

eşitsizliği sağlanır.

Benzer şekilde, her $x,y \in X$ için

$$d(Tx,Ty) \le 2\delta d(x,Ty) + \delta d(x,y) \tag{2.16}$$

eşitsizliği elde edilir.

(2.15)'ten $cardF_T \le 1$ olduğu sağlanır. Şimdi T'nin bir tek sabit noktaya sahip olduğu gösterilecektir. $x_0 \in X$ keyfi bir başlangıç noktası ve $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, T'ye karşılık gelen

$$x_{n+1} = Tx_n,\ n = 0,1,2,\dots$$

Picard iterasyonu olsun.

Eğer $x := x_n$ ve $y := x_{n-1}$ iki ardışık yaklaşım ise, (2.16)'dan

$$d(Tx_n,Tx_{n-1}) \le 2\delta d(x_n,Tx_{n-1}) + \delta d(x_n,x_{n-1}),$$

yani,

$$d(x_{n+1},x_n) \le \delta d(x_n,x_{n-1})$$

olduğu elde edilir.

Buradan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$'in bir Cauchy dizisi olduğu ve böylece yakınsak olduğu sonucuna ulaşılır. $x_* \in X$, bu dizinin limiti olsun. Böylece,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1},x_n) = 0$$

olur.

(2.15) ile verilen ifade ile birlikte üçgen eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} d(x_*,Tx_*) &\le d(x_*,x_{n+1}) + d(Tx_n,Tx_*) \\ &\le d(x_*,x_{n+1}) + \delta d(x_*,x_n) + 2\delta d(x_n,Tx_n) \end{aligned}$$

elde edilir, $n \to \infty$ için $d(x_n, Tx_n) = d(x_n, x_{n+1}) \to 0$ olduğundan

$$d(x_*, Tx_*) = 0 \Leftrightarrow x_* = Tx_*$$

olduğu elde edilir. Böylece her bir $x_0 \in X$ için $F_T = \{x_*\}$ ve $x_n \to x_* (n \to \infty)$.

En genel contraction şartlarından biri Ciric [21] tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

Tanım 2.29 (Quasi Contraction) X bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \le h \cdot \max\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), d(x,Ty), d(y,Tx)\} \tag{2.17}$$

olacak şekilde bir $h \in (0,1)$ sayısı varsa, T'ye bir quasi contraction denir ve T bir Picard operatörüdür.

(2.10), (2.14) ve (z_1)-(z_3) şartlarından her birinin (2.17) şartını gerektirdiği açıktır.

Literatürde bu tipten contraction şartlarından esinlenilerek elde edilmiş olan birçok sabit nokta teoremi mevcuttur. Bunlara örnek olarak Rus [91], Taskovic [93], Rhoades [95]-[96] ve Berinde [97] verilebilir.

Berinde [98], (z_1)-(z_3) şartlarından daha genel olan ve T dönüşümünün sürekliliğini gerektirmeyen aşağıdaki contraction şartını tanımlayarak bazı sabit nokta teoremleri elde etti:

Tanım 2.30 (Almost contraction) X bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \le \delta d(x,y) + L d(y,Tx) \tag{2.18}$$

veya

$$d(Tx, Ty) \le \delta d(x,y) + L d(x,Ty) \tag{2.19}$$

olacak şekilde bir $\delta \in (0,1)$ sabiti ve bir $L \ge 0$ mevcut ise, T'ye bir almost contraction (hemen-hemen daraltan) dönüşüm denir.

T dönüşümünün almost contraction olup olmadığını kontrol etmek için hem (2.18) hem de (2.19) ile verilen şartlar kontrol edilmelidir.

(2.18) veya (2.19) eşitsizliklerinde $\delta = \lambda$ ve $L = 0$ alınırsa (2.7) ile verilen contraction şartı elde edilir. Buradan da (2.7) ile verilen contraction şartının aynı zamanda bir tek sabit noktaya sahip olan bir almost contraction dönüşümü olduğu sonucuna ulaşılır [98].

Herhangi bir Zamfirescu dönüşümü, yani Teorem 2.28' deki (z_1)-(z_3) şartlarını sağlayan herhangi bir dönüşüm bir almost contraction dönüşümüdür [98]. Dolayısıyla (2.10) ve (2.14) ile verilen Kannan ve Chatterjea dönüşümleri de birer almost contraction dönüşümü olurlar. Bununla birlikte, quasi contraction dönüşümlerinde almost contraction oldukları aşağıdaki önermede verilmiştir:

Önerme 2.31 Herhangi bir quasi contraction, $0 < h < 1/2$ şartıyla bir almost contraction dır [98].

Önerme 2.31'den, quasi contraction dönüşümlerin $h < 1/2$ şartıyla birlikte almost contraction dönüşüm oldukları bilinmektedir. Bununla birlikte, aşağıdaki örnekte gösterildiği üzere $h \geq 1/2$ şartıyla da almost contraction dönüşüm olan quasi contraction dönüşümler mevcuttur. Buradan da şu sonuca ulaşılır: $h < 1/2$ şartı, bir quasi contraction dönüşümün almost contraction dönüşüm olması için gerekli bir şart değildir [98] .

Örnek 2.32 $T:[0,1] \to [0,1]$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \dfrac{2}{3}, & x \in [0,1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

(i) T dönüşümü $h \in [2/3,1)$ ile (2.17) şartını sağlar,

(ii) T dönüşümü $\delta \geq 2/3$ ve $L \geq \delta$ ile (2.18) şartını sağlar [98].

Berinde [98], (2.18) ve (2.19) ile verilen almost contraction şartlarını kullanarak

Teorem 2.19, Teorem 2.28 ve literatürdeki birçok sabit nokta teoreminin önemli bir genelleştirmesi olan aşağıdaki teoremi elde etti:

Teorem 2.33 X bir tam metrik uzay ve $T : X \to X$ dönüşümü (2.18) şartını sağlayan bir almost contraction olsun. Bu durumda;

(i) $F_T = \{x \in X : Tx = x\} \neq \emptyset$;

(ii) Herhangi bir $x_0 \in X$ için (2.8) ile verilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Picard iterasyonundan elde edilen dizi, bazı $x_* \in F_T$ 'ye yakınsar.

İspat: İlk olarak T 'nin X 'te en az bir sabit noktaya sahip olduğu gösterilecektir. Keyfi bir $x_0 \in X$ için $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, (2.8) ile tanımlanan Picard iterasyonu olsun.

(2.18)' de $x := x_{n-1}$ ve $y := x_n$ yazıldığında

$$d\left(Tx_{n-1}, Tx_n\right) \leq \delta \cdot d\left(x_{n-1}, x_n\right)$$

veya

$$d\left(x_n, x_{n+1}\right) \leq \delta \cdot d\left(x_{n-1}, x_n\right) \tag{2.20}$$

olduğu elde edilir.

(2.20) eşitsizliğine tümevarım uygulanırsa

$$d\left(x_n, x_{n+1}\right) \leq \delta^n \cdot d\left(x_0, x_1\right),\ n = 0,1,2,\ldots$$

olduğu görülür.

Bu durumda $p \in \mathbb{N}$, $p \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} d\left(x_n, x_{n+p}\right) &\leq \delta^n \left(1 + \delta + \cdots + \delta^{p-1}\right) d\left(x_0, x_1\right) \\ &= \frac{\delta^n}{1-\delta}\left(1 - \delta^p\right) d\left(x_0, x_1\right) \end{aligned} \tag{2.21}$$

olduğu elde edilir.

$\delta \in (0,1)$ olduğundan (2.21)'den $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu ve böylece yakınsak olduğu elde edilir. Şimdi

$$x_* = \lim_{n\to\infty} x_n \tag{2.22}$$

olarak seçilsin. Bu durumda

$$d(x_*,Tx_*) \le d(x_*,x_{n+1}) + d(x_{n+1},Tx_*) = d(x_{n+1},x_*) + d(Tx_n,Tx_*) \tag{2.23}$$

olduğu elde edilir.

Ayrıca, (2.18)' den

$$d(Tx_n,Tx_*) \le \delta d(x_n,x_*) + Ld(x_*,Tx_n) \tag{2.24}$$

olduğu elde edilir.

Böylece (2.23) ve (2.24)' ten, her $n \ge 0$ için

$$d(x_*,Tx_*) \le (1+L)d(x_*,x_{n+1}) + \delta d(x_n,x_*) \tag{2.25}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alındığında, sıkıştırma kuralından $d(x_*,Tx_*) = 0$ olduğu elde edilir. Sonuç olarak x_*, T 'nin bir sabit noktasıdır.

Teorem 2.19 ve Teorem 2.28 de kullanılan operatörlerin sabit noktaları teklikle belirli olmasına rağmen, aşağıdaki örnekte gösterildiği üzere almost contraction dönüşümler bir tek sabit noktaya sahip olmak zorunda değildir:

Örnek 2.34 $T:[0,1] \to [0,1]$ dönüşümü birim dönüşüm olsun, yani her $x \in [0,1]$ için $Tx = x$ olsun. Bu durumda;

(i) T dönüşümü keyfi $\delta \in (0,1)$ ve $L \ge 1-\delta$ ile (2.18) şartını sağlar. Gerçekten de (2.18) ve (2.19) şartlarından

$$|x-y| \le \delta \cdot |x-y| + L \cdot |x-y|$$

olduğu elde edilir. Keyfi bir $\delta \in (0,1)$ için $L \ge 1-\delta$ olarak seçilirse bu eşitsizlik her $x,y \in [0,1]$ için doğru olur.

(ii) T 'nin sabit noktalarının kümesi $[0,1]$ aralığının tümüdür, yani $F_T=[0,1]$ dir [98].

Berinde tarafından ortaya konulan aşağıdaki teorem, (2.18) ile verilen contractive şartına oldukça benzer ek bir contractive şartıyla bir almost contraction dönüşümün sabit noktasını teklikle belirlemeyi mümkün kılmaktadır.

Teorem 2.35 X bir tam metrik uzay ve $T:X\to X$ dönüşümü aşağıdaki şartı sağlayan bir almost contraction olsun: Her $x,y\in X$ için

$$d(Tx,Ty)\le\theta\cdot d(x,y)+L_1\cdot d(x,Tx) \tag{2.26}$$

olacak şekilde $\theta\in(0,1)$ sabiti ve $L_1\ge 0$ mevcuttur. Bu durumda

(i) T bir tek sabit noktaya sahiptir, yani $F_T=\{x_*\}$;

(ii) Herhangi bir $x_0\in X$ için (2.8) ile verilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Picard iterasyonundan elde edilen dizi $x_*\in F_T$ noktasına yakınsar [98].

İspat: T dönüşümü X 'te x_* ve y_* gibi iki farklı sabit noktaya sahip olsun. Bu durumda (2.26)' da $x:=x_*$ ve $y:=y_*$ yazılırsa

$$d(Tx_*,Ty_*)=d(x_*,y_*)\le\theta\cdot d(x_*,y_*)\Leftrightarrow(1-\theta)d(x_*,y_*)\le 0$$

olduğu elde edilir ve

$$d(x_*,y_*)>0$$

olması ile çelişir.

İspatın kalan kısmı Teorem 2.33'ün ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Yukarıdaki teoreme bağlı olarak aşağıdaki incelemeler yapılabilir:

(i) Uzaklık fonksiyonunun simetrik olmasından dolayı, her $x,y\in X$ için (2.26)'nın sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$d(Tx,Ty)\le\theta\cdot d(x,y)+L_1\cdot d(y,Ty) \tag{2.27}$$

şartının sağlanmasıdır. Böylece (2.18) ve (2.19) şartlarındaki duruma benzer şekilde, somut uygulamalarda hem (2.26) hem de (2.27) şartının sağlandığının kontrol edilmesi gerekir.

(ii) (2.26) şartı Osilike [99-101] tarafından belirli sabit nokta iterasyon yöntemlerinin kararlılıklarının ispatlanması için kullanıldı. Ayrıca Osilike [99] ve [100]'de görüldüğü üzere (2.26) şartı, T'nin bir sabit noktaya sahip olmasını gerektirmez. Ancak (2.26) şartını sağlayan bir T dönüşümü bir sabit noktaya sahip ise bu nokta kesinlikle tektir.

(iii) (2.7), (2.10), (2.14) şartlarını veya Teorem 2.28' deki (z_1)-(z_3) şartlarını sağlayan herhangi bir T dönüşümü (2.26) ve (2.27) teklik şartlarını da sağlar. Böylece Örnek 2.34 göz önüne alındığında Teorem 2.35 (ve Teorem 2.33), Teorem 2.28' i genelleştirir. Üstelik $0<h<1/2$ şartıyla, herhangi bir quasi contraction da (2.26) ve (2.27) şartlarını sağlar. Bu durum Teorem 2.35'in Teorem 2.19, Teorem 2.25, Teorem 2.27 ve Teorem 2.28' i genelleştirdiğini gösterir.

Tanım 2.36 (Contractive-Like Operatörler) X bir tam metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x,y\in X$ için

$$d(Tx,Ty)\le\delta\cdot d(x,y)+\varphi(d(x,Tx)) \tag{2.28}$$

olacak şekilde bir $\delta\in[0,1)$ sabiti ve $\varphi(0)=0$ şartını sağlayan bir $\varphi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ monoton artan fonksiyonu varsa, T'ye bir contractive-like dönüşüm denir [59].

Tanım 2.37 (Hyers-Ulam Kararlılık) $\alpha\in\mathbb{R}$ ve a,b,λ_1,λ_2 sabitler olmak üzere $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$ ve $t,s\in I$ olsun. $f:I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ve $k_1,k_2:I^2\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonları verilsin. Herhangi bir sürekli türevlenebilir $x(t)$ fonksiyonu, her $\varepsilon\ge 0$ için

$$\left|x'(t)-f(t,x(t))-\lambda_1\int_a^t k_1(t,s,x(s))ds-\lambda_2\int_a^b k_2(t,s,x(s))ds\right|\le\varepsilon$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda her $t\in I$ için $C>0$ olmak üzere

$$|x(t)-x_0(t)|\le C(\varepsilon) \tag{2.29}$$

olacak şekilde $x_0:I\to\mathbb{R}$ çözümü varsa

$$x'(t) = f(t,x(t)) + \lambda_1 \int_a^t k_1(t,s,x(s))ds + \lambda_2 \int_a^b k_2(t,s,x(s))ds \tag{2.30}$$

denklemi Hyers-Ulam kararlıdır denir. Burada C sabiti $x(t)$ ve $x_0(t)$'den bağımsızdır. $\phi : I \to (0,\infty)$ tanımlı olmak üzere, eğer (2.29) eşitsizliği $\varepsilon = \phi(t)$ için de geçerliyse bu durumda (2.30) ile verilen denklem Hyers-Ulam-Rassias kararlıdır denir.

Tanım 2.38 (Genelleştirilmiş Metrik Uzay) X boş olmayan bir küme ve $d : X \times X \to [0,\infty]$ bir fonksiyon olsun. Her $x,y,z \in X$ için;

M1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M2) $d(x,y) = d(y,x)$

M3) $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$

şartlarını sağlayan d fonksiyonuna X üzerinde genelleştirilmiş metrik denir [102].

Teorem 2.39 X genelleştirilmiş kompleks metrik uzay ve $\Lambda : X \to X$, $L < 1$ Lipschitz sabitiyle kesin daraltan dönüşüm olsun. Bu uzaydaki bazı x elemanları için $d(\Lambda^{k+1}x, \Lambda^k x) < \infty$ olacak şekilde negatif olmayan k tamsayısı varsa aşağıdaki ifadeler doğrudur:

a) $\{\Lambda^n x\}$ dizisi Λ'nin bir p sabit noktasına yakınsar.

b) p, $Y = \{y \in X : d(\Lambda^k x, y) < \infty\}$ kümesinde Λ'nin tek sabit noktasıdır.

c) $y \in Y$ ise, $d(y,p) \le \dfrac{1}{1-L} d(\Lambda y, y)$ [103].

BÖLÜM 3

BAZI İTERASYON YÖNTEMLERİ İÇİN SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu bölümde iterasyon yöntemlerine dair genel bilgiler verildikten sonra, yeni tanımlanan iterasyon yöntemi ve literatürde var olan iterasyon yöntemleri kullanılarak almost contraction dönüşüm sınıfları için kuvvetli yakınsama, yakınsamanın denkliği, yakınsaklık hızı ve bu dönüşümlerin sabit noktalarının veri bağlılığı sonuçları irdelenecektir.

3.1 Sabit Nokta İterasyon Yöntemleri

X bir normlu uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. f bir fonksiyon olmak üzere, bir sabit nokta iterasyon yöntemi en genel haliyle

$$\begin{cases} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = f\left(T, x_n\right), \; n = 0,1,2,\ldots \end{cases} \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır [86].

Tanım 3.1. (Picard İterasyon Yöntemi)

$$x_{n+1} = f\left(T, x_n\right) = Tx_n \tag{3.2}$$

seçilerek elde edilen iterasyon yöntemine Picard iterasyon yöntemi denir [86].

Picard iterasyon metodu, başlangıç değer probleminin veya integral denklemlerin çözümüne ulaşmak için kullanabileceğimiz bir algoritma sağlar. Bu metot “sıfırıncı yaklaşım” (zeroth approximation) olarakta adlandırılan bir başlangıç noktasının algoritmayı başlatmasıyla birlikte, ardışık yaklaşımlar yaparak problemin çözümüne ulaşmayı hedefler. $u(x)$ bilinmeyen fonksiyon ve $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu olmak üzere, aşağıda verilen ikinci tipten Volterra integral denklemi göz önüne alındığında;

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt$$

Picard iterasyon metodu

$$u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u_{n-1}(t)dt \quad n \geq 1 \tag{3.3}$$

şeklinde bir tekrarlama bağıntısı kurar. Başlangıç noktası olan $u_0(x)$ herhangi bir reel değerli fonksiyon olabilir ancak en çok seçilen başlangıç değerleri 0, 1 ve x'tir. (3.3) eşitliğinden;

$$\begin{aligned}
u_1(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u_0(t)dt \\
u_2(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u_1(t)dt \\
u_3(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u_2(t)dt \\
&\vdots \\
u_n(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u_{n-1}(t)dt
\end{aligned}$$

şeklinde bir ardışık yaklaşım elde edilir. $u_n(x)$'in yakınsaklığı aşağıdaki teoremde belirtilmiştir:

Teorem 3.2 (3.3) ile verilen denklemde $x \in [0,a]$ için $f(x)$ fonksiyonu sürekli ve ayrıca $0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq x$ üçgensel bölgesinde $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu sürekli ise $n \geq 0$ olmak üzere, $u_n(x)$ ardışık yaklaşımlar dizisi verilen integral denklemin $u(x)$ çözümüne yakınsar [104].

Örnek 3.3 $u(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}\int_0^x (x-t)^3 u(t)dt$ Volterra integral denklemine $u_0(x) = 1$ başlangıç koşulu altında Picard iterasyonu uygulansın.

Bunun için aşağıdaki iterasyon formülü kullanılacaktır:

$$u_{n+1}(x)=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}\int_0^x (x-t)^3 u_n(t)dt \tag{3.4}$$

Başlangıç koşulu (3.4)'te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} u_1(x)&=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}\int_0^x (x-t)^3 u_0(t)dt \\ &=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}\int_0^x (x-t)^3 dt \\ &=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4 \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde devam edilirse

$$\begin{aligned} u_2(x)\ &=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}\int_0^x (x-t)^3 u_1(t)dt \\ &=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}\int_0^x (x-t)^3 (1-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{24}t^4)dt \\ &=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6+\frac{1}{40320}x^8 \\ &=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\frac{1}{8!}x^8 \\ &\ \ \vdots \end{aligned}$$

$$u_{n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

elde edilir. O halde verilen denklemin çözümü

$u(x)=\lim_{n\to\infty}u_{n+1}(x)=\cos x$ olur [104].

Picard iterasyonu ile elde edilen dizi nonexpansive dönüşümlerin sabit noktasına yakınsamadığından Krasnoselskii [105], aşağıdaki iterasyon yöntemini tanımlayarak bu problemi aşmıştır:

Tanım 3.4 (Krasnoselskii İterasyon Yöntemi)

$$x_{n+1}=f\left(T,x_n\right)=\frac{1}{2}\left(x_n+Tx_n\right) \tag{3.5}$$

şeklinde ifade edilen iterasyon yöntemine Krasnoselskii iterasyon yöntemi denir.

Örnek 3.5 $X=[0,1]$ olmak üzere her $x\in[0,1]$ için $T:[0,1]\to[0,1]$ dönüşümü $Tx=1-x$ şeklinde tanımlansın. Herhangi bir $x=x_0\neq 1/2$ başlangıç değeri için (3.5) ile verilen Krasnoselskii iterasyonu tarafından üretilen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}=\{1/2\}$ sabit dizisi T'nin sabit noktası olan $1/2$ değerine yakınsar [86].

Tanım 3.6 (Mann İterasyon Yöntemi) $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\alpha_n\in[0,1]$ belirli şartları sağlayan bir reel sayı dizisi olmak üzere,

$$\begin{cases} u_0\in X, \\ u_{n+1}=f(T,u_n)=(1-\alpha_n)u_n+\alpha_n Tu_n \end{cases} \tag{3.6}$$

şeklinde ifade edilen iterasyon yöntemine Mann iterasyon yöntemi denir [106].

Eğer T operatörü sürekli ve Mann iterasyonundan elde edilen dizi yakınsak ise bu dizi T'nin sabit noktasına yakınsar. Ancak T operatörü sürekli değilse Mann iterasyonundan elde edilen dizi yakınsak olsa bile bu operatörün sabit noktasına yakınsamayabilir. Bu durum aşağıdaki örnekte gösterilmiştir:

Örnek 3.7 $T:[0,1]\to[0,1]$ olmak üzere $T(0)=T(1)=0$ ve $0<x<1$ için $T(x)=1$ şeklinde verilsin. $F_T=\{0\}$ olduğu açıktır. $n\geq 1$ için $\alpha_n=\dfrac{1}{n}$ seçilirse Mann iterasyonundan elde edilen dizi 1 noktasına yakınsayacaktır.

Tanım 3.8 (Ishikawa İterasyon Yöntemi) $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\alpha_n,\beta_n\in[0,1]$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1}=f(T,x_n)=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n Ty_n \\ y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n Tx_n \end{cases} \tag{3.7}$$

şeklinde ifade edilen iterasyon yöntemine Ishikawa iterasyon yöntemi denir [107].

2000 yılında, Noor [108] tarafından varyasyonel eşitsizliklerin yaklaşık çözümlerinin elde edilmesi amacıyla aşağıdaki üç adımlı iterasyon yöntemi tanımlandı:

Tanım 3.9 (Noor İterasyon Yöntemi) $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\alpha_n,\beta_n,\gamma_n\in[0,1]$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(T, x_n) = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T z_n \\ z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n \end{cases} \tag{3.8}$$

Tanım 3.10 (S-İterasyon Yöntemi) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n, \beta_n \in [0,1]$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)Tx_n + \alpha_n T y_n \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n \end{cases} \tag{3.9}$$

şeklinde ifade edilen iterasyon yöntemine S-iterasyon yöntemi denir [109]-[110].

Gürsoy ve Karakaya [111] tarafından Picard-S iterasyon yöntemi şu şekilde tanımlandı:

Tanım 3.11 (Picard-S İterasyon Yöntemi) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n, \beta_n \in [0,1]$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = T y_n \\ y_n = (1-\alpha_n)Tx_n + \alpha_n T z_n \\ z_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n \end{cases} \tag{3.10}$$

Tanım 3.12 (SP-İterasyon Yöntemi) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in [0,1]$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)y_n + \alpha_n T y_n \\ y_n = (1-\beta_n)z_n + \beta_n T z_n \\ z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n \end{cases} \tag{3.11}$$

şeklinde ifade edilen iterasyon yöntemine SP-iterasyon yöntemi denir [46].

Tanım 3.13 (CR-İterasyon Yöntemi) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in [0,1]$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere,

$$\begin{cases} u_{n+1} = (1-\alpha_n)v_n + \alpha_n T v_n \\ v_n = (1-\beta_n)Tu_n + \beta_n T w_n \\ w_n = (1-\gamma_n)u_n + \gamma_n T u_n \end{cases} \tag{3.12}$$

şeklinde ifade edilen iterasyon yöntemine CR-iterasyon yöntemi denir [112].

Tanım 3.14 (S*-İterasyon Yöntemi) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in [0,1]$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)Tx_n + \alpha_n Ty_n \\ y_n = (1-\beta_n)Tx_n + \beta_n Tz_n \\ z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n Tx_n \end{cases} \tag{3.13}$$

şeklinde ifade edilen iterasyon yöntemine S* iterasyon yöntemi denir [113].

2013 yılında Khan [114] tarafından Picard-Mann iterasyon yöntemi şu şekilde tanımlandı:

Tanım 3.15 (Picard-Mann İterasyon Yöntemi) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n \in [0,1]$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizisi olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ty_n \\ y_n = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n Tx_n \end{cases} \tag{3.14}$$

2014 yılında Abbas ve Nazır [115] tarafından yeni üç adımlı iterasyon yöntemini şu şekilde tanımlandı:

Tanım 3.16 (Abbas ve Nazır İterasyon Yöntemi) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in [0,1]$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)Ty_n + \alpha_n Tz_n \\ y_n = (1-\beta_n)Tx_n + \beta_n Tz_n \\ z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n Tx_n \end{cases} \tag{3.15}$$

Sabit nokta iterasyon yöntemi tanımlanırken dikkat edilmesi gereken iki nokta vardır. Birincisi, tanımlanacak iterasyonun mevcut iterasyon yöntemlerinden daha hızlı olması, ikincisi ise bu iterasyon yönteminin sade olmasıdır. Bu noktalardan hareketle tanımladığımız yeni üç adımlı iterasyon aşağıdaki gibidir:

Tanım 3.17 (Yeni Üç adımlı İterasyon Yöntemi) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n \in [0,1]$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizisi olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ty_n \\ y_n = (1-\alpha_n) z_n + \alpha_n T z_n \\ z_n = Tx_n \end{cases} \tag{3.16}$$

Yeni tanımlanan iterasyon yöntemi yardımıyla elde edilecek olan bazı sabit nokta teoremlerinin ispatında kullanılacak lemma ve tanımlar aşağıda verilmiştir:

Lemma 3.18 $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$, her $n \in \mathbb{N}$ için $\beta_n \in [0,1)$ olacak şekildeki negatif olmayan bir reel sayı dizisi olsun.

Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \infty$ ise bu durumda $\prod_{n=1}^{\infty}(1-\beta_n) = 0$ dır [60].

Lemma 3.19 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ aşağıdaki eşitsizliği sağlayan, negatif olmayan iki dizi olsun:

$$a_{n+1} \leq (1-\mu_n) a_n + b_n$$

Burada her $n \geq n_0$ için $\mu_n \in (0,1)$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n = \infty$ ve $n \to \infty$ için $\frac{b_n}{\mu_n} \to 0$ dır. Bu durumda $\lim a_n = 0$ [116].

Lemma 3.20 $\{a_n\}$ negatif olmayan bir dizi, her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu_n \in (0,1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n = \infty$ ve $\eta_n \geq 0$ olsun. Her $n \geq n_0$ için

$$a_{n+1} \leq (1-\mu_n) a_n + \mu_n \eta_n$$

eşitsizliğinin sağlanacağı şekilde bir n_0 sayısı mevcut olsun. Bu durumda

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} \eta_n$$

eşitsizliği sağlanır [59].

Tanım 3.21 $T, S : C \to C$ iki operatör olsun. Her $x \in C$ ve uygun bir $\varepsilon > 0$ için

$$\|Tx - Sx\| \leq \varepsilon$$

ise S'ye T'nin bir yaklaşım operatörü denir [59].

Tanım 3.22 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ aynı p_* noktasına yakınsayan iki dizi olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d(a_n, p_*)}{d(b_n, p_*)} = 0$$

ise $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi p_* noktasına $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinden daha hızlı yakınsar denir [117].

