T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ARALIKLI KESİRLİ TAŞIMA PROBLEMİNE BİR ÇÖZÜM ÖNERİSİ

GİZEM ERFİDAN KARABULUT

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI

DANIŞMAN
PROF. DR. MUSTAFA SİVRİ

İSTANBUL, 2018

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ARALIKLI KESİRLİ TAŞIMA PROBLEMİNE BİR ÇÖZÜM ÖNERİSİ

Gizem ERFİDAN KARABULUT tarafından hazırlanan tez çalışması 19.06.2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Mustafa SİVRİ

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Mustafa SİVRİ

Yıldız Teknik Üniversitesi _______________________

Dr.Öğr.Üyesi HASAN DALMAN

Gelişim Üniversitesi _______________________

Doç.Dr. İnci ALBAYRAK

Yıldız Teknik Üniversitesi _______________________

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans çalısmam boyunca her konuda yardımlarını benden esirgemeyen başta danışmanım Prof. Dr. Mustafa SİVRİ'ye olmak üzere bütün hocalarıma, her zaman desteklerini hissettiğim arkadaşlarıma, aileme, ve sevgili eşime bütün içtenliğimle teşekkür ediyorum.

Haziran, 2018

Gizem ERFİDAN KARABULUT

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ ... vi

KISALTMA LİSTESİ ... viii

ŞEKİL LİSTESİ ... ix

ÇİZELGE LİSTESİ ... x

ÖZET ... xi

ABSTRACT ... xiii

BÖLÜM 1

GİRİŞ ... 1
1.1 Literatür Özeti ... 1
1.2 Tezin Amacı ... 2
1.3 Hipotez ... 4

BÖLÜM 2

TAŞIMA PROBLEMİ ... 5
2.1 Taşıma Probleminin Modeli ... 5
2.2 Dengeli ve Dengesiz Taşıma Problemleri ... 8
2.2.1 Dengeli Taşıma Problemi Örneği ... 9
2.2.2 Dengesiz Taşıma Problemi Örneği ... 11
2.2.2.1 Talebin Arzdan Büyük Olması Örneği ... 11
2.2.2.2 Arzın Talepten Büyük Olması Örneği ... 12
2.3 Kuzeybatı Köşe Yöntemi ile Başlangıç Çözüm Bulma ... 12
2.3.1 Kuzeybatı Köşe Yöntemi İçin Bir Uygulama ... 13
2.4 MODI Yöntemi ile Optimumluk Sınaması ... 16
2.4.1 MODI Yöntemi İçin Örnek Uygulama ... 17
2.5 Taşıma Modelinde Yeni Uygun Temel Çözüm ... 21
2.5.1 Uygun Temel Çözüm Örneği ... 23
2.6 Lineer Kesirli Taşıma Problemi ... 25
2.6.1 Lineer Kesirli Problem ... 26
2.6.2 Temel Tanımlar ... 26

BÖLÜM 3

ARALIKLI KESİRLİ TAŞIMA PROBLEMİNE BİR ÇÖZÜM ÖNERİSİ 28
3.1 Modelin Kurulması 28
3.2 Modelin Bir Uygulaması 34

BÖLÜM 4

SONUÇ VE ÖNERİLER 50
KAYNAKLAR 54
ÖZGEÇMİŞ 55

SİMGE LİSTESİ

a_i	i kaynağının arz miktarı
a_i^L, a_i^R	i. arzın alt ve üst sınırları
$\left[a_i^L, a_i^R\right]$	aralıklı arzı
b_j	j hedefinin talep ettiği miktar
b_j^L, b_j^R	j.talebin alt ve üst sınırları
$\left[b_j^L, b_j^R\right]$	aralıklı talebi
$c_i(x)$	kısıt fonksiyonları
c_{ij}	i kaynağından j hedefine yapılan birim taşıma maliyeti
c^L_{ij}, c^R_{ij}	birim taşıma maliyetinin alt ve üst sınırları
$\left[c^L_{ij}, c^R_{ij}\right]$	aralıklı maliyetleri
d_j	j. sütuna karşı gelen hedefin talep miktarı
d_{ij}	taşıma için tercih edilen birim yol
d^L_{ij}, d^R_{ij}	taşıma için tercih edilen birim yolun alt ve üst sınırları
$\left[d^L_{ij}, d^R_{ij}\right]$	taşıma problemi için tercih edilen aralıklı yolu
$D(x)$	kesirli taşıma problemi amaç fonksiyonunun paydası
E	eşitlik kısıtları kümesi
$f(x),\ Z$	taşıma problemi amaç fonksiyonu
I	eşitsizlik kısıtları kümesi
i	Taşıma probleminin mevcut kaynakları
j	Taşıma probleminin mevcut hedefleri
k_{ij}	i kaynağından j talebine taşınan birimlerin karar değişkeninin katsayısı
m	arz sayısı
n	talep sayısı
$P(x)$	kesirli taşıma problemi amaç fonksiyonunun payı
R^n	kısıt kümesi
S	Uygun çözüm kümesi
S_i	i. satıra karşı gelen kaynağın kapasitesi
u_i	üretim merkezi

v_j	tüketim merkezi
Z_1^R	birim taşıma maliyetinin üst sınırıyla hesaplanan amaç fonksiyonu
Z_1^C	birim taşıma maliyetinin alt ve üst sınırlarının ortalamasıyla hesaplanan amaç fonksiyonu
Z_2^L	birim yolun alt sınırlarıyla hesaplanan amaç fonksiyonu
Z_2^C	birim yolun alt ve üst sınırlarının ortalamasıyla hesaplanan amaç fonksiyonu
$\frac{\partial Z}{\partial x_{ij}}$	Z amaç fonksiyonun x_{ij} karar değişkenine göre türevi
$\mu\left(Z_1^R\right), \mu\left(Z_1^C\right), \mu\left(Z_2^L\right), \mu\left(Z_2^C\right)$	üyelik fonksiyonları
x_{ij}	i kaynağından j talebine taşınan birimlerin karar değişkeni
$X^{(k)} = \left(x_{ij}^{(k)}, \theta_{ij}^{(k)}, \lambda_{ij}^{(k)}, \gamma_i^{(k)}, \beta_j^{(k)}\right)$	taylor polinomu
θ	temel değişkene atanacak miktar
θ_{ij}	aralık maliyetin alt sınırına eklenen miktarın katsayısı
λ_{ij}	aralıklı yolun alt sınırına eklenen miktarın katsayısı
γ_i	aralıklı arzın alt sınırına eklenen miktarın katsayısı
β_j	aralıklı talebin alt sınırına eklenen miktarın katsayısı
$Q(x)$	kesirli taşıma problemi amaç fonksiyonu

KISALTMA LİSTESİ

LP	Lineer Programlama
LFP	Linear Fractional Transportation Programming
MODI	Modified Distribution

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2. 1 Taşıma problemi 6
Şekil 2. 2 Kuzeybatı köşe yöntemi ile başlangıç çözümü bulunması.......................... 15
Şekil 3. 1 Birinci iterasyon çıktıları 39
Şekil 3. 2 İkinci iterasyon çıktıları.. 42
Şekil 3. 3 Üçüncü iterasyon çıktıları... 45
Şekil 3. 4 Dördüncü iterasyon çıktıları 48

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 2. 1 Taşıma probleminin çizelgesi ... 8
Çizelge 2. 2 Ana depolarla fabrikalar arasındaki uzaklıklar ... 9
Çizelge 2. 3 Uzaklıklar için araba başına taşıma maliyetleri ... 9
Çizelge 2. 4 Örnek taşıma problemi modeli ... 10
Çizelge 2. 5 Talebi arzdan büyük taşıma problemi ... 11
Çizelge 2. 6 Arzı talepten büyük taşıma problemi ... 12
Çizelge 2. 7 Birim taşıma maliyetleri (TL/koli) ... 13
Çizelge 2. 8 Dengeli taşıma problemi ... 14
Çizelge 2. 9 Kuzeybatı köşe yöntemi ile bulunan çözümün toplam taşıma maliyeti ... 16
Çizelge 2. 10 MODI yöntemi için örnek uygulamanın **ç**özümü ... 18
Çizelge 2. 11 Temel dışı değişkenler için $(u_i + v_j - c_{ij})$ değerlerinin hesaplanması ... 18
Çizelge 2. 12 MODI yöntemi için ulaştırma çizelgesinin düzenlenmesi ... 19
Çizelge 2. 13 Temel değişkenlerden hareketle u_i ve v_j 'lerin bulunması ... 20
Çizelge 2. 14 Temel dışı değişkenlerin değerlendirilmesi ve temele girecek değişkenin seçilmesi ... 21
Çizelge 2. 15 Temele girecek değişken x_{13} için oluşturulan döngü ... 23
Çizelge 2. 16 Birinci ardıştırma sonunda elde edilen yeni temel uygun çözüm ... 24
Çizelge 2. 17 Temel uygun çözümün MODI yöntemi ile optimumluk sınaması ... 25
Çizelge 2. 18 Gıda şirketine ait ürün dağıtım probleminin en iyi çözümü ... 25
Çizelge 3. 1 Aralıklı kesirli taşıma problemi örneği ... 34
Çizelge 3. 2 Kuzeybatı köşesi yönteminin modele uygulanması ... 36
Çizelge 4. 1 Uygulamanın optimum çözümü ... 53

ÖZET

ARALIKLI KESİRLİ TAŞIMA PROBLEMİNE BİR ÇÖZÜM ÖNERİSİ

Gizem ERFİDAN KARABULUT

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mustafa SİVRİ

"Yöneylem Araştırması", İngiliz ve Avrupalılar tarafından "Operational Research" ve Amerikalılar tarafından "Operations Research" olarak isimlendirilir. Yöneylem Araştırması genelde bir "Sorun Çözme" ve "Karar Verme Bilimi" olarak değerlendirilir. Yöneylem araştırmasında en yaygın kullanım alanı bulan tekniklerden bir tanesi olan Doğrusal Programlama, doğrusal karar modelleriyle ilgili kavram ve teknikler bütünüdür. Doğrusal programlama, bütün model parametrelerinin kesin olarak bilindiğini varsayan deterministik bir tekniktir. Doğrusal programlamanın özel bir türü ise ulaştırma modelidir. Ulaştırma problemi stok kontrolü, işgücü planlaması, kuruluş yeri seçimi, işlerin makinelere dağıtımı gibi alanlarda ulaştırma modelleri kullanılabilmektedir.

Çalışmamızda inceleyeceğimiz Ulaştırma Modelinin amacı bir işletmenin belirli kapasitedeki üretim merkezlerinden, belirli talebi olan tüketim merkezlerine göndereceği malların toplam ulaştırma maliyetini optimum yapacak biçimde gönderilmesini sağlamaktır.

Otomotiv şirketinde üretilen yedek parçaların 4 ayrı fabrikadan, 3 ayrı depoya dağıtılması isteniyor. Depolardaki üretilen ürün stokları ve fabrikalardaki ürün kapasiteleri her depo belirli aralıklarla belirlenmiştir. Ayrıca fabrikalardan depolara olan birim taşıma maliyetleri de aralıklı ve kesirli olarak belirlenmiştir. Buna göre kesirli aralıklı amaç fonksiyonu ve kısıtlar belirlenip ulaştırma modeli kurulmuştur. Çözüm için amaç fonksiyonu başlangıç değerlerine göre belirlenen noktalarda taylor polinomuna genişletilir. Bulunan değerler ve kısıtlar WINQSB paket programına girilir ve program iterasyon sonucunu hesaplar. Bu sonuç ile amaç fonksiyonu tekrardan taylor polinomuna genişletilir. Amaç fonksiyonu için bulunan değerler ve kısıtlar tekrardan WINQSB paket programına girilir ve bir iterasyon daha yapılmış olur. WINQSB paket programı ile verilen sonuçlar iki iterasyon art arda aynı değerleri verene kadar iterasyon yapmaya devam edilir. Çalışmamızda 3.iterasyonda çözüme ulaşılmıştır. Bulunan sonuçlar kısıt fonksiyonlarında yerine konulduğunda denklemlerin sağlandığı tespit edilmiştir. Her iterasyonda optimum çözüme yaklaşıldığı belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: doğrusal programlama, taşıma problemi, aralıklı kesirli taşıma problemi, iterasyon, optimum çözüm

ABSTRACT

A SOLUTION PROPOSAL TO THE INTERVAL FRACTIONAL TRANSPORTATION PROBLEM

Gizem ERFİDAN KARABULUT

Department of Mathematics Engineering

MSc. Thesis

Adviser: Prof. Dr. Mustafa SİVRİ

It is termed "Operational Research" by the British and Europeans and "Operations Research" by the Americans. Operations Research is generally considered a "Problem Solving" and "Decision Science". Linear Programming, one of the techniques that finds the most common use in Operatian Research, is the whole concept and techniques related to linear decision models. Linear programming is a deterministic technique that assumes that all model parameters are known precisely. A special type of linear programming is the transportation model. Transport models can be used in areas such as stock control, labor force planning, site selection, and distribution of jobs to machines.

In this study, the objective is to ensure that goods transported from the production centers in an discret facility to discret demanding consumption centers are sent optimally to the total transportation cost of an enterprise. Spare parts produced in the automotive company are required to be distributed from 4 separate factories to 3 separate warehouses. The manufactured of inventory in the warehouse and the product capacities in the factories are determined at certain discret. In addition, unit transportation costs, which are stored from factories to warehouse , are determined as discret and fractional. According to this, fractional objective functions and constraints are determined and a transportation model is established. The objective function for the solution is extended to the Taylor polynomial at points determined according to the initial values. The values and constraints found are entered into the WINQSB package program and the program calculates the iteration result. With this result, the objective function is extended to the Taylor polynomial once again. The values and constraints for the objective function are entered into WINQSB package program once again and an iteration is made. The results of the WINQSB packet program continue to iterate until two iterations repeat successive the value in kind. In our study, the solution was reached at 3. iteration. It has been determined that equations are provided when the results are substituted in the constraint functions. In each iteration, it is determined that the optimum solution is more approximated in the objective function.

Keywords: linear programming, transportation problem, fractional interval transportation problem, iteration, optimum solution

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Taşıma ve atama modelleri, doğrusal (lineer) programlamanın özel bir türüdür. Taşıma problemi bazı kaynaklarda 'Ulaştırma problemi' olarak ta adlandırılmaktadır. Ürünlerin birden fazla üretim noktasından, birden fazla tüketim noktasına dağıtımı ile ilgili problemler taşıma veya atama (transportation or assignment) problemleri olarak adlandırılmaktadır. Taşıma modellerinin uygulamaları sadece ürünlerin coğrafi bir merkezden coğrafi bir başka noktaya taşınması ile sınırlı değildir. Stok kontrolü işgücü planlaması , kuruluş yeri seçimi, işlerin makinelere dağıtımı gibi alanlarda da taşıma modelleri kullanılabilmektedir [1].

Taşıma probleminin tarihçesi 1930'lu yıllara dayanır. Taşıma problemi, 1941 yılında Frank L. Hitchcock tarafından "Bir ürünün birçok kaynaktan birçok varış yerine dağıtılması" isimli makalesinde ortaya konulmuştur.

T. C. Koopmans 1949 yılında "Taşıma sistemlerinden optimum faydalanma" isimli makalesini yayımlamıştır. Charnes ve Cooper, 1954 yılında Taşıma problemi de "atlama taşı yöntemi" ni geliştirmişlerdir. Aneja ve Nair 1979'da, iki kriterli bir Taşıma problemi modeli üzerinde çalışmışlardır [2].

Daha sonraki yıllarda ulaşım modellerinin çözümü için özel algoritmalar geliştirilmiştir. "Kuzeybatı Köşesi (Northwest Corner)", "En Düşük Maliyetler (Minimum Cost)" ve " Vogel Yaklaşım (Vogel's Approximation)" olarak anılan yöntem W.W.Cooper ve A.Charnes tarafından tanıtılmış ve uygulamalar yapılmıştır. Taşıma probleminin optimal çözümü için kullanılan en yaygın yöntem George Bernard Dantzig tarafından 1963 yılında bulunan "Geliştirilmiş Dağıtım - MODI (Modified Distribution)" yöntemidir [3].

Aralıklı katsayılı amaç fonksiyonu içeren matematiksel programlama problemlerinde kullanılan optimallık, Biran, Inuiguchi and Kume and Inuiguchi tarafından aralıklı katsayılı amaç fonksiyonunu çözmek için farklı bir yaklaşım olarak kullanıldı. Masahiro Inuiguchi and Masatoshi Sakawa karar teorisi olarak minimax pişmanlık kriteri içeren, aralıklı katsayılı LP (Lineer Programlama) problemi önermiştir [4].

S.K. Das, A. Goswami *, S.S. Alam; amaç fonksiyonunun, kaynak ve hedef parametrelerinin maliyet katsayıları aralıklı olan çok amaçlı taşıma probleminin çözümüne odaklanmıştır. Bu problem aralıklı amaç fonksiyonunun minimize edildiği klasik çok amaçlı taşıma problemine çevrilmiştir. Aralıklı kazançlar arasında karar vericinin önceliklerini temsil eden sıralama bağıntısı; sağ limit, sol limit, merkezi ve bir aralığın yarı genişliği kavramları tarafından tanımlanmıştır. Aralıklı kısıtlar deterministik hale dönüştürülmüştür. Dönüştürülmüş problem bulanık programlama tekniği ile çözülmüştür [5].

M. Duran Toksarı Bulanık Çok Amaçlı Lineer Kesirli Programlama Problemine, Taylor serisi yaklaşımıyla çözüm önerisinde bulunmuştur. Son yıllarda önemli bir planlama aracı olarak kullanılan 'kesirli programlama' 'fractional programming' farklı alanlarda uygulanmaktadır [6].

1.2 Tezin Amacı

Optimizasyon Teorisi ve Metodları bilim ve mühendislik, askeri uygulamalarda geniş yer tutan yöneylem araştırmasının, uygulamalı matematiğin yeni bir konusudur. Bu konu matematiksel çözüm yöntemleriyle problemlerin optimal çözümünü bulur. Problem kısıtlarının optimallik çalışmasını, model problemlerin kurulumunu, deterministik algoritmik metodların çözümünü, problemlerin sayısal çözümünü ve gerçek hayat problemlerin çözümünü içerir.

G.B. Dantzig LP için 1950 lerden sonra eşlenik gradyan yöntemleri ve yarı-Newton yöntemleri sunduğunda, lineer olmayan programlama büyük ölçüde geliştirilmiştir.

