T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BURGERS DENKLEMİ VE BLACK-SCHOLES TİPİ DENKLEMLER İÇİN TERS PROBLEM YAKLAŞIMI ÜZERİNE

VOLKAN OBAN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI

DANIŞMAN
DOÇ. DR. COŞKUN GÜLER

İSTANBUL, 2018

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BURGERS DENKLEMİ VE BLACK-SCHOLES TİPİ DENKLEMLER İÇİN TERS PROBLEM YAKLAŞIMI ÜZERİNE

Volkan OBAN tarafından hazırlanan tez çalışması, 21.06.2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Coşkun GÜLER

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Coşkun GÜLER

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Prof. Dr. Kamil ORUÇOĞLU

İstanbul Teknik Üniversitesi ________________________

Doç. Dr. İnci ALBAYRAK

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Prof. Dr. Mustafa SİVRİ

Yıldız Teknik Üniversitesi ________________________

Doç. Dr. Cihangir ÖZEMİR

İstanbul Teknik Üniversitesi ________________________

Bu çalışma, TÜBİTAK BİDEB 2211-A Nolu Burs Programı ile desteklenmiştir.

ÖNSÖZ

Tez çalışması boyunca desteğini ve hoş görüsünü hiç esirgemeyen değerli Hocam Doç. Dr. Coşkun Güler'e, tez savunma jürisinde yer alan saygıdeğer tüm hocalarıma,

Doktora eğitimim boyunca yararlandığım TÜBİTAK bursu nedeniyle, Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu ve tüm kurum çalışanlarına,

Manevi desteklerinden dolayı aileme, anneme, kardeşim Gül Dikeç'e, ayrıca moral ve motivasyon kaynağım olan biricik yeğenim Gülce Dikeç'e

Yardımlarını ve bilgilerini esirgemeyen dostlarıma en içten teşekkürlerimi sunuyorum.

Haziran, 2018

Volkan OBAN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

ÖZET

BURGERS DENKLEMİ VE BLACK-SCHOLES TİPİ DENKLEMLER İÇİN TERS PROBLEM YAKLAŞIMI ÜZERİNE

Volkan OBAN

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Coşkun GÜLER

Bu çalışmada, finans, fizik, biyoloji ve kimya gibi pek çok bilim dallarında kullanılan çeşitli kısmi diferansiyel denklemler ele alınmış ve bu denklemler için ters problem yaklaşımı irdelenmiş ve önerilmiştir. Tezde esas olarak, incelenen denklemler için çeşitli dönüşümler altında bilinen denkleme indirgenmiş ve bu denk ters problemin iyi tanımlı(well-posed) olması daha önceden yapılan çalışmalar kaynak gösterilerek gerçeklenmiştir. Ayrıca, bazı denklemler için nümerik açıdan çözüm aranmıştır. Çalışmada, denklemlerin çoğunluğu güncel yaşamda ve çeşitli alanlarda yaygın olarak kullanıldığı için göz önünde bulundurulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Ters Problem, İyi Tanımlı Problem, Burgers Denklemi, Black-Scholes Denklemi, Dönüşüm, Difüzyon Denklemi, Sonlu Farklar Yöntemi, Diferansiyel Dönüşüm Yöntemleri.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ABSTRACT

ON THE APPROACH TO INVERSE PROBLEMS FOR BURGERS' EQUATION AND BLACK SCHOLES TYPE EQUATIONS

Volkan OBAN

Department of Mathematical Engineering

PhD Thesis

Adviser: Assoc. Prof. Dr. Coşkun GÜLER

In this study, some partial differential equations used in finance, physics, biology and chemistry are handled. The inverse problem approach for these equations are examined and recommended. Essentially, in this thesis, the equations handled are reduced to known equation and the fact that this inverse problem is well-posed has been realized by referring to the previous studies done. Also, numerical solution of some of all are investigated. Many of the equations are considered in this study because they are used extensively in various fields.

Keywords: Inverse Problems, Well-Posedness, Burgers' Equation, Black Scholes Equation, Transformation, Diffusion Equation, Finite Difference Method, Differential Transform Methods.

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Ters problem, bir takım gözlemlerden onları üreten nedensel faktörleri hesaplama işlemidir. Örneğin, X-ışınlı bilgisayarlı tomografide bir görüntünün hesaplanması, akustikte kaynak yeniden yapılandırılması veya Dünyanın yerçekimi alanı ölçümünden, yoğunluğunun hesaplanması.

Ters problemlerin bazı uygulamaları: medikal görüntüleme (EIT), örneğin ventilatörle ilgili akciğer hasarını azaltmak için Tıbbi optik tomografi; Elektriksel ölçümü kullanarak endüstriyel proses izleme; Fotoelastisite-saydam bir cisim içindeki stresin görselleştirilmesi; Jeofiziksel görüntüleme; Erimiş metal akışının elektromanyetik izlenmesi; Havaalanı X-ray tarayıcıları; Malzeme biliminde X-ray tomografisi; Güvenlik taraması ve kara mayını tespiti için yeni nesil metal detektörleri. İstatistiksel fizik, Hesaplamalı Görüntüleme(Computational Imaging), makine öğrenmesi, büyük veri analizi gibi alanlarda kullanılmaktadır. Ters problemlerin çözümü, hava tahmini, örüntü tanıma(pattern recognition), tıbbi tomografi ve petrol arama gibi çok çeşitli uygulamaların temelini oluşturur. Bu nedenle uygulama alanının genişliği nedeniyle birçok kişi üzerinde çalışmaktadır. Bu çalışmada, pek çok denklem difüzyon denklemine indirgenerek çalışılmıştır.

Birincisi ısıl etki ile atomların kendi denge konumları çevresindeki küçük titreşim hareketleri, ikincisi ise yine aynı etki ile bir denge konumundan diğerine atlayarak yaptıkları uzak mesafe hareketleridir. Bu sonuncuya atomsal yayınım veya difüzyon denir.

Difüzyon problemleri, biyoloji, görüntü işleme, parçacık sistemleri, $koag\text{ü}lasyon$[1] modelleri ve matematiksel finans gibi çok çeşitli uygulamalarda ortaya çıkmaktadır.

Literatürü incelediğimizde, bu çalışma için araştırılan ve kaynak alınan çalışmaların kronolojik sırası aşağıdaki gibidir.

Beznoshchenco, 1975 yılında ters problemde yer alan katsayı belirleme problemin incelemiştir.Sadece uzay değişkenine bağlı baş katsayının belirlenmesi problemi Ivanchov,Ramm ,Saldina, Shamsi ve Denghan , Liao vd makalelerinde ve çalışmalarında incelenerek belirtilmiştir.Doğada yer alan bazı olaylar, yerel olmayan sınır koşullu parabolik sınır değer problemi ile modellenebilme özelliği mevcuttur. Örneğin, Cannon, Ivanchov,ve diğerlerinin çalışmaları yerel olmayan sınır koşullu ters parabolik sınır değer problemlerini içermektedir. Bu konularda, ek koşul verilerek yapılan diğer çalışmalar; Ivanchov,Ramm, Pabyrivska , Farcas , Wang Denghan,Liao, Liu ve diğerleri taraından çeşitli yıllarda yapılmıştır.

Daha sonra, gerek yerel olmayan sınır koşullu gerekse periyodik koşullar altında ters problem incelemeleri; Ismailov, Kanca ve, quasilineer denklemler için Kanca ve Bağlan çalışmaları mevcuttur.

Bu çalışmada, kullanım ve uygulama alanları fazla olan denklemler incelenmiş giriş kısmında ters problem hakkında yapılan çalışmaların literatür özeti, tezin amacı ve hipotez kısmı verilmiştir. İkinci bölümde temel tanımlar verilmiştir.

[1] Koagülasyon: Koagülant kimyasalların, uygun pH ’da atık suya ilave edilmesi ile atık suyun bünyesindeki kolloidal ve askıda katı maddelerle birleşerek flok oluşturmaya hazır hale gelmesi işlemidir. Bir başka anlamı da pıhtılaşmadır.

Bölüm 3’te ise, bilinen denklemler çeşitli dönüşümler altında difüzyon denklemine indirgenmiş ve bu problemler için daha önceden var olan bilindik teoremler uygulanmış, iyi konuşlandırılmış (well – possed) olduğu gösterilmiştir.

Tezin 4. Bölümünde ise, lineer olmayan Burgers denklemi için ters problem yaklaşımı gerçeklenmiştir. Cole-Hopf dönüşümü yardımıyla lineer difüzyon denklemine indirgenmiş ve çeşitli koşullar altında ters problem yaklaşımı yapılmıştır.

5. bölümde ise, finansal matematik - finans mühendisliğinde çokça kullanılan Black Scholes (Merton) Denklemi ele alınmış ve bilindik çeşitli dönüşümlerle difüzyon denklemine indirgenmiş ve daha önceden yapılan çalışmalara atıfta bulunarak bazı koşullar altında ters problem yaklaşımı gerçeklenmiştir.

Tezin 6. Bölümünde ise, Nümerik Yöntemlerle çözüm yaklaşımları ele anılmıştır.

Son kısımda ise değerlendirmeler ve ileride yapılabilecek çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

Ek kısımda, ele alınan bazı denklemlerin nümerik çözümünü veren çeşitli program kodları verilmiştir.

1.2 Tezin Amacı

- Ters problem kavramının örneklerle anlaşılmasını sağlamak
- Çeşitli alanlarda kullanılan bazı denklemlerin(Finans, Fizik, Biyoloji, vb.) temel difüzyon denklemine indirgenmesi
- Kullanım alanı yaygın olan denklemler için ters problem yaklaşımının irdelenmesi
- Ters problem yaklaşımda, esas olarak indirgenen denk problemlerin daha önceden yapılan çalışmalar kaynak gösterilerek iyi konuşlandırılmış olduklarını belirtmek ve ele alınan, indirgenen denklemler için nümerik çözüm yöntemleri sunmak.

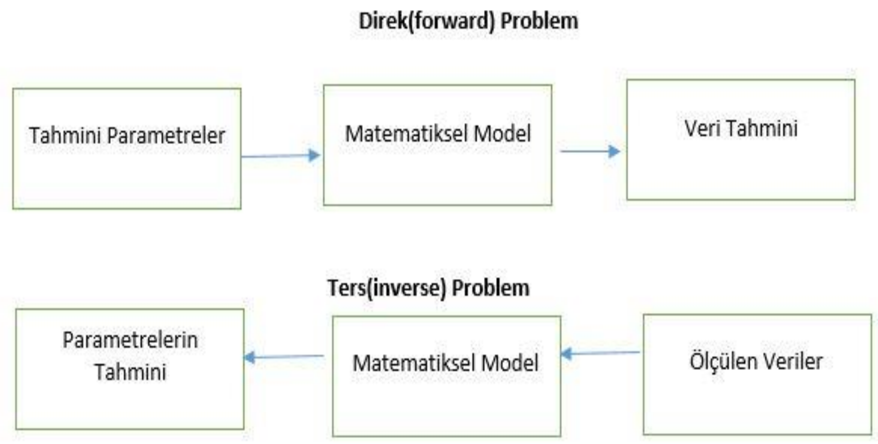
1.3 Hipotez

"Burgers Denklemi ve Black Scholes Tipi Denklemler için Ters Problem Yaklaşımı Üzerine "isimli tezde; ilk olarak genel literatür taraması yapılarak, ters problem ve uygulama alanları verilip, kavramın daha anlaşılır olmasını sağlamak ve çeşitli bilim dallarında yaygın olarak kullanılan kısmi diferansiyel denklemler için ters problem yaklaşımını vermektir. Matematiksel Finans, Matematiksel Fizik, Biyomatematik gibi alanlarda bilinen denklemler için, ters problem yaklaşımında iyi konuşlandırılmışlık kavramını irdelemek ve indirgenen denk ters problemleri daha önceden iyi konuşlandırılmışlık oldukları gösterilen kaynaklara dayanarak, iyi tanımlı(well-posed) olduğunu açıklamaktır. Bazı denklemler için nümerik çözüm, Sonlu Farklar Yöntemi ve Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi yardımıyla aranıp ve benzer yaklaşımda bulunmuş denklemler içinde benzer çözümlerin olduğunu göstermektir.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Ters Problem ve Uygulamalı Alanları



Şekil 2.1 Ters Problem ve Direk Problem Şeması

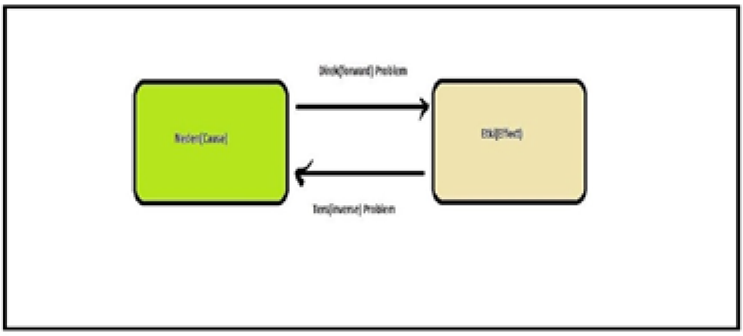
Ters problemler, doğrudan gözleyemediğimiz parametreler hakkında bize bilgi verdikleri için, fen ve matematikte en önemli matematik problemlerinden bazılarıdır. Optik, radar, akustik, iletişim teorisi, sinyal işleme, tıbbi görüntüleme, bilgisayar görme, jeofizik, oşinografi, astronomi, uzaktan algılama, doğal dil işleme, makine öğrenimi, tahribatsız test ve daha birçok alanda geniş uygulama alanı var.

PDE'ye dayalı yaklaşımlar günümüzde finans ve sigortacılıkta fiyatlama modelleri olarak oldukça standarttır ve ünlü Black-Scholes denkleminde olduğu gibi stokastik diferansiyel denklemlerle her zaman güçlü bir şekilde ilişkilidir. Bunun yerine, sosyo-ekonomik süreçlerin PDE modellemesi son on yılda, yalnızca sosyo-ekonominin nitel ve nicel analizine yeni kavrayışlar sunmakla kalmayıp, aynı zamanda büyüyen matematiksel problemlerin yepyeni bir aralığını açarak önemli bir gelişme göstermiştir

Bilimin diğer dallarında olduğu gibi, ters problemler de sosyo-ekonomideki PDE modelleri için doğal olarak ortaya çıkmaktadır, zira tüm parametreler önceden belirlenemez, ancak verilerden belirlenmesi gerekir. Alternatif olarak PDE tabanlı modeller, geleneksel olarak bu yöntemlerin altında yatan mekanizmaları dikkate alamayan çok amaçlı istatistiksel modellerle işlenmiş verileri analiz etmek için yeni fırsatlar sunar

Ters problem sınıfları; geçmişe yönelik(retrospective) veya geriye dönük(backward) problem, ters katsayı problemi, ters sınır problemi olarak literatürde geçmektedir.

Ters problemler doğal olarak sosyo-ekonomideki PDE modeller ile ortaya çıkmaktadır, çünkü tüm parametreler önceden belirlenememekle birlikte, veriden belirlenmelidir. Alternatif olarak PDE tabanlı modeller, geleneksel olarak bu yöntemlerin altında yatan mekanizmaları dikkate alamayan çok amaçlı istatistiksel modellerle işlenmiş verileri analiz etmek için yeni fırsatlar sunar. Kısmi türevli denklemlerde, herhangi bir katsayıyı, kaynak terimi, başlangıç koşulu gibi ifadeleri belirleme ters problem kullanılır. Finansal modellerde yer alan modeller için volatilitenin belirlenmesi, lazer tomografisi Kuantum mekanikte saçılmalar, görüntü analizi, sismik keşif, sismik tomografi, elektrokardiyografi, potansiyel teori, kompartıman analiz, jeomanyetik indüksiyon, veri asimilasyonu gibi alanlarda da bir başka ters problem uygulamalarına örnektir.



Şekil 2.2 Ters Problem: Neden ve Etki Bağıntısı

$$\mathrm{T}u = \zeta \tag{2.1}$$

Operatör denkleminin çözümü olarak, ters problem tanımlanabilir. ζ; bilinmeyen u; miktarı için, verilen ölçülmüş veri

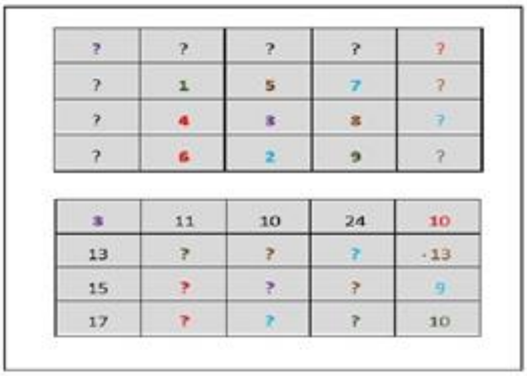
$\mathrm{T}: \Gamma \ \to \Lambda$ operatör dönüşümü. (Γ, Λ : Banach uzayı)

İyi konuşlandırılmışlık (Well – Posedness): Hadamard anlamında

- Bütün giriş verileri için, $\forall \zeta \ \in \Lambda$ için, $\mathrm{T}u = \zeta$ olacak şekilde bir $u \in \Gamma$ vardır.
- Bütün giriş verileri için, bu çözüm tektir. $u \neq v \Rightarrow \mathrm{T}v \neq \zeta$
- Tüm $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ için $\mathrm{T}u_k \to \zeta$, $u_k \to u$ dır. Problemin çözümü, sürekli olarak giriş verisine bağlıdır.

Basit Ters Problem Örnekleri:

1-



?	?	?	?	?
?	1	5	7	?
?	4	3	8	?
?	6	2	9	?

3	11	10	24	10
13	?	?	?	-13
15	?	?	?	9
17	?	?	?	10

Şekil 2.3 Basit Ters Problem Örneği

Problem: Aynı satıdaki veya aynı sütundaki veya aynı renkteki sayıları toplayınız. [1]

Ters Problem: Aynı satıdaki veya aynı sütundaki veya aynı renkteki sayıların toplamı bilindiğinde göre bu sayıları bulunuz. [1]

2-

$$\underbrace{Forward(direk(\text{düz}))\ Problem}$$

Verilenler: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Hesaplama işlemi} : y = Ax \Rightarrow y = \begin{bmatrix} ae + bf \\ ce + df \end{bmatrix};$

$$\underbrace{Ters\ (Inverse)\ Problem}$$

$y = \begin{bmatrix} ae + bf \\ ce + df \end{bmatrix}$ bilinmektedir. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ise, x i bulma problemi ters problem olarak adlandırılır.

$y = Ax \Rightarrow x = A^{-1}y = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$

3-

$$A: X \to Y \tag{2.2}$$

X, Y fonksiyon uzayı olmak üzere, verilen A ve g için,

$$g(t) = Af(t) = \int_0^t f(s)ds \tag{2.3}$$

f yi belirleme problemi ters problem olarak adlandırılır.

4- Bir boyutlu ısı denklemini, başlangıç ve sınır koşullarıyla birlikte göz önüne alalım.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.4}$$

$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ \ t \geq 0$ sınır koşullu, (2.5)

$u(x,0) = u_0(x),\ \ 0 \leq x \leq \pi$ başlangıç koşullu. (2.6)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \sin(nx), \quad c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u_0(\tau)\sin(n\tau)\, d\tau \tag{2.7}$$

Yukarıda verilen u_0 başlangıç sıcaklığı dağılımı ve nihai sıcaklık T verileriyle, $u(.,T)$ belirleme düz(forward) problem; $u(.,T)$ nihai sıcaklık dağılımı verildiğinde, önceki zamanlarda sıcaklıkları $(t < T)$ belirleme ters problem olarak adlandırılır.

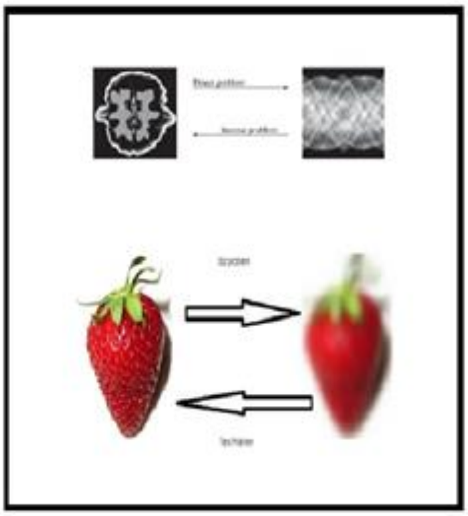
$$u(x,T) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \rho(x,\tau)u_0(\tau)d\tau,\ \ 0 \leq x \leq \pi \tag{2.8}$$

Burada

$$\rho(x,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 T}\sin(nx)\sin(n\tau) \tag{2.9}$$

5- Verilen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ noktalarına ve verilen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ değerlerine karşılık $n.$ dereceden bir p polinomunu bulma problemi ters problem olarak adlandırılır.(Lagrange interpolasyon problemi)

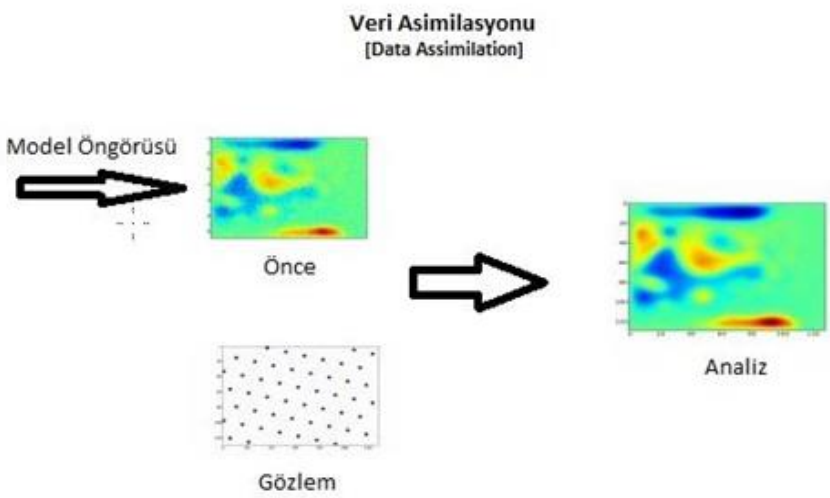
6- X-ray tomografi için düz problem, X-ray projeksiyon görüntüsünü elde etme. Ters problem ise, X-ray bilinmeyen vücudun fiziksel kısmının X – ray görüntü yapısından belirleme. [33]



Şekil 2.4 Ters Problem Uygulamasına Örnek

7- Veri Asimilasyonu (Data Assimilation): *Veri asimilasyonu* elde edilen gözlemleri ve belli bir zaman aralığında matematiksel üretilmiş modellerle, tahminleri sentezleyip, bu bilgiler ışığında oluşturulan sistemin en iyi tahminini bulmayı amaçlamaktadır. Bilgisayar aracılığıyla yararlanılan sayısal model gerçek yaşamda fiziksel bir modele yaklaşım olduğu için bilgisayar aracılığıyla yapılan benzetimler, gerçek yaşamdaki fiziksel durumla örtüşmeyebilir. Bu farklardan doğan modelin zamanla yanlış yönlerdeki gelişimi gözlemlerle düzeltilebilir.

Veri asimilasyonuna, küresel değişimin gözlenmesi, uyduların yörünge tahmini, meteorolojik açıdan hava tahmini, uçakların belirli hava koşullarında otomatik iniş yapması gibi örnekler verilebilir.



Şekil 2.5 Veri Asimilasyon Örneği

2.2 Vektör Uzayı

$\breve{V} \neq \emptyset$ ve F^n n-boyutlu cisim[uzay] olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan, $\breve{V}$ kümesi F^n uzayı üstünde bir vektör uzayıdır.

1. $\breve{V}$ kümesi üzerinde tanımlı olan toplama işlemi (+) mevcuttur ve aşağıdaki özelliklere sahiptir.

Özellik 1: Kapalılık Özelliği $\forall\ \breve{u}, \breve{v} \in \breve{V}$ için $\breve{u} + \breve{v}$ tanımlıdır ve $\breve{u} + \breve{v} \in \breve{V}$.

Özellik 2: Birleşme Özelliği**:** $\forall \breve{u}, \breve{v}, \breve{w} \in \breve{V}$ için $(\breve{u} + \breve{v}) + \breve{w} = \breve{u} + (\breve{v} + \breve{w})$ $\breve{V}$ kümesi üzerinde mevcuttur.

Özellik 3: Birim eleman**:** $0 \in \breve{V}$ ve $\forall \breve{u} \in \breve{V}$ için $\breve{u} + 0 = 0 + \breve{u}$, $\breve{V}$ kümesi üzerinde toplama işlemine göre birim eleman vardır.

Özellik 4: Ters Eleman: $\forall \breve{u} \in \breve{V}$ için, $\breve{V}$ kümesi içerisinde $-\breve{u}$ ile gösterilen ve $\breve{u} + (-\breve{u}) = 0$ ve $(-\breve{u}) + \breve{u} = 0$ eşitliklerini sağlayan ters bir $-\breve{u}$ elemanı mevcuttur.

Özellik 5: Değişme Özelliği: $\forall \breve{u}, \breve{v} \in \breve{V}$ için $\breve{u} + \breve{v} = \breve{v} + \breve{u}$, $\breve{V}$ kümesinde toplama işleminin değişme özelliği mevcuttur.

2. $Fx\breve{V} \to \breve{V}$ $(\varsigma, \breve{u}) \to \varsigma\breve{u}$ biçiminde, skaler ile çarpma işlemi mevcuttur ve aşağıdaki önermeleri sağlar.

Özellik 6: $\forall \varsigma \in F$ ve $\forall\ \breve{u}, \breve{v} \in \breve{V}$ için, $\varsigma(\breve{u} + \breve{v}) = \varsigma\breve{u} + \varsigma\breve{v}$

Özellik 7: $\forall \alpha, \beta \in F$ ve $\forall \breve{u} \in \breve{V}$ için $(\alpha + \beta)\breve{u} = \alpha\breve{u} + \beta\breve{u}$

Özellik 8: $\forall \alpha, \beta \in F$ ve $\forall \breve{u} \in \breve{V}$ için $(\alpha\beta)\breve{u} = \alpha(\beta\breve{u})$

Özellik 9: F nin çarpmaya göre birim elemanı (1) için, V nin her elemanı için $1\breve{u}$=$\breve{u}$

2.3 Normlu Uzay ve Banach Uzayı:

X bir vektör uzayı , $x, y \in X$ iki vektör olsun ve α skaler olmak üzere

1) $\|x\| \geq 0$

2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$

3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \ \|y\|$ özelliklerini sağlayan $\|\ .\ \|$ fonksiyonuna X uzayı üzerinde bir norm, $(X, \|\ .\ \|)$ ikilisinde bir normlu uzay adı verilir.

$(X, \|\ .\ \|$ bir normlu vektör uzayı olmak üzere XxX üzerine tanımlanan

$d(x, u) = \|x - y\|$ fonksiyonu X üzerinde b ir metriktir ve bu metriğe norm tarafından üretilen metrik denir.

Bu metrik ile tam olan bir normlu uzaya ***Banach uzayı*** denir.

2.4 İç Çarpım Uzayı ve Hilbert Uzayı:

X bir vektör uzayı olsun. $x, y \in X$ için aşağıdaki koşulları sağlayan

$<,>: X\ x\ X \to \mathbb{R}, (x, y) \to < x, y >$ fonksiyonuna V üzerinde bir iç çarpım, X ye de bir iç çarpım uzayı adı verilir. $(X, < , >)$ ile gösterilir.

Özellik 1: $\forall\ x, y \in X$ için $< x, y > = < y, x$

Özellik 2: $\forall\ x, y \in X$ için $< x, y + z > = < x, y > \ +< x, z$

Özellik 3: $\forall\ x, y \in X\ ve\ \alpha\ \epsilon\mathbb{R}$ için $< \alpha x, y > = \alpha < x, y >= < y, \alpha x >$

Özellik 4: $\forall\ x \in X$ için $< x, x > \geq 0;\ \ < x, x > = 0\ \ \Leftrightarrow x = 0$

Eğer bir iç çarpım uzayı iç çarpımdan elde edilen norma göre tam ise bu uzay bir **Hilbert uzayı** olarak adlandırılır.

2.5 İyi konuşlandırılmış Problem (Well – Posedness)

Aşağıdaki koşulları sağlayan kısmi diferansiyel denkleme *iyi konuşlandırılmış problem* denir. (Hadamard)

(1) Bir çözümün var olması

(2) Çözümün tekliği

(3) Çözümün problemin verilerine sürekli olarak bağlı olması (başlangıç koşulları, sınır koşulları vb.)

2.6 Hilbert Uzayında Riesz Bazı

Bir H Hilbert uzayında $\{x_k\}_k$ vektör takımı, tersinir bir lineer dönüşüm altında, H için bir ortonormal bazın görüntüsü ise, H için bir Riesz bazıdır. Başka bir deyişle, H için bir ortonormal $\{e_k\}$ bazı ve tüm k lar için, T $e_k = x_k$ olacak şekilde tersinir bir T dönüşümü var ise $\{x_k\}_k$, H için bir Riesz bazıdır.

2.7 Banach Sabit Nokta Teoremi

(E, ρ) bir metrik uzay ve A: E → E bir operatör olsun. Eğer, E uzayı tam metrik uzay ve A operatörü de daraltan operatör ise, o zaman A operatörünün E uzayı içinde sabit noktası vardır ve tektir.

2.8 Kompakt Küme

(X, d) bir metrik uzay ve $E \subseteq X$olsun. Eğer *E* deki her dizi limiti *E* de olan yakınsak bir alt diziye sahip ise E kümesine kompakt küme denir.

Eğer *X* kompakt ise (X, d) metrik uzayı kompakt olur. Bir metrik uzaydaki kompakt bir küme aynı zamanda tamdır. Eğer E kümesi **kompakt** ise E kümesi kapalı ve sınırlıdır.

2.9 Düzgün Yakınsaklık

(X, d_1) ve (Y, d_2) iki metrik uzay olmak üzere; $\eta : X \to Y$ fonksiyonu ele alınsın. ∀∈> 0 için $d_1(x_1, x_2) < \delta$ iken $d_2(\eta(x_1), \eta(x_2)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa η fonksiyonu X üzerinde düzgün yakınsaktır denir

2.10 Cauchy Dizisi

(X, d) bir metrik uzay, $(x_n) \in X$ dizisi olsun∀∈> 0, $m > n \geq N$ olmak üzere, $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde bir N sayısı varsa (x_n) Cauchy dizisidir.

Tam Metrik Uzay

(X, d) bir metrik uzayında her Cauchy dizisi X deki bir noktaya yakınsıyor ise (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir.

Bir metrik uzaydaki kompakt bir küme aynı zamanda tamdır.

Schauder Sabit Nokta Teoremi

X bir Banach uzayı, $C \subseteq X$ boş kümeden farklı kompakt konveks bir alt küme ve $f: C \to C$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda f en az bir sabit noktaya sahiptir (Schauder 1930)

2.11 Stokastik Süreç ve Stokastik Diferansiyel Denklem

Stokastik süreç(rastgele süreç), zaman veya mekâna göre değişen/evrilen olguları tanımlamak için kullanılan bir olasılık modelidir. Daha kapsamlı olarak, olasılık teorisinde, stokastik süreç, değişimi rastgele bir varyasyona bağlı olan bir değişken tarafından temsil edilen bazı sistemlerin gelişimini yansıtan bir zaman dizisidir.(wikipedia)Stokastik bir süreç: tesadüfi değişkenlere [random variables] bağlı süreç olarak tanımlanabilir.Bir stokastik diferansiyel denklem (SDE), bir veya daha fazla terimin stokastik bir süreç olduğu ve aynı zamanda çözümünün de stokastik bir süreç olan bir diferansiyel denklemdir. SDE'ler, dengesiz hisse senedi fiyatları veya termal dalgalanmalara maruz kalan fiziksel sistemler gibi çeşitli olguları modellemek için kullanılır.

Parabolik Kısmi Türevli Denklem;

$$Au_{xx} + 2Bu_{xt} + Cu_{tt} + Du_x + Eu_t + F = 0 \tag{2.10}$$

Eğer $\Delta = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$ matrisi için; $\det(\Delta) = 0$ oluyorsa, ikinci merteben kısmi türevli denklem parabolik kısmi türevli denklem, $\det(\Delta) > 0$, hiperbolik kısmi türevli denklem, $\det(\Delta) < 0$, eliptik kısmi türevli denklem adını alır.

$C[\gamma, \upsilon]$: $[\gamma, \upsilon]$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlar uzayını göstermektedir.

$C^{r,s}(\Gamma)$: Γ dikdörtgen bölgesinde, (x,t) çiftlerinden oluşan, $r, s \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ (negatif olmayan tamsayılar kümesine ait, $|\eta| \leq r$, $|\mu| \leq s$ olmak üzere; kendisi, x değişkenine göre η. kısmi türevleri ve t değişkenine göre μ. kısmi türevleri sürekli olan fonksiyonlar uzayını göstermektedir.

$L_2(0,1)$: $(0,1)$ aralığı üzerinde tanımlı olan, reel değerli ve karesi Lebesque anlamında integrallenebilen fonksiyonların uzayını göstermektedir.

(ρ, u) : Ters problemin var olan, tek olan ve problem verilerine sürekli bağlı olan çözüm ikilisi

BÖLÜM 3

UYGULAMA ÖRNEKLERİ

3.1 Bazı Koşullar Altında Adveksiyon(Konveksiyon) – Difüzyon Denkleminde Yer Alan Katsayının Belirlenmesine Yönelik Bir Yaklaşım

Bir boyutlu lineer Adveksiyon-Difüzyon denklemi aşağıdaki şekildedir.

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + c\frac{\partial v}{\partial x} = \gamma\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{3.1}$$

$\frac{\partial v}{\partial \tau}$: Yığılım (Accumulation)

$\frac{\partial v}{\partial x}$: Adveksiyon

$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$: Difüzyon

Burada $c > 0$ sabit (adveksiyon hızı), γ the kinematik hız, τ zaman ve v hız değişkeni. Adveksiyon Difüzyon Denklemi, kirletici madde yoğunluğu, su-petrol damıtımı(fraksiyonu) , bir opsiyonun fiyatı gibi alanlarda kullanılmaktadır.

Tanım kümesi Λ_T ;

$$\Lambda_\tau = \{(\mathrm{x},\tau): 0 < \mathrm{x} < 1, 0 \le \tau \le \mathrm{T}\} \tag{3.2}$$

Aşağıdaki homojen olmayan Konveksiyon-Difüzyon denklemi ele alınsın.

$$\rho(\tau)\frac{\partial v}{\partial \tau} + c\frac{\partial v}{\partial x} = \gamma\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + F(x,\tau) \tag{3.3}$$

$$v(x,0) = \psi(x) \tag{3.4}$$

$$v(0,\tau) = 0,\ v_x(0,\tau) = e^{-a}v_x(1,\tau) + \eta v(1,\tau) \tag{3.5}$$

$$\int_0^1 e^{-\alpha x}v(x,\tau)dx = E(\tau) \tag{3.6}$$

burada $a = \frac{c}{2\gamma}$ ve ψ, F, E bilinen problem verileri.

(3.3)-(3.6) ‘te yer alan $\{\rho(\tau), v(x,\tau)\}$ çiftini belirleme problemi, *ters problem* olarak adlandırılır.

Standart Difüzyon Denklemine İndirgeme:

$v(x,\tau) = e^{ax+\beta\tau}u(x,\tau)$ dönüşümü kullanılarak; $a = \frac{c}{2\gamma}$ ve $\beta = \Xi(\tau)$

$v_\tau = (\beta_\tau \tau + \beta)e^{ax+\beta\tau}u + e^{ax+\beta\tau}u_\tau$

$v_x = ae^{ax+\beta\tau}u + e^{ax+\beta\tau}u_x$

$v_{xx} = a^2e^{ax+\beta\tau}u + ae^{ax+\beta\tau}u_x + ae^{ax+\beta\tau}u_x + e^{ax+\beta\tau}u_{xx}$

$e^{ax+\beta\tau}f(x,\tau) = F(x,\tau)$

(1.1) denkleminde yerine yazılırsa;

$\Longrightarrow p(\tau)(\beta_\tau\tau + \beta)u + e^{ax+\beta\tau}p(\tau)u_\tau + c\left(ae^{ax+\beta\tau}u + e^{ax+\beta\tau}u_x\right) = \gamma\left(a^2e^{ax+\beta\tau}u + ae^{ax+\beta\tau}u_x + ae^{ax+\beta\tau}u_x + e^{ax+\beta\tau}u_{xx}\right) + e^{ax+\beta\tau}f(x,\tau)$

$\Rightarrow \beta up(\tau) + \beta_\tau \tau up(\tau) + p(\tau)u_\tau + cau + cu_x = \gamma(a^2u + 2au_x + u_{xx}) + f(x,\tau)$

$\Rightarrow p(\tau)u_\tau + (\beta p(\tau) + \beta_\tau \tau p(t) + ca - a^2\gamma)u + (c - 2a\gamma)u_x = \gamma u_{xx} + f(x,\tau)$

$c - 2a\gamma = 0$;

$\beta p(\tau) + \beta_\tau \tau p(\tau) + ca - a^2\gamma = 0 \Rightarrow (\beta_\tau\tau + \beta) = \dfrac{c^2}{4\gamma p(\tau)} \Rightarrow \dfrac{d}{d\tau}(\beta\tau) = \dfrac{c^2}{4\gamma p(\tau)}$

$\Rightarrow \beta\tau = \displaystyle\int \frac{c^2}{4\gamma p(\tau)}d\tau \Rightarrow \beta = \frac{c^2}{4\gamma}\int \frac{d\tau}{p(\tau)} = \Xi(\tau)$

$\Rightarrow a = \frac{c}{2\gamma}$, $\beta = \frac{c^2}{4\gamma}\int \frac{d\tau}{p(\tau)} = \Xi(\tau)$ böylece

$$p(\tau)\frac{\partial u}{\partial \tau} = \gamma\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,\tau) \qquad (3.7)$$

elde edilir. Koşullar için;

- $v(x,0) = e^{ax}u(x,0) \Rightarrow u(x,0) = e^{-ax}.\psi(x) = \Upsilon(x) \Rightarrow \boldsymbol{u(x,0) = \Upsilon(x)}$
- $v(0,\tau) = e^{\beta\tau}u(0,\tau) \Rightarrow e^{\beta\tau}u(0,\tau) = 0 \Rightarrow e^{\beta\tau} \neq 0$; $\boldsymbol{u(0,\tau) = 0}$
- $v_x = ae^{ax+\beta\tau}u + e^{ax+\beta\tau}u_x$, $v_x(0,\tau) = a.e^{\beta\tau}u(0,\tau) + e^{\beta\tau}u_x(0,\tau)$

$v_x(1,\tau) = a.e^{a+\beta\tau}u(1,\tau) + e^{a+\beta\tau}u_x(1,\tau)$, $v(1,\tau) = e^{\beta\tau}u(1,\tau)$

$v_x(0,\tau) = e^{-a}v_x(1,\tau) + \eta v(1,\tau)$

$\Rightarrow a.e^{\beta\tau}u(0,\tau) + e^{\beta\tau}u_x(0,\tau) = a.e^{-a}.e^{a+\beta\tau}u(1,\tau) + e^{-a}.e^{a+\beta\tau}u_x(1,\tau) + \eta e^{\beta\tau}u(1,\tau)$

$\Rightarrow a.u(0,\tau) + u_x(0,\tau) = a.u(1,\tau) + u_x(1,\tau) + \eta u(1,\tau)$

$\Rightarrow u_x(0,\tau) = au(1,\tau) + u_x(1,\tau) + \eta u(1,\tau)$

$\Rightarrow u_x(0,\tau) = (a+\eta)u(1,\tau) + u_x(1,\tau)$

$\Rightarrow \boldsymbol{u_x(0,\tau) = u_x(1,\tau) + \varpi u(1,\tau)}$; $\varpi = a + \eta$

- $e^{-\beta\tau}\int_0^1 e^{-(ax)}v(x,\tau)dx = e^{-\beta\tau}\int_0^1 e^{-(ax)}e^{ax+\beta\tau}u(x,\tau)dx = \int_0^1 u(x,\tau)dx = \bar{E}(\tau)$

$\bar{E}(\tau) = e^{-\beta t}E(\tau)$

Böylece aşağıdaki denklem ve koşulları elde edilir.

$$\rho(\tau)\frac{\partial u}{\partial \tau} = \gamma\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,\tau) \tag{3.8}$$

$$u(x,0) = \Upsilon(x) \tag{3.9}$$

$$u(0,\tau) = 0,;\ u_x(0,\tau) = u_x(1,\tau) + \varpi u(1,\tau) \tag{3.10}$$

$$\int_0^1 u(x,\tau)dx = E(\tau) \tag{3.11}$$

$$\Delta_\tau = \{(\mathrm{x},\tau): 0 < \mathrm{x} < 1, 0 \le \tau \le \mathrm{T}\} \tag{3.12}$$

$\rho(\tau) > 0$ olmak üzere, $[0,T]$ aralığı üzerinde (3.8)-(3.11) problem için şartları sağlayan $C[0,T]x\ C^{2,1}(\Delta_\tau) \cap\ C^{1,0}(\overline{\Delta_\tau})$ sınıfından, $\{\rho(\tau), u(x,\tau)\}$ çiftine,(3.8)-(3.11) ters probleminin klasik çözümü denir.