3.2 Yeni Üç Adımlı İterasyon Yöntemi İçin Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Bu bölümde (3.16) ile verilen yeni iterasyon yöntemiyle elde edilen dizinin almost contraction dönüşüm sınıfının teklikle belirlenen sabit noktasına kuvvetli yakınsadığı, yakınsaklığının denkliği, yakınsaklık hızı ve veri bağlılığı sonuçları gösterilecektir:

Teorem 3.23 C kümesi X Banach uzayının boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi olmak üzere $T: C \to C$ tanımlı (2.26) şartını sağlayan bir almost contraction dönüşüm olsun. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ (3.16) no'lu iterasyondan elde edilen bir dizi ve $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ kontrol dizisi [0,1] aralığına ait olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \infty$ şartı sağlansın. Bu durumda $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi T operatörünün teklikle belirli olan p_* sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat T'nin C'de bir tek sabit noktaya sahip olduğu Teorem 2.35'ten kolaylıkla görülebilir. $n \to \infty$ için $x_n \to p_*$ olduğu gösterilecektir. (2.26) ve (3.16) kullanılarak

$$\|z_n - p_*\| = \|Tx_n - p_*\| \le \delta\|x_n - p_*\| \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}\|y_n - p_*\| &= \|(1-\alpha_n)z_n + \alpha_n T z_n - p_*\| \\ &\le (1-\alpha_n)\|z_n - p_*\| + \alpha_n\|Tz_n - Tp_*\| \\ &\le (1-\alpha_n)\|z_n - p_*\| + \alpha_n\delta\|z_n - p_*\| \\ &= [1-\alpha_n(1-\delta)]\|z_n - p_*\|\end{aligned} \tag{3.18}$$

eşitsizlikleri elde edilir. (3.17) eşitsizliği (3.18)'de yerine yazılırsa;

$$\|y_n - p_*\| \le \delta[1-\alpha_n(1-\delta)]\|x_n - p_*\| \tag{3.19}$$

olur. Ayrıca

$$\|x_{n+1} - p_*\| = \|Ty_n - p_*\| \le \delta\|y_n - p_*\| \tag{3.20}$$

olup (3.19) eşitsizliği (3.20)'de yerine yazılırsa;

$$\|x_{n+1}-p_*\| \leq \delta^2\left[1-\alpha_n(1-\delta)\right]\|x_n-p_*\|$$

elde edilir. Son eşitsizlikte tümevarım uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
\|x_n-p_*\| &\leq \delta^2\left[1-\alpha_{n-1}(1-\delta)\right]\|x_{n-1}-p_*\| \\
\|x_{n-1}-p_*\| &\leq \delta^2\left[1-\alpha_{n-2}(1-\delta)\right]\|x_{n-2}-p_*\| \\
&\vdots \\
\|x_2-p_*\| &\leq \delta^2\left[1-\alpha_1(1-\delta)\right]\|x_1-p_*\|
\end{aligned} \tag{3.21}$$

olur. (3.21)'den

$$\|x_{n+1}-p_*\| \leq \|x_1-p_*\|\delta^{2n}\prod_{i=1}^{n}\left[1-\alpha_i(1-\delta)\right] \tag{3.22}$$

elde edilir. $\delta \in (0,1)$ olduğundan $\left[1-\alpha_n(1-\delta)\right]<1$ olur. Klasik analizden her $x\in[0,1]$ için $1-x\leq e^{-x}$ eşitsizliğinin sağlandığı bilinmektedir. Bu gerçekten hareketle (3.22) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}-p_*\| &\leq \|x_1-p_*\|\delta^{2n}\prod_{i=1}^{n}e^{-(1-\delta)\alpha_i} \\
&= \|x_1-p_*\|\delta^{2n}e^{-(1-\delta)\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

şeklinde yazılabilir. (3.23)'de limit alınırsa $n\to\infty$ için $x_n\to p_*$ olduğu görülür. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.24 X bir Banach uzayı, C kümesi X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi ve $T:C\to C$ (2.26) şartını sağlayan bir almost contraction dönüşüm olsun. T dönüşümünün $p_*\in F_T$ gibi bir sabit noktaya sahip olduğu kabul edilsin. $x_1=u_1\in C$ ve $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}\in[0,1]$ olmak üzere $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$ şartı sağlanıyorsa aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) (3.6) ile verilen Mann iterasyon yönteminden elde edilen $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $p_*\in F_T$ ye yakınsar,

(ii) (3.16) ile verilen yeni iterasyon yönteminden elde edilen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $p_* \in F_T$ ye yakınsar.

İspat $(i) \Rightarrow (ii)$: $n \to \infty$ iken $u_n \to p_*$ kabulü altında $x_n \to p_*$ olduğu gösterilecektir. (3.6) Mann iterasyonu, (3.16) yeni iterasyon yöntemi ve (2.26) şartı kullanılarak;

$$\begin{aligned}\|u_{n+1} - x_{n+1}\| &= \|(1-\alpha_n)u_n + \alpha_n Tu_n - Ty_n\| \\ &\le (1-\alpha_n)\|u_n - Ty_n\| + \alpha_n\|Tu_n - Ty_n\| \\ &\le (1-\alpha_n)\{\|u_n - Tu_n\| + \|Tu_n - Ty_n\|\} + \alpha_n\|Tu_n - Ty_n\| \\ &\le [1-\alpha_n + L]\|u_n - Tu_n\| + \delta\|u_n - y_n\|,\end{aligned} \tag{3.24}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\|u_n - y_n\| &\le (1-\alpha_n)\|u_n - z_n\| + \alpha_n\|u_n - Tz_n\| \\ &\le (1-\alpha_n)\|u_n - z_n\| + \alpha_n\{\|u_n - Tu_n\| + \|Tu_n - Tz_n\|\} \\ &\le [1-\alpha_n(1-\delta)]\|u_n - z_n\| + \alpha_n(1+L)\|u_n - Tu_n\|,\end{aligned} \tag{3.25}$$

olup,

$$\begin{aligned}\|u_n - z_n\| &\le \|u_n - Tu_n\| + \|Tu_n - Tx_n\| \\ &\le \delta\|u_n - x_n\| + (1+L)\|u_n - Tu_n\|,\end{aligned} \tag{3.26}$$

elde edilir. Sırasıyla (3.26) eşitsizliği (3.25)'te ve (3.25) eşitsizliği (3.24)'te yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}\|u_{n+1} - x_{n+1}\| &\le \{1-\alpha_n + L + \alpha_n\delta(1+L) \\ &\quad +\delta[1-\alpha_n(1-\delta)](1+L)\}\|u_n - Tu_n\| \\ &\quad +\delta^2[1-\alpha_n(1-\delta)]\|u_n - x_n\|, \\ &\le \{1-\alpha_n + L + \delta(1+L)(1+\alpha_n\delta)\}\|u_n - Tu_n\| \\ &\quad +[1-\alpha_n(1-\delta)]\|u_n - x_n\|,\end{aligned} \tag{3.27}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.27)'den,

$$\begin{aligned}\mu_n &= \alpha_n(1-\delta) \in (0,1) \\ a_n &= \|u_n - x_n\| \\ b_n &= \{1-\alpha_n + L + \delta(1+L)(1+\alpha_n\delta)\}\|u_n - Tu_n\|,\end{aligned}$$

şeklinde seçilirse

$$\begin{aligned}\|u_n - Tu_n\| &= \|u_n - p_* + Tp_* - Tu_n\| \\ &\le \|u_n - p_*\| + \delta\|u_n - p_*\| + L\|p_* - Tp_*\| \\ &= (1+\delta)\|u_n - p_*\|,\end{aligned}$$

olup $Tp_* = p_*$ ve $n \to \infty$ için $\|u_n - p_*\| \to 0$ kabullerinden $\|u_n - Tu_n\| \to 0$ elde edilir. Dolayısıyla $b_n \to 0$ dır. Lemma 3.19'un şartları sağlandığından $n \to \infty$ için $a_n = \|u_n - x_n\| \to 0$ dır. Üçgen eşitsizliğinden $\|x_n - p_*\| \le \|x_n - u_n\| + \|u_n - p_*\|$ yazılabilir. Sonuç olarak $\lim_{n\to\infty}\|x_n - p_*\| = 0$ elde edilir.

$(ii) \Rightarrow (i)$: $n \to \infty$ iken $x_n \to p_*$ kabulü altında $u_n \to p_*$ olduğu gösterilecektir. (3.16) yeni iterasyon yöntemi, (3.6) Mann iterasyonu, ve (2.26) şartı kullanılarak;

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - u_{n+1}\| &\le (1-\alpha_n)\|Ty_n - u_n\| + \alpha_n\|Ty_n - Tu_n\| \\ &\le (1-\alpha_n + \alpha_n L)\|y_n - Ty_n\| + [1-\alpha_n(1-\delta)]\|y_n - u_n\|,\end{aligned} \tag{3.28}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\|y_n - u_n\| &= (1-\alpha_n)\|z_n - u_n\| + \alpha_n\|Tz_n - u_n\| \\ &\le (1-\alpha_n)\|z_n - u_n\| + \alpha_n\|Tz_n - z_n\| + \alpha_n\|z_n - u_n\| \\ &= \|z_n - u_n\| + \alpha_n\|Tz_n - z_n\|,\end{aligned} \tag{3.29}$$

ve

$$\begin{aligned}\|z_n - u_n\| &= \|Tx_n - u_n\| \\ &\le \|Tx_n - x_n\| + \|x_n - u_n\|,\end{aligned} \tag{3.30}$$

elde edilir. Sırasıyla (3.30) eşitsizliği (3.29)'da ve (3.29) eşitsizliği (3.28)'de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - u_{n+1}\| \le\ & [1-\alpha_n(1-\delta)]\|x_n - u_n\| \\ &+ [1-\alpha_n(1-\delta)]\|x_n - Tx_n\| \\ &+ (1-\alpha_n + \alpha_n L)\|y_n - Ty_n\| \\ &+ [1-\alpha_n(1-\delta)]\alpha_n\|z_n - Tz_n\|\end{aligned} \tag{3.31}$$

eşitsizliği elde edilir. $n\to\infty$ için $\|x_n-p_*\|\to 0$ ve $Tp_*=p_*$ kabullerinden,

$$\begin{aligned}\|x_n-Tx_n\| &\le \|x_n-p_*\|+\|Tp_*-Tx_n\|\\ &\le \|x_n-p_*\|+\delta\|x_n-p_*\|+L\|p_*-Tp_*\|\\ &=(1+\delta)\|x_n-p_*\|\end{aligned}$$

olup $n\to\infty$ için $\|x_n-Tx_n\|\to 0$ elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\|y_n-Ty_n\| &\le \|y_n-p_*\|+\|Tp_*-Ty_n\|\\ &\le \|y_n-p_*\|+\delta\|y_n-p_*\|+L\|p_*-Tp_*\|\\ &=(1+\delta)\|y_n-p_*\|\\ &=(1+\delta)\|(1-\alpha_n)z_n+\alpha_nTz_n-p_*\|\\ &\le (1+\delta)(1-\alpha_n)\|z_n-p_*\|+(1+\delta)\alpha_n\|Tz_n-Tp_*\|\\ &\le (1+\delta)[1-\alpha_n(1-\delta)]\|z_n-p_*\|,\end{aligned}$$

ve

$$\|z_n-p_*\|=\|Tx_n-p_*\|\le\delta\|x_n-p_*\|,$$

olup buradan $n\to\infty$ için $\|z_n-p_*\|\to 0$ olur. Dolayısıyla $n\to\infty$ için $\|y_n-Ty_n\|\to 0$ elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\|z_n-Tz_n\| &\le \|z_n-p_*\|+\|Tp_*-Tz_n\|\\ &\le \|z_n-p_*\|+\delta\|z_n-p_*\|+L\|p_*-Tp_*\|\\ &=(1+\delta)\|z_n-p_*\|,\end{aligned}$$

olduğundan $n\to\infty$ için $\|z_n-Tz_n\|\to 0$ olur. (3.31)'den,

$$\begin{aligned}\mu_n &=\alpha_n(1-\delta)\in(0,1)\\ a_n &=\|x_n-u_n\|\\ b_n &=[1-\alpha_n(1-\delta)]\|x_n-Tx_n\|\\ &\quad+(1-\alpha_n+\alpha_nL)\|y_n-Ty_n\|\\ &\quad+[1-\alpha_n(1-\delta)]\alpha_n\|z_n-Tz_n\|,\end{aligned}$$

şeklinde seçilirse $n\to\infty$ için $b_n\to 0$ olur. Lemma 3.19'un şartları sağlandığından $n\to\infty$ için $a_n=\|x_n-u_n\|\to 0$ elde edilir. Üçgen eşitsizliğinden

$\|u_n - p_*\| \leq \|u_n - x_n\| + \|x_n - p_*\|$ yazılabilir. Sonuç olarak $\lim_{n\to\infty}\|u_n - p_*\| = 0$ elde edilir.

Şoltuz ([118], Sonuç 2) tarafından bir normlu uzayda Teorem 2.28'de verilen (z_1)-(z_3) şartlarını sağlayan Zamfirescu operatörler sınıfı için Mann (3.6), Ishikawa (3.7) ve Noor (3.8) iterasyon yöntemlerinin yakınsaklıklarının denk olduğu gösterildi.

Chugh ve Kumar ([119], Sonuç 3.2) tarafından bir Banach uzayında (2.15) şartını sağlayan quasi-contractive operatörler sınıfı için Picard (3.2), Mann (3.6), Ishikawa (3.7) Noor (3.8) ve SP (3.11) iterasyon yöntemlerinin yakınsaklıklarının denk olduğu gösterildi.

Yukarıdaki gerçeklerden hareketle; Teorem 3.24' ten aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.25 X bir Banach uzayı, $\emptyset \neq C \subset X$ konveks ve kapalı bir küme olsun. $T: C \to C$ (2.26) şartını sağlayan bir almost contraction dönüşüm olsun. T'nin $p_* \in F_T$ gibi bir sabit noktaya sahip olduğu kabul edilsin. Tüm iterasyonlar için başlangıç noktası aynı ise aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) (3.2) ile verilen Picard iterasyonu $p_* \in F_T$ ye yakınsar,

(ii) (3.6) ile verilen Mann iterasyonu $p_* \in F_T$ ye yakınsar,

(iii) (3.7) ile verilen Ishikawa iterasyonu $p_* \in F_T$ ye yakınsar,

(iv) (3.8) ile verilen Noor iterasyonu $p_* \in F_T$ ye yakınsar,

(v) (3.10) ile verilen Picard-S iterasyonu $p_* \in F_T$ ye yakınsar,

(vi) (3.11) ile verilen SP-iterasyonu $p_* \in F_T$ ye yakınsar,

(vii) (3.12) ile verilen CR iterasyonu $p_* \in F_T$ ye yakınsar,

(viii) (3.13) ile verilen S* iterasyonu $p_* \in F_T$ ye yakınsar,

(ix) (3.16) ile verilen yeni iterasyon yöntemi $p_* \in F_T$ ye yakınsar.

Aşağıdaki teoremde yeni tanımlanan iterasyon yöntemi ile Picard-S iterasyon yönteminin yakınsaklık hızları karşılaştırılmıştır. Ayrıca bu teoremin bir sonucu olarak yeni tanımlanan iterasyon yönteminin daha hızlı olduğu MATLAB programı kullanılarak nümerik olarak gösterilmiştir.

Teorem 3.26 p_* sabit noktasına sahip T dönüşümü ile C kümesi ve X uzayı Teorem 3.24'teki gibi tanımlansın. $x_1 = u_1 \in C$ olmak üzere (3.16) ile verilen yeni iterasyon yönteminden elde edilen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi ve (3.10) ile verilen Picard-S iterasyon yönteminden elde edilen $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi göz önüne alınsın. $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ dizileri $[0,1]$ aralığında olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için ve bazı $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ için sırasıyla (i) $\alpha_1 \leq \alpha_n \leq 1$, $\beta_1 \leq \beta_n \leq 1$ şartları sağlansın. Bu durumda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi p_* sabit noktasına $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinden daha hızlı yakınsar.

İspat Teorem 3.23'ten

$$\|x_{n+1} - p_*\| \leq \|x_1 - p_*\| \delta^{2n} \prod_{i=1}^{n} \left[1 - \alpha_i (1 - \delta)\right] \tag{3.32}$$

eşitsizliği elde edilmişti. Benzer şekilde (3.10) ile verilen Picard-S iterasyonu için

$$\|u_{n+1} - p_*\| \leq \|u_1 - p_*\| \delta^{2n} \prod_{i=1}^{n} \left[1 - \alpha_i \beta_i (1 - \delta)\right] \tag{3.33}$$

eşitsizliği elde edilir. (i) kabulü sırasıyla (3.32) ve (3.33) eşitsizliklerine uygulanırsa;

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - p_*\| &\leq \|x_1 - p_*\| \delta^{2n} \prod_{i=1}^{n} [1 - \alpha_1 (1 - \delta)] \\ &= \|x_1 - p_*\| \delta^{2n} [1 - \alpha_1 (1 - \delta)]^n,\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\|u_{n+1} - p_*\| &\leq \|u_1 - p_*\| \delta^{2n} \prod_{i=1}^{n} [1 - \alpha_1 \beta_1 (1 - \delta)] \\ &= \|u_1 - p_*\| \delta^{2n} [1 - \alpha_1 \beta_1 (1 - \delta)]^n\end{aligned}$$

elde edilir.

$$a_n = \|x_1 - p_*\| \delta^{2n} [1 - \alpha_1 (1 - \delta)]^n$$

$$b_n = \|u_1 - p_*\| \delta^{2n} [1 - \alpha_1 \beta_1 (1 - \delta)]^n,$$

şeklinde seçilsin ve $\psi_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\psi_n = \frac{a_n}{b_n} &= \frac{\|x_1 - p_*\|\delta^{2n}[1-\alpha_1(1-\delta)]^n}{\|u_1 - p_*\|\delta^{2n}[1-\alpha_1\beta_1(1-\delta)]^n} \\ &= \left(\frac{1-\alpha_1(1-\delta)}{1-\alpha_1\beta_1(1-\delta)}\right)^n\end{aligned}$$

elde edilir. δ ve β_1 sayıları $(0,1)$ aralığında olup,

$$\begin{aligned}&\beta_1 < 1 \\ &\quad \Rightarrow \alpha_1\beta_1 < \alpha_1 \\ &\quad \Rightarrow \alpha_1\beta_1(1-\delta) < \alpha_1(1-\delta) \\ &\quad \Rightarrow \frac{[1-\alpha_1(1-\delta)]}{[1-\alpha_1\beta_1(1-\delta)]} < 1\end{aligned}$$

elde edilir. $\lim_{n\to\infty}\psi_n = 0$ olduğundan Tanım 3.22'den $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin p_* sabit noktasına $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinden daha hızlı yakınsadığı söylenebilir.

Örnek 3.27 $X = \mathbb{R}$ ve $C = [1,\infty)$ olmak üzere her $x \in C$ için $T : C \to C$, $T(x) = \dfrac{3}{4}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$ şeklinde tanımlansın. T'nin $p_* = 1{,}73205080756888$ şeklinde bir tek sabit noktaya sahip almost contraction dönüşüm olduğu açıktır. $x_1 = 1$ başlangıç noktasıyla birlikte $\alpha_n = \beta_n = \gamma_n = \dfrac{1}{4}$ olsun. Aşağıda verilen çizelgeler (3.16) ile verilen yeni iterasyon yönteminin, Picard (3.2), Mann (3.6), Ishikawa (3.7), Noor (3.8), S (3.9), Picard-S (3.10), SP (3.11), CR (3.12), S* (3.13), Picard-Mann (3.14) ve Abbas-Nazır (3.15) iterasyon yöntemlerinden daha hızlı olduğunu göstermektedir:

Çizelge 3.1 Bazı iterasyon yöntemlerinin yakınsaklık hızlarının karşılaştırılması

x_n	Mann	Ishikawa	Noor	SP
x_1	1	1	1	1
x_2	1,12500000000000	1,12760416666667	1,12770753644630	1,29853765491738
x_3	1,22135416666667	1,22835269106877	1,22874546233073	1,45852260608018
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{83}	1,73204106834632	1,73204843765511	1,73204881698286	1,73205080756887
x_{84}	1,73204228575256	1,73204877092441	1,73204910079701	1,73205080756888
x_{85}	1,73204335098222	1,73204905732768	1,73204934414543	1,73205080756888
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{218}	1,73205080756873	1,73205080756887	1,73205080756888	1,73205080756888
x_{219}	1,73205080756875	1,73205080756887	1,73205080756888	1,73205080756888
x_{220}	1,73205080756877	1,73205080756887	1,73205080756888	1,73205080756888
x_{221}	1,73205080756877	1,73205080756887	1,73205080756888	1,73205080756888
x_{222}	1,73205080756879	1,73205080756888	1,73205080756888	1,73205080756888
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{249}	1,73205080756887	1,73205080756888	1,73205080756888	1,73205080756888
x_{250}	1,73205080756888	1,73205080756888	1,73205080756888	1,73205080756888

Çizelge 3.1 göstermektedir ki, SP (3.11) iterasyon yöntemi 84. adımda sabit noktaya ulaşırken, Noor (3.8) iterasyon yöntemi 218. adımda, Ishikawa (3.7) iterasyon yöntemi 222. adımda ve Mann (3.6) iterasyon yöntemi 250. adımda sabit noktaya ulaşmaktadır.

Çizelge 3.2 Bazı iterasyon yöntemlerinin yakınsaklık hızlarının karşılaştırılması

x_n	Picard	Picard-Mann	S*	S
x_1	1	1	1	1
x_2	1,50000000000000	1,51041666666667	1,53152164346837	1,50260416666667
x_3	1,62500000000000	1,64207959798239	1,65074040007186	1,62936277984372
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{38}	1,73205080756595	1,73205080756885	1,73205080756886	1,73205080756795
x_{39}	1,73205080756742	1,73205080756887	1,73205080756887	1,73205080756843
x_{40}	1,73205080756815	1,73205080756887	1,73205080756887	1,73205080756866
x_{41}	1,73205080756851	1,73205080756888	1,73205080756888	1,73205080756877
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{46}	1,73205080756887	1,73205080756888	1,73205080756888	1,73205080756887
x_{47}	1,73205080756887	1,73205080756888	1,73205080756888	1,73205080756888
x_{48}	1,73205080756887	1,73205080756888	1,73205080756888	1,73205080756888
x_{49}	1,73205080756888	1,73205080756888	1,73205080756888	1,73205080756888

Çizelge 3.2 göstermektedir ki Picard (3.2) iterasyon yöntemi 49. adımda sabit noktaya ulaşırken, S (3.9) iterasyon yöntemi 47. adımda, Picard-Mann (3.14) ve S* (3.13) iterasyon yöntemleri ise 41. adımda sabit noktaya ulaşmaktadır.

Çizelge 3.3 Bazı iterasyon yöntemlerinin yakınsaklık hızlarının karşılaştırılması

x_n	Yeni iterasyon	Picard-S	Abbas ve Nazır	CR
x_1	1	1	1	1
x_2	1,63823341836735	1,62608657387348	1,59716909707178	1,53347476846837
x_3	1,71238829126157	1,70759059791304	1,69489357952688	1,65363032158024
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{22}	1,73205080756887	1,73205080756883	1,73205080756650	1,73205080137048
x_{23}	1,73205080756888	1,73205080756887	1,73205080756819	1,73205080494182
x_{24}	1,73205080756888	1,73205080756887	1,73205080756868	1,73205080645546
x_{25}	1,73205080756888	1,73205080756888	1,73205080756882	1,73205080709698
x_{26}	1,73205080756888	1,73205080756888	1,73205080756886	1,73205080736887
x_{27}	1,73205080756888	1,73205080756888	1,73205080756887	1,73205080748411
x_{28}	1,73205080756888	1,73205080756888	1,73205080756888	1,73205080753295
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{39}	1,73205080756888	1,73205080756888	1,73205080756888	1,73205080756887
x_{40}	1,73205080756888	1,73205080756888	1,73205080756888	1,73205080756888

Çizelge 3.3 göstermektedir ki (3.16) ile verilen yeni iterasyon yöntemi 23. adımda sabit noktaya ulaşırken, Picard-S (3.10) iterasyon yöntemi 25. adımda, Abbas ve Nazır (3.15) iterasyon yöntemi 28. adımda ve CR (3.12) iterasyon yöntemi 40. adımda sabit noktaya ulaşmaktadır.

Sabit nokta çalışmalarında veri bağlılığı kavramı aşağıdaki gibi ifade edilir:

Bir T dönüşümünün p_* ile gösterilen sabit noktası hesaplanırken, çeşitli sebeplerden dolayı T'nin Tanım 3.21' deki şartları sağlayan S gibi belirli bir yaklaşım operatörü kullanılır. S'nin belirli bir metodla hesaplanabilen q_* gibi bir sabit noktaya sahip olduğu kabul edilsin. Bu durumda doğal olarak aşağıdaki problemler ortaya çıkmaktadır:

(i) p_* yaklaşık olarak q_* mıdır?

Eğer cevap evet ise

(ii) $\|p_* - q_*\|$ değeri nasıl hesaplanabilir?

Farklı dönüşüm sınıfları ve iterasyon yöntemleri için (i) ve (ii) ile verilen problemlere olumlu cevaplar bulunmuştur. Bu cevaplardan biri Şoltuz ve Grosan [59] tarafından aşağıdaki teoremle verilmiştir:

Teorem 3.28 X bir reel Banach uzayı, $C \subset X$ boş olmayan, konveks ve kapalı bir küme ve $\varepsilon > 0$ sabit bir sayı olsun. $T : C \to C$ (2.28) şartını sağlayan bir dönüşüm ve $S : C \to C$ herhangi bir dönüşüm olsun. T'nin x_* gibi ve S'nin de (x_* a yeterince yakın) u_* gibi sabit noktalara sahip oldukları kabul edilsin. Eğer

$$\|Tz - Sz\| \le \varepsilon\,,\ \forall z \in C$$

bağıntısı sağlanıyor ise, bu durumda

$$\|x_* - u_*\| \le \frac{\varepsilon}{1-q}$$

olur.

Aşağıdaki teoremde (3.16) ile verilen üç adımlı yeni iterasyon yöntemi yardımıyla (2.26) şartını sağlayan almost contraction dönüşümlerin sabit noktalarının veri bağlılığı incelenmiştir:

Teorem 3.29 X bir Banach uzayı ve C bu uzayın boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olmak üzere $T, S : C \to C$ (2.26) şartını sağlayan almost contraction operatörler olsun. x_* sabit noktasına sahip S operatörü, p_* sabit noktasına sahip T'nin yaklaşım operatörü olsun. T operatörü için (3.16) ile verilen yeni iterasyon yönteminden elde edilen dizi $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ile gösterilsin. S operatörü için aşağıda verilen iterasyondan elde edilen dizi $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ile gösterilisin:

$$\begin{cases} u_{n+1} = Sv_n \\ v_n = (1-\alpha_n)w_n + \alpha_n Sw_n \\ w_n = Su_n,\ n \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{3.34}$$

burada her $n \in \mathbb{N}$ için $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \in [0,1]$ ve $\frac{1}{2} \le \alpha_n$ dir. $\varepsilon > 0$ olmak üzere $n \to \infty$ için

$u_n \to x_*$ ise

$\|p_* - x_*\| \le \frac{5\varepsilon}{1-\delta}$ eşitsizliği geçerlidir.