Optimizasyon probleminin genel hali;

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &s.t \left| x \in X \right. \end{aligned} \tag{1.1}$$

$x \in R^n$ karar değişkeni, $f(x)$ bir amaç fonksiyonu, $X \subset R^n$ uygun bölge veya kısıt kümesi

Özellikle kısıt kümesi $X = R^n$ ise, optimizasyon problemi (1.2) kısıtlanmamış optimizasyon problemi olarak adlandırılır:

$$\min_{x \in R^n} f(x) \tag{1.2}$$

Kısıtlı optimizasyon problemi ise şu şekilde yazılır :

$$\min_{x \in R^n} f(x)$$

$$s.t./\, c_i(x) = 0, i \in E, \tag{1.3}$$

$$c_i(x) \geq 0, i \in I$$

E ve I sırasıyla eşitlik ve eşitsizlik kısıtları kümesi,

$c_i(x), (i = 1, ..., m \in E \cup I)$ kısıt fonksiyonları

Hem amaç fonksiyonu hem kısıt fonksiyonları lineer fonksiyonlar olduğu zaman, optimizasyon modeli lineerdir denir. Herhangi biri non-lineer fonksiyon olma durumunda ise modele non-lineerdir denir.

Çalışmamızda lineer kısıtlı optimizasyon türünün bir alanı olarak taşıma probleminin bir uygulaması ele alınacaktır. Bir otomotiv şirketinde üretilen parçaların 4 adet fabrikadan 3 adet depoya dağıtılmasıyla ilgili kesirli bir taşıma problemine yer verilmiştir. Burada depolardaki stoklar ve fabrikalardaki kapasiteler aralıklıdır ayrıca birim taşıma fiyatları da aralıklı olarak belirlenmiştir. Böyle bir taşıma problemine taylor serisi yaklaşımıyla iterasyonlar yapılarak çözüm bulmaya çalışılacak ve optimum çözüme WINQSB paket programı yardımıyla ulaşılacaktır. Bu sayede 4 adet fabrikadan 3 adet depoya ürünlerin dağıtımını yaparken taşıma maliyetlerini de minimum yapan taşıma miktarlarına ulaşılmıştır.

1.3 Hipotez

Lineer Kesirli Amaç Fonksiyonlarının Taylor Serisine açılarak, iterasyonlar yardımıyla hem fiyatları hem de talep ve kapasiteleri aralıklı olan Lineer Kesirli Taşıma Probleminden elde edilen sonuçların her iterasyonda istenilen hedeflere daha da yakın olması bize bu yöntemin doğruluğu ve güvenilirliği konusunda bilgi vermektedir.

BÖLÜM 2

TAŞIMA PROBLEMİ

2.1 Taşıma Probleminin Modeli

Taşıma problemi, LP probleminin özel bir şeklidir. Bir taşıma problemi, ürünün kaynaklardan, hedeflere taşınmasıyla ilgilenir.

- Taşıma probleminde amaç üretim merkezlerinden dağıtım merkezlerine ürünleri dağıtırken, diğer taraftan da her bir kaynaktan her bir hedefe yapılan taşımaların toplam maliyetini minimum yapan taşıma miktarını belirlemektedir.

Taşıma modelleri,

- Üretim ve dağıtım merkezleri arasındaki optimum ürün dağıtımının belirlenmesinde
- İşlerin makinelere dağıtımında
- Üretim planlamada
- Tesis yeri seçiminde
- Personel atama
- Stok kontrolü

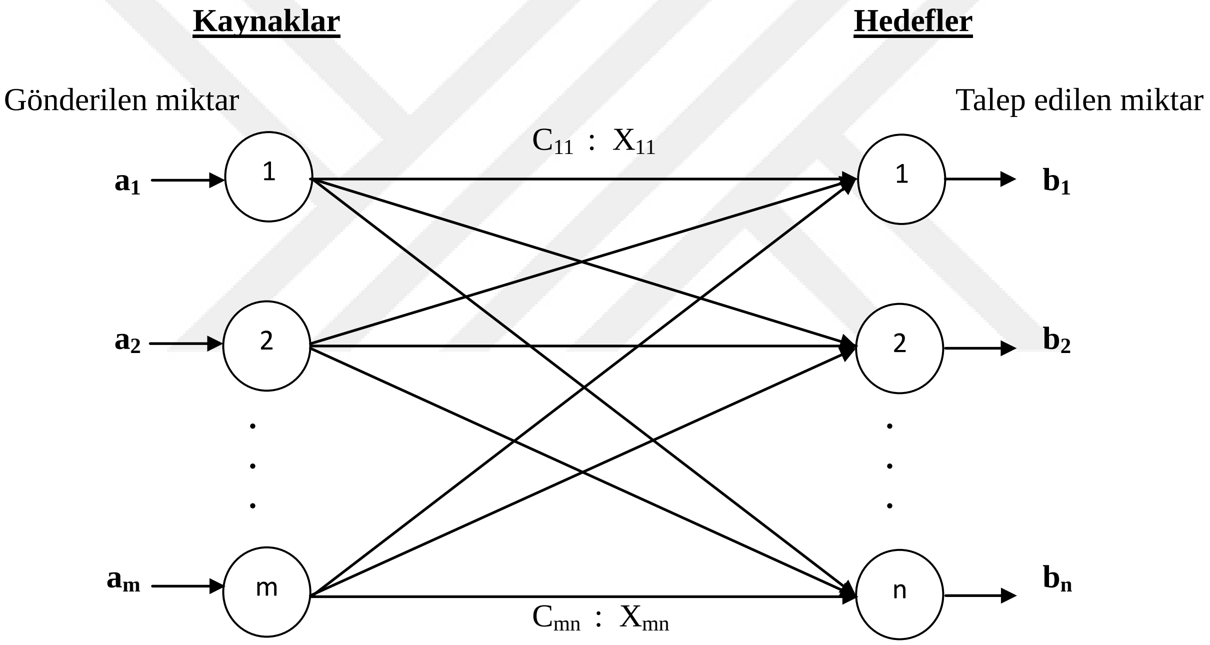
  Ve bir çok endüstriyel alanda sıkça kullanılır [1].

LP'nın özel bir türü olan taşıma modellerinde de LP varsayımları geçerlidir.

LP'nın genel varsayımlarının yanında taşıma modelinin kurulabilmesi için bazı özel varsayımların kabul edilmesi gerekir.

1. Bütün faaliyet düzeylerinin aynı ürün birimi ile ifade edilmesi gerekir.

2. Gönderilen doğrudan doğruya üretim merkezlerinden dağıtım merkezlerine gönderilmesi yani talep ve sunum merkezleri arasında nakil yapılmaması gerekir.
3. Üretim merkezinden gönderilen toplam miktar, dağıtım merkezlerinin toplam talep miktarına eşit olmalıdır. Eşitsizlik durumunda yapay bir üretim ya da tüketim merkezi ilave edilmeli ve bu durumda eşitlik sağlanmalıdır.
4. Her bir üretim merkezi ile her bir dağıtım merkezi arasında birim ürünün taşıma maliyeti bilinmeli ve sabit olmalıdır.
5. Taşıma modelinin kısıtlayıcı fonksiyonları içinde yer alan karar değişkenlerinin katsayılarının bir ya da sıfır olması veya bir ya da sıfır olması için gerekli işlemlerin yapılması gereklidir [7].



Şekil 2.1 Taşıma problemi [1]

Doğrusal programlamanın farklı biçimleri verilmiştir:

1. Standart Biçim

$$Max(Min)\, f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (2.1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} k_{ij} x_j = b_i, \qquad x_j \geq 0, \qquad j = 1,\dots,n \qquad (2.2)$$

2. Yasal Biçim

$$Maxf(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \text{veya} \qquad Minf(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} k_{ij} x_j \le b_i, \qquad i=1,...,m, \qquad \sum_{j=1}^{n} k_{ij} x_j \ge b_i \\ &x_j \ge 0, \qquad j=1,...,n, \qquad x_j \ge 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

3. Genel Biçim

$$Max(Min)\, f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \text{ , } i=1,...,m, \tag{2.5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} k_{ij} x_j \{\le,=,\ge\} b_i, \qquad i=1,...,m, \tag{2.6}$$

$$x_j \ge 0, \qquad j=1,...,n, \tag{2.7}$$

$f(x)=z$ alındığında genel biçim açık olarak

$$\begin{aligned} &Max(Min) z = c_1 x_1 + ... + c_n x_n \\ &k_{11} x_1 + k_{12} x_2 + ... + k_{1n} x_n \{\le,=\ge\} b_1 \\ &k_{21} x_1 + k_{22} x_2 + ... + k_{2n} x_n \{\le,=\ge\} b_2 \\ &\quad \dots \\ &k_{m1} x_1 + k_{m2} x_2 + ... + k_{mn} x_n \{\le,=\ge\} b_m \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$x_1, x_2, ..., x_n \ge 0 \tag{2.9}$$

şeklinde tanımlanır.

Yukarıdaki (2.5), (2.6), (2.7) kısıtları altında (2.8), (2.9) amaç fonksiyonunu sağlayan x_{ij} 'lerin çözümünün araştırılması “Taşıma Problemi” olarak adlandırılmaktadır [7].

Çizelge 2.1’ de Taşıma problemini gösterilmiştir:

Çizelge 2.1 Taşıma probleminin çizelgesi [7]

	İstem Merkezleri					
		1	**2**	**.....**	**N**	**Toplam Sunum**
Sunum Merkezleri	**1**	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}		C_{1n} X_{1n}	$\mathbf{a_1}$
	2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}		C_{2n} X_{2n}	$\mathbf{a_2}$
	. . .	. . .	. . .		. . .	. . .
	M	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}		C_{mn} X_{mn}	$\mathbf{a_m}$
	Toplam İstem	$\mathbf{b_1}$	$\mathbf{b_2}$	.....	$\mathbf{b_n}$	$\sum a_i, \sum b_j$

2.2 Dengeli ve Dengesiz Taşıma Problemleri

Standart taşıma problemlerinde üretim merkezlerince sağlanan toplam arz (sunum) miktarı (a_i) ile dağıtım merkezlerinin toplam talep miktarına (b_j) eşit olduğu kabul edilen Taşıma problemlerine Dengeli Taşıma Problemi denir.

Talep miktarı ile arz miktarı birbirine eşit olmadığı durumda problem Dengesiz Taşıma Problemi olarak tanımlanır. Bu durumda problemde çözüme ulaşabilmek için problemi dengeli hale getirmek gerekir. Burada iki durum vardır :

- Toplam sunum miktarı toplam talep miktarından fazla olduğu durumda, fazla olan miktarın tüketimi için aradaki fark kadar bir yapay talep merkezi yaratılır. Gerçekte yapay talep merkezine ürün gönderilemeyeceği için yapay talep merkezindeki birim taşıma maliyeti sıfıra eşittir. Eğer sunum merkezinden yapay talep merkezine gönderilen ürün varsa bu sunum merkezindeki atıl (etkisiz) kapasiteyi gösterir. Yapay talep merkezi için bir kolon ilave edilir.

- Eğer toplam sunum miktarı toplam talep miktarından az ise aradaki farkın üretilebilmesi için modele bir yapay sunum merkezi ilave edilir. Bu durumda yapay sunum merkezi eklense de gerçekte hiçbir talep merkezi yapay sunum merkezinden ürün almaz ve taşıma maliyeti sıfırdır. Yapay sunum merkezi satırındaki karar değişkenlerinin değeri değerlendirilmeyen pazar payı miktarı olarak düşünülebilir [7].

2.2.1 Dengeli Taşıma Problemi Örneği

Nakliye şirketi MG Otomotiv'in Edirne, İzmir, Bursa'da toplam üç fabrikası ve Malatya'da Diyarbakır'da olmak üzere iki tane ana dağıtım deposu vardır. Önümüzdeki üç aylık dönemde fabrikaların kapasiteleri Edirne, İzmir, Bursa için sırasıyla 1000, 1500 ve 1200 araba olarak belirlenmiştir. İki ana dağıtım merkezi için aynı üç aylık dönemdeki talepleri ise, Malatya'da 2300, Diyarbakır'da 1400 arabadır. Fabrikalarla ana depolar arasındaki uzaklıklar Çizelge 2.2'de verilmiştir.

Çizelge 2.2 Ana depolarla fabrikalar arasındaki uzaklıklar [1]

	Malatya	Diyarbakır
Edirne	1000	2690
İzmir	1250	1350
Bursa	1275	850

Bu nakliye şirketi her araba için km başına alınan birim maliyet 0.08 para birimi'dir. Bu para birimi ve uzaklıkların çarpılmasıyla hesaplanan araba başına taşıma maliyetleri bütün güzergahlar için en yakın tamsayıya yuvarlanarak Çizelge 2.3'te verilmiştir.

Çizelge 2.3 Uzaklıklar için araba başına taşıma maliyetleri [1]

	Malatya	Diyarbakır
Edirne	80 pb	215 pb
İzmir	100 pb	108 pb
Bursa	102 pb	68 pb

Taşıma probleminin modeli (2.10) denklem sistemindeki gibidir:

$$\min Z = 80x_{11} + 215x_{12} + 100x_{21} + 108x_{22} + 102x_{31} + 68x_{32}$$

$$\sum_{j=1}^{2} x_{1j} = 1000$$

$$\sum_{j=1}^{2} x_{2j} = 1500$$

$$\sum_{j=1}^{2} x_{3j} = 1200 \qquad (2.10)$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i1} = 2300$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i2} = 1400 \qquad x_{ij} \geq 0$$ i=1,2,3 (Edirne,İzmir,Bursa) ; j=1,2 (Malatya, Diyarbakır)

Yukarıdaki matematiksel modelin gösterimi Çizelge 2.4' te yapılmıştır:

Çizelge 2.4 Örnek taşıma problemi modeli [1]

	Malatya	Diyarbakır	**Arz**
Edirne	80 X_{11}	215 X_{12}	1000
İzmir	100 X_{21}	108 X_{22}	1500
Bursa	102 X_{31}	68 X_{32}	1200
Talep	2300	1400	*

Taşıma problemlerinin çözümünde uygulanan adımlar şu şekildedir:

- İlk olarak bir başlangıç çözümünün bulunması gereklidir. Bu başlangıç çözümü i satır (üretim merkezi) ve j sütundan (tüketim merkezi) oluşur. Başlangıç çözümünün geçerli olabilmesi için taşıma probleminde çözüm sonucunda atama yapılan hücrelerin sayısı, (i + j – 1)'e eşit olmalıdır.

- Taşıma probleminde çözüme ulaşmak için başlangıç çözümü belirlendikten sonra uygun çözüm yöntemlerinden biri uygulanarak optimal çözüme ulaşılır.

2.2.2 Dengesiz Taşıma Problemi Örneği

Taşıma probleminde üretim merkezlerindeki toplam ürün $\sum_{i=1}^{n} a_i$ dağıtım merkezlerinin toplam talebinden $\sum_{j=1}^{n} b_j$ farklı olabilir. Bu durumda taşıma problemi dengelenmemiş denir. Yani dengesiz taşıma problemi söz konusu olur. Dengesiz taşıma probleminin sonuca ulaşabilmesi için toplam talep ile toplam arzın birbirine eşit olması gerekir. Eşit olmadığında toplam talebin toplam arzdan büyük veya küçük olduğu iki durum söz konusudur.

2.2.2.1 Talebin Arzdan Büyük Olması Örneği

2.2.1 Dengeli Taşıma Problemi Örneği'nde İzmir Fabrikasının kapasitesinin 1500 yerine 1300 araba olduğunu varsayalım. Bu durumda toplam arz 3500, toplam talep ise 3700 araba olur ve 3700-3500=200 arabalık talebin arzdan büyük olma durumu oluşur. 200 araba kapasiteli hayali bir fabrika taşıma problemine eklenerek denge sağlanmaktadır. Bu durumda hayali fabrikadan iki hedefe olan birim taşıma maliyetleri fabrika hayali olduğu için sıfır olacaktır. Örneğin Diyarbakır'ın tüm talebinin karşılanması için yapay kaynaktan Malatya'ya yüksek bir birim taşıma maliyeti atanmalıdır. Çizelge 2.5 'te dengelenmiş model ve optimum sonucu verilmektedir. Çözüme göre hayali kaynaktan Diyarbakır'a 200 araba gidecektir. Bu da 1400'lük talebin eksik kalan 200 arabalık kısmının karşılandığı anlamına gelmektedir.

Çizelge 2.5 Talebi arzdan büyük taşıma problemi [1]

	Malatya	Diyarbakır	***Arz***
Edirne	80 ***1000***	215	***1000***
İzmir	100 ***1300***	108	***1300***
Bursa	102	68	***1200***
Hayali fabrika	0	0 ***200***	***200***
Talep	***2300***	***1400***	

2.2.2.2 Arzın Talepten Büyük Olması Örneği

Malatya'nın talebinin 1900 araba olduğu varsayıldığında modele hayali bir hedef eklenmesi gerekir ve artan arabaların bu hayali hedefe yöneltilmesi gerekir. Burada da hayali dağıtım merkezleri (hedefler) için birim taşıma maliyetleri sıfırdır. Bir fabrikayı tamamen taşıma dışı bırakmak için fabrikadan hayali hedefe yüksek bir birim taşıma maliyeti atanması gerekir. Çizelge 2.6 'te yeni model ve optimum çözümü verilmiştir. Bu çözümden görüldüğü gibi İzmir fabrikası için 400 arabalık bir fazlalık oluşur.

Çizelge 2.6 Arzı talepten büyük taşıma problemi [1]

	Malatya	Diyarbakır	Hayali depo	***Arz***
Edirne	80 **1000**	215	0	***1000***
İzmir	100 ***900***	108 ***200***	0 ***400***	***1500***
Bursa	102	68 ***1200***	0	***1200***
Talep	***1900***	***1400***	***400***	

Taşıma probleminin başlangıç çözümünü bulmak için geliştirilen yöntemlerden en bilinen üç tanesi “Kuzeybatı Köşesi (Northwest Corner)”, “En Düşük Maliyet (Minimum Cost)” ve “Vogel Yaklaşım (Vogel’s Approximation)” yöntemleridir [3]. Çalışmamızda “Kuzeybatı Köşesi (Northwest Corner)” yöntemini kullanılmıştır.

Yukarıda bahsedilen yöntemlerde, taşıma çizelgesinde i. satırda ve j. sütundaki hücre (i, j) hücresi olarak adlandırılmakta ve (i, j) hücresine atanan bu değer X_{ij} ile gösterilmektedir. Burada, i. satıra karşılık kaynağın kapasitesi S_i, j. sütuna karşılık hedefin talep miktarı d_j olarak ifade edilmektedir.