İlgili denklemin iyi tanımlı(well posed) olduğunun ispatı için Referans[1] incelenebilir. Başlangıç problem verileri şu koşulları sağlıyorsa $u(x,0) = \Upsilon(x) \in C^4[0,1], \Upsilon_x(0) = \Upsilon_x(1) + \varpi\ \Upsilon_x(1), \Upsilon(0) = 0, \Upsilon_0 < 0, \Upsilon_{2n-1} < 0, n = 1,2,\ldots,\ \int_0^1 u(x,\tau)dx = E(\tau) \in C^1[0,T], E(0) = \int_0^1 \Upsilon(x)dx\,, E'(\tau) > 0;\ f(x,\tau) \in \mathrm{C}[\overline{\Lambda}_\tau], \mathrm{f}_x(0) = \mathrm{f}_x(1,\tau) + \varpi\ \mathrm{f}_x(1,\tau), f(0,\tau) = 0, 0 \le \tau \le T, F_0(\tau) > 0, F_{2n-1}(\tau) > 0$

$\Upsilon_n = \int_0^1 \Upsilon(x)Y_n(x)dx\,, \mathrm{F}_n(\tau) = \int_0^1 \mathrm{f}(x,\tau)Y_n(x)dx\,, n = 1,2,\ldots$, burada $Y_n(x)$, $L_2[0,1]$ Riesz bazı olmak üzere

Yukarı verilen varsayımlar altında, denklem sisteminin iyi tanımlı(well-posed) olduğu [2] de gösterilmiştir.

3.2 Bazı Koşullar Altında Adveksiyon(Konveksiyon) – Difüzyon Denklemi için Ters Katsayı Problemi Yaklaşımı

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + c\frac{\partial v}{\partial x} = \gamma\rho(\tau)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + F(x,\tau) \tag{3.13}$$

$$v(x,0) = \psi(x) \tag{3.14}$$

$$v(0,\tau) = 0, \quad ev_x(0,\tau) = v_x(1,\tau) + \eta v(1,\tau) \tag{3.15}$$

$$\int_0^1 e^{-x} v(x,\tau)dx = \bar{E}(\tau) \tag{3.16}$$

burada $\beta = \Omega(\tau)$ ve ψ, F, E bilinen problem verileri.

(3.13)-(3.16) ‘te yer alan $\{\rho(\tau), v(x,\tau)\}$ çiftini belirleme problemi, *ters problem* olarak adlandırılır.

Standart Difüzyon Denklemine İndirgeme

$v(x,\tau) = e^{x+\beta\tau}u(x,\tau)$ dönüşümü kullanılarak; $\beta = \Omega(\tau)$

$v_\tau = (\beta_\tau\tau + \beta)e^{x+\beta\tau}u + e^{x+\beta\tau}u_\tau$

$v_x = e^{x+\beta\tau}u + e^{x+\beta\tau}u_x = e^{x+\beta\tau}(u + u_x)$

$v_{xx} = u + 2au_x + u_{xx}$

$e^{x+\beta\tau}f(x,\tau) = F(x,\tau)$

(3.13) denkleminde yerine yazılırsa;

$\Longrightarrow (\beta_\tau\tau + \beta)u + e^{ax+\beta\tau}u_\tau + c\left(e^{ax+\beta\tau}u + e^{ax+\beta\tau}u_x\right) = \gamma\rho(\tau)\left(e^{ax+\beta\tau}u + ae^{ax+\beta\tau}u_x + ae^{ax+\beta\tau}u_x + e^{ax+\beta\tau}u_{xx}\right) + e^{ax+\beta\tau}f(x,\tau)$

$(\beta_\tau\tau + \beta)u + u_\tau + cu + cu_x = \gamma\rho(\tau)u + 2\gamma\rho(\tau)u_x + \gamma\rho(\tau)u_{xx} + f(x,\tau)$

$\Rightarrow u_\tau + (\beta + \beta_\tau\tau + c - \rho(\tau)\gamma)u + \left(c - 2\gamma\rho(\tau)\right)u_x = \gamma\rho(\tau)u_{xx} + f(x,\tau)$

$c - 2\gamma\rho(\tau) = 0 \Rightarrow c = 2\gamma\rho(\tau)$;

$\beta + \beta_\tau\tau + c - \gamma\rho(\tau) = 0 \Rightarrow \beta + \beta_\tau\tau = -\rho(\tau) \Rightarrow (\beta\tau)' = -\rho(\tau) \Rightarrow \beta = -\frac{1}{\tau}\int \rho(\tau)d\tau$

Alındığında, $u_\tau = \gamma\rho(\tau)u_{xx} + f(x,\tau)$

$$v(x,0) = e^x u(x,0) \Rightarrow u(x,0) = e^{-x}.\psi(x) = \Upsilon(x) \Rightarrow \boldsymbol{u(x,0) = \Upsilon(x)}$$

- $\boldsymbol{u(x,0) = \Upsilon(x)}$ $\quad 0 < x < 1$

$u(0,\tau) = 0; v(0,\tau) = e^{\beta\tau}u(0,\tau) \Rightarrow e^{\beta\tau}u(0,\tau) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{u(0,\tau) = 0}$

- $\boldsymbol{u(0,\tau) = 0}$

$e.v_x(0,\tau) = v_x(1,\tau) + \eta v(1,\tau)$

$\Rightarrow ee^{\beta\tau}\left(u(0,\tau) + u_x(0,\tau)\right) = e.e^{\beta\tau}\left(u(1,\tau) + u_x(1,\tau)\right) + e.e^{\beta\tau}\eta u(1,\tau)$

$\Rightarrow u(0,\tau) + u_x(0,\tau) = \left(u(1,\tau) + u_x(1,\tau)\right) + \eta u(1,\tau)$

$\Rightarrow u_x(0,\tau) = u_x(1,\tau) + (\eta + 1)u(1,\tau),; \ \varpi = \eta + 1$

$\Rightarrow \boldsymbol{u_x(0,\tau) = u_x(1,\tau) + \varpi u(1,\tau)}$

- $\boldsymbol{u_x(0,\tau) = u_x(1,\tau) + \varpi u(1,\tau)}$

$$\int_0^1 e^{-x} v(x,\tau)dx = \bar{E}(\tau) \Rightarrow \int_0^1 e^{-x} e^{x+\beta\tau} u(x,\tau)dx = \bar{E}(\tau)$$

$\Rightarrow e^{\beta\tau} \int_0^1 u(x,\tau)dx = \bar{E}(\tau) \Rightarrow \int_0^1 u(x,\tau)dx = E(\tau)$ burada $E(\tau) = e^{-\beta\tau}\bar{E}(\tau)$ dir.

- $\boldsymbol{\int_0^1 u(x,\tau)dx = E(\tau)\ 0 \le \tau \le T}$

$$u_\tau = \gamma\rho(\tau)u_{xx} + f(x,\tau) \tag{3.17}$$

$$u(x,0) = \Upsilon(x) \tag{3.18}$$

$$u(0,\tau) = 0, u_x(0,\tau) = u_x(1,\tau) + \varpi u(1,\tau) \tag{3.19}$$

$$\int_0^1 u(x,\tau)dx = E(\tau) \tag{3.20}$$

Yukarıdaki denklem sisteminin iyi tanımlı(well-posed) olduğu, [3] te gösterilmiştir.

NOT: Genelleştirme ve İndirgeme

$$Au_{xx} + Bu_x + Cu_t + Du + F(x,t) = 0 \tag{1}$$

Parabolik denklem göz önünde bulundurulsun.

(1) $Au_{xx} + Bu_x + Cu_t + D\dot{p}(t)u + F = 0$ (2)

Burada A, B, C, D sabitler, $F(x,t)$ dir. $\{\dot{p}(t), u\}$ çiftini bulma problemi üzerinde durulsun.

$u(x,t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x,t)$ dönüşümü altında, α, β sabit alındığında

$$u_t = e^{\alpha x + \beta t}(\beta v + v_t)$$

$$u_x = e^{\alpha x + \beta t}(\alpha v + v_x)$$

$$u_{xx} = e^{\alpha x + \beta t}(\alpha^2 v + 2\alpha v_x + v_{xx})$$

$$F(x,t) = e^{\alpha x + \beta t}.f(x,t)$$

$$Au_{xx} + Bu_x + Cu_t + D\dot{p}(t)u + F = 0 \tag{3}$$

Denklemde yerine yazılırsa,

$$\alpha^2 Av + 2\alpha Av_x + Av_{xx} + \alpha Bv + Bv_x + C\beta v + Cv_t + D\dot{p}(t)v + f = 0 \tag{4}$$

$$\Rightarrow Av_{xx} + \big(2\alpha A + B)v_x + (\alpha^2 A + \alpha B + C\beta + D\dot{p}(t)\big)v + f = 0$$

$\alpha = -\frac{B}{2A}$ ve $-\frac{B^2}{4A} + C\beta + D\dot{p}(t) = \rho(t)$ alınırsa,

Yeni denklem;

$$Av_{xx} + \rho(t)v + f(x,t) = 0 \tag{5}$$

Halini alır.

(2) $Au_{xx} + Bu_x + Cu_t + Du + Fp(t) = 0$ (6)

Burada A, B, C, D sabitler, $F(x,t)$ dir

$$\alpha^2 Av + 2\alpha Av_x + Av_{xx} + \alpha Bv + Bv_x + Dv + fp(t) = 0 \tag{7}$$

$$\Rightarrow Av_{xx} + (2\alpha A + B)v_x + (\alpha^2 A + \alpha B + C\beta + D)v + fp(t) = 0$$

$\alpha = -\frac{B}{2A}$,

$\alpha^2 A + \alpha B + C\beta + D = 0 \Rightarrow \frac{B^2}{4A} - \frac{B^2}{2A} + C\beta + D = 0 \Rightarrow \beta = \frac{1}{C}(\frac{B^2}{4A} - D)$ (8)

$\Rightarrow \alpha = -\frac{B}{2A}$ ve $\beta = \frac{B^2 - 4AD}{4Ac}$ alındığında, denklem (9)

$\Rightarrow Av_{xx} + f\dot{p}(t) = 0$ şeklini alır. (10)

İlgili dönüştürülmüş problemlerin çözüm çiftinin var olduğu, tek olduğu ve problemin başlangıç verilerine bağlı olduğu, önceki çalışmalar yardımıyla kolayca gösterilebilir.

Örnek: $\frac{\partial u}{\partial t} + \vartheta \frac{\partial u}{\partial x} = \varpi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma u$ (Advection Dispersion Equation) (11)

$\frac{\partial u}{\partial t} + \vartheta \frac{\partial u}{\partial x} = \varpi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f$ (Parabolic Transportation Equation) (12)

Denklemlerine dönüşüm uygulanabilir.

(12) $u_t = \varpi u_{xx} - \vartheta u_x + f$

$u(x,t) = e^{-\vartheta x} v(x,t)$ dönüşüm ile

$u_t = e^{-\vartheta x} v_t$, $f = e^{-\vartheta x} F$

$u_x = -\vartheta . e^{-\vartheta x} v + e^{-\vartheta x} v_x$

$u_{xx} = \vartheta^2 e^{-\vartheta x} v - \vartheta . e^{-\vartheta x} v_x - \vartheta e^{-\vartheta x} v_x + e^{-\vartheta x} v_{xx}$

$u_t = \varpi u_{xx} - \vartheta u_x + f$

$e^{-\vartheta x} v_t = \varpi e^{-\vartheta x}(\vartheta^2 v - 2\vartheta v_x + v_{xx}) - \vartheta e^{-\vartheta x}(-\vartheta v + v_x) + e^{-\vartheta x} F$

$\Rightarrow v_t = \varpi \vartheta^2 v - 2\vartheta \varpi v_x + \varpi v_{xx} + \vartheta^2 v - \vartheta v_x + F$

$\Rightarrow v_t = v(\varpi \vartheta^2 + \vartheta^2) - v_x(2\vartheta\, \varpi + \vartheta) + \varpi v_{xx} + F$

$\Rightarrow 2\vartheta\, \varpi + \vartheta = 0$ alınırsa $\varpi = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow v_t = \frac{1}{2}\vartheta^2\, v - \frac{1}{2} v_{xx} + F$ (13)

(3) $A\dot{p}(t) u_{xx} + Bu_x + Cu_t + Du + F = 0$ (14)

A, C, D sabit, F fonksiyon olmak üzere,

$\{\dot{p}(t), u\}$ çiftini bulma problemi üzerinde durulsun.

$u(x,t) = e^{x+\beta t} v(x,t)$ dönüşümü altında,

$u_t = e^{x+\beta t}[(\beta' t + \beta)v + v_t]$

$u_x = e^{x+\beta t}(v + v_x)$

$u_{xx} = e^{\alpha x+\beta t}(v + 2v_x + v_{xx})$

$F(x,t) = e^{x+\beta t}.f(x,t)$

$$A\dot{p}(t)u_{xx} + Bu_x + Cu_t + Du + F = 0 \qquad (15)$$

Denklemde yerine yazılırsa,

$A\dot{p}(t)v + 2A\dot{p}(t)v_x + A\dot{p}(t)v_{xx} + Bv + Bv_x + C[(\beta' t + \beta)v + v_t] + Dv + f = 0$

$\Rightarrow A\dot{p}(t)v_{xx} + (2\dot{p}(t)A + B)v_x + (\dot{p}(t)A + B + C(\beta' t + \beta) + D)v + f = 0$

$B = -2\dot{p}(t)A$ ve $-\dot{p}(t)A + C(\beta' t + \beta) + D = 0$

$\Rightarrow (\beta t)' = \frac{1}{C}[D + \dot{p}(t)A] \Rightarrow \beta t = \int \frac{1}{C}[D + \dot{p}(t)A]dt \Rightarrow \beta t = \frac{Dt}{C} + \frac{A}{C}\int \dot{p}(t)dt$

$$\Rightarrow \beta = \frac{D}{C} + \frac{A}{Ct}\int \dot{p}(t)dt \qquad (16)$$

$B = -2\dot{p}(t)A$ ve $\beta = \frac{D}{C} + \frac{A}{Ct}\int \dot{p}(t)dt$ alınırsa, yeni denklem;

$$A\dot{p}(t)v_{xx} + f(x,t) = 0 \qquad (17)$$

halini alır.

Örnek:

$A\dot{p}(t)u_{xx} + Bu_x + Cu_t + Du + F = 0$ genel denklemi için, (18)

$u(x,t) = e^{x+\beta t}v(x,t), burada\ \beta = \frac{D}{C} + \frac{A}{Ct}\int \dot{p}(t)dt$ şeklindedir.

$$u(x,0) = \Xi(x), 0 \leq x \leq 1 \qquad (19)$$

$$u(0,t) = 0,\ e.u_x(0,t) = u_x(1,t) + \varpi u(1,t) \qquad (20)$$

$$\int_0^1 e^{-x}u(x,t)dx = \mathrm{E}(t),\ 0 \leq t \leq T \qquad (21)$$

$\mathrm{E}(t) = e^{-\beta t}\mathcal{E}(t)$ dir.

$eu_x(0,t) = ee^{\beta t}\big(v(0,t) + v_x(0,t)\big) = ee^{\beta t}\big(v(1,t) + v_x(1,t)\big) + ee^{\beta t}\varpi v(1,t)$

$v(0,t) + v_x(0,t) = v(1,t) + v_x(1,t) + \varpi v(1,t)$

$v(0,t) + v_x(0,t) = (\varpi + 1)v(1,t) + v_x(1,t)\ \delta = \varpi + 1$

$\lambda_T = \{(x,t) | 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$

$$A\dot{p}(t)v_{xx} + f(x,t) = 0 \qquad (22)$$

$$v(x,0) = \psi(x), 0 \leq x \leq 1 \qquad (23)$$

$$v(0,t) = 0, v_x(0,t) = v_x(1,t) + \delta v(1,t), 0 \leq t \leq T \tag{24}$$

$$\int_0^1 v(x,t)dx = \mathcal{E}(t) \; 0 \leq t \leq T \tag{25}$$

Burada $\psi(x) = e^{-x}\Xi(x)$

$C[0,T]xC^{2,1}(\lambda_T) \cap C^{1,0}(\bar{\lambda}_T)$ sınıfından , $\{\dot{p}(t), v(x,t)\}$ çiftini bulma problemi ters problem olarak adlandırılır. Burada $\dot{p}(t) \geq 0$ dır.

Ele alınan bu problemin iyi tanımlı (well – posed) olduğu, [3] te gösterilmiştir.

3.3 Bazı Koşullar Altında Ters Geriye Dönük Homojen Olmayan Kolmogorov Tip Denklem(Backward Kolmogorov Type Equation) Üzerine

Geriye dönük Kolmogorov denklemi, matematiksel biyoloji (biyomatematik) alanında geniş olarak kullanılmaktadır. Örneğin; Matematiksel Genetikte (Difüzyon Proses Modelleri) , kalım süresine göre stokastik popülasyon modeli, Matematiksel Popülasyon Dinamikleri gibi.

Homojen olmayan Geriye Dönük Kolmogorov Denklemi şekildeki gibidir.

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + \mu(x,\tau)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\sigma^2(x,\tau)}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = F(x,\tau) \tag{3.21}$$

Λ_T , tanım kümesi

$$\Lambda_\tau = \{(\mathrm{x},\tau): 0 < \mathrm{x} < 1, 0 \le \tau \le \mathrm{T}\} \tag{3.22}$$

Aşağıdaki denklemi ele alalım.

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + \mu\frac{\partial v}{\partial x} = \gamma\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \rho(\tau)F(x,\tau) \tag{3.23}$$

$$v(x,0) = \psi(x) \tag{3.24}$$

$$v(1,\tau) = e^a v(0,\tau)\, , v_x(1,\tau) = a.v(1,\tau) \tag{3.25}$$

$$\int_0^1 e^{-(ax+\beta t)} v(x,\tau)dx = E(\tau) \tag{3.26}$$

burada $\gamma = \frac{-\sigma^2(x,\tau)}{2}$, $a = \frac{\mu}{2\gamma}$, $\beta = -\frac{\mu^2}{4\gamma}$.

(3.23)-(3.26) problem için $\{\rho(t), v(x,\tau)\}$ çiftini bulma problemi, ters problem olarak adlandırılır.

Homojen Olmayan Difüzyon Denklemine İndirgeme

$v(x,\tau) = e^{ax+\beta\tau}u(x,\tau)$ dönüşümü kullanılarak,

$v_\tau = \beta e^{ax+\beta\tau}u + e^{ax+\beta\tau}u_\tau$

$v_x = ae^{ax+\beta\tau}u + e^{ax+\beta\tau}u_x$

$v_{xx} = a^2e^{ax+\beta\tau}u + ae^{ax+\beta\tau}u_x + ae^{ax+\beta\tau}u_x + e^{ax+\beta\tau}u_{xx}$

$F(x,\tau) = e^{ax+\beta\tau}f(x,\tau)$

olur. (3.23) denkleminde yerine yazılırsa,

$\Longrightarrow \beta e^{ax+\beta\tau}u + e^{ax+\beta\tau}u_\tau + \mu\left(ae^{ax+\beta\tau}u + e^{ax+\beta\tau}u_x\right) = \gamma\left(a^2e^{ax+\beta\tau}u + ae^{ax+\beta\tau}u_x + ae^{ax+\beta\tau}u_x + e^{ax+\beta\tau}u_{xx}\right) + \rho(\tau)e^{ax+\beta\tau}f(x,\tau)$

$\Rightarrow \beta u + u_\tau + \mu au + \mu u_x = \gamma(a^2u + 2au_x + u_{xx}) + \rho(\tau)f(x,\tau)$

$\Rightarrow u_\tau + (\beta + \mu a - a^2\gamma)u + (\mu - 2a\gamma)u_x = \gamma u_{xx} + \rho(\tau)f(x,\tau)$

$\beta + \mu a - a^2\gamma = 0$ $\beta = \frac{\mu^2}{4\gamma^2}\gamma - \mu\frac{\mu}{2\gamma} \Rightarrow \beta = \frac{\mu^2}{4\gamma} - \frac{2\mu^2}{4\gamma}$

$\mu - 2a\gamma = 0$;

$\Rightarrow a = \frac{\mu}{\sigma^2}$, $\beta = -\frac{\mu^2}{2\sigma^2}$, then $\gamma = \frac{-\sigma^2(x,\tau)}{2}$

$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho(\tau) f(x,\tau) \Rightarrow \frac{\sigma^2}{2} . \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \rho(\tau) f(x,\tau)$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho(\tau) f(x,\tau)$$

Elde edilir. Koşullar için,

- $v(x,0) = e^{ax} u(x,0) \Rightarrow u(x,0) = e^{-ax} . \psi(x) = \Upsilon(x) \Rightarrow \boldsymbol{u(x,0) = \Upsilon(x)}$
- $v(1,\tau) = e^{a} v(0,\tau) \Rightarrow e^{a+\beta\tau} u(1,\tau) = e^{a} e^{\beta\tau} u(0,\tau) \Rightarrow \boldsymbol{u(0,\tau) = u(1,\tau)}$
- $v_x(1,\tau) = a. v(1,\tau) \Rightarrow v_x(1,\tau) = a e^{a+\beta\tau} u(1,\tau) + e^{a+\beta\tau} u_x(1,\tau) =$
  $a. e^{a+\beta\tau} u(1,\tau)$
  $\Rightarrow e^{a+\beta\tau} u_x(1,\tau) = 0 \Rightarrow e^{a+\beta\tau} \neq 0 \; so \; u_x(1,\tau) = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{u_x(1,\tau) = 0}$
- $\int_0^1 e^{-(ax+\beta t)} v(x,\tau) dx = \int_0^1 e^{-(ax+\beta t)} e^{ax+\beta\tau} u(x,\tau) dx = \boldsymbol{\int_0^1 u(x,\tau) dx = \bar{E}(\tau)}$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho(\tau) f(x,\tau) \qquad (3.27)$$

$$u(x,0) = \Upsilon(x) \qquad (3.28)$$

$$u(0,\tau) = u(1,\tau) \; ; \; u_x(1,\tau) = 0 \qquad (3.29)$$

$$\int_0^1 u(x,\tau) dx = \bar{E}(\tau) \qquad (3.30)$$

$\Delta_\tau = \{(\mathrm{x},\tau): 0 < \mathrm{x} < 1, 0 \leq \tau \leq \mathrm{T}\}$

Denklem yapısı koşullarıyla birlikte elde edilmiş olur. $C[0,T] x \, C^{2,1}(\Delta_\tau) \cap C^{1,0}(\overline{\Delta_\tau})$ sınıfından $\{\rho(\tau), u(x,\tau)\}$ çifti $[0,T]$ üzerinde, $\rho(\tau) > 0$, (3.27)-(3.30) denklemini ve koşulları sağlar ve (3.27)-(3.30) denkleminin klasik çözümü olarak adlandırılır.

İlgili denklemin iyi tanımlı(well posed) olduğunun ispatı, [4] te gösterilmiştir.

3.4 Bazı Koşullar Altında Geriye Dönük Kolmogorov Denklem Tipi için Ters Katsayı Problemi Yaklaşımı

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\mu(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\sigma^2(x,t)}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=F(x,t)$$

Λ_T , tanım kümesi

$\Lambda_\tau=\{(\mathrm{x},\mathrm{t}):0<\mathrm{x}<1,0\le t\le \mathrm{T}\}$

Aşağıdaki denklemi ele alalım. Burada $\sigma(x,t)$ fonksiyonu sabit alınmıştır.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\mu\frac{\partial u}{\partial x}=\gamma\rho(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F(x,t) \tag{3.31}$$

$$u(x,0)=\psi(x) \tag{3.32}$$

$$u(0,t)=0\ ,\ e.u_x(0,t)=u_x(1,t)+\eta v(1,t) \tag{3.33}$$

$$\int_0^1 e^{-x}u(x,t)dx=\bar{E}(t) \tag{3.34}$$

burada $\beta=\Omega(\tau)$, $\gamma=\frac{-\sigma^2(x,\tau)}{2}$ sabit ve ψ,F,E bilinen problem verileri.

Homojen Olmayan Difüzyon Denklemine İndirgeme

$u(x,t)=e^{x+\beta t}v(x,t)$ dönüşümü altında,

$$u_t=e^{x+\beta t}[(\beta' t+\beta)v+v_t]$$

$$u_x=e^{x+\beta t}(v+v_x)$$

$$u_{xx}=e^{\alpha x+\beta t}(v+2v_x+v_{xx})$$

$$F(x,t)=e^{x+\beta t}.f(x,t)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}+\mu\frac{\partial v}{\partial x}=\gamma\rho(\tau)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+F(x,\tau)$$

$$\Rightarrow \beta e^{x+\beta\tau}v+e^{x+\beta\tau}v_\tau+\mu\big(e^{x+\beta\tau}v+e^{x+\beta\tau}v_x\big)=\gamma\rho(\tau)\big(e^{x+\beta\tau}v+e^{x+\beta\tau}v_x+e^{\alpha x+\beta\tau}v_x+e^{x+\beta\tau}v_{xx}\big)+e^{x+\beta\tau}f(x,\tau)$$

$$\Rightarrow (\beta' t+\beta)v+v_t+\mu(v+v_x)=\gamma\rho(\tau)(v+2v_x+v_{xx})+f(x,t)$$

$$\Rightarrow v_t+(\beta' t+\beta-\gamma\rho(\tau)+\mu)v+\big(\mu-2\gamma\rho(\tau)\big)v_x=\gamma\rho(\tau)v_{xx}+f(x,t)$$

$$\mu-2\gamma\rho(\tau)=0\Rightarrow \mu=2\gamma\rho(\tau)$$

$$\beta' t+\beta-\gamma\rho(\tau)+\mu=0\Rightarrow \beta' t+\beta=-\gamma\rho(\tau)$$

$$\Rightarrow (\beta t)'=-\gamma\rho(\tau)\Rightarrow \beta=-\frac{\gamma}{t}\int p(t)dt$$

$$\Rightarrow v_t=\gamma\rho(\tau)v_{xx}+f(x,t)$$

Elde edilir. Koşullar için,

- $u(x,0)=e^x v(x,0)\Rightarrow v(x,0)=e^{-x}.\psi(x)=\Upsilon(x)\Rightarrow \boldsymbol{v(x,0)=\Upsilon(x)}$

- $\boldsymbol{v(x,0)=\Upsilon(x)} \quad 0<x<1$

$v(0,t)=0; u(0,t)=e^{\beta t}v(0,t) \Rightarrow e^{\beta\tau}v(0,t)=0 \Rightarrow \boldsymbol{v(0,t)=0}$

- $\boldsymbol{v(0,t)=0}$

$e.u_x(0,t)=u_x(1,t)+\eta v(1,t)$

$\Rightarrow ee^{\beta t}\big(v(0,t)+u_x(0,t)\big)=e.e^{\beta t}\big(v(1,t)+v_x(1,t)\big)+e.e^{\beta t}\eta v(1,t)$

$\Rightarrow v(0,t)+v_x(0,t)=\big(v(1,t)+v_x(1,t)\big)+\eta v(1,t)$

$\Rightarrow v_x(0,t)=v_x(1,t)+(\eta+1)v(1,t),; \;\; \varpi=\eta+1$

$\Rightarrow \boldsymbol{v_x(0,t)=v_x(1,t)+\varpi v(1,t)}$

- $\boldsymbol{v_x(0,t)=v_x(1,t)+\varpi v(1,t)}$

$$\int_0^1 e^{-x}u(x,t)dx=\bar{E}(t) \Rightarrow \int_0^1 e^{-x}e^{x+\beta t}v(x,\tau)dx=\bar{E}(\tau)$$

$\Rightarrow e^{\beta t}\int_0^1 v(x,t)dx=\bar{E}(t) \Rightarrow \int_0^1 v(x,t)dx=E(t)$ burada $E(t)=e^{-\beta t}\bar{E}(t)$ dir.

- $\boldsymbol{\int_0^1 v(x,\tau)dx=E(t)\ 0\le t\le T}$

$\frac{\partial u}{\partial t}=\gamma\rho(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)$ (3.35)

$u(x,0)=\Upsilon(x)$ (3.36)

$v_x(0,t)=v_x(1,t)+\varpi v(1,t)$ (3.37)

$\int_0^1 v(x,\tau)dx=E(\tau)$ (3.38)

Yukarıdaki denklem sisteminin iyi tanımlı(well-posed) olduğu,[3] te gösterilmiştir.

3.5 Çeşitli Koşullar Altında Adveksiyon Difüzyon Denklemi için Ters Problem Yaklaşımı:

Λ_T tanım kümesi,

$\Lambda_\tau = \{(\mathrm{x}, \tau): 0 < \mathrm{x} < 1, 0 \leq \tau \leq \mathrm{T}\}$

şeklinde alınsın. Aşağıdaki denklem ve koşulları ele alalım.

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + c\frac{\partial v}{\partial x} = \gamma\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \rho(\tau)F(x,\tau) \tag{3.39}$$

$$v(x,0) = \psi(x) \tag{3.40}$$

$$v(1,\tau) = e^a v(0,\tau)\ ,\ v_x(1,\tau) = a.v(1,\tau) \tag{3.41}$$

$$\int_0^1 e^{-(ax)} v(x,\tau)dx = E(\tau) \tag{3.42}$$

burada $a = \frac{c}{2\gamma}$, $\beta = -\frac{c^2}{4\gamma}$,

(3.39)-(3.42) de $\{\rho(t), v(x,\tau)\}$ çiftini bulma problemi ters problem olarak bilinir.

Standart Difüzyon Denklemine İndirgeme

$v(x,\tau) = e^{ax+\beta\tau}u(x,\tau)$ dönüşümü kullanılarak,

$v_\tau = \beta e^{ax+\beta\tau}u + e^{ax+\beta\tau}u_\tau$

$v_x = ae^{ax+\beta\tau}u + e^{ax+\beta\tau}u_x$

$v_{xx} = a^2e^{ax+\beta\tau}u + ae^{ax+\beta\tau}u_x + ae^{ax+\beta\tau}u_x + e^{ax+\beta\tau}u_{xx}$

$F(x,\tau) = e^{ax+\beta\tau}f(x,\tau)$

Elde edilir. (1.1) denkleminde yerine yazılırsa

$\Longrightarrow \beta e^{ax+\beta\tau}u + e^{ax+\beta\tau}u_\tau + c\left(ae^{ax+\beta\tau}u + e^{ax+\beta\tau}u_x\right) = \gamma\big(a^2e^{ax+\beta\tau}u + ae^{ax+\beta\tau}u_x + ae^{ax+\beta\tau}u_x + e^{ax+\beta\tau}u_{xx}\big) + \rho(\tau)e^{ax+\beta\tau}f(x,\tau)$

$\Rightarrow \beta u + u_\tau + cau + cu_x = \gamma(a^2u + 2au_x + u_{xx}) + \rho(\tau)f(x,\tau)$

$\Rightarrow u_\tau + (\beta - ca - a^2\gamma)u + (c - 2a\gamma)u_x = \gamma u_{xx} + \rho(\tau)f(x,\tau)$

$\beta + ca - a^2\gamma = 0$

$c - 2a\gamma = 0$;

$\Rightarrow a = \frac{c}{2\gamma}$, $\beta = -\frac{c^2}{4\gamma}$, then

$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \gamma\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho(\tau)f(x,\tau)$ elde edilir.

Koşullar için düzenlenme yapıldığında,

- $v(x,0) = e^{ax}u(x,0) \Rightarrow u(x,0) = e^{-ax}.\psi(x) = \Upsilon(x) \Rightarrow \boldsymbol{u(x,0) = \Upsilon(x)}$
- $v(1,\tau) = e^a v(0,\tau) \Rightarrow e^{a+\beta\tau}u(1,\tau) = e^a e^{\beta\tau}u(0,\tau) \Rightarrow \boldsymbol{u(0,\tau) = u(1,\tau)}$
- $v_x(1,\tau) = a.v(1,\tau) \Rightarrow v_x(1,\tau) = ae^{a+\beta\tau}u(1,\tau) + e^{a+\beta\tau}u_x(1,\tau) = a.e^{a+\beta\tau}u(1,\tau)$

$\Rightarrow e^{a+\beta\tau}u_x(1,\tau) = 0 \Rightarrow e^{a+\beta\tau} \neq 0\ so\ u_x(1,\tau) = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{u_x(1,\tau) = 0}$

- $\int_0^1 e^{-(ax)} v(x,\tau)dx = \int_0^1 e^{-(ax)} e^{ax+\beta\tau} u(x,\tau)dx = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{dx} = \overline{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{\tau})$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho(\tau) f(x,\tau) \tag{3.33}$$

$$u(x,0) = \Upsilon(x) \tag{3.34}$$

$$u(0,\tau) = u(1,\tau)\ ;\ u_x(1,\tau)=0 \tag{3.35}$$

$$\int_0^1 u(x,\tau)dx = \bar{E}(\tau) \tag{3.36}$$

$\Delta_\tau = \{(\mathrm{x},\tau): 0 < \mathrm{x} < 1, 0 \leq \tau \leq \mathrm{T}\}$

elde edilir.

$C[0,T]x\, C^{2,1}(\Delta_\tau) \cap\ C^{1,0}(\overline{\Delta_\tau})$ sınıfından $\{\rho(\tau), u(x,\tau)\}$ çifti $[0,T]$ üzerinde, $\rho(\tau) > 0$, (3.33)-(3.36) denklemini ve koşulları sağlar ve (3.33)-(3.36) ters probleminin klasik çözümü olarak adlandırılır.

İlgili denklemin, iyi tanımlı(well posed) olduğunun ispatı için, [4] e bakınız.

Örnek Uygulama: FKPP(Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov) Denklemi

3.6 Yerel Olmayan Sınır ve İntegral Koşullu Quasilineer Reaksiyon Difüzyon Denklemi için Ters Problem Üzerine

Reaksiyon difüzyon denklemi, FKPP denklemi, biyolojik bilimde çeşitli fenomenlerin tanımlanması için geniş çapta kullanılmaktadır. Örneğin; kontrol koşulları altında bakteri popülasyonu genişlemesi. Bakterilerin sonlu hacim etkisi nedeniyle açıklanacak bulguya olanak sağlayan sonlu ebatlı alan üzerinde büyüme, dağılma ve sürüklenmeyi içeren basit bir model. FKPP(Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov) denklemi dayanan, bakteri popülasyonu açıklayan problemler. [40]- [41]- [42]

Konsantrasyon ve sıcaklık dağılımlarını tanımlamak için kimyasal fiziğinde kullanım alanı mevcuttur. Bu durumda ısı ve kütle transferi difüzyon terimi ile tanımlanırken, reaksiyon terimi ısı ve kütle üretim oranını tanımlar. [40]- [41]- [42]

Reaksiyon-difüzyon denklemleri, birçok etkileşen bileşenden oluşan sistemlerde (kimyasal reaksiyonlar) doğal olarak ortaya çıkar ve çeşitli biyolojik, kimyasal ve fiziksel sistemlerde model, örüntü (pattern) oluşum fenomenlerini tanımlamak için yaygın olarak kullanılır. FKPP denklemi reaksiyon taşıma sürecinin geniş çaplı bir gelişimini düzenleyen ve türeten denklem olarak kullanılabilir. [40]- [41]- [42]

Genetik, çevrebilim, epidemiyoloji gibi alanlarda da kullanımı vardır.

$v: \mathbb{R}x\mathbb{R}^{+} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\eta v_{xx} - v_t = \bar{f}(v) \tag{3.37}$$

Denklemini göz önüne alalım, burada η difüzyon sabiti ve $\bar{f}(v)$ reaksiyon olarak belirtilir.

$\bar{f}(v) = \alpha v(v-1)$ alındığında; denklem, Fisher-Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov (FKPP) denklemine dönüşür.

$\eta = 1$ ve $\bar{f}(v) = av(1-v)(v-a)$ [burada $a \in (0, \frac{1}{2})$ sabit] alındığında

$v_{xx} - v_t = av(1-v)(v-a)$ FitzHugh-Nagumo denklemine (biyolojik nöronların modellenmesinde kullanılır(biyofizik alanı)) dönüşür.

Bu çalışmada, Fisher-Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov (FKPP) denklemi ele alınacaktır. Benzer şekilde, FitzHugh-Nagumo denklemi içinde aynı işlem süreçler geçerlidir.

(3.37) denklemi yeniden yazılırsa,

$$\eta v_{xx} - v_t = \alpha v(1 - v) \tag{3.38}$$

burada α ve η sabit. Yeniden düzenlendiğinde;

$$\eta u_{xx} - v_t = av - \alpha v^2$$

$$\Rightarrow v_t = \eta v_{xx} - \alpha v + \alpha v^2 \Rightarrow v_t = \eta v_{xx} - \alpha v + \bar{f}(u) \tag{3.39}$$

Elde edilir. Tanım kümesi, Ω_T , aşağıdaki gibi verilsin.

$$\Omega_T = \{(x,t): 0 < x < 1, 0 < t < T\} \tag{3.40}$$

Bu uygulamada aşağıdaki genelleştirilmiş denklemi göz önüne alalım.

$$v_t = \eta v_{xx} - \alpha\rho(t)v + f(x,t,v) \tag{3.41}$$

$$v(x,0) = \Psi(x)\,; \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{3.42}$$

başlangıç koşullu,

$$v(0,t) = 0\ ,\ \ v_x(0,t) = v_x(1,t) \qquad 0 \leq \mathrm{t} \leq \mathrm{T} \tag{3.43}$$

Sınır koşullu

$$\int_0^1 v(x,t)dx = \mathrm{E(t)}\,,\ \ t\epsilon[0,T] \tag{3.44}$$

ve integral koşullu, $f = f(x,t,v)$ lineer olmayan kaynak terimli quasilineer reaksiyon difüzyon denklemini ele alalım. $\Psi(x)$ ve $f = f(x,t,v)$ sırasıyla [0, 1] ve $\overline{\Omega_T}\ x\ (-\infty,\infty)$ üzerinde tanımlı fonksiyonlar olarak verilsin. Burada, $f(x,t,v)\sim\bar{f}(v)$ düşünülebilir.

$C[0,T]x\ C^{2,1}(\Delta_\tau) \cap\ C^{1,0}(\overline{\Delta_\tau})$ sınıfından $\{\rho(\tau), u(x,\tau)\}$ çifti $[0,T]$ üzerinde, $\rho(\tau) \geq 0$, (3.41)-(3.44) denklemini ve koşullarını sağlar ve (3.41)-(3.44) ters probleminin klasik çözümü olarak adlandırılır.

Ele alınan denklemin iyi tanımlı (well-posed) olduğu , [5] te gösterilmiştir.

3.7 Bazı Koşullar Altında Geriye Dönük Kolmogorov Tip Denklem için Ters Problem Yaklaşımı (II)

$$\Lambda_\tau = \{(\mathrm{x}, \tau): 0 < \mathrm{x} < 1, 0 \leq \tau \leq \mathrm{T}\} \tag{3.45}$$

Aşağıdaki denklemi ele alalım.

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sigma^1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho(\tau)u + F(x,\tau) \tag{3.46}$$

$$u(x,0) = \psi(x) \tag{3.47}$$

$$u(1,\tau) = e^a u(0,\tau)\ , u_x(1,\tau) = a.u(1,\tau) \tag{3.48}$$

$$\int_0^1 e^{-(ax+\beta t)} u(x,\tau)dx = \dot{E}(\tau) \tag{3.49}$$

burada $\gamma = \frac{-\sigma^2(x,\tau)}{2}$, $a = \frac{\mu}{2\gamma}$, $\beta = -\frac{\mu^2}{4\gamma}$.