İspat (2.26), (3.16) ve (3.34) kullanılarak;

$$\begin{aligned} \|z_n - w_n\| &= \|Tx_n - Su_n\| \le \|Tx_n - Tu_n\| + \|Tu_n - Su_n\| \\ &\le \delta\|x_n - u_n\| + L\|x_n - Tx_n\| + \varepsilon, \end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned} \|y_n - v_n\| &= \|(1-\alpha_n)z_n + \alpha_n Tz_n - (1-\alpha_n)w_n - \alpha_n Sw_n\| \\ &\le (1-\alpha_n)\|z_n - w_n\| + \alpha_n\|Tz_n - Sw_n\| \\ &\le (1-\alpha_n)\|z_n - w_n\| + \alpha_n\|Tz_n - Tw_n\| \\ &\quad + \alpha_n\|Tw_n - Sw_n\| \\ &\le (1-\alpha_n)\|z_n - w_n\| + \alpha_n\delta\|z_n - w_n\| \\ &\quad + \alpha_n L\|z_n - Tz_n\| + \alpha_n\varepsilon \\ &= [1-\alpha_n(1-\delta)]\|z_n - w_n\| + \alpha_n L\|z_n - Tz_n\| \\ &\quad + \alpha_n\varepsilon \end{aligned} \tag{3.36}$$

elde edilir. (3.35) eşitsizliği (3.36)'da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \|y_n - v_n\| &\le [1-\alpha_n(1-\delta)]\{\delta\|x_n - u_n\| + L\|x_n - Tx_n\| + \varepsilon\} \\ &\quad + \alpha_n L\|z_n - Tz_n\| + \alpha_n\varepsilon, \end{aligned} \tag{3.37}$$

olur. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1}-u_{n+1}\| &= \|Ty_n - Sv_n\| \\
&\le \|Ty_n - Tv_n\| + \|Tv_n - Sv_n\| \qquad (3.38)\\
&\le \delta\|y_n - v_n\| + L\|y_n - Ty_n\| + \varepsilon
\end{aligned}
$$

olup, (3.37) eşitsizliği (3.38)'de yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1}-u_{n+1}\| &\le \delta[1-\alpha_n(1-\delta)]\{\delta\|x_n-u_n\| + L\|x_n - Tx_n\| + \varepsilon\} \\
&\quad +\alpha_n\delta L\|z_n - Tz_n\| + \alpha_n\delta\varepsilon + L\|y_n - Ty_n\| + \varepsilon \\
&= \delta^2[1-\alpha_n(1-\delta)]\|x_n - u_n\| \\
&\quad +\delta[1-\alpha_n(1-\delta)]L\|x_n - Tx_n\| \\
&\quad +\delta[1-\alpha_n(1-\delta)]\varepsilon + \alpha_n\delta L\|z_n - Tz_n\| \\
&\quad +\alpha_n\delta\varepsilon + L\|y_n - Ty_n\| + \varepsilon
\end{aligned}
$$

elde edilir. Her $n\in\mathbb{N}$ için $\alpha_n \in [0,1]$ ve $\delta\in(0,1)$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
1-\alpha_n(1-\delta) &\le 1, \\
\delta[1-\alpha_n(1-\delta)] &< 1, \\
(1-\alpha_n) &\le 1, \\
\alpha_n\delta &< 1,
\end{aligned}
$$

eşitsizlikleri elde edilir. Kabul gereği $1-\alpha_n \le \alpha_n$ dir. Dolayısıyla

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1}-u_{n+1}\| &\le [1-\alpha_n(1-\delta)]\|x_n - u_n\| + \alpha_n\delta(1+\delta)L\|x_n - Tx_n\| \\
&\quad +2\alpha_n\varepsilon + \delta\alpha_n L\|z_n - Tz_n\| + \alpha_n\varepsilon \\
&\quad +2\alpha_n L\|y_n - Ty_n\| + 2\alpha_n\varepsilon \\
&= [1-\alpha_n(1-\delta)]\|x_n - u_n\| \\
&\quad +\alpha_n(1-\delta)\left\{\frac{\left\{\begin{array}{c}\delta(1+\delta)L\|x_n - Tx_n\| + 2L\|y_n - Ty_n\| \\ +\delta L\|z_n - Tz_n\| + 5\varepsilon\end{array}\right\}}{(1-\delta)}\right\}
\end{aligned}
$$

olur.

$$a_n = \|x_n - u_n\|$$
$$\mu_n = \alpha_n(1-\delta) \in (0,1)$$
$$\eta_n = \left\{ \frac{\left\{ \begin{array}{c} \delta(1+\delta)L\|x_n - Tx_n\| + 2L\|y_n - Ty_n\| \\ +\delta L\|z_n - Tz_n\| + 5\varepsilon \end{array} \right\}}{(1-\delta)} \right\}$$

şeklinde seçilirse Lemma 3.20'den

$$\begin{aligned} 0 &\leq \limsup_{n\to\infty} \|x_n - u_n\| \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{\left\{ \begin{array}{c} \delta(1+\delta)L\|x_n - Tx_n\| + 2L\|y_n - Ty_n\| \\ +\delta L\|z_n - Tz_n\| + 5\varepsilon \end{array} \right\}}{(1-\delta)} \right\} \\ &= \frac{5\varepsilon}{(1-\delta)} \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 3.23'ten $x_n \to p_*$ dir. Ayrıca kabulden $n \to \infty$ için $u_n \to x_*$ dır.

Sonuç olarak;

$$\|p_* - x_*\| \leq \frac{5\varepsilon}{1-\delta}$$

elde edilir.

3.3 S* İterasyon Yöntemi İçin Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Bu bölümde (3.13) ile verilen iterasyon yöntemiyle elde edilen dizinin almost contraction dönüşüm sınıfının teklikle belirlenen sabit noktasına kuvvetli yakınsadığı, yakınsaklığının denkliği, yakınsaklık hızı ve veri bağlılığı sonuçları gösterilecektir:

Teorem 3.30 C kümesi, X Banach uzayının boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesi olmak üzere $T: C \to C$ tanımlı (2.26) şartını sağlayan bir almost contraction dönüşüm olsun. $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, (3.13) no'lu iterasyondan elde edilen bir dizi ve $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ kontrol dizileri [0,1] aralığına ait olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ şartı sağlansın. Bu durumda $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi T operatörünün teklikle belirli olan p_* sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat T'nin C'de bir tek sabit noktaya sahip olduğu Teorem 2.35'den kolaylıkla görülebilir. $n \to \infty$ için $x_n \to p_*$ olduğunu gösterilecektir. (2.26) ve (3.13) kullanılarak;

$$\begin{aligned} \|z_n - p_*\| &= \|(1-\gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n - p_*\| \\ &\le (1-\gamma_n)\|x_n - p_*\| + \gamma_n \|Tx_n - Tp_*\| \\ &\le \{1-\gamma_n(1-\delta)\}\|x_n - p_*\| \end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned} \|y_n - p_*\| &= \|(1-\beta_n)Tx_n + \beta_n T z_n - p_*\| \\ &\le (1-\beta_n)\|Tx_n - Tp_*\| + \beta_n \|Tz_n - Tp_*\| \\ &\le (1-\beta_n)\delta\|x_n - p_*\| + \beta_n\delta\|z_n - p_*\| \end{aligned} \tag{3.40}$$

eşitsizlikleri elde edilir. (3.39) eşitsizliği (3.40)'ta yerine yazılırsa;

$$\|y_n - p_*\| \le \left\{(1-\beta_n)\delta + \beta_n\delta\left[1-\gamma_n(1-\delta)\right]\right\}\|x_n - p_*\| \tag{3.41}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p_*\| &= \|(1-\alpha_n)Tx_n + \alpha_n T y_n - p_*\| \\ &\le (1-\alpha_n)\|Tx_n - Tp_*\| + \alpha_n \|Ty_n - Tp_*\| \\ &\le (1-\alpha_n)\delta\|x_n - p_*\| + \alpha_n\delta\|y_n - p_*\| \end{aligned} \tag{3.42}$$

olup (3.41) eşitsizliği (3.42)'de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p_*\| &\le (1-\alpha_n)\delta\|x_n - p_*\| \\ &\quad + \alpha_n\delta\left\{(1-\beta_n)\delta + \beta_n\delta\left[1-\gamma_n(1-\delta)\right]\right\}\|x_n - p_*\| \end{aligned} \tag{3.43}$$

elde edilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in [0,1]$ ve $\delta \in (0,1)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p_*\| &\le \delta\left[1-\alpha_n(1-\delta)\right]\|x_n - p_*\| \\ &\le \left\{1-\alpha_n(1-\delta)\right\}\|x_n - p_*\| \end{aligned} \tag{3.44}$$

olup (3.44) ile verilen eşitsizlikte tümevarım uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
\|x_n - p_*\| &\le [1-\alpha_{n-1}(1-\delta)]\|x_{n-1} - p_*\| \\
\|x_{n-1} - p_*\| &\le [1-\alpha_{n-2}(1-\delta)]\|x_{n-2} - p_*\| \\
&\vdots \\
\|x_2 - p_*\| &\le [1-\alpha_1(1-\delta)]\|x_1 - p_*\| \\
\|x_1 - p_*\| &\le [1-\alpha_0(1-\delta)]\|x_0 - p_*\|
\end{aligned} \tag{3.45}
$$

olur. (3.45)'ten

$$
\|x_{n+1} - p_*\| \le \|x_0 - p_*\| \prod_{k=0}^{n} [1-\alpha_k(1-\delta)] \tag{3.46}
$$

elde edilir. Klasik analizden her $x \in [0,1]$ için $1-x \le e^{-x}$ eşitsizliğinin sağlandığı bilinmektedir. Bu gerçekten hareketle (3.46) eşitsizliği

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p_*\| &\le \|x_0 - p_*\| \prod_{k=0}^{n} e^{-(1-\delta)\alpha_k} \\
&= \|x_0 - p_*\| e^{-(1-\delta)\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}
\end{aligned} \tag{3.47}
$$

şeklinde yazılabilir. (3.47)'de limit alınırsa $n \to \infty$ için $x_n \to p_*$ olduğu görülür. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.31 X bir Banach uzayı, C kümesi X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi ve $T: C \to C$ (2.26) şartını sağlayan almost contraction dönüşüm olsun. T'nin $p_* \in F_T$ gibi bir sabit noktaya sahip olduğu kabul edilsin. $x_1 = u_1 \in C$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty} \in [0,1]$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ şartı sağlanıyorsa aşağıdaki ifadeler denktir:

i) (3.13) ile verilen S* iterasyon yönteminden elde edilen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $p_* \in F_T$ ye yakınsar.

ii) (3.12) ile verilen CR iterasyon yönteminden elde edilen $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $p_* \in F_T$ ye yakınsar.

İspat $(i) \Rightarrow (ii)$: $n \to \infty$ iken $x_n \to p_*$ kabulü altında $u_n \to p_*$ olduğu gösterilmelidir. (3.13) S* iterasyon yöntemi, (3.12) CR iterasyon yöntemi ve (2.26) şartı kullanılarak;

$$\begin{aligned}\left\|z_n - w_n\right\| &= \left\|(1-\gamma_n)x_n + \gamma_n Tx_n - (1-\gamma_n)u_n - \gamma_n Tu_n\right\| \\ &\le (1-\gamma_n)\left\|x_n - u_n\right\| + \gamma_n\left\|Tx_n - Tu_n\right\| \\ &\le \left[1-\gamma_n(1-\delta)\right]\left\|x_n - u_n\right\| + \gamma_n L\left\|x_n - Tx_n\right\|\end{aligned} \tag{3.48}$$

ve

$$\begin{aligned}\left\|y_n - v_n\right\| &= \left\|(1-\beta_n)Tx_n + \beta_n Tz_n - (1-\beta_n)Tu_n - \beta_n Tw_n\right\| \\ &\le (1-\beta_n)\delta\left\|x_n - u_n\right\| + (1-\beta_n)L\left\|x_n - Tx_n\right\| \\ &\quad + \beta_n\delta\left\|z_n - w_n\right\| + \beta_n L\left\|z_n - Tz_n\right\|\end{aligned} \tag{3.49}$$

elde edilir. (3.48) eşitsizliği (3.49)'da yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}\left\|y_n - v_n\right\| &\le \delta[1-\beta_n\gamma_n(1-\delta)]\left\|x_n - u_n\right\| \\ &\quad +\{(1-\beta_n)L + \beta_n\gamma_n\delta L\}\left\|x_n - Tx_n\right\| \\ &\quad +\beta_n L\left\|z_n - Tz_n\right\|\end{aligned} \tag{3.50}$$

olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\left\|x_n - w_n\right\| &= \left\|x_n - (1-\gamma_n)u_n - \gamma_n Tu_n\right\| \\ &\le (1-\gamma_n)\left\|x_n - u_n\right\| + \gamma_n\left\|x_n - Tx_n\right\| + \gamma_n\left\|Tx_n - Tu_n\right\| \\ &\le [1-\gamma_n(1-\delta)]\left\|x_n - u_n\right\| + (1+L)\gamma_n\left\|x_n - Tx_n\right\|,\end{aligned} \tag{3.51}$$

ve

$$\begin{aligned}\left\|x_n - v_n\right\| &= \left\|x_n - (1-\beta_n)Tu_n - \beta_n Tw_n\right\| \\ &\le (1-\beta_n)\left\|x_n - Tu_n\right\| + \beta_n\left\|x_n - Tw_n\right\| \\ &\le (1-\beta_n)\left\|x_n - Tx_n\right\| + (1-\beta_n)\left\|Tx_n - Tu_n\right\| \\ &\quad +\beta_n\left\|x_n - Tx_n\right\| + \beta_n\left\|Tx_n - Tw_n\right\| \\ &\le (1-\beta_n)\delta\left\|x_n - u_n\right\| + \beta_n\delta\left\|x_n - w_n\right\| \\ &\quad +(1+L)\left\|x_n - Tx_n\right\|\end{aligned} \tag{3.52}$$

olup (3.51) eşitsizliği (3.52)'de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}\left\|x_n - v_n\right\| &\le \delta[1-\beta_n\gamma_n(1-\delta)]\left\|x_n - u_n\right\| \\ &\quad +\{(1+L)(1+\beta_n\gamma_n\delta)\left\|x_n - Tx_n\right\|\end{aligned} \tag{3.53}$$

elde edilir. O halde,

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-u_{n+1}\| &= \|(1-\alpha_n)Tx_n+\alpha_nTy_n-(1-\alpha_n)v_n-\alpha_nTv_n\| \\ &\le (1-\alpha_n)\|x_n-Tx_n\|+(1-\alpha_n)\|x_n-v_n\| \\ &\quad +\alpha_n\delta\|y_n-v_n\|+\alpha_nL\|y_n-Ty_n\|\end{aligned} \tag{3.54}$$

şeklinde olup (3.50) ve (3.53) eşitsizlikleri (3.54)'te yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-u_{n+1}\| &\le (1-\alpha_n)\|x_n-Tx_n\| \\ &\quad +(1-\alpha_n)\delta[1-\beta_n\gamma_n(1-\delta)]\|x_n-u_n\| \\ &\quad +(1-\alpha_n)\{(1+L)(1+\beta_n\gamma_n\delta)\|x_n-Tx_n\| \\ &\quad +\alpha_n\delta^2[1-\beta_n\gamma_n(1-\delta)]\|x_n-u_n\| \\ &\quad +\alpha_n\delta\{(1-\beta_n)L+\beta_n\gamma_n\delta L\}\|x_n-Tx_n\| \\ &\quad +\alpha_nL\|y_n-Ty_n\|+\alpha_n\delta\beta_nL\|z_n-Tz_n\|\end{aligned}$$

elde edilir. $\delta\in(0,1)$ ve $[1-\beta_n\gamma_n(1-\delta)]\le 1$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-u_{n+1}\| &\le [1-\alpha_n(1-\delta)]\|x_n-u_n\| \\ &\quad +\{(1-\alpha_n)(1+(1+L)(1+\beta_n\gamma_n\delta)) \\ &\quad +(\alpha_n\delta\{(1-\beta_n)L+\beta_n\gamma_n\delta L\}\|x_n-Tx_n\| \\ &\quad +\alpha_nL\|y_n-Ty_n\|+\alpha_n\delta\beta_nL\|z_n-Tz_n\|\end{aligned} \tag{3.55}$$

şeklinde yazılabilir. $\|x_n-p_*\|\to 0$ olduğundan Teorem 3.24'ün ispatındakine benzer işlemlerle $\lim_{n\to\infty}\|x_n-Tx_n\|=\lim_{n\to\infty}\|y_n-Ty_n\|=\lim_{n\to\infty}\|z_n-Tz_n\|=0$ bulunur.

$$\begin{aligned}&\mu_n=\alpha_n(1-\delta)\in(0,1)\\ &a_n=\|x_n-u_n\|,\\ &b_n=\{(1-\alpha_n)(1+(1+L)(1+\beta_n\gamma_n\delta))\\ &\qquad +(\alpha_n\delta\{(1-\beta_n)L+\beta_n\gamma_n\delta L\}\|x_n-Tx_n\|\\ &\qquad +\alpha_nL\|y_n-Ty_n\|+\alpha_n\beta_n\delta L\|z_n-Tz_n\|\end{aligned}$$

şeklinde seçilsin. $n\to\infty$ için $b_n\to 0$ dır. Lemma 3.19'un şartları sağlandığından $n\to\infty$ için $a_n=\|x_n-u_n\|\to 0$ dır. Üçgen eşitsizliğinden $\|u_n-p_*\|\le\|u_n-x_n\|+\|x_n-p_*\|$ yazılabilir. Sonuç olarak $\lim_{n\to\infty}\|u_n-p_*\|=0$ elde edilir.

$(ii)\Rightarrow(i)$: $n\to\infty$ iken $u_n\to p_*$ kabulü altında $x_n\to p_*$ olduğu gösterilmelidir. (3.13) S* iterasyon yöntemi, (3.12) CR iterasyon yöntemi ve (2.26) şartı kullanılarak,

$$\begin{aligned}\|u_n - z_n\| &= \|u_n - (1-\gamma_n)x_n - \gamma_n Tx_n\| \\ &\le (1-\gamma_n)\|u_n - x_n\| + \gamma_n\|u_n - Tu_n\| + \gamma_n\|Tu_n - Tx_n\| \\ &\le [1-\gamma_n(1-\delta)]\|u_n - x_n\| + \gamma_n(1+L)\|u_n - Tu_n\|\end{aligned} \tag{3.56}$$

ve

$$\begin{aligned}\|w_n - z_n\| &= \|(1-\gamma_n)u_n + \gamma_n Tu_n - z_n\| \\ &\le (1-\gamma_n)\|u_n - z_n\| + \gamma_n\|u_n - Tu_n\| \\ &\quad + \gamma_n\|u_n - z_n\| \\ &= \|u_n - z_n\| + \gamma_n\|u_n - Tu_n\|\end{aligned} \tag{3.57}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.56) eşitsizliği (3.57)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\|w_n - z_n\| &\le [1-\gamma_n(1-\delta)]\|u_n - x_n\| \\ &\quad + \gamma_n(2+L)\|u_n - Tu_n\|\end{aligned} \tag{3.58}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\|v_n - y_n\| &= \|(1-\beta_n)Tu_n + \beta_n Tw_n - (1-\beta_n)Tx_n - \beta_n Tz_n\| \\ &\le (1-\beta_n)\delta\|u_n - x_n\| + (1-\beta_n)L\|u_n - Tu_n\| \\ &\quad + \beta_n\delta\|w_n - z_n\| + \beta_n L\|w_n - Tw_n\|\end{aligned} \tag{3.59}$$

olup $\delta \in (0,1)$ ve $[1-\gamma_n(1-\delta)] \le 1$ olduğu dikkate alınarak (3.58) eşitsizliği (3.59)'da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\|v_n - y_n\| &\le [1-\beta_n(1-\delta)]\|u_n - x_n\| \\ &\quad + \{(1-\beta_n)L + \beta_n\gamma_n\delta(2+L)\}\|u_n - Tu_n\| \\ &\quad + \beta_n L\|w_n - Tw_n\|\end{aligned} \tag{3.60}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\|w_n - x_n\| &= \|(1-\gamma_n)u_n + \gamma_n Tu_n - x_n\| \\ &\le (1-\gamma_n)\|u_n - x_n\| + \gamma_n\|Tu_n - x_n\| \\ &\le \|u_n - x_n\| + \gamma_n\|Tu_n - u_n\|\end{aligned} \tag{3.61}$$

ve

$$\begin{aligned}\|v_n - x_n\| &= \|(1-\beta_n)Tu_n + \beta_n Tw_n - x_n\| \\ &\le (1-\beta_n)\|u_n - x_n\| + (1-\beta_n)\|u_n - Tu_n\| \\ &\quad + \beta_n\|w_n - Tw_n\| + \beta_n\|w_n - x_n\|\end{aligned} \tag{3.62}$$

olup (3.61) eşitsizliği (3.62)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\|v_n - x_n\| &\le \|u_n - x_n\| + [1-\beta_n(1-\gamma_n)]\|u_n - Tu_n\| \\ &\quad + \beta_n\|w_n - Tw_n\|\end{aligned} \tag{3.63}$$

elde edilir. O halde,

$$\begin{aligned}\|u_{n+1} - x_{n+1}\| &\le (1-\alpha_n)\delta\|v_n - x_n\| + \alpha_n\delta\|v_n - y_n\| \\ &\quad + (1-\alpha_n + L)\|v_n - Tv_n\|\end{aligned} \tag{3.64}$$

olur. $\delta \in (0,1)$ ve $[1-\beta_n(1-\delta)] \le 1$ olduğu dikkate alınarak (3.60) ve (3.63) eşitsizlikleri (3.64)'te yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\|u_{n+1} - x_{n+1}\| &\le [1-\alpha_n(1-\delta)]\|u_n - x_n\| \\ &\quad + \{(1-\alpha_n)\delta[1-\beta_n(1-\gamma_n)] \\ &\quad + \alpha_n\delta[(1-\beta_n)L + \beta_n\gamma_n\delta(2+L)]\}\|u_n - Tu_n\| \\ &\quad + (1-\alpha_n + L)\|v_n - Tv_n\| \\ &\quad + \delta\beta_n[1-\alpha_n(1-L)]\|w_n - Tw_n\|\end{aligned}$$

elde edilir. $\|u_n - p_*\| \to 0$ olduğundan Teorem 3.24'ün ispatındakine benzer işlemlerle

$\lim_{n\to\infty}\|u_n - Tu_n\| = \lim_{n\to\infty}\|v_n - Tv_n\| = \lim_{n\to\infty}\|w_n - Tw_n\| = 0$ bulunur.

$$\begin{aligned}\mu_n &= \alpha_n(1-\delta) \in (0,1) \\ a_n &= \|u_n - x_n\|, \\ b_n &= \{(1-\alpha_n)\delta[1-\beta_n(1-\gamma_n)] \\ &\quad + \alpha_n\delta[(1-\beta_n)L + \beta_n\gamma_n\delta(2+L)]\}\|u_n - Tu_n\| \\ &\quad + (1-\alpha_n + L)\|v_n - Tv_n\| \\ &\quad + \delta\beta_n[1-\alpha_n(1-L)]\|w_n - Tw_n\|\end{aligned}$$

şeklinde seçilirse $n \to \infty$ için $b_n \to 0$ olur. Lemma 3.19'un şartları sağlandığından $n \to \infty$ için $a_n = \|u_n - x_n\| \to 0$ elde edilir. Üçgen eşitsizliğinden

$\|x_n - p_*\| \leq \|x_n - u_n\| + \|u_n - p_*\|$ yazılabilir. Sonuç olarak $\lim_{n\to\infty} \|x_n - p_*\| = 0$ elde edilir.

Sonuç 3.32 X bir Banach uzayı, $\varnothing \neq C \subset X$ konveks ve kapalı bir küme olsun. $T : C \to C$ tanımlı (2.26) şartını sağlayan almost contraction dönüşüm olsun. T'nin $p_* \in F_T$ gibi bir sabit noktaya sahip olduğu kabul edilisin. Tüm iterasyonlar için başlangıç noktası aynı ise bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) (3.2) ile verilen Picard iterasyonu $p_* \in F_T$ ye yakınsar,

(ii) (3.6) ile verilen Mann iterasyonu $p_* \in F_T$ ye yakınsar,

(ii) (3.7) ile verilen Ishikawa iterasyonu $p_* \in F_T$ ye yakınsar,

(iv) (3.8) ile verilen Noor iterasyonu $p_* \in F_T$ ye yakınsar,

(v) (3.10) ile verilen Picard-S iterasyonu $p_* \in F_T$ ye yakınsar,

(vi) (3.11) ile verilen SP-iterasyonu $p_* \in F_T$ ye yakınsar,

(vii) (3.12) ile verilen CR iterasyonu $p_* \in F_T$ ye yakınsar,

(viii) (3.13) ile verilen S* iterasyonu $p_* \in F_T$ ye yakınsar,

(ix) (3.16) ile verilen yeni iterasyon yöntemi $p_* \in F_T$ ye yakınsar.

Teorem 3.33 p_* sabit noktasına sahip T dönüşümü ile C kümesi ve X uzayı Teorem 3.30'daki gibi tanımlansın. $x_0 = u_0 \in C$ olmak üzere (3.12) ile verilen CR iterasyon yönteminden elde edilen $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi ve (3.13) ile verilen S* iterasyon yönteminden elde edilen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi göz önüne alınsın. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ ve $\{\gamma_n\}$ dizileri [0,1] aralığında olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için ve bazı $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ için (i) $\alpha_1 \leq \alpha_n \leq 1$ şartı sağlansın. Bu durumda $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi p_* sabit noktasına $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinden daha hızlı yakınsar.

İspat Teorem 3.30'dan

$$\|x_{n+1} - p_*\| \leq \prod_{i=0}^{n} [1 - \alpha_i (1 - \delta)] \|x_0 - p_*\| \tag{3.65}$$

eşitsizliği elde edilmişti. O halde (i) kabulü (3.65)'e uygulanırsa;

$$\|x_{n+1}-p_*\| \le \|x_0-p_*\|[1-\alpha_1(1-\delta)]^{n+1} \tag{3.66}$$

olur. Benzer şekilde (3.12) ile verilen CR iterasyonu için,

$$\begin{aligned}
\|w_n-p_*\| &= \|(1-\gamma_n)u_n+\gamma_n Tu_n-p_*\| \\
&\le (1-\gamma_n)\|u_n-p_*\|+\gamma_n\delta\|u_n-p_*\| \\
&\quad +\gamma_n L\|p_*-Tp_*\| \\
&= \left[1-\gamma_n(1-\delta)\right]\|u_n-p_*\|
\end{aligned} \tag{3.67}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|v_n-p_*\| &= \|(1-\beta_n)Tu_n+\beta_n Tw_n-p_*\| \\
&\le (1-\beta_n)\delta\|u_n-p_*\|+\beta_n\delta\|w_n-p_*\| \\
&\le (1-\beta_n)\delta\|u_n-p_*\|+\beta_n\delta\left[1-\gamma_n(1-\delta)\right]\|u_n-p_*\| \\
&= \left\{(1-\beta_n)\delta+\beta_n\delta\left[1-\gamma_n(1-\delta)\right]\right\}\|u_n-p_*\|
\end{aligned} \tag{3.68}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1}-p_*\| &= \|(1-\alpha_n)v_n+\alpha_n Tv_n-p_*\| \\
&\le (1-\alpha_n)\|v_n-p_*\|+\alpha_n\delta\|v_n-p_*\| \\
&= \left[1-\alpha_n(1-\delta)\right]\|v_n-p_*\|
\end{aligned} \tag{3.69}$$

olup (3.68) eşitsizliği (3.69)'da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1}-p_*\| &\le \left[1-\alpha_n(1-\delta)\right]\left\{(1-\beta_n)\delta+\beta_n\delta\left[1-\gamma_n(1-\delta)\right]\right\}\|u_n-p_*\| \\
&= \delta\left[1-\alpha_n(1-\delta)\right]\left[1-\beta_n\gamma_n(1-\delta)\right]\|u_n-p_*\|
\end{aligned}$$

olur. $\delta\in(0,1)$ ve $\left[1-\beta_n\gamma_n(1-\delta)\right]<1$ olduğundan,

$$\|u_{n+1}-p_*\| \le \delta\left[1-\alpha_n(1-\delta)\right]\|u_n-p_*\| \tag{3.70}$$

elde edilir. (3.70) eşitsizliğinde tümevarım uygulanırsa,

$$\|u_{n+1}-p_*\| \le \prod_{i=0}^{n}\delta\left[1-\alpha_i(1-\delta)\right]\|u_0-p_*\| \tag{3.71}$$

olur. (i) kabulü (3.71) eşitsizliğine uygulanırsa,

$$\|u_{n+1}-p_*\| \le \|u_0-p_*\|\delta^{n+1}\left[1-\alpha_1(1-\delta)\right]^{n+1} \tag{3.72}$$

elde edilir.

$$a_n = \|u_0 - p_*\| \delta^{n+1}[1-\alpha_1(1-\delta)]^{n+1},$$

$$b_n = \|x_0 - p_*\| [1-\alpha_1(1-\delta)]^{n+1},$$

şeklinde seçilisin ve $\psi_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ olsun. Bu durumda,

$$\psi_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{\|u_0 - p_*\| \delta^{n+1}[1-\alpha_1(1-\delta)]^{n+1}}{\|x_0 - p_*\| [1-\alpha_1(1-\delta)]^{n+1}}$$
$$= \delta^{n+1}$$

elde edilir. $\delta \in (0,1)$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \psi_n = 0$ olur. Tanım 3.22'den $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin p_* sabit noktasına $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinden daha hızlı yakınsadığı söylenebilir.