2.3 Kuzeybatı Köşe Yöntemi ile Başlangıç Çözüm Bulma

Kuzeybatı Köşe Yöntemi başlangıç temel uygun çözümü oluşturma yöntemleri arasında en basit ve hızlı olan yöntemdir. Bu yöntemde, taşıma maliyetlerine bakılmaksızın çözüme ulaşılır. Taşıma çizelgesinin kuzeybatı (en sol üst) köşesinden güneydoğu köşesine doğru hücrelere değerler verilir. Sonuca ulaşırken yapılan her adımda çizelgedeki bir satır veya sütun işlem dışı bırakılır ve çizelge daraltılır.

Kuzeybatı köşe yönteminin adımları aşağıdaki şekilde sıralanır:

1. Çizelgenin en kuzeybatısındaki ve bir değer verilmemiş (i, j) hücresi seçilir. Bu hücreye, i. satırdaki arz ve j. sütundaki talep değerlerine bakılarak, mümkün olabilecek en büyük değer verilir. Verilen bu değer $x_{ij} = Enk\{S_i, d_j\}$ eşitliği ile gösterilir.
2. (i, j) hücresine atanan x_{ij} miktarları, i. satırın sunum ve j. sütunun talep değerlerinden çıkarılarak, S_i ve d_j değerleri güncellenir.
3. Sürekli güncellenen bu S_i ve d_j değerlerinden en az biri son güncel halinde sıfır olmalıdır. Sıfır değerine karşı gelen satır veya sütundan sadece birisi işlem dışı bırakılarak çizelge yavaş yavaş daraltılır. İşlem dışı kalmasının amacı, bir daha bu satır veya sütuna değer verilmesini engellemektir. Bu yapılırken 3 faklı durumla karşılaşılabilir:

- Eğer $S_i = 0$ ise i. satır işlem dışı bırakılır.
- Eğer $d_j = 0$ ise j. sütun işlem dışı bırakılır.
- Eğer her ikisi de sıfır ise, ya satır ya da sütundan herhangi birisi işlem dışı bırakılır.

4. İşlem dışı bırakılmayan satır veya sütun, sıfır talep ya da kapasiteye sahip olarak daraltılmış çizelgede kalır.

İşlem dışı bırakılmamış yalnızca bir satır veya bir sütun kaldığında algoritma sona erer. Kalan miktarlar son satır veya sütundaki uygun yerlere atanır. Aksi halde 1. adıma dönülür [8].

2.3.1 Kuzeybatı Köşe Yöntemi İçin Bir Uygulama

Bir gıda şirketinde üretilen bir ürünün üç ayrı fabrikadan, üç ayrı bölgedeki depolara dağıtılması isteniyor. Fabrikalardaki ürün kapasiteleri sırasıyla haftada 100,180 ve 200 kolidir. Depolardaki talep edilen haftalık miktarlar ise sırasıyla 135, 175 ve 170 kolidir. Fabrikalardan depolara olan birim taşıma maliyetleri Çizelge 2.7 'de gösterilmiştir.

Çizelge 2.7 Birim taşıma maliyetleri (TL/koli) [8]

		Depolar		
		1	**2**	**3**
Fabrikalar	**1**	6	7	4
	2	5	3	6
	3	8	5	7

En düşük maliyetli dağıtım planını bulabilen taşıma problemi modelini kurunuz. Kuzeybatı köşe yöntemini kullanarak bir başlangıç temel uygun çözümünü kurunuz.

Kaynak sayısı i=3 ve hedef sayısı j=3 olduğu için,

i*j=3*3=9 karar değişkeni ve i+j=3+3=6 temel kısıt olacaktır. Amaç fonksiyonu şu şekilde gösterilir:

$$Z = 6x_{11} + 7x_{12} + 4x_{13} + 5x_{21} + 3x_{22} + 6x_{23} + 8x_{31} + 5x_{32} + 7x_{33} \tag{2.11}$$

Kapasite kısıtları aşağıda gösterilmiştir:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &\leq 100 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leq 180 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} &\leq 200 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Depo taleplerinin karşılanmasına ilişkin kısıtlar aşağıdadır:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &\geq 135 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &\geq 175 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &\geq 170 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Ayrıca karar değişkenleri negatif değer alamayacağı için işaret kısıtları aşağıdaki şekildedir:

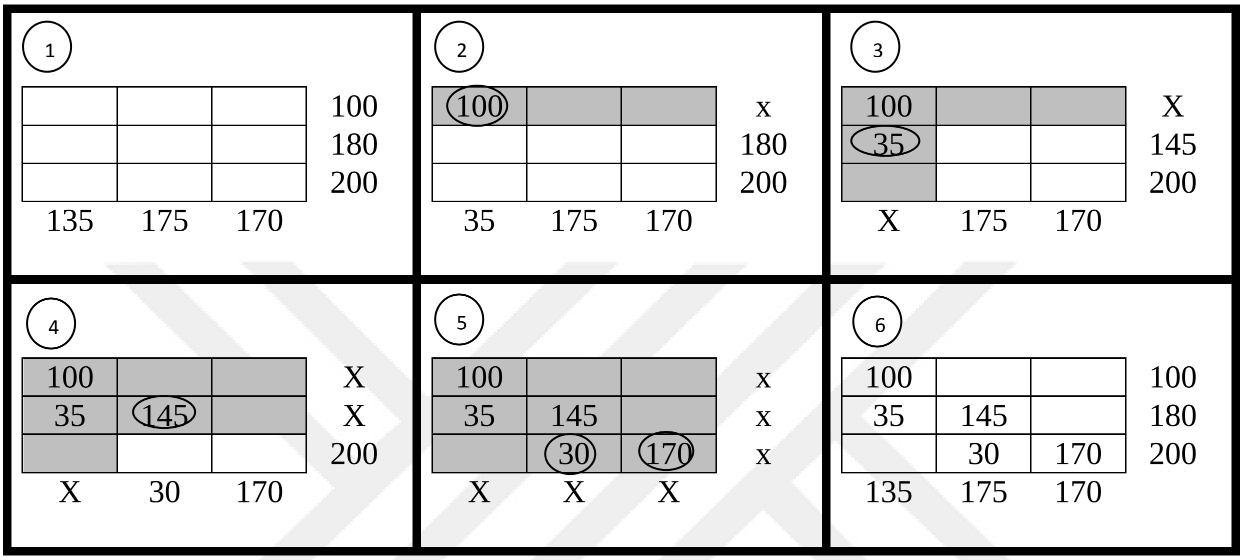
$$x_{ij} \geq 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{2.14}$$

Taşıma maliyetleri Kuzeybatı Köşe Yöntemi ‘nde dikkate alınmadığından, Çizelge 2.8’de dikkate alınmasına gerek yoktur. Çizelge 2.8’deki her satır bir fabrikaya ve her sütun bir depoya karşı gelir.

Çizelge 2.8 Dengeli taşıma problemi [8]

		Depolar			
Fabrikalar		**1**	**2**	**3**	**Fabrika Kapasiteleri**
	1	6 X_{11}	7 X_{12}	4 X_{13}	**100**
	2	5 X_{21}	3 X_{22}	6 X_{23}	**180**
	3	8 X_{31}	5 X_{32}	7 X_{33}	**200**
	Depo Gereksinimleri	**135**	**175**	**170**	**480**

Şekil 2.2'de, kuzeybatı köşe yönteminin uygulanışı altı aşamada gösterilmektedir. İşleme en sağ ve üstteki hücreden başlanır. Her aşamada atama yapılan hücre yuvarlak içerisine alınır. İşlem dışı bırakılan satır veya sütunlar, bir sonraki adım başında tümüyle koyu renkle boyanır. Atama yapıldıktan sonra kapasitesi dolan satırların sonunda veya sütunların altında görünen "X" işareti ilgili konumun işlem dışı kaldığı anlamına gelmektedir.



Şekil 2.2 Kuzeybatı köşe yöntemi ile başlangıç çözümü bulunması [8]

Şekil 2.2'deki ilk aşamada Çizelge 2.8'deki taşıma çizelgesi görülmektedir. 2. aşamada çizelgenin kuzeybatısında bulunan yuvarlak içine alınmış hücreye $Enk\{100,135\}$ koşuluna uygun olarak "100" değeri atanır. 1. satıra karşı gelen tüm kapasite karşılanmış olduğundan, bu satır işlem dışı bırakılır.

1. satırın kapasite ve 1. sütunun talep miktarlarından bu değer çıkarılır ve 3. aşamada da görüldüğü gibi 100'ün altındaki hücreye $Enk\{180,35\}$ eşitliğinden hareketle "35" değeri atanır. 2. satırın kapasite ve 1. sütunun talep miktarları güncellenir. 1. sütuna karşı gelen tüm talep karşılandığından, bu sütun işlem dışı bırakılır. 4. aşamada 35'in yanındaki hücreye $Enk\{145,175\}$ koşuluna uygun olarak "145" değeri atanır. Bu atama ile 2. satıra karşı gelen tüm kapasite kullanılmış olacağından bu satır işlem dışı bırakılır. 5. aşamada kalan iki boş hücreye satır ve sütunlardaki kapasiteleri uygun olarak karşılayacak şekilde atama yapılarak, tüm kapasite ve talep kısıtlarını sağlayan bir temel uygun çözüm bulunmuş olur. Elde edilen çözümde,

$x_{11} = 100, x_{21} = 35, x_{22} = 145, x_{32} = 30, x_{33} = 170$ değerini ve kalan diğer

hücrelerdeki karar değişkenleri sıfır değerini almaktadır. Başlangıç çözümün amaç fonksiyonu değerini veren toplam taşıma maliyeti ise Çizelge 2.9' da görüldüğü gibi 2550 TL' ye eşittir.

Çizelge 2.9 Kuzeybatı köşe yöntemi ile bulunan çözümün toplam taşıma maliyeti

Dağıtım		Taşıma Miktarı	Birim Maliyet	Toplam Maliyet
Fabrikadan	**Depoya**			
1	1	100	6	600
2	1	35	5	175
2	2	145	3	435
3	2	30	5	150
3	3	170	7	1190
			Toplam	2550

[8]

2.4 MODI Yöntemi ile Optimumluk Sınaması

Başlangıç temel uygun çözümün bulunmasında sunulan üç yöntem olduğu gibi, bulunan bu çözümün en iyi çözüm olup olmadığını belirlenmesi için de atlama taşı veya MODI yöntemleri bulunmaktadır. Atlama taşı yönteminin bir dezavantajı, tüm boş hücreler için döngü bulma ve değişim değeri hesaplama zorunluluğudur.

MODI yönteminin adımları aşağıda açıklanmaktadır:

1. Taşıma çizelgesinde her satıra karşı gelen üretim merkezi için bir u_i çarpanı, her sütuna karşı gelen tüketim merkezi için bir v_j çarpanı tanımlanır. Toplamda,

- i adet u_i yani üretim merkezi sayısı kadar
- ve j adet v_j yani tüketim merkezi sayısı kadar

  i ve j adet çarpan tanımlanmış olur.

2. c_{ij} , i. üretim merkezinden j. tüketim merkezine ürün taşımanın birim maliyeti demektir, temelde yer alan her x_{ij} değişkeni için aşağıdaki (2.15) denklemi sağlanır:

$$u_i + v_j - c_{ij} = 0 \rightarrow u_i + v_j = c_{ij} \tag{2.15}$$

3. Elde edilen lineer denklem sisteminde, denklem sayısı $(i+j-1)$ adet, bilinmeyen sayısı ise $(i+j)$ adet olacaktır. Denklem sistemini çözebilmek için çarpanlardan herhangi birine sabit bir değer atanır. Bu sabit değer genellikle $u_1 = 0$ alınır ve diğer çarpanlar buna bağlı olarak hesaplanır.

4. 3. adımda bulunan u_i ve v_j çarpanlarının değerlerinden hareketle, temel dışı her değişken için, aşağıdaki eşitliğin sonucu belirlenir. Temelde olan değişkenler için bu denklem sıfıra eşittir $(u_i + v_j - c_{ij})$.

5. Temelde olmayan değişkenler için iki durum vardır:

a. Her temel dışı değişken için $u_i + v_j - c_{ij} \leq 0$ (2.16)

koşulu sağlanıyorsa optimum çözüm bulunmuştur.

b. En az bir temel dışı değişken için $u_i + v_j - c_{ij} > 0$ (2.17)

gerçekleşiyorsa, çözüm optimum değildir. İlgili temel dışı değişkenin temele alınması halinde mevcut çözümden daha iyi bir çözüm elde edilecektir. Birden fazla temel dışı değişken için (2.17) denklemi sağlanıyorsa, pozitif değerlerin en büyüğüne sahip olan temel dışı değişken temele alınır.

MODI testi sonucunda optimum çözüm koşulu sağlanıyor ve temel dışı değişkenlerden birisi için,

$$u_i + v_j - c_{ij} = 0 \tag{2.18}$$

olarak gerçekleşiyorsa bu çözüm “Alternatif Optimum Çözüm” olarak adlandırılır.

2.4.1 MODI Yöntemi İçin Örnek Uygulama

‘2.3.1 Kuzeybatı Köşe Yöntemi için Bir Uygulama’ bölümündeki uygulamada kuzeybatı köşe yöntemiyle bulunan başlangıç temel uygun çözümün, optimum çözüm olup olmadığını MODI yöntemi ile kontrol ediniz.

Öncelikle dengelenmiş taşıma çizelgesinde (Çizelge 2.8), satırlarda gösterilen sunum merkezleri için u_1, u_2, u_3 çarpanları; sütunlarda gösterilen talep noktaları içinde v_1, v_2, v_3 çarpanları tanımlanır.

Başlangıç uygun temel çözümde, bir sayısal değer atanmış $i+j-1$ adet temel değişken olup, bu değişkenler $x_{11}, x_{21}, x_{22}, x_{32}, x_{33}$ değişkenlerine karşı gelmektedir. Temel değişkenler için (u,v) denklemleri yazıldığında 6 bilinmeyenli 5 eşitliğin olduğu bir denklem sistemi ortaya çıkmıştır. Çözüm sağlayabilmek için $u_1 = 0$ olarak kabul edilip, diğer değişkenler buna bağlı olarak bulunur. Çizelge 2.10'da temel değişkenler için yazılan (u,v) denklemleri ve çözümleri görülmektedir.

Çizelge 2.10 MODI yöntemi için örnek uygulamanın çözümü

Temel Değişken	**(u,v) denklemi** $u_i + v_j = c_{ij}$	**Çözüm**
X11	$u_1 + v_1 = 6$	$u_1 = 0 \rightarrow v_1 = 6$
X21	$u_2 + v_1 = 5$	$v_1 = 6 \rightarrow u_2 = -1$
X22	$u_2 + v_2 = 3$	$u_2 = -1 \rightarrow v_2 = 4$
X32	$u_3 + v_2 = 5$	$v_2 = 4 \rightarrow u_3 = 1$
X33	$u_3 + v_3 = 7$	$u_3 = 1 \rightarrow v_3 = 6$

[8]

Çizelge 2.10'da görüldüğü gibi u_1 ve v_1'lerin yukarıda bulunan değerleri yardımıyla, geriye kalan u_i ve v_j 'ler hesaplanır.

Temel dışı değişkenler için, Çizelge 2.11'de görüldüğü gibi $(u_i + v_j - c_{ij})$ değerleri hesaplanır. Temel dışı değişkenler, değer atanmamış boş hücrelere karşı gelen $x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{31}$ değişkenleridir. Optimum çözümde tüm değişkenlerin (2.18) denklemi koşulunu sağlaması gerektiği halde, x_{13} değişkeni için bunun gerçekleşmediği görülmektedir. Bu durumda çözümün en iyi olmadığı ve x_{13}'ün temele alınmasıyla daha düşük maliyetli bir çözüm elde edilecektir.

Çizelge 2.11 Temel dışı değişkenler için $(u_i + v_j - c_{ij})$ değerlerinin hesaplanması

Temel Dışı Değişken	(u,v) denklemi $(u_i + v_j - c_{ij})$
X12	$u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 4 - 7 = -3$
X13	$u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 6 - 4 = 2$
X23	$u_2 + v_3 - c_{23} = -1 + 6 - 6 = -1$
X31	$u_3 + v_1 - c_{31} = 1 + 6 - 8 = -1$

[8]

Taşıma modelinde denklem sistemini çözerek u_i ve v_j ’leri bulunurken yapılan hesaplamalar Çizelge 2.12’de görüldüğü gibi, doğrudan çizelge üzerinde yapılır.

Çizelge 2.12 MODI yöntemi için taşıma çizelgesinin düzenlenmesi

$(u_i + v_j - c_{ij})$

		Depolar			
		1 (v_1)	**2 (v_2)**	**3 (v_3)**	**Fabrika Kapasiteleri**
Fabrikalar	**1 (u_1)**	$\boxed{6}$ **100**	$\boxed{7}$	$\boxed{4}$	**100**
	2 (u_2)	$\boxed{5}$ **35**	$\boxed{3}$ **145**	$\boxed{6}$	**180**
	3 (u_3)	$\boxed{8}$	$\boxed{5}$ **30**	$\boxed{7}$ **170**	**200**
	Depo Gereksinimleri	**135**	**175**	**170**	**480**

[8]

Çizelge 2.12’de satırların solunda u_i ’ler ve sütunların üzerinde ise v_j 'ler yazılır. Çizelgedeki her hücrenin sol alt köşesindeki kutucukta $(u_i + v_j - c_{ij})$ değerleri yer alır. Temel değişkenler için bu denklem sıfıra eşitlenerek, u_i ve v_j ’lerin değeri bulunur. Çizelge üzerinde hesaplamalar yapılırken $u_1 = 0$ alınır. Ardından, ilk satırda temel değişkenlere karşı gelen tüm sütunların v_j değerleri hesaplanır. Örnekte, 1. satırda sadece x_{11} temel değişkeni yer almaktadır. Bununla ilişkili v_1 değeri,

$$u_1 + v_1 - c_{11} = 0 \rightarrow 0 + v_1 - 6 = 0 \tag{2.19}$$

eşitliğinden “6” olarak bulunarak çizelgede yerine yazılır. Daha sonra v_1 ’in olduğu sütunda bulunan temel değişkenle ilişkili u_2 değeri,

$$u_2 + v_1 - c_{21} = 0 \rightarrow u_2 + 6 - 5 = 0 \tag{2.20}$$

eşitliğinden “-1” olarak elde edilir. Yukarıdaki hesaplamalara benzer olarak, u_2 ’yi kullanarak v_2, v_2 yardımıyla u_3 ve u_3 yardımıyla v_3 bulunur. Çizelge 2.13’te hesaplanan u_i ve v_j değerleri gösterilmektedir.