Homojen Olmayan Difüzyon Denklemine İndirgeme

Using $u(x,\tau) = e^{ax+\beta\tau}v(x,\tau)$ dönüşümü kullanılarak,

$u_\tau = \beta e^{ax+\beta\tau}v + e^{ax+\beta\tau}v_\tau$

$u_x = a e^{ax+\beta\tau}v + e^{ax+\beta\tau}v_x$

$u_{xx} = a^2 e^{ax+\beta\tau}v + a e^{ax+\beta\tau}v_x + a e^{ax+\beta\tau}v_x + e^{ax+\beta\tau}v_{xx}$

$F(x,\tau) = e^{ax+\beta\tau}f(x,\tau)$

olur. (1.1) denkleminde yerine yazılırsa,

$\Longrightarrow \beta e^{ax+\beta\tau}v + e^{ax+\beta\tau}v_\tau + \mu\left(a e^{ax+\beta\tau}v + e^{ax+\beta\tau}v_x\right) = \gamma\big(a^2 e^{ax+\beta\tau}v + a e^{ax+\beta\tau}v_x + a e^{ax+\beta\tau}v_x + e^{ax+\beta\tau}v_{xx}\big) + \rho(\tau)e^{ax+\beta\tau}v + e^{ax+\beta\tau}f(x,\tau)$

$\Rightarrow \beta v + v_\tau + \mu a v + \mu v_x = \gamma(a^2 v + 2a v_x + v_{xx}) + f(x,\tau)$

$$\Rightarrow v_\tau + \big(\beta + \mu a - a^2\gamma + \rho(\tau)\big)v + (\mu - 2a\gamma)v_x = \gamma v_{xx} + f(x,\tau)$$

$\mu - 2a\gamma = 0\ ;\ \beta + \mu a - a^2\gamma + \rho(\tau) = p(\tau)$

$\Rightarrow a = \frac{\mu}{2\gamma}$,

$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \gamma\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - p(\tau)v + f(x,\tau) \Rightarrow \frac{\sigma^2}{2}.\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial \tau} + p(\tau)v = f(x,\tau)$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \gamma\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + p(\tau)v + f(x,\tau)$$

Elde edilir. Koşullar için,

- $u(x,0) = e^{ax}v(x,0) \Rightarrow v(x,0) = e^{-ax}.\psi(x) = \Upsilon(x) \Rightarrow \boldsymbol{v(x,0) = \Upsilon(x)}$
- $u(1,\tau) = e^a u(0,\tau) \Rightarrow e^{a+\beta\tau}v(1,\tau) = e^a e^{\beta\tau}v(0,\tau) \Rightarrow \boldsymbol{v(0,\tau) = v(1,\tau)}$
- $u_x(1,\tau) = a.u(1,\tau) \Rightarrow u_x(1,\tau) = a e^{a+\beta\tau}v(1,\tau) + e^{a+\beta\tau}v_x(1,\tau) = a.e^{a+\beta\tau}v(1,\tau)$
  $\Rightarrow e^{a+\beta\tau}v_x(1,\tau) = 0 \Rightarrow e^{a+\beta\tau} \neq 0\ so\ v_x(1,\tau) = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{v_x(1,\tau) = 0}$
- $\int_0^1 e^{-(ax+\beta t)}u(x,\tau)dx = \int_0^1 e^{-(ax+\beta t)}e^{ax+\beta\tau}v(x,\tau)dx = \boldsymbol{\int_0^1 v(x,\tau)dx = \bar{E}(\tau)}$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \gamma \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + p(\tau)v + f(x,\tau) \tag{3.50}$$

$$v(x,0) = \psi(x) \qquad\qquad 0 < x < 1 \tag{3.51}$$

$$v(0,\tau) = v(1,\tau)\ ;\ v_x(1,\tau)=0 \tag{3.52}$$

$$\int_0^1 v(x,\tau)dx = E(\tau) \tag{3.53}$$

$$\Delta_\tau = \{(\mathrm{x}, \mathrm{\tau}): 0 < \mathrm{x} < 1, 0 \leq \tau \leq \mathrm{T}\}$$

Denklem yapısı koşullarıyla birlikte elde edilmiş olur. $C[0,T]x\ C^{2,1}(\Delta_\tau) \cap\ C^{1,0}(\bar{\Delta}_T)$ sınıfından $\{\rho(\tau), v(x,\tau)\}$ çifti $[0,T]$ üzerinde, $p(\tau) > 0$, (3.50)-(3.53) denklemini ve koşulları sağlar ve (3.50)-(3.53) denkleminin klasik çözümü olarak adlandırılır.

İlgili denklemin iyi tanımlı (well-posed) olduğu,[6] da gösterilmiştir.

3.8 Bazı Koşullar Altında Fokker–Planck Tipi Denklem İçin Ters Problem Yaklaşımı

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[A(x,t)u] + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}[B(x,t)u] \tag{3.54}$$

İstatistiksel mekanikte, Fokker-Planck denklemi, sürüklenme kuvvetinin etkisi altında bir parçacık hızının olasılık yoğunluk fonksiyonunun zamansal gelişimini ve rastgele kuvveti tanımlayan kısmi diferansiyel denklemdir.

Bir boyutlu Fokker-Plank Tipi (Modifiye edilmiş Fokker-Plank Denklemi) denklem aşağıda verilmiştir.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[A(x,t)u] + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}[B(x,t)u] + u$$

$$u_t = -\lambda u - \lambda t u_x + u_{xx} \tag{3.55}$$

İlgili denklem için aşağıdaki ters problem göz önüne alınsın

$$u_t = -\lambda P(t) u - \lambda t u_x + u_{xx} \tag{3.56}$$

$$u_t = -\lambda P(t) u - \lambda \frac{\partial}{\partial x}(t.u) + u_{xx} \tag{3.57}$$

$$\Rightarrow u_t = -\lambda P(t) u - \lambda[u + t u_x] + u_{xx}$$

$$\Rightarrow u_t = [-\lambda P(t) - \lambda] u - \alpha t u_x + u_{xx}$$

$\Rightarrow u_t = p(t)\lambda u - \lambda t u_x + \frac{\sigma^2}{2} u_{xx}$, burada $A(x,t) = t$ ve $B(x,t) = 1$ olarak düşünülürse, Fokker-Planck tip denklem olarak yazılabilir. $p(t) = -\lambda(P(t) + 1)$ alınırsa,

$u_t = p(t)u - \lambda t u_x + u_{xx}$ yazılır.

$$u(x,0) = \Xi(x) \tag{3.58}$$

$$u(0,t) = \frac{1}{e} u(1,t) \;\; u_x(1,t) = u(1,t) \tag{3.59}$$

$$\int_0^1 e^{-x} u(x,t)\, dx = \dot{E}(t) \tag{3.60}$$

$$\Lambda_\tau = \{(\mathrm{x},\mathrm{t}) : 0 < \mathrm{x} < 1, 0 \le t \le \mathrm{T}\}$$

$u(x,t) = e^{x+\beta t} v(x,t)$ dönüşümü altında, (β $sabit$)

$$u_t = (\beta v + v_t) e^{x+\beta t}$$

$$u_x = (v + v_x) e^{x+\beta t}$$

$$u_{xx} = (v + 2v_x + v_{xx}) e^{x+\beta t}$$

Denklemde yerine yazılırsa,

$(\beta v + v_t) e^{x+\beta t} = p(t) e^{x+\beta t} v - \lambda t e^{x+\beta t}(v + v_x) + e^{x+\beta t}(v + 2v_x + v_{xx})$,

$\beta v + v_t = p(t) v - \lambda t(v + v_x) + (v + 2v_x + v_{xx})$ denklem düzenlenirse

$$\Rightarrow v_t = [p(t) - \lambda t + 1] v - [\lambda t - 1] v_x + v_{xx}$$

$\lambda t - 1 = 0 \;\Rightarrow \lambda = \frac{1}{t}$ alınırsa, yeni denklem

$v_t = p(t)v + v_{xx}$ elde edilir. (3.61)

$u(0,t) = \frac{1}{e}u(1,t)$ $u_x(1,t) = u(1,t)$,$\int_0^1 e^{-x}u(x,t)\,dx = \dot{E}(t)$ koşulları için düzenlemeler yapılırsa,

$u(0,t) = \frac{1}{e}u(1,t) \Rightarrow e^{\beta t}v(0,t) = e^{1+\beta t}\frac{1}{e}v(1,t) \Rightarrow v(0,t) = v(1,t)$

$u_x(1,t) = u(1,t) \Rightarrow \big(v(1,t) + v_x(1,t)\big)e^{1+\beta t} = v(1,t)e^{1+\beta t} \Rightarrow v_x(1,t) = 0$

$$\int_0^1 e^{-x}u(x,t)\,dx = \dot{E}(t) \Rightarrow \int_0^1 e^{-x}e^{x+\beta t}v(x,t)dx = e^{\beta t}\int_0^1 v(x,t)dx = E(t)$$

$\int_0^1 v(x,t)dx = E(t)$, burada $E(t) = e^{-\beta t}\dot{E}(t)$

$\Delta_T = \{(x,t): 0 < x < 1, 0 \le t \le T\}$

$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + p(t)v + f(x,t)$ (3.62)

$v(x,0) = \psi(x)$ $\quad 0 < x < 1$ (3.63)

$v(0,t) = v(1,t)\ ;\ v_x(1,t)=0$ (3.64)

$\int_0^1 v(x,t)dx = E(t)$ (3.65)

İlgili problemin iyi konuşlandırılmış (well - posedness) olduğu, [6] da gösterilmiştir.

BÖLÜM 4

BURGERS DENKLEMİ VE BURGERS TİP DENKLEMLER İÇİN TERS PROBLEM YAKLAŞIMI

$$u_t + u.u_x = v.u_{xx} \tag{4.1}$$

burada $x \in X \subseteq \mathbb{R}, t \geq 0\ ve\ u: X \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ şeklindedir.

$v \geq 0$ parametresi, akışkanlar dinamiğinde, viskozite(ağdalık) olarak adlandırılır.$v > 0$ olduğunda denklem viskoz Burgers denklemi, $v = 0$ olduğunda denklem, invisid Burgers denklemi olarak bilinir. Burgers denkleminin çeşitli uygulama alanları: Akışkanlar mekaniği, doğrusal olmayan akustik, gaz dinamiği, trafik akışı.

Örneğin, Elektrik spot fiyatları, arz ve talep ilişkisi içerisinde, genelde periyodik (yıllık, haftalık ve günlük ufuklardaki), ortalama geriye dönüş, çok yüksek dalgalanma ve ani fiyat artışları sergilemektedir. Burgers denklemi, elektrik spot fiyatlarının davranışını simule etmek(benzetmek) için uygulanabilir.[1]

u : Fiyat fonksiyonu

$v.u_{xx}$: Spot Pazar denge fiyatına ulaşma eğilimi

u_x : Fiyat ortalaması ve mod arasındaki açılım(yayılım)

$u.u_x$: Momentum terimi üzerinde yüksek fiyata yönelik toplu hareket.

[1] [*Ksenia, L., Master Tezi, Burgers' equation as a model for electricity spot price behavior, Lappeenranta Teknoloji Üniversitesi, Matematik ve Fizik Bölümü*]

Burgers Denklemi için Ters Problem Yaklaşımları

4.1 Burgers Denklemi için Ters Difüzyon Katsayısı Belirleme Problemi (I)

$\mathrm{D}_T = \{(x,t) | \; 0 < x < \hbar; 0 < t < T\}$

$u_t + u.u_x = v.p(t).u_{xx}$ (4.2)

$u(x,0) = \Upsilon(x), \quad 0 \le x \le 1$ (4.3)

$u(0,t) + u(\hbar,t) = \mho(t), \quad 0 \le t \le T$ (4.4)

$\int_0^{\hbar} u(x,t)dx = \dot{E}(t); \quad 0 \le t \le T$ (4.5)

<u>Cole-Hopf dönüşümü</u> uygulandığında;

(1) $\boldsymbol{u = \psi_x}$ alındığında (4.2) denklemi;

$\psi_{xt} + \psi_x.\psi_{xx} = v.p(t).\psi_{xxx}$

denklemine dönüşür.

Her iki yanın, x göre integrali alınırsa;

$\psi_t + \frac{1}{2}(\psi_x)^2 = vp(t)\psi_{xx}$

(2) $\boldsymbol{\psi = -2v.\ln\phi}$ alındığında; denklem;

$\phi_t = v.p(t)\phi_{xx}$ yazılır.

Yukarıdaki denklemin verilen koşulları aşağıdaki şekilde elde edilir.

- $\phi(x,0) = e^{-\frac{1}{2v}\int u(x,0)dx} = \Psi(x);$

$\phi(x,0) = \Psi(x);$

$u(x,t) = -2v\frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t)}{\phi(x,t)}$ eşitliği vardır.

- $\phi(0,t) + \phi(\hbar,t) = \Theta(t)$
- $u(x,t) = -2v\frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t)}{\phi(x,t)} \Rightarrow \ln\big(\phi(x,t)\big) = -\frac{1}{2v}\int u(x,t)dx$

$\Rightarrow \; \phi(x,t) = e^{-\frac{1}{2v}\int u(x,t)dx}$

$\Rightarrow \int_0^{\hbar} \phi(x,t)dx = \int_0^{\hbar} e^{-\frac{1}{2v}\int u(x,t)dx}dx \Rightarrow \int_0^{\hbar} \phi(x,t)dx = \dot{E}(t)$

İndirgenen denklem ve koşullar aşağıdaki şekildedir.

$\Gamma_T = \{(x,t) | \; 0 < x < \hbar, 0 < t \le T\}$

$$\phi_t = v.p(t).\phi_{xx} \tag{4.6}$$

$$\phi(x,0) = \Psi(x),\ \ 0 \le x \le 1 \tag{4.7}$$

$$\phi(0,t) + \phi(\hbar,t) = \Theta(t),\ \ 0 < t \le T \tag{4.8}$$

$$\int_0^1 \phi(x,t)dx = E(t), 0 \le t \le T \tag{4.9}$$

Denklem sisteminin iyi tanımlı (well-posed) olduğu, [7] de gösterilmiştir.

4.2 Burgers Denklemi için Ters Difüzyon Katsayısı Belirleme Problemi (II)

$$\mathrm{D}_T = \{(x,t)|\, 0 < x < 1; 0 < t \leq T\} \quad (4.10)$$

$$u_t + u.u_x = v.p(t).u_{xx} \quad (4.11)$$

$$u(x,0) = \Upsilon(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.12)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = F(0,t), \quad u_x(1,t) = 0,\, 0 < t \leq 1 \quad (4.13)$$

$$q(t)u(0,t) + \int_0^1 F(x,t)dx = E(t); \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.14)$$

burada $F(x,t) = e^{-\frac{1}{2v}\int u(x,t)dx}$, $q(t) = \alpha + \beta p^{-\gamma}(t)$; $\alpha, \beta, \delta > 0$ ayırım katsayıları.

<u>Cole-Hopf dönüşümü</u> uygulandığında;

$\boldsymbol{u = \psi_x}$ alındığında (4.11) denklemi;

$\psi_{xt} + \psi_x.\psi_{xx} = v.p(t).\psi_{xxx}$

denklemine dönüşür.

Her iki yanın, x göre integrali alınırsa;

$\psi_t + \frac{1}{2}(\psi_x)^2 = vp(t)\psi_{xx}$

$\boldsymbol{\psi = -2v.\ln\phi}$ alındığında; yeni denklem

$\phi_t = v.p(t)\phi_{xx}$ olarak yazılır.

Yukarıdaki denklemin verilen koşulları aşağıdaki şekilde elde edilir.

- $\phi(x,0) = e^{-\frac{1}{2v}\int u(x,0)dx} = \Psi(x)$;

$\phi(x,0) = \Psi(x)$;

$u(x,t) = -2v\frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t)}{\phi(x,t)}$ eşitliği vardır.

- $\boldsymbol{u(0,t)} = -2v\frac{\phi_x(0,t)}{\phi(0,t)} = -2v\frac{\phi_x(1,t)}{\phi(1,t)} = \boldsymbol{u(1,t)}$

$$\Rightarrow \frac{\phi_x(0,t)}{\phi(0,t)} = \frac{\phi_x(1,t)}{\phi(1,t)} \Rightarrow \phi(0,t) \ ?\!=\!? \ \phi(1,t)$$

$$\int \frac{\phi_x(0,t)}{\phi(0,t)}dx = \int \frac{\phi_x(1,t)}{\phi(1,t)}dx \Rightarrow \ln\phi(0,t) = \ln\phi(1,t) \Rightarrow \phi(0,t) = \phi(1,t)$$

- $u_x(1,t) = 0$

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2v\frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t)}{\phi(x,t)}\right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}u(1,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2v\frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(1,t)}{\phi(1,t)}\right) = 0$$

$$-2vln\phi(1,t) = c \Rightarrow \phi(1,t) = e^{-\frac{c}{2v}}(constant) \Longrightarrow \phi_x(1,t) = 0$$

- $u(x,t) = -2v\frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t)}{\phi(x,t)} \Rightarrow \ln(\phi(x,t)) = -\frac{1}{2v}\int u(x,t)dx \Rightarrow \ \phi(x,t) = e^{-\frac{1}{2v}\int u(x,t)dx}$

$$\Rightarrow \int_0^1 \phi(x,t)dx = \int_0^1 e^{-\frac{1}{2v}\int u(x,t)dx}dx \Rightarrow \int_0^1 \phi(x,t)dx = \dot{E}(t)$$

Denklemdeki koşuldan,

$u(0,t) = F(0,t) = e^{-\frac{1}{2v}\int u(0,t)}$ şeklinde yazılır

$$\Rightarrow \ \boldsymbol{u(0,t)} = -2v\frac{\phi_x(0,t)}{\phi(0,t)} = e^{-\frac{1}{2v}\int u(0,t)dt} \Longrightarrow -2v\frac{\phi_x(0,t)}{\phi(0,t)} = e^{-\frac{1}{2v}\int -2v\frac{\phi_x(0,t)}{\phi(0,t)}dx}$$

$$\Longrightarrow -2v\frac{\phi_x(0,t)}{\phi(0,t)} = e^{\int\frac{\phi_x(0,t)}{\phi(0,t)}dx} = e^{\ln(\phi(0,t))} \Rightarrow \frac{\phi_x(0,t)}{\phi(0,t)} = -\frac{1}{2v}\phi(0,t) \Rightarrow$$

$$\phi_x(0,t) = -\frac{1}{2v}(\phi(0,t))^2$$

$$p(t)\left(-2v\frac{\phi_x(0,t)}{\phi(0,t)}\right) + \int_0^1 u(x,t)dx = E(t)$$

$$\Rightarrow p(t)u(0,t) + \int_0^1 F(x,t)dx = E(t)$$

$$\Longrightarrow p(t)\phi(0,t) + \int_0^1 \phi(x,t)dx = E(t)$$

İndirgenen denklem ve koşullar aşağıdaki şekildedir.

$\Gamma_T = \{(x,t)|\ 0 < x < 1; 0 < t \leq T\}$

$\phi_t = v.p(t).\phi_{xx}$ (4.13)

$\phi(x,0) = \Psi(x),\ 0 \leq x \leq 1$ (4.14)

$\phi(0,t) = \phi(1,t), \quad \phi_x(1,t) = 0, \ \ 0 < t \leq T$ (4.15)

$q(t)\phi(0,t) + \int_0^1 \phi(x,t)dx = E(t), 0 \leq t \leq T$ (4.16)

Burada $\int_0^1 \phi(x,t)dx = \int_0^1 e^{-\frac{1}{2v}\int u(x,t)dx}dx \Rightarrow \int_0^1 \phi(x,t)dx = \dot{E}(t)$

İyi konuşlandırılmış(well-posed) olduğu,[8] te gösterilmiştir.

4.3 Yerel Olmayan Sınır Koşulu ve İntegral Koşulu Altında Ters Katsayılı Burgers Denklemi Üzerine

Ele alacağımız problem için tanım kümesi, $\Gamma_T = \{(x,t)|\, 0 < x < 1; 0 < t \leq T\}$ şeklindedir. Aşağıdaki koşulları sağlayan Burgers denklemi için, $\{p(t), u(x,t)\}$ fonksiyon çiftini araştırma ve bulma problemini göz önüne alalım.

$$u_t + u.u_x = vp(t)u_{xx} + f(x,t) \tag{4.17}$$

$$u(x,0) = \Upsilon(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{4.18}$$

$$u(0,t) = u(1,t);\; u_x(1,t) = 0\,,\; 0 \leq t \leq T \tag{4.19}$$

$$\int_0^1 u(x,t)dx = E(t); \qquad 0 \leq t \leq T \tag{4.20}$$

$C[0,T]x\left(C^{2,1}(\Gamma_T) \cap C^{1,0}(\bar{\Gamma}_T)\right)$ sınıfından olan,$[0,T]$ aralığı üzerinde (4.17)-(4.20) koşullarını sağlayan ve $p(t) > 0$ olan, $(p(t), u(x,t))$ çiftine (4.17)-(4.20) ters probleminin klasik çözümü denir.

Cole-Hopf Dönüşümü Yardımıyla Burgers Denklemi Lineerleştirme

Cole-Hopf dönüşümü altında;

(1) $u = \psi_x$ alındığında, (4.17) denklemi aşağıdaki denkleme dönüşür.

$$\psi_{xt} + \psi_x.\psi_{xx} = v.p(t).\psi_{xxx} + f(x,t)$$

(2) Yukarıdaki denklemin her iki yanı, x e göre integral alındığında

$$\psi_t + \frac{1}{2}(\psi_x)^2 = vp(t)\psi_{xx} + f(x,t)$$

elde edilir.

(3) $\psi = -2v.\,ln\phi$ alındığında ilgili denklemi, aşağıdaki denkleme dönüşür.

$$\phi_t = v.p(t).\phi_{xx} + \bar{f}(x,t)$$

Verilen başlangıç, sınır ve integral koşulları yeniden düzenlenirse;

$$u(x,t) = -2v\frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t)}{\phi(x,t)}$$

(1) $\phi(x,0) = \Psi(x);$

$$\Rightarrow \phi(x,0) = e^{-\frac{1}{2v}\int u(x,0)dx} = \Psi(x);$$

$\phi(x,0) = \Psi(x);$

(2) $\phi(0,t) = \phi(1,t);$

$u(0,t) = u(1,t)$

$$\Rightarrow u(0,t) = -2v\frac{\phi_x(0,t)}{\phi(0,t)} = -2v\frac{\phi_x(1,t)}{\phi(1,t)} = u(1,t)$$

$$\Rightarrow \int \frac{\phi_x(0,t)}{\phi(0,t)}dx = \int \frac{\phi_x(1,t)}{\phi(1,t)}dx \Rightarrow ln\phi(0,t) = ln\phi(1,t) \Rightarrow \phi(0,t) = \phi(1,t)$$

$(\mathbf{3})$ $u_x(1,t) = 0$

$$u(x,t) = -2v\frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t)}{\phi(x,t)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2v\frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t)}{\phi(x,t)}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}u(1,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2v\frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(1,t)}{\phi(1,t)}\right) = 0$$

$$\Rightarrow -2vln\phi(1,t) = c \Rightarrow \phi(1,t) = e^{-\frac{c}{2v}}(sabit) \Longrightarrow \phi_x(1,t) = 0$$

(4) $\int_0^1 u(x,t)dx = E(t); \qquad 0 \le t \le T$

$$u(x,t) = -2v\frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t)}{\phi(x,t)} \Rightarrow \ln\big(\phi(x,t)\big) = -\frac{1}{2v}\int u(x,t)dx$$

$$\Rightarrow \phi(x,t) = e^{-\frac{1}{2v}\int u(x,t)dx}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \phi(x,t)dx = \int_0^1 e^{-\frac{1}{2v}\int u(x,t)dx}dx \Rightarrow \int_0^1 \phi(x,t)dx = \bar{E}(t)$$

Elde edilir. Yeni denklem aşağıdaki şekildedir.

$\Delta_T = \{(x,t)|\ 0 < x < 1; 0 < t \le T\}$

$$\phi_t = v.\rho(t)\phi_{xx} + \bar{f}(x,t) \tag{4.21}$$

$$\phi(x,0) = \Psi(x),\ \ 0 \le x \le 1 \tag{4.22}$$

$$\phi(0,t) = \phi(1,t), \quad \phi_x(1,t) = 0, \;\; 0 \leq t \leq T \tag{4.23}$$

$$\int_0^1 \phi(x,t)dx = \bar{E}(t), 0 \leq t \leq T \tag{4.24}$$

$C[0,T]x\left(C^{2,1}(\Gamma_T) \cap C^{1,0}(\overline{\Gamma_T})\right)$ sınıfından olan,$[0,T]$ aralığı üzerinde (4.22)-(4.24) koşullarını sağlayan ve $p(t) > 0$ olan, $(p(t), \phi(x,t))$ çiftine (4.21)-(4.24) ters probleminin klasik çözümü denir.

İyi konuşlandırılmış(well-posed) olduğu, [9] da gösterilmiştir.

4.4 Periyodik Sınır ve İntegral Koşullu Ters Burgers Tipi Denklem için Bir Yaklaşım

Aşağıdaki homojen olmayan Burgers Tip Denklemi göz önüne alalım;

$$u_t + u.u_x + f(u) = \mu u_{xx} + f(x,t) \qquad (4.25)$$

burada μ sabit.

Δ_T tanım kümesi aşağıdaki şekilde verilsin.

$$\mathrm{D}_T = \{(x,t)|\ 0 < x < 1; 0 < t \leq T\} \qquad (4.26)$$

Bu incelemede, aşağıdaki denklem ele alınacaktır.

$$u_t + u.u_x = \mu u_{xx} - p(t)f(u) + f(x,t) \qquad (4.27)$$

Burada $f(u) = \frac{1}{2\mu}.ue^{-\int \frac{u}{2\mu}dx}$ alındığında, denklem aşağıdaki gibi olur.

$$u_t + u.u_x = \mu u_{xx} - \frac{1}{2\mu}.p(t)ue^{-\int \frac{u}{2\mu}dx} + f(x,t) \qquad (4.28)$$

$$u(x,0) = \Upsilon(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \qquad (4.29)$$

Başlangıç koşullu

$$u(0,t) = u(1,t);$$

$$u_x(0,t) = u_x(1,t)\ ,\ 0 \leq t \leq T \qquad (4.30)$$

Periyodik sınır koşullu ve

$$\int_0^1 xu(x,t)dx = E(t); \qquad 0 \leq t \leq T \qquad (4.31)$$

integral koşullu denklem ele alınsın.

Cole-Hopf Dönüşümü Aracılığıyla Denklemin Lineerleştirilmesi

Cole-Hopf dönüşümü uygulandığında,

$u = \eta_x$ dönüşümü altında , (4.28) denklem aşağıdaki şekil alır.

$$\eta_{xt} + \eta_x.\eta_{xx} = \mu.\eta_{xxx} + \frac{1}{2\mu}p(t).\eta_x e^{-\frac{1}{2\mu}\eta} + f(x,t)$$

Yukarıdaki denklemin her iki yanını x göre integrali alınırsa

$$\eta_t + \frac{1}{2}(\eta_x)^2 = \mu\eta_{xx} - p(t)e^{-\frac{1}{2\mu}\eta} + \mathrm{F}$$

olur.

$\eta = -2\mu.ln\phi$ alınırsa, ilgili denklemi aşağıdaki denkleme dönüşür.

$\phi_t = \mu.\phi_{xx} - p(t).\phi + F$

Verilen başlangıç, sınır ve integral koşulları düzenlenirse,

$u(x,t) = -2\mu \frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t)}{\phi(x,t)}$

(1) $\phi(x,0) = \psi(x)$;

$\Rightarrow \phi(x,0) = e^{-\frac{1}{2v}\int u(x,0)dx} = e^{-\frac{1}{2v}\int Y(x)dx} = \psi(x)$;

$\boldsymbol{\phi(x,0) = \Psi(x)}$;

(2) $\phi(0,t) = \phi(1,t)$;

$u(0,t) = u(1,t)$

$$\Rightarrow u(0,t) = -2\mu \frac{\phi_x(0,t)}{\phi(0,t)} = -2\mu \frac{\phi_x(1,t)}{\phi(1,t)} = u(1,t)$$

$$\Rightarrow \int \frac{\phi_x(0,t)}{\phi(0,t)}dx = \int \frac{\phi_x(1,t)}{\phi(1,t)}dx \Rightarrow ln\phi(0,t) = ln\phi(1,t) \Rightarrow \phi(0,t) = \phi(1,t)$$

$(\mathbf{3})\ u_x(0,t) = u_x(1,t)$

$$u(x,t) = -2\mu \frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t)}{\phi(x,t)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2\mu \frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t)}{\phi(x,t)}\right)$$

Ve $\phi(0,t) = \phi(1,t)$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(-2\mu \frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(0,t)}{\phi(0,t)}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2\mu \frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(1,t)}{\phi(1,t)}\right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\phi(0,t) = \frac{\partial}{\partial x}\phi(1,t)$$

$\Rightarrow \phi_x(0,t) = \phi_x(1,t)$

(4) $\int_0^1 x\phi(x,t)dx = \int_0^1 xe^{-\frac{1}{2v}\int u(x,t)dx}dx \Rightarrow \int_0^1 x\phi(x,t)dx = \bar{E}(t)$

yazılır. Yeni denklem aşağıdaki şekli alır.

$\mathrm{D}_T = \{(x,t) |\ 0 < x < 1; 0 < t \leq T\}$ (4.32)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \left(P(t) - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi = 0$$

$$\phi_t = \mu . \phi_{xx} - p(t). \phi + F(x,t) \quad (4.33)$$

$$\phi(x,0) = \psi(\mathrm{x}); \qquad 0 < x < 1 \quad (4.34)$$

$$\phi(0,t) = \phi(1,t), \ \ \phi_x(0,t) = \phi_x(1,t) \quad (4.35)$$

$$\int_0^1 x\phi(x,t)dx = E(t) \ 0 < \tau < \mathrm{T} \quad (4.36)$$

Burada $[0,T]$ aralığı üzerinde (4.30)-(4.33) denklemini ve koşullarını gerçekleyen ve $P(t) > 0$ olan $C[0,T]x\, C^{2,1}(D_T) \cap \ C^{1,0}(\overline{D}_T)$ sınıfından $\{P(t), \phi(x,\tau)\}$ çifti, (4.33)-(4.36) ters probleminin klasik çözümü denir.

İlgili denklem sisteminin iyi tanımlı (well-posed) olduğu, [14] te gösterilmiştir.

4.5 Yerel Olmayan Sınır Koşullu ve İntegral Koşullu Homojen Olmayan Burgers Tip Denklem İçin Ters Problem Yaklaşımı Üzerine:

Aşağıdaki homojen olmayan Burgers Tip Denklemi göz önüne alalım;

$u_t + u.u_x + f(u) = \mu u_{xx} + g(x,t)$

burada μ sabittir.

Δ_T tanım kümesi aşağıdaki şekilde verilsin.

$\Delta_T = \{(x,t) |\ 0 < x < 1; 0 < t \leq T\}$

Bu incelemede, aşağıdaki denklem ele alınacaktır.

$$u_t + u.u_x = \mu u_{xx} - p(t)f(u) + g(x,t) \qquad (4.34)$$

Burada $f(u) = \frac{1}{2\mu}.ue^{-\int \frac{u}{2\mu}dx}$ alındığında, denklem aşağıdaki gibi olur.

$$u_t + u.u_x = \mu u_{xx} - \frac{1}{2\mu}.p(t)ue^{-\int \frac{u}{2\mu}dx} + g(x,t) \qquad (4.35)$$

$$u(x,0) = \Upsilon(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \qquad (4.36)$$

Başlangıç koşulu

$u(0,t) = u(1,t);$

$$u_x(1,t) = 0\ ,\ \ 0 \leq t \leq T \qquad (4.37)$$

Periyodik sınır koşulu

$$\int_0^1 u(x,t)dx = E(t); \qquad 0 \leq t \leq T \qquad (4.38)$$

İntegral koşullu denklem göz önüne alınsın.

Cole-Hopf Dönüşümü Aracılığıyla Denklemin Lineerleştirilmesi:

Cole-Hopf dönüşümü uygulandığında,

(I) $u = \eta_x$ dönüşümü altında , (4.34) denklem aşağıdaki şekil alır.

$\eta_{xt} + \eta_x.\eta_{xx} = \mu.\eta_{xxx} + \frac{1}{2\mu}p(t).\eta_x e^{-\frac{1}{2\mu}\eta} + g(x,t)$

Yukarıdaki denklemin her iki yanını x göre integrali alınırsa

$\eta_t + \frac{1}{2}(\eta_x)^2 = \mu\eta_{xx} - p(t)e^{-\frac{1}{2\mu}\eta} + \mathrm{G}$

olur.

$\eta = -2\mu.ln\phi$ alınırsa, ilgili denklem aşağıdaki denkleme dönüşür.

$\phi_t = \mu.\phi_{xx} - p(t).\phi + F$

Verilen başlangıç, sınır ve integral koşulları düzenlenirse,

$$u(x,t) = -2v\frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t)}{\phi(x,t)}$$

(a) $\phi(x,0) = \psi(x);$

$$\Rightarrow \phi(x,0) = \int e^{-\frac{1}{2v}\int u(x,0)dx}\,dx = e^{-\frac{1}{2v}\int Y(x)dx} = \psi(x)$$

$\phi(x,0) = \Psi(x);$

(b) $\phi(0,t) = \phi(1,t);$

$u(0,t) = u(1,t)$

$$\Rightarrow u(0,t) = -2\mu\frac{\phi_x(0,t)}{\phi(0,t)} = -2\mu\frac{\phi_x(1,t)}{\phi(1,t)} = u(1,t)$$

$$\Rightarrow \int\frac{\phi_x(0,t)}{\phi(0,t)}dx = \int\frac{\phi_x(1,t)}{\phi(1,t)}dx \Rightarrow ln\phi(0,t) = ln\phi(1,t) \Rightarrow \phi(0,t) = \phi(1,t)$$

(c) $u_x(1,t) = 0$

$$u(x,t) = -2\mu\frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t)}{\phi(x,t)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2\mu\frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t)}{\phi(x,t)}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}u(1,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2\mu\frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(1,t)}{\phi(1,t)}\right) = 0$$

$$\Rightarrow -2\mu ln\phi(1,t) = c \Rightarrow \phi(1,t) = e^{-\frac{c}{2\mu}}(constant) \Longrightarrow \phi_x(1,t) = 0$$

(d) $\int_0^1 u(x,t)dx = \bar{E}(t);\qquad 0 \le t \le T$

$$\Rightarrow \int_0^1 \phi(x,t)dx = \int_0^1 e^{-\frac{1}{2v}\int u(x,t)dx}dx \Rightarrow \int_0^1 \phi(x,t)dx = \bar{E}(t)$$

Yazılır. Yeni denklem aşağıdaki şekli alır.

$\mathrm{D}_T = \{(x,t)|\ 0 < x < 1; 0 < t \le T\}$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \left(p(t) - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi = F(x,t)$$

$$\phi_t = \mu . \phi_{xx} - p(t) . \phi + F(x,t) \tag{4.39}$$

$$\phi(x,0) = \psi(\mathrm{x}) \tag{4.40}$$

$$\phi(0,t) = \phi(1,t), \phi_x(1,t) = 0 \tag{4.41}$$

$$\int_0^1 \phi(x,t) dx = E(t) \tag{4.42}$$

$C[0,T]x \left(C^{2,1}(\mathrm{D}_T) \cap C^{1,0}(\overline{\mathrm{D}_T}) \right)$ sınıfından olan, $[0,T]$ aralığı üzerinde (4.39)-(4.42) koşullarını sağlayan ve $p(t) \geq 0$ olan, $(p(t), \phi(x,t))$ çiftine, (4.39)-(4.42) ters probleminin klasik çözümü denir.

(4.42) koşulu, yaşam bilimleri, kontrol teorisi ve ısı transferi gibi alanlarda pek çok önemli koşullardan doğmuştur.

İlgili denklem sisteminin iyi tanımlı (well-posed) olduğu, [6] da gösterilmiştir.

4.6 Yerel Olmayan Sınır Koşullu ve İntegral Koşullu Homojen Olmayan Burgers Tip Denklem İçin Ters Problem Yaklaşımı Üzerine (2)

Aşağıdaki homojen olmayan Burgers Tip Denklemi göz önüne alalım;

$u_t + u.u_x + f(u) = \mu u_{xx} + g(x,t)$

burada μ sabit.

Δ_T tanım kümesi aşağıdaki şekilde verilsin.

$\Delta_T = \{(x,t)|\ 0 < x < 1; 0 < t \le T\}$

Bu incelemede, aşağıdaki denklem ele alınacaktır.

$$u_t + u.u_x = \mu p(t) u_{xx} - f(u) + g(x,t) \tag{4.43}$$

Burada $f(u) = \frac{1}{2\mu}.ue^{-\int \frac{u}{2\mu}dx}$ alındığında, denklem aşağıdaki gibi olur.

$$u_t + u.u_x = \mu p(t) u_{xx} - \frac{1}{2\mu}.ue^{-\int \frac{u}{2\mu}dx} + g(x,t) \tag{4.44}$$

$$u(x,0) = \Upsilon(x), \quad 0 \le x \le 1 \tag{4.45}$$

Başlangıç koşulu

$u(0,t) = u(1,t);$

$$u_x(1,t) = 0\ ,\ 0 \le t \le T \tag{4.46}$$

Periyodik sınır koşulu

$$\int_0^1 u(x,t)dx = E(t); \quad 0 \le t \le T \tag{4.47}$$

İntegral koşullu denklem göz önüne alınsın.

Cole-Hopf Dönüşümü Aracılığıyla Denklemin Lineerleştirilmesi:

Cole-Hopf dönüşümü uygulandığında,

(a) $u = \eta_x$ dönüşümü altında , (4.44) denklem aşağıdaki şekil alır.

$\eta_{xt} + \eta_x.\eta_{xx} = \mu.p(t)\eta_{xxx} + \frac{1}{2\mu}\eta_x e^{-\frac{1}{2\mu}\eta} + g(x,t)$

Yukarıdaki denklemin her iki yanını x göre integrali alınırsa

$\eta_t + \frac{1}{2}(\eta_x)^2 = \mu p(t)\eta_{xx} - e^{-\frac{1}{2\mu}\eta} + \mathrm{G}$

olur.

$\eta = -2\mu.ln\phi$ alınırsa, ilgili denklemi aşağıdaki denkleme dönüşür.

$\phi_t = \mu p(t)\phi_{xx} - \phi + F$

$\phi_t = \mu p(t)\phi_{xx} - \phi$ $+F(x,\tau)$ olduğunda,

NOT: $\phi_t = \mu p(t)\phi_{xx} - \phi + F(x,\tau)$ denklemi için,

$\Rightarrow \phi(x,t) = e^{-t}\varpi(x,t)$

$F(x,\tau) = e^{-t}f(x,\tau)$ dönüşümleri kullanılarak

$\phi_t = -e^{-t}\varpi + e^{-t}\varpi_t$

$\Rightarrow \phi_x = e^{-t}\varpi_x,$

$\quad \phi_{xx} = e^{-t}\varpi_{xx}$

$\Rightarrow e^{-t}(-\varpi + \varpi_t) = e^{-t}\mu p(t)\varpi_{xx} - e^{-t}\varpi + e^{-t}f(x,\tau)$

$\Rightarrow \varpi_\tau = \mu p(t)\varpi_{xx} + f(x,\tau)$ elde edilir.

Verilen başlangıç, sınır ve integral koşulları düzenlenirse,

$u(x,t) = -2v\frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t)}{\phi(x,t)}$

(1) $\phi(x,0) = \psi(x);$

$\Rightarrow \phi(x,0) = e^{\frac{1}{2v}\int u(x,0)dx} = \psi(x);$

$\phi(x,0) = e\varpi(x,0) \Rightarrow \varpi(x,0) = \varrho(x)$

$\varpi(x,0) = \varrho(x)$

(2) $\phi(0,t) = \phi(1,t);$

$\quad u(0,t) = u(1,t)$

$$\Rightarrow u(0,t) = -2\mu\frac{\phi_x(0,t)}{\phi(0,t)} = -2\mu\frac{\phi_x(1,t)}{\phi(1,t)} = u(1,t)$$

$$\Rightarrow \int\frac{\phi_x(0,t)}{\phi(0,t)}dx = \int\frac{\phi_x(1,t)}{\phi(1,t)}dx \Rightarrow ln\phi(0,t) = ln\phi(1,t) \Rightarrow \phi(0,t) = \phi(1,t)$$

$\Rightarrow e^t\phi(0,t) = e^t\phi(1,t) \Rightarrow \varpi(0,t) = \varpi(1,t)$

$(\mathbf{3})$ $u_x(1,t) = 0$

$$u(x,t) = -2\mu\frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t)}{\phi(x,t)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2\mu\frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t)}{\phi(x,t)}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}u(1,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2\mu\frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(1,t)}{\phi(1,t)}\right) = 0$$

$$\Rightarrow -2\mu ln\phi(1,t) = c \Rightarrow \phi(1,t) = e^{-\frac{c}{2\mu}}(constant) \Longrightarrow \phi_x(1,t) = 0$$

$\Longrightarrow \phi_x(1,t) = 0, \phi_x(1,t) = e^{-t}\varpi_x(1,t) \Longrightarrow e^{-t} \neq 0$ böylece $\varpi_x(1,t) = 0$

(4) $\int_0^1 u(x,t)dx = \bar{E}(t);\qquad 0 \le t \le T$

$$\Rightarrow \int_0^1 \phi(x,t)dx = \int_0^1 e^{-\frac{1}{2v}\int_0^1 u(x,t)dx}dx \Rightarrow \int_0^1 \phi(x,t)dx = e^{-t}\int_0^1 \varpi(x,t)dx = \bar{E}(t)$$

Yazılır. Yeni denklem aşağıdaki şekli alır.