Örnek 3.34 $X = \mathbb{R}$ ve $C = [1,\infty)$ olmak üzere her $x \in C$ için $T : C \to C$, $T(x) = x - 1 + \dfrac{1}{e^x}$ şeklinde tanımlansın. T'nin $p_* = 0$ şeklinde bir tek sabit noktaya sahip almost contraction dönüşüm olduğu açıktır. $x_1 = 1$ başlangıç noktasıyla birlikte $\alpha_n = \dfrac{n+4}{n+6}$

$\beta_n = \dfrac{n+3}{n+5}$, $\gamma_n = \dfrac{n+2}{n+4}$ olsun. Aşağıda verilen tablo Noor (3.8), SP (3.11), CR (3.12) ve S* (3.13) iterasyon yöntemlerinin yakınsaklık hızlarını göstermektedir:

Çizelge 3.4 Bazı iterasyon yöntemlerinin yakınsaklık hızlarının karşılaştırılması

x_n	SP	Noor	CR	S*
x_1	1	1	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_5	0,00000061322593	0,00406927930341	0,00000000000000	0,00000000000001
x_6	0,00000000495537	0,00074014007758	0,00000000000000	0,00000000000000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_9	0,00000000000000	0,00000271133087	0,00000000000000	0,00000000000000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{18}	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000

Çizelge 3.4 göstermektedir ki CR (3.12) iterasyon yöntemi 5. adımda sabit noktaya ulaşırken, S* (3.13) iterasyon yöntemi 6. adımda, SP (3.11) iterasyon yöntemi 9. adımda ve Noor (3.8) iterasyon yöntemi 18. adımda sabit noktaya ulaşmaktadır.

Aşağıdaki teoremde S* (3.13) iterasyon yöntemi kullanılarak (2.26) şartını sağlayan almost contraction dönüşümlerin sabit noktalarının veri bağlılığı incelenecektir:

Teorem 3.35 X bir Banach uzayı ve C bu uzayın boştan farklı kapalı konveks bir alt kümesi olmak üzere $T,S:C\to C$ (2.26) şartını sağlayan almost contraction operatörler olsun. x_* sabit noktasına sahip S operatörü, p_* sabit noktasına sahip T'nin yaklaşım operatörü olsun. T operatörü için (3.13) ile verilen S* iterasyon yönteminden elde edilen dizi $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ile gösterilsin. S operatörü için aşağıda verilen iterasyondan elde edilen dizi $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ ile gösterilsin:

$$\begin{cases} u_{n+1} = (1-\alpha_n)Su_n + \alpha_n Sv_n \\ v_n = (1-\beta_n)Su_n + \beta_n Sw_n \\ w_n = (1-\gamma_n)u_n + \gamma_n Su_n,\ n \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{3.73}$$

burada her $n \in \mathbb{N}$ için $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty} \in [0,1]$ ve $\frac{1}{2} \le \alpha_n$ dir. $\varepsilon > 0$ olmak üzere $n \to \infty$ için $u_n \to x_*$ ise

$$\|p_* - x_*\| \le \frac{4\varepsilon}{1-\delta}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat (2.26), (3.13) ve (3.73) kullanılarak;

$$\begin{aligned} \|z_n - w_n\| &\le (1-\gamma_n)\|x_n - u_n\| + \gamma_n \|Tx_n - Su_n\| \\ &\le (1-\gamma_n)\|x_n - u_n\| + \gamma_n \|Tx_n - Tu_n\| + \gamma_n \|Tu_n - Su_n\| \\ &\le [1-\gamma_n(1-\delta)]\|x_n - u_n\| + \gamma_n L\|x_n - Tx_n\| + \gamma_n \varepsilon, \end{aligned} \tag{3.74}$$

ve

$$\begin{aligned} \|y_n - v_n\| &\le (1-\beta_n)\|Tx_n - Su_n\| + \beta_n \|Tz_n - Sw_n\| \\ &\le (1-\beta_n)\{\|Tx_n - Tu_n\| + \|Tu_n - Su_n\|\} \\ &\quad + \beta_n\{\|Tz_n - Tw_n\| + \|Tw_n - Sw_n\|\} \\ &\le (1-\beta_n)\{\delta\|x_n - u_n\| + L\|x_n - Tx_n\| + \varepsilon\} \\ &\quad + \beta_n\{\delta\|z_n - w_n\| + L\|z_n - Tz_n\| + \varepsilon\} \end{aligned} \tag{3.75}$$

elde edilir. (3.74) eşitsizliği (3.75)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \|y_n - v_n\| &\le (1-\beta_n)\{\delta\|x_n - u_n\| + L\|x_n - Tx_n\| + \varepsilon\} \\ &\quad + \beta_n\{\delta[1-\gamma_n(1-\delta)]\|x_n - u_n\| + \delta\gamma_n L\|x_n - Tx_n\| \\ &\quad + \delta\gamma_n\varepsilon + L\|z_n - Tz_n\| + \varepsilon\} \\ &\le \delta[1-\beta_n\gamma_n(1-\delta)]\|x_n - u_n\| + L[1-\beta_n(1-\delta\gamma_n)]\|x_n - Tx_n\| \\ &\quad + \beta_n L\|z_n - Tz_n\| + (1-\beta_n)\varepsilon + \beta_n\gamma_n\delta\varepsilon + \beta_n\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. $\delta \in (0,1)$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty} \in [0,1]$ olduğundan,

$$[1-\beta_n\gamma_n(1-\delta)]\le 1$$
$$[1-\beta_n(1-\delta\gamma_n)]\le 1$$

ve dolayısıyla

$$\|y_n-v_n\|\le\delta\|x_n-u_n\|+L\|x_n-Tx_n\|+L\|z_n-Tz_n\|+2\varepsilon$$

olur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-u_{n+1}\|&\le(1-\alpha_n)\|Tx_n-Su_n\|+\alpha_n\|Ty_n-Sv_n\|\\
&\le(1-\alpha_n)\{\|Tx_n-Tu_n\|+\|Tu_n-Su_n\|\}\\
&\quad+\alpha_n\{\|Ty_n-Tv_n\|+\|Tv_n-Sv_n\|\}\\
&\le(1-\alpha_n)\{\delta\|x_n-u_n\|+L\|x_n-Tx_n\|+\varepsilon\}\\
&\quad+\alpha_n\{\delta\|y_n-v_n\|+L\|y_n-Ty_n\|+\varepsilon\}\\
&\le(1-\alpha_n)\{\delta\|x_n-u_n\|+L\|x_n-Tx_n\|+\varepsilon\}\\
&\quad+\alpha_n\delta^2\|x_n-u_n\|+\alpha_n\delta L\|x_n-Tx_n\|+\alpha_n\delta L\|z_n-Tz_n\|\\
&\quad+2\alpha_n\delta\varepsilon+\alpha_nL\|y_n-Ty_n\|+\alpha_n\varepsilon\end{aligned}$$

olup $\delta\in(0,1)$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-u_{n+1}\|&\le[1-\alpha_n(1-\delta)]\|x_n-u_n\|+L\|x_n-Tx_n\|\\
&\quad+\alpha_nL\|y_n-Ty_n\|+\alpha_nL\|z_n-Tz_n\|\\
&\quad+2\alpha_n\varepsilon+\varepsilon\end{aligned}$$

elde edlilir. (i) kabulünden $1-\alpha_n\le\alpha_n$ yazılabileceğinden,

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-u_{n+1}\|&\le[1-\alpha_n(1-\delta)]\|x_n-u_n\|+2\alpha_nL\|x_n-Tx_n\|\\
&\quad+\alpha_nL\|y_n-Ty_n\|+\alpha_nL\|z_n-Tz_n\|+4\alpha_n\varepsilon\end{aligned}$$

olur. O halde

$$a_n=\|x_n-u_n\|,$$
$$\mu_n=\alpha_n(1-\delta)\in(0,1)$$
$$\eta_n=\frac{\{2L\|x_n-Tx_n\|+L\|y_n-Ty_n\|+L\|z_n-Tz_n\|+4\varepsilon\}}{(1-\delta)}$$

şeklinde seçilirse Lemma 3.20’den

$$0 \le \limsup_{n\to\infty} \|x_n - u_n\|$$
$$\le \limsup_{n\to\infty} \left\{ \frac{\{2L\|x_n - Tx_n\| + L\|y_n - Ty_n\| + L\|z_n - Tz_n\| + 4\varepsilon\}}{(1-\delta)} \right\}$$
$$= \frac{4\varepsilon}{(1-\delta)}$$

elde edilir. Teorem 3.30'dan $x_n \to p_*$ dir. Ayrıca kabul gereği $n \to \infty$ için $u_n \to x_*$ dır. Sonuç olarak,

$$\|p_* - x_*\| \le \frac{4\varepsilon}{1-\delta}$$

elde edilir.

Aşağıda verilen örnekte (2.26) şartını sağlayan almost contraction operatörler için yukarıda ispatlanan veri bağlılığı sonucu irdelenecektir:

Örnek 3.36 $C = [-1,1]$ kümesi üzerinde $d(x,y) = |x - y|$ standart metriği tanımlı olsun. $T : C \to C$

$$Tx = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}; -1 \le x < 0 \\ -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}; \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. T'nin (2.26) şartını sağlayan almost contraction dönüşüm olduğu gösterilmelidir. Bunun için (2.18) ve (2.19) şartlarının sağlanması gerekmektedir. $x < y$ olduğu kabul edilsin. O halde T'nin tanımı gereği üç durum söz konusudur.

(i) $0 \le x < y \le 1$ durumu:

$$|Tx - Ty| = \frac{1}{2}\left|\sin\frac{y}{2} - \sin\frac{x}{2}\right|$$
$$= \frac{1}{2}\left|2\cos\frac{\left(\frac{y+x}{2}\right)}{2}\right|\left|\sin\frac{\left(\frac{y-x}{2}\right)}{2}\right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|\cos\frac{y+x}{4}\right|\left|\sin\frac{y-x}{4}\right| \\
&\leq \left|\sin\frac{y-x}{4}\right| \qquad (3.76)\\
&\leq \frac{1}{4}|y-x|
\end{aligned}
$$

olur. Bu nedenle her $L \geq 0$ için

$$|Tx-Ty| \leq \frac{1}{4}|y-x| + L\left|y+\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\right|$$

$$|Tx-Ty| \leq \frac{1}{4}|y-x| + L\left|x+\frac{1}{2}\sin\frac{y}{2}\right|$$

ifadeleri yazılabilir. Ayrıca (3.76) eşitsizliğinden $|Tx-Ty| \leq \frac{1}{4}|x-y| + L\left|x+\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\right|$ yazılabilir. Yani $\delta \in \left[\frac{1}{4},1\right)$ olmak üzere T dönüşümü (2.26) şartını sağlayan bir almost contraction dönüşüm olur ve bu nedenle sabit noktası tektir. Verilen aralıkta $Tx = x$ denklemi $x = 0$ durumunda sağlanacağından dönüşümün sabit noktası 0 olur.

(ii) $-1 \leq x < y < 0$ durumu:

$$
\begin{aligned}
|Tx-Ty| &= \frac{1}{2}\left|\sin\frac{x}{2} - \sin\frac{y}{2}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|2\cos\frac{\left(\frac{x+y}{2}\right)}{2}\right|\left|\sin\frac{\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2}\right| \\
&= \left|\cos\frac{x+y}{4}\right|\left|\sin\frac{x-y}{4}\right| \\
&\leq \left|\sin\frac{x-y}{4}\right| \\
&\leq \frac{1}{4}|x-y|
\end{aligned}
$$

olduğundan ispat (i) durumuyla benzer şekilde yapılabilir.

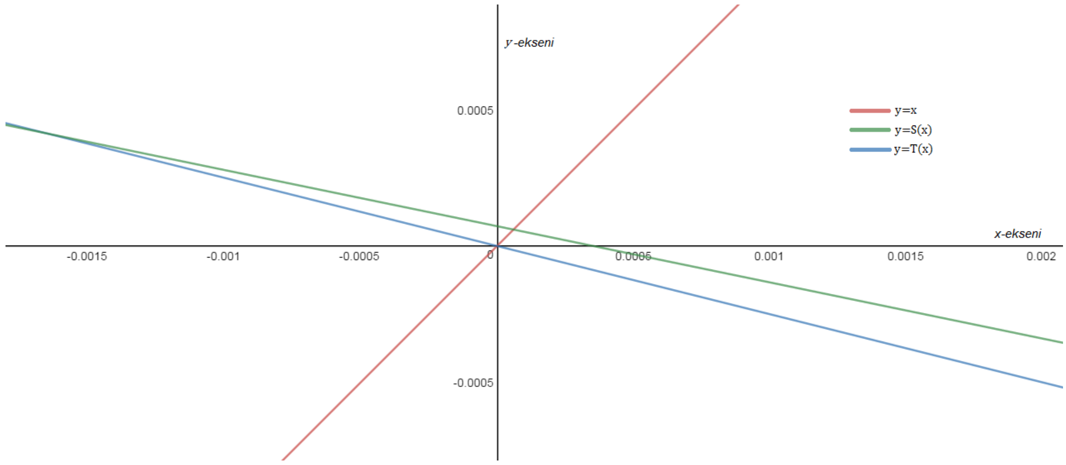
(iii) $-1 \le x < 0 < y$ durumu:

$$
\begin{aligned}
|Tx - Ty| &= \frac{1}{2}\left|\sin\frac{x}{2} + \sin\frac{y}{2}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|2\sin\frac{\left(\frac{x+y}{2}\right)}{2}\right|\left|\cos\frac{\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2}\right| \\
&= \left|\sin\frac{x+y}{4}\right|\left|\cos\frac{x-y}{4}\right| \qquad (3.77) \\
&\le \left|\sin\frac{x+y}{4}\right| \\
&\le \frac{1}{4}|x+y|
\end{aligned}
$$

olup $-1 \le x < 0$ ve $0 < y \le 1$ olduğundan $a > 0$ olmak üzere $x = -a$ denirse $|x+y| = |y-a|$ ve $|x-y| = |y+a|$ olur. $|y-a| \le |y+a|$ olduğundan verilen aralıkta $|x+y| \le |x-y|$ elde edilir. Yani, (3.77) eşitsizliğinden $|Tx - Ty| \le \frac{1}{4}|x+y| \le \frac{1}{4}|x-y|$ olup ispatın geri kalanı (i) durumuyla benzer şekilde yapılabilir. $S : C \to C$

$$
Sx = \begin{cases} \dfrac{(x-0{,}07)}{3{,}95} + \dfrac{(x+0{,}1)^3}{95{,}04} - \dfrac{(x-0{,}3)^5}{7581{,}27} - \dfrac{(x+0{,}2)^7}{130160{,}02}, & -1 \le x < 0 \\ -\dfrac{x}{4{,}88} - \dfrac{(x-0{,}2)^3}{109{,}85} - \dfrac{(x+0{,}1)^5}{7614{,}18} + \dfrac{(x-0{,}5)^7}{129970{,}84}, & 0 \le x \le 1 \end{cases} \qquad (3.78)
$$

şeklinde tanımlansın. WOLFRAM MATHEMATICA 9 programı kullanılarak $\max_{x \in C}|T - S| = 0{,}0217145$ olduğu hesaplanabilir. $\varepsilon = 0{,}0217145 > 0$ şeklinde seçilirse her $x \in C$ için $|Tx - Sx| \le 0{,}0217145$ olur. Bu nedenle S operatörü T'nin bir yaklaşım operatörü olur. Ayrıca (3.78)'den S operatörünün $C = [-1,1]$ kümesindeki sabit noktası $x_* = 0{,}0000603$ tür. Dolayısıyla iki sabit nokta arasındaki fark $|p_* - x_*| = 0{,}0000603$ olur.



Şekil 3.1 T ve S operatörlerinin grafiği

(3.13) ile verilen S* iterasyon yöntemi, her $n\in\mathbb{N}$ için $\alpha_n=\dfrac{n+2}{n+3}$, $\beta_n=\dfrac{n+3}{n+4}$, $\gamma_n=\dfrac{n+4}{n+5}$ seçilip $Su=-\dfrac{u}{4,88}-\dfrac{(u-0,2)^3}{109,85}-\dfrac{(u+0,1)^5}{7614,18}+\dfrac{(u-0,5)^7}{129970,84}$, $0\le u\le 1$ için yeniden inşa edilirse

$$\begin{cases} u_{n+1}=\left(1-\dfrac{n+2}{n+3}\right)\left(-\dfrac{u_n}{4,88}-\dfrac{(u_n-0,2)^3}{109,85}-\dfrac{(u_n+0,1)^5}{7614,18}+\dfrac{(u_n-0,5)^7}{129970,84}\right) \\ \quad+\left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)\left(-\dfrac{v_n}{4,88}-\dfrac{(v_n-0,2)^3}{109,85}-\dfrac{(v_n+0,1)^5}{7614,18}+\dfrac{(v_n-0,5)^7}{129970,84}\right) \\ v_n=\left(1-\dfrac{n+3}{n+4}\right)\left(-\dfrac{u_n}{4,88}-\dfrac{(u_n-0,2)^3}{109,85}-\dfrac{(u_n+0,1)^5}{7614,18}+\dfrac{(u_n-0,5)^7}{129970,84}\right) \\ \quad+\left(\dfrac{n+3}{n+4}\right)\left(-\dfrac{w_n}{4,88}-\dfrac{(w_n-0,2)^3}{109,85}-\dfrac{(w_n+0,1)^5}{7614,18}+\dfrac{(w_n-0,5)^7}{129970,84}\right) \\ w_n=\left(1-\dfrac{n+4}{n+5}\right)u_n+\left(\dfrac{n+4}{n+5}\right)\left(-\dfrac{u_n}{4,88}-\dfrac{(u_n-0,2)^3}{109,85}-\dfrac{(u_n+0,1)^5}{7614,18}+\dfrac{(u_n-0,5)^7}{129970,84}\right) \end{cases} \tag{3.79}$$

iterasyonu elde edilir. (3.79)'dan elde edilen $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin $x_*=0,0000603$ noktasına yakınsadığı MATLAB programı kullanılarak gösterilebilir. Aşağıdaki çizelge $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin sabit noktaya yakınsamasını göstermektedir:

Çizelge 3.5 (3.79) ile verilen iterasyon yönteminin yakınsaması

u_n	(3.79) ile verilen iterasyon yöntemi
u_1	0,5
u_2	-0,0225150
u_3	0,0008848
u_4	0,0000348
u_5	0,0000610
u_6	0,0000603

Bu durumda Teorem 3.35'in bir sonucu olarak aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$|p_* - x_*| = 0,0000603 \le \frac{4 \times (0,0217145)}{1 - \frac{1}{4}} = 0,1158107.$$

3.4 S* İterasyon Yönteminin Gecikmeli Diferansiyel Denklemlere Uygulanması

Adi diferansiyel denklemler kullanılarak modelleme yapılırken sistemdeki gecikmeler göz ardı edilir. Ancak küçük bir gecikme miktarı sistemin işleyişinde büyük değişikliklere yol açacağından karşılaşılan problemlerin modellenmesinde gecikmeli diferansiyel denklemlerin kullanılması daha gerçekçi bir yaklaşım olacaktır. Temel ve uygulamalı bilim dallarında karşılaşılan problemlerin modellenmesinde bu denklemler kullanılmaktadır. Örneğin Villasana ve Radunskaya [120] tarafından yapılan çalışmada, bağışıklık sistemi hücreleri ile özel bazı ilaçların kanser hücrelerinin çoğalması üzerindeki etkilerini inceleyen bir matematiksel modelleme gecikmeli diferansiyel denklemler kullanılarak yapılmıştır. Dolayısıyla modellenen bu problemin çözümü gecikmeli diferansiyel denklemin çözümüne denk olacaktır. Bu tür denklemlerin çözümü için sabit nokta iterasyon yöntemleri etkili bir araç olarak kullanılmaktadır. Bu yöntemdeki temel düşünce, gecikmeli diferansiyel denklemleri belirli şartlar altında bir operatör sınıfına dahil ederek bir iterasyon yöntemi inşa etmek ve bu iterasyondan elde edilen dizinin operatörün sabit noktasına başka bir deyişle gecikmeli diferansiyel denklemin çözümüne yakınsaması için uygun şartları belirlemektir. Bu bölümde (3.13) ile verilen S* iterasyon yöntemi kullanılarak gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümü araştırılacaktır. Bu bağlamda Villasana ve Radunskaya tarafından verilen problemin çözümünde S* iterasyonunun kullanılması ile daha etkin ve hızlı sonuç alınabileceği öngörülmektedir:

$[a,b]$ aralığındaki tüm sürekli reel değerli fonksiyonların uzayı $C[a,b]$ olmak üzere bu küme üzerinde $\|x-y\|_\infty = \max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|$ Chebyshev normu tanımlı olsun. $\left(C[a,b],\|.\|_\infty\right)$ bir Banach uzayı olur [121].

$$x'(t) = g(t, x(t), x(t-\tau)), \qquad t \in [t_0, b] \tag{3.80}$$

ve başlangıç koşulu

$$x(t) = \phi(t), \qquad t \in [t_0-\tau, t_0] \tag{3.81}$$

olan gecikmeli diferansiyel denklem için aşağıda verilen koşullar sağlansın:

(K1) $t_0, b \in \mathbb{R}, \quad \tau > 0$,

(K2) $f \in \left(C[t_0,b]\times\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$,

(K3) $\phi \in C([t_0-\tau, b], \mathbb{R})$

(K4) Her $u_i, v_i \in \mathbb{R}$, $i=1,2$ ve $t \in [t_0, b]$ için

$$\left|f(t,u_1,u_2) - f(t,v_1,v_2)\right| \le L_d \sum_{i=1}^{2}|u_i - v_i|$$

olacak şekilde $L_d > 0$ mevcuttur,

(K5) $0 < 2L_d(b-t_0) < 1$.

Bu problem aşağıdaki şekilde yeniden formülize edilebilir:

$$x(t) = \begin{cases} \phi(t), & t \in [t_0-\tau, t_0] \\ \phi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s), x(s-\tau))ds, & t \in [t_0, b] \end{cases}$$

Aşağıdaki sonuç [122]'de bulunabilir:

Teorem 3.37 (K1)-(K5) koşulları altında (3.80)-(3.81) ile verilen problem $x_* \in C([t_0-\tau,b],\mathbb{R}) \cap C^1([t_0,b],\mathbb{R})$ gibi bir tek çözüme sahiptir ve herhangi bir $x \in C([t_0-\tau,b],\mathbb{R})$ için $x_* = \lim_{n\to\infty} T^n(x)$.

Bu durumda aşağıdaki sonuç verilebilir:

Teorem 3.38 (K1)-(K5) koşulları altında (3.80)-(3.81) ile verilen problem $x_* \in C([t_0-\tau,b],\mathbb{R}) \cap C^1([t_0,b],\mathbb{R})$ gibi bir tek çözüme sahiptir ve (3.13) ile verilen S* iterasyon yönteminden elde edilen dizi x_* noktasına yakınsar.

İspat

$$Tx(t) = \begin{cases} \phi(t), & t \in [t_0-\tau, t_0] \\ \phi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s),x(s-\tau))ds, & t \in [t_0,b] \end{cases}$$

operatörü altında (3.13) ile verilen S* iterasyon yönteminden elde edilen dizi $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ile gösterilsin. Bu operatörün sabit noktası x_* olmak üzere $n \to \infty$ için $x_n \to x_*$ olduğu gösterilmelidir. $t \in [t_0-\tau, t_0]$ için $x_n \to x_*$ olduğu görülebilir. İspat $t \in [t_0,b]$ için yapılacaktır:

$$\begin{aligned}
\|z_n - x_*\|_\infty &= \|(1-\gamma_n)x_n + \gamma_n Tx_n - Tx_*\|_\infty \\
&\le (1-\gamma_n)\|x_n - x_*\|_\infty + \gamma_n \|Tx_n - Tx_*\|_\infty \\
&= (1-\gamma_n)\|x_n - x_*\|_\infty + \gamma_n \max_{t\in[t_0,b]} |Tx_n(t) - Tx_*(t)| \\
&= (1-\gamma_n)\|x_n - x_*\|_\infty \\
&\quad + \gamma_n \max_{t\in[t_0,b]} \left| \begin{matrix} \phi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s,x_n(s),x_n(s-\tau))ds \\ -\phi(t_0) - \int_{t_0}^{t} f(s,x_*(s),x_*(s-\tau))ds \end{matrix} \right| \\
&= (1-\gamma_n)\|x_n - x_*\|_\infty \\
&\quad + \gamma_n \max_{t\in[t_0,b]} \left| \begin{matrix} \int_{t_0}^{t} f(s,x_n(s),x_n(s-\tau))ds \\ -\int_{t_0}^{t} f(s,x_*(s),x_*(s-\tau))ds \end{matrix} \right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le (1-\gamma_n)\|x_n - x_*\|_\infty \\
&\quad + \gamma_n \max_{t\in[t_0,b]} \int_{t_0}^{t} \left| f(s,x_n(s),x_n(s-\tau)) - f(s,x_*(s),x_*(s-\tau)) \right| ds \\
&\le (1-\gamma_n)\|x_n - x_*\|_\infty \\
&\quad + \gamma_n \max_{t\in[t_0,b]} \int_{t_0}^{t} L_d \left(|x_n(s)-x_*(s)| + |x_n(s-\tau)-x_*(s-\tau)| \right) ds \\
&\le (1-\gamma_n)\|x_n - x_*\|_\infty \\
&\le \gamma_n \int_{t_0}^{t} L_d \left(\max_{t\in[t_0,b]} |x_n(s)-x_*(s)| + \max_{t\in[t_0,b]} |x_n(s-\tau)-x_*(s-\tau)| \right) ds \\
&\le (1-\gamma_n)\|x_n - x_*\|_\infty \\
&\le \gamma_n \int_{t_0}^{t} L_d \left(\|x_n - x_*\|_\infty + \|x_n - x_*\|_\infty \right) ds \\
&\le (1-\gamma_n)\|x_n - x_*\|_\infty + 2\gamma_n L_d (t-t_0)\|x_n - x_*\|_\infty \\
&\le \left[1 - \gamma_n \left(1 - 2L_d(b-t_0) \right) \right] \|x_n - x_*\|_\infty
\end{aligned}
\tag{3.82}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\|y_n - x_*\|_\infty &= \|(1-\beta_n)Tx_n + \beta_n Tz_n - Tx_*\|_\infty \\
&\le (1-\beta_n)\|Tx_n - Tx_*\|_\infty + \beta_n \|Tz_n - Tx_*\|_\infty \\
&= (1-\beta_n)\max_{t\in[t_0,b]} |Tx_n(t) - Tx_*(t)| + \beta_n \max_{t\in[t_0,b]} |Tz_n(t) - Tx_*(t)| \\
&= (1-\beta_n)\max_{t\in[t_0,b]} \left| \begin{array}{l} \int_{t_0}^{t} f(s,x_n(s),x_n(s-\tau))ds \\ -\int_{t_0}^{t} f(s,x_*(s),x_*(s-\tau))ds \end{array} \right| \\
&\quad + \beta_n \max_{t\in[t_0,b]} \left| \begin{array}{l} \int_{t_0}^{t} f(s,z_n(s),z_n(s-\tau))ds \\ -\int_{t_0}^{t} f(s,x_*(s),x_*(s-\tau))ds \end{array} \right| \\
&\le (1-\beta_n)\max_{t\in[t_0,b]} \int_{t_0}^{t} \left| f(s,x_n(s),x_n(s-\tau)) - f(s,x_*(s),x_*(s-\tau)) \right| ds \\
&\quad + \beta_n \max_{t\in[t_0,b]} \int_{t_0}^{t} \left| f(s,z_n(s),z_n(s-\tau)) - f(s,x_*(s),x_*(s-\tau)) \right| ds \\
&\le (1-\beta_n)\max_{t\in[t_0,b]} \int_{t_0}^{t} L_d \left(|x_n(s)-x_*(s)| + |x_n(s-\tau)-x_*(s-\tau)| \right) ds \\
&\quad + \beta_n \max_{t\in[t_0,b]} \int_{t_0}^{t} L_d \left(|z_n(s)-x_*(s)| + |z_n(s-\tau)-x_*(s-\tau)| \right) ds \\
&\le (1-\beta_n)\int_{t_0}^{t} L_d \left(\max_{t\in[t_0,b]} |x_n(s)-x_*(s)| + \max_{t\in[t_0,b]} |x_n(s-\tau)-x_*(s-\tau)| \right) ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\beta_n\int_{t_0}^{t} L_d\left(\max_{t\in[t_0,b]}\left|z_n(s)-x_*(s)\right|+\max_{t\in[t_0,b]}\left|z_n(s-\tau)-x_*(s-\tau)\right|\right)ds\\
&\le(1-\beta_n)\int_{t_0}^{t} L_d\left(\left\|x_n-x_*\right\|_\infty+\left\|x_n-x_*\right\|_\infty\right)ds\\
&\quad+\beta_n\int_{t_0}^{t} L_d\left(\left\|z_n-x_*\right\|_\infty+\left\|z_n-x_*\right\|_\infty\right)ds\\
&\le 2(1-\beta_n)L_d(b-t_0)\left\|x_n-x_*\right\|_\infty+2\beta_nL_d(b-t_0)\left\|z_n-x_*\right\|_\infty\\
&=2L_d(b-t_0)\left[(1-\beta_n)\left\|x_n-x_*\right\|_\infty+\beta_n\left\|z_n-x_*\right\|_\infty\right]
\end{aligned}
\tag{3.83}
$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
\left\|x_{n+1}-x_*\right\|_\infty &=\left\|(1-\alpha_n)Tx_n+\alpha_nTy_n-Tx_*\right\|_\infty\\
&\le(1-\alpha_n)\left\|Tx_n-Tx_*\right\|_\infty+\alpha_n\left\|Ty_n-Tx_*\right\|_\infty\\
&=(1-\alpha_n)\max_{t\in[t_0,b]}\left|Tx_n(t)-Tx_*(t)\right|+\alpha_n\max_{t\in[t_0,b]}\left|Ty_n(t)-Tx_*(t)\right|\\
&=(1-\alpha_n)\max_{t\in[t_0,b]}\left|\begin{array}{l}\int_{t_0}^{t} f(s,x_n(s),x_n(s-\tau))ds\\ -\int_{t_0}^{t} f(s,x_*(s),x_*(s-\tau))ds\end{array}\right|\\
&\quad+\alpha_n\max_{t\in[t_0,b]}\left|\begin{array}{l}\int_{t_0}^{t} f(s,y_n(s),y_n(s-\tau))ds\\ -\int_{t_0}^{t} f(s,x_*(s),x_*(s-\tau))ds\end{array}\right|\\
&\le(1-\alpha_n)\max_{t\in[t_0,b]}\int_{t_0}^{t}\left|f(s,x_n(s),x_n(s-\tau))-f(s,x_*(s),x_*(s-\tau))\right|ds\\
&\quad+\alpha_n\max_{t\in[t_0,b]}\int_{t_0}^{t}\left|f(s,y_n(s),y_n(s-\tau))-f(s,x_*(s),x_*(s-\tau))\right|ds\\
&\le(1-\alpha_n)\max_{t\in[t_0,b]}\int_{t_0}^{t} L_d\left(\left|x_n(s)-x_*(s)\right|+\left|x_n(s-\tau)-x_*(s-\tau)\right|\right)ds\\
&\quad+\alpha_n\max_{t\in[t_0,b]}\int_{t_0}^{t} L_d\left(\left|y_n(s)-x_*(s)\right|+\left|y_n(s-\tau)-x_*(s-\tau)\right|\right)ds\\
&\le(1-\alpha_n)\int_{t_0}^{t} L_d\left(\max_{t\in[t_0,b]}\left|x_n(s)-x_*(s)\right|+\max_{t\in[t_0,b]}\left|x_n(s-\tau)-x_*(s-\tau)\right|\right)ds\\
&\quad+\alpha_n\int_{t_0}^{t} L_d\left(\max_{t\in[t_0,b]}\left|y_n(s)-x_*(s)\right|+\max_{t\in[t_0,b]}\left|y_n(s-\tau)-x_*(s-\tau)\right|\right)ds\\
&\le(1-\alpha_n)\int_{t_0}^{t} L_d\left(\left\|x_n-x_*\right\|_\infty+\left\|x_n-x_*\right\|_\infty\right)ds\\
&\quad+\alpha_n\int_{t_0}^{t} L_d\left(\left\|y_n-x_*\right\|_\infty+\left\|y_n-x_*\right\|_\infty\right)ds\\
&\le 2(1-\alpha_n)L_d(b-t_0)\left\|x_n-x_*\right\|_\infty+2\alpha_nL_d(b-t_0)\left\|y_n-x_*\right\|_\infty
\end{aligned}
$$

$$=2L_d(b-t_0)\left[(1-\alpha_n)\|x_n-x_*\|_\infty+\alpha_n\|y_n-x_*\|_\infty\right] \tag{3.84}$$

olur. Sırasıyla (3.82) eşitsizliği (3.83)'te ve (3.83) eşitsizliği (3.84)'te yerine yazılırsa;

$$\|x_{n+1}-x_*\|_\infty\leq 2L_d(b-t_0)\left\{1-\alpha_n\beta_n\gamma_n\left[1-2L_d(b-t_0)\right]\right\}\|x_n-x_*\|_\infty$$

elde edilir. (K5) şartı kullanılarak $0<1-2L_d(b-t_0)<1$ elde edilir. Dolayısıyla,

$$\|x_{n+1}-x_*\|_\infty\leq\|x_n-x_*\|_\infty-\alpha_n\|x_n-x_*\|_\infty+2L_d(b-t_0)\alpha_n\|x_n-x_*\|_\infty$$

yazılabilir. Bu eşitsizlik düzenlenirse,

$$\|x_{n+1}-x_*\|_\infty\leq\left[1-\alpha_n\left(1-2L_d(b-t_0)\right)\right]\|x_n-x_*\|_\infty \tag{3.85}$$

elde edilir. (3.85) eşitsizliğinde tümevarıma geçilirse,

$$\|x_{n+1}-x_*\|_\infty\leq\prod_{k=0}^{n}\left[1-\alpha_k\left(1-2L_d(b-t_0)\right)\right]\|x_0-x_*\|_\infty$$

olur. $\left[1-\alpha_k\left(1-2L_d(b-t_0)\right)\right]<1$ olduğundan Teorem 3.30'daki düşünceden hareketle,

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x_*\|_\infty&\leq\|x_0-x_*\|_\infty\prod_{k=0}^{n}e^{-[1-2L_d(b-t_0)]\alpha_k}\\&=\|x_0-x_*\|_\infty\, e^{-[1-2L_d(b-t_0)]\sum_{k=0}^{n}\alpha_k}\end{aligned}$$

elde edilir. $n\to\infty$ için son eşitsizlikte limit alınırsa $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_*\|_\infty=0$ olur.

BÖLÜM 4

BAZI İNTEGRAL DENKLEMLERİN İTERATİF ÇÖZÜMLERİ VE BU ÇÖZÜMLERİN VERİ BAĞLILIĞI

4.1 Fonksiyonel Volterra-Fredholm İntegral Denklem Tipi İçin Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Volterra-Fredholm integral denklemleri Matematiksel Fizik, mühendislik ve biyoloji gibi birçok bilim dalında karşılaşılan problemlerin modellenmesinde kullanılmaktadır. Bu denklemlerin çözümüne ulaşmak için Bölüm 3.4'te belirtilen düşünceden hareketle sabit nokta iterasyon yöntemleri etkili bir araç olarak kullanılmaktadır. Örneğin bir salgın hastalığın zamansal gelişiminin matematiksel modellemesinde Volterra-Fredholm integral denklemleri kullanılmıştır [104]. Bu bölümde (3.16) ile verilen yeni iterasyon yönteminden elde edilen dizinin [123]'te tanımı verilen aşağıdaki fonksiyonel Volterra-Fredholm integral denklemin çözümüne kuvvetli yakınsadığı ve bu çözümün veri bağlı olduğu ispatlanacaktır. Bu bağlamda yukarıda bahsedilen salgın problemi de dahil olmak üzere bu türden problemlerin çözümünde (3.16) ile verilen yeni iterasyon yönteminin kullanılması daha hızlı ve etkili bir sonuç elde edilmesine olanak sağlayacaktır.

$(B,\|.\|)$ bir Banach uzayı ve $C(\mathbb{R}_+^4\times B,B)$ sürekli fonksiyonların bir sınıfı olmak üzere

$$u(x,y)=g(x,y,h(u(x,y)))+\int_0^x\int_0^y K(x,y,s,t,u(s,t))dsdt \qquad x,y\in\mathbb{R}_+ \tag{4.1}$$

verilsin. Burada g ve K bilinen fonksiyonlar olup $h_1 \in C(\mathbb{R}_+^4 \times B, B)$ olmak üzere $h(u(x,y)) = \int_0^x \int_0^y h_1(x,y,m,n,u(m,n))dndm$ şeklindedir. $\tau > 0$ olmak üzere

$$X_\tau = \{u \in C(\mathbb{R}_+^2, B) \mid \exists M(u) > 0 : \|u(x,y)\| e^{-\tau(x+y)} \le M(u)\} \tag{4.2}$$

kümesi verilsin. Bu küme üzerinde $\|u\|_\tau = \sup_{x,y \in \mathbb{R}_+} \left(\|u(x,y)\| e^{-\tau(x+y)} \right)$ şeklinde verilen Bielecki [124] normu tanımlı olsun. Bu durumda $\left(X_\tau, \|.\|_\tau \right)$ bir Banach uzayı olur.

Aşağıda verilen koşullar sağlansın:

(K1) $g \in C(\mathbb{R}_+^2 \times B, B), \quad K \in C(\mathbb{R}_+^4 \times B, B)$;

(K2) $h : X_\tau \to X_\tau$ tanımlı olmak üzere $\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \forall u, v \in X_\tau$ için

$\exists L_H > 0 : \|h(u(x,y)) - h(v(x,y))\| \le L_H \|u - v\|_\tau . e^{\tau(x+y)}$,

(K3) $\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \forall w_1, w_2 \in B$ için

$\exists L_G > 0 : \|g(x,y,w_1) - g(x,y,w_2)\| \le L_G \|w_1 - w_2\|$,

(K4) $\forall x, y, s, t \in \mathbb{R}_+, \forall w_1, w_2 \in B$ için

$\exists L_K(x,y,s,t) > 0 : \|K(x,y,s,t,w_1) - K(x,y,s,t,w_2)\| \le L_K(x,y,s,t) \|w_1 - w_2\|$,

(K5) $\forall x, y \in \mathbb{R}_+$ için

$L_K \in C(\mathbb{R}_+^4, \mathbb{R}_+)$ ve $\int_0^x \int_0^y L_K(x,y,s,t) e^{\tau(s+t)} dsdt \le L e^{\tau(x+y)}$,

(K6) $L_H L_G + L < 1$.

Lungu ve Rus [123], (K1-K6) koşulları altında (4.1) ile verilen denklemin bir Picard operatörü olduğunu dolayısıyla bu denklemin bir tek çözüme sahip olduğunu ispatlamıştır. Bu durumdan hareketle aşağıdaki teoremde yeni tanımlanan üç adımlı iterasyon yönteminin bu çözüme kuvvetli yakınsadığı gösterilmiştir:

Teorem 4.1 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,1]$ kontrol dizisi $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ şartını sağlasın. (4.1) ile verilen integral denklem (K1-K6) şartları altında $x_* \in X_\tau$ gibi bir tek çözüme sahiptir ve (3.16) ile verilen yeni iterasyon yöntemi bu çözüme yakınsar.

İspat $A : X_\tau \to X_\tau$ olmak üzere

$$A(x_n(x,y)) = g(x,y,h(x_n(x,y))) + \int_0^x\int_0^y K(x,y,s,t,x_n(s,t))dsdt$$

şeklinde tanımlanan operatör için (3.16) ile verilen iterasyon yönteminden elde edilen

dizi $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ile gösterilsin. $n \to \infty$ için $x_n \to x_*$ olduğu gösterilmelidir. (3.16), (4.1) ve (K1)-(K6) koşullarından,

$\|z_n - x_*\|_\tau = \sup_{x,y\in\mathbb{R}_+} \left(\|A(x_n(x,y)) - A(x_*(x,y))\| e^{-\tau(x+y)} \right)$ olup buradan,

$$\begin{aligned}
\|A(x_n(x,y)) - A(x_*(x,y))\| &\le \|g(x,y,h(x_n(x,y))) - g(x,y,h(x_*(x,y)))\| \\
&\quad + \left\| \begin{matrix} \int_0^x\int_0^y K(x,y,s,t,x_n(s,t))dsdt \\ -\int_0^x\int_0^y K(x,y,s,t,x_*(s,t))dsdt \end{matrix} \right\| \\
&\le L_G \|h(x_n(x,y)) - h(x_*(x,y))\| \\
&\quad + \int_0^x\int_0^y \left\| \begin{matrix} K(x,y,s,t,x_n(s,t)) \\ -K(x,y,s,t,x_*(s,t)) \end{matrix} \right\| dsdt \\
&\le L_G L_H \|x_n - x_*\|_\tau e^{\tau(x+y)} \\
&\quad + \int_0^x\int_0^y L_K(x,y,s,t) \|x_n(s,t) - x_*(s,t)\| dsdt \\
&\le L_G L_H \|x_n - x_*\|_\tau e^{\tau(x+y)} + L \|x_n - x_*\|_\tau e^{\tau(x+y)} \\
&= (L_G L_H + L) \|x_n - x_*\|_\tau e^{\tau(x+y)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle,

$$\|z_n - x_*\|_\tau \le (L_G L_H + L) \|x_n - x_*\|_\tau \tag{4.3}$$

olur. Ayrıca,

$$\|y_n - x_*\|_\tau = \|(1-\alpha_n) z_n + \alpha_n A z_n - x_*\|_\tau$$

$$\leq (1-\alpha_n)\left\|z_n - x_*\right\|_\tau + \alpha_n \left\|Az_n - Ax_*\right\|_\tau$$

ve

$\left\|Az_n - Ax_*\right\|_\tau = \sup_{x,y\in\mathbb{R}_+} \left(\left\|A(z_n(x,y)) - A(x_*(x,y))\right\| e^{-\tau(x+y)}\right)$ olup,

$$\begin{aligned}
\left\|A(z_n(x,y)) - A(x_*(x,y))\right\| &\leq \left\|g(x,y,h(z_n(x,y))) - g(x,y,h(x_*(x,y)))\right\| \\
&\quad + \left\| \begin{array}{l} \int_0^x\int_0^y K(x,y,s,t,z_n(s,t))dsdt \\ -\int_0^x\int_0^y K(x,y,s,t,x_*(s,t))dsdt \end{array} \right\| \\
&\leq L_G \left\|h(z_n(x,y)) - h(x_*(x,y))\right\| \\
&\quad + \int_0^x\int_0^y \left\| \begin{array}{l} K(x,y,s,t,z_n(s,t)) \\ -K(x,y,s,t,x_*(s,t)) \end{array} \right\| dsdt \\
&\leq L_G L_H \left\|z_n - x_*\right\|_\tau e^{\tau(x+y)} \\
&\quad + \int_0^x\int_0^y L_K(x,y,s,t)\left\|z_n(s,t) - x_*(s,t)\right\| dsdt \\
&\leq L_G L_H \left\|z_n - x_*\right\|_\tau e^{\tau(x+y)} + L\left\|z_n - x_*\right\|_\tau e^{\tau(x+y)} \\
&= (L_G L_H + L)\left\|z_n - x_*\right\|_\tau e^{\tau(x+y)}
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
\left\|y_n - x_*\right\| &\leq (1-\alpha_n)\left\|z_n - x_*\right\|_\tau + \alpha_n (L_G L_H + L)\left\|z_n - x_*\right\|_\tau \\
&= \left[1 - \alpha_n\{1 - (L_G L_H + L)\}\right]\left\|z_n - x_*\right\|_\tau
\end{aligned} \tag{4.4}$$

elde edilir. (4.3) eşitsizliği (4.4)’te yerine yazılırsa,

$$\left\|y_n - x_*\right\| \leq \left[1 - \alpha_n\{1 - (L_G L_H + L)\}\right](L_G L_H + L)\left\|x_n - x_*\right\|_\tau$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\left\|x_{n+1} - x_*\right\|_\tau = \sup_{x,y\in\mathbb{R}_+} \left(\left\|A(y_n(x,y)) - A(x_*(x,y))\right\| e^{-\tau(x+y)}\right)$$

ve

$$\left\|A(y_n(x,y)) - A(x_*(x,y))\right\| \leq \left\|g(x,y,h(y_n(x,y))) - g(x,y,h(x_*(x,y)))\right\|$$

$$+\left\|\begin{array}{l}\int_0^x\int_0^y K(x,y,s,t,y_n(s,t))dsdt\\ -\int_0^x\int_0^y K(x,y,s,t,x_*(s,t))dsdt\end{array}\right\|$$

$$\leq L_G\left\|h(y_n(x,y))-h(x_*(x,y))\right\|$$

$$+\int_0^x\int_0^y\left\|\begin{array}{l}K(x,y,s,t,y_n(s,t))\\ -K(x,y,s,t,x_*(s,t))\end{array}\right\|dsdt$$

$$\leq L_GL_H\left\|y_n-x_*\right\|_\tau e^{\tau(x+y)}$$

$$+\int_0^x\int_0^y L_K(x,y,s,t)\left\|y_n(s,t)-x_*(s,t)\right\|dsdt$$

$$L_GL_H\left\|y_n-x_*\right\|_\tau e^{\tau(x+y)}+L\left\|y_n-x_*\right\|_\tau e^{\tau(x+y)}$$

$$=(L_GL_H+L)\left\|y_n-x_*\right\|_\tau e^{\tau(x+y)}$$

olduğundan

$$\left\|x_{n+1}-x_*\right\|_\tau\leq(L_GL_H+L)^2[1-\alpha_n\{1-(L_GL_H+L)\}]\left\|x_n-x_*\right\|_\tau$$

elde edilir. (K6) koşulundan $L_GL_H+L<1$ olup,

$$\left\|x_{n+1}-x_*\right\|_\tau\leq\left[1-\alpha_n\{1-(L_GL_H+L)\}\right]\left\|x_n-x_*\right\|_\tau \quad (4.5)$$

yazılabilir. (4.5) eşitsizliğinde tümevarım uygulanırsa

$$\left\|x_{n+1}-x_*\right\|_\tau\leq\left\|x_0-x_*\right\|_\tau\prod_{k=0}^{n}[1-\alpha_k\{1-(L_GL_H+L)\}] \quad (4.6)$$

elde edilir. Her $k\in\mathbb{N}$ için $\alpha_k\in[0,1]$ olduğundan (K6) koşulundan $1-\alpha_k\{1-(L_GL_H+L)\}<1$ yazılabilir. Her $x\in[0,1]$ için $1-x\leq e^{-x}$ olduğundan (4.6) eşitsizliği

$$\left\|x_{n+1}-x_*\right\|_\tau\leq\left\|x_0-x_*\right\|_\tau e^{-[1-(L_GL_H+L)]\sum_{k=0}^{n}\alpha_k} \quad (4.7)$$

şeklinde yazılabilir. $n\to\infty$ için (4.7) eşitsizliğinde limit alınırsa $\lim_{n\to\infty}\left\|x_n-x_*\right\|_\tau=0$ olur.

Şimdi (3.16) ile verilen iterasyon yöntemi yardımıyla (4.1)'de verilen integral denklemin çözümünün veri bağlı olduğu ispatlanacaktır. Bunun için aşağıda verilen notasyonlar kullanılacaktır:

$g_1 \in C(\mathbb{R}_+^2 \times B, B)$, $K_1 \in C(\mathbb{R}_+^4 \times B, B)$ ve $h : X_\tau \to X_\tau$ (K2) koşulunu sağlamak üzere

$g_1(u(x,y)) = g_1(x,y,h(u(x,y)))$ ve

$$K_1(u(x,y)) = \int_0^x \int_0^y K_1(x,y,s,t,u(s,t))dsdt$$

şeklinde verilsin. X_τ kümesi (4.2)'deki gibi tanımlansın ve $x, y \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere

$T, S : X_\tau \to X_\tau$ operatörleri sırasıyla

$$T(u(x,y)) = g(x,y,h(u(x,y))) + \int_0^x \int_0^y K(x,y,s,t,u(s,t))dsdt \tag{4.8}$$

$$S(u_1(x,y)) = g_1(x,y,h(u_1(x,y))) + \int_0^x \int_0^y K_1(x,y,s,t,u_1(s,t))dsdt \tag{4.9}$$

şeklinde verilsin.

Teorem 4.2 (K1-K6) şartları altında T operatörüyle inşa edilen ve (3.16) ile verilen iterasyondan elde edilen dizi $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ile gösterilsin. $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ ise S operatörüyle inşa edilen aşağıdaki iterasyondan elde edilen bir dizi olsun:

$$\begin{cases} u_{n+1} = Sv_n \\ v_n = (1-\alpha_n)w_n + \alpha_n Sw_n \\ w_n = Su_n \end{cases} \tag{4.10}$$

burada $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ kontrol dizisi $\frac{1}{2} \le \alpha_n$ şartını sağlamaktadır. Ayrıca her $u \in X_\tau$ ve $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ge 0$ için $\|g(u) - g_1(u)\|_\tau \le \varepsilon_1$ ve $\|K(u) - K_1(u)\|_\tau \le L\varepsilon_2$ sağlansın. Eğer p_* ve x_* sırasıyla (4.8) ve (4.9) ile verilen eşitliklerin çözümleri ise, bu durumda aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\|p_* - x_*\| \le \frac{5(\varepsilon_1 + L\varepsilon_2)}{[1-(L_G L_H + L)]}$$

İspat (3.16), (4.8), (4.9), (4.10) ile verilen iterasyon yöntemi, (K1)-(K6) şartları ve teoremin hipotezi kullanılarak;

$$
\begin{aligned}
\|z_n - w_n\|_\tau &= \|Tx_n - Su_n\|_\tau \\
&= \sup_{x,y\in\mathbb{R}_+} \left(\|T(x_n(x,y)) - S(u_n(x,y))\| e^{-\tau(x+y)} \right)
\end{aligned}
$$

yazılabilir.

$$
\begin{aligned}
\|T(x_n(x,y)) - S(u_n(x,y))\| &\le \|g(x,y,h(x_n(x,y))) - g_1(x,y,h(u_n(x,y)))\| \\
&+ \left\| \begin{array}{l} \int_0^x\int_0^y K(x,y,s,t,x_n(s,t))dsdt \\ -\int_0^x\int_0^y K_1(x,y,s,t,u_n(s,t))dsdt \end{array} \right\| \\
&\le \|g(x,y,h(x_n(x,y))) - g(x,y,h(u_n(x,y)))\| \\
&+ \|g(x,y,h(u_n(x,y))) - g_1(x,y,h(u_n(x,y)))\| \\
&+ \left\| \begin{array}{l} \int_0^x\int_0^y K(x,y,s,t,x_n(s,t))dsdt \\ -\int_0^x\int_0^y K(x,y,s,t,u_n(s,t))dsdt \end{array} \right\| \\
&+ \left\| \begin{array}{l} \int_0^x\int_0^y K(x,y,s,t,u_n(s,t))dsdt \\ -\int_0^x\int_0^y K_1(x,y,s,t,u_n(s,t))dsdt \end{array} \right\| \\
&\le L_G \|h(x_n(x,y))) - h(u_n(x,y)))\| \\
&+ \varepsilon_1 e^{\tau(x+y)} \\
&+ \int_0^x\int_0^y L_K(x,y,s,t)\|x_n(s,t) - u_n(s,t)\| dsdt \\
&+ L\varepsilon_2 e^{\tau(x+y)} \\
&\le L_G L_H \|x_n - u_n\|_\tau e^{\tau(x+y)} + \varepsilon_1 e^{\tau(x+y)} \\
&+ L\|x_n - u_n\|_\tau e^{\tau(x+y)} + L\varepsilon_2 e^{\tau(x+y)} \\
&= [(L_G L_H + L)\|x_n - u_n\|_\tau + (\varepsilon_1 + L\varepsilon_2)] e^{\tau(x+y)}
\end{aligned}
$$

olduğundan,

$$
\|z_n - w_n\|_\tau \le (L_G L_H + L)\|x_n - u_n\|_\tau + (\varepsilon_1 + L\varepsilon_2) \tag{4.11}
$$

elde edilir. Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
\|y_n - v_n\|_\tau &= \|(1-\alpha_n) z_n - \alpha_n T z_n - (1-\alpha_n) w_n - \alpha_n S w_n\|_\tau \\
&\le (1-\alpha_n)\|z_n - w_n\|_\tau + \alpha_n \|Tz_n - Sw_n\|_\tau
\end{aligned}
$$

ve

$$\left\|Tz_n - Sw_n\right\|_\tau = \sup_{x,y\in\mathbb{R}_+}\left(\left\|T(z_n(x,y)) - S(w_n(x,y))\right\| e^{-\tau(x+y)}\right)$$

olup

$$\begin{aligned}
\left\|T(z_n(x,y)) - S(w_n(x,y))\right\| &\le \left|g(x,y,h(z_n(x,y))) - g_1(x,y,h(w_n(x,y)))\right| \\
&\quad + \left\| \begin{array}{l} \int_0^x\int_0^y K(x,y,s,t,z_n(s,t))dsdt \\ -\int_0^x\int_0^y K_1(x,y,s,t,w_n(s,t))dsdt \end{array} \right\| \\
&\le \left\|g(x,y,h(z_n(x,y))) - g(x,y,h(w_n(x,y)))\right\| \\
&\quad + \left\|g(x,y,h(w_n(x,y))) - g_1(x,y,h(w_n(x,y)))\right\| \\
&\quad + \left\| \begin{array}{l} \int_0^x\int_0^y K(x,y,s,t,z_n(s,t))dsdt \\ -\int_0^x\int_0^y K(x,y,s,t,w_n(s,t))dsdt \end{array} \right\| \\
&\quad + \left\| \begin{array}{l} \int_0^x\int_0^y K(x,y,s,t,w_n(s,t))dsdt \\ -\int_0^x\int_0^y K_1(x,y,s,t,w_n(s,t))dsdt \end{array} \right\| \\
&\le L_G\left\|h(z_n(x,y)) - h(w_n(x,y))\right\| + \varepsilon_1 e^{\tau(x+y)} \\
&\quad + \int_0^x\int_0^y L_K(x,y,s,t)\left\|z_n(s,t) - w_n(s,t)\right\| dsdt + L\varepsilon_2 e^{\tau(x+y)} \\
&\le L_G L_H \left\|z_n - w_n\right\|_\tau e^{\tau(x+y)} + \varepsilon_1 e^{\tau(x+y)} \\
&\quad + L\left\|z_n - w_n\right\|_\tau e^{\tau(x+y)} + L\varepsilon_2 e^{\tau(x+y)} \\
&= [(L_G L_H + L)\left\|z_n - w_n\right\|_\tau + (\varepsilon_1 + L\varepsilon_2)] e^{\tau(x+y)}
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\left\|Tz_n - Sw_n\right\|_\tau \le (L_G L_H + L)\left\|z_n - w_n\right\|_\tau + (\varepsilon_1 + L\varepsilon_2)$$

olur. Dolayısıyla,

$$\left\|y_n - v_n\right\|_\tau \le \left(1-\alpha_n\right)\left\|z_n - w_n\right\|_\tau + \alpha_n (L_G L_H + L)\left\|z_n - w_n\right\|_\tau + \alpha_n(\varepsilon_1 + L\varepsilon_2) \tag{4.12}$$

olur. (4.11) eşitsizliği (4.12)'de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}\|y_n - v_n\|_\tau \le{}& (L_G L_H + L)\{1-\alpha_n[1-(L_G L_H + L)]\}\|x_n - u_n\|_\tau \\ &+\{1-\alpha_n[1-(L_G L_H + L)]\}(\varepsilon_1 + L\varepsilon_2) \\ &+\alpha_n(\varepsilon_1 + L\varepsilon_2)\end{aligned} \tag{4.13}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - u_{n+1}\|_\tau &= \|Ty_n - Sv_n\|_\tau \\ &= \sup_{x,y\in\mathbb{R}_+}\left(\|T(y_n(x,y)) - S(v_n(x,y))\| e^{-\tau(x+y)}\right)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\|T(y_n(x,y)) - S(v_n(x,y))\| \le{}& \|g(x,y,h(y_n(x,y))) - g_1(x,y,h(v_n(x,y)))\| \\ &+\left\| \begin{matrix}\int_0^x\int_0^y K(x,y,s,t,y_n(s,t))dsdt \\ -\int_0^x\int_0^y K_1(x,y,s,t,v_n(s,t))dsdt\end{matrix}\right\| \\ \le{}& \|g(x,y,h(y_n(x,y))) - g(x,y,h(v_n(x,y)))\| \\ &+\|g(x,y,h(v_n(x,y))) - g_1(x,y,h(v_n(x,y)))\| \\ &+\left\| \begin{matrix}\int_0^x\int_0^y K(x,y,s,t,y_n(s,t))dsdt \\ -\int_0^x\int_0^y K(x,y,s,t,v_n(s,t))dsdt\end{matrix}\right\| \\ &+\left\| \begin{matrix}\int_0^x\int_0^y K(x,y,s,t,v_n(s,t))dsdt \\ -\int_0^x\int_0^y K_1(x,y,s,t,v_n(s,t))dsdt\end{matrix}\right\| \\ \le{}& L_G\|h(y_n(x,y)) - h(v_n(x,y))\| \\ &+\varepsilon_1 e^{\tau(x+y)} \\ &+\int_0^x\int_0^y L_K(x,y,s,t)\|y_n(s,t) - v_n(s,t)\|dsdt \\ &+L\varepsilon_2 e^{\tau(x+y)} \\ \le{}& L_G L_H\|y_n - v_n\|_\tau e^{\tau(x+y)} + \varepsilon_1 e^{\tau(x+y)} \\ &+L\|y_n - v_n\|_\tau e^{\tau(x+y)} + L\varepsilon_2 e^{\tau(x+y)} \\ ={}& \left[(L_G L_H + L)\|y_n - v_n\|_\tau + (\varepsilon_1 + L\varepsilon_2)\right] e^{\tau(x+y)}\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\|x_{n+1} - u_{n+1}\|_\tau \le (L_G L_H + L)\|y_n - v_n\|_\tau + (\varepsilon_1 + L\varepsilon_2) \tag{4.14}$$

olur. (4.13) eşitsizliği (4.14)'te yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-u_{n+1}\|_\tau &\le (L_G L_H + L)^2\{1-\alpha_n[1-(L_G L_H + L)]\}\|x_n-u_n\|_\tau \\ &+(L_G L_H + L)\{1-\alpha_n[1-(L_G L_H + L)]\}(\varepsilon_1 + L\varepsilon_2) \\ &+(L_G L_H + L)\alpha_n(\varepsilon_1 + L\varepsilon_2)+(\varepsilon_1 + L\varepsilon_2)\end{aligned} \tag{4.15}$$

olur. $\{1-\alpha_n[1-(L_G L_H + L)]\}<1$ ve $(L_G L_H + L)<1$ olduğundan (4.15) eşitsizliği