Sonraki adımda, temel dışı değişkenler için $(u_i + v_j - c_{ij})$ değerleri belirlenecektir. Bu değerler de bulunup kutucuklara yazıldıktan sonra, daha iyi bir çözüm olup olmadığı araştırılır. En iyi çözüme erişildiğini söyleyebilmek için, çizelgedeki her hücrenin $(u_i + v_j - c_{ij})$ değerinin sıfıra eşit veya sıfırdan küçük olması gerekir. Bu değerlerden birinin pozitif değerli olması, eldeki çözümün optimum olmadığına ve daha iyi bir çözüm olduğunu gösterir.

Çizelge 2.13 Temel değişkenlerden hareketle u_i ve v_j 'lerin bulunması

		Depolar			
		1 ($v_1 = 6$)	**2 ($v_2 = 4$)**	**3 ($v_3 = 6$)**	**Fabrika Kapasiteleri**
Fabrikalar	**1 ($u_1 = 0$)**	6 / 0 / **100**	7	4	**100**
	2 ($u_2 = -1$)	5 / 0 / **35**	3 / 0 / **145**	6	**180**
	3 ($u_3 = 1$)	8	5 / 0 / **30**	7 / 0 / **170**	**200**
	Depo Gereksinimleri	**135**	**175**	**170**	**480**

[8]

Çizelge 2.14'te görüldüğü gibi optimumluk koşulu sağlanmamaktadır. x_{13} değişkeninin temele alınması durumunda amaç fonksiyonu değerinin optimum çözüme yaklaşarak daha küçük bir değer alacağı anlamına gelmektedir.

Çizelge 2.14 Temel dışı değişkenlerin değerlendirilmesi ve temele girecek değişkenin seçilmesi

		Depolar			
		1 $(v_1 = 6)$	**2** $(v_2 = 4)$	**3** $(v_3 = 6)$	**Fabrika Kapasiteleri**
Fabrikalar	**1** $(u_1 = 0)$	$\boxed{6}$ **100** $\boxed{0}$	$\boxed{7}$ $\boxed{-3}$	$\boxed{4}$ $\boxed{2}$	**100**
	2 $(u_2 = -1)$	$\boxed{5}$ **35** $\boxed{0}$	$\boxed{3}$ **145** $\boxed{0}$	$\boxed{6}$ $\boxed{-1}$	**180**
	3 $(u_3 = 1)$	$\boxed{8}$ $\boxed{-1}$	$\boxed{5}$ **30** $\boxed{0}$	$\boxed{7}$ **170** $\boxed{0}$	**200**
	Depo Gereksinimleri	**135**	**175**	**170**	**480**

[8]

2.5 Taşıma Modelinde Yeni Temel Uygun Çözüm

Taşıma modelinin çözümünde optimum çözüm sınamasından sonraki adım, eğer optimum çözüme ulaşılmamışsa bu çözüme ulaşana kadar temel uygun çözümün bulunmasıdır. Atlama taşı veya MODI yöntemlerden birisi ile optimumluk sınaması yapıldığında, eğer en iyi çözüm elde edilmemişse, daha düşük maliyetli çözüm için hangi değişkenin temelde yer alması gerektiği de belirlenmektedir. Optimumluk sınamasından sonra cevaplanması gereken iki soru vardır:

1. Temele yeni bir değişken alındığında, çözümdeki temel değişken sayısı olan $(m+n-1)$ eşitliğinin doğru olarak kalabilmesi için, halen temelde olan bir değişkenin de sıfır değerini alarak temelden çıkması gerekir. Bu durumda temelden çıkacak değişkene karar verilmelidir.

2. Yeni temel değişkene atanacak miktarın θ olduğunu farz edersek, θ'nın en büyük değerinin belirlenmesi için, kapasite sınırlamaları ile talep gereksinimlerinin karşılıklı

dengelenmesi ve temel değişkenlerin negatif değer almaması gerekir. Bu durumda temele alınacak değişkene atanacak değerin ne olması gerektiği belirlenir.

Temelde olmayan bir değişkenin temele alınması, taşıma çizelgesindeki boş hücrelerden birisine değer atanması anlamına gelir. Her satır ve sütunda dengenin bozulmaması için, dağıtım yapılmamış hücreye bir birim dağıtım yapılması durumunda, bu hücrenin bulunduğu satırda ve sütunda dağıtım yapılmış bir hücreden birer birim azaltma yapılmalıdır. Taşıma modelinde bir değişken temele alındığında, temelden hangi değişkenin çıkıp, temeldeki değişkenlerin hangi değerleri alacaklarını hesaplarken döngü kavramı kullanılır. Yeni temel uygun çözüme ulaşılırken izlenecek adımlar aşağıdaki gibidir:

1. Temele girecek değişkenden başlamak üzere, bir döngü çizilir. Temele girecek değişken için sadece bir olası döngü vardır.

2. Döngüdeki hücreler, temele giren hücreden başlayarak sırasıyla çizelgenin sonuna kadar (+), (–), (+),… şeklinde işaretlenir.

3. Temele girecek değişkenin alabileceği en büyük değer θ olsun. θ, (–) işaretli hücrelerdeki değerlerden en küçüğü olarak seçilir.

4. Döngü üzerindeki (+) işaretli değişkenlere θ eklenip, (–) işaretli olan değişkenlerden θ çıkarılır. Döngüdeki temel değişkenlerin değeri θ değerine ve (–)(+) işaretli olmasına bağlı olarak değişirken, döngüde olmayan temel değişkenlere herhangi bir değer eklenmez ve temel değişkenin değeri değişmez. Mevcut çözümde θ değerine sahip olan temel değişken sıfır değerini alıp temelden çıkarken, yeni temel değişken θ değeriyle çizelgede yer alır. Böylece bir temel uygun çözümdeki temel değişken sayısı olan $(i+j-1)$ sayısı ile kapasite - talep dengesi korunmuş olacaktır.

Eğer $\theta = 0$ ise, temele girecek değişkenin değeri sıfır olacak ve sıfır değerine sahip (–) işaretli bir hücredeki herhangi bir değişken temelden çıkacaktır. Bu durumda bozulmuş bir temel uygun çözüm vardır.

Eğer döngüdeki hücrelerde birden fazla θ değerine sahip yani birden fazla sıfır değerine sahip (–) işaretli değişken varsa, bunlardan herhangi biri temelden çıkacak değişken olarak seçilir. Diğer değişken ise sıfır değeri ile temelde yer kalır ve yine bozulmuş bir temel uygun çözüm elde edilir.

2.5.1 Uygun Temel Çözüm Örneği

'2.3.1 Kuzeybatı Köşe Yöntemi için Bir Uygulama' bölümündeki uygulamada MODI yöntemi ile optimumluk sınaması yapan problemin optimum çözümünü bulunuz.

MODI yöntemi ile başlangıç çözümü kontrol edildiğinde, optimum çözüme ulaşılmadığı durumda eğer x_{13} temele alınırsa daha düşük maliyetli bir optimum çözüme ulaşılabileceği sonucuna Çizelge 2.14 'ten de görüldüğü gibi ulaşılmıştı. x_{13} 'e ne kadar değer atayacağımızı belirlemek bununla birlikte satır-sütun miktarları arasındaki dengeyi korumak için, x_{13} 'ten başlayan ve yine x_{13} 'te sonlanan kapalı bir döngü çizilerek çözüme başlanır. Daha sonra döngü üzerindeki hücreler sırasıyla (+) ve (-) olarak işaretlenecektir. Çizelge 2.15'te görülen ve x_{13} için çizilen döngü üzerindeki hücrelerin dizilimi

$$x_{13} \to x_{11} \to x_{21} \to x_{22} \to x_{32} \to x_{33}$$

şeklinde ifade edilebilir. θ değeri, $\theta = \{100,145,170\}$ eşitliğinden hareketle "100" olarak bulunur.

Çizelge 2.15 Temele girecek değişken x_{13} için oluşturulan döngü

		Depolar			
		1 $(v_1 = 6)$	**2** $(v_2 = 4)$	**3** $(v_3 = 6)$	**Fabrika Kapasiteleri**
Fabrikalar	**1** $(u_1 = 0)$	6 **100** 0 -	7 -3	4 2 +	**100**
	2 $(u_2 = -1)$	5 **35** 0 +	3 **145** 0 -	6 -1	**180**
	3 $(u_3 = 1)$	8 -1	5 **30** 0 +	7 **170** 0 -	**200**
	Depo Gereksinimleri	**135**	**175**	**170**	**480**

[8]

Döngü üzerindeki (+) işaretli hücrelere “100” değeri eklenip, (-) işaretli hücrelerden “100” değeri çıkarılırsa, Çizelge 2.16’da görülen yeni temel uygun çözüm elde edilir. Görüldüğü gibi x_{11} sıfır değerini alarak temelden çıkmış, x_{13} ise 100 değerini alarak temele girmiştir. Döngü üzerindeki temel değişkenlerin değeri de satır ve sütun dengesi bozulmadan değiştirilmiştir. “5” olması gereken temel değişken sayısı sağlanmaktadır. Elde edilen yeni temel uygun çözümde,

$$x_{13} = 100, x_{21} = 135, x_{22} = 45, x_{32} = 130, x_{33} = 70 \tag{2.21}$$

değerini ve kalan diğer karar değişkenleri sıfır değerini almaktadır. Başlangıç çözümünün amaç fonksiyonuna karşılık gelen toplam taşıma maliyeti 2350 TL’dir.

Çizelge 2.16 Birinci ardıştırma sonunda elde edilen yeni temel uygun çözüm

		Depolar			
		1	**2**	**3**	**Fabrika Kapasiteleri**
Fabrikalar	**1**	6	7	4 **100**	**100**
	2	5 **135**	3 **45**	6	**180**
	3	8	5 **130**	7 **70**	**200**
	Depo Gereksinimleri	**135**	**175**	**170**	**480**

[8]

Bundan sonraki aşamada yeni çözümün optimum olup olmadığı denenmektedir. Çizelge 2.17’de MODI yöntemi kullanılarak yapılan optimumluk sınaması görülmektedir. Yeni çözümde her değişken için (2.18) denklemi koşulu sağlandığı için, optimum çözüme ulaşılmıştır.

Çizelge 2.17 Temel uygun çözümün MODI yöntemi ile optimumluk sınaması

		Depolar			
		1 $(v_1 = 4)$	**2** $(v_2 = 2)$	**3** $(v_3 = 4)$	**Fabrika Kapasiteleri**
Fabrikalar	**1** $(u_1 = 0)$	$\boxed{6}$ $\boxed{-2}$	$\boxed{7}$ $\boxed{-5}$	**100** $\boxed{4}$ $\boxed{0}$	**100**
	2 $(u_2 = 1)$	**135** $\boxed{5}$ $\boxed{0}$	**45** $\boxed{3}$ $\boxed{0}$	$\boxed{6}$ $\boxed{-1}$	**180**
	3 $(u_3 = 3)$	$\boxed{8}$ $\boxed{-1}$	**130** $\boxed{5}$ $\boxed{0}$	**70** $\boxed{7}$ $\boxed{0}$	**200**
	Depo Gereksinimleri	**135**	**175**	**170**	**480**

[8]

Optimum çözümde karar değişkenlerinin aldığı değerler ve dağıtım rotası Çizelge 2.18'de özetlenmektedir.

Çizelge 2.18 Gıda şirketine ait ürün dağıtım probleminin en iyi çözümü

Dağıtım		Taşıma	Birim	Toplam
Fabrikadan	**Depoya**	Miktarı	Maliyet	Maliyet
1	3	100	4	400
2	1	135	5	675
2	2	45	3	135
3	2	130	5	650
3	3	70	7	490
			Toplam	2350

[8]

2.6 Lineer Kesirli Taşıma Problemi

Bu bölümde genel olarak Lineer Kesirli Taşıma Problemi(Linear Fractional Transportation Programming) LFP tanımlanacaktır. Bu konuda formüller LFP ile ilgili teoremleri verilecektir ve gerçek dünyadan bazı örnekler verilecektir.

2.6.1 Lineer Kesirli Problem

1960 da Hungarian matematikçisi Bela Martos hiperbolik programlama problemi olarak bilinen ve literatürde lineer kesirli probleme karşılık gelen problemi tasarlayıp formüle etmiştir.

LFP şu şekilde formüle edilir:

$$Q(x) = \frac{P(x)}{D(x)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j x_j + p_0}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0} \tag{2.22}$$

amaç fonksiyonu maksimum veya minimum olabilir.
Kısıtlar:
$m_1 \le m_2 \le m \quad n_1 \le n$ olduğu yerde

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad & i = 1, 2, ..., m_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \qquad & i = m_1 + 1, m_1 + 2, ..., m_2 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad & i = m_2 + 1, m_2 + 2, ..., m \end{aligned}\right\} \tag{2.23}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1, 2, ..., n_1 \tag{2.24}$$

$D(x) \ne 0, \forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in S$ varsayalım. Kısıt 2.23 ve Kısıt 2.24 sağlandığı durumda S uygun küme veya uygun çözüm kümesi olarak tanımlanır.

2.6.2 Temel Tanımlar

Tanım 2.1 Eğer verilen vektör $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ kısıt 2.23 ve kısıt 2.24 ‘ü sağlıyorsa x vektörüne LFP probleminin uygun çözümü denir.

Tanım 2.2 Eğer verilen (2.22) vektörü maksimum minimum LFP probleminin uygun çözümü ise ve S uygun çözüm kümesi üzerinde amaç fonksiyonu Q(x) için maksimal-minimal değeri sağlıyorsa x vektörü maksimum-minimum LFP probleminin optimal çözümüdür.

Tanım 2.3 Eğer uygun çözüm kümesi S boş küme değilse yani

$$S \neq \phi \qquad (2.25)$$

ise ve amaç fonksiyonu Q(x) nun S kümesi üzerinde sonlu alt ve üst sınırları var ise LFP çözümlenebilirdir denir.

Tanım 2.4 Eğer S çözüm kümesi boş ise yani

$$S = \phi \qquad (2.26)$$

LFP çözümsüzdür denir.

Tanım 2.5 Eğer maksimum-minimum LFP için amaç fonksiyonu Q(x) in alt-üst sınırları yok ise problem sınırsızdır denir [9].

BÖLÜM 3

ARALIKLI KESİRLİ TAŞIMA PROBLEMİNE BİR ÇÖZÜM ÖNERİSİ

3.1 Modelin Kurulması

m tane arzı ve n tane talebi olan bir kesirli taşıma problemi düşünelim. $a_i \geq 0$ i. kaynak tarafından sağlanan ve $b_j \geq 0$ j.talebin gerektirdiği miktarlardır.

c_{ij} birim taşıma maliyetini

d_{ij} taşıma için tercih edilen birim yolunu

x_{ij} i kaynağından j talebine taşınan birimlerin karar değişkeni

nı gösteren aralıklı kesirli taşıma problemi gösterilmiştir. Kesirli amaç fonksiyonunun katsayıları gerçek sayıların aralığında olan bu çalışmada aralıklı katsayılı kesirli taşıma probleminin matematiksel modeli şekilde gösterilmiştir:

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[c^L{}_{ij}, c^R{}_{ij}\right]x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[d^L{}_{ij}, d^R{}_{ij}\right]x_{ij}} \tag{3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \left[a_i^L, a_i^R\right], i = 1,...,m \tag{3.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \left[b_j^L, b_j^R\right], j = 1,...,m \tag{3.3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^L = \sum_{j=1}^{n} b_j^L \tag{3.4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^R = \sum_{j=1}^{n} b_j^R \tag{3.5}$$

$$x_{ij} \geq 0; \forall i, j \tag{3.6}$$

$\left[c^L{}_{ij}, c^R{}_{ij}\right]$ maliyetlerin aralıklı olduğunu, $\left[d^L{}_{ij}, d^R{}_{ij}\right]$ taşıma problemi için tercih edilen yolun aralıklı olduğunu belirtir. $\left[a_i^L, a_i^R\right]$ arzın aralıklı olduğunu, $\left[b_j^L, b_j^R\right]$ talebin aralıklı olduğunu belirtir. $c_{ij}^L, d_{ij}^L, c_{ij}^R, d_{ij}^R, a_i^L, b_i^L, a_i^R, b_i^R$ sırasıyla $c^L{}_{ij}, c^R{}_{ij}$ birim taşıma maliyetinin, $d^L{}_{ij}, d^R{}_{ij}$ taşıma için tercih edilen birim yolunun, a_i^L, a_i^R i. kaynağın ve b_j^L, b_j^R j.talebin alt ve üst sınırlarıdır.