$D_T = \{(x,t) |\, 0 < x < 1; 0 < t \le T\}$

$$\left(\mu p(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\varpi - \frac{\partial \varpi}{\partial t} = f(x,t) \tag{4.48}$$

$$\varpi(0,t) = \varpi(1,t)\ \varpi_x(1,t) = 0 \tag{4.49}$$

$$\int_0^1 \varpi(x,t)dx = E(t) \tag{4.50}$$

$L_2[0,1]$ de Riesz bazı;

$\chi_{\mathbf{0}}(x) = 2\,,\ \chi_{2n-1}(x) = 4\cos(2\pi nx), \chi_{2n}(x) = 4(1-x)\sin(2\pi nx)$, n=1, 2 … (1)

$y_0(x) = x\,,\ y_{2n-1}(x) = x cos(2\pi nx), y_{2n}(x) = \sin(2\pi nx)$, n=1, 2 … (2)

(1) ve (2) sistemi [0, 1]; üzerinde bir biortnormal sistem oluşturur.

$$\langle \chi_i, y_j\rangle = \int_0^1 \chi_i(x)y_j(x)dx = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

İlgili denklem sisteminin iyi tanımlı (well-posed) olduğu, [9] da gösterilmiştir.

4.7 Periyodik Sınır Koşulu ve İntegral Koşulu Altında Burgers Denklemi İçin Ters Katsayı Problemi Üzerine

Ele alacağımız problem için tanım kümesi, $\Gamma_T = \{(x,t)|\ 0 < x < 1; 0 < t \leq T\}$ şeklindedir. Aşağıdaki koşulları sağlayan Burgers denklemi için, $\{p(t), u(x,t)\}$ fonksiyon çiftini araştırma ve bulma problemini göz önüne alalım.

$$u_t + u.u_x = vp(t)u_{xx} + f(x,t) \tag{4.51}$$

$$u(x,0) = \Upsilon(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{4.52}$$

$$u(0,t) = u(1,t);\ u_x(0,t) = \ u_x(1,t),\ 0 \leq t \leq T \tag{4.53}$$

$$\int_0^1 xu(x,t)dx = \bar{E}(t); \qquad 0 \leq t \leq T \tag{4.54}$$

$C[0,T]x\left(C^{2,1}(\Gamma_T) \cap C^{1,0}(\bar{\Gamma}_T)\right)$ sınıfından olan, $[0,T]$ aralığı üzerinde (4.51)-(4.54) denklemi ve koşullarını sağlayan ve $p(t) > 0$ olan, $(p(t), u(x,t))$ çiftine (4.51)-(4.54) ters probleminin klasik çözümü denir.

Cole-Hopf Dönüşümü Yardımıyla Burgers Denklemi Lineerleştirme

Cole-Hopf dönüşümü altında;

$u = \psi_x$ alındığında, (4.51) denklemi aşağıdaki denkleme dönüşür.

$$\psi_{xt} + \psi_x.\psi_{xx} = v.p(t).\psi_{xxx} + f(x,t)$$

Yukarıdaki denklemin her iki yanı, x e göre integral alındığında

$$\psi_t + \frac{1}{2}(\psi_x)^2 = vp(t)\psi_{xx} + f(x,t)$$

elde edilir.

$\psi = -2v.\,ln\phi$ alındığında ilgili denklemi, aşağıdaki denkleme dönüşür.

$$\phi_t = v.p(t).\phi_{xx} + \bar{f}(x,t)$$

Verilen başlangıç, sınır ve integral koşulları yeniden düzenlenirse;

$$u(x,t) = -2v\frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t)}{\phi(x,t)}$$

(a) $\phi(x,0) = \Psi(x);$

$\Rightarrow \phi(x,0) = e^{-\frac{1}{2v}\int u(x,0)dx} = \Psi(x);$

$\phi(x,0) = \Psi(x);$

(b) $\phi(0,t) = \phi(1,t);$

$u(0,t) = u(1,t)$

$$\Rightarrow u(0,t) = -2v\frac{\phi_x(0,t)}{\phi(0,t)} = -2v\frac{\phi_x(1,t)}{\phi(1,t)} = u(1,t)$$

$$\Rightarrow \int \frac{\phi_x(0,t)}{\phi(0,t)}dx = \int \frac{\phi_x(1,t)}{\phi(1,t)}dx \Rightarrow ln\phi(0,t) = ln\phi(1,t) \Rightarrow \phi(0,t) = \phi(1,t)$$

$(\boldsymbol{c})$ $u_x(0,t) = \ u_x(1,t)$

$$u(x,t) = -2\mu\frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t)}{\phi(x,t)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2\mu\frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t)}{\phi(x,t)}\right)$$

Ve $\phi(0,t) = \phi(1,t)$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(-2\mu\frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(0,t)}{\phi(0,t)}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2\mu\frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(1,t)}{\phi(1,t)}\right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\phi(0,t) = \frac{\partial}{\partial x}\phi(1,t)$$

$$\Rightarrow \phi_x(0,t) = \phi_x(1,t)$$

$$\Rightarrow -2vln\phi(1,t) = c \Rightarrow \phi(1,t) = e^{-\frac{c}{2v}}(sabit) \Longrightarrow \phi_x(1,t) = 0$$

(d) $\int_0^1 xu(x,t)dx = E(t); \qquad 0 \le t \le T$

$$u(x,t) = -2v\frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t)}{\phi(x,t)} \Rightarrow \ln\big(\phi(x,t)\big) = -\frac{1}{2v}\int u(x,t)dx \Rightarrow$$
$$\phi(x,t) = e^{-\frac{1}{2v}\int u(x,t)dx}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x\phi(x,t)dx = \int_0^1 xe^{-\frac{1}{2v}\int u(x,t)dx}dx \Rightarrow \int_0^1 x\phi(x,t)dx = E(t)$$

Elde edilir. Yeni denklem aşağıdaki şekildedir.

$\Delta_T = \{(x,t) |\ 0 < x < 1; 0 < t \le T\}$

$$\phi_t = v.p(t)\phi_{xx} + F(x,t) \tag{4.55}$$

$$\phi(x,0) = \psi(x), \ \ 0 \leq x \leq 1 \tag{4.56}$$

$$\phi(0,t) = \phi(1,t), \ \phi_x(0,t) = \phi_x(1,t) \ \ 0 \leq t \leq T \tag{4.57}$$

$$\int_0^1 x\phi(x,t)dx = E(t), 0 \leq t \leq T \tag{4.58}$$

İlgili denklem sisteminin iyi tanımlı (well-posed) olduğu,[14] te gösterilmiştir.

4.8 Çeşitli Koşullar Altında, Kardar–Parisi–Zhang (KPZ) Denklemi İçin Ters Problem Yaklaşımı (I)

$$V_\tau + \frac{(V_x)^2}{2} = \vartheta . V_{xx} + F(x,\tau) \qquad (4.59)$$

Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) denklemi, bu denklemin popülerliği, yüzey büyümesinin, kâğıt ıslatma ve kristal büyümesinden, kristal büyümesine kadar, çeşitli bağlamlarda görünen bir olgu olması nedeniyle, artan bir ara yüzü anlatan, iyi bilinen bir prototiptik denklemdir. Bir diğer nedeni, denklemin, doğrusal olmayan, gürültü etkisi ve birçok (sonsuz) serbestlik derecesine aynı anda sahip olan en basit dengesiz istatistiksel mekanik modellerden biri olarak düşünülebileceğidir. Ayrıca birçok sistem tarafından paylaşılan ve denge sistemleri için evrenselliğin enteresan bir örneği olarak hizmet eden karakteristik kritik davranışları gösterir

Yüzey büyümesi, günlük hayatımızda tanıdığımız bir olgudur. Bir sayfanın kenarını mürekkebe batırırsanız kâğıt mürekkeple kaplanınca, kuru ve ıslak bölgeler arasındaki ara yüz yavaş yavaş büyür. Örnek olarak; Evrenin genişlemesi. Bakteri kolonilerinin, orman yangınlarının, kristallerin büyümesi gibi yüzey büyümesine birçok örnek vardır. Öte yandan, yüzey büyümesini kontrol etmek, malzeme bilimi için önemli bir unsurdur.

Ele alınan problemin tanım kümesi $\Gamma_T = \{(x,\tau)|\ 0 < x < 1; 0 < \tau \le T\}$ gibi verilmektedir.

İlgili KPZ Denklemi şartlarını sağlayan $\{p(\tau), V(x,\tau)\}$ fonksiyon çiftini arama ve bulma problem düşünülsün.

Aşağıdaki denklem ve koşullar ele alınsın.

$$V_\tau + \frac{(V_x)^2}{2} = \vartheta . V_{xx} + p(\tau) . F(x,\tau) \qquad (4.60)$$

$$V_x(x,0) = \varpi(x) \qquad (4.61)$$

$$V_x(0,\tau) = V_x(1,\tau) \qquad (4.62)$$

$$V(1,\tau) = V(0,\tau) + \Xi(\tau) \qquad (4.63)$$

Ek koşul; $V_{xx}(1,\tau) = 0$

burada ϑ sabitttir.

$C[0,T]x\left(C^{2,1}(\Gamma_T)\cap C^{1,0}(\bar{\Gamma}_T)\right)$ sınıfından olan,$[0,T]$ aralığı üzerinde (4.60)-(4.62) koşullarını sağlayan ve $p(t)>0$ olan, $\{p(\tau),V(x,\tau)\}$ çiftine (4.59)-(4.62) ters probleminin klasik çözümü denir.

2. İlgili Denklemin Homojen olmayan Difüzyon Denklemine İndirgeme

Aşağıdaki dönüşümler yardımıyla;

$u=V_x\ ,\ \ f=F_x$

(4.59) deki denklemin x göre türevi alınırsa

$V_{\tau x}+V_xV_{xx}=\vartheta.V_{xxx}+p(\tau).F_x$

Böylece, homojen olmayan Burgers denklemi elde edilir.

$$u_\tau+uu_x=v.u_{xx}+p(\tau).f(x,\tau) \tag{4.63}$$

$$u(x,0)=\Upsilon(x),\quad 0\le x\le 1 \tag{4.64}$$

$$u(0,\tau)=u(1,\tau),\quad u_x(1,\tau)=0,0\le\tau\le 1 \tag{4.65}$$

$$\int_0^1 u(x,\tau)dx=E(\tau) \tag{4.66}$$

Cole-Hopf Dönüşümü yardımıyla Denklemin Lineerleştirilmesi

Cole-Hopf dönüşümü uygulandığında,

(1) $u=\psi_x$ alınırsa, (4.63) denklemi aşağıdaki denkleme dönüşür.

$\psi_{x\tau}+\psi_x.\psi_{xx}=v.\psi_{xxx}+p(\tau)f(x,\tau)$

Yukarıdaki denklemin her iki yanı x göre integrallenirse,

$\psi_\tau+\frac{1}{2}(\psi_x)^2=v\psi_{xx}+p(\tau)f(x,\tau)$

(2) $\psi=-2v.\ln\phi$ alındığında, yukarıdaki denklem aşağıdaki denkleme dönüşür.

$\phi_\tau=v.\phi_{xx}+p(\tau)f(x,\tau)$

Başlangıç, sınır ve integral koşulları tekrardan gözden geçirilirse,

$u(x,\tau)=-2v\frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,\tau)}{\phi(x,\tau)}$

(1) $\phi(x,0)=\Psi(x)$;

$\Rightarrow\phi(x,0)=e^{-\frac{1}{2v}\int u(x,0)dx}=e^{-\frac{1}{2v}\int\Upsilon(x)dx}=\Psi(x)$;

$\phi(x,0)=\Psi(x)$;

(2) $\phi(0,\tau)=\phi(1,\tau)$;

$u(0,\tau)=u(1,\tau)$

$$\Rightarrow u(0,\tau) = -2v\frac{\phi_x(0,\tau)}{\phi(0,\tau)} = -2v\frac{\phi_x(1,\tau)}{\phi(1,\tau)} = u(1,t)$$

$$\Rightarrow \int \frac{\phi_x(0,\tau)}{\phi(0,\tau)}dx = \int \frac{\phi_x(1,\tau)}{\phi(1,\tau)}dx \Rightarrow ln\phi(0,\tau) = ln\phi(1,\tau) \Rightarrow \phi(0,\tau) = \phi(1,\tau)$$

$(\mathbf{3})$ $u_x(1,\tau) = 0$

$$u(x,\tau) = -2v\frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,\tau)}{\phi(x,\tau)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}u(x,\tau) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2v\frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,\tau)}{\phi(x,\tau)}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}u(1,\tau) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2v\frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(1,\tau)}{\phi(1,\tau)}\right) = 0$$

$$\Rightarrow -2vln\phi(1,\tau) = c \Rightarrow \phi(1,\tau) = e^{-\frac{c}{2v}}(constant) \Longrightarrow \phi_x(1,\tau) = 0$$

(4) $\int_0^1 u(x,\tau)dx = E(\tau); \qquad 0 \le t \le T$

$$\Rightarrow \int_0^1 \phi(x,\tau)dx = \int_0^1 e^{-\frac{1}{2v}\int u(x,t)dx}dx \Rightarrow \int_0^1 \phi(x,\tau)dx = \bar{E}(\tau)\,, 0 \le t \le T$$

Elde edilir, yeni denklem ve koşulları aşağıdaki gibidir.

$\Delta_T = \{(x,\tau)|\ 0 < x < 1; 0 < t \le T\}$

$\phi_t = \phi_{xx} + \rho(\tau)f(x,\tau)$ (4.64)

$\phi(x,0) = \Psi(x),\ 0 \le x \le 1$ (4.65)

$\phi(0,\tau) = \phi(1,\tau), \quad \phi_x(1,\tau) = 0,\ \ 0 \le \tau \le T$ (4.66)

$\int_0^1 \phi(x,\tau)dx = \bar{E}(\tau), 0 \le t \le T$ (4.67)

$C[0,T]x\left(C^{2,1}(\Delta_T) \cap C^{1,0}(\bar{\Delta}_T)\right)$ sınıfından olan, $[0,T]$ aralığı üzerinde (4.64)-(4.67) denklemi ve koşullarını sağlayan ve $p(t) > 0$ olan, $\{p(\tau), \phi(x,\tau)\}$ çiftine (4.64)-(4.67) ters probleminin klasik çözümü denir. İlgili denklem sisteminin iyi tanımlı (well-posed) olduğu, [4] te gösterilmiştir.

4.9 Çeşitli Koşullar Altında, Kardar–Parisi–Zhang (KPZ) Tipi Denklemi (Modifiye KPZ) İçin Ters Problem Yaklaşımı (II)

$$V_t + \frac{(V_x)^2}{2} + p(t)\hbar(V) = \mu . V_{xx} + \dot{F}(x,t)$$

burada $\hbar(V) = \Im e^{-\Im V}$, ($\Im$ sabit) şeklindedir.

$$V_t + \frac{(V_x)^2}{2} + p(t)\Im e^{-\Im V} = \mu . V_{xx} + \dot{F}(x,t) \tag{4.68}$$

$$V_x(x,0) = \varpi(x) \tag{4.69}$$

$$V_x(0,\tau) = V_x(1,\tau) \tag{4.70}$$

$$V(1,\tau) = V(0,\tau) + \Xi(\tau) \tag{4.71}$$

Ek koşul; $V_{xx}(1,\tau) = 0$

$$V_t + \frac{(V_x)^2}{2} + p(t)\Im e^{-\Im V} = \mu . V_{xx} + \dot{F}(x,t)$$

İlgili Denklemi Homojen olmayan Difüzyon Denklemine İndirgeme

Aşağıdaki dönüşümler yardımıyla;
$u = V_x$, $f = \dot{F}_x$ ve $\Im = \frac{1}{2\mu}$ alındığında
(1.1) deki denklemin x göre türevi alınırsa

$$V_{tx} + V_x V_{xx} + p(t)\frac{1}{2\mu} e^{-\frac{1}{2\mu}V} V_x = \vartheta . V_{xxx} + \dot{F}_x$$

$$u_t + u u_x + p(t) u e^{-\int \frac{u}{2\mu} dx} = \mu . u_{xx} + f(x,t)$$

Böylece, homojen olmayan Burgers denklem benzeri bir denklem elde edilir.

$$u_t + u . u_x = \mu u_{xx} - \frac{1}{2\mu} e^{-\int \frac{u}{2\mu} dx} p(t) u + g(x,t) \tag{4.72}$$

$$u(x,0) = \Upsilon(x), \quad 0 \le x \le 1 \tag{4.73}$$

$$u(0,t) = u(1,t);$$

$$u_x(1,t) = 0 \, , \ 0 \le t \le T \tag{4.74}$$

$$\int_0^1 u(x,t) dx = \bar{E}(t); \qquad 0 \le t \le T \tag{4.75}$$

Not: $V(1,\tau) = V(0,\tau) + \Xi(\tau) \Rightarrow V(1,\tau) - V(0,\tau) = \Xi(\tau)$ koşulu

$\Rightarrow \int_0^1 V_x(x,\tau) dx = \Xi(\tau)$ şeklinde yazılabilir.

Cole-Hopf Dönüşümü Aracılığıyla Denklemin Lineerleştirilmesi:

Cole-Hopf dönüşümü uygulandığında,

(1) $u = \eta_x$ dönüşümü altında , (4.72) denklemi aşağıdaki şekil alır.

$$\eta_{xt} + \eta_x.\eta_{xx} = \mu.\eta_{xxx} + \frac{1}{2\mu}p(t).\eta_x e^{-\frac{1}{2\mu}\eta} + f(x,t)$$

Yukarıdaki denklemin her iki yanını x göre integrali alınırsa

$$\eta_t + \frac{1}{2}(\eta_x)^2 = \mu\eta_{xx} - p(t)e^{-\frac{1}{2\mu}\eta} + \mathrm{F}$$

olur.

(2) $\eta = -2\mu.ln\phi$ alınırsa, ilgili denklemi aşağıdaki denkleme dönüşür.

$$\phi_t = \mu.\phi_{xx} - p(t).\phi + F$$

Verilen başlangıç, sınır ve integral koşulları düzenlenirse,

$$u(x,t) = -2\mu\frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t)}{\phi(x,t)}$$

(1) $\phi(x,0) = \psi(x);$

$$\Rightarrow \phi(x,0) = e^{-\frac{1}{2v}\int u(x,0)dx} = e^{-\frac{1}{2v}\int Y(x)dx} = \psi(x);$$

$$\phi(x,0) = \Psi(x);$$

(2) $\phi(0,t) = \phi(1,t);$

$$u(0,t) = u(1,t)$$

$$\Rightarrow u(0,t) = -2\mu\frac{\phi_x(0,t)}{\phi(0,t)} = -2\mu\frac{\phi_x(1,t)}{\phi(1,t)} = u(1,t)$$

$$\Rightarrow \int\frac{\phi_x(0,t)}{\phi(0,t)}dx = \int\frac{\phi_x(1,t)}{\phi(1,t)}dx \Rightarrow ln\phi(0,t) = ln\phi(1,t) \Rightarrow \phi(0,t) = \phi(1,t)$$

$(\mathbf{3})$ $u_x(1,t) = 0$

$$u(x,t) = -2\mu\frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t)}{\phi(x,t)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2\mu\frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t)}{\phi(x,t)}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}u(1,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2\mu\frac{\frac{\partial}{\partial x}\phi(1,t)}{\phi(1,t)}\right) = 0$$

$$\Rightarrow -2\mu ln\phi(1,t) = c \Rightarrow \phi(1,t) = e^{-\frac{c}{2\mu}}(constant) \Longrightarrow \phi_x(1,t) = 0$$

(4) $\int_0^1 u(x,t)dx = \bar{E}(t); \qquad 0 \le t \le T$

$$\Rightarrow \int_0^1 \phi(x,t)dx = \int_0^1 e^{-\frac{1}{2v}\int u(x,t)dx}dx \Rightarrow \int_0^1 \phi(x,t)dx = E(t)$$

Yazılır. Yeni denklem aşağıdaki şekli alır.

$$\mathrm{D}_T = \{(x,t)|\ 0 < x < 1; 0 < t \le T\}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \left(p(t) - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\phi = F(x,t)$$

$$\phi_t = \mu.\phi_{xx} - p(t).\phi + F(x,t) \tag{4.76}$$

$$\phi(x,0) = \psi(\mathrm{x}); \tag{4.77}$$

$$\phi(0,t) = \phi(1,t), \phi_x(1,t) = 0 \tag{4.78}$$

$$\int_0^1 \phi(x,t)dx = E(t) \tag{4.79}$$

$C[0,T]x\left(C^{2,1}(\mathrm{D}_T) \cap C^{1,0}(\overline{D}_T)\right)$ sınıfından olan, $[0,T]$ aralığı üzerinde (4.76)-(4.79) koşullarını sağlayan ve $p(t) \ge 0$ olan, $(p(t),\phi(x,t))$ çiftine, (4.76)-(4.79) ters probleminin klasik çözümü denir. İlgili denklem sisteminin iyi konuşlandırılmış (well-posed) olduğu, [6] da gösterilmiştir.

BÖLÜM 5

BLACK SCHOLES DENKLEMİ VE BLACK SCHOLES TİPİ DENKLEMLER İÇİN TERS PROBLEM YAKLAŞIMI

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV = 0 \tag{5.1}$$

Black-Scholes denklemi, finans uzmanlarının ve tüccarların, finansal araçlarla (tahviller, hisse senetleri, menkul kıymetler, bonolar, vb.) ilgili fiyatları nasıl bulduklarını açıklamaktadır. Opsiyon, satın alan tarafa herhangi bir ürünün fiyatını bugünden sabitlemek koşulu ile bu ürünü ileride bir vadede satın alma ya da satma hakkını veren bir anlaşmadır, modern finansal sistemde önemli bir yer almaktadır. Türev araçları, değeri başka bir finansal varlığın veya malın değerine doğrudan bağlı olan finansal araçlar türev araç olarak adlandırılmaktadır. Türev araçlar, dayanak varlığın sahipliğinin el değiştirmesine gerek olmaksızın bu varlıkla ilgili hak ve yükümlülüklerin ticaretine imkân sağlar. Örneğin bazı türev araçları: Forward (Vadeli) İşlemler-Döviz ve emtia üzerine yapılan vadeli alım/satım işlemleridir. Opsiyon İşlemleri- Döviz, emtia, hisse endeksi üzerine yapılan, satıcısına yükümlülük, alıcısına hak sağlayan vadeli işlemlerdir. Denklemde yer alan $\boldsymbol{\sigma}$ bir malın fiyatındaki dalgalanmayı, $\boldsymbol{S}$ malın fiyatını,$\boldsymbol{V}$ zamana ve mal fiyatına bağlı bir fonksiyonu, $\boldsymbol{r}$ yıllık risk içermeyen faiz miktarını göstermektedir. Söz konusu denklem, finans sektöründe yer alan uzmanlarca, türev niteliğine ve esas alınan varlığa bağlı olarak, finansal ürünlerin değerini hesaplamada kullanılır.

Black-Scholes Denklemi gelecekte bir gün belirli bir fiyata bir şey satın almak veya satmak için doğru (ama zorunlu olmayan) değerleri görebilmemizi sağlayan bir yöntem.

Denklemi bir örnek ile açıklamaya çalışalım. γ ürünü, kilogramı ρ TL'den satın alma opsiyonunun değerini 2 şey belirleyebilir; γ ürününün fiyatı ve bu fiyatın hangi aralıklarda hareket ettiği. Fakat opsiyon değeri ve γ ürününün fiyatı (değeri) düşünüldüğü gibi basit bir şekilde değişim göstermez. Buradan hareketle eğer doğru γ ürünü portföyü ve γ ürününü alıp satmak için doğru opsiyonlara sahipseniz elinizde tamamen risksiz bir portföy vardır. γ ürünü fiyatı ve risk içermeyen fiyat aralığını bildiğiniz için, aradaki farka bakarak en iyi opsiyon değerini hesaplayabilir

Black-Scholes denklemi, finansal profesyonellerin türev niteliğine ve esas alınan varlığa dayanarak bu finansal ürünlerin değerini hesaplamalarına olanak tanır.

Opsiyon Latince bir terim olup tercih, seçim anlamına gelmektedir. Ekonomi dünyasında opsiyon sözleşmeleri herhangi bir varlığı belirli bir vadede ya da vadeye kadar belirli bir miktarda, belirli bir fiyattan alma ya da satma hakkı veren sözleşmelerdir. [Türkiye Cumhuriyet Merkez Bankası Terimler Sözlüğü, tr.wikipedia.org/wiki/Opsiyon_(finans)]

Opsiyon piyasalarında alıcı açısından iki çeşit opsiyon vardır:

- Call Option (Alım Opsiyonu)

Alıcısına gelecekte belirli bir miktarda varlığı, belirli bir fiyattan alma hakkı veren opsiyon sözleşmesidir.

- Put Option (Satım Opsiyonu)

Alıcısına gelecekte belirli bir miktarda varlığı, belirli bir fiyattan satma ya da satın alma hakkı veren opsiyon sözleşmesidir.

Bu iki opsiyonda da taraflar miktar, işlemin vadesi, vade tarihindeki fiyat ve opsiyon hakkını alan tarafın ödeyeceği prim konusunda bugünden anlaşırlar. Anlaşma tarihinde opsiyon hakkını alan taraf anlaşılan prim miktarını opsiyon hakkını veren tarafa nakden öder. Bunun dışında herhangi bir para değişimi yapılmaz.

Opsiyonların uygulanabilme vadelerine göre ise iki türü vardır: Amerikan tipi opsiyon, Avrupa tipi opsiyon.

Amerikan tipi opsiyonlar vadeden önce herhangi bir tarihte opsiyon alıcısı tarafından kullanılabilirler. Avrupa tipi opsiyonlar ise yalnızca vadesinde kullanılabilirler. Bu yüzden

Amerikan tipi opsiyonların değeri genelde Avrupa tipi opsiyonların fiyatlarından yüksektir.

ÖRNEK: Bir çiftçi tarlasındaki ürününü hasat zamanında (diyelim ki 4 ay sonra) kilosunu en az 3 TL den satmak istiyorsa bugün belirli bir prim ödeme karşılığında 4 ay sonra ürününü 3 TL den satım opsiyonu satın alır. 4 ay sonra piyasada o ürün 3 TL den daha düşük bir fiyat seviyesinde ise ürününü 3 TL den satma hakkına ship olur. Ancak eğer piyasada fiyat düzeyi 3 TL den daha yüksek ise ürününü daha yüksek olan piyasa fiyatından piyasaya satar ve bu tercihi (opsiyonu) için primin maliyetine katlanır.[Türkiye Cumhuriyet Merkez Bankası Terimler Sözlüğü, Ekonomi Sözlüğü, Eğilmez, M.]

Black-Scholes Denklemi gelecekte bir gün belirli bir fiyata bir şey satın almak veya satmak için doğru (ama zorunlu olmayan) değerleri görebilmemizi sağlar. Black-Scholes denklemi, finansal profesyonellerin türev niteliğine ve esas alınan varlığa dayanarak bu finansal ürünlerin değerini hesaplamalarına olanak tanır.

Black Scholes denklemini türetmek için kullanılan varsayımlar:

1. Hisse fiyatı, Geometrik Brown Hareketi surecine uygun olarak hareket eder.
2. Volatilite sabittir, opsiyonun vadesi boyunca değişmez.
3. Risksiz faiz r sabittir ve tüm vadeler için aynıdır.
4. Hisselerde açığa satış ve açığa satıştan elde edilen paranın kullanımı serbesttir.
5. İşlem maliyeti ve vergi yoktur. Tüm hisseler mükemmel şekilde bölünebilir.
6. Risksiz arbitraj imkânı söz konusu değildir.
7. Hisse alım satımı süreklidir.

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - r.V = 0$$

$\boldsymbol{V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS}}$ **:** İlgili terim, hava ortamında dumanın yayılışı veya bir nehirde kirliliğin yayılımı gibi bir difüzyon terimi olarak yorumlanır [15].

$\boldsymbol{rSV_S}$ **:** İlgili terim, rüzgarın havadaki dumanı sürüklemesi veya bir akıntının kirliliği sürüklemesi gibi bir konveksiyon terimi olarak yorumlanır [15].

$\boldsymbol{-r.V}$ **:** İlgili terim, yerçekiminin dumana karşı gösterdiği direnç, kumun kirliliği absorbe etmesi gibi bir direniş, reaksiyon terimi olarak yorumlanır. (Wilmott, 1998) [15].

Black Scholes (Merton) denklemi, Geriye Dönük Kolmogorov Denklemi ile ilişkilidir.

Denklemde yer alan değişkenler, farklı bir örnek için şekildeki gibi de yorumlanabilir [15].

S : Hisse senedi fiyatını

r : Risksiz faiz oranı

σ : Değişkenlik, volalite, difüzyon terimi

T : Vade, opsiyon uygulamasının bitiş tarihi

t : Şimdiki zaman

$V(S,t)$: S ve değişkenlerini içeren opsiyon değeri olarak belirtilmektedir.

Geometrik Brownian Hareket [11] ; bir alanda yarımcılara, senelik, aylık, günlük, saatlik ve hatta dakikalık fiyat dağılım ve incelemelerini sunan bir model olarak, belirsizlik durumlarında fiyatların nasıl bir yol izleyeceğini sunar. Geometrik Brownian Hareketi logaritmik getirilerin normal dağılıma sahip olması nedeniyle çalışmalarda riskli finansal varlıkların modellenmelerinde kullanılmaktadır. Bu yöntemde, parametre tahminleri maksimum olabilirlik metodu kullanılarak elde edilir [11].

1827 yılında bitkilerin taksonomi(sınıflandırılma) çalışması yapan botanik bilimci R. Brown, sıvı içerisinde bulunan ve salınan bir polen parçasının ayrıntılı mikroskobik incelemesinde yer değişiminin çok hızlı, düzensiz ve gelgit benzeri bir hareketle yol aldığını gözlemlemiştir. Ayrıca, Brown sıvı moleküllerinin polen parçacığına göre çok daha küçük ve daha hızlı hareket ettiklerini gözlemlemiştir [11].

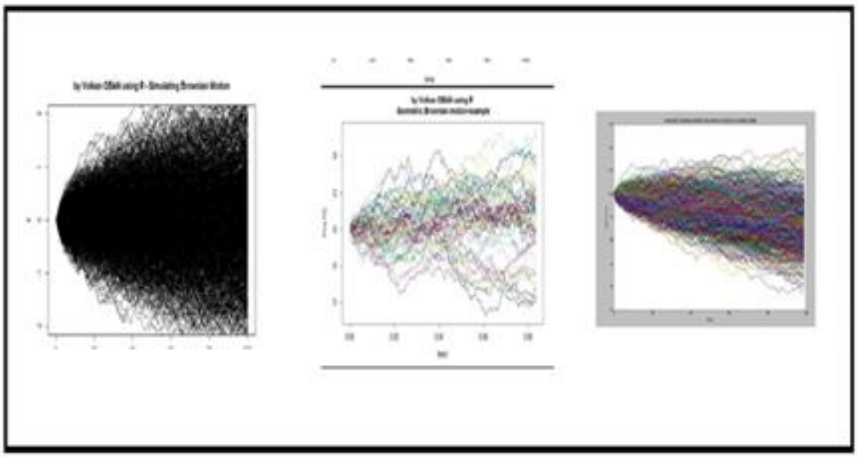
Daha sonraki zamanlarda parçacığın bu düzensiz hareketine çok küçük sıvı molekülleri ve polen parçacığı arasındaki çarpışmaların sebep olduğu kabul edilmiştir. Bu birbirlerinden bağımsız olup, herhangi bir küçük zaman aralığında çok sayıda çarpışma olmaktadır.

Brownian Hareket, günümüzde biyoloji, fizik, ekonomi, finans gibi bilim dallarında ortaya çıkabilecek, düzensiz hareketleri (rassallığı) modellemek için kullanılmaktadır.

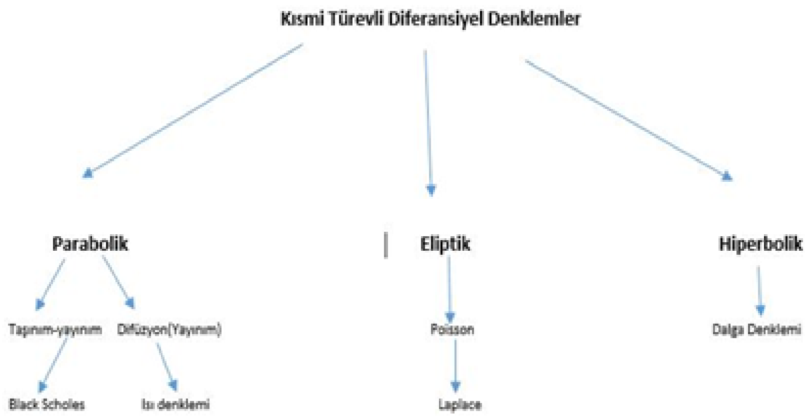
[11] Özkan, T. , Güngör, B. (2017), Geometrik Brownian Hareketi modeli ile endeks dalgalanmalarını değerlendirme: BIST-30, BIST-100 ve S&P 500 endeksleri üzerine bir uygulama

Geometrik Brownian Hareket

Finansal ortamlarda, yatırımcılar getirileri nedeniyle finansal varlıklar üzerine yoğunlaşmaktadır. Bu getirilerin davranışı ile ilgili en çok kullanılan temel varsayım normal dağılıma sahip oldukları hipotezidir. Herhangi bir t zamanında hisse senedinin logaritmik getirisinin normal dağılıma sahip olduğu kabul edilir. Hisse senedi fiyatının negatif olmayacağı gerçeği, fiyat hareketinin modellenmesinde Geometrik Brownian hareketinin kullanılmasını gerektirmektedir. Ayrıca bağımsız değişmelere sahip lognormal dağılımlı sürekli zamanlı stokastik bir süreç ancak Geometrik Brownian hareketi ile açıklanabilir (Demir, 2015). Geometrik Brownian Hareket, finans ve iktisat literatüründe hisse senetleri ve döviz kurları dinamiklerini modelleyebilmek için en sık kullanılan stokastik süreçlerden biridir. Finans literatüründe, Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama modeli ve Paul A. Samuelson tarafından ortaya konan Varant Değeri Hesaplama modeli gibi önemli modellerin arka planında Geometrik Brownian Hareket süreci bulunmaktadır (Topper, 2005).



Şekil 5.1 Geometrik Brownian Hareket



Şekil 5.2 Kısmi Türevli Dfieransiyel Denklemlerin Sınıflandırılmasına İlişkin Bir Örnek

Backward Kolmogorov- Black Scholes arasındaki ilişki:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mu \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

$$v(x,t) = e^{r(T-t)}.V(S,t); \qquad S = e^x$$

$$v_t = -re^{r(T-t)}V + e^{r(T-t)}V_t$$

$$v_x = e^{r(T-t)}SV_S$$

$$v_{xx} = e^{r(T-t)}SV_S + e^{r(T-t)}S^2V_{SS}$$

$$\Rightarrow e^{r(T-t)}[-rV + V_t] + \mu e^{r(T-t)}SV_S + e^{r(T-t)}\frac{\sigma^2}{2}(SV_S + S^2V_{SS})$$

$$\Rightarrow V_t + \frac{1}{2}\sigma^2S^2V_{SS} + (\frac{\sigma^2}{2} + \mu)SV_S - r.V = 0$$

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2S^2V_{SS} + rSV_S - r.V = 0$$

5.1 Black Scholes Çözümleri için Yöntemler

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - r.V = 0$$

$V(S,t)$: Opsiyon fiyatı, S :Stok fiyatı , t : Zaman, r : Faiz oranı

$$V(S,t) = V(S).e^{\mu t}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = V(S).\mu.e^{\mu t},\ \frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial V(S)}{\partial x}e^{\mu t}$$

$$\Rightarrow V(S).\mu.e^{\mu t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2V(S)}{dS^2}.e^{\mu t} + rS\frac{dV(S)}{dS}.e^{\mu t} - r.V(S).e^{\mu t} = 0$$

$$\Rightarrow e^{\mu t}[\tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \tfrac{d^2V(S)}{dS^2} + rS\tfrac{dV(S)}{dS} + V(S).(\mu - r)] = 0\ ;\ e^{\mu t} \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2V(S)}{dS^2} + rS\frac{dV(S)}{dS} + V(S).(\mu - r) = 0$$

$1/2\sigma^2$ böldüğümüzde,

$\Rightarrow S^2.\frac{d^2V(S)}{dS^2} + \frac{2r}{\sigma^2}.S.\frac{dV(S)}{dS} + \frac{2(\mu - r)}{\sigma^2}V(S) = 0 \rightarrow$ Euler diferansiyel denklemi

$V(S) = S^m\ \ \frac{\partial V}{\partial t} = m.S^{m-1}\ \frac{d^2V(S)}{dS^2} = m(m-1)S^{m-2}$ denklemde yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{2}\sigma^2 m^2 + rm + (\mu - n) = 0$$

$$\Rightarrow m_{1,2} = \frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{r^2 + r\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{4} - 2\mu\sigma^2}}{\sigma^2}$$

$$\Rightarrow V(S) = c_1 S^{\frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2 + r\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{4} - 2\mu\sigma^2}}{\sigma^2}} + c_2 S^{\frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2 + r\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{4} - 2\mu\sigma^2}}{\sigma^2}}$$

$$V(S,t) = e^{\mu t}[c_1 S^{\frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2 + r\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{4} - 2\mu\sigma^2}}{\sigma^2}} + c_2 S^{\frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2 + r\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{4} - 2\mu\sigma^2}}{\sigma^2}}]$$

Değişkenlerine Ayırma Yöntemi

$V(S,t) = s(S)T(t)\ \frac{\partial V}{\partial t} = s.T^!\ \frac{\partial V}{\partial S} = s'T\ \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = s''T$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{s''}{s} + rS\frac{s'}{s} + \frac{T'}{T} - r = 0$$

$a = \frac{1}{2}\sigma^2, r = b, c > 0$ (sabit)

$$\sigma^2 S^2 \frac{s''}{s} + bS\frac{s'}{s} = b - \frac{T'}{T} = c$$

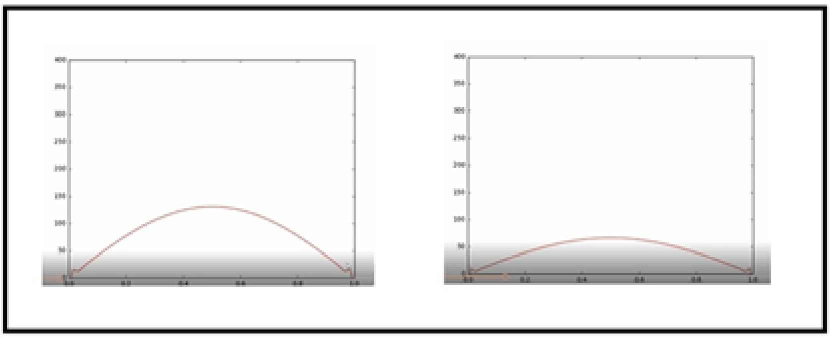
$$s(S) = S^{\frac{\left(1-\frac{2r}{\sigma^2}\right)+\sqrt{(\frac{2r}{\sigma^2}-1)^2+2\frac{c}{\sigma^2}}}{2}} + S^{\frac{\left(1-\frac{2r}{\sigma^2}\right)-\sqrt{(\frac{2r}{\sigma^2}-1)^2+2\frac{c}{\sigma^2}}}{2}}$$

$$T(t) = e^{(b-c)t}$$

$$V(S,t) = e^{(b-c)t}[\, S^{\frac{\left(1-\frac{2r}{\sigma^2}\right)+\sqrt{\left(\frac{2r}{\sigma^2}-1\right)^2+2\frac{c}{\sigma^2}}}{2}} + S^{\frac{\left(1-\frac{2r}{\sigma^2}\right)-\sqrt{\left(\frac{2r}{\sigma^2}-1\right)^2+2\frac{c}{\sigma^2}}}{2}}\ ]$$

Daha ayrıntılı inceleme için, [12] ye bakınız.

