T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

JEODEZİK UZAYLAR ÜZERİNDE KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA SONUÇLARI

EMİRHAN HACIOĞLU

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
PROF. DR. VATAN KARAKAYA

İSTANBUL, 2018

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

JEODEZİK UZAYLAR ÜZERİNDE KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA SONUÇLARI

Emirhan HACIOĞLU tarafından hazırlanan tez çalışması 28.12.2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Yusuf ZEREN

Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Necip ŞİMŞEK

İstanbul Ticaret Üniversitesi

Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY

Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Murat KİRİŞÇİ

İstanbul Üniversitesi

ÖNSÖZ

Doktora eğitimim boyunca desteğini ve anlayışını benden esirgemeyen, birlikte çalışmaktan onur duyduğum değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Vatan KARAKAYA'ya, tez izleme komitesinde bulunan Sayın Doç. Dr. Necip ŞİMŞEK ve Sayın Doç. Dr. Yusuf ZEREN hocalarıma en kalbi duygularımla teşekkür ederim. Tez savunma sınavı jüri üyeliğini kabul ederek beni onurlandıran Sayın Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY ve Sayın Doç. Dr. Murat KİRİŞÇİ hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Aralık, 2018

Emirhan HACIOĞLU

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ..v

ÖZET vi

ABSTRACT viii

BÖLÜM 1

GİRİŞ 1

1.1 Literatür Özeti 1
1.2 Tezin Amacı 3
1.3 Hipotez...4

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR 5

2.1 Tekil Değerli Dönüşümler ve Sabit Nokta Kavramı 5
2.2 Küme Değerli Dönüşümler ve Sabit Nokta Kavramı 8
2.3 Jeodezik Uzaylar ve Özellikleri..17
2.4 Küme Değerli Sabit Nokta İterasyon Yöntemleri 22

BÖLÜM 3

KÜME DEĞERLİ HİBRİD DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARININ VARLIKLARI VE YAKINSAKLIKLARI..26

3.1 Küme Değerli Hibrid Dönüşümlerin Sabit Noktalarının Varlıkları ve Yakınsaklıkları..27
3.2 Küme Değerli Genelleştirilmiş Hibrid Dönüşümlerin Sabit Noktalarının Varlıkları ve Yakınsaklıkları 44
3.3 Küme Değerli ℕ-Genelleştirilmiş Hibrid Dönüşümlerin Sabit Noktalarının Varlıkları ve Yakınsaklıkları 67

BÖLÜM 4

KÜME DEĞERLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ DARALTAN HİBRİD DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARININ VARLIKLARI VE YAKINSAKLIKLARI 75

BÖLÜM 5

SONLU NONEXPANSİVE DÖNÜŞÜM AİLESİ İÇİN YAKINSAKLIK SONUÇLARI 93

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER......107
KAYNAKLAR......109
ÖZGEÇMİŞ......116

SİMGE LİSTESİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
(X,d)	Metrik uzay
$diam(X)$	X kümesinin çapı
2^X	X kümesinin bütün alt kümelerinin ailesi, kuvvet kümesi
$C(X)$	X kümesinin bütün kapalı alt kümelerinin ailesi
$CB(X)$	X kümesinin bütün kapalı ve sınırlı alt kümelerinin ailesi
$CC(X)$	X kümesinin bütün kapalı ve konveks alt kümelerinin ailesi
$KC(X)$	X kümesinin bütün kompakt ve konveks alt kümelerinin ailesi
$T: X \to Y$	X kümesinden Y kümesine tanımlı tekil değerli Tdönüşümü
$T: X \to 2^Y$	X kümesinden Y'nin kuvvet kümesine tanımlı küme değerli Tdönüşümü
$F(T)$	T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
$H(A,B)$	A ve Bkümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı(metriği)
$\delta(A,B)$	A ve Bkümeleri arasındaki Fisher uzaklığı
M_κ^n	Karşılaştırma uzayı
$[x,y]$	Jeodezik yol, jeodezik segment
$\Delta(x,y,z)$	Jeodezik üçgen
$\Delta(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$	Karşılaştırma üçgeni
$CAT(\kappa)$	Eğriliği üstten κ ile sınırlı Jeodezik uzay
$r(\{x_n\})$	$\{x_n\}$ sınırlı dizisinin asimptotik yarıçapı
$r_C(\{x_n\})$	$\{x_n\}$ sınırlı dizisinin C kümesine göre asimptotik yarıçapı
$A(\{x_n\})$	$\{x_n\}$ sınırlı dizisinin asimptotik merkezi
$\omega(x_n)$	$\{x_n\}$ sınırlı dizisinin bütün alt dizilerinin asimptotik merkezi
$\delta(r,\epsilon)$	Konvekslik modülü

JEODEZİK UZAYLAR ÜZERİNDE KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA SONUÇLARI

Emirhan HACIOĞLU

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

Bu tez çalışmasında Jeodezik uzaylarda, yeni tanımlanan küme değerli dönüşümlerin ile birlikte literatürde var olan bazı tekil değerli dönüşümlerin küme değerli genellemelerinin sabit noktalarının varlıkları ve sabit noktalarına yakınsaklık problemi üzerine çalışılmıştır.

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde literatür özeti, tezin amacı ve hipotez verilmiştir.