Problem minimizasyon problemi olduğu için, kesirli amaç fonksiyonundaki aralıklar $\left[c^L{}_{ij}, c^R{}_{ij}\right]$ ve $\left[d^L{}_{ij}, d^R{}_{ij}\right]$ şekildeki gibi gösterilir:

$$\left[c^L{}_{ij}, c^R{}_{ij}\right] = c^L{}_{ij} + \theta_{ij}\left(c^R{}_{ij} - c^L{}_{ij}\right), \quad 0 \leq \theta_{ij} \leq 1 \quad , \; i = 1,...,m; \; j = 1,...,n \tag{3.7}$$

$$\left[d^L{}_{ij}, d^R{}_{ij}\right] = d^L{}_{ij} + \lambda_{ij}\left(d^R{}_{ij} - d^L{}_{ij}\right), \quad 0 \leq \lambda_{ij} \leq 1 \quad , \; i = 1,...,m; \; j = 1,...,n \tag{3.8}$$

$$\left[a_i^L, a_i^R\right] = a_i^L + \gamma_i (a_i^R - a_i^L), i = 1,...,m \tag{3.9}$$

$$\left[b_j^L, b_j^R\right] = b_j^L + \beta_j (b_j^R - b_j^L), i = 1,...,m \tag{3.10}$$

$$Z = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^L + \theta_{ij}\left(c_{ij}^R - c_{ij}^L\right) x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}^L + \lambda_{ij}\left(d_{ij}^R - d_{ij}^L\right) x_{ij}} \right\} \tag{3.11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i^L + \gamma_i (a_i^R - a_i^L) \tag{3.12}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j^L + \beta_i (b_j^R - b_j^L) \tag{3.13}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^L = \sum_{j=1}^{n} b_j^L \tag{3.14}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^R = \sum_{j=1}^{n} b_j^R \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} & x_{ij} \geq 0 \\ & \theta_{ij}, \lambda_{ij} \in [0,1] \end{aligned} \qquad \forall i, j \tag{3.16}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^L + \theta_{ij} \left(c_{ij}^R - c_{ij}^L \right) x_{ij} \geq 0 \tag{3.17}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij}^L + \lambda_{ij} \left(d_{ij}^R - d_{ij}^L \right) x_{ij} \geq 0 \tag{3.18}$$

(3.1) amaç fonksiyonu için, ilk taylor polinomu $X^{(k)} = \left(x_{ij}^{(k)}, \theta_{ij}^{(k)}, \lambda_{ij}^{(k)}, \gamma_i^{(k)}, \beta_j^{(k)} \right)$ şeklindedir. Sonraki yapı şu şekilde kurulur:

$$\begin{aligned} MinZ^{(k)} &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left. \frac{\partial Z}{\partial x_{ij}} \right|_{X^{(0)}} \left(x_{ij} - x_{ij}^{(k)} \right) \\ &+ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left. \frac{\partial Z}{\partial \theta_{ij}} \right|_{X^{(0)}} \left(\theta_{ij} - \theta_{ij}^{(k)} \right) \\ &+ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left. \frac{\partial Z}{\partial \lambda_{ij}} \right|_{X^{(0)}} \left(\lambda_{ij} - \lambda_{ij}^{(k)} \right) \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i^L + \gamma_i (a_i^R - a_i^L) \tag{3.20}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j^L + \beta_i (b_j^R - b_j^L) \tag{3.21}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^L = \sum_{j=1}^{n} b_j^L \tag{3.22}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^R = \sum_{j=1}^{n} b_j^R \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} & x_{ij} \geq 0 \\ & \theta_{ij}, \lambda_{ij} \in [0,1] \end{aligned} \quad \forall i, j \tag{3.24}$$

İlk uygun temel çözüme $X^{(0)} = \left(x_{ij}^{(0)}, \theta_{ij}^{(0)}, \lambda_{ij}^{(0)}, \gamma_i^{(0)}, \beta_j^{(0)}\right)$ klasik taşıma probleminin kuzey batı köşesi yöntemiyle ulaşılır veya taşıma problemi için $\theta_{ij}^{(0)}, \lambda_{ij}^{(0)}$ sürekli olduğu yerde $\left(0 \leq \theta_{ij}^{(0)} \leq 1, 0 \leq \lambda_{ij}^{(0)} \leq 1\right)$ bilinen diğer yöntemler kullanılarak çözüme ulaşılır.

Aralıklı Kesirli Taşıma Problemi için $X^{(k)} = X^{(0)}$ çözülürse çözüm $X^{(2.1)} = \left(x_{ij}^{(2.1)}, \theta_{ij}^{(2.1)}, \lambda_{ij}^{(2.1)}, \gamma_i^{(2.1)}, \beta_j^{(2.1)}\right)$ elde edilir. Problemin amaç fonksiyonu $X^{(2.1)}$ noktası için yeniden düzenlenir. Diğer bir deyişle (3.1) kesirli amaç fonksiyonu yeni noktası $X^{(2.1)}$ de tekrar 1. Taylor polinomuna genişletilir. Problemin çözümü yeniden düzenlenmiş amaç fonksiyonuyla optimal değere yaklaşır. Daha iyi çözüm elde etmek için problemin $\left\{X^{(k)} = \left(x_{ij}^{(k)}, \theta_{ij}^{(k)}, \lambda_{ij}^{(k)}, \gamma_i^{(k)}, \beta_j^{(k)}\right)\right\}, (k = 0,1,2,3,...)$ çözümleri

$\left(x_{ij}^{(k)}, \theta_{ij}^{(k)}, \lambda_{ij}^{(k)}, \gamma_i^{(k)}, \beta_j^{(k)}\right) = \left(x_{ij}^{(k+1)}, \theta_{ij}^{(k+1)}, \lambda_{ij}^{(k+1)}, \gamma_i^{(k+1)}, \beta_j^{(k+1)}\right)$ olana kadar devam edilir. Elde edilen son $X^{(k)} = \left(x_{ij}^{(k)}, \theta_{ij}^{(k)}, \lambda_{ij}^{(k)}, \gamma_i^{(k)}, \beta_j^{(k)}\right)$ çözümü problemin çözümü olur.

Problemi ele alalım:

$$MinZ_1^R = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^R x_{ij} \tag{3.25}$$

$$MinZ_1^C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{c_{ij}^L + c_{ij}^R}{2}\right) x_{ij} \tag{3.26}$$

$$MaxZ_2^L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} d_{ij}^L x_{ij} \tag{3.27}$$

$$MaxZ_2^C = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{d_{ij}^L + d_{ij}^R}{2}\right)x_{ij} \tag{3.28}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \left[a_i^L, a_i^R\right], i = 1,...,m \tag{3.29}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \left[b_j^L, b_j^R\right], j = 1,...,m \tag{3.30}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^L = \sum_{j=1}^{n} b_j^L \tag{3.31}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^R = \sum_{j=1}^{n} b_j^R \tag{3.32}$$

$$x_{ij} \geq 0; \forall i, j \tag{3.33}$$

Probleme çözüm üretmek için, $\mu\left(Z_1^R\right), \mu\left(Z_1^C\right), \mu\left(Z_2^L\right)$ ve $\mu\left(Z_2^C\right)$; Z_1^R, Z_1^C, Z_2^L ve Z_2^C nin sırasıyla üyelik fonksiyonu olma kısıtları altında Z_1^R, Z_1^C, Z_2^L ve Z_2^C nin lineer üyelik fonksiyonlarının toplamı maksimize edilir. Problemi yeniden düzenlersek,

$$Max\left(\mu\left(Z_1^R\right) + \mu\left(Z_1^C\right) + \mu\left(Z_2^L\right) + \mu\left(Z_2^C\right)\right) \tag{3.34}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \left[a_i^L, a_i^R\right], i = 1,...,m \tag{3.35}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \left[b_j^L, b_j^R\right], j = 1,...,m \tag{3.36}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^L = \sum_{j=1}^{n} b_j^L \tag{3.37}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^R = \sum_{j=1}^{n} b_j^R \tag{3.38}$$

$$x_{ij} \geq 0; \forall i, j \tag{3.39}$$

[10]

Taşıma probleminin modeli kurulduktan sonra taşıma probleminin algoritması aşağıdaki şekilde sunulmuştur:

0. Problemin modelini kurduktan sonra, birinci dereceden Taylor polinom yaklaşımı kuzeybatı köşe yönteminde kullanılır ve problemin uygun çözümleri $\left\{X^{(k)}=\left(x_{ij}^{(k)},\theta_{ij}^{(k)},\lambda_{ij}^{(k)},\gamma_{i}^{(k)},\beta_{j}^{(k)}\right)\right\},(k=0,1,2,3,...)$ vektörü şeklinde elde edilir. Böylece,başlangıç çözümü için $k=0$ alınarak oluşturulan $X^{(0)}=\left(x_{ij}^{(0)},\theta_{ij}^{(0)},\lambda_{ij}^{(0)},\gamma_{i}^{(0)},\beta_{j}^{(0)}\right)$ vektörü elde edilir.
1. Yeni uygun çözüm elde etmek amacıyla, kesirli amaç fonksiyonları başlangıç çözümü $X^{(0)}=\left(x_{ij}^{(0)},\theta_{ij}^{(0)},\lambda_{ij}^{(0)},\gamma_{i}^{(0)},\beta_{j}^{(0)}\right)$ civarinda birinci dereceden Taylor serilerine açılır ve lineer olmayan amaç fonksiyonu lineer amaç fonksiyonuna çevrilir. Daha sonra Lineer programlama problemi kurulur ve tekrar çözülür.
2. Kesirli amaç fonksiyonları, uygun çözümü elde etmek amacıyla $\left\{X^{(k)}=\left(x_{ij}^{(k)},\theta_{ij}^{(k)},\lambda_{ij}^{(k)},\gamma_{i}^{(k)},\beta_{j}^{(k)}\right)\right\},(k=0,1,2,3,...)$ vektöründe k değerleri yerine koyularak Taylor serilerine açılır ve iterasyon yapmaya devam edilir.
3. Elde edilen çözümler $\left(x_{ij}^{(k)},\theta_{ij}^{(k)},\lambda_{ij}^{(k)},\gamma_{i}^{(k)},\beta_{j}^{(k)}\right)=\left(x_{ij}^{(k+1)},\theta_{ij}^{(k+1)},\lambda_{ij}^{(k+1)},\gamma_{i}^{(k+1)},\beta_{j}^{(k+1)}\right)$ ise iterasyon durdurulur ve problemin optimal çözümü $X^{(k)}=\left(x_{ij}^{(k)},\theta_{ij}^{(k)},\lambda_{ij}^{(k)},\gamma_{i}^{(k)},\beta_{j}^{(k)}\right)$ olarak elde edilir. Eğer $\left(x_{ij}^{(k)},\theta_{ij}^{(k)},\lambda_{ij}^{(k)},\gamma_{i}^{(k)},\beta_{j}^{(k)}\right)\neq\left(x_{ij}^{(k+1)},\theta_{ij}^{(k+1)},\lambda_{ij}^{(k+1)},\gamma_{i}^{(k+1)},\beta_{j}^{(k+1)}\right)$ ise 2. adıma dönülerek işlemler tekrarlanır.

3.2 Modelin Bir Uygulaması

Metal Otomotiv A.Ş. 'de başka otomotiv şirketlerinde montaj yapılması amacıyla tek türde yedek parçalar üretilip bu şirketlere satılmaktadır. Metal Otomotiv A.Ş. 'de üretilen bu yedek parçalar üretildikten sonra Türkiye'nin farklı yerlerinde bulunan depolara dağıtılıyor. Yedek parçalar Metal Otomotiv A.Ş. 'de Adana, İzmir, İstanbul ve Ankara olmak üzere 4 ayrı fabrikada üretiliyor, üretilen bu parçalar Konya, Gaziantep ve Trabzon 3 ayrı depoya dağıtılıyor.

Depolardaki üretilen ürün stokları ve fabrikalardaki ürün kapasiteleri her depo ve fabrikalar için belirli aralıklarla belirlenmiştir. Ayrıca fabrikalardan depolara olan birim taşıma maliyetleri de aralıklı ve kesirli olarak belirlenmiştir.

Fabrikalar ve depolar arasındaki dağıtım planını bulabilen taşıma problemi modelini kurarak taşıma maliyetlerini minimum yapan optimum çözümü bulunuz.

Çizelge 3.1 Aralıklı kesirli taşıma problemi örneği

	Adana	**İzmir**	**İstanbul**	**Ankara**	
Konya	[6,10] [7,11]	[9,12] [10,14]	[10,13] [6,8]	[7,10] [4,8]	a_1=[10,14]
Gaziantep	[3,8] [9,12]	[2,5] [1,10]	[6,9] [12,20]	[10,12] [4,8]	a_2=[16,20]
Trabzon	[7,10] [4,6]	[10,14] [2,5]	[9,12] [2,4]	[6,10] [8,10]	a_3=[10,22]
	b_1=[2,5]	b_2=[20,24]	b_3=[10,15]	b_4=[4,12]	

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^L = \sum_{j=1}^{n} b_j^L \,, \quad \sum_{i=1}^{m} a_i^R = \sum_{j=1}^{n} b_j^R \tag{3.40}$$

olduğu için problem dengeli taşıma problemidir. $\left[a_i^L, a_i^R\right]$ sırasıyla arz alt ve üst sınırları, $\left[b_j^L, b_j^R\right]$ talep alt üst sınırları ifade eder. Arz ve talepler de aralıklı oldukları için verilen kesirli taşıma problemi şu şekilde modellenir:

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 4x_{37} = 10\\
&x_5 + x_6 + x_7 + x_8 - 4x_{38} = 16\\
&x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} - 12x_{39} = 10\\
&x_1 + x_5 + x_9 - 3x_{40} = 2\\
&x_2 + x_6 + x_{10} - 4x_{41} = 20\\
&x_3 + x_7 + x_{11} - 5x_{42} = 10\\
&x_4 + x_8 + x_{12} - 8x_{43} = 4
\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
&(X_{11} = x_1), (X_{12} = x_2), (X_{13} = x_3), (X_{14} = x_4)\\
&(X_{21} = x_5), (X_{22} = x_6), (X_{23} = x_7), (X_{24} = x_8)\\
&(X_{31} = x_9), (X_{32} = x_{10}), (X_{33} = x_{11}), (X_{34} = x_{12})
\end{aligned} \tag{3.42}$$

$$x_1, x_2, ..., x_{42}, x_{43} \geq 0 \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned}
&(\theta_{11} = x_{13} \leq 1), (\theta_{12} = x_{14} \leq 1), (\theta_{13} = x_{15} \leq 1), (\theta_{14} = x_{16} \leq 1)\\
&(\theta_{21} = x_{17} \leq 1), (\theta_{22} = x_{18} \leq 1), (\theta_{23} = x_{19} \leq 1), (\theta_{24} = x_{20} \leq 1),\\
&(\theta_{31} = x_{21} \leq 1), (\theta_{32} = x_{22} \leq 1), (\theta_{33} = x_{23} \leq 1), (\theta_{34} = x_{24} \leq 1)
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}
&(\lambda_{11} = x_{25} \leq 1), (\lambda_{12} = x_{26} \leq 1), (\lambda_{13} = x_{27} \leq 1), (\lambda_{14} = x_{28} \leq 1)\\
&(\lambda_{21} = x_{29} \leq 1), (\lambda_{22} = x_{30} \leq 1), (\lambda_{23} = x_{31} \leq 1), (\lambda_{24} = x_{32} \leq 1)\\
&(\lambda_{31} = x_{33} \leq 1), (\lambda_{32} = x_{34} \leq 1), (\lambda_{33} = x_{35} \leq 1), (\lambda_{34} = x_{36} \leq 1)
\end{aligned} \tag{3.45}$$

$$x_{37}, x_{38}, x_{39}, x_{40}, x_{41}, x_{42}, x_{43} \leq 1 \tag{3.46}$$

Modelde görüldüğü gibi 31 kısıt 43 değişken vardır. Problemin başlangıç koşulları Kuzey Batı köşesi Yöntemine göre şu şekilde seçilmiştir:

Çizelge 3.2 Kuzeybatı köşesi yönteminin modele uygulanması

	Adana	**İzmir**	**İstanbul**	**Ankara**	
Konya	[6,10] 2 [7,11]	[9,12] 8 [10,14]	[10,13] [6,8]	[7,10] [4,8]	a_1=[10,14]
Gaziantep	[3,8] [9,12]	[2,5] 12 [1,10]	[6,9] 4 [12,20]	[10,12] [4,8]	a_2=[16,20]
Trabzon	[7,10] [4,6]	[10,14] [2,5]	[9,12] 6 [2,4]	[6,10] 4 [8,10]	a_3=[10,22]
	b_1=[2,5]	b_2=[20,24]	b_3=[10,15]	b_4=[4,12]	

$$\begin{aligned} & X_{11}=2, X_{12}=8, X_{22}=12, X_{23}=4, X_{33}=6, X_{34}=4 \\ & \theta_{11},\theta_{12},\theta_{13},\theta_{14},\theta_{21},\theta_{22},\theta_{23},\theta_{24},\theta_{31},\theta_{32},\theta_{33},\theta_{34}=1 \\ & \lambda_{11},\lambda_{12},\lambda_{13},\lambda_{14},\lambda_{21},\lambda_{22},\lambda_{23},\lambda_{24},\lambda_{31},\lambda_{32},\lambda_{33},\lambda_{34}=1 \end{aligned} \tag{3.47}$$

$$x_{37}, x_{38}, x_{39}, x_{40}, x_{41}, x_{42}, x_{43}=0 \tag{3.48}$$

Amaç fonksiyonu ise şu şekildedir:

$$Z=\frac{\begin{array}{l}(6+4\theta_{11})X_{11}+(9+3\theta_{12})X_{12}+(10+3\theta_{13})X_{13}+(7+3\theta_{14})X_{14}+(3+5\theta_{21})X_{21}+(2+3\theta_{22})X_{22}\\+(6+3\theta_{23})X_{23}+(10+2\theta_{24})X_{24}+(7+3\theta_{31})X_{31}+(10+4\theta_{32})X_{32}+(9+3\theta_{33})X_{33}+(6+4\theta_{34})X_{34}\end{array}}{\begin{array}{l}(7+4\lambda_{11})X_{11}+(10+4\lambda_{12})X_{12}+(6+2\lambda_{13})X_{13}+(4+4\lambda_{14})X_{14}+(9+3\lambda_{21})X_{21}+(1+9\lambda_{22})X_{22}\\+(12+8\lambda_{23})X_{23}+(4+4\lambda_{24})X_{24}+(4+2\lambda_{31})X_{31}+(2+3\lambda_{32})X_{32}+(2+2\lambda_{33})X_{33}+(8+2\lambda_{34})X_{34}\end{array}} \tag{3.49}$$

Yukarıdaki başlangıç değerleri modele yazılıp Taylor serisiyle iterasyon yapılsın:

Amaç fonksiyonunda $\begin{matrix} pay = 324 \\ Payda = 398 \end{matrix}$ bulunur.

$$\frac{\partial z}{\partial x_{11}} = \frac{(6+4\theta_{11})398-(7+4\lambda_{11})324}{398^2} = \frac{416}{398^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{12}} = \frac{(9+3\theta_{12})398-(10+4\lambda_{12})324}{398^2} = \frac{240}{398^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{13}} = \frac{(10+3\theta_{13})398-(6+2\lambda_{13})324}{398^2} = \frac{2582}{398^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{14}} = \frac{(7+3\theta_{14})398-(4+4\lambda_{14})324}{398^2} = \frac{1388}{398^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{21}} = \frac{(3+5\theta_{21})398-(9+\lambda_{21})324}{398^2} = \frac{-704}{398^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{22}} = \frac{(2+3\theta_{22})398-(1+9\lambda_{22})324}{398^2} = \frac{-1250}{398^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{23}} = \frac{(6+3\theta_{23})398-(12+8\lambda_{23})324}{398^2} = \frac{-2898}{398^2} \tag{3.50}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{24}} = \frac{(10+2\theta_{24})398-(4+4\lambda_{24})324}{398^2} = \frac{2184}{398^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{31}} = \frac{(7+3\theta_{31})398-(4+2\lambda_{31})324}{398^2} = \frac{2036}{398^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{32}} = \frac{(10+4\theta_{32})398-(2+3\lambda_{32})324}{398^2} = \frac{3952}{398^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{33}} = \frac{(9+3\theta_{33})398-(2+2\lambda_{33})324}{398^2} = \frac{3480}{398^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{34}}=\frac{(6+4\theta_{34})398-\left(8+2\lambda_{34}\right)324}{398^2}=\frac{740}{398^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta_{11}}=\frac{4X_{11}398}{398^2}=\frac{3184}{398^2},\ \frac{\partial z}{\partial \theta_{12}}=\frac{3X_{12}398}{398^2}=\frac{9552}{398^2},\ \frac{\partial z}{\partial \theta_{13}}=\frac{3X_{13}398}{398^2}=0,\ \frac{\partial z}{\partial \theta_{14}}=\frac{3X_{14}398}{398^2}=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta_{21}}=\frac{5X_{21}398}{398^2}=0,\ \frac{\partial z}{\partial \theta_{22}}=\frac{3X_{22}398}{398^2}=\frac{14328}{398^2},\ \frac{\partial z}{\partial \theta_{23}}=\frac{3X_{23}398}{398^2}=\frac{4776}{398^2}, \tag{3.51}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta_{24}}=\frac{2X_{24}398}{398^2}=0\ \frac{\partial z}{\partial \theta_{31}}=\frac{3X_{31}398}{398^2}=0,\ \frac{\partial z}{\partial \theta_{32}}=\frac{4X_{32}398}{398^2}=0,\ \frac{\partial z}{\partial \theta_{33}}=\frac{3X_{33}398}{398^2}=\frac{7164}{398^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta_{34}}=\frac{4X_{34}398}{398^2}=\frac{6368}{398^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda_{11}}=\frac{-4x_{11}324}{398^2}=\frac{-2592}{398^2},\ \frac{\partial z}{\partial \lambda_{12}}=\frac{-4x_{12}324}{398^2}=\frac{-10368}{398^2},\ \frac{\partial z}{\partial \lambda_{13}}=\frac{-2x_{13}324}{398^2}=0,$$