Klasik Black Scholes (Merton) Denklemini Difüzyon Denklemine indirgeyerek, indirgenen difüzyon denkleminin nümerik çözümüne yönelik Pyhton programı ekte verilmiştir**.** Aşağıdakiler hazırlanan programın çıktısının bir bölümünü içerir.



Şekil 5.3 Black Scholes Denkleminin Difüzyon Denklemine İndirgenmesine İlişkin, Difüzyon Denkleminin Pyhton Programında Nümerik Çözüm Çıktısı

5.2 Yerel Olmayan Sınır ve İntegral Koşullu *Dupire* Denklemi İçin Ters Problem Yaklaşımı Üzerine

Matematiksel Finansta, Dupire formülü (yerel volatilite**)** aşağıdaki şekilde ifade edilir. [14]

$$\sigma(S,t) = \frac{1}{S}\sqrt{2\,\frac{\frac{\partial V}{\partial t}+rS\frac{\partial V}{\partial S}}{\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}}} \tag{5.2}$$

Dupire formülü, pazardaki teklif edilen teklifler ve çağrı seçeneklerinden yerel bir volatilitede, volatilite fonksiyonuna erişilmesini sağlar. [14]

Homojen olmayan Dupire denklemi aşağıdaki gibidir.

$$V_t = \frac{1}{2}\sigma^2.S^2.V_{SS} - rSV_S + F(S,t) \tag{5.3}$$

Dupire denklemi, S (strike) fiyatı ve olgunlaşma zamanı t olan, V opsiyon fiyatı fonksiyonu için ileriye(Forward) doğru bir denklemdir. Söz konusu lokal volatilite, zaman ve fiyatın deterministtik bir fonksiyonu olarak tanımlanabilir.

$$\sigma = \sigma(S_t, t)$$

Burada aşağıdaki denklemi göz önünde bulunduralım.

$$V_t = \frac{1}{2}\sigma^2.S^2.V_{SS} - rSV_S + p(t).F(S,t) \tag{5.4}$$

$D_T = \{(S,t): 1 < S < e, 0 < t < T\}$.

Başlangıç koşulu:

$$V(\omega(S),O) = \phi(S) \;\; ; \;\; \omega(S) = ln(S) \;\; ; \; 1 < S < e \tag{5.5}$$

Periyodik sınır koşulu:

$$V(1,t) = V(e,t) \;\; , \;\; V_S(e,t) = 0 \;\; ; 0 \le \mathrm{t} \le \mathrm{T} \tag{5.6}$$

İntegral koşulu:

$$\int_1^e \frac{V(S,t)}{S}.dS = E(t) \tag{5.7}$$

2. Dupire Denklemini Difüzyon Denklemine İndirgeme

$$V_t = \frac{1}{2}\sigma^2.S^2.V_{SS} - rSV_S + p(t).F(S,t)$$

Aşağıdaki dönüşümler altında,

$$S = e^x \; ; \;\; t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}$$

$$\Rightarrow x = lnS \; ; \;\; \tau = \frac{\sigma^2}{2}(T-t)$$

$$v(x,\tau) = V(S,t) \Rightarrow V\left(e^x, T - \frac{2\tau}{\sigma^2}\right) = v\left(\ln(S), \frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right)$$

$$\Rightarrow V_t = (v_x . x_t + v_\tau . \tau_t)$$

$$\Rightarrow V_t = -\frac{1}{2}\sigma^2 . v_\tau$$

$$\Longrightarrow V_S = \frac{1}{S} v_x \; ; \; V_{SS} = \frac{1}{S^2}(v_{xx} - v_x)$$

Denklemde yerine yazılırsa,

$$\Rightarrow V_t = \frac{1}{2}\sigma^2 . S^2 . V_{SS} - rSV_S + p(t) . F(S,t)$$

$$\Rightarrow -\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 e^{2x}\frac{1}{S^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + r.S.\frac{1}{S}\frac{\partial v}{\partial x} + pF$$

$$\Rightarrow v_\tau - v_{xx} + v_x - \frac{2r}{\sigma^2}v_x + \rho(\tau).f(x,\tau)$$

$$\Rightarrow v_\tau = v_{xx} + \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)v_x + \rho(\tau).f(x,\tau)$$

$\sigma^2 = 2.r$ alındığında aşağıdaki denklem ve koşullar elde edilir.

$$\Rightarrow v_\tau = v_{xx} + \rho(\tau)f(x,\tau) \quad (5.9)$$

$$\mathrm{D}_\tau = \left\{(\mathrm{x},\tau) : 0 < \mathrm{x} < 1, 0 < \mathrm{T}.\frac{\sigma^2}{2} < \mathrm{t} < \mathrm{T}\right\} \Rightarrow \mathrm{D}_\tau = \{(\mathrm{x},\tau) : 0 < \mathrm{x} < 1, 0 < \tau < \mathrm{T}\}$$

$$v_\tau = v_{xx} + \rho(\tau)f(x,\tau) \quad (5.10)$$

$$v(x,0) = \Psi(x) \qquad 0 \le x \le 1 \quad (5.11)$$

$$v(0,t) = v(1,t), \; v_x(1,t) = 0 \; ; \; 0 \le \tau \le \mathrm{T} \quad (5.12)$$

$$\int_0^1 v(x,\tau)dx = \bar{E}(\tau) \qquad 0 \le \tau \le \mathrm{T} \quad (5.13)$$

İlgili denklem sisteminin iyi tanımlı (well-posed) olduğu, [4] te gösterilmiştir.

5.3 Vasicek Denklemi:

Vasicek modeli, faiz oranlarının evrimini anlatan matematiksel bir modeldir. Bir tek faktörlü kısa vadeli fiyat modelinin bir türüdür, çünkü faiz oranındaki hareketleri yalnızca tek bir piyasa riski kaynağı tarafından yönlendirildiği açıklanmaktadır. Tahvil fiyatları. Bir faiz oranının piyasa riski faktörü, zaman ve denge değeri olarak tanımlandığı bir faiz oranı hareketinin modellenmesi diye literatürde geçer.[13]

a: faiz oranı, b: volatilite

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}-(a-bS)\frac{\partial V}{\partial S}-SV=0\;;\; a,b,S \text{ sabit} \tag{5.14}$$

$$V(S,t)=[e^{\left(\frac{\sigma^2}{2b^2}-\frac{a}{b}\right)(T-t)-\frac{S}{b}+\frac{a}{b^2}}].\,v(x,\tau) \tag{5.15}$$

$$\tau=1-e^{-2b(T-t)}$$

$$x=\frac{2\sqrt{b}}{\sigma}\left[S-\frac{a}{b}+\frac{\sigma^2}{b^2}\right]e^{-b(T-t)}$$

$$\Rightarrow S=\frac{a}{b}+\frac{\sigma^2}{b^2}+\frac{\sigma x}{2\sqrt{b(1-\tau)}}\quad ve\;\; t=T+\frac{\ln(1-\tau)}{2b} \tag{5.16}$$

$$\Rightarrow v_\tau=v_{xx}$$

$$V(S,t)=e^{\left(\frac{\sigma^2}{2b^2}-\frac{a}{b}\right)\left(T-t+\frac{1-e^{-b(T-t)}}{b}\right)}.\,e^{\left[-\frac{\sigma^2\left(1-e^{-b(T-t)}\right)^2}{4b^3}-\frac{S\left(1-e^{-b(T-t)}\right)}{b}\right]} \tag{5.17}$$

Homojen olmayan Vasicek denklemi için ters problem yaklaşımı:

$$V_t+\frac{1}{2}\sigma^2V_{SS}-(a-bS)V_S-S.V-p(t).\hat{f}(S,t)=0 \tag{5.18}$$

$$\tau=1-e^{-2b(T-t)},\qquad x=\frac{2\sqrt{b}}{\sigma}[S-\frac{a}{b}+\frac{a^2}{b^2}]e^{-b(T-t)}$$

$$S=\frac{a}{b}-\frac{a^2}{b^2}+\frac{\sigma x}{2\sqrt{b(1-\tau)}},\qquad t=T+\frac{\ln(1-\tau)}{2b}$$

$V(S,t)=e^{\left(\frac{\sigma^2}{2b^2}-\frac{a}{b}\right)(T-t)-\frac{S}{b}+\frac{a}{b^2}}.\,v(x,\tau)$; burada $a, b\; ve\; \sigma$ sabit.

Dönüşümü altında $v_\tau=v_{xx}+P(\tau).f(x,\tau)$ homojen olmayan difüzyon denklemi elde edilir. Benzer şekilde bu ters problem için iyi konuşlandırılmış problem olduğu, yukarıdaki denklemlerle benzer olarak incelenebilir.

5.4 Bazı Koşullar Altında Black-Scholes Tipi Denklem için Tanımlanan Ters Problem için Bir Yaklaşım

Tanım Kümesi D_T aşağıdaki şekilde verilsin.

$D_T = \{(S,t): 1 < S < e, 0 < t \leq T\}$

Aşağıdaki denklem ve koşullar göz önünde bulundurulsun.

$$V_t - \frac{1}{2}\sigma^2 V_{SS} + rSV_S - r.V - P(t)F(S,t) = 0 \tag{5.19}$$

$$V(lnS, 0) = \phi(S) \tag{5.20}$$

$$V(1,t) = e^{-\alpha}V(e,t), V_s(e,t) = \frac{\alpha}{S}V(e,t) \tag{5.21}$$

$$\int_1^e S^{-(\alpha+1)}e^{-\beta(\frac{\sigma^2}{2}(T-t))}V(S,t)dS = \check{E}(t), 0 \leq t \leq T \tag{5.22}$$

where $\alpha = \frac{\sigma^2-2r}{2\sigma^2}$ and $\beta = -(\frac{\sigma^2+2r}{2\sigma^2})$

(5.19)-(5.22) tanımlanan problem için $\{P(t), V(S,t)\}$ çiftini bulma problem ters problem olarak adlandırılır.

Aşağıdaki dönüşümler yardımıyla,

$S = e^x$; $t = T - \frac{2}{\sigma^2}\tau$

$$\Longrightarrow x = lnS\,; \quad \tau = \frac{\sigma^2}{2}(T-t) \tag{5.23}$$

$v(x,\tau) = V(S,t) \Rightarrow V\left(e^x, T - \frac{2\tau}{\sigma^2}\right) = v(\ln(S), \frac{\sigma^2}{2}(T-t))$

$\Rightarrow V_t = (v_x.x_t + v_\tau.\tau_t)$

$\Rightarrow V_t = -\frac{1}{2}\sigma^2.v_\tau$

$\Longrightarrow V_S = \frac{1}{S}v_x$; $V_{SS} = \frac{1}{S^2}(v_{xx} - v_x)$

$\Rightarrow V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{SS} + rSV_S - r.V = 0$

$\Rightarrow -\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 e^{2x}\frac{1}{S^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + r.S.\frac{1}{S}\frac{\partial v}{\partial x} - r.v + PF = 0$

$\Rightarrow v_\tau - v_{xx} + v_x - \frac{2r}{\sigma^2}v_x + \frac{2r}{\sigma^2}.v = 0, \tau = \frac{\sigma^2}{2}(T-t)$

$\Rightarrow v_\tau = v_{xx} + \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)v_x - \frac{2r}{\sigma^2}v + p(\tau)g(x,\tau)$

$t \to T - \frac{2}{\sigma^2}\tau \qquad \tau \to \frac{\sigma^2}{2}(T-t)$

$$\begin{cases} v_\tau = v_{xx} + v + p(\tau)g(x,\tau)\,; & if\ \sigma^2 = 2.\mathrm{r} \\ u_\tau = u_{xx} + \rho(\tau)f(x,\tau)\,; & if\ \sigma^2 \neq 2.\mathrm{r} \end{cases} \quad (**)$$

$v(x,\tau) = e^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau)$ dönüşümü ile

$v_t = \beta e^{\alpha x+\beta\tau}u + e^{\alpha x+\beta\tau}u_t$

$v_x = \alpha e^{\alpha x+\beta\tau}u + e^{\alpha x+\beta\tau}u_x$

$v_{xx} = \alpha^2 e^{\alpha x+\beta\tau}u + 2\alpha e^{\alpha x+\beta\tau}u_x + e^{\alpha x+\beta\tau}u_{xx}$

burada $\alpha = -\frac{k-1}{2}, \beta = -\left(\frac{k-1}{4}\right)^2, k = \frac{2r}{\sigma^2} \Rightarrow \alpha = \frac{\sigma^2-2r}{2\sigma^2}$ and $\beta = -(\frac{\sigma^2+2r}{2\sigma^2})$

$g(x,\tau) = e^{\alpha x+\beta\tau}f(x,\tau)$

$v_\tau = v_{xx} + \rho(\tau)f(x,\tau)$ denklemi elde edilir. Koşullar için düzenleme yapılırsa,

- $V(lnS,0) = \phi(S) \quad \Rightarrow v(x,0) = \varsigma(\mathrm{x}) = e^{\alpha x}u(x,0) \Rightarrow u(x,0) = \boldsymbol{e^{-\alpha x}\varsigma(\mathrm{x})} = \boldsymbol{\Upsilon(x)}$
- $V(1,t) = e^{-\alpha}V(e,t)$,

  $v(0,\tau) = e^{-\alpha}v(1,\tau) \Rightarrow e^{\beta\tau}u(0,\tau) = e^{-\alpha}e^{\alpha}.e^{\beta\tau}u(1,\tau) \Rightarrow \boldsymbol{u(0,\tau) = u(1,\tau)}$
- $V_S(e,t) = \frac{\alpha}{S}V(e,t)$

  $$\Longrightarrow V_S = \frac{1}{S}v_x \Rightarrow V_S(e,t) = e^{-1}v_x(1,t) = \frac{\alpha}{e}v(1,t) \Longrightarrow v_x(1,t) = \alpha.v(1,t)$$

  $$\Rightarrow v_x(x,t) = \alpha.e^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau) + e^{\alpha x+\beta\tau}u_x(x,\tau)$$

$\Rightarrow v_x(1,t) = \alpha e^{\alpha+\beta\tau}u(1,\tau) + e^{\alpha+\beta\tau}u_x(1,\tau) = \alpha e^{\alpha+\beta\tau}u(1,\tau)$

$\Longrightarrow e^{\alpha+\beta\tau}u_x(1,\tau) = 0 \Rightarrow e^{\alpha+\beta\tau} \neq 0;\ \boldsymbol{u_x(1,\tau) = 0}$

- $\int_1^e S^{-(1+\alpha)}e^{-\beta(\frac{\sigma^2}{2}(T-t))}V(S,t)dS = \check{\mathrm{E}}(t), 0 \leq \mathrm{t} \leq \mathrm{T}$

$S = e^x, \int_0^1 e^{-x(1+\alpha)}.e^{-\beta\tau}v(x,\tau).e^x dx = \int_0^1 e^{-x(1+\alpha)}e^{-\beta\tau}e^x e^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau)dx$

$\Rightarrow \int_0^1 u(x,\tau)dx = \bar{E}(\tau); \quad 0 \leq \tau \leq T$

Dönüşüm sonrası aşağıdaki denklem ve koşullar elde edilir.

$\Delta_\tau = \{(\mathrm{x},\tau): 0 < \mathrm{x} < 1, 0 \leq \tau \leq \mathrm{T}\}$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho(\tau)f(x,\tau) \tag{5.24}$$

$$u(x,0) = \Upsilon(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{5.25}$$

$$u(0,\tau) = u(1,\tau);\ u_x(1,\tau) = 0,\ 0 \leq \tau \leq T \tag{5.26}$$

$$\int_0^1 u(x,\tau)dx = \bar{E}(\tau); \quad 0 \leq \tau \leq T \tag{5.27}$$

İlgili denklem sisteminin iyi tanımlı (well-posed) olduğu, [4] te gösterilmiştir.

5.5 Periyodik Sınır Koşullu ve İntegral Koşullu Ters Black Scholes Denklemi için Bir Yaklaşım

Tanım kümesi D_T aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$D_T = \{(S,t): 1 < S < e, 0 < t \leq T\}$

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rp(t)V = 0 \tag{5.28}$$

$$V(\omega(S), O) = \phi(S) \ ; \ \ \omega(S) = ln(S) \ \ ; \ 1 < S < e \tag{5.29}$$

başlangıç koşullu

$$V(1,t) \ = e^k V(e,t), \quad kV(e,t) = e.V_s(e,t) \qquad 0 \leq \mathrm{t} \leq \mathrm{T} \tag{5.30}$$

Burada $k = \frac{2r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}$ dır.

periyodik sınır koşullu

$$\int_1^e V(S,t).S^k.ln(S)dS = E(t) \tag{5.31}$$

ve integral koşullu, Black Scholes Denklemini göz önünde bulunduralım.

2. Black Scholes (Merton) Denklemini Difüzyon Denklemine İndirgeme

Aşağıdaki dönüşümler altında,

$$S = e^x \ ; \ \ t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}$$

$$\Longrightarrow x = lnS \ ; \quad \tau = \frac{\sigma^2}{2}(T - t)$$

$$v(x,\tau) = V(S,t) \Rightarrow V\left(e^x, T - \frac{2\tau}{\sigma^2}\right) = v(\ln(S), \frac{\sigma^2}{2}(T-t))$$

$$\Rightarrow V_t = (v_x.x_t + v_\tau.\tau_t)$$

$$\Rightarrow V_t = -\frac{1}{2}\sigma^2.v_\tau$$

$$\Longrightarrow V_S = \frac{1}{S}v_x \ ; \ \ V_{SS} = \frac{1}{S^2}(v_{xx} - v_x \ )$$

Elde edilir, (1.2) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\Rightarrow V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rp(t)V = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 e^{2x}\frac{1}{S^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + r.S.\frac{1}{S}\frac{\partial v}{\partial x} - r.p(t).v = 0$$

$$\Rightarrow v_\tau - \ v_{xx} \ + \ v_x - \frac{2r}{\sigma^2}v_x + \frac{2r}{\sigma^2}.\dot{P}(\tau)v = 0$$

$$\Rightarrow v_\tau = \ v_{xx} \ + \ \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)v_x - \frac{2r}{\sigma^2}.\dot{P}(\tau).v$$

$\frac{2r}{\sigma^2} - 1 = 2k\ alınırsa\ \Rightarrow \frac{2r}{\sigma^2} = 2k + 1 = m$

$v_t = v_{xx} + 2kv_x - (2k+1).\dot{P}(\tau).v$

$v_t = v_{xx} + 2kv_x - m\dot{P}(\tau).v$

$\boldsymbol{v(x,t)} = e^{-kx}u(x,t)$ dönüşüm ile

$v_t = e^{-kx}u_t$

$v_x = -k.e^{-kx}u + e^{-kx}u_x$

$v_{xx} = k^2e^{-kx}u - k.e^{-kx}u_x - ke^{-kx}u_x + e^{-kx}u_{xx}$

$$u_t = u_{xx} + 2ku_x - m\dot{P}(\tau)u$$

$e^{-kx}u_t = k^2e^{-kx}u - 2k.e^{-kx}u_x + e^{-kx}u_{xx} - 2k^2e^{-kx}u + 2k.e^{-kx}u_x - e^{-kx}.m.\dot{P}(\tau).u + e^{-kx}F(x,\tau)$

$\Rightarrow u_t = -\left(k^2 + m\dot{P}(\tau)\right)u + u_{xx}$, $P(\tau) = \left(k^2 + m\dot{P}(\tau)\right)$ denirse

$\Rightarrow u_t = u_{xx} - P(\tau)v + F(x,\tau)$ elde edilir.

$D_\tau = \{(x,\tau): 0 < x < 1, 0 \le \tau \le T\}$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \left(P(\tau) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u + F(x,\tau) = 0 \quad (5.32)$$

$$u(0,\tau) = u(1,\tau),\ u_x(0,\tau) = u_x(1,\tau) \quad (5.33)$$

$$u(x,0) = \psi(x) \qquad 0 < x < 1 \quad (5.34)$$

$$\int_0^1 x.u(x,\tau)dx = E(\tau) \qquad 0 < \tau < T \quad (5.35)$$

İlgili denklem sisteminin iyi tanımlı (well-posed) olduğu,[14] te gösterilmiştir.

Örnek: $v_\tau = v_{xx} - (1 + e^{13\tau}).v + f(x,\tau)$

$D_\tau = \{(x,\tau): 0 < x < 1, 0 < \tau < T\}$

$f(x,\tau) = 1 + (1 - 4\pi^2)sin2\pi x + (1 + e^{13\tau})(1 - sin2\pi x)$

$v_\tau = v_{xx} - (1 + e^{13\tau}).u + 1 + (1 - 4\pi^2)sin2\pi x + (1 + e^{13\tau})(1 - sin2\pi x)$

$v(0,\tau) = v(1,\tau), \qquad v_x(0,\tau) = v_x(1,\tau)$

$v(x,0) = 1 - sin2\pi x \qquad 0 < x < 1$

$\int_0^1 x.v(x,\tau)dx = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi})e^{10\tau} \qquad 0 < \tau < T$

$v(x_i, t_j) = v_{i,j} = v_i^j$

$v(x_i + h, t_j) = v_{i+1,j} = v_{i+1}^j$

$v(x_i - h, t_j) = v_{i-1,j} = v_{i-1}^j$

$v(x_i, t_j + k) = v_{i,j+1} = u_i^{j+1}$

$$\frac{v(x,\tau+k)-v(x,\tau)}{k}=\frac{v(x+h,\tau)-2v(x,\tau)+v(x-h,\tau)}{h^2}+f$$

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k}=\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}+f(x_i,y_j)$$

$x_i=0+i\Delta x,\ h=\Delta x=\frac{1-0}{N}=\frac{1}{N},\ \mathbf{0\le x\le 1,}$ *i=0, 1, 2...N*

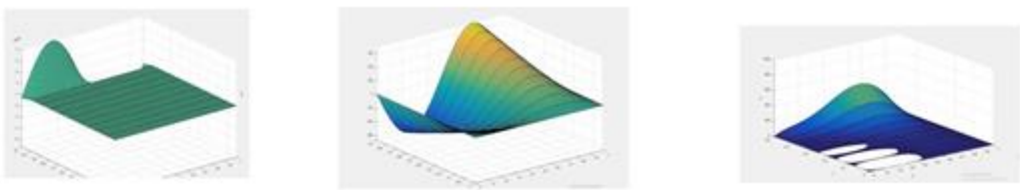
$t_j=0+j\Delta t,\ k=\Delta t=\frac{T}{M},\ \mathbf{0\le \tau\le T\ ,}$ *j=0, 1, 2...M*

- $\upsilon(x,0)=\ v_{i,0}=\varphi(x_i)=1-sin2\pi x_i$
- $v(0,\tau)=\upsilon(1,\tau)\ \Rightarrow\ u_{0,j}=u_{N,j}\ ,j=0,1,2,\ldots,$
- $v_x(0,t)=v_x(1,t)$
  $\Rightarrow -v_{2,j}+4v_{1,j}-3v_{0,j}=3v_{N,j}-4v_{N-1,j}+v_{N-2,j}$

$\boldsymbol{v_i^{j+1}=rv_{i+1}^{j}+(1-2r)v_i^{j}+rv_{i-1}^{j}}$ *FTCS*

$\boldsymbol{v_i^{j+1}=(\frac{1-2r}{1+2r})v_i^{j-1}+\left(\frac{2r}{1+2r}\right)v_{i+1}^{j}+\left(\frac{2r}{1+2r}\right)v_{i-1}^{j}}$ *Dufort-Frankel*

$\boldsymbol{v_{i+1}^{j}-2\left(1-\frac{1}{r}\right)v_i^{j}+v_{i-1}^{j}=-v_{i+1}^{j+1}+2\left(1+\frac{1}{r}\right)v_i^{j+1}-v_{i-1}^{j+1}}$ *Clark-Nicholson*



FTCS Dufort Frankel Crank Nicholson

Şekil 5.3 Nümerik Çözüme İlişkin Program Çıktıları

5.6 Yerel Olmayan Sınır Koşuluna ve İntegral Koşuluna Sahip Black Scholes Denkleminin Ters Katsayı Problemi İçin Yaklaşım

D_T , tanım kümesi aşağıdaki şekilde verilsin.

$D_T = \{(S,t): 1 < S < e, 0 < t \leq T\}$

Aşağıda verilen denklemi ve koşulları göz önünde bulunduralım;

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - r.p(t).V + F(S,t) = 0 \qquad (5.26)$$

Başlangıç koşulu,

$$V(\omega(S), O) = \phi(S) \;\; ; \;\; \omega(S) = ln(S) \;\; ; \; 1 < S < e \qquad (5.27)$$

Periyodik sınır koşulu,

$$V(1,t) = e^k V(e,t), \;\; eV_S(e,t) = -kV(e,t) \qquad 0 < \mathrm{t} \leq \mathrm{T} \qquad (5.28)$$

Ve integral koşulu,

$$\int_1^e S^k V(S,t) dS = E(t) \qquad (5.29)$$

Burada $k = \frac{2r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}$ dır.

Black Scholes (Merton) Denkleminin Difüzyon Denklemine Dönüşümü

Aşağıdaki dönüşümler kullanılarak;

$$S = e^x \, ; \;\; t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}$$

$$\Longrightarrow x = lnS \, ; \quad \tau = \frac{\sigma^2}{2}(T - t)$$

$$v(x,\tau) = V(S,t) \Rightarrow V\left(e^x, T - \frac{2\tau}{\sigma^2}\right) = v(\ln(S), \frac{\sigma^2}{2}(T - t))$$

$$\Rightarrow V_t = (v_x . x_t + v_\tau . \tau_t)$$

$$\Rightarrow V_t = -\frac{1}{2}\sigma^2 . v_\tau$$

$$\Longrightarrow V_S = \frac{1}{S} v_x \, ; \;\; V_{SS} = \frac{1}{S^2}(v_{xx} - v_x)$$

$$\begin{cases} v_\tau = v_{xx} + f(x,\tau) \, ; & if \; \sigma^2 = 2.\mathrm{r} \\ u_\tau = u_{xx} + g(x,\tau) \; ; & if \; \sigma^2 \neq 2.\mathrm{r} \;\; (**) \end{cases}$$

$(**)$: $v(x,\tau) = e^{\alpha x + \beta\tau} u(x,\tau)$ dönüşümü ile .

$g(x,\tau) = e^{\alpha x + \beta\tau} f(x,\tau)$

$$\Rightarrow V_t + \tfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - r.p(t).V + \dot{F}(S,t) = 0\ ;\ \ \dot{F}(S,t) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{1}{S^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + r.S.\frac{1}{S}\frac{\partial v}{\partial x} - r.p(t).v + \dot{F}(S,t) = 0$$

$$\Rightarrow v_\tau - v_{xx} + v_x - \frac{2r}{\sigma^2}v_x + \frac{2r}{\sigma^2}.p(t).v + f(x,\tau) = 0$$

$$p(t) \leftrightarrow P(\tau);\ t = T - \tfrac{2\tau}{\sigma^2} \Rightarrow \tau = \tfrac{\sigma^2}{2}(T-t)$$

$$\Rightarrow v_\tau = v_{xx} + \left(\tfrac{2r}{\sigma^2} - 1\right)v_x - \tfrac{2r}{\sigma^2}.P(\tau).v + f(x,\tau)$$

elde edilir.

$\dfrac{2r}{\sigma^2} - 1 = 2k\ alınırsa\ \Rightarrow \dfrac{2r}{\sigma^2} = 2k + 1 = m$

$v_t = v_{xx} + 2kv_x - (2k+1).\dot{P}(\tau).v + f(x,\tau)$

$v_t = v_{xx} + 2kv_x - m\dot{P}(\tau).v + f(x,\tau)$

$\boldsymbol{v(x,t)} = e^{-kx}u(x,t)$ dönüşüm ile

$v_t = e^{-kx}u_t$

$v_x = -k.e^{-kx}u + e^{-kx}u_x$

$v_{xx} = k^2e^{-kx}u - k.e^{-kx}u_x - ke^{-kx}u_x + e^{-kx}u_{xx}$

$$u_t = u_{xx} + 2ku_x - m\dot{P}(\tau)u$$

$e^{-kx}u_t = k^2e^{-kx}u - 2k.e^{-kx}u_x + e^{-kx}u_{xx} - 2k^2e^{-kx}u + 2k.e^{-kx}u_x - e^{-kx}.m.\dot{P}(\tau).u + e^{-kx}F(x,\tau)$

$\Rightarrow u_t = -\left(k^2 + m\dot{P}(\tau)\right)u + u_{xx}$, $P(\tau) = \left(k^2 + m\dot{P}(\tau)\right)$ denirse

$\Rightarrow u_t = u_{xx} - P(\tau)v + F(x,\tau)$ elde edilir.

$\mathrm{D}_\tau = \{(\mathrm{x},\tau): 0 < \mathrm{x} < 1, 0 \le \tau \le \mathrm{T}\}$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \left(P(\tau) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u + F(x,\tau) = 0 \qquad (5.30)$$

$u_\tau = v_{xx} - P(\tau).v + F(x,\tau)$

$$u(0,t) = u(1,t),\ u_x(1,t) = 0 \qquad (5.31)$$

$$u(x,0) = \psi(x) \qquad 0 < x < 1 \qquad (5.32)$$

$$\int_0^1 u(x,\tau)dx = E(\tau) \qquad 0 \le \tau \le \mathrm{T} \qquad (5.33)$$

İlgili denklem sisteminin iyi tanımlı (well-posed) olduğu,[6] da gösterilmiştir.

5.7 Ters Black Scholes Denkleminin Çözümü için Bir Yaklaşım

$$V_t+\frac{1}{2}\sigma^2S^2V_{SS}+rSV_S-r.p(t).V=0,\quad F(S,t)=0$$

$\boldsymbol{V(S,t)=V(S).e^{\mu t}}$ dönüşümü altında

$$\frac{\partial V}{\partial t}=V(S).\mu.e^{\mu t},\quad \frac{\partial V}{\partial S}=\frac{\partial V(S)}{\partial S}e^{\mu t},\quad \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}=\frac{\partial^2 V(S)}{\partial S^2}e^{\mu t}$$

$$\Rightarrow V(S).\mu.e^{\mu t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{d^2V(S)}{dS^2}.e^{\mu t}+rS\frac{dV(S)}{dS}.e^{\mu t}-r.p(t).V(S).e^{\mu t}=0$$

$$\Rightarrow e^{\mu t}[\tfrac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{d^2V(S)}{dS^2}+rS\frac{dV(S)}{dS}+(\mu-r).p(t).V(S)]=0\,;\, e^{\mu t}\neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{d^2V(S)}{dS^2}+rS\frac{dV(S)}{dS}+(\mu-r).p(t).V(S)=0$$

$1/2\sigma^2$ böldüğümüzde,

$\Rightarrow S^2.\frac{d^2V(S)}{dS^2}+\frac{2r}{\sigma^2}.S.\frac{dV(S)}{dS}+\frac{2(\mu-r)}{\sigma^2}p(t)V(S)=0\rightarrow$ Euler diferansiyel denklemi

$V(S)=S^m\quad \frac{\partial V}{\partial t}=m.S^{m-1}\quad \frac{d^2V(S)}{dS^2}=m(m-1)S^{m-2}$ denklemde yerine yazılırsa,

$$m(m-1)S^m+\frac{2r}{\sigma^2}m.S^m+\frac{2(\mu-r)}{\sigma^2}p(t)S^m=0\Rightarrow m(m-1)+\frac{2r}{\sigma^2}m+\frac{2(\mu-r)}{\sigma^2}p(t)=0$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2m(m-1)+rm+(\mu-r)p(t)=0$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2m^2+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)m+(\mu-r)p(t)=0$$

$$\Delta=\sqrt{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)^2-4.\frac{1}{2}\sigma^2.(\mu-r)p(t)}$$

$$\Rightarrow m_{1,2}=\frac{r}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{r^2-r\sigma^2+\frac{\sigma^2}{4}-2\sigma^2(\mu-r)p(t)}}{\sigma^2}$$

$$\Rightarrow V(S)=c_1S^{\frac{r}{\sigma^2}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{r^2-r\sigma^2+\frac{\sigma^2}{4}-2\sigma^2(\mu-r)p(t)}}{\sigma^2}}+c_2S^{\frac{r}{\sigma^2}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{r^2-r\sigma^2+\frac{\sigma^2}{4}-2\sigma^2(\mu-r)p(t)}}{\sigma^2}}$$

$$V(S,t)=c_1e^{\mu t}S^{\frac{r}{\sigma^2}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{r^2-r\sigma^2+\frac{\sigma^2}{4}-2\sigma^2(\mu-r)p(t)}}{\sigma^2}}$$
$$+\ c_2e^{\mu t}S^{\frac{r}{\sigma^2}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{r^2-r\sigma^2+\frac{\sigma^2}{4}-2\sigma^2(\mu-r)p(t)}}{\sigma^2}}$$

$$\{p(t),\ c_1e^{\mu t}S^{\frac{r}{\sigma^2}-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{r^2-r\sigma^2+\frac{\sigma^2}{4}-2\sigma^2(\mu-r)p(t)}}{\sigma^2}}+\ c_2e^{\mu t}S^{\frac{r}{\sigma^2}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{r^2-r\sigma^2+\frac{\sigma^2}{4}-2\sigma^2(\mu-r)p(t)}}{\sigma^2}}\}$$

ikilisi elde edilir.

Not:

- $v_\tau = v_{xx} - P(\tau).v + F(x,\tau) \Rightarrow F(x,\tau) = 0$ olduğunda,

$v_\tau = v_{xx} - P(\tau).v$ denklemi için,

$v(x,\tau) = e^{-P(\tau)}w(x,\tau)$ dönüşümü altında

$v_\tau = -P'(\tau)e^{-P(\tau)}w + e^{-P(\tau)}w_\tau$

$v_x = e^{-P(\tau)}w_x,$
$v_{xx} = e^{-P(t)}w_{xx}$

$e^{-P(t)}(-P'(\tau)w + w_\tau) = e^{-P(t)}w_{xx} - P(\tau)e^{-P(\tau)}w$

$\Rightarrow -P'(\tau)w + w_\tau = w_{xx} - P(\tau)w$

$\Rightarrow [P(\tau) - P'(\tau)]w + w_\tau = w_{xx}$ elde edilir.

$P(\tau) = P'(\tau)$ olması durumunda , $\frac{P'(\tau)}{P(\tau)} = 1 \Rightarrow lnP(\tau) = \tau \Rightarrow P(\tau) = e^\tau$ olur

Ve denklem $w_\tau = w_{xx}$ halini alır. İlgili koşullar altında denklem çözülürse, $(e^\tau, v(x,\tau))$ ikilisi elde edilir.

- $V_t + \frac{1}{2}\sigma^2.p(t).V_{SS} + rSV_S - rV = 0$

$$v(x,\tau) = V(S,t) = V\left(e^x, T - \frac{2\tau}{\sigma^2}\right) = v(\ln(S), \frac{\sigma^2}{2}(T-t))$$

$$\Rightarrow V_t = (v_x.x_t + v_\tau.\tau_t)$$

$$\Rightarrow V_t = -\frac{1}{2}\sigma^2.v_\tau$$

$$\Longrightarrow V_S = \frac{1}{S}v_x\ ;\ \ V_{SS} = \frac{1}{S^2}(v_{xx} - v_x)$$

$$\Rightarrow V_t + \frac{1}{2}.\sigma^2 V_{SS} + rSV_S - r.V = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 p(t)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + r.S.\frac{1}{S}\frac{\partial v}{\partial x} - rv = 0$$

$\Rightarrow v_\tau = p(t)v_{xx} + \left(\frac{2r}{\sigma^2} - p(t)\right)v_x - \frac{2r}{\sigma^2}.v$; $\sigma^2 = \frac{2r}{p(t)}$ veya $r = \frac{\sigma^2 p(t)}{2}$ seçilirse

$v_\tau = p(t)v_{xx} - p(t)v$

$g(x,t) = \check{r}(t)v(x,t);\ \check{r}(t) = e^{-\int_0^t p(\theta)d\theta}$

$$p(t) = \frac{\check{r}'(t)}{\check{r}(t)}$$

$\check{r}(t) = e^{-\int_0^t -p(\theta)d\theta} = e^{\int_0^t p(\theta)d\theta}$

$$g_\tau = \check{r}'(t).v + \check{r}(t).v_t \Rightarrow v_t = \frac{1}{\check{r}(t)} g_\tau - \check{r}'(t).\frac{g}{(\check{r}(t))^2}$$

$$\Longrightarrow g_x = \check{r}(t)v_x;\ g_{xx} = \check{r}(t)v_{xx} \Longrightarrow \frac{1}{\check{r}(t)} g_t - \check{r}'(t).\frac{g}{(\check{r}(t))^2}$$

$$= p(t)\ \frac{g_{xx}}{\check{r}(t)} - p(t)\frac{g}{\check{r}(t)} + F(x,t)$$

$$\Longrightarrow -\check{r}'(t).\frac{g}{\check{r}(t)} + g_t = p(t)g_{xx} - p(t)g + \check{r}(t)F(x,t)$$

$$\Longrightarrow g_\tau - p(t)g = \mu p(t)g_{xx} - p(t)g + \check{r}(t)F(x,t)$$

$$\Longrightarrow g_t = p(t)g_{xx} + \check{r}(t)F(x,t), \quad \check{r}(t)F(x,t) = G(x,t)$$

$$\Longrightarrow g_t = p(t)g_{xx} + G(x,t)$$

- $v_\tau = P(\tau).v_{xx} - v + F(x,\tau)$ olduğunda,

$v_\tau = P(\tau)v_{xx} - v + F(x,\tau)$ denklemi için,

$v(x,\tau) = e^{-\tau}w(x,\tau)$

$F(x,\tau) = e^{-\tau}f(x,\tau)$

$\Rightarrow v_\tau = -e^{-\tau}w + e^{-\tau}w_\tau$

$\Rightarrow v_x = e^{-\tau}w_x,$
$v_{xx} = e^{-\tau}w_{xx}$

$\Rightarrow e^{-\tau}(-w + w_\tau) = e^{-\tau}P(\tau)w_{xx} - e^{-\tau}w + e^{-\tau}f(x,\tau)$

$\Rightarrow w_\tau = P(\tau)w_{xx} + f(x,\tau)$ elde edilir.

5.8 Yerel Olmayan Sınır Koşullu ve Üst Belirlenim (İntegral) Koşullu Quasilineer Black Scholes Tipli Denklem İçin Bir Yaklaşım

D_T tanım kümesi:

$D_T = \{(S,t): 1 < S < e, 0 < t \leq T\}$.

Aşağıda koşullarıyla verilen Quasilineer Black Scholes (Merton) denklemini ele alalım.

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 . V_{SS} + rSV_S - r.p(t).V + F(S,t,V) = 0 \quad (5.34)$$

$$V(\omega(S), O) = \phi(S) \;\; ; \;\; \omega(S) = ln(S) \;\; ; \; 1 < S < e \quad (5.35)$$

$$V(e,t) = 0 \;\; , \;\; kV(e,t) = e.V_s(e,t) \qquad 0 \leq \mathrm{t} \leq \mathrm{T} \quad (5.36)$$

$$\int_1^e S^k V(S,t) dS = E(t) \quad (5.37)$$

Lineer olmayan terimli quasilineer denklem için $F = F(S,t,V)$ dir. Burada $k = \frac{2r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}$ dır.

$\phi(S)$ ve $F = F(S,t,V)$ fonksiyonları sırasıyla, [0,1] ve $\overline{D_T}\; x\; (-\infty, \infty)$ üzerinde tanımlı verilen fonksiyonlardır.

Black Scholes Tipi Denklemin Difüzyon Denklemine İndirgeme

Aşağıdaki dönüşümler altında,

$$S = e^x \, ; \;\; t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}$$

$$\Longrightarrow x = lnS \, ; \quad \tau = \frac{\sigma^2}{2}(T - t)$$

$$v(x,\tau) = V(S,t) \Rightarrow V\left(e^x, T - \frac{2\tau}{\sigma^2}\right) = v(\ln(S), \frac{\sigma^2}{2}(T-t))$$

$$\Rightarrow V_t = (v_x . x_t + v_\tau . \tau_t)$$

$$\Rightarrow V_t = -\frac{1}{2}\sigma^2 . v_\tau$$

Türevlenirse aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\Longrightarrow V_S = \frac{1}{S} v_x \, ; \;\; V_{SS} = \frac{1}{S^2}(v_{xx} - v_x)$$

$$\Rightarrow V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{SS} + rSV_S - r.p(t).V = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 e^{2x} \frac{1}{S^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + r.S.\frac{1}{S}\frac{\partial v}{\partial x} - r.p(t).v = 0$$

$$\Rightarrow v_\tau - \; v_{xx} \; + \; v_x - \frac{2r}{\sigma^2} v_x + \frac{2r}{\sigma^2} . \dot{P}(\tau) . v = 0, \tau = \frac{\sigma^2}{2}(T - t)$$

$$\Rightarrow v_\tau = \; v_{xx} \; + \; \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right) v_x - \frac{2r}{\sigma^2} . \dot{P}(\tau) . v;$$

elde edilir.