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-u_{n+1}\|_\tau &\le \{1-\alpha_n[1-(L_G L_H + L)]\}\|x_n-u_n\|_\tau \\ &+2\varepsilon_1+\alpha_n\varepsilon_1+2L\varepsilon_2+\alpha_n L\varepsilon_2\end{aligned} \tag{4.16}$$

şeklinde yazılabilir. $\frac{1}{2}\le\alpha_n \Rightarrow 1-\alpha_n\le\alpha_n$ yazılabilir. O halde (4.16) eşitsizliği

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-u_{n+1}\|_\tau &\le \{1-\alpha_n[1-(L_G L_H + L)]\}\|x_n-u_n\|_\tau \\ &+\alpha_n([1-(L_G L_H + L)])\frac{5(\varepsilon_1+L\varepsilon_2)}{[1-(L_G L_H + L)]}\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}a_n &= \|x_n-u_n\|_\tau, \\ \mu_n &= \alpha_n[1-(L_G L_H + L)] \\ \eta_n &= \frac{5(\varepsilon_1+L\varepsilon_2)}{[1-(L_G L_H + L)]}\end{aligned}$$

şeklinde seçilirse Lemma 3.20'den

$$\begin{aligned}0 &\le \lim_{n\to\infty}\sup\|x_n-u_n\|_\tau \\ &\le \lim_{n\to\infty}\sup\frac{5(\varepsilon_1+L\varepsilon_2)}{[1-(L_G L_H + L)]} \\ &= \frac{5(\varepsilon_1+L\varepsilon_2)}{[1-(L_G L_H + L)]}\end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 4.1'den $x_n\to p_*$ olduğu bilinmektedir. Ayrıca kabulden $n\to\infty$ için $u_n\to x_*$ olduğundan

$$\|p_*-x_*\|\le\frac{5(\varepsilon_1+L\varepsilon_2)}{[1-(L_G L_H + L)]}.$$

4.2 Mixed-Type Volterra-Fredholm İntegral Denklemi İçin Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Bu bölümde (3.16) ile verilen üç adımlı yeni iterasyon yardımıyla elde edilen dizinin [125]'de tanımı verilen aşağıdaki mixed-type Volterra-Fredholm integral denklemin çözümüne kuvvetli yakınsak olduğu ve bu çözümün veri bağlı olduğu gösterilecektir:

$$x(t)=F\left(t,x(t),\int_{a_1}^{t_1}\ldots\int_{a_m}^{t_m}K(t,s,x(s))ds,\int_{a_1}^{b_1}\ldots\int_{a_m}^{b_m}H(t,s,x(s))ds\right) \tag{4.17}$$

Aşağıda verilen koşullar sağlansın:

(C1) $K,H:[a_1;b_1]\times\ldots\times[a_m;b_m]\times[a_1;b_1]\times\ldots\times[a_m;b_m]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar;

(C2) $F:[a_1;b_1]\times\ldots\times[a_m;b_m]\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon;

(C3) $i=1,2$ olmak üzere $u_i,v_i,w_i\in\mathbb{R}$ ve tüm $t\in[a_1;b_1]\times\ldots\times[a_m;b_m]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan α,β ve γ sabitleri vardır öyle ki:

$$\left|F(t,u_1,v_1,w_1)-F(t,u_2,v_2,w_2)\right|\le\alpha\left|u_1-u_2\right|+\beta\left|v_1-v_2\right|+\gamma\left|w_1-w_2\right|$$

(C4) $u,v\in\mathbb{R}$ ve tüm $t,s\in[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_m,b_m]$ için aşağıdaki eşitsizliği sağlayan L_K ve L_H sabitleri vardır:

$$\left|K(t,s,u)-K(t,s,v)\right|\le L_K\left|u-v\right|$$
$$\left|H(t,s,u)-H(t,s,v)\right|\le L_H\left|u-v\right|$$

(C5) $\alpha+(\beta L_K+\gamma L_H)(b_1-a_1)\ldots(b_m-a_m)<1.$

Teorem 4.3 $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}\subset[0,1]$ olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n=\infty$ şartı sağlansın. O halde (4.17) ile verilen denklem (C1)-(C5) şartları altında $p_*\in C([a_1;b_1]\times\ldots\times[a_m;b_m])$ gibi bir tek çözüme sahiptir ve (3.16) ile verilen iterasyon yönteminden elde edilen dizi p_* noktasına yakınsar.

İspat $\|.\|_C$ Chebyshev normunu göstermek üzere, $\mathrm{B}=\mathrm{C}\left([\mathrm{a}_1;\mathrm{b}_1]\times\ldots\times\left[\mathrm{a}_m;\mathrm{b}_m\right],\|.\|_C\right)$ Banach uzayı göz önüne alınsın: $A:B\to B$ ve

$$A(x)(t)=F(t,x(t),\int_{a_1}^{t_1}\dots\int_{a_m}^{t_m}K(t,s,x(s))ds,\int_{a_1}^{b_1}\dots\int_{a_m}^{b_m}H(t,s,x(s))ds)$$

şeklinde tanımlanan operatör için (3.16) ile verilen iterasyondan elde edilen dizi $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ olsun. $n\to\infty$ için $x_n\to p_*$ olduğu gösterilmelidir. (3.16), (4.17) ve (C1)-(C5) koşulları kullanılarak;

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-p_*\|&=\|Ay_n-Ap_*\|=\|Ay_n(t)-Ap_*\|\\
&=\left|\begin{array}{l}F\left(t,y_n(t),\int_{a_1}^{t_1}\dots\int_{a_m}^{t_m}K(t,s,y_n(s))ds,\int_{a_1}^{b_1}\dots\int_{a_m}^{b_m}H(t,s,y_n(s))ds\right)\\-F\left(t,p_*(t),\int_{a_1}^{t_1}\dots\int_{a_m}^{t_m}K(t,s,p_*(s))ds,\int_{a_1}^{b_1}\dots\int_{a_m}^{b_m}H(t,s,p_*(s))ds\right)\end{array}\right|\\
&\le\alpha|y_n(t)-p_*(t)|+\beta\left|\int_{a_1}^{t_1}\dots\int_{a_m}^{t_m}K(t,s,y_n(s))ds-\int_{a_1}^{t_1}\dots\int_{a_m}^{t_m}K(t,s,p_*(s))ds\right|\\
&\quad+\gamma\left|\int_{a_1}^{b_1}\dots\int_{a_m}^{b_m}H(t,s,y_n(s))ds-\int_{a_1}^{b_1}\dots\int_{a_m}^{b_m}H(t,s,p_*(s))ds\right|\end{aligned}$$

elde edilir. O halde,

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-p_*\|&\le\alpha|y_n(t)-p_*(t)|+\beta\int_{a_1}^{t_1}\dots\int_{a_m}^{t_m}|K(t,s,y_n(s))-K(t,s,p_*(s))|ds\\
&\quad+\gamma\int_{a_1}^{b_1}\dots\int_{a_m}^{b_m}|H(t,s,y_n(s))-H(t,s,p_*(s))|ds\\
&\le\alpha|y_n(t)-p_*(t)|+\beta\int_{a_1}^{t_1}\dots\int_{a_m}^{t_m}L_K|y_n(s)-p_*(s)|ds\\
&\quad+\gamma\int_{a_1}^{b_1}\dots\int_{a_m}^{b_m}L_H|y_n(s)-p_*(s)|ds\\
&\le[\alpha+(\beta L_K+\gamma L_H)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i)]\|y_n-p_*\|\end{aligned}\tag{4.18}$$

olur. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\|y_n-p_*\|&=\|(1-\xi_n)z_n(t)+\xi_nAz_n(t)-p_*(t)\|\\
&\le(1-\xi_n)|z_n(t)-p_*(t)|+\xi_n|Az_n(t)-Ap_*(t)|\\
&=(1-\xi_n)|z_n(t)-p_*(t)|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\xi_n\left|\begin{array}{l} F\left(t,z_n(t),\int\limits_{a_1}^{t_1}\dots\int\limits_{a_m}^{t_m}K(t,s,z_n(s))ds,\int\limits_{a_1}^{b_1}\dots\int\limits_{a_m}^{b_m}H(t,s,z_n(s))ds\right)\\ -F\left(t,p_*(t),\int\limits_{a_1}^{t_1}\dots\int\limits_{a_m}^{t_m}K(t,s,p_*(s))ds,\int\limits_{a_1}^{b_1}\dots\int\limits_{a_m}^{b_m}H(t,s,p_*(s))ds\right)\end{array}\right|\\
&\le(1-\xi_n)\left|z_n(t)-p_*(t)\right|+\xi_n\alpha\left|z_n(t)-p_*(t)\right|\\
&\quad+\xi_n\beta\left|\int\limits_{a_1}^{t_1}\dots\int\limits_{a_m}^{t_m}K(t,s,z_n(s))ds-\int\limits_{a_1}^{t_1}\dots\int\limits_{a_m}^{t_m}K(t,s,p_*(s))ds\right|\\
&\quad+\xi_n\gamma\left|\int\limits_{a_1}^{b_1}\dots\int\limits_{a_m}^{b_m}H(t,s,z_n(s))ds-\int\limits_{a_1}^{b_1}\dots\int\limits_{a_m}^{b_m}H(t,s,p_*(s))ds\right|\\
&\le(1-\xi_n)\left|z_n(t)-p_*(t)\right|+\xi_n\alpha\left|z_n(t)-p_*(t)\right|\\
&\quad+\xi_n\beta\int\limits_{a_1}^{t_1}\dots\int\limits_{a_m}^{t_m}\left|K(t,s,z_n(s))-K(t,s,p_*(s))\right|ds\\
&\quad+\xi_n\gamma\int\limits_{a_1}^{b_1}\dots\int\limits_{a_m}^{b_m}\left|H(t,s,z_n(s))-H(t,s,p_*(s))\right|ds\\
&\le(1-\xi_n)\left|z_n(t)-p_*(t)\right|+\xi_n\alpha\left|z_n(t)-p_*(t)\right|\\
&\quad+\xi_n\beta\int\limits_{a_1}^{t_1}\dots\int\limits_{a_m}^{t_m}L_K\left|z_n(s)-p_*(s)\right|ds\\
&\quad+\xi_n\gamma\int\limits_{a_1}^{b_1}\dots\int\limits_{a_m}^{b_m}L_H\left|z_n(s)-p_*(s)\right|ds\\
&\le\left\{1-\xi_n\left(1-\left[\alpha+(\beta L_K+\gamma L_H)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i)\right]\right)\right\}\left\|z_n-p_*\right\|
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

elde edilir. Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
\left\|z_n-p_*\right\|&=\left\|Ax_n-Ap_*\right\|=\left\|Ax_n(t)-Ap_*(t)\right\|\\
&=\left|\begin{array}{l} F\left(t,x_n(t),\int\limits_{a_1}^{t_1}\dots\int\limits_{a_m}^{t_m}K(t,s,x_n(s))ds,\int\limits_{a_1}^{b_1}\dots\int\limits_{a_m}^{b_m}H(t,s,x_n(s))ds\right)\\ -F\left(t,p_*(t),\int\limits_{a_1}^{t_1}\dots\int\limits_{a_m}^{t_m}K(t,s,p_*(s))ds,\int\limits_{a_1}^{b_1}\dots\int\limits_{a_m}^{b_m}H(t,s,p_*(s))ds\right)\end{array}\right|\\
&\le\alpha\left|x_n(t)-p_*(t)\right|+\beta\left|\int\limits_{a_1}^{t_1}\dots\int\limits_{a_m}^{t_m}K(t,s,x_n(s))ds-\int\limits_{a_1}^{t_1}\dots\int\limits_{a_m}^{t_m}K(t,s,p_*(s))ds\right|\\
&\quad+\gamma\left|\int\limits_{a_1}^{b_1}\dots\int\limits_{a_m}^{b_m}H(t,s,x_n(s))ds-\int\limits_{a_1}^{b_1}\dots\int\limits_{a_m}^{b_m}H(t,s,p_*(s))ds\right|
\end{aligned}
$$

olur. O halde,

$$
\begin{aligned}
\|z_n - p\| &\le \alpha |x_n(t) - p_*(t)| + \beta \int_{a_1}^{t_1} \dots \int_{a_m}^{t_m} |K(t,s,y_n(s)) - K(t,s,p_*(s))| ds \\
&\quad + \gamma \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_m}^{b_m} |H(t,s,y_n(s)) - H(t,s,p_*(s))| ds \\
&\le \alpha |x_n(t) - p_*(t)| + \beta \int_{a_1}^{t_1} \dots \int_{a_m}^{t_m} L_K |x_n(s) - p_*(s)| ds \\
&\quad + \gamma \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_m}^{b_m} L_H |x_n(s) - p_*(s)| ds \\
&\le [\alpha + (\beta L_K + \gamma L_H) \prod_{i=1}^{m} (b_i - a_i)] \|x_n - p_*\|
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

elde edilir. Sırasıyla (4.20) eşitsizliği (4.19)'da ve (4.19) eşitsizliği (4.18)'de yerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
\|y_n - p_*\| &\le \left\{ 1 - \xi_n \left(1 - \left[\alpha + (\beta L_K + \gamma L_H) \prod_{i=1}^{m} (b_i - a_i) \right] \right) \right\} \\
&\quad \times \left[\alpha + (\beta L_K + \gamma L_H) \prod_{i=1}^{m} (b_i - a_i) \right] \|x_n - p_*\|
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p_*\| &\le \left\{ 1 - \xi_n \left(1 - \left[\alpha + (\beta L_K + \gamma L_H) \prod_{i=1}^{m} (b_i - a_i) \right] \right) \right\} \\
&\quad \times \left[\alpha + (\beta L_K + \gamma L_H) \prod_{i=1}^{m} (b_i - a_i) \right] \\
&\quad \times \left[\alpha + (\beta L_K + \gamma L_H) \prod_{i=1}^{m} (b_i - a_i) \right] \|x_n - p_*\|
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\left[\alpha + (\beta L_K + \gamma L_H) \prod_{i=1}^{m} (b_i - a_i) \right] < 1$ olduğundan,

$$
\|x_{n+1} - p_*\| \le \left\{ 1 - \xi_n \left(1 - \left[\alpha + (\beta L_K + \gamma L_H) \prod_{i=1}^{m} (b_i - a_i) \right] \right) \right\} \|x_n - p_*\|
$$

yazılabilir. Tümevarımdan,

$$
\|x_{n+1} - p_*\| \le \prod_{k=0}^{n} \left\{ 1 - \xi_k \left(1 - \left[\alpha + (\beta L_K + \gamma L_H) \prod_{i=1}^{m} (b_i - a_i) \right] \right) \right\} \|x_0 - p_*\| \tag{4.21}
$$

elde edilir.

$$\left\{1-\xi_k\left(1-\left[\alpha+(\beta L_K+\gamma L_H)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i)\right]\right)\right\}<1$$

olduğundan (4.21) eşitsizliği,

$$\|x_{n+1}-p_*\|\leq\|x_0-p_*\|e^{-\left(1-\left[\alpha+(\beta L_K+\gamma L_H)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i)\right]\right)\sum_{k=0}^{n}\xi_k}$$

şeklinde yazılabilir. Son eşitsizlikte $n\to\infty$ için limit alınırsa $\|x_n-p_*\|\to 0$ elde edilir.

Şimdi (3.16) ile verilen iterasyon yöntemi yardımıyla (4.17)'de verilen integral

denklemin çözümünün veri bağlı olduğu ispatlanacaktır. Bunun için aşağıda verilen notasyonlar kullanılacaktır:

$T,S:B\to B$ tanımlı iki operatör ve

$K,N,H,M:[a_1;b_1]\times\ldots\times[a_m;b_m]\times[a_1;b_1]\times\ldots\times[a_m;b_m]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

sürekli fonksiyonlar olmak üzere;

$$Tx(t)=F\left(t,x(t),\int_{a_1}^{t_1}\ldots\int_{a_m}^{t_m}K(t,s,x(s))ds,\int_{a_1}^{b_1}\ldots\int_{a_m}^{b_m}H(t,s,x(s))ds\right) \tag{4.22}$$

$$Sx(t)=F\left(t,x(t),\int_{a_1}^{t_1}\ldots\int_{a_m}^{t_m}N(t,s,x(s))ds,\int_{a_1}^{b_1}\ldots\int_{a_m}^{b_m}M(t,s,x(s))ds\right) \tag{4.23}$$

şeklinde tanımlansın.

Teorem 4.4 T operatörüyle inşa edilen (3.16) ile verilen iterasyondan elde edilen dizi $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ile gösterilsin. $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ ise S operatörüyle inşa edilen aşağıdaki iterasyondan elde edilen bir dizi olsun:

$$\begin{cases} u_{n+1}=Sv_n \\ v_n=(1-\xi_n)w_n+\xi_n Sw_n \\ w_n=Su_n \end{cases} \tag{4.24}$$

burada $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}\in[0,1]$ kontrol dizisi her $n\in\mathbb{N}$ için $\frac{1}{2}\leq\xi_n$ şartını sağlamaktadır. Ayrıca her u$\in\mathbb{R}$ ve $s,t\in[a_1;b_1]\times\ldots\times[a_m;b_m]$ için $|K(t,s,u)-M(t,s,u)|\leq\varepsilon_1$ ve

$\left|H(t,s,u)-N(t,s,u)\right|\le\varepsilon_2$ olacak şekilde $\varepsilon_1,\varepsilon_2\ge 0$ sabitleri mevcut olsun. Eğer p_* ve x_* sırasıyla (4.22) ve (4.23) ile verilen eşitliklerin çözümleri ise, bu durumda aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left\|p_*-x_*\right\|\le\frac{5(\beta\varepsilon_1+\gamma\varepsilon_2)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i)}{1-\left[\alpha+(\beta L_K+\gamma L_H)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i)\right]}.$$

İspat (3.16), (4.22), (4.23) ve (4.24)'ten

$$\begin{aligned}
\left\|x_{n+1}-u_{n+1}\right\| &= \left|\begin{matrix} F\left(t,y_n(t),\int_{a_1}^{t_1}\ldots\int_{a_m}^{t_m}K(t,s,y_n(s))ds,\int_{a_1}^{b_1}\ldots\int_{a_m}^{b_m}H(t,s,y_n(s))ds\right) \\ -F\left(t,v_n(t),\int_{a_1}^{t_1}\ldots\int_{a_m}^{t_m}M(t,s,v_n(s))ds,\int_{a_1}^{b_1}\ldots\int_{a_m}^{b_m}N(t,s,v_n(s))ds\right)\end{matrix}\right| \\
&\le\alpha\left|y_n(t)-v_n(t)\right|+\beta\int_{a_1}^{t_1}\ldots\int_{a_m}^{t_m}\left|K(t,s,y_n(s))-M(t,s,v_n(s))\right|ds \\
&\quad+\gamma\int_{a_1}^{b_1}\ldots\int_{a_m}^{b_m}\left|H(t,s,y_n(s))-N(t,s,v_n(s))\right|ds \\
&\le\alpha\left|y_n(t)-v_n(t)\right| \\
&\quad+\beta\int_{a_1}^{t_1}\ldots\int_{a_m}^{t_m}\left(\left|K(t,s,y_n(s))-K(t,s,v_n(s))\right|+\left|K(t,s,v_n(s))-M(t,s,v_n(s))\right|\right)ds \\
&\quad+\gamma\int_{a_1}^{b_1}\ldots\int_{a_m}^{b_m}\left(\left|H(t,s,y_n(s))-H(t,s,v_n(s))\right|+\left|H(t,s,v_n(s))-N(t,s,v_n(s))\right|\right)ds \\
&\le\alpha\left|y_n(t)-v_n(t)\right| \\
&\quad+\beta\int_{a_1}^{t_1}\ldots\int_{a_m}^{t_m}(L_K\left|y_n(s)-v_n(s)\right|+\varepsilon_1)ds \\
&\quad+\gamma\int_{a_1}^{b_1}\ldots\int_{a_m}^{b_m}(L_H\left|y_n(s)-v_n(s)\right|+\varepsilon_2)ds \\
&\le\alpha\left\|y_n-v_n\right\|+\beta(L_K\left\|y_n-v_n\right\|+\varepsilon_1)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i) \\
&\quad+\gamma(L_H\left\|y_n-v_n\right\|+\varepsilon_2)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i) \qquad (4.25)\\
&\le[\alpha+(\beta L_K+\gamma L_H)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i)]\left\|y_n-v_n\right\| \\
&\quad+(\beta\varepsilon_1+\gamma\varepsilon_2)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
\left\|y_n - v_n\right\| &\leq (1-\xi_n)\left|z_n(t) - w_n(t)\right| + \xi_n\left|Tz_n(t) - Sw_n(t)\right| \\
&\leq (1-\xi_n)\left|z_n(t) - w_n(t)\right| \\
&\quad + \xi_n \left| \begin{array}{l} F\left(t, z_n(t), \int_{a_1}^{t_1}\ldots\int_{a_m}^{t_m} K(t,s,z_n(s))ds, \int_{a_1}^{b_1}\ldots\int_{a_m}^{b_m} H(t,s,z_n(s))ds\right) \\ -F\left(t, w_n(t), \int_{a_1}^{t_1}\ldots\int_{a_m}^{t_m} M(t,s,w_n(s))ds, \int_{a_1}^{b_1}\ldots\int_{a_m}^{b_m} N(t,s,w_n(s))ds\right) \end{array} \right| \\
&\leq (1-\xi_n)\left|z_n(t) - w_n(t)\right| \\
&\quad + \xi_n \left\{ \begin{array}{l} \alpha\left|z_n(t) - w_n(t)\right| + \beta\int_{a_1}^{t_1}\ldots\int_{a_m}^{t_m} \left|K(t,s,z_n(s)) - M(t,s,w_n(s))\right|ds \\ +\gamma\int_{a_1}^{b_1}\ldots\int_{a_m}^{b_m} \left|H(t,s,z_n(s)) - N(t,s,w_n(s))\right|ds \end{array} \right\} \\
&\leq (1-\xi_n)\left|z_n(t) - w_n(t)\right| \\
&\quad + \xi_n \left\{ \begin{array}{l} \alpha\left|z_n(t) - w_n(t)\right| \\ +\beta\int_{a_1}^{t_1}\ldots\int_{a_m}^{t_m} \left(\begin{array}{l} \left|K(t,s,z_n(s)) - K(t,s,w_n(s))\right| \\ +\left|K(t,s,w_n(s)) - M(t,s,w_n(s))\right| \end{array} \right) ds \\ +\gamma\int_{a_1}^{b_1}\ldots\int_{a_m}^{b_m} \left(\begin{array}{l} \left|H(t,s,z_n(s)) - H(t,s,w_n(s))\right| \\ +\left|H(t,s,w_n(s)) - N(t,s,w_n(s))\right| \end{array} \right) ds \end{array} \right\} \\
&\leq (1-\xi_n)\left|z_n(t) - w_n(t)\right| \\
&\quad + \xi_n \left\{ \begin{array}{l} \alpha\left|z_n(t) - w_n(t)\right| + \beta\int_{a_1}^{t_1}\ldots\int_{a_m}^{t_m} (L_K\left|z_n(s) - w_n(s)\right| + \varepsilon_1)ds \\ +\gamma\int_{a_1}^{b_1}\ldots\int_{a_m}^{b_m} (L_H\left|z_n(s) - w_n(s)\right| + \varepsilon_2)ds \end{array} \right\} \\
&\leq \{1 - \xi_n(1 - [\alpha + (\beta L_K + \gamma L_H)\prod_{i=1}^{m}(b_i - a_i)])\}\left\|z_n - w_n\right\| \\
&\quad + \xi_n(\beta\varepsilon_1 + \gamma\varepsilon_2)\prod_{i=1}^{m}(b_i - a_i)
\end{aligned} \tag{4.26}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\left\|z_n - w_n\right\| &= \left| \begin{array}{l} F\left(t, x_n(t), \int_{a_1}^{t_1}\ldots\int_{a_m}^{t_m} K(t,s,x_n(s))ds, \int_{a_1}^{b_1}\ldots\int_{a_m}^{b_m} H(t,s,x_n(s))ds\right) \\ -F\left(t, u_n(t), \int_{a_1}^{t_1}\ldots\int_{a_m}^{t_m} M(t,s,u_n(s))ds, \int_{a_1}^{b_1}\ldots\int_{a_m}^{b_m} N(t,s,u_n(s))ds\right) \end{array} \right| \\
&\leq \alpha\left|x_n(t) - u_n(t)\right| + \beta\int_{a_1}^{t_1}\ldots\int_{a_m}^{t_m} \left|K(t,s,x_n(s)) - M(t,s,u_n(s))\right|ds
\end{aligned}
$$

$$+\gamma\int_{a_1}^{b_1}\ldots\int_{a_m}^{b_m}\left|H(t,s,x_n(s))-N(t,s,u_n(s))\right|ds$$

$$\le \alpha\left|x_n(t)-u_n(t)\right|$$

$$+\beta\int_{a_1}^{t_1}\ldots\int_{a_m}^{t_m}\left(\left|K(t,s,x_n(s))-K(t,s,u_n(s))\right|+\left|K(t,s,u_n(s))-M(t,s,u_n(s))\right|\right)ds$$

$$+\gamma\int_{a_1}^{b_1}\ldots\int_{a_m}^{b_m}\left(\left|H(t,s,x_n(s))-H(t,s,u_n(s))\right|+\left|H(t,s,u_n(s))-N(t,s,u_n(s))\right|\right)ds$$

$$\le \alpha\left|x_n(t)-u_n(t)\right|$$

$$+\beta\int_{a_1}^{t_1}\ldots\int_{a_m}^{t_m}(L_K\left|x_n(s)-u_n(s)\right|+\varepsilon_1)ds$$

$$+\gamma\int_{a_1}^{b_1}\ldots\int_{a_m}^{b_m}(L_H\left|x_n(s)-u_n(s)\right|+\varepsilon_2)ds$$

$$\le \alpha\left\|x_n-u_n\right\|+\beta(L_K\left\|x_n-u_n\right\|+\varepsilon_1)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i)$$

$$+\gamma(L_H\left\|x_n-u_n\right\|+\varepsilon_2)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i)$$

$$\le[\alpha+(\beta L_K+\gamma L_H)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i)]\left\|x_n-u_n\right\| \tag{4.27}$$

$$+(\beta\varepsilon_1+\gamma\varepsilon_2)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i)$$

elde edilir. Sırasıyla (4.27) eşitsizliği (4.26)'da ve (4.26) eşitsizliği (4.25)'te yerine yazılırsa teoremin hipoteziyle birlikte (C5) şartı ve $\left(1-\xi_n(1-[\alpha+(\beta L_K+\gamma L_H)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i)]\right)<1$ olduğu birlikte düşünülürse,

$$\left\|x_{n+1}-u_{n+1}\right\|\le\left\{1-\xi_n\left(1-\left[\alpha+(\beta L_K+\gamma L_H)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i)\right]\right)\right\}\left\|x_n-u_n\right\|$$

$$+\left\{1-\xi_n\left(1-\left[\alpha+(\beta L_K+\gamma L_H)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i)\right]\right)\right\}(\beta\varepsilon_1+\gamma\varepsilon_2)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i)$$

$$+\xi_n(\beta\varepsilon_1+\gamma\varepsilon_2)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i)+(\beta\varepsilon_1+\gamma\varepsilon_2)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i)$$

$$\le\left\{1-\xi_n\left(1-\left[\alpha+(\beta L_K+\gamma L_H)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i)\right]\right)\right\}\left\|x_n-u_n\right\|$$

$$+2\xi_n(\beta\varepsilon_1+\gamma\varepsilon_2)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i)+\xi_n(\beta\varepsilon_1+\gamma\varepsilon_2)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i)$$

$$+2\xi_n(\beta\varepsilon_1+\gamma\varepsilon_2)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i)$$

$$\le\left\{1-\xi_n\left(1-\left[\alpha+(\beta L_K+\gamma L_H)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i)\right]\right)\right\}\left\|x_n-u_n\right\|$$

$$+\xi_n\left(1-\left[\alpha+(\beta L_K+\gamma L_H)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i)\right]\right)$$
$$\times\frac{5(\beta\varepsilon_1+\gamma\varepsilon_2)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i)}{(1-[\alpha+(\beta L_K+\gamma L_H)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i)]} \tag{4.28}$$

elde edilir.