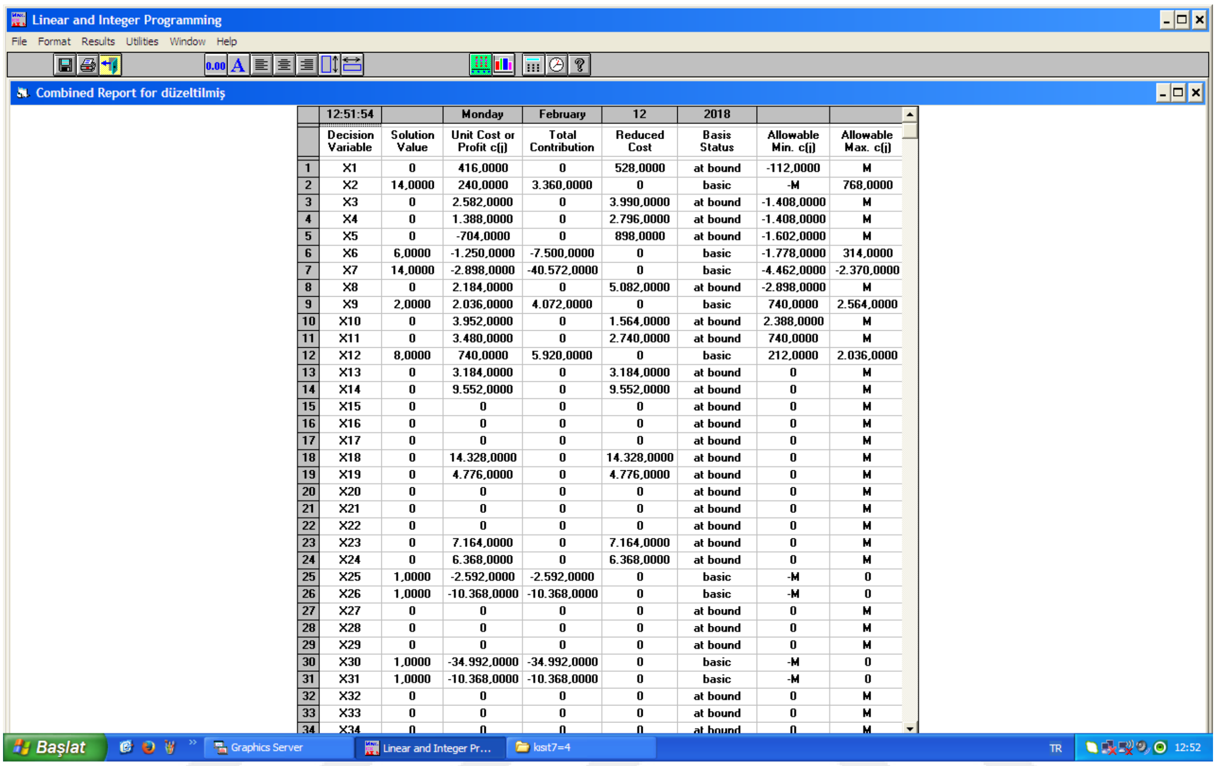
$$\frac{\partial z}{\partial \lambda_{14}}=\frac{-4x_{14}324}{398^2}=0,\ \frac{\partial z}{\partial \lambda_{21}}=\frac{-3x_{21}324}{398^2}=0,\ \frac{\partial z}{\partial \lambda_{22}}=\frac{-9x_{21}324}{398^2}=\frac{-34992}{398^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda_{23}}=\frac{-8x_{23}324}{398^2}=\frac{-10368}{398^2},\ \frac{\partial z}{\partial \lambda_{24}}=\frac{-4x_{24}324}{398^2}=0,\ \frac{\partial z}{\partial \lambda_{31}}=\frac{-2x_{31}324}{398^2}=0, \tag{3.52}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda_{32}}=\frac{-3x_{32}324}{398^2}=0,\ \frac{\partial z}{\partial \lambda_{33}}=\frac{-2x_{33}324}{398^2}=\frac{-3888}{398^2},\ \frac{\partial z}{\partial \lambda_{34}}=\frac{-2x_{34}324}{398^2}=\frac{-2592}{398^2}$$

Bu değerler kullanılarak WINQSB programı yardımıyla çözüm yapıldıktan sonra sonuçlar Çizelge 3.3’ te gösterilmiştir:

Çizelge 3.3 Birinci iterasyon çıktıları



	12:51:54		Monday	February	12	2018		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	0	416,0000	0	528,0000	at bound	-112,0000	M
2	X2	14,0000	240,0000	3.360,0000	0	basic	-M	768,0000
3	X3	0	2.582,0000	0	3.990,0000	at bound	-1.408,0000	M
4	X4	0	1.388,0000	0	2.796,0000	at bound	-1.408,0000	M
5	X5	0	-704,0000	0	898,0000	at bound	-1.602,0000	M
6	X6	6,0000	-1.250,0000	-7.500,0000	0	basic	-1.778,0000	314,0000
7	X7	14,0000	-2.898,0000	-40.572,0000	0	basic	-4.462,0000	-2.370,0000
8	X8	0	2.184,0000	0	5.082,0000	at bound	-2.898,0000	M
9	X9	2,0000	2.036,0000	4.072,0000	0	basic	740,0000	2.564,0000
10	X10	0	3.952,0000	0	1.564,0000	at bound	2.388,0000	M
11	X11	0	3.480,0000	0	2.740,0000	at bound	740,0000	M
12	X12	8,0000	740,0000	5.920,0000	0	basic	212,0000	2.036,0000
13	X13	0	3.184,0000	0	3.184,0000	at bound	0	M
14	X14	0	9.552,0000	0	9.552,0000	at bound	0	M
15	X15	0	0	0	0	at bound	0	M
16	X16	0	0	0	0	at bound	0	M
17	X17	0	0	0	0	at bound	0	M
18	X18	0	14.328,0000	0	14.328,0000	at bound	0	M
19	X19	0	4.776,0000	0	4.776,0000	at bound	0	M
20	X20	0	0	0	0	at bound	0	M
21	X21	0	0	0	0	at bound	0	M
22	X22	0	0	0	0	at bound	0	M
23	X23	0	7.164,0000	0	7.164,0000	at bound	0	M
24	X24	0	6.368,0000	0	6.368,0000	at bound	0	M
25	X25	1,0000	-2.592,0000	-2.592,0000	0	basic	-M	0
26	X26	1,0000	-10.368,0000	-10.368,0000	0	basic	-M	0
27	X27	0	0	0	0	at bound	0	M
28	X28	0	0	0	0	at bound	0	M
29	X29	0	0	0	0	at bound	0	M
30	X30	1,0000	-34.992,0000	-34.992,0000	0	basic	-M	0
31	X31	1,0000	-10.368,0000	-10.368,0000	0	basic	-M	0
32	X32	0	0	0	0	at bound	0	M
33	X33	0	0	0	0	at bound	0	M
34	X34	0	0	0	0	at bound	0	M

Çizelge 3.3 Birinci iterasyon çıktıları (devamı)

Linear and Integer Programming

Combined Report for düzeltilmiş

	12:51:54		Monday	February	12	2018		
33	X33	0	0	0	0	at bound	0	M
34	X34	0	0	0	0	at bound	0	M
35	X35	1,0000	-3.888,0000	-3.888,0000	0	basic	-M	0
36	X36	1,0000	-2.592,0000	-2.592,0000	0	basic	-M	0
37	X37	1,0000	0	0	0	basic	-M	5.632,0000
38	X38	1,0000	0	0	0	basic	-M	11.592,0000
39	X39	0	0	0	5.920,0000	at bound	-5.920,0000	M
40	X40	0	0	0	3.888,0000	at bound	-3.888,0000	M
41	X41	0	0	0	6.592,0000	at bound	-6.592,0000	M
42	X42	0,8000	0	0	0	basic	-7.820,0000	2.640,0000
43	X43	0,5000	0	0	0	basic	-4.224,0000	10.368,0000
	Objective	Function	(Min.) =	-99.520,0000	(Note:	Alternate	Solution	Exists!!)
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	10,0000	=	10,0000	0	-1.408,0000	6,0000	11,0000
2	C2	16,0000	=	16,0000	0	-2.898,0000	12,0000	17,0000
3	C3	10,0000	=	10,0000	0	740,0000	6,0000	14,0000
4	C4	2,0000	=	2,0000	0	1.296,0000	0	6,0000
5	C5	20,0000	=	20,0000	0	1.648,0000	19,0000	24,0000
6	C6	10,0000	=	10,0000	0	0	9,0000	14,0000
7	C7	4,0000	=	4,0000	0	0	0	8,0000
8	C8	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
9	C9	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
10	C10	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
11	C11	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
12	C12	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
13	C13	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
14	C14	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
15	C15	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
16	C16	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
17	C17	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
18	C18	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
19	C19	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
20	C20	1,0000	<=	1,0000	0	-2.592,0000	0	M
21	C21	1,0000	<=	1,0000	0	-10.368,0000	0	M

Yukarıdaki 1. iterasyon sonuçları modele uygulanarak Taylor serisiyle 2. iterasyon yapılmıştır:

Amaç fonksiyonunun $\begin{matrix} pay = 284 \\ Payda = 624 \end{matrix}$ bulunur.

$$\frac{\partial z}{\partial x_{11}} = \frac{(6+4\theta_{11})624-(7+4\lambda_{11})284}{624^2} = \frac{620}{624^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{12}} = \frac{(9+3\theta_{12})624-(10+4\lambda_{12})284}{624^2} = \frac{1640}{624^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{13}} = \frac{(10+3\theta_{13})624-(6+2\lambda_{13})284}{624^2} = \frac{4536}{624^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{14}} = \frac{(7+3\theta_{14})624-(4+4\lambda_{14})284}{624^2} = \frac{3232}{624^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{21}} = \frac{(3+5\theta_{21})624-\left(9+3\lambda_{21}\right)284}{624^2} = \frac{-684}{624^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{22}} = \frac{(2+3\theta_{22})624-\left(1+9\lambda_{22}\right)284}{624^2} = \frac{-1592}{624^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{23}} = \frac{(6+3\theta_{23})624-\left(12+8\lambda_{23}\right)284}{624^2} = \frac{-1936}{624^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{24}} = \frac{(10+2\theta_{24})624-\left(4+4\lambda_{24}\right)284}{624^2} = \frac{5104}{624^2} \tag{3.53}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{31}} = \frac{(7+3\theta_{31})624-\left(4+2\lambda_{31}\right)284}{624^2} = \frac{3232}{624^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{32}} = \frac{(10+4\theta_{32})624-\left(2+3\lambda_{32}\right)284}{624^2} = \frac{5672}{624^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{33}} = \frac{(9+3\theta_{33})624-\left(2+2\lambda_{33}\right)284}{624^2} = \frac{4480}{624^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{34}} = \frac{(6+4\theta_{34})624-\left(8+2\lambda_{34}\right)284}{624^2} = \frac{904}{624^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta_{11}} = \frac{4X_{11}624}{624^2} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta_{12}} = \frac{3X_{12}624}{624^2} = \frac{26208}{624^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta_{13}} = \frac{3X_{13}624}{624^2} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta_{14}} = \frac{3X_{14}624}{624^2} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta_{21}} = \frac{5X_{21}624}{624^2} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta_{22}} = \frac{3X_{22}624}{624^2} = \frac{11232}{624^2} \tag{3.54}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta_{23}} = \frac{3X_{23}624}{624^2} = \frac{26208}{624^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta_{24}} = \frac{2X_{24}624}{624^2} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta_{31}} = \frac{3X_{31}624}{624^2} = \frac{3744}{624^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta_{32}} = \frac{4X_{32}624}{624^2} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta_{33}} = \frac{3X_{33}624}{624^2} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta_{34}} = \frac{4X_{34}624}{624^2} = \frac{19968}{624^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda_{11}} = \frac{-4x_{11}284}{624^2} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial \lambda_{12}} = \frac{-4x_{12}284}{624^2} = \frac{-15904}{624^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial \lambda_{13}} = \frac{-2x_{13}284}{624^2} = 0,$$

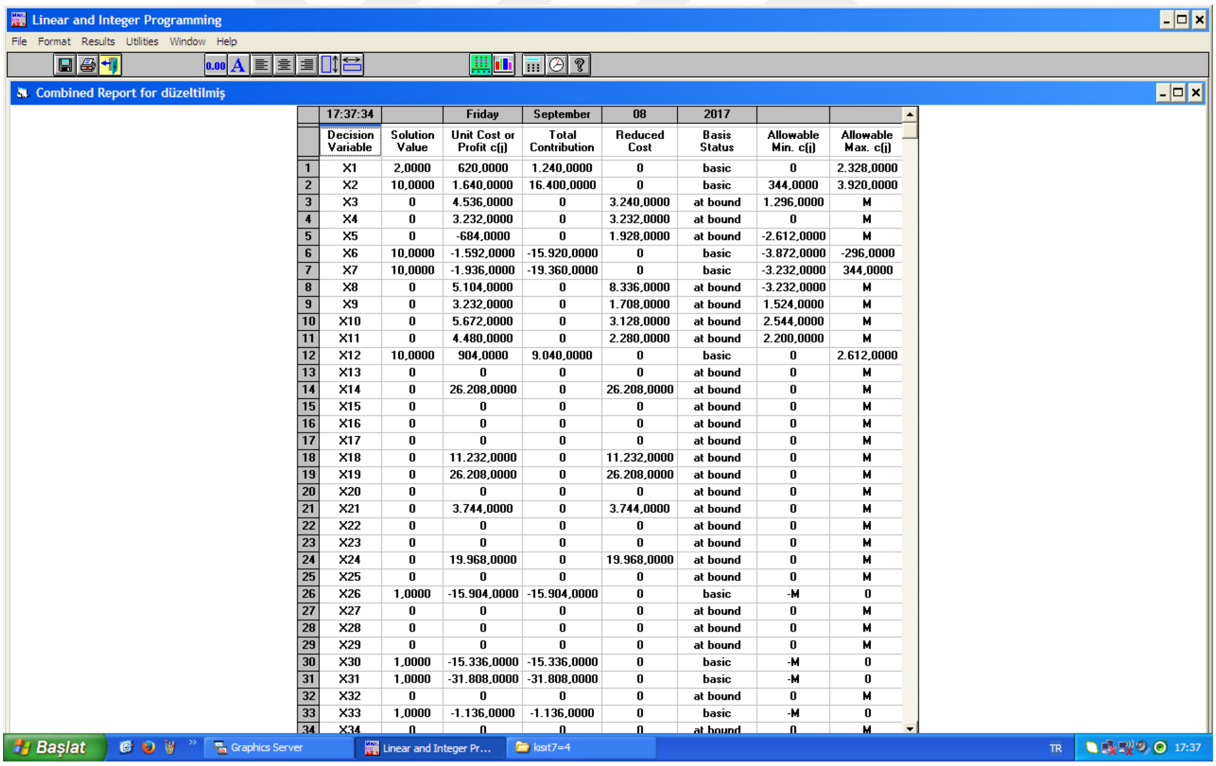
$$\frac{\partial z}{\partial \lambda_{14}} = \frac{-4x_{14}284}{624^2} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial \lambda_{21}} = \frac{-3x_{21}284}{624^2} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda_{22}} = \frac{-9x_{21}284}{624^2} = \frac{-15336}{624^2}, \qquad (3.55)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda_{23}} = \frac{-8x_{23}284}{624^2} = \frac{-31808}{624^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial \lambda_{24}} = \frac{-4x_{24}284}{624^2} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial \lambda_{31}} = \frac{-2x_{31}284}{624^2} = \frac{-1136}{624^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda_{32}} = \frac{-3x_{32}284}{624^2} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial \lambda_{33}} = \frac{-2x_{33}284}{624^2} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial \lambda_{34}} = \frac{-2x_{34}284}{624^2} = \frac{-4544}{624^2}$$