$\frac{2r}{\sigma^2} - 1 = 2k\ alınırsa\ \Rightarrow \frac{2r}{\sigma^2} = 2k + 1 = m$

$v_t = v_{xx} + 2kv_x - (2k+1).\dot{P}(\tau).v + F(x,\tau,v)$

$v_t = v_{xx} + 2kv_x - m\dot{P}(\tau).v + f(x,\tau,v)$

$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = e^{-kx}u(x,t)$ dönüşüm ile

$v_t = e^{-kx}u_t$

$v_x = -k.e^{-kx}u + e^{-kx}u_x$

$v_{xx} = k^2e^{-kx}u - k.e^{-kx}u_x - ke^{-kx}u_x + e^{-kx}u_{xx}$

$u_t = u_{xx} + 2ku_x - m\dot{P}(\tau)u$

$e^{-kx}u_t = k^2e^{-kx}u - 2k.e^{-kx}u_x + e^{-kx}u_{xx} - 2k^2e^{-kx}u + 2k.e^{-kx}u_x - e^{-kx}.m.\dot{P}(\tau).u + e^{-kx}F(x,\tau,v)$

$\Rightarrow u_t = -\left(k^2 + m\dot{P}(\tau)\right)u + u_{xx}$, $P(\tau) = \left(k^2 + m\dot{P}(\tau)\right)$ denirse

$\Rightarrow u_t = u_{xx} - P(\tau)v + F(x,\tau,v)$elde edilir.

İlgili denklem yeniden yazılırsa,

$F(S,t,V) \to f(x,\tau,v)\ ;\ S = e^x,\ t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2},\ V(S,t) = v(x,\tau)$

$\tau = \frac{\sigma^2}{2}(T-t), \qquad p(t) \to P(\tau)$

$\mathrm{D}_\tau = \left\{(\mathrm{x},\tau): 0 < \mathrm{x} < 1, 0 \le \mathrm{T}.\frac{\sigma^2}{2} \le \tau \le \mathrm{T}\right\} \Rightarrow \mathrm{D}_\tau = \{(\mathrm{x},\tau): 0 < \mathrm{x} < 1, 0 \le \tau \le \mathrm{T}\}$

$u_\tau = u_{xx} - P(\tau).u + f(x,\tau,u)$ (5.38)

$u(0,t) = 0,\ u_x(1,t) = u_x(1,t)$ (5.39)

$u(x,0) = \psi(x) \qquad 0 < x < 1$ (5.40)

$\int_0^1 u(x,\tau)dx = E(\tau) \qquad 0 \le \tau \le \mathrm{T}$ (5.41)

$C[0,T]x\left(C^{2,1}(\mathrm{D}_T) \cap C^{1,0}(\overline{D}_T)\right)$ sınıfından olan, $[0,T]$ aralığı üzerinde (5.38)-(5.41) koşullarını sağlayan ve $P(\tau) \ge 0$ olan, $\{P(\tau), u(x,\tau)\}$ çiftine (5.38)-(5.41) ters probleminin klasik çözümü denir. İlgili denklem sisteminin iyi tanımlı (well-posed) olduğu referans [5] te gösterilmiştir.

5.9 Çeşitli Koşullar Altında Black Scholes Denkleminin Katsayısını Belirlemek İçin Bir Yaklaşım

Tanım kümesi, D_T , aşağıdaki şekilde verilsin.

$D_T = \{(S,t): 1 < S < e, 0 < t \leq T\}$.

$$P(t).V_t - \frac{1}{2}\sigma^2 V_{SS} + rSV_S - r.V - F(S,t) = 0 \tag{5.42}$$

$$V(S,0) = \phi(S) \tag{5.43}$$

$$V(1,t) = 0, -\alpha e^{\alpha} V(1,t) + e^{\alpha} V_S(1,t) = (\gamma - \alpha)V(e,t) + eV_S(e,t) \tag{5.44}$$

$$\int_1^e S^{1-\alpha} e^{-\beta(\frac{\sigma^2}{2}(T-t))} V(S,t) dS = \check{\mathrm{E}}(t), 0 \leq \mathrm{t} \leq \mathrm{T} \tag{5.45}$$

Burada $\alpha = \frac{\sigma^2 - 2r}{2\sigma^2}$ ve $\beta = h(t)$.

2. Black Scholes Denklemini Difüzyon (Isı) Denklemine İndirgeme

Aşağıdaki dönüşümler yardımıyla,

$$S = e^x\,; \quad t = T - \frac{2}{\sigma^2}\tau$$

$$\Longrightarrow x = lnS\,; \quad \tau = \frac{\sigma^2}{2}(T-t)$$

$$v(x,\tau) = V(S,t) \Rightarrow V\left(e^x, T - \frac{2\tau}{\sigma^2}\right) = v(\ln(S), \frac{\sigma^2}{2}(T-t))$$

$$\Rightarrow V_t = (v_x.x_t + v_\tau.\tau_t)$$

$$\Rightarrow V_t = -\frac{1}{2}\sigma^2.v_\tau$$

$$\Longrightarrow V_S = \frac{1}{S}v_x\,; \quad V_{SS} = \frac{1}{S^2}(v_{xx} - v_x)$$

$$\Rightarrow P(t)V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{SS} + rSV_S - r.V + F = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\sigma^2}{2}p(\tau)\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 e^{2x}\frac{1}{S^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + r.S.\frac{1}{S}\frac{\partial v}{\partial x} - r.v + F(S,t) = 0$$

$$\Rightarrow v_\tau - v_{xx} + v_x - \frac{2r}{\sigma^2}v_x + \frac{2r}{\sigma^2}.v = 0, \tau = \frac{\sigma^2}{2}(T-t)$$

$$\Rightarrow p(\tau).v_\tau = v_{xx} + \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)v_x - \frac{2r}{\sigma^2}v + g(x,\tau)$$

$$g(x,\tau) = e^{\alpha x + \beta\tau} f(x,\tau) \tag{*}$$

$$\begin{cases} p(\tau)v_\tau = v_{xx} + v + g(x,\tau)\,; & if\ \sigma^2 = 2.\mathrm{r} \\ p(\tau)u_\tau = u_{xx} + g(x,\tau)\,; & if\ \sigma^2 \neq 2.\mathrm{r} \quad (**) \end{cases}$$

$(**)$: $v(x,\tau) = e^{\alpha x + \beta\tau}u(x,\tau)$ dönüşümü ile

$$v_\tau = (\beta_\tau \tau + \beta)e^{\alpha x + \beta\tau}u + e^{\alpha x + \beta\tau}u_\tau$$

$$v_x = \alpha e^{\alpha x + \beta\tau}u + e^{\alpha x + \beta\tau}u_x$$

$v_{xx} = \alpha^2 e^{\alpha x+\beta\tau} u + 2\alpha e^{\alpha x+\beta\tau} u_x + e^{\alpha x+\beta\tau} u_{xx}$

Burada, $\alpha = -\frac{k-1}{2}, k = \frac{2r}{\sigma^2} \Rightarrow \alpha = \frac{\sigma^2-2r}{2\sigma^2}\ \ g(x,\tau) = e^{\alpha x+\beta\tau} f(x,\tau)$

$p(\tau).v_\tau = v_{xx} + \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right) v_x - \frac{2r}{\sigma^2} v + g(x,\tau)$

$e^{\alpha x+\beta\tau} p(\tau)((\beta + \beta_\tau \tau)u + u_\tau) = \alpha^2 e^{\alpha x+\beta\tau} u + 2\alpha e^{\alpha x+\beta\tau} u_x + e^{\alpha x+\beta\tau} u_{xx} -$
$2\alpha.(\alpha e^{\alpha x+\beta\tau} u + e^{\alpha x+\beta\tau} u_x) + e^{\alpha x+\beta\tau} f(x,\tau)$

$p(\tau)((\beta + \beta_\tau \tau)u + u_\tau) = -\alpha^2 u + u_{xx} + f(x,\tau)$

$p(\tau)u_\tau = (\alpha^2 - (\beta + \beta_\tau \tau)p(\tau))u + u_{xx} + f(x,\tau);$

$$\alpha^2 - (\beta + \beta_\tau \tau)p(\tau) = 0 \Rightarrow \frac{\alpha^2}{p(\tau)} = (\beta + \beta_\tau \tau) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \tau}[\beta\tau] = \frac{\alpha^2}{p(\tau)}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\alpha^2}{\tau} \int \frac{d\tau}{p(\tau)} = \Psi(\tau);$$

$$\tau = \frac{\sigma^2}{2}(T - t)$$

$p(\tau)u_\tau = u_{xx} + f(x,\tau)$

$u(x,0) = \Upsilon(x)$

$u(0,\tau) = 0\ ;\ u_x(0,\tau) = u_x(1,\tau) + \varpi u(1,\tau)$

$\int_0^1 u(x,\tau)dx = E(\tau)$

- $V(lnS,0) = \phi(S) \quad \Rightarrow v(x,0) = \varsigma(\mathrm{x}) = e^{\alpha x} u(x,0) \Rightarrow u(x,0) = e^{-\alpha x} \varsigma(\mathrm{x}) = \Upsilon(x)$
- $V(1,t) = 0,$

$v(0,\tau) = 0 \Rightarrow e^{\beta\tau} u(0,\tau) = v(0,\tau) = 0 \Rightarrow u(0,\tau) = 0, e^{\beta\tau} \neq 0$

- $-\alpha e^\alpha V(1,t) + e^{\alpha+1} V_S(1,t) = -\alpha V(e,t) + e V_S(e,t) + \gamma V(e,t)$

$-\alpha e^\alpha v(0,\tau) + e^{\alpha+1}.v_x(0,\tau) = (\gamma - \alpha)v(1,\tau) + v_x(1,\tau)$

$\mathrm{u_x(0,\tau) = u_x(1,\tau) + \gamma u(1,\tau)}$

- $\int_1^e S^{-(1+\alpha)} e^{-\beta(\frac{\sigma^2}{2}(T-t))} V(S,t)dS = \check{\mathrm{E}}(t), 0 \leq \mathrm{t} \leq \mathrm{T}$

$S = e^x, \int_0^1 e^{-x(1+\alpha)}.e^{-\beta\tau} v(x,\tau).e^x dx = \int_0^1 e^{-x(1+\alpha)} e^{-\beta\tau} e^x\, e^{\alpha x+\beta\tau} u(x,\tau)dx$

$\Rightarrow \int_0^1 u(x,\tau)dx = \bar{E}(\tau); \qquad 0 \leq \tau \leq T$

$p(\tau)u_\tau = u_{xx} + f(x,\tau)$

$\Delta_\tau = \{(\mathrm{x},\tau): 0 < \mathrm{x} < 1, 0 \leq \tau \leq \mathrm{T}\}$

$$p(\tau)\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,\tau) \tag{5.46}$$

$$u(x,0) = \Upsilon(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{5.47}$$

$$u(0,\tau) = 0, \;\; u_x(0,\tau) = \; u_x(1,\tau) + \gamma u(1,\tau) \;, \;\; 0 \le \tau \le T \tag{5.48}$$

$$\int_0^1 u(x,\tau)dx = \bar{E}(\tau); \qquad 0 \le \tau \le T \tag{5.49}$$

Elde edilir. $C[0,T]x \left(C^{2,1}(\Delta_T) \cap C^{1,0}(\bar{\Delta}_T)\right)$ sınıfından olan, $[0,T]$ aralığı üzerinde (5.47)-(5.49) koşullarını sağlayan ve $\rho(\tau) > 0$ olan $\{\rho(\tau), u(x,\tau)\}$ çiftine, (5.46)-(5.49) *ters probleminin klasik çözümü* denir. İlgili denklem sisteminin iyi tanımlı (well-posed) olduğu, [2] de gösterilmiştir.

BÖLÜM 6

NÜMERİK YÖNTEMLER

Analitik Çözüm

$u_t = u_{xx} + p(t)u + f(x,t)$

$u(0,t) = u(1,t) = A(t), \qquad u_x(1,t) = 0$

$u(x,0) = \psi(x) \qquad\qquad 0 < x < 1$

$\int_0^1 u(x,t)dx = E(t) \qquad\qquad 0 \le t \le \mathrm{T}$

- $v(x,t) = r(t)u(x,t)$
- $r(t) = e^{-\int_0^t p(\mu)d\mu} \quad , \quad p(t) = -\frac{r'(t)}{r(t)}$
- $r(0) = e^{-\int_0^0 p(\mu)d\mu} = e^0 = 1$

$v_t = r'(t)u + r(t)u_t$

$v_x = r(t)u_x \, , \; v_{xx} = r(t)u_{xx}$

$$\frac{v_t - r'(t)\dfrac{v}{r(t)}}{r(t)} = \frac{v_{xx}}{r(t)} + p(t)\frac{v}{r(t)} + f(x,t)$$

$$\Rightarrow v_t - \frac{r'(t)}{r(t)}v = v_{xx} + p(t)v + r(t)f(x,t)$$

$$\Rightarrow v_t + p(t)v = v_{xx} + p(t)v + r(t)f(x,t)$$

$$\Rightarrow v_t = v_{xx} + r(t)f(x,t)$$

$v(0,t) = v(1,t), v_x(1,t) = 0$

$v(x,0) = \psi(x) \qquad\qquad 0 < x < 1$

$\boldsymbol{v(x,t) = r(t)u(x,t)}$

$r(t).\int_0^1 u(x,t)dx = r(t)\boldsymbol{E(t)} = \int_0^1 v(x,t)dx \qquad 0 \le t \le \mathrm{T} \Rightarrow$

$$\boxed{\boldsymbol{r(t) = \frac{\int_0^1 v(x,t)dx}{E(t)}}}$$

- Eğer $f(x,t) = 0$ ise

$\boldsymbol{v_t = v_{xx}}$ denkleminden bulunur, buradan $\boxed{\boldsymbol{r(t) = \frac{\int_0^1 v(x,t)dx}{E(t)}}}$, $r(t)$ buunur. Böylece

$\boldsymbol{p(t) = -\frac{r'(t)}{r(t)}}$ **, $\boldsymbol{p(t)}$ bulunmuş olur.**

$\boldsymbol{v(x,t) = r(t)u(x,t)}$ **bağıntısından ,** $\boldsymbol{u(x,t) = \frac{v(x,t)}{r(t)}}$ **, $\boldsymbol{u(x,t)}$ bulunur.**

$u(0,t) = A(t)$ şartı varsa

$$v(0,t) = r(t)u(0,t) \Rightarrow v(0,t) = r(t)A(t) \Rightarrow r(t) = \frac{v(0,t)}{A(t)}$$

$v(x,t) = X(x).T(t)$

$\Rightarrow X(x).T'(t) = X''(x).T(t) \Rightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$

$\Rightarrow T'(t) - \lambda T(t) = 0 \;\; ve \;\; X''(x) - \lambda X(x) = 0$

$\Rightarrow X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ ve $T(t) = c_3 e^{\lambda t}$

$v(0,t) = X(0).T(t) = X(1)T(t) = v(1,t)$

$\Rightarrow X(0) = X(1)$

$v_x(x,t) = X'(x).T(t)$

$\Rightarrow v_x(1,t) = X'(1).T(t) = 0 \Rightarrow X'(1) = 0$

$\Rightarrow X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}.0} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}.0} = c_1 e^{\sqrt{\lambda}.1} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}.1}$

$\Rightarrow c_1 + c_2 = c_1 e^{\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}}$

$\Rightarrow c_1\left(e^{\sqrt{\lambda}} - 1\right) = c_2\left(1 - e^{-\sqrt{\lambda}}\right) \Rightarrow \boldsymbol{c_2 = e^{\sqrt{\lambda}} c_1}$

$X'(x) = c_1\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}x} - c_2\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}x}$

$\Rightarrow X'(1) = c_1\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}} - c_2\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}} = 0$

$\Rightarrow c_1\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}} = c_2\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}} \Rightarrow c_1 e^{\sqrt{\lambda}} = c_2 e^{-\sqrt{\lambda}} \Rightarrow c_1 e^{2\sqrt{\lambda}} = c_2$

$c_1 e^{2\sqrt{\lambda}} = \boldsymbol{e^{\sqrt{\lambda}} c_1} \;\Rightarrow\; e^{\sqrt{\lambda}} = 1 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow c_1 = c_2$

$\Rightarrow X(x) = c_{1[}e^{\sqrt{\lambda}x} + e^{-\sqrt{\lambda}x}] \;\; T(t) = c_3 e^{\lambda t}$

$$v(x,t) = 2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\int_0^1 \psi(x) sinm\pi x dx\right) sinm\pi x e^{-\pi^2 m^2 t}$$

$$\boxed{\boldsymbol{r(t)} = \frac{\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{1}} 2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\int_0^1 \psi(x) sinm\pi x dx\right) sinm\pi x e^{-\pi^2 m^2 t}\, \boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{E(t)}}}$$

$u_t = u_{xx} + F(x,t)$

$u(x,0) = \psi(x) = 2 + \cos(2\pi x)$

$u(0,t) = u(1,t), u_x(1,t) = 0$

$\int_0^1 u(x,t)dx = r(t)(1+e^{-t}) = \mathrm{E}(t)$

$\mathrm{F(x,t) = r(t).\,4\pi^2 e^{-t}\cos(2\pi x)}$ ve $\mathrm{E(t) = r(t)(1+e^{-t})}$

$\boldsymbol{u(0,t) = u(1,t) = \varpi(t)}$ olsun.

$v(x,t) = u(x,t) - \dfrac{\varpi(t)(1-\mathrm{x}) + \varpi(t)\,\mathrm{x}}{1}$

$\Longrightarrow v(x,t) = u(x,t) + G(x,t)$

$G(x,t) = -\dfrac{\varpi(t)(1-\mathrm{x}) + \varpi(t)\mathrm{x}}{1} = \varpi(t)(\mathrm{x}-1) - \varpi(t)\mathrm{x} = -\varpi(t)$

$$G(0,t) = -\varpi(t), G(1,t) = -\varpi(t),$$

$v(0,t) = u(0,t) - \varpi(t) = \varpi(t) - \varpi(t) = 0$

$v(1,t) = u(1,t) - \varpi(t) = \varpi(t) - \varpi(t) = 0$

$\boldsymbol{v_t - v_{xx} = u_t - u_{xx} + G_t - G_{xx} = F + G_t = H}$

$\boldsymbol{H = F} - \frac{\varpi'(t)(1-\mathrm{x}) + \varpi'(t)\mathrm{x}}{1} = F - [\varpi'(t)(1-\mathrm{x}) + \varpi'(t)\mathrm{x}]\; G(x,t)\;\; \boldsymbol{H = F - \varpi(t)}$

$v(x,t) = u(x,t) + G(x,t) \Longrightarrow v_x(1,t) = u_x(1,t) + G_x(1,t) = 0\,;\, G_x(x,t) = 0$

$\Longrightarrow\; v_x(1,t) = 0$

$$\boxed{\begin{gathered} \boldsymbol{v_t - v_{xx} = H} \\ v(0,t) = v(1,t) = 0, v_x(1,t) = 0 \\ v(x,0) = \Gamma(x) \end{gathered}}$$

$\boldsymbol{\Gamma(x) = u(x,0) + G(x,0) = \psi(x) - \varpi(0)}$

$$\int_0^1 \boldsymbol{u(x,t)dx} = \int_0^1 [v(x,t) - G(x,t)]dx = \int_0^1 v(x,t)dx + \int_0^1 \varpi(t)dx = \mathbf{E}(\boldsymbol{t})$$

$\Longrightarrow \int_0^1 v(x,t)dx = \boldsymbol{E(t) - \varpi(t)}$

$$\boldsymbol{v_t - v_{xx} = H(x,t)}$$
$$v(0,t) = v(1,t) = 0,\, v_x(1,t) = 0$$
$$v(x,0) = \psi(x) - \varpi(0)$$
$$\int_0^1 v(x,t)dx = E(t) - \varpi(t)$$

$$\boldsymbol{v_t - v_{xx} = H(x,t)}$$
$$v(0,t) = v(1,t) = 0$$
$$v(x,0) = \psi(x) - \varpi(0)$$

$$v(x,t) = \sum_{n\geq 1} \Gamma_n e^{-(n\pi)^2 t} \sin(n\pi x) + \sum_{n\geq 1} \sin(n\pi x)\,.\int_0^t e^{-(n\pi)^2(t-s)} h_n(s)ds$$

Burada $\boldsymbol{h_n(t) = 2\int_0^1 H(x,t)\, sin(n\pi x)\, dx}$ ***ve*** $\boldsymbol{\Gamma_n = 2\int_0^1 \Gamma\,(x)\, sin(n\pi x)\, dx}$ şeklindedir.

$\boldsymbol{\Gamma(x) = u(x,0) + G(x,0) = \psi(x) - \varpi(0)}$

$\boldsymbol{H = F - \varpi(t)}$

<u>Örnek:</u>

$\boldsymbol{\mu_t = \mu_{xx} + p(t)\mu + \breve{F}(x,t)}$

$\boldsymbol{\mu(x,0) = \psi(x) \quad 0 \leq x \leq 1}$

$\boldsymbol{\mu(0,t) = d_1(t), \mu(1,t) = d_2(t)\,, 0 < t \leq T}$

$\boldsymbol{\mu(x_s,\mathrm{t}) = \mathrm{E}(t), 0 < t \leq T}$

$$p(t) = \frac{E'(t) - \mu_{xx}(x_s,\mathrm{t}) - \breve{F}(x_s,t)}{E(t)}$$

$\boldsymbol{\mu(x_s,\mathrm{t}) = \mathrm{E}(t) \;\Rightarrow \mu_x(x_s,\mathrm{t}) = 0, \mu_{xx}(x_s,\mathrm{t}) = 0}$

$u(x,t) = r(\tau)\mu(x,t);\;\; r(t) = e^{-\int_0^t p(\theta)d\theta}$

$\boldsymbol{u_t = u_{xx} + F(x,t)}$; $\quad \boldsymbol{\breve{F}(x,t) = r(t).F(x,t)}$

$u(x,0) = \psi(x) \quad 0 \leq x \leq 1$

$u(0,t) = r(t)\mu(0,t) = r(t)d_1(t), 0 < t \leq T$

$u(1,t) = r(t)\mu(1,t) = r(t)d_2(t)\ 0 < t \leq T$

$\boldsymbol{\mu}(x,t) = r(t)u(x,t);\ \ \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x_s},\mathbf{t}) = r(t)u(x_s,t) = \mathbf{E}(\boldsymbol{t})$

$u(0,t) = r(t)d_1(t), \qquad u(1,t) = r(t)d_2(t)$

$$v(x,t) = u(x,t) - \frac{r(t)d_1(t)(1-\mathrm{x}) + r(t)d_2(t)\,\mathrm{x}}{1}$$

$\Rightarrow \boldsymbol{v(x,t) = u(x,t) + G(x,t)}$

$\Rightarrow v(x,0) = u(x,0) + G(x,0)$

$v(x,0) = \psi(x) + r(0)d_1(0)(\mathrm{x}-1) - r(0)d_2(0)\,\mathrm{x}$

$\Rightarrow v(x,0) = \psi(x) + d_1(0)(\mathrm{x}-1) - d_2(0)\,\mathrm{x}$

$G(x,t) = r(t)[\,d_1(t)(\mathrm{x}-1) - d_2(t)\,\mathrm{x}]$

$G_t(x,t) = r'(t)[d_1(t)(\mathrm{x}-1) - d_2(t)\,\mathrm{x}] + \mathrm{r(t)}[d_1'(t)(\mathrm{x}-1) - d_2'(t)\mathrm{x}]$

$G_x(x,t) = r(t)[\,d_1(t) - d_2(t)]$

$\Rightarrow G_{xx}(x,t) = 0$

$G(0,t) = -r(t)d_1(t), \qquad G(1,t) = -r(t)d_2(t),$

$v(0,t) = u(0,t) + G(0,t) = r(t)d_1(t) - r(t)d_1(t) = 0$

$v(1,t) = u(1,t) + G(1,t) = r(t)d_2(t) - r(t)d_2(t) = 0$

$\boldsymbol{v(x,t) = u(x,t) + G(x,t)}$

$$v(x_s,t) = u(x_s,t) + \mathrm{G}(x_s,\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{E}(t)}{r(t)} + r(t)[\,d_1(t)(x_s-1) - d_2(t)\,x_s]$$

$v(x_s,0) = \psi(x_s) +\ d_1(0)(x_s-1) - d_2(0)\,x_s$

$\boldsymbol{v_t - v_{xx} = u_t - u_{xx} + G_t - G_{xx} = F + G_t = H}$

$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{F} + r'(t)[d_1(t)(\mathrm{x}-1) - d_2(t)\,\mathrm{x}] + \mathrm{r(t)}[d_1'(t)(\mathrm{x}-1) - d_2'(t)\mathrm{x}]$

$$\boxed{\begin{gathered} \boldsymbol{v_t - v_{xx} = H(x,t)} \\ v(x,0) = \psi(x) + d_1(0)(\mathrm{x}-1) - d_2(0)\,\mathrm{x} \\ v(0,t) = v(1,t) = 0, \\ v(x_s,t) = \frac{\mathrm{E}(t)}{r(t)} + r(t)[\,d_1(t)(x_s-1) - d_2(t)\,x_s] \end{gathered}}$$

$$v(x,t) = r(\tau)\phi(x,t);\ \ r(t) = e^{-\int_0^t p(\theta)d\theta}$$

dönüşümü ile aşağıdaki denklemini yeniden yazılsın.

$\phi_t = \mu.\phi_{xx} - p(t).\phi + F(x,t)$

$\phi(x,0) = \psi(x);$

$\phi(0,t) = \phi(1,t), \phi_x(1,t) = 0$

$$\int_0^1 \phi(x,t)dx = E(t)$$

$$\phi_t = \mu\phi_{xx} - p(t)\phi + F(x,t)$$

$$\upsilon(x,t) = r(\tau)\phi(x,t); \;\; r(t) = e^{-\int_0^t p(\theta)d\theta}$$

$$p(t) = \frac{r'(t)}{r(t)}$$

$$r(t) = e^{-\int_0^\tau -p(\theta)d\theta} = e^{\int_0^\tau p(\theta)d\theta}$$

$$\upsilon_\tau = r'(t).\phi + r(t).\phi_t \Rightarrow \phi_\tau = \frac{1}{r(t)}\upsilon_\tau - r'(t).\frac{\phi}{r(t)}$$

$$\Rightarrow \upsilon_x = r(t)\phi_x; \; \upsilon_{xx} = r(t)\phi_{xx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r(t)}\upsilon_t - r'(t).\frac{\upsilon}{r(t).r(t)} = \mu\frac{\upsilon_{xx}}{r(t)} - p(t)\frac{\upsilon}{r(t)} + F(x,t)$$

$$\Rightarrow -r'(t).\frac{\upsilon}{r(t)} + \upsilon_t = \mu\upsilon_{xx} - p(t)\upsilon + r(t)F(x,t)$$

$$\Rightarrow \upsilon_\tau - p(t)\upsilon = \mu\upsilon_{xx} - p(t)\upsilon + r(t)F(x,t)$$

$$\Rightarrow \upsilon_\tau = \mu\upsilon_{xx} + r(t)F(x,t)$$

$$\upsilon(x,0) = r(0)\phi(x,0) \Rightarrow \upsilon(x,0) = \varphi(x) = r(0)\psi(x)$$

$$\upsilon_x(1,t) = r(t)\phi_x(1,t) \Rightarrow \upsilon_x(1,t) = 0; \; \phi_x(1,t) = 0$$

$$\upsilon(0,t) = r(t)\phi(0,t) = r(t)\phi(1,t) = \upsilon(1,t) \Rightarrow \upsilon(0,t) = \upsilon(1,t)$$

$$\upsilon(x,t) = r(\tau)\phi(x,t);$$

$$\int_0^1 \phi(x,t)dx = \int_0^1 \frac{\upsilon(x,t)}{r(t)}dx = \frac{1}{r(t)}\int_0^1 \upsilon(x,t)dx; \; \int_0^1 \upsilon(x,t)dx = r(t)E(t) = \mathbf{E}(t)\,;$$

$$\int_0^1 \upsilon(x,t)dx = \mathbf{E}(t)$$

Böylece, aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\upsilon_\tau = \mu\upsilon_{xx} + r(t)F(x,t)$$

$$\upsilon(x,0) = \varphi(x)$$

$$\upsilon(0,t) = \upsilon(1,t), \upsilon_x(1,t) = 0$$

$$\int_0^1 \upsilon(x,t)dx = \mathbf{E}(t)$$

Nümerik Yöntemler

İlgili problemin çözümü nümerik açıdan ele alınsın.

Sonlu Farklar Yöntemi Yardımıyla Nümerik Çözüm:

Çizelge 6.1 Sonlu Farklar

$u(x,t)$: Tam (analitik) çözüm

$u(x_i,t_j)$: Sonlu Fark Yöntemiyle elde edilen (x_i,t_j) noktasındaki yaklaşık nümerik çözüm

6.1 Theta (θ) Yöntemi

$u(x_i,t_j) = u_{i,j} = u_i^j$

$u(x_i+h,t_j) = u_{i+1,j} = u_{i+1}^j$

$u(x_i-h,t_j) = u_{i-1,j} = u_{i-1}^j$

$u(x_i,t_j+k) = u_{i,j+1} = u_i^{j+1}$

$$\frac{u(x,\tau+k)-u(x,\tau)}{k} = \frac{u(x+h,\tau)-2u(x,\tau)+u(x-h,\tau)}{h^2}$$

$$\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}$$

$x_i = 0+i\Delta x,\ h=\Delta x = \frac{1-0}{N} = \frac{1}{N},\ \mathbf{0 \le x \le 1,}$ *i=0, 1, 2…N*

$t_j = 0+j\Delta t,\ k=\Delta t = \frac{T}{M},\ \mathbf{0 \le \tau \le T\ ,}$ *j=0, 1, 2…M*

Bazı koşullar için Örnek Ayrıklaştırma

- $\mathrm{u(x,0)} = \ \boldsymbol{u_{i,0} = \varphi(x_i) = 1 - sin2\pi x_i}$
- Eğer $u(0,\tau) = \mathrm{u}(1,\tau) \ \Rightarrow\ \boldsymbol{u_{0,j} = u_{N,j}}\ ,j = 0,1,2,\ldots,$
- Eğer $u_x(0,t) = u_x(1,t)$ koşulu mevcutsa
  $\Rightarrow \boldsymbol{-u_{2,j} + 4u_{1,j} - 3u_{0,j} = 3u_{N,j} - 4u_{N-1,j} + u_{N-2,j}}$
- $u_x(1,t) = 0$ koşulu varsa $\ \Rightarrow \boldsymbol{u_{N-2,j} = u_{N-1,j}}$

$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_{i,}\boldsymbol{t}_{j})$:grid noktadaki sürekli çözümü ifade eder; $r = \frac{k}{h^2}$

$\boldsymbol{u}_i^j$ =yaklaşık nümerik çözüm

$u_i^{j+1} = u_i^j + \frac{k}{h^2}(u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j),$

Eğer İ=N $,\boldsymbol{u}_{N-1,j} = \boldsymbol{u}_{N+1,j}$

$$u_N^{j+1} = 2ru_{N+1}^j + (1-2r)u_N^j;$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \left[\theta \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + (1-\theta)\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}\right]$$

$$r = \frac{k}{h^2} = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

$$\Rightarrow u_i^{n+1} - u_i^n = \left[\theta r(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) + (1-\theta)r(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)\right]$$

$$\Rightarrow u_i^{n+1} = u_i^n + \left[\theta r(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) + (1-\theta)r(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)\right]$$

$\theta = 0,\mathrm{FTCS}$ Açık yöntem-explicit method

$\theta = \frac{1}{2}$ $\mathrm{crank-nicolson}$ Kapalı yöntemi- implicit method

$\theta = 1$ Laasonen kapalı yöntemi

Kararlılık

$r \leq \frac{1}{2-4\theta}$ şartı ile $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ şartlı istikrarlı (kararlı)

$\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ şartsız istikrarlı (kararlı)

$u_i^{n+1} = ru_{i+1}^n + (1-2r)u_i^n + ru_{i-1}^n \quad \theta = 0$ FTCS

$u_{i+1}^n - 2\left(1 - \frac{1}{r}\right)u_i^n + u_{i-1}^n = -u_{i+1}^{n+1} + 2\left(1 + \frac{1}{r}\right)u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1} \quad \theta = \frac{1}{2}$ Crank-Nicholson

$u_i^{n+1} = u_i^n + [\theta r(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}] \ \theta = 1$ Laasonen

$\theta = \frac{1}{3} \Rightarrow r \leq \frac{3}{2}$(stabilite şartı)

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \left[\frac{1}{3}r(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) + \frac{2}{3}r(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)\right]$$

$\theta = \frac{1}{4} \Rightarrow r \leq 1$ (stabilite şartı)

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \left[\frac{1}{4}r(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) + \frac{3}{4}r(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)\right]$$

$$\theta = \frac{2}{3} \Rightarrow u_i^{n+1} = u_i^n + \left[\frac{2}{3}r(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) + \frac{1}{3}r(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)\right]$$

$u_t = u_{xx} + f(x,t)$ Homojen olmayan denklemde

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \left[\theta \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + (1-\theta)\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}\right] + \theta f_i^{n+1} + (1-\theta) f_i^n$$

Alternatif

$$u_i^{j+1} = (\tfrac{1-2r}{1+2r})u_i^{j-1} + \left(\tfrac{2r}{1+2r}\right)u_{i+1}^j + \left(\tfrac{2r}{1+2r}\right)u_{i-1}^j \quad \text{Dufort-Frankel}$$

Aşağıdaki örnek [6] dan alınmıştır fakat farklı nümerik yöntem(Daha genel ve kapsamlı Theta Metodu) denenmiştir.

Örnek:

$$u_t = u_{xx} + e^{(2\pi)^2 t + \frac{1}{10}(e^{10t^2}-1)}[(2\pi)^2 cos2\pi x e^{-(2\pi)^2 t} + 2t(1 + cos2\pi x)e^{-(2\pi)^2 t + 10t^2}],$$

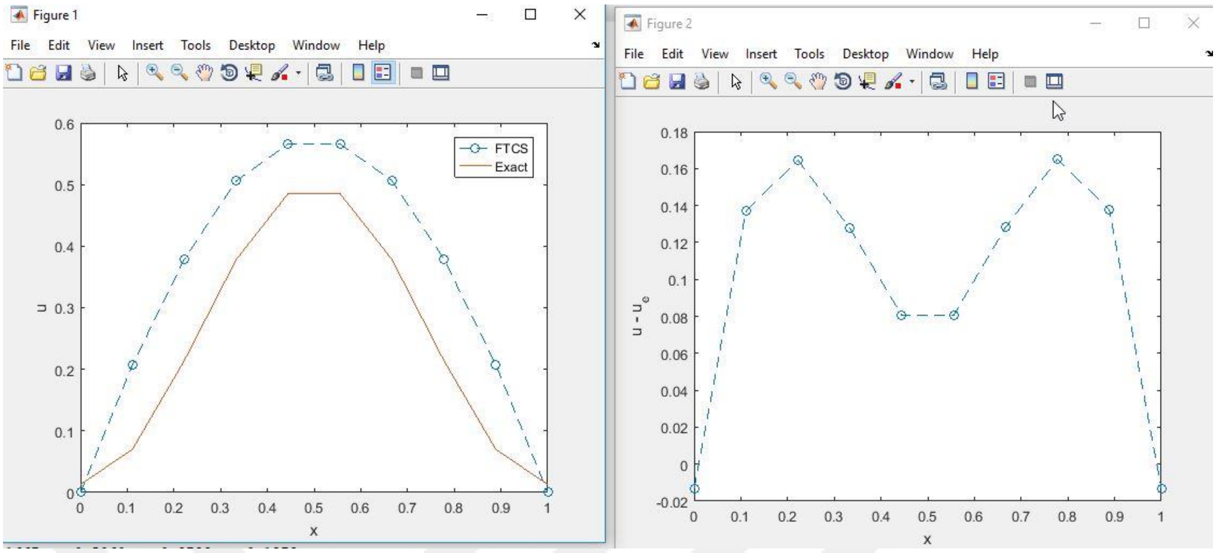
$$u(x,0) = 1 + cos2\pi x\ , 0 \leq x \leq 1$$

$$u(0,t) = u(1,t), \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}$$

$$u_x(1,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}$$

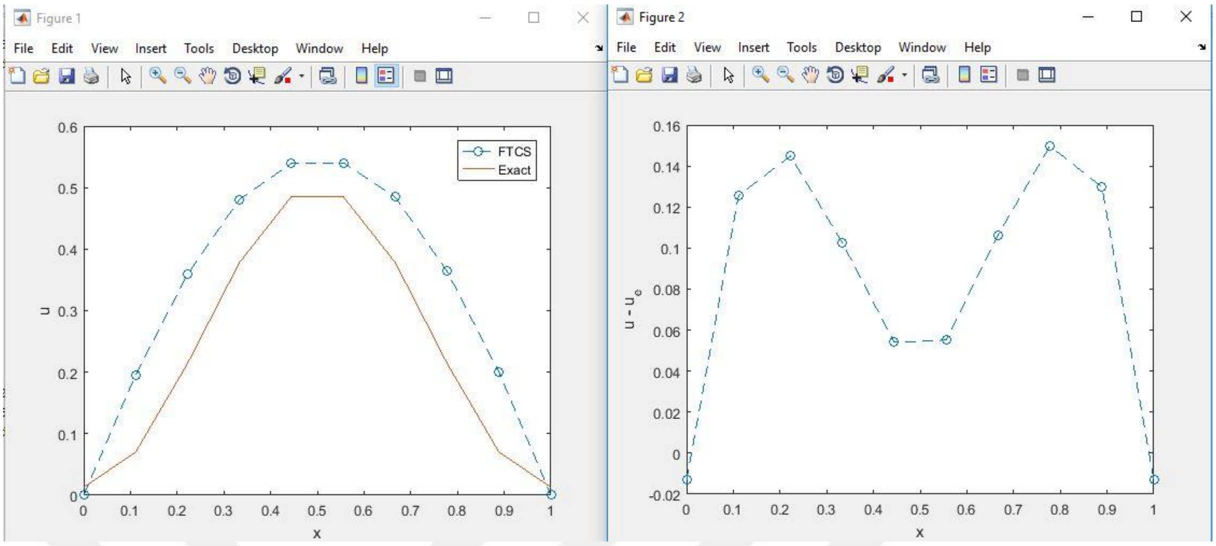
$$\int_0^1 u(x,t)dx = e^{(2\pi)^2 t + \frac{1}{10}(e^{10t^2}-1)} . e^{-(2\pi)^2 t}, \qquad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \left[\theta \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + (1-\theta)\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}\right] + \theta f_i^{n+1} + (1-\theta) f_i^n$$