$$a_n=\|x_n-u_n\|$$
$$\mu_n=\xi_n\left(1-\left[\alpha+(\beta L_K+\gamma L_H)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i)\right]\right)\in[0,1]$$
$$\eta_n=\frac{5(\beta\varepsilon_1+\gamma\varepsilon_2)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i)}{\left(1-\left[\alpha+(\beta L_K+\gamma L_H)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i)\right]\right)},$$

şeklinde seçilirse Lemma 3.20’den

$$0\le\limsup_{n\to\infty}\|x_n-u_n\|$$
$$\le\limsup_{n\to\infty}\frac{5(\beta\varepsilon_1+\gamma\varepsilon_2)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i)}{\left(1-\left[\alpha+(\beta L_K+\gamma L_H)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i)\right]\right)}$$
$$=\frac{5(\beta\varepsilon_1+\gamma\varepsilon_2)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i)}{\left(1-\left[\alpha+(\beta L_K+\gamma L_H)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i)\right]\right)}$$

elde edilir. Teorem 4.3’ten $x_n\to p_*$ dır. Ayrıca kabulden $u_n\to x_*$ dır.

Sonuç olarak

$$\|p_*-x_*\|\le\frac{5(\beta\varepsilon_1+\gamma\varepsilon_2)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i)}{\left(1-\left[\alpha+(\beta L_K+\gamma L_H)\prod_{i=1}^{m}(b_i-a_i)\right]\right)}$$

elde edilir.

BÖLÜM 5

LİNEER OLMAYAN VOLTERRA-FREDHOLM İNTEGRODİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN SABİT NOKTA YAKLAŞIMIYLA KARARLILIK HESABI

Kararlılık teorisinin başlangıcı Ulam'ın [63]'de ortaya koyduğu aşağıdaki probleme dayanmaktadır:

$(G_1,\circ)$ bir grup ve üzerinde bir $d(.,.)$ metriği tanımlanan $(G_2,*)$ metrik grup olsun. $\varepsilon>0$ sayısı verilsin. Her $x,y\in G_1$ için $d(h(x\circ y),h(x)*h(y))<\delta$ eşitsizliğini sağlayan $h:G_1\to G_2$ dönüşümüne karşılık her $x\in G_1$ için $d(h(x),H(x))$ ile verilen $H:G_1\to G_2$ dönüşümü homomorfizma olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı var mıdır? Başka bir deyişle bir yaklaşım homomorfizmasına yakın gerçek bir homomorfizma hangi şartlar altında vardır?

Hyers [64], X ve Y Banach uzayları olmak üzere, Ulam'ın sorusuna uygun bir cevap verdi: $f:X\to Y$ her $x,y\in X$ ve bazı $\delta>0$ için

$$\|f(x+y)-f(x)-f(y)\|\le\delta$$

olacak şekilde Banach uzayları arasında bir dönüşüm olsun. Bu durumda her $x\in X$ için

$$\|f(x)-T(x)\|\le\delta$$

olacak şekilde bir tek $T:X\to Y$ toplamsal dönüşümü vardır. Her $x\in X$ için $T:X\to Y$ dönüşümü

$$T(x)=\lim_{n\to\infty}2^{-n}f(2^n x)$$

limiti var olacak şekilde elde edilmiştir.

Eğer yukarıda verilen f fonksiyonu X uzayında bir noktada sürekli ise T dönüşümü X uzayında her yerde süreklidir. Hyers'in bu önemli sonucu aşağıdaki gibi açıklanabilir:

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

toplamsal Cauchy fonksiyonel denklemi Banach uzayının herhangi bir çifti için kararlıdır. Burada $(x,y)\to f(x+y)-f(x)-f(y)$ fonksiyonu Cauchy farkı olarak adlandırılır.

Rassias [65] Hyers'in yukarıda verilen sonucunu Cauchy farkını sınırsız alarak aşağıdaki şekilde genelleştirdi: X ve Y Banach uzaylar $f:X\to Y$ tanımlı, $\varepsilon\geq 0$ ve $0\leq p<1$ olmak üzere her $x,y\in X$ için

$$\|f(x+y)-f(x)-f(y)\|\leq\varepsilon\left(\|x\|^p+\|y\|^p\right)$$

şeklinde bir dönüşüm olsun. Bu durumda her $x\in X$ için

$$T(x)=\lim_{n\to\infty}2^{-n}f(2^n x)$$

limit vardır ve $k=\dfrac{2}{2-2^p}$ iken

$$\|f(x)-T(x))\|\leq k\varepsilon\|x\|^p$$

olacak şekilde bir tek $T:X\to Y$ toplamsal dönüşümü vardır.

Bu bölümde aşağıda tanımı verilen lineer olmayan Volterra-Fredholm integrodiferansiyel denklem için Hyers-Ulam kararlılık ve Hyers-Ulam Rassias kararlılık sabit nokta yaklaşımı altında ispatlanacaktır: $\alpha\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{cases} x'(t)=f(t,x(t))+\lambda_1\int_a^t k_1(t,s,x(s))ds+\lambda_2\int_a^b k_2(t,s,x(s))ds \\ x(0)=\alpha, \qquad\qquad t,s\in I=[a,b] \end{cases} \tag{5.1}$$

şeklindedir. Bu denklemde $x(t)$ bilinmeyen fonksiyon, a, b, λ_1 ve λ_2 sabitler olmak üzere f fonksiyonu ve k_1, k_2 çekirdek fonksiyonları bilinen fonksiyonlar olup $I=[a,b]$

aralığında türevlenebilen fonksiyonlardır. Ayrıca $f: I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu ve $k_1,k_2: I^2\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonları $x,y\in\mathbb{R}$ ve $t,s\in I$ için L_f, L_{k_1}, $L_{k_2}\geq 0$ olmak üzere sırasıyla aşağıda verilen Lipschitz şartlarını sağlayan sürekli fonksiyonlardır:

$$\begin{aligned}
&|f(t,x)-f(t,y)|\leq L_f\,|x-y|,\\
&|k_1(t,s,x)-k_1(t,s,y)|\leq L_{k_1}\,|x-y|,\\
&|k_2(t,s,x)-k_2(t,s,y)|\leq L_{k_2}\,|x-y|.
\end{aligned}\tag{5.2}$$

(i) Eğer (5.1) ile verilen denklemde $k_1(t,s,x(s))=0$ alınırsa bu denklem lineer olmayan Volterra integrodiferansiyel denkleme dönüşür.

(ii) Eğer (5.1) ile verilen denklemde $k_2(t,s,x(s))=0$ alınırsa bu denklem lineer olmayan Fredholm integrodiferansiyel denkleme dönüşür.

(iii) Eğer (5.1) ile verilen denklemde $k_1(t,s,x(s))=k_2(t,s,x(s))=0$ alınırsa bu denklem birinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denkleme dönüşür.

Teorem 5.1 $a<b$ olmak üzere $I=[a,b]$ kümesi göz önüne alınsın. λ_1, λ_2, L_f, L_{k_1} ve L_{k_2} pozitif sabitleri $0<L_f(b-a)+\lambda_1 L_{k_1}\dfrac{(b-a)^2}{2}+\lambda_2 L_{k_2}(b-a)^2<1$ eşitsizliğini sağlasın. $f: I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonunun ve $k_1,k_2: I^2\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ çekirdek fonksiyonlarının (5.2) ile verilen Lipschitz koşullarını sağladığı kabul edilsin. Eğer $\varepsilon\geq 0$ ve $\forall t\in I$ için sürekli diferansiyellenebilir $x: I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\left|x'(t)-f(t,x(t))-\lambda_1\int_a^t k_1(t,s,x(s))ds-\lambda_2\int_a^b k_2(t,s,x(s))ds\right|\leq\varepsilon \tag{5.3}$$

eşitsizliğini sağlarsa, bu durumda $x_0: I\to\mathbb{R}$ tanımlı

$$x_0(t)=\alpha+\int_a^t f(u,x(u))du+\lambda_1\int_a^t\int_a^u k_1(u,s,x(s))dsdu+\lambda_2\int_a^t\int_a^b k_2(u,s,x(s))dsdu \tag{5.4}$$

şeklinde ifade edilen bir tek sürekli fonksiyon vardır ve

$$|x(t)-x_0(t)|\leq\frac{(b-a)\varepsilon}{1-\left[L_f(b-a)+\lambda_1 L_{k_1}\dfrac{(b-a)^2}{2}+\lambda_2 L_{k_2}(b-a)^2\right]}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat I kümesinden $\mathbb{R}$'ye tanımlı tüm sürekli fonksiyonların kümesi $E:=C(I,\mathbb{R})$ ile gösterilsin. $v,w\in E$ için

$$d(v,w)=\inf\{C\in[0,\infty]:\left|v(t)-w(t)\right|\le C,\ \forall t\in I\}$$

şeklinde verilen metriği göz önüne alınsın. (E,d) bir genelleştirilmiş tam metrik uzaydır [102].

$\forall t\in I$ için

$$\begin{aligned}(\Lambda v)(t)=\alpha+\int_a^t f(\varsigma,v(\varsigma))d\varsigma+\lambda_1\int_a^t\int_a^u k_1(t,\varsigma,v(\varsigma))d\varsigma du\\ +\lambda_2\int_a^t\int_a^b k_2(t,\varsigma,v(\varsigma))d\varsigma du\end{aligned} \tag{5.5}$$

şeklinde tanımlanan $\Lambda:E\to E$ operatörü göz önüne alınsın. Λ'nın E uzayında kesin contractive olduğu gösterilmelidir. Herhangi $v,w\in E$ için $C(v,w)\in[0,\infty]$ sabiti $d(v,w)<C(v,w)$'yi sağlasın. Yani $\forall t\in I$ için $\left|v(t)-w(t)\right|\le C(v,w)$ gerçekleşsin. Herhangi bir $t\in I$ için

$$\begin{aligned}\left|(\Lambda v)(t)-(\Lambda w)(t)\right|&\le\int_a^t\left|f(\varsigma,v(\varsigma))-f(\varsigma,w(\varsigma))\right|d\varsigma\\ &\quad+\lambda_1\int_a^t\int_a^u\left|k_1(t,\varsigma,v(\varsigma))-k_1(t,\varsigma,w(\varsigma))\right|d\varsigma du\\ &\quad+\lambda_2\int_a^t\int_a^b\left|k_2(t,\varsigma,v(\varsigma))-k_2(t,\varsigma,w(\varsigma))\right|d\varsigma du\\ &\le L_f\int_a^t\left|v(\varsigma)-w(\varsigma)\right|d\varsigma\\ &\quad+\lambda_1 L_{k_1}\int_a^t\int_a^u\left|v(\varsigma)-w(\varsigma)\right|d\varsigma du\\ &\quad+\lambda_2 L_{k_2}\int_a^t\int_a^b\left|v(\varsigma)-w(\varsigma)\right|d\varsigma du\\ &\le L_f C(v,w)(t-a)\\ &\quad+\lambda_1 L_{k_1}C(v,w)\frac{(t-a)^2}{2}\\ &\quad+\lambda_2 L_{k_2}C(v,w)(b-a)(t-a)\end{aligned} \tag{5.6}$$

yazılabilir. $a\le t\le b$ olduğundan (5.6) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}|(\Lambda v)(t)-(\Lambda w)(t)| \leq\ & L_f C(v,w)(b-a) \\ & +\lambda_1 L_{k_1} C(v,w)\frac{(b-a)^2}{2} \\ & +\lambda_2 L_{k_2} C(v,w)(b-a)^2\end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$d(\Lambda v,\Lambda w) \leq C(v,w)\left[L_f(b-a)+\lambda_1 L_{k_1}\frac{(b-a)^2}{2}+\lambda_2 L_{k_2}(b-a)^2\right]$$

olur. Herhangi $v,w\in E$ için

$$d(\Lambda v,\Lambda w) \leq \left[L_f(b-a)+\lambda_1 L_{k_1}\frac{(b-a)^2}{2}+\lambda_2 L_{k_2}(b-a)^2\right]d(v,w)$$

yazılabilir. Kabul gereği $0<L_f(b-a)+\lambda_1 L_{k_1}\frac{(b-a)^2}{2}+\lambda_2 L_{k_2}(b-a)^2<1$ olduğundan Λ kesin contractive olma şartını sağlar. Herhangi bir $w_0\in E$ alınsın. Bu durumda her $t\in I$ için

$$|(\Lambda w_0)(t)-w_0(t)| = \left|\begin{array}{l}\alpha+\int_a^t f(\varsigma,w_0(\varsigma))d\varsigma+\lambda_1\int_a^t\int_a^u k_1(t,\varsigma,w_0(\varsigma))d\varsigma du \\ +\lambda_2\int_a^t\int_a^b k_2(t,\varsigma,w_0(\varsigma))d\varsigma du - w_0(t)\end{array}\right| \leq C$$

olacak şekilde bir $C\in(0,\infty)$ sabiti vardır. Buradan $d(\Lambda w_0,w_0)<\infty$ yazılabilir. O halde Teorem 2.39'dan $x_0 : I\to\mathbb{R}$ tanımlı, sürekli bir fonksiyon vardır öyle ki $(\Lambda^n w_0)$ dizisi x_0 noktasına yakınsar ve $\Lambda x_0 = x_0$ dır. Başka bir deyişle x_0, (5.1) ile verilen denklemin bir çözümüdür. d bir metrik olduğundan $x_0 : I\to\mathbb{R}$

$$x_0(t)=\alpha+\int_a^t f(u,x(u))du+\lambda_1\int_a^t\int_a^u k_1(u,s,x(s))dsdu+\lambda_2\int_a^t\int_a^b k_2(u,s,x(s))dsdu$$

şeklinde tanımlı tek sürekli fonksiyon olur. (5.3) kabulünden her $t\in I$ için

$$-\varepsilon \leq x'(t)-f(t,x(t))-\lambda_1\int_a^t k_1(t,s,x(s))ds-\lambda_2\int_a^b k_2(t,s,x(s))ds \leq \varepsilon$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikteki her terim integre edilirse

$$\left| \begin{matrix} x(t)-\alpha-\int\limits_a^t f(u,x(u))du-\lambda_1\int\limits_a^t\int\limits_a^u k_1(u,s,x(s))dsdu \\ -\lambda_2\int\limits_a^t\int\limits_a^b k_2(u,s,x(s))dsdu \end{matrix} \right| \le \varepsilon(b-a)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$d(x,\Lambda x)\le\varepsilon(b-a) \tag{5.7}$$

yazılabilir. Teorem 2.39-(c) ve (5.7) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d(x,x_0) &\le \frac{1}{1-\left[L_f(b-a)+\lambda_1 L_{k_1}\dfrac{(b-a)^2}{2}+\lambda_2 L_{k_2}(b-a)^2\right]}d(x,\Lambda x) \\ &\le \frac{(b-a)}{1-\left[L_f(b-a)+\lambda_1 L_{k_1}\dfrac{(b-a)^2}{2}+\lambda_2 L_{k_2}(b-a)^2\right]}\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. Tanım 2.37'den (5.1) ile verilen lineer olmayan Volterra-Fredholm integrodiferansiyel denklemi Hyers-Ulam kararlıdır denir.

Teorem 5.2 $a<b$ olmak üzere $I=[a,b]$ kümesi göz önüne alınsın. V, λ_1, λ_2, L_f, L_{k_1} ve L_{k_2} pozitif sabitleri $0<L_f V+\lambda_1 L_{k_1}V^2+\lambda_2 L_{k_2}V^2<1$ eşitsizliğini sağlasın. $\varphi: I\to(0,\infty)$ fonskiyonu her $t\in I$ için

$$\int\limits_a^t \varphi(\varsigma)d\varsigma\le V\varphi(t) \tag{5.8}$$

eşitsizliğini sağlayan bir sürekli fonksiyon olmak üzere minimum değerini b noktasında alsın. $f: I\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonunun ve $k_1,k_2: I^2\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ çekirdek fonksiyonlarının (5.2) ile verilen Lipschitz koşullarını sağladığı kabul edilsin. Eğer $\forall t\in I$ için sürekli diferansiyellenebilir $x: I\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\left|x'(t)-f(t,x(t))-\lambda_1\int\limits_a^t k_1(t,s,x(s))ds-\lambda_2\int\limits_a^b k_2(t,s,x(s))ds\right|\le\varphi(t) \tag{5.9}$$

eşitsizliğini sağlarsa, bu durumda $x_0: I\to\mathbb{R}$ tanımlı ve (5.4) eşitsizliğini sağlayan bir tek sürekli fonksiyon vardır ve

$$\left|x(t)-x_0(t)\right| \le \frac{V}{1-\left[L_f V+\lambda_1 L_{k_1} V^2+\lambda_2 L_{k_2} V^2\right]}\varphi(t)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat I kümesinden $\mathbb{R}$'ye tanımlı tüm sürekli fonksiyonların kümesi $E:=C(I,\mathbb{R})$ ile gösterilsin. $v,w\in E$ için

$$d(v,w)=\inf\{C\in[0,\infty]:\left|v(t)-w(t)\right|\le C\varphi(t),\ \forall t\in I\}$$

şeklinde verilen metrik göz önüne alınsın. (E,d) bir genelleştirilmiş tam metrik uzaydır [102]. $\forall t\in I$ için

$$\begin{aligned}(\Lambda v)(t)=\alpha+\int_a^t f(\varsigma,v(\varsigma))d\varsigma+\lambda_1\int_a^t\int_a^u k_1(t,\varsigma,v(\varsigma))d\varsigma du\\ +\lambda_2\int_a^t\int_a^b k_2(t,\varsigma,v(\varsigma))d\varsigma du\end{aligned} \tag{5.10}$$

şeklinde tanımlanan $\Lambda:E\to E$ operatörü göz önüne alınsın. Λ'nın E uzayında kesin contractive olduğu gösterilmelidir. Herhangi $v,w\in E$ için $C(v,w)\in[0,\infty]$ sabiti $d(v,w)<C(v,w)$'yi sağlasın. Yani $\forall t\in I$ için $\left|v(t)-w(t)\right|\le C(v,w)\varphi(t)$ gerçekleşsin. Herhangi bir $t\in I$ için

$$\begin{aligned}\left|(\Lambda v)(t)-(\Lambda w)(t)\right| &\le \int_a^t\left|f(\varsigma,v(\varsigma))-f(\varsigma,w(\varsigma))\right|d\varsigma\\
&\quad+\lambda_1\int_a^t\int_a^u\left|k_1(t,\varsigma,v(\varsigma))-k_1(t,\varsigma,w(\varsigma))\right|d\varsigma du\\
&\quad+\lambda_2\int_a^t\int_a^b\left|k_2(t,\varsigma,v(\varsigma))-k_2(t,\varsigma,w(\varsigma))\right|d\varsigma du\\
&\le L_f\int_a^t\left|v(\varsigma)-w(\varsigma)\right|d\varsigma\\
&\quad+\lambda_1 L_{k_1}\int_a^t\int_a^u\left|v(\varsigma)-w(\varsigma)\right|d\varsigma du\\
&\quad+\lambda_2 L_{k_2}\int_a^t\int_a^b\left|v(\varsigma)-w(\varsigma)\right|d\varsigma du\\
&\le L_f C(v,w)\int_a^t\varphi(\varsigma)d\varsigma\\
&\quad+\lambda_1 L_{k_1}C(v,w)\int_a^t\int_a^u\varphi(\varsigma)d\varsigma du\end{aligned}$$

$$+\lambda_2 L_{k_2} C(v,w)\int_a^t\int_a^b \varphi(\varsigma)d\varsigma du$$

$$\leq L_f C(v,w)V\varphi(t)+\lambda_1 L_{k_1} C(v,w)V^2\varphi(t)$$

$$+\lambda_2 L_{k_2} C(v,w)V^2\varphi(t)$$

$$=C(v,w)\varphi(t)[L_f V+\lambda_1 L_{k_1}V^2+\lambda_2 L_{k_2}V^2]$$

Yani,

$$d(\Lambda v,\Lambda w)\leq C(v,w)\varphi(t)\left[L_f V+\lambda_1 L_{k_1}V^2+\lambda_2 L_{k_2}V^2\right]$$

olur. Herhangi $v,w\in E$ için

$$d(\Lambda v,\Lambda w)\leq\left[L_f V+\lambda_1 L_{k_1}V^2+\lambda_2 L_{k_2}V^2\right]d(v,w)$$

yazılabilir. Kabul gereği $0<L_f V+\lambda_1 L_{k_1}V^2+\lambda_2 L_{k_2}V^2<1$ olduğundan Λ kesin contractive olma şartını sağlar. Herhangi bir $w_0\in E$ alınsın. Bu durumda her $t\in I$ için

$$\left|(\Lambda w_0)(t)-w_0(t)\right|=\left|\begin{matrix}\alpha+\int_a^t f(\varsigma,w_0(\varsigma))d\varsigma+\lambda_1\int_a^t\int_a^u k_1(t,\varsigma,w_0(\varsigma))d\varsigma du\\ +\lambda_2\int_a^t\int_a^b k_2(t,\varsigma,w_0(\varsigma))d\varsigma du-w_0(t)\end{matrix}\right|\leq C\varphi(t)$$

olacak şekilde bir $C\in(0,\infty)$ sabiti vardır. Buradan $d(\Lambda w_0,w_0)<\infty$ yazılabilir. O halde Teorem 2.39'dan $x_0:I\to\mathbb{R}$ tanımlı, sürekli bir fonksiyon vardır öyle ki $(\Lambda^n w_0)$ dizisi x_0 noktasına yakınsar ve $\Lambda x_0=x_0$ dır. Başka bir deyişle x_0, (5.1) ile verilen denklemin bir çözümüdür. d bir metrik olduğundan $x_0:I\to\mathbb{R}$ (5.4) şartını sağlayan tek sürekli fonksiyon olur. (5.9) kabulünden her $t\in I$ için

$$-\varphi(t)\leq x'(t)-f(t,x(t))-\lambda_1\int_a^t k_1(t,s,x(s))ds-\lambda_2\int_a^b k_2(t,s,x(s))ds\leq\varphi(t)$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikteki her terim integre edilirse

$$\left|\begin{matrix}x(t)-\alpha-\int_a^t f(u,x(u))du-\lambda_1\int_a^t\int_a^u k_1(u,s,x(s))dsdu\\ -\lambda_2\int_a^t\int_a^b k_2(u,s,x(s))dsdu\end{matrix}\right|\leq\int_a^t\varphi(\varsigma)d\varsigma$$

elde edilir. (5.8) ve (5.10) eşitsizliklerinden $\forall t \in I$ için

$$\left| x(t) - (\Lambda x)(t) \right| \le \int_a^t \varphi(\varsigma) d\varsigma \le V\varphi(t)$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$d(x, \Lambda x) \le V\varphi(t) \tag{5.11}$$

eşitsizliği elde edilir. Teorem 2.39-(c) ve (5.11) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d(x, x_0) &\le \frac{1}{1 - \left[L_f V + \lambda_1 L_{k_1} V^2 + \lambda_2 L_{k_2} V^2 \right]} d(x, \Lambda x) \\ &\le \frac{V}{1 - \left[L_f V + \lambda_1 L_{k_1} V^2 + \lambda_2 L_{k_2} V^2 \right]} \varphi(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. Tanım 2.37'den (5.1) ile verilen lineer olmayan Volterra-Fredholm integrodiferansiyel denklemi Hyers-Ulam Rassias kararlıdır denir.

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, yeni tanımlanan üç adımlı iterasyon yöntemi ile S* iterasyon yöntemi kullanılmıştır.

Bölüm 3'te yeni tanımlanan iterasyon yöntemi ile S* iterasyon yönteminden elde edilen dizilerin almost contraction dönüşümlerin teklikle belirli olan sabit noktasına belirli şartlar altında kuvvetli yakınsak olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bu dizilerin yakınsaklığının Picard, Mann, Ishikawa, Noor, Picard-S, SP ve CR iterasyon yöntemlerinden elde edilen dizilerin yakınsaklıklarına denk olduğu gösterilmiştir. Üstelik yeni tanımlanan iterasyon yönteminden elde edilen dizinin yakınsamasının diğer iterasyon yöntemlerinden elde edilen dizilerin yakınsamasına göre daha hızlı olduğu ispatlanmış ve bu sonuç MATLAB programı kullanılarak nümerik olarak gösterilmiştir. Bu bölümde ayrıca yeni iterasyon yöntemi ve S* iterasyon yöntemi kullanılarak (2.26) şartını sağlayan almost contraction dönüşümlerin sabit noktalarının veri bağlı olduğu gösterilmiş ve S* iterasyon yöntemi için veri bağlılığı sonucu MATHEMATICA ve MATLAB programları kullanılarak örnek üzerinde gösterilmiştir. Bu bölümde son olarak S* iterasyon yönteminden elde edilen dizinin gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümüne kuvvetli yakınsak olduğu ispatlanmıştır.