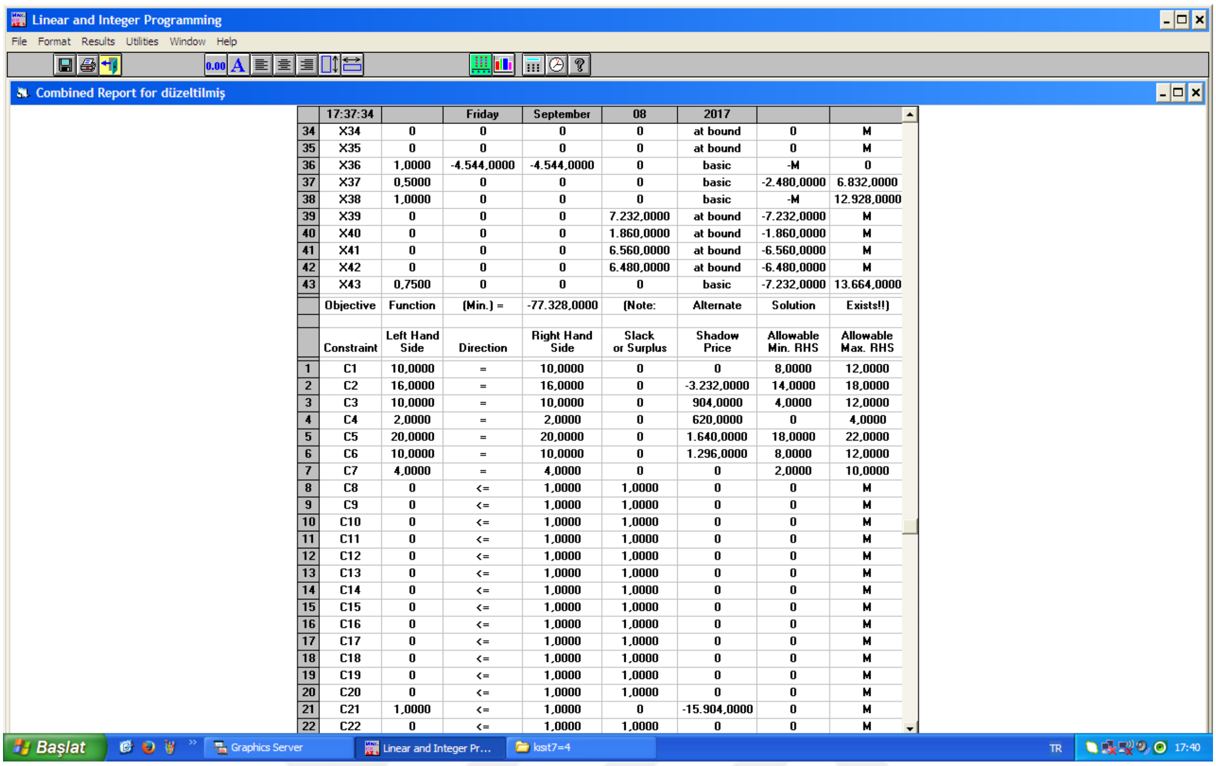
Bu değerler kullanılarak WINQSB programı yardımıyla çözüm yapıldıktan sonra sonuçlar Çizelge 3.' te gösterilmiştir:

Çizelge 3.4 İkinci iterasyon çıktıları



	17:37:34		Friday	September	08	2017		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	2,0000	620,0000	1.240,0000	0	basic	0	2.328,0000
2	X2	10,0000	1.640,0000	16.400,0000	0	basic	344,0000	3.920,0000
3	X3	0	4.536,0000	0	3.240,0000	at bound	1.296,0000	M
4	X4	0	3.232,0000	0	3.232,0000	at bound	0	M
5	X5	0	-684,0000	0	1.928,0000	at bound	-2.612,0000	M
6	X6	10,0000	-1.592,0000	-15.920,0000	0	basic	-3.872,0000	-296,0000
7	X7	10,0000	-1.936,0000	-19.360,0000	0	basic	-3.232,0000	344,0000
8	X8	0	5.104,0000	0	8.336,0000	at bound	-3.232,0000	M
9	X9	0	3.232,0000	0	1.708,0000	at bound	1.524,0000	M
10	X10	0	5.672,0000	0	3.128,0000	at bound	2.544,0000	M
11	X11	0	4.480,0000	0	2.280,0000	at bound	2.200,0000	M
12	X12	10,0000	904,0000	9.040,0000	0	basic	0	2.612,0000
13	X13	0	0	0	0	at bound	0	M
14	X14	0	26.208,0000	0	26.208,0000	at bound	0	M
15	X15	0	0	0	0	at bound	0	M
16	X16	0	0	0	0	at bound	0	M
17	X17	0	0	0	0	at bound	0	M
18	X18	0	11.232,0000	0	11.232,0000	at bound	0	M
19	X19	0	26.208,0000	0	26.208,0000	at bound	0	M
20	X20	0	0	0	0	at bound	0	M
21	X21	0	3.744,0000	0	3.744,0000	at bound	0	M
22	X22	0	0	0	0	at bound	0	M
23	X23	0	0	0	0	at bound	0	M
24	X24	0	19.968,0000	0	19.968,0000	at bound	0	M
25	X25	0	0	0	0	at bound	0	M
26	X26	1,0000	-15.904,0000	-15.904,0000	0	basic	-M	0
27	X27	0	0	0	0	at bound	0	M
28	X28	0	0	0	0	at bound	0	M
29	X29	0	0	0	0	at bound	0	M
30	X30	1,0000	-15.336,0000	-15.336,0000	0	basic	-M	0
31	X31	1,0000	-31.808,0000	-31.808,0000	0	basic	-M	0
32	X32	0	0	0	0	at bound	0	M
33	X33	1,0000	-1.136,0000	-1.136,0000	0	basic	-M	0
34	X34	0	0	0	0	at bound	0	M

Çizelge 3.4 İkinci iterasyon çıktıları (devamı)



	17:37:34		Friday	September	08	2017		
34	X34	0	0	0	0	at bound	0	M
35	X35	0	0	0	0	at bound	0	M
36	X36	1,0000	-4.544,0000	-4.544,0000	0	basic	-M	0
37	X37	0,5000	0	0	0	basic	-2.480,0000	6.832,0000
38	X38	1,0000	0	0	0	basic	-M	12.928,0000
39	X39	0	0	0	7.232,0000	at bound	-7.232,0000	M
40	X40	0	0	0	1.860,0000	at bound	-1.860,0000	M
41	X41	0	0	0	6.560,0000	at bound	-6.560,0000	M
42	X42	0	0	0	6.480,0000	at bound	-6.480,0000	M
43	X43	0,7500	0	0	0	basic	-7.232,0000	13.664,0000
	Objective	Function	(Min.) =	-77.328,0000	(Note:	Alternate	Solution	Exists!!)
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	10,0000	=	10,0000	0	0	8,0000	12,0000
2	C2	16,0000	=	16,0000	0	-3.232,0000	14,0000	18,0000
3	C3	10,0000	=	10,0000	0	904,0000	4,0000	12,0000
4	C4	2,0000	=	2,0000	0	620,0000	0	4,0000
5	C5	20,0000	=	20,0000	0	1.640,0000	18,0000	22,0000
6	C6	10,0000	=	10,0000	0	1.296,0000	8,0000	12,0000
7	C7	4,0000	=	4,0000	0	0	2,0000	10,0000
8	C8	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
9	C9	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
10	C10	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
11	C11	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
12	C12	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
13	C13	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
14	C14	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
15	C15	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
16	C16	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
17	C17	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
18	C18	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
19	C19	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
20	C20	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
21	C21	1,0000	<=	1,0000	0	-15.904,0000	0	M
22	C22	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M

Yukarıdaki 2. iterasyon sonuçları modele uygulanarak Taylor serisiyle 3. iterasyon yapılmıştır:

Amaç fonksiyonunda $\begin{matrix} pay = 242 \\ Payda = 554 \end{matrix}$ bulunur.

$$\frac{\partial z}{\partial x_{11}} = \frac{(6+4\theta_{11})554-(7+4\lambda_{11})242}{554^2} = \frac{1630}{554^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{12}} = \frac{(9+3\theta_{12})554-(10+4\lambda_{12})242}{554^2} = \frac{1598}{554^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{13}} = \frac{(10+3\theta_{13})554-(6+2\lambda_{13})242}{554^2} = \frac{4088}{554^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{14}} = \frac{(7+3\theta_{14})554-(4+4\lambda_{14})242}{554^2} = \frac{2910}{554^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{21}} = \frac{(3+5\theta_{21})554-(9+3\lambda_{21})242}{554^2} = \frac{-516}{554^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{22}}=\frac{(2+3\theta_{22})554-\left(1+9\lambda_{22}\right)242}{554^2}=\frac{-1312}{554^2} \tag{3.56}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{23}}=\frac{(6+3\theta_{23})554-\left(12+8\lambda_{23}\right)242}{554^2}=\frac{-1516}{554^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{24}}=\frac{(10+2\theta_{24})554-\left(4+4\lambda_{24}\right)242}{554^2}=\frac{4572}{554^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{31}}=\frac{(7+3\theta_{31})554-\left(4+2\lambda_{31}\right)242}{554^2}=\frac{2426}{554^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{32}}=\frac{(10+4\theta_{32})554-\left(2+3\lambda_{32}\right)242}{554^2}=\frac{5056}{554^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{33}}=\frac{(9+3\theta_{33})554-\left(2+2\lambda_{33}\right)242}{554^2}=\frac{4502}{554^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{34}}=\frac{(6+4\theta_{34})554-\left(8+2\lambda_{34}\right)242}{554^2}=\frac{904}{554^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta_{11}}=\frac{4X_{11}554}{554^2}=\frac{4432}{554^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta_{12}}=\frac{3X_{12}554}{554^2}=\frac{16620}{554^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta_{13}}=\frac{3X_{13}554}{554^2}=0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta_{14}}=\frac{3X_{14}554}{554^2}=0, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta_{21}}=\frac{5X_{21}554}{554^2}=0, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta_{22}}=\frac{3X_{22}554}{554^2}=\frac{16620}{554^2}, \tag{3.57}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta_{23}}=\frac{3X_{23}554}{554^2}=\frac{16620}{554^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta_{24}}=\frac{2X_{24}554}{554^2}=0, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta_{31}}=\frac{3X_{31}554}{554^2}=0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta_{32}}=\frac{4X_{32}554}{554^2}=0, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta_{33}}=\frac{3X_{33}554}{554^2}=0, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta_{34}}=\frac{4X_{34}554}{554^2}=\frac{22160}{554^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda_{11}} = \frac{-4x_{11}242}{554^2} = \frac{-1936}{554^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda_{12}} = \frac{-4x_{12}242}{554^2} = \frac{-9680}{554^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda_{13}} = \frac{-2x_{13}242}{554^2} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda_{14}} = \frac{-4x_{14}242}{554^2} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda_{21}} = \frac{-3x_{21}242}{554^2} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda_{22}} = \frac{-9x_{21}242}{554^2} = \frac{-21780}{554^2}, \tag{3.58}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda_{23}} = \frac{-8x_{23}242}{554^2} = \frac{-19360}{554^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda_{24}} = \frac{-4x_{24}242}{554^2} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda_{31}} = \frac{-2x_{31}242}{554^2} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda_{32}} = \frac{-3x_{32}242}{554^2} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda_{33}} = \frac{-2x_{33}242}{554^2} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda_{34}} = \frac{-2x_{34}242}{554^2} = \frac{-4840}{554^2}$$

Bu değerler kullanılarak WINQSB programı yardımıyla çözüm yapıldıktan sonra sonuçlar Çizelge 3.5' te gösterilmiştir:

Çizelge 3.5 Üçüncü iterasyon çıktıları

Linear and Integer Programming

Combined Report for düzeltilmiş

	16:27:38		Thursday	February	15	2018		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	2,0000	1.630,0000	1.420,0000	0	basic	0	2.014,0000
2	X2	10,0000	1.598,0000	16.700,0000	0	basic	172,0000	3.794,0000
3	X3	0	4.088,0000	0	2.670,0000	at bound	1.498,0000	M
4	X4	0	2.910,0000	0	2.966,0000	at bound	0	M
5	X5	0	-516,0000	0	1.764,0000	at bound	-2.256,0000	M
6	X6	10,0000	-1.312,0000	-12.960,0000	0	basic	-3.420,0000	202,0000
7	X7	10,0000	-1.516,0000	-14.680,0000	0	basic	-2.966,0000	656,0000
8	X8	0	4.572,0000	0	7.618,0000	at bound	-2.966,0000	M
9	X9	0	2.426,0000	0	1.304,0000	at bound	1.662,0000	M
10	X10	0	5.056,0000	0	2.514,0000	at bound	2.622,0000	M
11	X11	0	4.502,0000	0	2.124,0000	at bound	2.450,0000	M
12	X12	10,0000	904,0000	9.520,0000	0	basic	0	2.256,0000
13	X13	0	4.432,0000	0	4.496,0000	at bound	0	M
14	X14	0	16.620,0000	0	16.860,0000	at bound	0	M
15	X15	0	0	0	0	at bound	0	M
16	X16	0	0	0	0	at bound	0	M
17	X17	0	0	0	0	at bound	0	M
18	X18	0	16.620,0000	0	16.860,0000	at bound	0	M
19	X19	0	16.620,0000	0	16.860,0000	at bound	0	M
20	X20	0	0	0	0	at bound	0	M
21	X21	0	0	0	0	at bound	0	M
22	X22	0	0	0	0	at bound	0	M
23	X23	0	0	0	0	at bound	0	M
24	X24	0	22.160,0000	0	22.480,0000	at bound	0	M
25	X25	1,0000	-1.936,0000	-1.936,0000	0	basic	-M	0
26	X26	1,0000	-9.680,0000	-9.680,0000	0	basic	-M	0
27	X27	0	0	0	0	at bound	0	M
28	X28	0	0	0	0	at bound	0	M
29	X29	0	0	0	0	at bound	0	M
30	X30	1,0000	-21.780,0000	-21.780,0000	0	basic	-M	0
31	X31	1,0000	-19.360,0000	-19.360,0000	0	basic	-M	0
32	X32	0	0	0	0	at bound	0	M
33	X33	0	0	0	0	at bound	0	M
34	X34	0	0	0	0	at bound	0	M

Çizelge 3.5 Üçüncü iterasyon çıktıları (devamı)

Linear and Integer Programming

File Format Results Utilities Window Help

Combined Report for düzeltilmiş

	16:27:38		Thursday	February	15	2018		
33	X33	0	0	0	0	at bound	0	M
34	X34	0	0	0	0	at bound	0	M
35	X35	0	0	0	0	at bound	0	M
36	X36	1,0000	-4.840,0000	-4.840,0000	0	basic	-M	0
37	X37	0,5000	0	0	0	basic	-2.840,0000	5.216,0000
38	X38	1,0000	0	0	0	basic	-M	11.864,0000
39	X39	0	0	0	7.616,0000	at bound	-7.616,0000	M
40	X40	0	0	0	2.130,0000	at bound	-2.130,0000	M
41	X41	0	0	0	6.680,0000	at bound	-6.680,0000	M
42	X42	0	0	0	7.490,0000	at bound	-7.490,0000	M
43	X43	0	0	0	0	basic	-7.616,0000	10.432,0000
	Objective	Function	(Min.) =	-57.596,0000	(Note:	Alternate	Solution	Exists!!)
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	10,0000	=	10,0000	0	0	8,0000	12,0000
2	C2	16,0000	=	16,0000	0	-2.966,0000	14,0000	18,0000
3	C3	10,0000	=	10,0000	0	952,0000	4,0000	12,0000
4	C4	2,0000	=	2,0000	0	710,0000	0	4,0000
5	C5	20,0000	=	20,0000	0	1.670,0000	18,0000	22,0000
6	C6	10,0000	=	10,0000	0	1.498,0000	8,0000	12,0000
7	C7	4,0000	=	4,0000	0	0	2,0000	10,0000
8	C8	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
9	C9	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
10	C10	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
11	C11	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
12	C12	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
13	C13	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
14	C14	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
15	C15	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
16	C16	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
17	C17	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
18	C18	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
19	C19	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
20	C20	1,0000	<=	1,0000	0	-1.936,0000	0	M
21	C21	1,0000	<=	1,0000	0	-9.680,0000	0	M

Başlat Graphics Server Linear and Integer Pr... kısıt7=4 TR 16:28

Yukarıdaki 3. iterasyon sonuçları modele uygulanarak Taylor serisiyle 4. iterasyon yapılmıştır:

Amaç fonksiyonunda $\begin{matrix} pay = 242 \\ Payda = 562 \end{matrix}$ bulunur.

$$\frac{\partial z}{\partial x_{11}} = \frac{(6+4\theta_{11})562-(7+4\lambda_{11})242}{562^2} = \frac{710}{562^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{12}} = \frac{(9+3\theta_{12})562-(10+4\lambda_{12})242}{562^2} = \frac{1670}{562^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{13}} = \frac{(10+3\theta_{13})562-(6+2\lambda_{13})242}{562^2} = \frac{4168}{562^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{14}} = \frac{(7+3\theta_{14})562-(4+4\lambda_{14})242}{562^2} = \frac{2966}{562^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{21}} = \frac{(3+5\theta_{21})532-(9+3\lambda_{21})232}{532^2} = \frac{-492}{532^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{22}}=\frac{(2+3\theta_{22})562-(1+9\lambda_{22})242}{562^2}=\frac{-1296}{562^2} \tag{3.59}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{23}}=\frac{(6+3\theta_{23})562-(12+8\lambda_{23})242}{562^2}=\frac{-1468}{562^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{24}}=\frac{(10+2\theta_{24})562-(4+4\lambda_{24})242}{562^2}=\frac{4652}{562^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{31}}=\frac{(7+3\theta_{31})562-(4+2\lambda_{31})242}{562^2}=\frac{2966}{562^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{32}}=\frac{(10+4\theta_{32})562-(2+3\lambda_{32})242}{562^2}=\frac{5136}{562^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{33}}=\frac{(9+3\theta_{33})562-(2+2\lambda_{33})242}{562^2}=\frac{4574}{562^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_{34}}=\frac{(6+4\theta_{34})562-(8+2\lambda_{34})242}{562^2}=\frac{952}{562^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta_{11}}=\frac{4X_{11}562}{562^2}=\frac{4496}{562^2},\quad \frac{\partial z}{\partial \theta_{12}}=\frac{3X_{12}562}{562^2}=\frac{16860}{562^2},\quad \frac{\partial z}{\partial \theta_{13}}=\frac{3X_{13}562}{562^2}=0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta_{14}}=\frac{3X_{14}562}{562^2}=0,\quad \frac{\partial z}{\partial \theta_{21}}=\frac{5X_{21}562}{562^2}=0,\quad \frac{\partial z}{\partial \theta_{22}}=\frac{3X_{22}562}{562^2}=\frac{16860}{562^2}, \tag{3.60}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta_{23}}=\frac{3X_{23}562}{562^2}=\frac{16860}{562^2},\quad \frac{\partial z}{\partial \theta_{24}}=\frac{2X_{24}562}{562^2}=0,\quad \frac{\partial z}{\partial \theta_{31}}=\frac{3X_{31}562}{562^2}=0$$

$$,\ \frac{\partial z}{\partial \theta_{32}}=\frac{4X_{32}562}{562^2}=0,\quad \frac{\partial z}{\partial \theta_{33}}=\frac{3X_{33}562}{562^2}=0,\quad \frac{\partial z}{\partial \theta_{34}}=\frac{4X_{34}562}{562^2}=\frac{22480}{562^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda_{11}}=\frac{-4x_{11}242}{562^2}=\frac{-1936}{562^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda_{12}}=\frac{-4x_{12}242}{562^2}=\frac{-9680}{562^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda_{13}}=\frac{-2x_{13}242}{562^2}=0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda_{14}}=\frac{-4x_{14}242}{562^2}=0, \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda_{21}}=\frac{-3x_{21}242}{562^2}=0, \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda_{22}}=\frac{-9x_{21}242}{562^2}=\frac{-21780}{562^2}, \qquad (3.61)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda_{23}}=\frac{-8x_{23}242}{562^2}=\frac{-19360}{562^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda_{24}}=\frac{-4x_{24}242}{562^2}=0, \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda_{31}}=\frac{-2x_{31}242}{562^2}=0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda_{32}}=\frac{-3x_{32}242}{562^2}=0, \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda_{33}}=\frac{-2x_{33}242}{562^2}=0, \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda_{34}}=\frac{-2x_{34}242}{562^2}=\frac{-4840}{562^2}$$