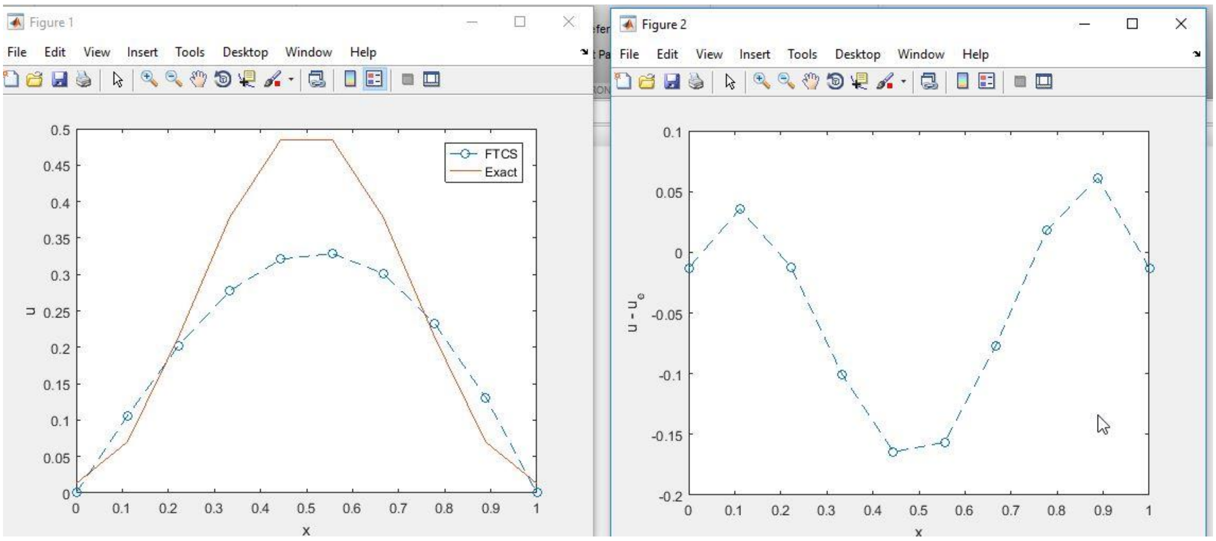

```
>> heatFTCS(1/1000)

Norm of error =     3.716e-01 at t =     0.500
    dt, dx, r =     5.556e-02    1.111e-01    0.450
     x,       t,       fdm      analytic    errorf

ans =

         0         0         0    0.0131    0.0131
    0.1111    0.0556    0.2073    0.0700    0.1372
    0.2222    0.1111    0.3787    0.2143    0.1645
    0.3333    0.1667    0.5060    0.3783    0.1278
    0.4444    0.2222    0.5658    0.4853    0.0805
    0.5556    0.2778    0.5659    0.4853    0.0806
    0.6667    0.3333    0.5064    0.3783    0.1282
    0.7778    0.3889    0.3793    0.2143    0.1650
    0.8889    0.4444    0.2077    0.0700    0.1377
    1.0000    0.5000         0    0.0131    0.0131
```

Şekil 6.1 : Theta Yöntemi için Hazırlanan Program Çıktısı



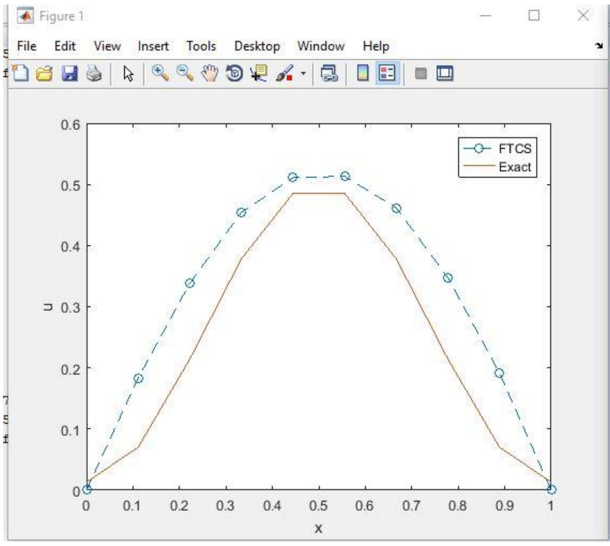

```
>> heatFTCS(1/100)

Norm of error =     3.228e-01 at t =     0.500
    dt, dx, r =     5.556e-02    1.111e-01    0.450
     x,       t,       fdm      analytic    errorf

ans =

         0         0         0    0.0131    0.0131
    0.1111    0.0556    0.1957    0.0700    0.1257
    0.2222    0.1111    0.3591    0.2143    0.1449
    0.3333    0.1667    0.4809    0.3783    0.1026
    0.4444    0.2222    0.5394    0.4853    0.0540
    0.5556    0.2778    0.5405    0.4853    0.0552
    0.6667    0.3333    0.4847    0.3783    0.1065
    0.7778    0.3889    0.3640    0.2143    0.1498
    0.8889    0.4444    0.1998    0.0700    0.1298
    1.0000    0.5000         0    0.0131    0.0131
```

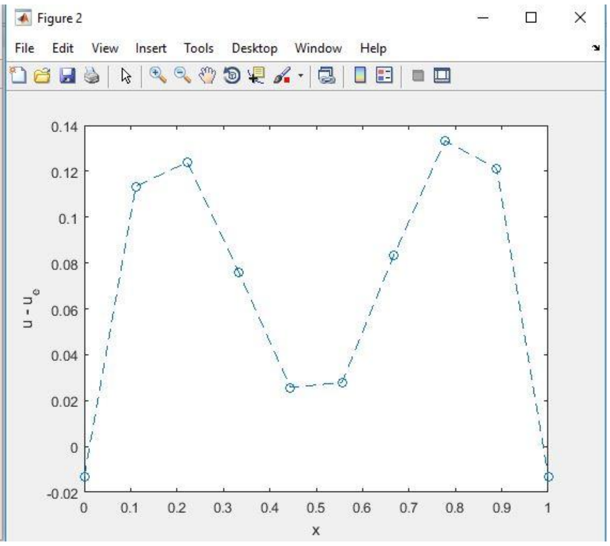
Şekil 6.2 Theta Yöntemi için Hazırlanan Program Çıktısı




```
>> heatFTCS(1/10)

Norm of error =     2.710e-01 at t =     0.500
    dt, dx, r =     5.556e-02     1.111e-01     0.450
     x,       t,        fdm      analytic    errorf

ans =

         0         0         0    0.0131    0.0131
    0.1111    0.0556    0.1057    0.0700    0.0357
    0.2222    0.1111    0.2021    0.2143    0.0121
    0.3333    0.1667    0.2776    0.3783    0.1007
    0.4444    0.2222    0.3209    0.4853    0.1644
    0.5556    0.2778    0.3287    0.4853    0.1566
    0.6667    0.3333    0.3013    0.3783    0.0769
    0.7778    0.3889    0.2328    0.2143    0.0186
    0.8889    0.4444    0.1311    0.0700    0.0611
    1.0000    0.5000         0    0.0131    0.0131
```

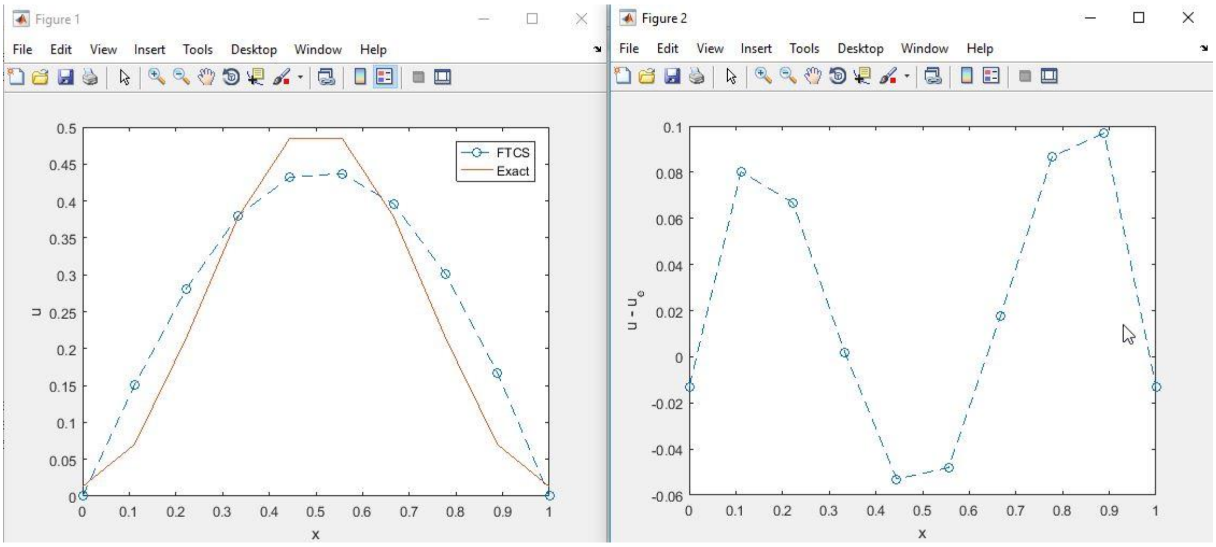
Şekil 6.3 Theta Yöntemi için Hazırlanan Program Çıktısı





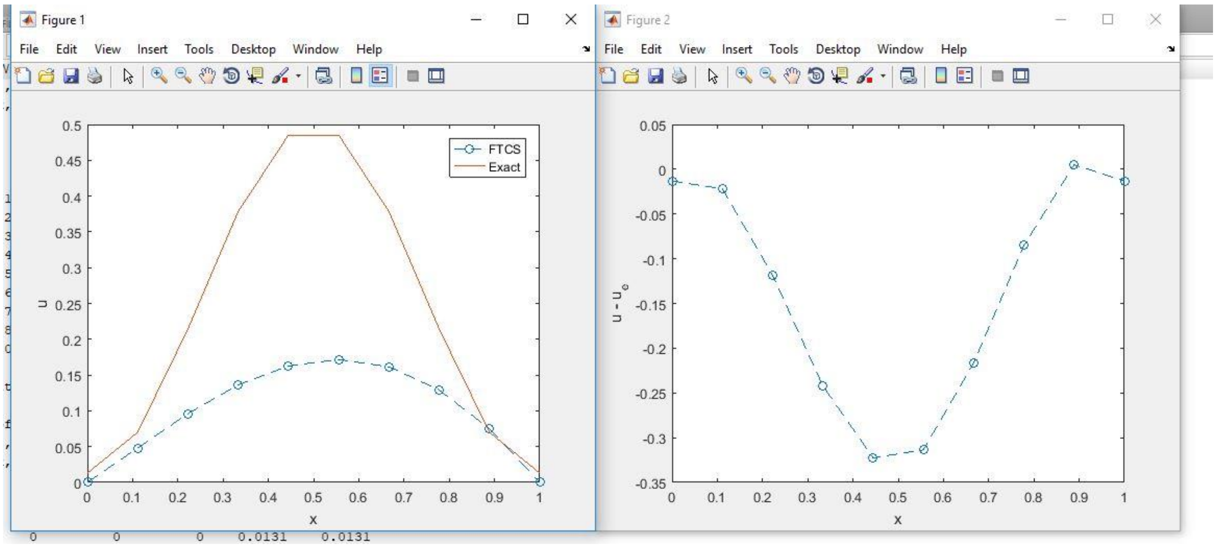

```
>> heatFTCS(1/50)

Norm of error =    2.741e-01 at t =    0.500
    dt, dx, r =    5.556e-02   1.111e-01   0.450
     x,      t,       fdm      analytic    errorf

ans =

         0         0         0    0.0131    0.0131
    0.1111    0.0556    0.1834    0.0700    0.1134
    0.2222    0.1111    0.3382    0.2143    0.1240
    0.3333    0.1667    0.4540    0.3783    0.0758
    0.4444    0.2222    0.5110    0.4853    0.0257
    0.5556    0.2778    0.5132    0.4853    0.0279
    0.6667    0.3333    0.4614    0.3783    0.0831
    0.7778    0.3889    0.3475    0.2143    0.1333
    0.8889    0.4444    0.1913    0.0700    0.1212
    1.0000    0.5000         0    0.0131    0.0131
```

Şekil 6.4 Theta Yöntemi için Hazırlanan Program Çıktısı



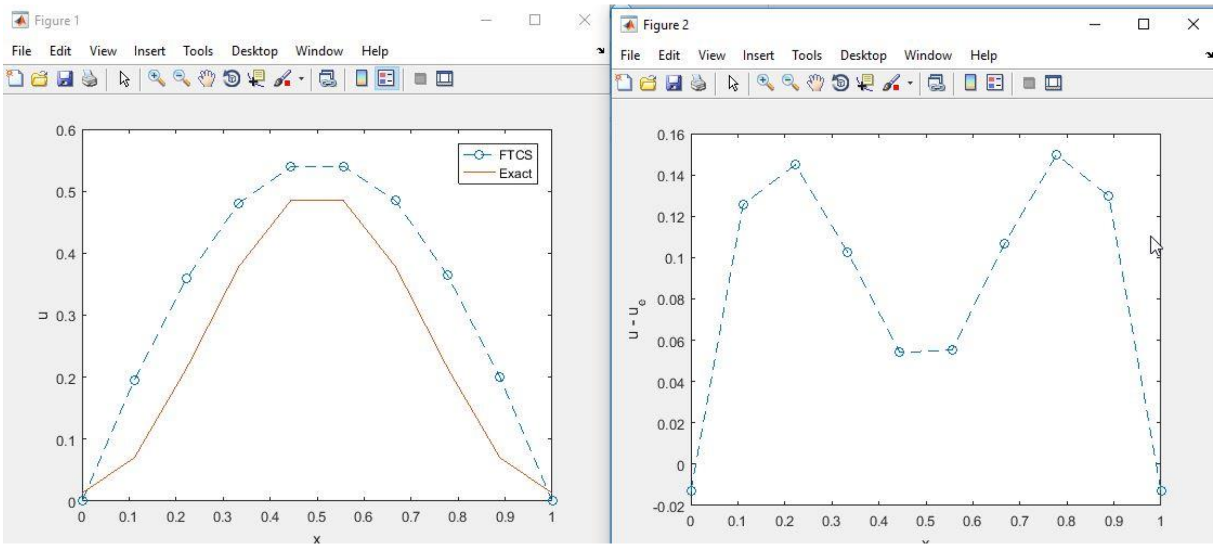

```
>> heatFTCS(1/20)

Norm of error =    1.833e-01 at t =    0.500
    dt, dx, r =    5.556e-02    1.111e-01    0.450
     x,       t,       fdm     analytic   errorf

ans =

         0         0         0    0.0131    0.0131
    0.1111    0.0556    0.1502    0.0700    0.0802
    0.2222    0.1111    0.2810    0.2143    0.0667
    0.3333    0.1667    0.3802    0.3783    0.0019
    0.4444    0.2222    0.4323    0.4853    0.0530
    0.5556    0.2778    0.4372    0.4853    0.0481
    0.6667    0.3333    0.3959    0.3783    0.0176
    0.7778    0.3889    0.3010    0.2143    0.0867
    0.8889    0.4444    0.1670    0.0700    0.0970
    1.0000    0.5000         0    0.0131    0.0131
```

Şekil 6.5 Theta Yöntemi için Hazırlanan Program Çıktısı

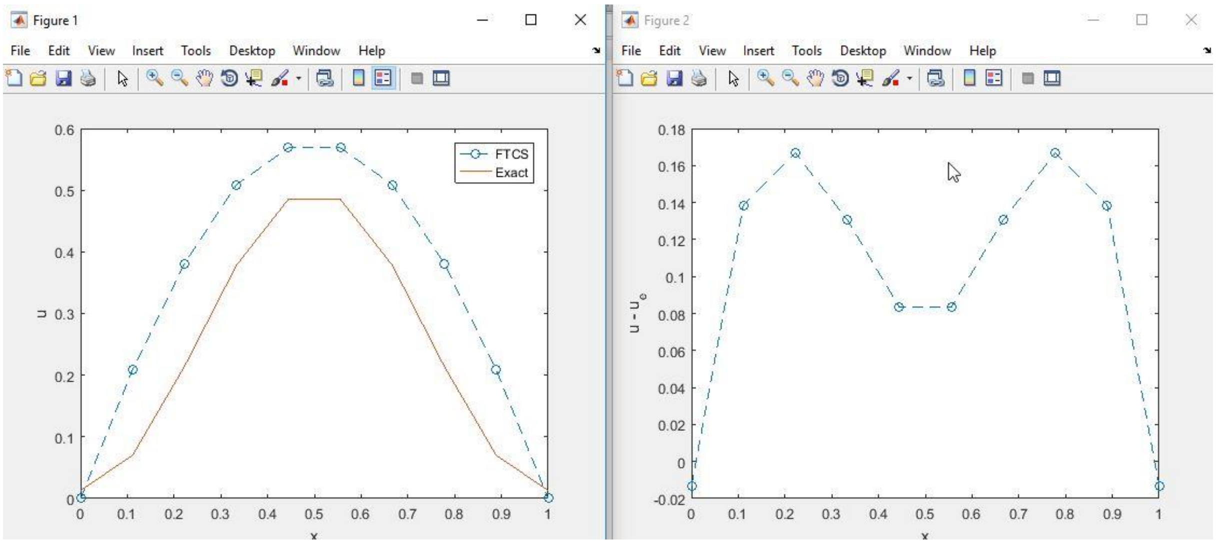



```
>> heatFTCS(1/5)

Norm of error =     5.745e-01 at t =     0.500
    dt, dx, r =     5.556e-02     1.111e-01     0.450
     x,       t,       fdm      analytic    errorf

ans =

         0         0         0    0.0131    0.0131
    0.1111    0.0556    0.0481    0.0700    0.0219
    0.2222    0.1111    0.0960    0.2143    0.1183
    0.3333    0.1667    0.1362    0.3783    0.2421
    0.4444    0.2222    0.1628    0.4853    0.3226
    0.5556    0.2778    0.1717    0.4853    0.3136
    0.6667    0.3333    0.1616    0.3783    0.2166
    0.7778    0.3889    0.1291    0.2143    0.0852
    0.8889    0.4444    0.0751    0.0700    0.0050
    1.0000    0.5000         0    0.0131    0.0131
```

Şekil 6.6 Theta Yöntemi için Hazırlanan Program Çıktısı

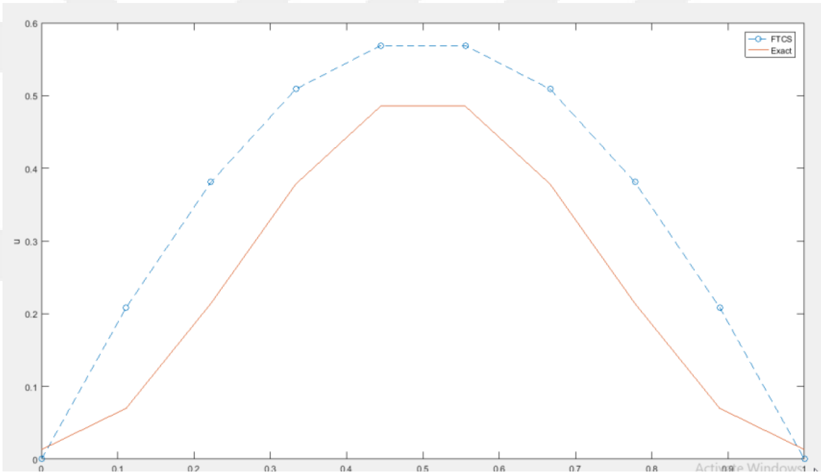


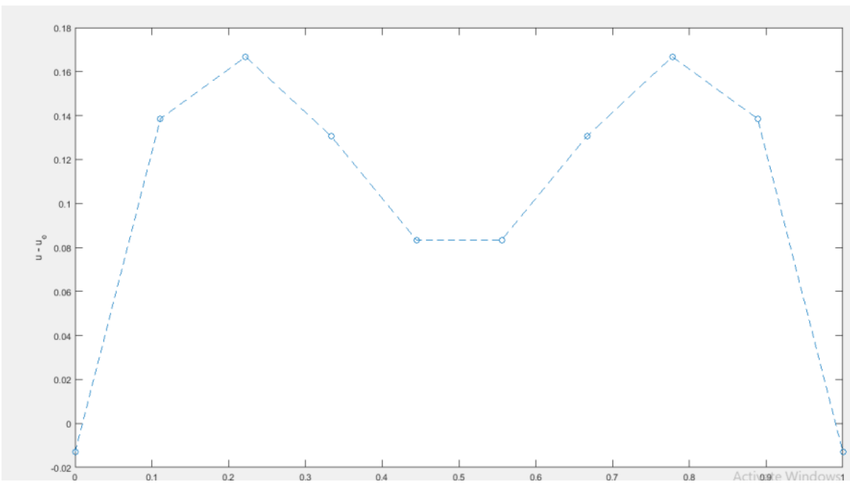

```
>> heatFTCS(0.00999)

Norm of error =    3.229e-01 at t =    0.500
    dt, dx, r =    5.556e-02    1.111e-01    0.450
     x,       t,       fdm     analytic    errorf

ans =

         0         0         0    0.0131    0.0131
    0.1111    0.0556    0.1957    0.0700    0.1257
    0.2222    0.1111    0.3592    0.2143    0.1449
    0.3333    0.1667    0.4809    0.3783    0.1026
    0.4444    0.2222    0.5394    0.4853    0.0541
    0.5556    0.2778    0.5405    0.4853    0.0552
    0.6667    0.3333    0.4848    0.3783    0.1065
    0.7778    0.3889    0.3640    0.2143    0.1498
    0.8889    0.4444    0.1998    0.0700    0.1298
    1.0000    0.5000         0    0.0131    0.0131
```



Şekil 6.7 Theta Yöntemi için Hazırlanan Program Çıktısı

```
>> heatFTCS(0)

Norm of error =    3.773e-01 at t =    0.500
     dt, dx, r =    5.556e-02    1.111e-01    0.450
        x,        t,       fdm      analytic    errorf

ans =

         0         0         0    0.0131    0.0131
    0.1111    0.0556    0.2086    0.0700    0.1386
    0.2222    0.1111    0.3810    0.2143    0.1667
    0.3333    0.1667    0.5089    0.3783    0.1306
    0.4444    0.2222    0.5688    0.4853    0.0834
    0.5556    0.2778    0.5688    0.4853    0.0834
    0.6667    0.3333    0.5089    0.3783    0.1306
    0.7778    0.3889    0.3810    0.2143    0.1667
    0.8889    0.4444    0.2086    0.0700    0.1386
    1.0000    0.5000         0    0.0131    0.0131
```





Theta=0 iken Program Çıktısı

Şekil 6.8 Theta Yöntemi için Hazırlanan Program Çıktısı

```
>> heatFTCS(2/3)

Norm of error =    9.260e-01 at t =    0.500
    dt, dx, r =    5.556e-02    1.111e-01    0.450
     x,      t,      fdm     analytic   errorf

ans =

         0         0         0    0.0131    0.0131
    0.1111    0.0556    0.0001    0.0700    0.0700
    0.2222    0.1111    0.0002    0.2143    0.2141
    0.3333    0.1667    0.0003    0.3783    0.3780
    0.4444    0.2222    0.0004    0.4853    0.4849
    0.5556    0.2778    0.0005    0.4853    0.4848
    0.6667    0.3333    0.0005    0.3783    0.3777
    0.7778    0.3889    0.0005    0.2143    0.2137
    0.8889    0.4444    0.0004    0.0700    0.0697
    1.0000    0.5000         0    0.0131    0.0131
```

```
>> heatFTCS(3/4)

Norm of error =    9.268e-01 at t =    0.500
    dt, dx, r =    5.556e-02    1.111e-01    0.450
     x,      t,      fdm     analytic   errorf

ans =

         0         0         0    0.0131    0.0131
    0.1111    0.0556    0.0000    0.0700    0.0700
    0.2222    0.1111    0.0000    0.2143    0.2142
    0.3333    0.1667    0.0000    0.3783    0.3782
    0.4444    0.2222    0.0000    0.4853    0.4853
    0.5556    0.2778    0.0001    0.4853    0.4853
    0.6667    0.3333    0.0001    0.3783    0.3782
    0.7778    0.3889    0.0001    0.2143    0.2142
    0.8889    0.4444    0.0000    0.0700    0.0700
    1.0000    0.5000         0    0.0131    0.0131
```

Şekil 6.9 Theta Yöntemi için Hazırlanan Program Çıktısı

6.2 İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ile Yaklaşık Çözüm:

$D = \{(x,t) | x \in [0,1], t \in [0,T]\}$

$u(x,t)$ fonksiyonu analitik,t zaman değişkenine ve x değişkenine göre, ilgili tanım bölgesinde sürekli türevlendirilebilir bir fonksiyon olsun, o zaman,

$$U_k(x) = \frac{1}{k!}[\frac{\partial^k}{\partial x^k} u(x,t)]_{t=0}$$

ifadesi yazılabilir. Burada $u(x,t)$ orijinal fonksiyon, $U_k(x)$ dönüştürülmüş fonksiyonu göstermektedir. Diferansiyel ters dönüşüm fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x) t^k$$

ve ilgili eşitliklerden aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}[\frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x,t)]_{t=0}\ t^k$$

Yukarıda tanımlanan yönteme, “İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm Methodu” denir.

İlgili yöntem kuvvet serisi açılımına dayanmaktadır.

$u_x(x,t) = u_{xx}(x,t) \ \ (x,t) \in D$

$D_1 = \{(0,x) | \ x \in [0,1] \}$

$D_2 = \{(0,t) | \ t \in [0,T] \}$

$D_3 = \{(1,t) | \ t \in [0,T] \}$

$u_t = u_{xx}$

$u(x,0) = \varphi(x), x \in [0,1]$

$u(0,t) = \phi(t)$

$u_x(1,t) = \mu(t)$

$$U_k = \frac{1}{k!}[\frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x,t)]_{t=0}$$

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x) t^k$$

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}[\frac{\partial^k}{\partial t^k}u(x,t)]_{t=0}\,t^k$$

$$u(x,0)=\varphi(x)$$

$\{U_k(x)\}_{k=0}^{n}$ Yaklaşık çözüm : $\tilde{u}_n(x,t)=\sum_{k=0}^{n}U_k(x)t^k$

$$u(x,t)=\lim_{n\to\infty}\tilde{u}_n(x,t)$$

$$U_{k+1}(x)=\frac{\propto}{k+1}\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_k(x),\quad k=1,2,\dots$$

Örnek: $u_t=-\frac{1}{4\pi^2}u_{xx}$

$$u(x,0)=\varphi(x)=\cos(2\pi x)$$

$$u(0,t)=u(1,t),u_x(1,t)=0\,,\qquad 0\le t\le T$$

<u>**Tam çözümü**</u> $u(x,t)=e^t\cos(2\pi x)$

$$u(x,0)=cos2\pi x\,,0\le x\le 1$$

$$u(0,t)=u(1,t),\ \ 0\le t\le\frac{1}{2}$$

$$u_x(1,t)=0,\quad 0\le t\le\frac{1}{2}$$

$$U_0(x)=cos2\pi x$$

$$\frac{d^2(cos2\pi x\,)}{dx^2}=-4\pi^2cos2\pi x$$

$$U_{k+1}(x)=\frac{1}{-4\pi^2(k+1)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_k(x),\quad k=1,2,\dots$$

$$k=0,\qquad U_1(x)=\frac{1}{-4\pi^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(cos2\pi x\,)\Rightarrow\ U_1(x)=cos2\pi x$$

$$k=1,\qquad U_2(x)=\frac{1}{-8\pi^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(cos2\pi x)\Rightarrow\ U_2(x)=\frac{1}{2}cos2\pi x$$

$$k=2\qquad U_3(x)=\frac{1}{-12\pi^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2}cos2\pi x\right)\Rightarrow\ U_3(x)=\frac{1}{3.2}cos2\pi x$$

$$k=3\qquad U_4(x)=\frac{1}{-16\pi^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{3.2}cos2\pi x\right)\Rightarrow\ U_3(x)=\frac{1}{2.3.4}cos2\pi x$$

..

$$U_k(x) = \frac{1}{1.2.3 \ldots (k+1)} cos2\pi x$$

$$\tilde{u}_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1.2.3.4 \ldots (n+1)} cos2\pi x \; t^k$$

$$\tilde{u}_n(x,t) = cos2\pi x + + \frac{t}{2} cos2\pi x + \frac{t^2}{1.2.3} cos2\pi x + \frac{t^3}{1.2.3.4} cos2\pi x + \frac{t^5}{1.2.3.4.5} cos2\pi x + \cdots$$

$$\tilde{u}_n(x,t) = cos2\pi x \; [1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \frac{t^3}{4!} + \cdots + \frac{t^{n-1}}{n!}]$$

$$\tilde{u}_n(x,t) \approx e^t cos2\pi x$$

Örnek:

$u_t = u_{xx} + cosx \;;\; x \in (0,1), t \in (0,T)$

$u(x,0) = \varphi(x) = 2cosx$

<u>Tam çözümü</u> $u(x,t) = (1 + e^{-t})\mathrm{cos}x$

$$U_0(x) = 2cosx$$

$$\frac{d^2(cos2\pi x\,)}{dx^2} = -2cosx$$

$$U_{k+1}(x) = \frac{1}{k+1}[\frac{\partial^2}{\partial x^2} U_k(x) + cosx.\delta(k)] \quad k = 1,2,\ldots$$

burada $\delta(k) = \begin{Bmatrix} 1, k = 0 \\ 0, k = 0 \end{Bmatrix}$ dır.

$$k = 0 \;\Rightarrow\; U_1(x) = \frac{1}{1}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(2cosx) + cosx.\delta(0) \quad\right]$$

$$\Rightarrow\; U_1(x) = -2cosx + cosx = -cosx$$

$$k = 1 \;\Rightarrow\; U_2(x) = \frac{1}{2}[cosx + cosx.\delta(1)\,] = \frac{1}{2}cosx$$

$$k = 2 \;\Rightarrow\; U_3(x) = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2}cosx + cosx.\delta(2)\right] = -\frac{1}{6}cosx$$

$$k = 3 \;\Rightarrow\; U_4(x) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{6}cosx + cosx.\delta(4)\,\right] = \frac{1}{24}cosx$$

$$k = 4 \;\Rightarrow\; U_5(x) = \frac{1}{5}\left[-\frac{1}{24}cosx + cosx.\delta(5)\,\right] = -\frac{1}{120}cosx$$

.

.

.

$$\tilde{u}_n(x,t) = 2cosx - tcosx + \frac{1}{2!}t^2cosx - \frac{1}{3!}t^3cosx + \frac{1}{4!}t^4cosx - \frac{1}{5!}t^5cosx \ldots.$$

$$\tilde{u}_n(x,t) = cosx[2 - t + \frac{1}{2!}t^2 - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4 + \cdots]$$

$$\Rightarrow \tilde{u}_n(x,t) = cosx[1 + 1 - t + \frac{1}{2!}t^2 - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4 + \cdots]$$

$$\Rightarrow \tilde{u}_n(x,t) = (1 + e^{-t})\mathrm{cos}x$$

Örnek:

$$u_t = \frac{1}{4\pi^2}u_{xx} + cos2\pi x \;\; ; \; x \in (0,1), t \in (0,T)$$

$$u(x,0) = 2cos2\pi x$$

$$u(0,t) = u(1,t), u_x(1,t) = 0$$

<u>Tam çözümü</u> $u(x,t) = (1 + e^{-t})\mathrm{cos}2\pi x$

$$U_{k+1}(x) = \frac{1}{k+1}[\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_k(x) + cos2\pi x.\delta(k)] \;\;\; k = 1,2, \ldots$$

burada $\delta(k) = \begin{Bmatrix} 1, k = 0 \\ 0, k = 0 \end{Bmatrix}$ dır.

$$U_0(x) = 2cos2\pi x \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}(2cos2\pi x) = -8\pi^2cos2\pi x$$

- $k = 0 \;\Rightarrow\; U_1(x) = \frac{1}{1}\left[\frac{1}{4\pi^2}.\frac{\partial^2}{\partial x^2}(2cos2\pi x) + cos2\pi x.\delta(0) \quad\right]$

$$\Rightarrow\; U_1(x) = \frac{1}{4\pi^2}.(-8\pi^2cos2\pi x\,) + cos2\pi x = -cos2\pi x$$

- $k = 1 \;\Rightarrow\; U_2(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4\pi^2}.\frac{\partial^2}{\partial x^2}(-cos2\pi x) + cos2\pi x.\delta(1) \quad\right]$

$$\Rightarrow\; U_2(x) = \frac{1}{2.1}.\frac{1}{4\pi^2}.(4\pi^2cos2\pi x\,) = \frac{1}{2!}cos2\pi x$$

- $k = 2 \;\Rightarrow\; U_3(x) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{4\pi^2}.\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2}cos2\pi x\right) + cos2\pi x.\delta(2) \quad\right]$

$$\Rightarrow\; U_2(x) = \frac{1}{3.2.1}\left[\frac{1}{4\pi^2}(-4\pi^2cos2\pi x)\right] = -\frac{1}{3!}cos2\pi x$$

- $k = 3 \;\Rightarrow\; U_4(x) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4\pi^2}.\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{3!}cos2\pi x\right) + cos2\pi x.\delta(3) \quad\right]$

$$\Rightarrow\ U_4(x) = \frac{1}{4.3!}\left[\frac{1}{4\pi^2}(4\pi^2 cos2\pi x)\right] = \frac{1}{4!}cos2\pi x$$

.

.

.

$$\tilde{u}_n(x,t) = 2cos2\pi x - t.cos2\pi x + \frac{1}{2!}t^2cos2\pi x - \frac{1}{3!}t^3cos2\pi x + \frac{1}{4!}t^4cos2\pi x - \cdots.$$

$$\Rightarrow \tilde{u}_n(x,t) = cos2\pi x(2 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots)$$

$$\Rightarrow \tilde{u}_n(x,t) = cos2\pi x\left(1 + 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots\right) = (1 + e^{-t})\cos 2\pi x$$

Çizlge 6.2 İndirgenmiş Diferansiyel Dönüşüm için Çeşitli Örnekler

İlk Form	**Dönüştürülmüş Form**
$u(x,t)$	$U_k(x) = \frac{1}{k!}[\frac{\partial^k}{\partial t^k}u(x,]_{t=0}$
$w(x,t) = \alpha u(x,t) \pm \beta v(x,t)$	$W_k(x) = \alpha U_k(x) \pm \beta V_k(x)$ α, β sabitler
$w(x,t) = x^m t^n u(x,t)$	$W_k(x) = x^m U_{k-n}(x)$
$w(x,t) = x^m t^n$	$W_k(x) = x^m \delta(k-n)$, burada $\delta(k-n) = \begin{cases} 1, n = k \\ 0, n \neq k \end{cases}$
$w(x,t) = \frac{\partial^{m+n}u(x,t)}{\partial x^m \partial t^n}$	$W_k(x) = \frac{\partial^n}{\partial x^n}[\frac{(k+m)!}{k!}U_{k+m}(x)]$
$w(x,t) = u(x,t)v(x,t)$	$W_k(x) = \sum_{i=0}^{k} U_i(x)V_{k-i}(x)$
$w(x,t) = \frac{\partial^n}{\partial t^n}u(x,t)$	$W_k(x) = \frac{(k+n)!}{k!}U_{k+n}(x)]$

Çizelge 6.3 Bazı tek değişkenli temel fonksiyonların diferansiyel dönüşümü

$w(x) = \frac{d}{dx}u(x)$	$W(k) = (k+1)U(k+1) = \frac{(k+1)!}{k!}U(k+1)$
$w(x) = \frac{d^r}{dx^r}u(x)$	$W(k) = (k+1)(k+2)\dots(k+r)U(k+1) = \frac{(k+r)!}{k!}U(k+r)$
$w(x) = (1+x)^m$	$W(k) = \begin{cases} \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)}{k!}, & m \neq k \; ve \; m > k \\ 1, & m = k \end{cases}$
$w(x) = \sin(ax+b)$	$W(k) = \frac{a^k}{k!}\sin(\frac{\pi}{2}k+b)$
$w(x) = \cos(ax+b)$	$W(k) = \frac{a^k}{k!}\cos(\frac{\pi}{2}k+b)$
$w(x) = e^{ax}$	$W(k) = \frac{a^k}{k!}$
$w(x) = \alpha^{ax}$	$W(k) = \frac{a^k(ln\alpha)^k}{k!}$

6.3 İki Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm

$$U(k,h)=\frac{1}{k!\,h!}u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+h}u(x,t)}{\partial x^k\partial t^h}\right]_{x=0,t=0}x^k\,t^h$$

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}U(k,h)\,x^k\,t^h$$

$$u(x,t)\approx\sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{m}U(k,h)\,x^k\,t^h$$

Çizlge 6.4 İki Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm için Çeşitli Sonuçlar

$w(x,t)=u(x,t)\pm v(x,t)$	$W(k,h)=U(k,h)\pm V(k,h)$
$w(x,t)=\dfrac{\partial w(x,t)}{\partial x}$	$W(k,h)=(k+1)W(k+1,h)$
$w(x,t)=\dfrac{\partial w(x,t)}{\partial t}$	$W(k,h)=(h+1)W(k,h+1)$
$w(x,t)=u(x,t).v(x,t)$	$W(k,h)=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{h}U(i,h-j)V(k-i,j)$
$w(x,t)=\dfrac{\partial^{r+q}w(x,t)}{\partial x^r\partial t^q}$	$W(k,h)=(k+1)(k+2)\ldots(k+r)(h+1)(h+2)\ldots(h+q)W(k+r,h+q)$
$w(x,t)=x^m t^n$	$W(k,h)=\delta(k-m)\delta(h-n)$
$w(x,t)=x^m e^{at}$	$W(k,h)=\dfrac{a^h}{h!}\delta(k-m)$
$w(x,t)=x^m\sin(at+b)$	$W(k,h)=\dfrac{a^h}{h!}\delta(k-m)\sin(\dfrac{h\pi}{2}+b)$

Çizlge 6.5 Bazı temel fonksiyonların diferansiyel dönüşümü

$\dot{w}(x,t) = e^{ax+bt+c} \Rightarrow W(x,t) = \frac{a^k}{k!}\frac{b^h}{h!}e^c$
$\dot{w}(x,t) = \eta^{ax+bt+c} \Rightarrow W(x,t) = \frac{a^k}{k!}\frac{b^h}{h!}\ln(\eta)^{k+h}$
$\dot{w}(x,t) = \sin(ax+bt+c) \Rightarrow W(x,t) = \frac{a^k}{k!}\frac{b^h}{h!}\sin((k+h)\frac{\pi}{2}+c)$
$\dot{w}(x,t) = \cos(ax+bt+c) \Rightarrow W(x,t) = \frac{a^k}{k!}\frac{b^h}{h!}\cos((k+h)\frac{\pi}{2}+c)$