Bölüm 4'te yeni tanımlanan iterasyon yönteminden elde edilen dizinin fonksiyonel Volterra-Fredholm integral denkleminin çözümüne kuvvetli yakınsak olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bu denklemin çözümünün veri bağlı olduğu yeni iterasyon yöntemi kullanılarak ispatlanmıştır. Bu sonuçların mixed type Volterra-Fredholm integral denklemi için de elde edilebileceği gösterilmiştir.

Bölüm 5'te lineer olmayan Volterra-Fredholm integrodiferansiyel denklemin çözümünün Hyers Ulam kararlılığı ve Hyers-Ulam Rassias kararlılığı ispatlanmıştır.

Konu ile ilgilenen araştırmacılar yeni tanımlanan üç adımlı iterasyon yöntemini daha genel dönüşüm sınıfları için yeniden inşa ederek başta lineer olmayan Fredholm-Hammerstein integral denklemi olmak üzere, Volterra-Hammerstein integral denklemi ve Volterra-Fredholm-Hammerstein integral denklemi gibi birçok denklem türüne uygulayıp kuvvetli yakınsaklık ve veri bağlılığı sonuçlarını irdeleyebilir. Ayrıca bu iterasyon yönteminin Kirk veya Kirk-multistep tipleri inşa edilerek yakınsaklık ve kararlılık kavramları çalışılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Amini-Harandi, A. ve Emami, H., (2010). "A Fixed Point Theorem for Contraction Type Maps in Partially Ordered Metric Spaces and Application to Ordinary Differential Equations", Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 72 (5): 2238-2242.

[2] Bonsall, F.F. ve Vedak, K., (1962). Lectures On Some Fixed Point Theorems of Functional Analysis, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay.

[3] Collatz, L., (1966). Functional Analysis and Numerical Mathematics, Academic Press, Newyork.

[4] Dugundji, J. ve Granas, A., (1982). Fixed Point Theory, Polish Scientific Publishers, Warszawa.

[5] Harjani, J. ve Sadarangani, K., (2010). "Generalized Contractions in Partially Ordered Metric Spaces and Applications to Ordinary Differential Equations", Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 72 (3): 1188-1197.

[6] Joshi, M.C. ve Bose, R.K., (1985). Some Topics in Nonlinear Functional Analysis, John Wiley & Sons, New York.

[7] Kirk, W. ve Sims, B., (2013). Handbook of Metric Fixed Point Theory, Springer Science & Business Media.

[8] Murthy, P. P., (2001). "Important Tools and Possible Applications of Metric Fixed Point Theory", Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 47 (5): 3479-3490.

[9] Ortega, J.M. ve Rheinboldt, W.C., (1970). Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, Society for Industrial and Applied Mathematics.

[10] Schweizer, B. ve Sklar, A., (1960). "Statistical Metric Spaces", Pacific Journal of Mathematics, 10(1): 313-334.

[11] Simmons, G.F., (1963). Introduction to Topology and Modern Analysis, Robert E. Krieger Publishing Company, Florida.

[12] Singh, S. L., (1990). "Application of Fixed Point Theorems to Nonlinear Integrodifferential Equations", Rivista di Matematica della Università di Parma, 16 (4): 205-212.

[13] Wieczorek, A., (1988). "Applications of Fixed-Point Theorems in Game Theory and Mathematical Economics", Wisdom Mat., 28: 25-34.

[14] Mynt-U, T. ve Debnath, L., (2007). Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Springer Science & Business Media, Boston.

[15] Picard, E., (1890). "Mémoire Sur la Théorie des Équations Aux Dérivées Partielles et la Méthode des Approximations Successives", Journal de mathématiques pures et appliquées, 6: 145-210.

[16] Banach, S., (1922). "Sur Les Opérations Dans Les Ensembles Abstraits et Leur Application Aux Equations Intégrales", Fundamenta Mathematicae, 3 (1): 133-181.

[17] Arshad, M. Azam, A. ve Vetro, P., (2009). "Some Common Fixed Point Results in Cone Metric Spaces", Fixed Point Theory and Applications, 2009: 1-11.

[18] Caristi, J., (1976). "Fixed Point Theorems for Mappings Satisfying Inwardness Conditions", Transactions of the American Mathematical Society, 215: 241-251.

[19] Caristi, J. ve Kirk, W.A., (1975). Geometric Fixed Point Theory and Inwardness Conditions, in The Geometry of Metric and Linear Spaces (74-83). Springer, Berlin.

[20] Ćirić, L., (2009). "Some New Results for Banach Contractions and Edelstein Contractive Mappings on Fuzzy Metric Spaces", Chaos, Solitons & Fractals, 42 (1): 146-154.

[21] Ćirić, L.B., (1974). "A Generalization of Banach's Contraction Principle", Proceedings of the American Mathematical Society, 45 (2): 267-273.

[22] Ekeland, I., (1974). "On the Variational Principle", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 47 (2): 324-353.

[23] Ekeland, I., (1979). "Nonconvex Minimization Problems 1", American Mathematical Society, 1 (3): 443-474.

[24] Hardy, G.E. ve Rogers, T., (1973). "A Generalization of a Fixed Point Theorem of Reich", Canadian Mathematical Bulletin, 16 (2): 201-206.

[25] Kannan, R., (1968). "Some Results on Fixed Points", Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, 60 (1-2) : 71-76.

[26] Kirk, W., (2001). Contraction mappings and extensions in handbook of metric fixed point theory, (WA Kirk and B. Sims Eds.) Kluwer Academic Publisher Netherlands.

[27] Kirk, W.A., (2003). "Fixed Points of Asymptotic Contractions", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 277 (2): 645-650.

[28] Meir, A. ve Keeler, E., (1969). "A Theorem on Contraction Mappings", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 28 (2): 326-329.

[29] Nadler Jr, S.B., (1969). "Multi-valued Contraction Mappings", Pacific Journal of Mathematics, 30 (2): 475-488.

[30] Suzuki, T., (2001). "Generalized Distance and Existence Theorems in Complete Metric Spaces", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 253 (2): 440-458.

[31] Suzuki, T., (2004). "Several Fixed Point Theorems Concerning-Distance", Fixed Point Theory and Applications, 2004 (3): 1-15.

[32] Zamfirescu, T., (1972). "Fix Point Theorems in Metric Spaces", Archiv der Mathematik, 23 (1): 292-298.

[33] Chidume, C. ve Mutangadura, S., (2001). "An Example on the Mann Iteration Method for Lipschitz Pseudocontractions", Proceedings of the American Mathematical Society, 129 (8): 2359-2363.

[34] Rhoades, B. ve Şoltuz, S.M., (2004). "The Equivalence Between Mann–Ishikawa Iterations and Multistep Iteration", Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 58 (1): 219-228.

[35] Rhoades, B. ve Şoltuz, Ş.M., (2004). "The Equivalence Between the Convergences of Ishikawa and Mann Iterations for an Asymptotically Nonexpansive in the Intermediate Sense and Strongly Successively Pseudocontractive Maps", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 289 (1): 266-278.

[36] Karakaya, V. Doğan, K. Gürsoy, F. ve Ertürk, M., (2013). "Fixed Point of a New Three-Step Iteration Algorithm Under Contractive-Like Operators Over Normed Spaces", Abstract and Applied Analysis, 2013: 1-9.

[37] Ozdemir, M. ve Akbulut, S., (2006). "On The Equivalance of Some Fixed Point Iterations", Kyungpook Mathematical Journal, 46 (2): 211-217.

[38] Rhoades, B. ve Şoltuz, S.M., (2004). "The Equivalence of Mann Iteration and Ishikawa Iteration for a Lipschitzian Ψ-Uniformly Pseudocontractive and Ψ-Uniformly Accretive Maps", Tamkang Journal of Mathematics, 35: 235-246.

[39] Rhoades, B. ve Şoltuz, S.M., (2003). "On The Equivalence of Mann and Ishikawa Iteration Methods", International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2003 (7): 451-459.

[40] Rhoades, B. ve Şoltuz, S.M., (2003). "The Equivalence of Mann Iteration and Ishikawa Iteration for Non-Lipschitzian Operators", International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2003 (42): 2645-2651.

[41] Rhoades, B. ve Şoltuz, S.M., (2003). "The Equivalence Between the Convergences of Ishikawa and Mann Iterations for an Asymptotically Pseudocontractive Map", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 283 (2): 681-688.

[42] Rhoades, B. ve Şoltuz, S.M., (2004). "The Equivalence of Mann and Ishikawa Iterations Dealing with Strongly Pseudocontractive or Strongly Accretive Maps, Pan-American Mathematical Journal ", 14: 51-59.

[43] Rhoades, B., (1976). "Comments on Two Fixed Point Iteration Methods", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 56 (3): 741-750.

[44] Berinde, V., (2004). "Picard Iteration Converges Faster than Mann Iteration for a Class Of Quasi-Contractive Operators", Fixed Point Theory and Applications, 2004 (2): 1-9.

[45] Hussain, N. Rafiq, A. Damjanović, B. ve Lazović, R., (2011). "On Rate of Convergence of Various Iterative Schemes", Fixed Point Theory and Applications, 2011 (45): 1-6.

[46] Phuengrattana, W. ve Suantai, S., (2011). "On the Rate of Convergence of Mann, Ishikawa, Noor and SP-Iterations for Continuous Functions on an Arbitrary Interval", Journal of Computational and Applied Mathematics, 235 (9): 3006-3014.

[47] Rana, R., Dimri, R. ve Tomar, A., (2011). "Remarks on Convergence Among Picard, Mann And Ishikawa Iteration for Complex Space", International Journal of Computer Applications (0975-8887), 21 (9): 20-29.

[48] Berinde, V., (2003). "On The Approximation of Fixed Points of Weak Contractive Mappings", Carpathian Journal of Mathematics, 19 (1): 7-22.

[49] Chifu, C. ve Petruşel, G., (2007). "Existence and Data Dependence of Fixed Points and Strict Fixed Points for Contractive-Type Multivalued Operators", Fixed Point Theory and Applications, 2007 (1): 1-8.

[50] Espínola, R. ve Petruşel, A., (2005). "Existence and Data Dependence of Fixed Points for Multivalued Operators on Gauge Spaces", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 309 (2): 420-432.

[51] Markin, J., (1973). "Continuous Dependence of Fixed Point Sets", Proceedings of the American Mathematical Society, 38 (3): 545-547.

[52] Rus, I.A. ve Muresan, S., (1998). "Data Dependence of The Fixed Points Set of Weakly Picard Operators", Studia Universitatis Babeș-Bolyai Mathematica, 43 (1): 79-83.

[53] Rus, I.A., Petruşel, A. ve Sîntămărian, A., (2003). "Data Dependence of the Fixed Point Set of Some Multivalued Weakly Picard Operators", Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 52 (8): 1947-1959.

[54] Chugh, R. ve Kumar, S., (2013). "Data Dependence of Some New Iterative Schemes for Quasi-Contractive Operators", International Journal of Computer Applications, 73 (1): 12-18.

[55] Chugh, R. ve Kumar, V., (2011). "Data dependence of Noor and SP Iterative Schemes When Dealing with Quasi-contractive Operators", International Journal of Computer Applications, 40 (15): 41-46.

[56] Karakaya, V. Gürsoy, F. Doğan, K. ve Ertürk, M., (2013). "Data Dependence Results for Multistep and CR Iterative Schemes in the Class of Contractive-Like Operators", Abstract and Applied Analysis, 2013: 1-7.

[57] Olatinwo, M.O., (2009). "Some Results on The Continuous Dependence of The Fixed Points in Normed Linear Space", Fixed Point Theory, 10 (1): 151-157.

[58] Olatinwo, M.O., (2010). "On the Continuous Dependence of The Fixed Points for (Φ, Ψ)− Contractive-Type Operators", Kragujevac Journal of Mathematics, 34 (2010): 91-102.

[59] Şoltuz, S.M. ve Grosan, T., (2008). "Data Dependence for Ishikawa Iteration When Dealing with Contractive-like Operators", Fixed Point Theory and Applications, 2008 (1): 1-7.

[60] Şoltuz, S.M., (2004). "Data Dependence for Ishikawa Iteration", Lecturas Matemáticas, 25 (2): 149-155.

[61] Şoltuz, S.M., (2001). "Data Dependence for Mann Iteration", Octogon Mathematical Magazine, 9 (2): 825-828.

[62] Magnus, K., (1959). "Development of the Stability Concept in Mechanics", Naturwissenschaften, 46: 590-595.

[63] Ulam, S.M., (1960). A Collection of Mathematical Problems: Interscience Publishers, Michigan University.

[64] Hyers, D.H., (1941). "On the Stability of the Linear Functional Equation", Proceedings of the National Academy of Sciences, 27 (4): 222-224.

[65] Rassias, T.M., (1978). "On the Stability of the Linear Mapping in Banach Spaces", Proceedings of the American Mathematical Society, 72 (2): 297-300.

[66] Baker, J.A., (1991). "The Stability of Certain Functional Equations", Proceedings of the American Mathematical Society, 112 (3): 729-732.

[67] Agarwal, R.P. Xu, B. ve Zhang, W., (2003). "Stability of Functional Equations in Single Variable", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 288 (2): 852-869.

[68] Brillouët-Belluot, N. Brzdęk, J. ve Ciepliński, K., (2012). "On Some Recent Developments in Ulam's Type Stability", Abstract and Applied Analysis, 2012: 1-41.

[69] Brzdęk, J. ve Ciepliński, K., (2013). "Hyperstability and Superstability", Abstract and Applied Analysis, 2013: 1-13.

[70] Cieplinski, K., (2012). "Applications of Fixed Point Theorems to The Hyers–Ulam Stability of Functional Equations–A Survey", Annals of Functional Analysis, 3 (1): 151-164.

[71] Forti, G.L., (1995). "Hyers-Ulam Stability of Functional Equations in Several Variables", Aequationes Mathematicae, 50 (1-2): 143-190.

[72] Hyers, D.H. Isac, G. ve Rassias, T.M., (2012). Stability of Functional Equations in Several Variables, Springer Science & Business Media.

[73] Hyers, D.H. ve Rassias, T.M., (1992). "Approximate Homomorphisms", Aequationes Mathematicae, 44 (2): 125-153.

[74] Jung, S.-M., (2001). Hyers-Ulam-Rassias Stability of Functional Equations in Mathematical Analysis, Hadronic Press.

[75] Jung, S.-M., (2011). Hyers-Ulam-Rassias Stability of Functional Equations in Nonlinear Analysis, Springer Science & Business Media.

[76] Rassias, T.M., (2000). "On the Stability of Functional Equations and a Problem of Ulam", Acta Applicandae Mathematica, 62 (1): 23-130.

[77] Şevgin, S. ve Şevli, H., (2016). "Stability of a Nonlinear Volterra Integro-differential Equation via a Fixed Point Approach", Journal of Nonlinear Sciences and Applications, 9 (1): 200-207.

[78] Tanhan, A., (2013). Birinci dereceden Lineer Diferansiyel Denklemlerin Hyers-Ulam Kararlılığı, Yüksek Lisans Tezi, Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Van.

[79] Székelyhidi, L., (2000). "Ulam's Problem, Hyers's Solution—and to Where They Led", Functional Equations and Inequalities. 518: 259-285.

[80] Kreyszig, E., (1989). Introductory Functional Analysis with Applications, Wiley New York.

[81] Maddox, I.J., (1988). Elements of Functional Analysis, CUP Archive.

[82] Brown, A.L. ve Page, A., (1970). Elements of Functional Analysis, Van Nostrand-Reinhold.

[83] Pugachev, V.S. ve Sinitsyn, I.N., (1999). Lectures on Functional Analysis and Applications, World Scientific.

[84] Moore, R.E. ve Cloud, M.J., (2007). Computational Functional Analysis, Elsevier.

[85] Curtain, R.F. ve Pritchard, A.J., (1977). Functional Analysis in Modern Applied Mathematics, Academic Press.

[86] Berinde, V., (2007). Iterative Approximation of Fixed Points, Springer, Berlin.

[87] Elmas, S., (2010). Sabit Nokta İterasyonlarının Yakınsama Hızları, Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

[88] Greenlees, J., (2011). "MAS331: Metric Spaces".

[89] Kızıltunç, H., (2007). Genişlemeyen Dönüşümlerin Sabit Noktalarının İterasyon Metotlarıyla Elde Edilmesi, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

[90] Rus, I.A., (1996). Picard Operators and Applications, Universitatea Babes-Bolyai Faculty of Mathematics and Computer Science, Romania.

[91] Rus, I.A., (1979). Principles and Applications of the Fixed Point Theory, Editura Dacia, Cluj-Napoca.

[92] Rus, I.A., (2001). Generalized Contractions and Applications: Cluj University Press.

[93] Taskovic, M., "Osnove Teorije Fiksne Tacke (Fundamental Elements of Fixed Point Theory)", Matematicka Biblioteka, 50.

[94] Chatterjea, S. K., (1972). "Fixed Point Theorems", Comptes rendus de l'Académie Bulgare des Sciences, 25 : 727-730.

[95] Rhoades, B., (1977). "A Comparison of Various Definitions of Contractive Mappings", Transactions of the American Mathematical Society, 226: 257-290.

[96] Rhoades, B., (1983). "Contractive Definitions Revisited", Contemporary Mathematics, 21: 189-205.

[97] Berinde, V., (1997). "Generalized Contractions and Applications", Colectia Universitaria (Baia Mare)[University Collection], 2.

[98] Berinde, V., (2004). "Approximating Fixed Points of Weak Contractions Using the Picard İteration", Nonlinear Analysis Forum, 9: 43-53.

[99] Osilike, M., (1995). "Stability Results for Fixed Point Iteration Procedures", Journal of the Nigerian Mathematical Society, 14 (15): 17-29.

[100] Osilike, M., (1997). "Stability of the Ishikawa Iteration Method for Quasi-Contractive Maps", Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 28 (9): 1251-1265.

[101] Osilike, M. ve Udomene, A., (1999). "Short Proofs of Stability Results for Fixed Point Iteration Procedures for a Class of Contractive-Type Mappings", Indian Journal of Pure & Applied Mathematics, 30 (12): 1229-1234.

[102] Jung, S.-M., (2010). "A Fixed Point Approach to the Stability of Differential Equations y= F (x, y)", Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 33 (1): 47-56.

[103] Diaz, J. ve Margolis, B., (1968). "A Fixed Point Theorem of the Alternative for Contractions on a Generalized Complete Metric Space", Bulletin of the American Mathematical Society, 74 (2): 305-309.

[104] Wazwaz, A.-M., (2011). Linear and Nonlinear Integral Equations: Methods and Applications, Springer Science & Business Media.

[105] Krasnoselskii, M.A., (1955). "Two Remarks on the Method of Successive Approximations", Uspekhi Matematicheskikh Nauk, 10 (1): 123-127.

[106] Mann, W.R., (1953). "Mean Value Methods in Iteration", Proceedings of the American Mathematical Society, 4 (3): 506-510.

[107] Ishikawa, S., (1974). "Fixed Points by a New Iteration Method", Proceedings of the American Mathematical Society, 44 (1): 147-150.

[108] Noor, M.A., (2000). "New Approximation Schemes for General Variational Inequalities", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 251 (1): 217-229.

[109] Agarwal, R. O Regan, D. ve Sahu, D., (2007). "Iterative Construction of Fixed Points of Nearly Asymptotically Nonexpansive Mappings", Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 8 (1): 61-79.

[110] Agarwal, R.P. O'Regan, D. ve Sahu, D., (2009). Fixed Point Theory for Lipschitzian-Type Mappings with Applications, Springer Science & Business Media.

[111] Gürsoy, F. ve Karakaya, V., (2014). "A Picard-S Hybrid Type Iteration Method for Solving a Differential Equation with Retarded Argument", arXiv preprint arXiv:1403.2546.

[112] Chugh, R. Kumar, V. ve Kumar, S., (2012). "Strong Convergence of a New Three Step Iterative Scheme in Banach Spaces", American Journal of Computational Mathematics, 2: 345-357.

[113] Karahan, I. ve Ozdemir, M., (2013). "A General Iterative Method for Approximation of Fixed Points and Their Applications", Advances in Fixed Point Theory, 3 (3): 510-526.

[114] Khan, S.H., (2013). "A Picard-Mann Hybrid Iterative Process", Fixed point Theory and Applications, 2013 (69): 1-10.

[115] Abbas, M. ve Nazir, T., (2014). "A New Faster Iteration Process Applied to Constrained Minimization and Feasibility Problems", Matematıčkı Vesnık, 66 (2): 223-234.

[116] Weng, X., (1991). "Fixed Point Iteration for Local Strictly Pseudo-Contractive Mapping", Proceedings of the American Mathematical Society, 113 (3): 727-731.

[117] Phuengrattana, W. ve Suantai, S., (2012). "Comparison of the Rate of Convergence of Various Iterative Methods for the Class of Weak Contractions in Banach Spaces", Thai Journal of Mathematics, 11 (1): 217-226.

[118] Şoltuz, S.M., (2007). "The Equivalence between Krasnoselskij, Mann, Ishikawa, Noor and Multistep Iterations", Mathematical Communications, 12 (1): 53-61.

[119] Chugh, R. ve Kumar, V., (2011). "Strong Convergence of SP Iterative Scheme for Quasi-contractive Operators", International Journal of Computer Applications, 31 (5): 21-27.

[120] Villasana, M. ve Radunskaya, A., (2003). "A delay differential equation model for tumor growth", Journal of Mathematical Biology, 47 (3): 270-294.

[121] Hämmerlin, G. ve Hoffmann, K.-H., (2012). Numerical Mathematics, Springer Science & Business Media.

[122] Coman, G. Pavel, G. Rus, I. ve Rus, I., (1976). Introduction on the Theory of Operatorial Equations, Ed, Dacia, Cluj-Napoca.

[123] Lungu, N. ve Rus, I.A., (2009). "On a Functional Volterra-Fredholm Integral Equation via Picard Operator", Journal of Mathematical Inequalities, 3 (4): 519-527.

[124] Bielecki, A., (1956). "Un Remarque sur L'application de la Méthode de Banach-Cacciopoli-Tikhonov dans la Théorie de L'equation s= f (x, y, z, p, q)", Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Phys. Astr, 4: 265-268.

[125] Craciun, C. ve Serban, M.-A., (2011). "A Nonlinear Integral Equation via Picard Operators", Fixed Point Theory, 12 (1): 57-70.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Yunus ATALAN
Doğum Tarihi ve Yeri	: 14/03/1984-MALATYA
Yabancı Dili	: İngilizce
E-posta	: yatalan@yildiz.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Doktora	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2017
Y. Lisans	Matematik	Yüzüncü Yıl Üniversitesi	2012
Lisans	Matematik	İstanbul Üniversitesi	2009
Lise	Fen	Malatya Lisesi	2001

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2010-2012	Muş Alparslan Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2012-	Yıldız Teknik Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

Makale

1. Atalan, Y. ve Karakaya, V., (2017). "Iterative Solution of Functional Volterra-Fredholm Integral Equation with Deviating Argument", Journal of Nonlinear and Convex Analysis (Baskıda)
2. Atalan, Y. ve Karakaya, V., (2017). "Stability of Nonlinear Volterra-Fredholm Integro-differential Equation: A Fixed Point Approach", Creative Mathematics and Informatics (Baskıda)
3. Karakaya, V., Atalan, Y., Dogan, K., Bouzara, NH., (2017). "Convergence Analysis for a New Faster Iteration Method", İstanbul Ticaret Üniversitesi, Fen Bilimleri Dergisi (Baskıda).
4. Karakaya, V., Bouzara, NH., Dogan, K., Atalan, Y., (2014). "Existence of Tripled Fixed Points for a Class of Condensing Operators in Banach Spaces", The Scientific World Journal, 2014: 1-9.

Bildiri

1. Atalan, Y. ve Karakaya, V., (2016). "Stability of Nonlinear Volterra-Fredholm Integro-differential Equation: A Fixed Point Approach", International Conference on Analysis and its Applications, ICAA-2016, 12-15 July 2016, Kırşehir, Turkey.
2. Hacıoglu, E., Karakaya, V. ve Atalan, Y. (2016). "On Existence and Convergence Theorems for a New General Nonlinear Mapping on CAT(0) Spaces", International Conference on Analysis and its Applications, ICAA-2016, 12-15 July 2016, Kırşehir, Turkey.
3. Atalan, Y. ve Karakaya, V., (2015). "Iterative Solution of Functional Volterra-Fredholm Integral Equation with Deviating Argument", International Conference on Analysis and its Applications, ICAA-2015, 19-21 December 2015, Aligarh, India.
4. Atalan, Y. ve Karakaya, V., (2015). "Solution of a Nonlinear Integral Equation Using a New Three-Step Iteration", 11th International Conference on Fixed Point Theory and its Applications, ICFPTA-2015, 20-24 July 2015, Istanbul, Turkey.
5. Atalan, Y. ve Karakaya, V., (2015). "Some Common Fixed Point Results for Quasi-contractive Type Operators", 17th International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing, SYNASC 2015, 21-24 September 2015, Timisoara, Romania

6. Atalan, Y., Karakaya, V., Doğan, K. ve Bouzara, NEH., (2014). “On a Kirk-type new iteration process”, International Conference on Recent Advances in Pure & Applied Mathematics, ICRAPAM- 2014, 6-9 November 2014, Antalya, Turkey.

7. Karakaya, V., Atalan, Y. ve Et, M., (2014). “A New Difference Sequence Set of Order alpha and Its Geometrical Properties” International Conference on Recent Advances in Pure & Applied Mathematics, ICRAPAM- 2014, 6-9 November 2014, Antalya, Turkey.

8. Bouzara, NEH., Karakaya, V., Atalan, Y. ve Doğan, K., (2014). “Existence of Fixed points for Continuous Operators in Banach Spaces Using Measure of Noncompactness and Under an Integral Condition”, International Conference on Recent Advances in Pure & Applied Mathematics, ICRAPAM- 2014, 6-9 November 2014, Antalya, Turkey.

9. Karakaya, V., Atalan, Y. ve Gürsoy, F., (2014). “Some Fixed Point Results in Convex Metric Spaces”, V Congress of the Mathematicians of Macedonia, 1-5 September 2014, Ohrid, Macedonia.

10. Atalan, Y., Karakaya, V., Doğan, K. ve Bouzara, NEH., (2014). “On DPM Iteration Method for Weak Contraction Mappings in Banach Spaces”, Karatekin Mathematics Days, KMD-2014, 11-13 June 2014, Çankırı, Turkey.

11. Bouzara, NEH., Karakaya, V., Doğan, K. ve Atalan, Y., (2014). “On Different Results For a New Two-Step Iteration Method under Weak Contraction Mappings in Banach Spaces”, Karatekin Mathematics Days, KMD-2014, 11-13 June 2014, Çankırı, Turkey.

12. Hacıoğlu, E., Karakaya, V., Doğan, K. ve Atalan, Y., (2014). “On the convergence results for a new iteration method under generalized multivalued nonexpansive mappings in Banach spaces”, Karatekin Mathematics Days, KMD-2014, 11-13 June 2014, Çankırı, Turkey.

13. Karakaya, V., Bouzara, NEH., Doğan, K. ve Atalan, Y., (2014). “Existence of Tripled Fixed Points For a Class of Condensing Operators in Banach Spaces”, Karatekin Mathematics Days, KMD-2014, 11-13 June 2014, Çankırı, Turkey.

14. Karakaya, V. ve Atalan, Y., (2014). “Convergence Analysis for Various Iterative Procedures and a Data Dependence Result”, International Conference on Recent Trends in Algebra and Analysis with Applications, ICRTAAA-2014, 12-14 February 2014, Aligarh, India.

Proje

1. Proje Adı: Sabit Nokta Yaklaşımlarıyla Bazı Diferansiyel ve İntegral Denklemlerin Çözümleri

   Proje Yürütücüsü: Prof.Dr. Vatan KARAKAYA

   Araştırmacı: Yunus ATALAN

   Destekleyen Kurum/ Birim: Yıldız Teknik Üniversitesi/ Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü

   Proje No: BAPK 2016-07-03-DOP02