Bu değerler kullanılarak WINQSB programı yardımıyla çözüm yapıldıktan sonra sonuçlar Çizelge 3.6' da gösterilmiştir:

Çizelge 3.6 Dördüncü iterasyon çıktıları

	16:27:38		Thursday	February	15	2018		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	2,0000	710,0000	1.420,0000	0	basic	0	2.014,0000
2	X2	10,0000	1.670,0000	16.700,0000	0	basic	172,0000	3.794,0000
3	X3	0	4.168,0000	0	2.670,0000	at bound	1.498,0000	M
4	X4	0	2.966,0000	0	2.966,0000	at bound	0	M
5	X5	0	-492,0000	0	1.764,0000	at bound	-2.256,0000	M
6	X6	10,0000	-1.296,0000	-12.960,0000	0	basic	-3.420,0000	202,0000
7	X7	10,0000	-1.468,0000	-14.680,0000	0	basic	-2.966,0000	656,0000
8	X8	0	4.652,0000	0	7.618,0000	at bound	-2.966,0000	M
9	X9	0	2.966,0000	0	1.304,0000	at bound	1.662,0000	M
10	X10	0	5.136,0000	0	2.514,0000	at bound	2.622,0000	M
11	X11	0	4.574,0000	0	2.124,0000	at bound	2.450,0000	M
12	X12	10,0000	952,0000	9.520,0000	0	basic	0	2.256,0000
13	X13	0	4.496,0000	0	4.496,0000	at bound	0	M
14	X14	0	16.860,0000	0	16.860,0000	at bound	0	M
15	X15	0	0	0	0	at bound	0	M
16	X16	0	0	0	0	at bound	0	M
17	X17	0	0	0	0	at bound	0	M
18	X18	0	16.860,0000	0	16.860,0000	at bound	0	M
19	X19	0	16.860,0000	0	16.860,0000	at bound	0	M
20	X20	0	0	0	0	at bound	0	M
21	X21	0	0	0	0	at bound	0	M
22	X22	0	0	0	0	at bound	0	M
23	X23	0	0	0	0	at bound	0	M
24	X24	0	22.480,0000	0	22.480,0000	at bound	0	M
25	X25	1,0000	-1.936,0000	-1.936,0000	0	basic	-M	0
26	X26	1,0000	-9.680,0000	-9.680,0000	0	basic	-M	0
27	X27	0	0	0	0	at bound	0	M
28	X28	0	0	0	0	at bound	0	M
29	X29	0	0	0	0	at bound	0	M
30	X30	1,0000	-21.780,0000	-21.780,0000	0	basic	-M	0
31	X31	1,0000	-19.360,0000	-19.360,0000	0	basic	-M	0
32	X32	0	0	0	0	at bound	0	M
33	X33	0	0	0	0	at bound	0	M
34	X34	0	0	0	0	at bound	0	M

Çizelge 3.6 Dördüncü iterasyon çıktıları (devamı)

Linear and Integer Programming

File Format Results Utilities Window Help

Combined Report for düzeltilmiş

	16:27:38		Thursday	February	15	2018		
33	X33	0	0	0	0	at bound	0	M
34	X34	0	0	0	0	at bound	0	M
35	X35	0	0	0	0	at bound	0	M
36	X36	1,0000	-4.840,0000	-4.840,0000	0	basic	-M	0
37	X37	0,5000	0	0	0	basic	-2.840,0000	5.216,0000
38	X38	1,0000	0	0	0	basic	-M	11.864,0000
39	X39	0	0	0	7.616,0000	at bound	-7.616,0000	M
40	X40	0	0	0	2.130,0000	at bound	-2.130,0000	M
41	X41	0	0	0	6.680,0000	at bound	-6.680,0000	M
42	X42	0	0	0	7.490,0000	at bound	-7.490,0000	M
43	X43	0,7500	0	0	0	basic	-7.616,0000	10.432,0000
	Objective	Function	(Min.) =	-57.596,0000	(Note:	Alternate	Solution	Exists!!)
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	10,0000	=	10,0000	0	0	8,0000	12,0000
2	C2	16,0000	=	16,0000	0	-2.966,0000	14,0000	18,0000
3	C3	10,0000	=	10,0000	0	952,0000	4,0000	12,0000
4	C4	2,0000	=	2,0000	0	710,0000	0	4,0000
5	C5	20,0000	=	20,0000	0	1.670,0000	18,0000	22,0000
6	C6	10,0000	=	10,0000	0	1.498,0000	8,0000	12,0000
7	C7	4,0000	=	4,0000	0	0	2,0000	10,0000
8	C8	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
9	C9	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
10	C10	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
11	C11	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
12	C12	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
13	C13	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
14	C14	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
15	C15	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
16	C16	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
17	C17	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
18	C18	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
19	C19	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
20	C20	1,0000	<=	1,0000	0	-1.936,0000	0	M
21	C21	1,0000	<=	1,0000	0	-9.680,0000	0	M

Başlat Graphics Server Linear and Integer Pr... ksit7=4 TR 16:28

Çizelge 3.6 Dördüncü iterasyon çıktıları (devamı)

Linear and Integer Programming

File Format Results Utilities Window Help

Combined Report for düzeltilmiş

	16:27:38		Thursday	February	15	2018		
3	C3	10,0000	=	10,0000	0	952,0000	4,0000	12,0000
4	C4	2,0000	=	2,0000	0	710,0000	0	4,0000
5	C5	20,0000	=	20,0000	0	1.670,0000	18,0000	22,0000
6	C6	10,0000	=	10,0000	0	1.498,0000	8,0000	12,0000
7	C7	4,0000	=	4,0000	0	0	2,0000	10,0000
8	C8	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
9	C9	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
10	C10	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
11	C11	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
12	C12	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
13	C13	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
14	C14	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
15	C15	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
16	C16	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
17	C17	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
18	C18	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
19	C19	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
20	C20	1,0000	<=	1,0000	0	-1.936,0000	0	M
21	C21	1,0000	<=	1,0000	0	-9.680,0000	0	M
22	C22	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
23	C23	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
24	C24	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
25	C25	1,0000	<=	1,0000	0	-21.780,0000	0	M
26	C26	1,0000	<=	1,0000	0	-19.360,0000	0	M
27	C27	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
28	C28	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
29	C29	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
30	C30	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
31	C31	1,0000	<=	1,0000	0	-4.840,0000	0	M
32	C32	0,5000	<=	1,0000	0,5000	0	0,5000	M
33	C33	1,0000	<=	1,0000	0	-11.864,0000	0,5000	1,5000
34	C34	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
35	C35	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
36	C36	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
37	C37	0	<=	1,0000	1,0000	0	0	M
38	C38	0,7500	<=	1,0000	0,2500	0	0,7500	M

Başlat Graphics Server Linear and Integer Pr... ksit7=4 TR 16:29

BÖLÜM 4

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bölüm 3'teki uygulamada; Metal Otomotiv A.Ş. 'de üretilen yedek parçalar 4 ayrı fabrikada üretildikten sonra 3 ayrı depoya dağıtılırken, taşıma miktarlarını belirleyen taşıma problemi modelini kurarak taşıma maliyetlerini minimum yapan optimum çözümün bulunması amaçlanmıştır.

Bu problemde depolardaki üretilen ürün stokları ve fabrikalardaki ürün kapasiteleri her depo ve fabrikalar için aralıklıdır. Ayrıca fabrikalardan depolara olan birim taşıma maliyetleri de aralıklı ve kesirli olarak belirlenmiştir.

Problemin doğrusal programlama problemi olarak modeli kurulmuş ve çözüm tekniği uygulanmaya hazır hale gelmiştir. Problemin amaç fonksiyonunu ve kısıtlarını sağlayan bir başlangıç çözümü belirlenmiştir. Modeli kurulan problemin amaç fonksiyonunda başlangıç değerleri yerine yazılarak sırasıyla amaç fonksiyonundaki tüm değişkenler teker teker taylor serisine açılmıştır. Sonrasında problemin çözümü için WINQSB paket programı kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar hangi değişken için taylor serisine açılmış ise katsayısı o değer olacak şekilde WINQSB paket programına girilmiştir.

Başlangıç çözümünden elde edilen maliyet ve her iterasyonda amaç fonksiyonundan elde edilen maliyet sonuçları aşağıda verilmiştir:

Başlangıç çözümündeki amaç fonksiyonun $\begin{matrix} pay = 324 \\ Payda = 398 \end{matrix}$ sını yerine yazdığımızda

$$Z = \frac{324}{398} = 0,814070 \tag{4.1}$$

elde edilir.

1. iterasyon sonucunda WINQSB programından bulunan karar değişkenleri değerleri yazıldığında amaç fonksiyonunda $\begin{matrix} pay = 284 \\ Payda = 624 \end{matrix}$ bulunmuştur.

$$Z = \frac{284}{624} = 0,455128 \tag{4.2}$$

2. iterasyon sonucunda WINQSB programından bulunan karar değişkenleri değerleri yazıldığında amaç fonksiyonunda $\begin{matrix} pay = 242 \\ Payda = 554 \end{matrix}$ bulunmuştur.

$$Z = \frac{242}{554} = 0,436823 \tag{4.3}$$

3. iterasyon sonucunda WINQSB programından bulunan karar değişkenleri değerleri yazıldığında amaç fonksiyonunda $\begin{matrix} pay = 242 \\ Payda = 562 \end{matrix}$ bulunmuştur.

$$Z = \frac{242}{562} = 0,430604 \tag{4.4}$$

4. iterasyon sonucunda WINQSB programından bulunan karar değişkenleri yani Çizelge 3.6 'daki karar değişkenleriyle, 3. iterasyon sonucunda bulunan karar değişkenleri yani Çizelge 3.5' teki karar değişkenleri incelendiğinde karar değişkenlerinin aynı değerleri aldığı tespit edilmiştir. Bu durumda tekrar aynı çözüme ulaşıldığından dolayı taşıma probleminde optimum çözüme ulaşıldığı ve bir daha iterasyon yapılmasına gerek duyulmadığı anlamına gelmektedir. 4. iterasyon sonucunda bulunan Çizelge 3.6 'daki değerler amaç fonksiyonunda yerine yazıldığında $\begin{matrix} pay = 242 \\ Payda = 562 \end{matrix}$ bulunmuştur.

$$Z = \frac{242}{562} = 0,430604 \tag{4.5}$$

Aralıklı Kesirli Amaç Fonksiyonunun Taylor Serisine açılarak iterasyonlar yardımıyla yukarıdaki sonuçlara ulaşılmıştır. İterasyon sonundaki sonuçlardan da görüldüğü üzere her iterasyonda taşıma maliyetleri azalmıştır. Taşıma maliyetlerinin her iterasyonda azalması ve elde edilen sonuçların istenilen hedeflere çok yakın olması yöntemin doğruluğunu kanıtlamıştır. 4. iterasyonda karar değişkenlerinden elde edilen sonuçlar aşağıdadır:

$$\left(X_{11}=x_1=2\right),\left(X_{12}=x_2=10\right),\left(X_{13}=x_3=0\right),\left(X_{14}=x_4=0\right)$$
$$\left(X_{21}=x_5=0\right),\left(X_{22}=x_6=10\right),\left(X_{23}=x_7=10\right),\left(X_{24}=x_8=0\right)$$
$$\left(X_{31}=x_9=0\right),\left(X_{32}=x_{10}=0\right),\left(X_{33}=x_{11}=0\right),\left(X_{34}=x_{12}=10\right) \tag{4.6}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_{42}, x_{43} \geq 0$$

$$\left(\theta_{11}=x_{13}=0\right),\left(\theta_{12}=x_{14}=0\right),\left(\theta_{13}=x_{15}=0\right),\left(\theta_{14}=x_{16}=0\right)$$
$$\left(\theta_{21}=x_{17}=0\right),\left(\theta_{22}=x_{18}=0\right),\left(\theta_{23}=x_{19}=0\right),\left(\theta_{24}=x_{20}=0\right)$$
$$\left(\theta_{31}=x_{21}=0\right),\left(\theta_{32}=x_{22}=0\right),\left(\theta_{33}=x_{23}=0\right),\left(\theta_{34}=x_{24}=0\right), \tag{4.7}$$

$$\left(\lambda_{11}=x_{25}=1\right),\left(\lambda_{12}=x_{26}=1\right),\left(\lambda_{13}=x_{27}=0\right),\left(\lambda_{14}=x_{28}=0\right)$$
$$\left(\lambda_{21}=x_{29}=0\right),\left(\lambda_{22}=x_{30}=1\right),\left(\lambda_{23}=x_{31}=1\right),\left(\lambda_{24}=x_{32}=0\right)$$
$$\left(\lambda_{31}=x_{33}=0\right),\left(\lambda_{32}=x_{34}=0\right),\left(\lambda_{33}=x_{35}=0\right),\left(\lambda_{34}=x_{36}=1\right) \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} x_{37}&=0,5\\ x_{38}&=1\\ x_{39}&=0\\ x_{40}&=0\\ x_{41}&=0\\ x_{42}&=0\\ x_{43}&=0,75 \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$x_{13}, x_{14}, \ldots, x_{42}, x_{43} \leq 1 \tag{4.10}$$

Elde edilen sonuçlar kısıt fonksiyonlarında yerine koyulduğunda denklemlerin sağlandığı görülmüştür:

$$\begin{aligned} &x_1+x_2+x_3+x_4-4x_{37}=10\\ &x_5+x_6+x_7+x_8-4x_{38}=16\\ &x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12}-12x_{39}=10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x_1+x_5+x_9-3x_{40}=2\\ &x_2+x_6+x_{10}-4x_{41}=20\\ &x_3+x_7+x_{11}-5x_{42}=10\\ &x_4+x_8+x_{12}-8x_{43}=4 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Elde edilen sonuçlara göre söz konusu uygulamadaki taşıma probleminin optimum çözümü aşağıda gösterilmiştir:

Çizelge 4. 1 Uygulamanın optimum çözümü

	Adana	**İzmir**	**İstanbul**	**Ankara**	
Konya	2	10			a_1=[10,14]
Gaziantep		10	10		a_2=[16,20]
Trabzon				10	a_3=[10,22]
	b_1=[2,5]	b_2=[20,24]	b_3=[10,15]	b_4=[4,12]	

Lineer kesirli amaç fonksiyonları taylor serisine açılarak WINQSB paket programından elde edilen sonuçların istenilen hedeflere çok yakın olması bu yöntemin doğruluğu ve güvenilirliği konusunda bilgi vermektedir.

Deneysel çalışmalardan elde edilen sonuçlar, aralıklı kesirli taşıma problemi için önerilen çözümde taylor serisi kullanılarak yapılan her iterasyonda optimum çözüme ulaşıldığı gözlemlenmiş ve aralıklı kesirli taşıma problemlerinin çözümünde etkin bir şekilde kullanılabileceğini ortaya koymaktadır.

KAYNAKLAR

[1] Taha, H.A, (2000). Yöneylem Araştırması, 6.basımdan çeviri, Literatür Yayınları, İstanbul.

[2] Tezcan, E., (2005). Fiyatların Aralıklı Verilmesi Durumunda Taşıma Problemine Çözüm Önerisi, Yüksek Lisans Tezi, YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[3] Bulut, M.B., (2011). Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Problemine Taylor Serisi ve Üyelik Fonksiyonları Yardımıyla Bir Çözüm Önerisi, Yüksek Lisans Tezi, YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul .

[4] Inuiguchi, M. ve Sakawa, M., (1995). "Minimax Regret Solution to Linear Programming Problems with An Interval Objective Function", European Journal of Operational Research 86, Hiroshima, 526-536.

[5] Goswami, S., (1999). "Multiobjective Transportation Problem with Interval Cost, Source And Destination Parameters", European Journal of Operational Research 117, Kharagpur, 100-112.

[6] Kara S., (2013). Bulanık Çok Seviyeli Kesirli Programlama Problemi İçin Çözüm Yaklaşımı, Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kayseri.

[7] Kocaoğlu, M., (2010). Bir Akaryakıt Dağıtım Dizgesinin Ulaştırma Giderinin Doğrusal Programlama Yoluyla En Aza İndirgenmesi, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

[8] Sağır, M., Atlas, M., Aras, N. ve Kamışlı Öztürk, Z., Yöneylem Araştırması-1, T.C Anadolu Üniversitesi Yayını, 2528, Açıköğretim Fakültesi Yayını,Ankara.

[9] Bajalinov, E.B., (2003). Linear-Fractional Programming Theory, Methods, Applications and Software, First Edition, Kluwer Academic Publishers, London.

[10] Güzel, N., Emiroğlu, İ., Taşçı, F., Güler C., ve Sivri, M., (2012). “A Solution Proposal to the Interval Fractional Transportation Problem”, Applied Mathematics & Information Sciences: An International Journal, 3: 567-571.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Gizem ERFİDAN KARABULUT
Doğum Tarihi ve Yeri	: 28.04.1990, Manisa - Soma
Yabancı Dili	: İngilizce
E-posta	: gizemerfidan@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Lisans	Matematik Mühendisliği	Yıldız Teknik Üniversitesi	2013
Lise	Sayısal	İzmir Atatürk Lisesi	2008

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	**Firma/Kurum**	**Görevi**
2017-...	Burgan Bank A.Ş.	İş Analisti Uzmanı
2015	Burgan Bank A.Ş.	İş Analisti Uzman Yardımcısı

YAYINLARI

Bildiri

1. Erfidan, G., Dalman, H., ve Sivri, M., (2015). “Uncertain Programming Model for Multiobjective Multi-Item Solid Transportation Problem”, International Conference On Applied Analysis And Mathematical Modeling, 08-12 June 2015, İstanbul.