Örnek:

$$u_t = -\frac{1}{4\pi^2}u_{xx} \ ; \ x \in (0,1), t \in (0,T)$$

$$u(x,0) = \varphi(x) = \cos(2\pi x)$$

$$u(0,t) = u(1,t), u_x(1,t) = 0\,, \qquad 0 \le t \le T$$

$$u(x,t) = e^t\cos(2\pi x)$$

$$(h+1)U(k,h+1) = -\frac{1}{4\pi^2}(k+1)(k+2)U(k+2,h)$$

$$u_x(1,t) = 0 \ : (k+1)U(k+1,h) = 0$$

$$u(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k,0)x^k = \cos(2\pi x)$$

$$U(0,0) + U(1,0)x + U(2,0)x^2 + U(3,0)x^3 + U(4,0)x^4 + \cdots$$
$$= 1 - \frac{4\pi^2x^2}{2!} + \frac{16\pi^4x^4}{4!} - \cdots +.$$

$$U(0,0) = 1, U(1,0) = 0, U(2,0) = -\frac{(2\pi)^2}{2!}, U(3,0) = 0, U(4,0) = \frac{(2\pi)^4}{4!}, U(5,0) = 0,$$

$$U(6,0) = -\frac{(2\pi)^6}{6!}, U(7,0) = 0, \ldots$$

$$U(k,0) = \left\{\begin{array}{c|c} 1 & \\ 0 & k=0 \\ -\frac{(2\pi)^k}{k!} & k = 1,3,5,7,. \\ & k = 2,6,10,. \\ \frac{(2\pi)^k}{k!} & k = 4,8,12,. \end{array}\right\}$$

$$(h+1)U(k,h+1) = -\frac{1}{4\pi^2}(k+1)(k+2)U(k+2,h)$$

$$U(k,1) = -\frac{1}{(2\pi)^2}(k+1)(k+2).u(k+2,0); \quad h=0$$

$$U(k,1) = \left\{ \begin{array}{c|c} 1 & \\ 0 & k=0 \\ -\frac{(2\pi)^k}{k!} & k=1,3,5,7,. \\ \frac{(2\pi)^k}{k!} & k=2,6,10,. \\ & k=4,8,12,. \end{array} \right\}$$

$$(h+1)U(k,h+1) = -\frac{1}{4\pi^2}(k+1)(k+2)U(k+2,h)$$

$$h=0: U(0,1) = -\frac{1}{4\pi^2}1.2.U(2,0) = -\frac{1}{4\pi^2}1.2\left(-\frac{(2\pi)^2}{2!}\right) = 1$$

$$h=1: U(0,2) = -\frac{1}{2.4\pi^2}1.2.U(2,1) = -\frac{1}{2.4\pi^2}1.2\left(-\frac{(2\pi)^2}{2!}\right) = \frac{1}{2!}$$

$$h=2: U(0,3) = -\frac{1}{3.4\pi^2}1.2U(2,2) = -\frac{1}{3.4\pi^2}1.2\frac{1}{2}(-\frac{(2\pi)^2}{2!}) = \frac{1}{3!}$$

$$h=3: U(0,4) = -\frac{1}{4.4\pi^2}1.2U(2,3) = \frac{1}{4.4\pi^2}1.2\frac{3.4}{3}U(4,2)$$
$$= \frac{1}{4.4\pi^2}1.2\frac{3.4}{3}\frac{1}{4\pi^2}\frac{(2\pi)^4}{2.4!} = \frac{1.2.3.4}{4.3.2.4!} = \frac{1}{4!}$$

$$2U(k,2) = -\frac{1}{4\pi^2}(k+1)(k+2).u(k+2,1)$$

$$\Rightarrow U(k,2) = -\frac{1}{4\pi^2}.\frac{(k+1)(k+2).u(k+2,1)}{2}$$

$$k=0, U(0,2) = -\frac{1}{4\pi^2}.\frac{1.2.u(2,1)}{2} = \frac{1.2}{2.4\pi^2}\frac{(2\pi)^2}{2!} = \frac{1}{2!}$$

$$k=2 \text{ için } -\frac{1}{4\pi^2}.\frac{(k+1)(k+2).u(k+2,1)}{2} = -\frac{1}{4\pi^2}.\frac{3.4u(4,1)}{2} = -\frac{1}{4\pi^2}3.4.\frac{(2\pi)^4}{2.4!} = -\frac{(2\pi)^2}{2.2!}$$

$$U(k,2) = \left\{ \begin{array}{c|c} \frac{1}{2!} & \\ 0 & k=0 \\ -\frac{(2\pi)^k}{2!.k!} & k=1,3,5,7,. \\ \frac{(2\pi)^k}{2!.k!} & k=2,6,10,. \\ & k=4,8,12,. \end{array} \right\}$$

$$(h+1)U(k,h+1) = (k+1)(k+2)U(k+2,h)$$

$$U(k,3)=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)U(k+2,2)$$

$$k=1, U(1,3)=\frac{1}{3}2.3.U(3,2)=0$$

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}U(k,h)\,x^k\,t^h$$

$$U(k,h)=\left\{\begin{array}{c|c} \frac{1}{h!} & \\ 0 & k=0 \\ -\frac{(2\pi)^k}{h!.k!} & k=1,3,5,7,. \\ \frac{(2\pi)^k}{h!.k!} & k=2,6,10,. \\ & k=4,8,12,. \end{array}\right\}$$

$$\begin{aligned} u(x,t)=U(0,0)+U(0,1)t+U(0,2)t^2+U(0,3)t^3+\cdots+U(1,0)x+U(2,0)x^2 \\ +U(3,0)x^3+U(4,0)x^4+\cdots+U(1,1)xt+U(2,1)x^2t+U(3,1)x^3t \\ +U(4,1)x^4t+\cdots+U(1,2)xt^2+U(2,2)x^2t^2+U(3,2)x^3t^2 \\ +U(4,2)x^4t^2+\cdots+U(1,3)xt^3+U(2,3)x^2t^3 \end{aligned}$$

$$u(x,t)=1+\frac{t}{1}+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\cdots-\frac{(2\pi)^2}{2!}x^2+\frac{(2\pi)^4}{4!}x^4+\cdots--\frac{(2\pi)^2}{2!}x^2t$$

$$\cos(2\pi x)=1-\frac{(2\pi)^2}{2!}x^2+\frac{(2\pi)^4}{4!}x^4-\cdots+$$

$$e^t=1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\cdots$$

$$\Rightarrow u(x,t)\approx e^t.\cos(2\pi x)$$

Örnek:

$u_t=u_{xx}+(1+4\pi^2)e^t\cos(2\pi x)\ ;\ x\in(0,1), t\in(0,T)$

$u(x,0)=\varphi(x)=\cos(2\pi x)$

$u(0,t)=u(1,t), u_x(1,t)=0\,, \qquad 0\le t\le T$

Tam çözüm : $u(x,t)=e^t\cos(2\pi x)$

$$(h+1)U(k,h+1)=(k+1)(k+2)U(k+2,h)+\frac{1}{h!}[(1+4\pi^2)\frac{(2\pi)^k}{k!}\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)]$$

$$\Rightarrow U(k,h+1)=\frac{1}{h+1}(k+1)(k+2)U(k+2,h)+\frac{1}{(h+1)!}(1 + 4\pi^2)\frac{(2\pi)^k}{k!}\cos(\frac{\pi}{2}k)$$

$$u(x,0)=\sum_{k=0}^{\infty}U(k,0)x^k=\cos(2\pi x)$$

$$U(0,0)+U(1,0)x+U(2,0)x^2+U(3,0)x^3+U(4,0)x^4+\cdots = 1-\frac{4\pi^2x^2}{2!}+\frac{16\pi^4x^4}{4!}-\cdots+.$$

$U(0,0)=1, U(1,0)=0, U(2,0)=-\frac{(2\pi)^2}{2!}, U(3,0)=0, U(4,0)=\frac{(2\pi)^4}{4!}, U(5,0)=0,$

$U(6,0)=-\frac{(2\pi)^6}{6!}, U(7,0)=0,\ldots$

$$U(k,0)=\left\{\begin{array}{c|c} 1 & \\ 0 & k=0 \\ -\frac{(2\pi)^k}{k!} & k=1,3,5,7,. \\ & k=2,6,10,. \\ \frac{(2\pi)^k}{k!} & k=4,8,12,. \end{array}\right\}$$

$$U(k,h+1)=\frac{1}{h+1}(k+1)(k+2)U(k+2,h)+\frac{1}{(h+1)!}(1+4\pi^2)\frac{(2\pi)^k}{k!}\cos(\frac{\pi}{2}k)$$

$$h=0\ \Rightarrow U(k,1)=(k+1)(k+2)U(k+2,0)+(1+4\pi^2)\frac{(2\pi)^k}{k!}\cos(\frac{\pi}{2}k)$$

$$k=0\ \Rightarrow U(0,1)=1.2.U(2,0)+(1+4\pi^2)\frac{(2\pi)^k}{k!}\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)$$

$$=1.2\left(-\frac{(2\pi)^2}{2!}\right)+1+4\pi^2$$

$$\Rightarrow U(0,1)=-4\pi^2+1+4\pi^2=1$$

$$k=1\Rightarrow U(1,1)=2.3.U(3,0)+(1+4\pi^2)2\pi.\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$k=2\Rightarrow U(2,1)=3.4.U(4,0)+(1+4\pi^2)\frac{(2\pi)^2}{2!}\cos\left(2.\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=3.4\frac{(2\pi)^4}{4!}-\frac{(2\pi)^2}{2!}(1+4\pi^2)$$

$$\Rightarrow U(2,1)=\frac{(2\pi)^4}{2!}-\frac{(2\pi)^2}{2!}-\frac{(2\pi)^4}{2!}=-\frac{(2\pi)^2}{2!}$$

$$k=3\Rightarrow U(3,1)=4.5.U(5,0)+(1+4\pi^2)\frac{(2\pi)^3}{3!}\cos\left(3\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$k=4 \Rightarrow U(4,1)=5.6.U(6,0)+(1+4\pi^2)\frac{(2\pi)^4}{4!}\cos\left(4.\frac{\pi}{2}\right)=5.6.\left(-\frac{(2\pi)^6}{6!}\right)+\frac{(2\pi)^4}{4!}(1+4\pi^2)$

$$\Rightarrow U(4,1)=-\frac{(2\pi)^6}{4!}+\frac{(2\pi)^4}{4!}+\frac{(2\pi)^6}{4!}=\frac{(2\pi)^4}{4!}$$

$$U(k,1)=\left\{\begin{array}{c|c} 1 & \\ 0 & k=0 \\ -\frac{(2\pi)^k}{k!} & k=1,3,5,7,. \\ \frac{(2\pi)^k}{k!} & k=2,6,10,. \\ & k=4,8,12,. \end{array}\right\}$$

$$U(k,h+1)=\frac{1}{h+1}(k+1)(k+2)U(k+2,h)+\frac{1}{(h+1)!}(1+4\pi^2)\frac{(2\pi)^k}{k!}\cos(\frac{\pi}{2}k)$$

$k=0$ *için*;

$$U(0,h+1)=\frac{1}{h+1}1.2.U(2,h)+\frac{1}{(h+1)!}(1+4\pi^2)$$

$$h=0: U(0,1)=\ 1.2.U(2,0)+(1+4\pi^2)=1.2\left(-\frac{(2\pi)^2}{2!}\right)+1+4\pi^2=1$$

$$h=1: U(0,2)=\frac{1}{2}1.2.U(2,1)+\frac{1}{2!}(1+4\pi^2)=\frac{1}{2}1.2\left(-\frac{(2\pi)^2}{2!}\right)+\frac{1}{2!}(1+4\pi^2)$$
$$=\frac{1}{2!}$$

$$h=2: U(0,3)=\frac{1}{3}1.2.U(2,2)+\frac{1}{3!}(1+4\pi^2)=1.2.\frac{1}{3}\left(-\frac{(2\pi)^2}{2.2!}\right)+\frac{1}{3!}(1+4\pi^2)$$
$$=\frac{1}{3!}$$

$$h=3: U(0,4)=\frac{1}{4}1.2.U(2,3)+\frac{1}{4!}(1+4\pi^2)=\frac{1}{4}1.2.\left(-\frac{(2\pi)^2}{3!.2!}\right)+\frac{1}{4!}(1+4\pi^2)$$
$$=\frac{1}{4!}$$

$$U(k,2)=\left\{\begin{array}{c|c} \frac{1}{2!} & \\ 0 & k=0 \\ -\frac{(2\pi)^k}{2!.k!} & k=1,3,5,7,. \\ \frac{(2\pi)^k}{2!.k!} & k=2,6,10,. \\ & k=4,8,12,. \end{array}\right\}$$

$$U(k,h+1)=\frac{1}{h+1}(k+1)(k+2)U(k+2,h)+\frac{1}{(h+1)!}(1+4\pi^2)\frac{(2\pi)^k}{k!}\cos(\frac{\pi}{2}k)$$

$$h=2\Rightarrow U(k,3)=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)U(k+2,h)+\frac{1}{3!}(1+4\pi^2)\frac{(2\pi)^k}{k!}\cos(\frac{\pi}{2}k)$$

$$k=0\ \Rightarrow U(0,3)=\frac{1}{3}.1.2.U(2,2)+\frac{1}{3!}(1+4\pi^2).1$$

$$=\frac{1}{3}.1.2\left(-\frac{(2\pi)^2}{2.2!}\right)+\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}.4\pi^2$$

$$\Rightarrow U(0,3)=-\frac{(2\pi)^2}{3!}+\frac{(2\pi)^2}{3!}+\frac{1}{3!}=\frac{1}{3!}$$

$$k=1\ \Rightarrow U(1,3)=\frac{1}{3}.2.3.U(3,2)+\frac{1}{3!}.2\pi.(1+4\pi^2).\cos(\frac{\pi}{2})=0$$

$$k=2\ \Rightarrow U(2,3)=\frac{1}{3}3.4.U(4,2)+\frac{1}{3!}(1+4\pi^2)\frac{(2\pi)^2}{2!}\cos(\pi)$$

$$\Rightarrow U(2,3)=\frac{1}{3}3.4.\frac{(2\pi)^4}{2!.4!}-\frac{1}{3!}(1+4\pi^2)\frac{(2\pi)^2}{2!}=\frac{(2\pi)^4}{2!.3!}-\frac{1}{3!}\frac{(2\pi)^2}{2!}-\frac{1}{3!}\frac{(2\pi)^4}{2!}$$

$$\Rightarrow U(2,3)=-\frac{1}{3!}\frac{(2\pi)^2}{2!}$$

$$U(k,h+1)=\frac{1}{h+1}(k+1)(k+2)U(k+2,h)+\frac{1}{(h+1)!}(1+4\pi^2)\frac{(2\pi)^k}{k!}\cos(\frac{\pi}{2}k)$$

$$U(k,h)=\left\{\begin{array}{c|c}\frac{1}{h!} & \\ 0 & k=0 \\ -\frac{(2\pi)^k}{h!.k!} & k=1,3,5,7,. \\ \frac{(2\pi)^k}{h!.k!} & k=2,6,10,. \\ & k=4,8,12,. \end{array}\right\}$$

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}U(k,h)\,x^k\,t^h$$

$u(x,t)=U(0,0)+U(0,1)t+U(0,2)t^2+U(0,3)t^3+\cdots+U(1,0)x+U(2,0)x^2+U(3,0)x^3+U(4,0)x^4+\cdots+U(1,1)xt+U(2,1)x^2t+U(3,1)x^3t+U(4,1)x^4t+\cdots+U(1,2)xt^2+U(2,2)x^2t^2+U(3,2)x^3t^2+U(4,2)x^4t^2+\cdots+U(1,3)xt^3+U(2,3)x^2t^3$

$$u(x,t) = 1 + \frac{t}{1} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots - \frac{(2\pi)^2}{2!}x^2 + \frac{(2\pi)^4}{4!}x^4 + \cdots - -\frac{(2\pi)^2}{2!}x^2 t$$

$$\Rightarrow u(x,t) \approx e^t.\cos(2\pi x)$$

$\cos(2\pi x) = 1 - \frac{(2\pi)^2}{2!}x^2 + \frac{(2\pi)^4}{4!}x^4 - \cdots +$ ve $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots$

$$\Rightarrow u(x,t) \approx e^t.\cos(2\pi x)$$

BÖLÜM 7

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, uygulama alanı geniş olan ve çeşitli bilime dallarında kullanılan kısmi diferansiyel denklemler için ters problem yaklaşımı ele alınmıştır. Bu nedenle, giriş kısmında literatür taraması ve genel amaç verilmiştir. İkinci kısımda ise, ters problem tanımı, kullanım alanları ve basit ters problem örnekleri sunulmuştur. Üçüncü kısımda bilinen ve uygulaması olan kısmi diferansiyel denklemler için ters problem yaklaşımı sunulmuştur. Tezin dördüncü bölümünde lineer olmayan Burgers denklemi ve Burgers Tip denklemler için ters problem yaklaşımı üzerinde durulmuştur. Bu bölümde bazı örnekler için Sonlu Fark Yöntemi türü ile nümerik çözüm yaklaşımı aranmıştır. Çalışmanın beşinci kısmında ise, Finansal Matematik ve Finans Mühendisliğinde yaygın olarak kullanılan Black Scholes (Merton) denklemi ele alınmış, bu denklem çeşitli dönüşümler altında difüzyon denklemine indirgenmiş ve bunun için ters problem yaklaşımı sunulmuştur. Ek olarak, Black Scholes tipi denklemler içinde benzer yaklaşım verilmiştir. Uygulama alanı geniş olan denklemler için ters problem yaklaşımı verilmiştir. Bu amaçla, daha önceden var olan çalışmalar ışığında, ele alınan denklemler çeşitli dönüşümler altında denk probleme dönüştürülmüştür ve bu denk denklemler için ters problemin iyi konuşlandırılmış (well – posed) olduğu daha önceden yapılan çalışmalar kaynak gösterilerek ve bu çalışmalara dayanarak açıklanmıştır.

Ters problem kavramı fizik ve finansta da kullanılmaktadır. Bu çalışmanın katkı sağlayacağı düşünülmektedir. İleriki çalışmalarda, yozlaşmış(dejenere) Burgers denklemi ve Black Scholes denklemi ele alınabilir. Örneğin; aşağıdaki problemler ileride çalışılabilir.

Dejenere Black Scholes Tip Denklem

$D_T = \{(S,t): 1 < S < \bar{s}, 0 < t < T\}, \quad \bar{s} = e^{\gamma}.$

$\Rightarrow V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 \boldsymbol{\omega^{\varrho}} \boldsymbol{\Omega(t)} V_{SS} + r\boldsymbol{\zeta(t)} SV_S - r.\boldsymbol{\mu(t)}V + F(S,t) = 0$ burada $\omega = \frac{\sigma^2}{2}(T-t)$

Başlangıç koşul: $V(lnS, 0) = \phi(S)$

Sınır koşulu: $V(1,t) = \eta_1(t),\ V(\bar{s},t) = \eta_2(t), t\epsilon[0,T]$

İntegral koşulu ve ek koşul: $\Omega\omega^{\varrho}V_S(1,t) = \eta_3(t),\ \int_1^{\bar{s}} \frac{V(S,t)}{S} dS = \eta_4(t), t\epsilon[0,T]$

ϱ bilinen sayı

Dönüşüm sonrası

$\Delta_\tau = \{(\mathrm{x},\tau): 0 < \mathrm{x} < \gamma, 0 < \tau < \mathrm{T}\}$

$v_\tau = \eta(\tau)\tau^{\varrho} v_{xx} + \varpi(\tau)v_x - \varsigma(\tau)v + f(x,\tau)$

$v(x,0) = \psi(x) \qquad 0 < x < \gamma$

$v(0,\tau) = \varphi_1(\tau)\ ,\ v(\gamma,t) = \varphi_2(\tau)\ , \tau\epsilon[0,T]$

$\eta(\tau)\tau^{\varrho}u_x(0,\tau) = \varphi_3(\tau)$

$\int_0^{\gamma} v(x,\tau)dx = \varphi_4(\tau) \ \ \tau\epsilon[0,T]$

Fonksiyon üçlüsünü $(\eta, \varpi, v)\epsilon(C[0,T])^2 x C^{2,1}(\Delta_T) \cap C^{1,0}(\bar{\Delta}_T),\ \eta(\tau) > 0, \tau\epsilon[0,T]$ araştırma ve bulma problem, ters problem olarak bilinir.($0 < \varrho < 1$)

Black Scholes Tipi Denklemi için Yeni bir Ters Problem Yaklaşımı

$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 . V_{SS} + rSV_S - rV = F(S,t)$

$\Theta_T = \{(S,t): 0 < S < e^h, 0 < \mathrm{t} < T\}$

$V_t - \frac{1}{2}\sigma^2\mu(t)V_{SS} + rS\eta(t)V_S - r\varrho(S,t)V - F(S,t) = 0$

$V(S,0) = \varphi(S), \quad 0 \le S \le e^h,$

$V_S(1,t) = \xi_1(t), V_S(e^h,t) = \xi_2(t), 0 \le \mathrm{t} \le T$

$V(1,t) = \rho_1(t), V(e^h,t) = \rho_2(t), \ \ 0 \le \mathrm{t} \le T$

$\{\mu(t), \eta(t), V(S,t)\}$ fonksiyon üçlüsü, $\left(H^{\frac{\gamma}{2}}[0,T]\right)^2 \times H^{2+\gamma, 1+\frac{\gamma}{2}}(\Omega_T)$, sınıfından, $0 < \gamma < 1$, ve [0,T] üzerinde koşulları sağlayan $\mu(t) > 0$ ters problemin çözümü olarak tanımlanır. (H: Hölder uzayı)

Dönüşümler altında elde edilen yeni denklem:

$(a(\tau), b(\tau), v(x,\tau))$ çözüm üçlüsünü arama ve bulma problem ters problem olarak bilinir

$$v_\tau = a(\tau)v_{xx} + b(\tau)v_x + c(x,\tau)v + f(x,\tau)$$

$$v(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le h,$$
$$v_x(0,\tau) = \mu_1(\tau), \quad v_x(h,\tau) = \mu_2(\tau),$$
$$v(0,\tau) = u_1(\tau), \quad (h,\tau) = u_2(\tau), \qquad 0 \le \tau \le T$$

KAYNAKLAR

[1] Lasanen, Sari (2014).”Introduction to inverse problems”, Lecture Notes, 802360A.

[2] Takı-Eddine, O. ve Abdelfatah, B (2018). “On Determining the Coefficient in a Parabolic Equation with Nonlocal Boundary and Integral Condition”, Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications, 94-102.

[3] Takı-Eddine, O. ve Abdelfatah, B (2014).“An Inverse Coefficient Problem for a Parabolic Equation under Nonlocal Boundary and Integral Overdetermination Conditions”, International Journal of Partial Differential Equations and Applications,2 (3) : 38-43.

[4] Ismailov, M.I., Kanca, F ve Lesnic, D., (2011). “Determination of a time – dependent heat source under nonlocal boundary and integral overdetermination conditions”, Applied Mathematics and Computation, 218(8) :4138-4146.

[5] Kanca, F. ve Bağlan I. (2014). “An inverse problem for a quasilinear parabolic equation with nonlocal boundary and overdetermination conditions”, Journal of Inequalities and Applications, 2014:76.

[6] Ismailov, M, I. ve Kanca F. (2011). “An inverse coefficient problem for a parabolic equation in the case of nonlocal boundary and over determination conditions”, Math. Meth. Appl. Sci. 34 (6) : 692–702.

[7] M.I. Ivanchov (1993). “Inverse problems for the heat-conduction equation with nonlocal boundary condition”, Ukrain. Math. J. 45(8) :1186–1192.

[8] Hussein, M.S., Lesnic, D. ve Ismailov, M. (2015). “An inverse problem of finding the time-dependent diffusion coefficient from an integral condition”, Mathematical Methods in the Applied Sciences,39(5):963-980.

[9] Ismailov, M, I. ve Kanca F., (2012). “The inverse problem of finding the time-dependent diffusion coefficient of the heat equation from integral overdetermination data”, Inverse Problems in Science and Engineering, 20(4):463–476.

[10] Kanca, F. (2013). “Inverse Coefficient Problem of the Parabolic Equation with Periodic Boundary and Integral Overdetermination Conditions”, Abstract and AppliedAnalysis-Hindawi,2013:ID659804-7.

[11] Özkan, T. ve Güngör, B. (2017). "Geometrik Brownian Hareketi modeli ile endeks dalgalanmalarını değerlendirme: BIST-30, BIST-100 ve S&P 500 endeksleri üzerine bir uygulama", Atatürk Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Dergisi, 31(2): 377-395.

[12] Yermukanova, B. , Zhexembay ve L., Karjanto, N. (2016) . "On a method of solving Black-Scholes Equation" , 2016:v2, arXiv:1504.03074v2.

[13] Alobaidi, G. (2017). "A NOTE ON BOND PRICES IN THE VASICEK MODEL", the 2017 WEI International Academic Conference Proceedings,2017, Vienna, Austria.

[14] Kanca, F. (2013). "The inverse problem of the heat equation with periodic boundary and integral overdetermination conditions", Journal of Inequalities and Applications 2013:108.

[15] Beyazıt, M. F.(2011). "Stokastik Finans",1.Baskı, Seçkin Yayıncılık,Istanbul.

[16] Trong, D.D. ve Ang, D.D. (1994)."Coefficient identification for a parabolic equation" Inverse Problems 10 (3): 733.

[17] Liu Yang L., Yu, J.N ve Deng, Zui-Cha (2007). "An inverse problem of identifying the coefficient of parabolic equation", Applied Mathematical Modelling, 32: 1984–1995.

[18] Rundell, W., (1983). "An Inverse Problem for Parabolic Partial Differential Equation", Rocky Mountain Journal of Mathematics, 13 (4): 679-688.

[19] Zolfaghari, R. (2013)." Parameter determination in a parabolic inverse problem in general dimension", Computational Methods for Diferential Equation, (1): 55-70.

[20] Denghan, M.(2001). "An inverse problem of finding a source parameter in a semilinear parabolic equation", Applied Mathematical Modelling 25:743-754.

[21] Kanca, F. ve Bağlan I. (2014)."An inverse problem for a quasilinear parabolic equation with nonlocal boundary and overdetermination conditions", Journal of Inequalities and Applications, 2014:76.

[22] Yermukanova, B. , Zhexembay ve L., Karjanto, N. (2016)."On a method of solving Black-Scholes Equation" , arXiv:1504.03074v2.

[23] Alobaidi, G. (2017)." A NOTE ON BOND PRICES IN THE VASICEK MODEL", the 2017 WEI International Academic Conference Proceedings, Vienna, Austria.

[24] Capiński M. ve Zastawniak, T. (2011). "Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering", Springer,New York,Amerika.

[25] Biryuk, A.(2013)."Note on the transformation that reduces the Burgers equation to the heat equation",03-370.

[26] R. Cannon, Y. Lin ve S. Wang (1991)."Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation", J. Aust. Math. Soc. Ser. B(33): 149– 163.

[27] Duffy, J.Daniel (2006). "Finite Difference Methods in Financial Engineering A Partial Differential Equation Approach", John Wiley & Sons, Sussex.

[28] F.-F. Dou, C.-L. Fu, F. Yang (2009). “Identifying an unknown source term in a heat equation”, Inverse Problems in Sci. Eng. 17 (7): 901–913.

[29] J.R. Cannon, Y. Lin, S. Wang (1991). “Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation”, J. Aust. Math. Soc. Ser. B 33:149– 163.

[30] Kirch, Andreas (2011). “An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems”, Springer, Karlsruhe.

[31] Kern, M. (2016). “Numerical Methods for Inverse Problems”, Wiley, London.

[32] Chriss, Neil (1997).“Black-Scholes and Beyond: Option Pricing Models”, McGraw-Hill, ABD.

[33] Isakov, Viktor (2006). “Inverse Problems for Partial Differential Equation”, Springer, New York.

[34] Neto, F. D. M.ve Neto, A. (2013). “An Introduction to Inverse Problems with Applications”, Springer,Verlag Berlin Heidelberg.

[35] Ramm, A. G.(2005). “Inverse Problems”, Springer, New York, 2005.

[36] Benning, M. (2016),”Inverse problems” - Lecture Notes.

[37] Lasenen, S. (2014), “Introduction to Inverse Problems”, Lecture Notes.

[38] Mueller, J., L. ve Siltanen, S. (2012),” Linear and Nonlinear Inverse Problems with Practical Applications”, Siam, Philadelphia.

[39] Goetch, C. W., (1993),” Inverse Problems in Mathematical Science”, Vieweg, ABD.

[40] Tesser, F. , Zeegers, JosC.H , Herman J.H.Clercx, vd. (2017), “Finite-size effects on bacterial population expansion under controlled flow conditions”,Eindhoven.

[41] Volpert,V. , Petrovskii,S. (2009) , “Reaction–diffusion waves in biology”, Physics of Life, 267–310.

[42] Tretyakov,M.V., Fedotov,S. (2001) , “On the FKPP equation with Gaussian shear advection”, Physica D 159: 190–201.

[43] Mohammadi M., Mokhtari R. ve Isfahani F.T. (2014), “Solving an inverse problem for a parabolic equation with a nonlocal boundary condition in the reproducing kernel space”, Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization,57-76.

EK A

PROGRAMLAR

5.5’te Değinilen Periyodik Sınır Koşullu ve İntegral Koşullu Ters Homojen olmayan Black Scholes Denklemi için Nümerik Çözüm Programı

```
clc;
clear all;
dx=0.01;
dt=0.05;
x=0:dx:1;
t0=0:dt:10*dt;
[X,T]=meshgrid(x,t0);
nu=dt/(dx^2); %bu oran 1/2den küçük olmalı.


A=toeplitz([1+2*nu -nu zeros(1,length(x)-4)]);

b=1+exp(13*t0);

B=toeplitz([-(1+2*nu) nu zeros(1,length(x)-4)]);

E=(1/2-1/(2*pi))*exp(10*t0);
phi=1-sin(2*pi*x);
u0=phi;
f=zeros(size(X));
for i=1:length(t0)
f(i,:)=1+(1-4*pi^2)*sin(2*pi*x)+(1+exp(13*dt*(i-1)))*(1-sin(2*pi*x));
end  Udeneme1=zeros(size(X));
Udeneme1(1,:)=u0;

%**************FTCS*********************
for tn=1:1:length(t0)-1
```

```
   for xj=2:1:length(x)-1
      Udeneme1(tn+1,xj)=-exp(13*(tn-1))*Udeneme1(tn,xj)+nu*(Udeneme1(tn,xj+1)-
2*Udeneme1(tn,xj)+Udeneme1(tn,xj-1))+f(tn,xj);
   end
   trapz(x,x.*Udeneme1(tn+1,:)) ; %integral formülü
Udeneme1(tn+1,length(x))=(Udeneme1(tn+1,2)+Udeneme1(tn+1,length(x)-1))/2   ; %
türevin sınır noktalarında eşit olması
Udeneme1(tn+1,1)=Udeneme1(tn+1,length(x)); % sınırlarda çözüm eşit
 end
surf(X,T,Udeneme1);
axis([min(x) max(x) min(t0) max(t0) min(min(Udeneme1)) max(max(Udeneme1))]);

%************Du Fort Frankel************

Udeneme2=zeros(size(X));
Udeneme2(1,:)=u0;
Udeneme2(2,:)=Udeneme1(2,:);
for tn=2:1:length(t0)-1
   for xj=2:1:length(x)-1
      Udeneme2(tn+1,xj)=(1-2*nu)/(1+2*nu)*Udeneme2(tn-
1,xj)+2*nu/(1+2*nu)*Udeneme2(tn,xj+1) + 2*nu/(1+2*nu)*Udeneme2(tn,xj-1);
   end
   trapz(x,x.*Udeneme2(tn+1,:)) ; %integral f
Udeneme2(tn+1,length(x))=(Udeneme2(tn+1,2)+Udeneme2(tn+1,length(x)-1))/2   ; %
türevin sınır noktalarında eşit olması, ileri geri fark formülü
Udeneme2(tn+1,1)=Udeneme2(tn+1,length(x)); % sınırlarda çözüm eşit
end
figure;
surf(X,T,Udeneme2);
axis([min(x) max(x) min(t0) max(t0) min(min(Udeneme2)) max(max(Udeneme2))]);

%***********Crank-Nicolson***********
%x=A\d formundaki çözüm
U=zeros(size(X));
U(1,:)=u0;
for n=2:1:length(t0)

   U(n,2:length(x)-1)=(A\(B*U(n-1,2:length(x)-1)' + f(n,2:length(x)-1)'))';
end
figure;
a=surf(X,T,U);
axis([min(x) max(x) min(t0) max(t0) 0 1000]);
set(gca,'FontSize',12);
xlabel('x');
ylabel('t');
zlabel('u');
```

Difüzyon Denklemine İndirgenen Black Scholes (Merton) Denkleminin Nümerik Çözümüne Yönelik Hazırlanan Pyhton Programı

$x \in [0,1]$ olmak üzere

$$\boldsymbol{u_t = u_{xx}}$$

Dirichlet sınır koşulu:

$$\boldsymbol{u(0,t) = u(1,t) = 0}$$

Başlangıç koşulu: $\boldsymbol{u(x,0) = e^{-\alpha x} maks(e^{x} - E, 0) = f(x)}$ olan difüzyon (ısı) denklemini göz önüne alalım.Sonlu fark Yöntemi kullanılarak Pyhton programı hazırlanmıştır. (a center difference method in space and Crank-Nicolson in time.)

Referans: http://www.jkwiens.com/heat-equation-using-finite-difference

```
import scipy as sc
import scipy.sparse as sparse
import scipy.sparse.linalg
import numpy as np
import pylab as pl
import os, sys
import matplotlib.pyplot as plt
# Number of internal points
N = 200
# Calculate Spatial Step-Size
h = 1/(N+1.0)
# Create Temporal Step-Size, TFinal, Number of Time-Steps
k = h/2
TFinal = 1
NumOfTimeSteps = int(TFinal/k)
# Create grid-points on x axis
x = np.linspace(0,1,N+2)
x = x[1:-1]
```

```
# Initial Conditions
''' u(x,0)=e^αx.max(e^x-E,0)'''
u=np.exp(.9*x)*np.argmax(np.exp(x)-10)
'''OLD u = np.transpose(np.mat(10*np.sin(np.pi*x)))'''
# Second-Derivative Matrix
data = np.ones((3, N))
data[1] = -2*data[1]
diags = [-1,0,1]
D2 = sparse.spdiags(data,diags,N,N)/(h**2)
# Identity Matrix
I = sparse.identity(N)
# Data for each time-step
data = []
for i in range(NumOfTimeSteps):
# Solve the System: (I - k/2*D2) u_new = (I + k/2*D2)*u_old
A = (I -k/2*D2)
b = ( I + k/2*D2 )*u
u = np.transpose(np.mat( sparse.linalg.spsolve( A,  b ) ))
# Save Data
data.append(u)
# Define the Frame Speed and Movie Length
FPS = 20
MovieLength = 10

import matplotlib.animation as manimation
FFMpegWriter = manimation.writers['ffmpeg']
metadata = dict(title='Volkan Heat', artist='Volkan Olban',
            comment='Movie')
writer = FFMpegWriter(fps=1, metadata=metadata,bitrate=-
1,codec="libx264",extra_args=['-pix_fmt', 'yuv420p'])
import time
t=0
fig=plt.figure(figsize=(8,6))
```

```
ax1 = fig.add_subplot(1,1,1)
with writer.saving(fig, "Volkan_HEAT_OK.mp4", 100):
    while t<100:
        t=t+1
        frame=t
        plt.plot(x, data[int(NumOfTimeSteps*frame/(FPS*MovieLength))],color='red')
        plt.axis((0,1,0,400))
        writer.grab_frame()
        ax1.clear()
        time.sleep(2)
```

Theta Yöntemi için Matlab Programı

Ref: http://dima.uniroma1.it/users/lsa_adn/MATERIALE/FDheat.pdf

```
function [errout,xo,to,Uo] = SFMTheta(theta,n_t,n_x,A,Ll,T,erP)
% Synopsis: SFMTheta
% SFMTheta(n_t)
% SFMTheta(n_t,n_x)
% SFMTheta(n_t,n_x,A)
% SFMTheta(n_t,n_x,A,L)
% SFMTheta(n_t,n_x,A,L,T)
% SFMTheta(n_t,n_x,A,L,T,erP)
% err = SFMTheta(...)
% [err,x,t,U] = SFMTheta(...)
% Input: n_t = Adım sayısı Default: n_t = 10;
% n_x = x yönünde mesh noktaları sayısı Default: n_x=20
% A = yayınım katsayısı. Default: A = 0.1
% L = Tanım aralığı uzunluğu. Default: L = 1;
% T = Maksimum zaman. Default: T = 0.5
% erP = flag (1 or 0) to con_trol whether plots of the solution
% Default: erP = 1
% Output: err = L2 norm of error evaluated at the spatial nodes on last time step
% x = sonlu fark düğümleri lokasyonu
% t = çözümler elde edilen zaman değerleri (zaman düğümleri)
% U =  Çözüm matrisi: U(: , j) is U(x) at t = t(j)

if nargin<2, n_t = 10; end
if nargin<3, n_x = 10; end
if nargin<4, A = 0.1; end
if nargin<5, Ll = 1; end
if nargin<6, T = 0.5; end
if nargin<7, erP=1; end
% --- Compute mesh spacing and time step
dx = Ll/(n_x-1);
dt = T/(n_t-1);
```

```
r = A*dt/dx^2; r2 = 1 - 2*r;
x = linspace(0,Ll,n_x)';
t = linspace(0,T,n_t);
U = zeros(n_x,n_t);
% --- Baslangıç ve Sınır Koşulu Göz önüne Alınırsa
U(:,1) = sin(pi*x/Ll); % implies u0 = 0; uL = 0;

%U(:,1) = 1+cos (2*pi*x/L);
%U(:,1)=(1+cos(2*pi*x/Ll));

u0 = 0; uL = 0; % needed to apply BC inside time step loop

% --- Loop over time steps
for m=2:n_t
for i=2:n_x-1
U(i,m) = r*U(i-1,m-1) + r2*U(i,m-1) + r*U(i+1,m-1);

%U(i,m) =(theta)* (r*U(i-1,m) + r2*U(i,m) + r*U(i+1,m))+ (1-theta)* (r*U(i-1,m-1) +
r2*U(i,m-1) + r*U(i+1,m-1));

end
end
% --- Tam çözüm-Nümerik Çözüm Kıyaslaması
ue = sin(pi*x/Ll)*exp(-t(n_t)*A*(pi/Ll)^2);

%ue =1/2- (1/(4*pi))*(1+cos(2*pi*x))*(exp( (2*pi)^2*t(n_t) +
.1*(exp(10*t(n_t)*t(n_t))-1)  ) *exp(-(2*pi)^2*t(n_t)) );
%ue=(1+cos(2*pi*x))*exp(-((2*pi)^2 )*t(n_t));
err = norm(U(:,n_t)-ue);
if nargout>0, errout = err; end
if nargout>1, xo = x; to = t; Uo = U; end

if ~erP, return; end
fprin_tf('\nNorm of error = %12.3e at t = %8.3f\n',err,t(n_t));
```

```
fprin_tf('\tdt, dx, r = %12.3e %12.3e %8.3f\n',dt,dx,r);
figure; plot(x,U(:,n_t),'o--',x,ue,'-'); xlabel('x'); ylabel('u');
legend('Theta','Exact');
figure; plot(x,U(:,n_t)-ue,'o--'); xlabel('x'); ylabel('u - u_e');
fprin_tf('\t x, \t t, \t fdm \t analytic \terrorf\n');
[x t' U(:,n_t) ue abs(U(:,n_t)-ue)]
```

Difüzyon Denklemi için Crank Nicholson Yöntemi Matlab Programı

Ref: 'Numerical Mathematics and Computing' Ward Cheney and David Kincaid, Thomson Brooks/Cole 2008

% Sınır koşulu u(x=0,t) = u(x=1,t) = 0
*% Başlangıç koşulu u(x,t=0) = sin(pi*x).*
*% Tam çözüm is u(x,t) = exp(-pi^2 t) sin(pi*x).*

```
clear;
h = 0.05; % step size in space variable
k = 0.005; % step size in time variable
xgrid = h:h:1-h;
tgrid = 0:k:0.5;
n = length(xgrid);
m = length(tgrid);
[X, T] = meshgrid(tgrid,xgrid);
u = zeros(n,m); % numerical solution
v = zeros(n,m); % analytical solution
b = zeros(n); % RHS of matrix equation
s = h^2/k;
r = 2.0 + s;
% set up the matrix A to be inverted
% A is tridiagonal and diagonally dominant
A = zeros(n);
for i=2:n-1
   A(i,i) = r;
   A(i,i+1) = -1;
   A(i,i-1) = -1;
end
A(1,1) = r;
A(1,2) = -1;
A(n,n) = r;
A(n,n-1) = -1;

% initial conditions
u(:,1) = sin(pi*xgrid);


% loop over time. At each time step the system Ax=b is solved. The
method
% is based on Crank-Nicolson.
```

```
for k = 1:m-1
   b = s*u(:,k);
   u(:,k+1) = A \ b;
end


% analytic solution
for j=1:m
  for i=1:n
     v(i,j) = exp(-pi^2*tgrid(j))*sin(pi*xgrid(i));
  end
end


figure
subplot(1,2,1)
surf(X,T,u)
title('Numerical solution','fontsize',24)
xlabel('Time','fontsize',24)
ylabel('Length','fontsize',24)
zlabel('Temperature','fontsize',24)
shading interp;
subplot(1,2,2)
surf(X,T,v)
title('Analytical solution','fontsize',24)
xlabel('Time','fontsize',24)
ylabel('Length','fontsize',24)
zlabel('Temperature','fontsize',24)
shading interp;
```

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Volkan OBAN

Doğum Tarihi ve Yeri : 24.01.1984 - Erzurum

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : volkanobn@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Uygulamalı Matematik	Ege Üniversitesi	2009
Lisans	Matematik	Ege Üniversitesi	2007
Lise	Fen	Mehmet Akif Ersoy Lisesi	2001

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2018-Halen	Ing Bankası Türkiye Genel Müdürlüğü	Veri Analitiği Yönetmeni
2013-2018	İstanbul Teknik Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

Bildiriler

1. OBAN, V. ve TAKÇI, H."A Data Mining Application in Human Resources: The Usage of Decision Trees Algorithms in Employing Qualified Personnel", Yöneylem Araştırması ve Endüstri Mühendisliği 33. Ulusal Kongresi YA/EM, İstanbul, 26.06.2013 - 28.06.2013, Istanbul,173.

2.OBAN V. ve GÜLER, C. “An Approach to Inverse Problem for Non-homogeneous Black-Scholes Equation under Some Conditions", 4th International Conference on Pure and Applied Sciences: Renewable Istanbul, 11/2017.

3.OBAN V. ve GÜLER, C. "On the Reduction of Black Scholes Equation to Heat Equation and Numerical Solution with Python",INTERNATIONAL CONFERENCE ON APPLIED ANALYSIS AND MATHEMATICAL MODELLING, 03.07.2017-07.07.2017 Istanbul,189.

ÖDÜLERİ

1. Manisa Mehmet Akif Ersoy Lisesi Birinciliği (2001)
2. Ege Üniversitesi Matematik Bölümü Birinciliği (2007)
3. TÜBİTAK Bursu (2228 ve 2211 Nolu Burs Programları)