İkinci bölümde tezin tamamında kullanılacak olan temel kavramlar, tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde küme değerli nonexpansive türden (nonexpansive-like) hibrid dönüşümler tanımlanmış ve bu dönüşüm sınıflarının sabit noktalarının varlıkları ve sabit noktalarına yakınsaklıklar ile birlikte, sabit nokta kümelerinin kararlılığı ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümde küme değerli daraltan türden (contraction-like) hibrid dönüşümler tanımlanmış ve bu dönüşüm sınıflarının sabit noktalarının varlıkları ve sabit noktalarına yakınsaklıklar ile birlikte, sabit nokta kümelerinin kararlılığı ispatlanmıştır. Ek olarak sabit noktalara yakınsak olan iterasyon metotlarının $T-$ kararlı oldukları gösterilmiştir.

Beşinci bölümde sonlu nonexpansive dönüşüm ailesinin ortak sabit noktaları için çeşitli yakınsaklıklar çalışılmıştır.

Altıncı bölümde ise bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar özetle verilmiş ve bundan sonra yapılabilecek olası çalışmalar ifade edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sabit nokta teori, küme değerli dönüşümler, küme değerli iterasyon metodu, yakınsaklık, $CAT(\kappa)$ uzayları.

ABSTRACT

FIXED POINT RESULTS FOR MULTIVALUED MAPPINGS ON GEODESIC SPACES

Emirhan HACIOĞLU

Department of Mathematics

PhD Thesis

Advisor : Prof. Dr. Vatan KARAKAYA

In this thesis, it has been studied in geodesic spaces, on the problems of the existence of fixed points and convergence to fixed points of new defined multivalued mappings together with multivalued generalizations of some single valued mappings.

This thesis consists of six sections.

In the first section, the review of literature, the aim of the thesis and hypothesis are given.

In the second section, the basic concepts, definitions and theorems which will be used throughout the thesis are presented.

In the third section, nonexpansive-like multivalued hybrid mappings are introduced and along with existence of fixed points and some convergence to fixed points, it has been shown that fixed points sets of these mapping classes are stable.

In the fourth section, contraction-like multivalued hybrid mappings are introduced and along with existence of fixed points and some convergence to fixed points, it has been shown that fixed points sets of these mapping classes are stable. Additionally, it has been shown that the iteration methods which converging to the fixed points are T $-$stable.

In the fifth section, various convergences have been studied for the common fixed points of finite family of nonexpansive mappings.

In the last section, the results obtained in this thesis are summarized and possible studies that can be done in the future are stated.

Key words: Fixed point theory, multivalued mappings, multivalued iteration method, convergence, $CAT(\kappa)$ spaces.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Yüzyıllar boyunca insan, içinde bulunduğu evreni gözlemleyerek etrafında gerçekleşen olayların nedenlerini, gerçekleşme biçimlerini ve etkilerini değişmez kanunlarla açıklamaya çalışmış, dahası bu kanunları kendi ihtiyaçları için kullanmayı başarmıştır. Bu süreç içinde sınıflandırdığı bilgiye Fizik, Kimya, Biyoloji, Tıp, Ekonomi, Bilişim gibi değişik isimler vermiştir. Sürekli gelişim gösteren bu alanların, kendi içlerinde ya da diğer alanlarla ilişkileri sonucu her daim yeni problemler ortaya çıkmaktadır. Bu problemlerin çok büyük bir kısmının çözümü için elde edilen matematiksel modellemeler bazen bir denklem bazen de bir denklem sistemine karşılık gelmektedir. Elde edilen bu denklem veya denklem sistemlerinin çözümü için kullanılan diğer metotların yanında, sabit nokta teorisi de etkin bir metot olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu anlamda sabit nokta teorisi integral denklemler, diferansiyel denklemler, kısmi diferansiyel denklemler, dinamik programlama, diferansiyel içermeler, sistem analizi ve fraktallar, yaklaşım teorisi, oyun teorisi ve matematiksel ekonomi gibi daha birçok alanda kullanılmaktadır [1-13].

Tarihsel olarak küme değerli sabit nokta teorisindeki ilk çalışmalar, 1937 yılında Von Neuman [14]'ın 1941 yılında Kakutani [15]'nin, 1946 yılında Eilenberg ve Montgomery [16]'nin, 1952 yılında Ky-Fan [17]'nın ve 1979 yılında Aubin [18]'in oyun teorisinde ve piyasa ekonomisindeki optimal stratejilerin varlıkları üzerine yaptıkları çalışmalardır. Bu çalışmaların somut bir uygulaması ise Nash [19]'in yaptığı çalışmadır. Nash [19], bu çalışmasında, aralarında herhangi iş birliği ve iletişim olmayan, yani her biri bağımsız hamleler yapan oyuncuların oynadığı, "non-cooperative games" terimini literatüre kazandırmış ve sonlu oyuncunun oynadığı bu tür oyunların her zaman en az bir denge noktası olduğunu göstermiştir. Ancak küme değerli dönüşümler ile ilgili sabit nokta çalışmaları, Markin [20]'in 1968 ve Nadler [21]'in 1969 yılındaki çalışmaları ile hız kazanmıştır. Özellikle Nadler [21] tarafından, Lipschitzian dönüşümler ve küme değerli dönüşümler birleştirilerek, Banach Sabit Nokta Teoreminin tam metrik uzaylarda genellemesi elde edildiğinden bu çalışma daha sonra yapılmış olan çalışmalara da ışık tutmuştur. Ayrıca bu çalışmada küme değerli Picard iterasyonunun tanımlanması ile küme değerli iterasyon yöntemleri üzerine çalışmalar da önem kazanmıştır. İlerleyen süreçte birçok araştırmacı tarafından, belirli şartlar altında çeşitli uzaylarda küme değerli dönüşümler için sabit nokta çalışmaları yapılmıştır [22-39]. Günümüzde küme değerli sabit nokta teorisi etkin olarak uygulama alanı bulduğu oyun kuramı ve piyasa ekonomisi dışında, optimizasyon [40], kontrol teorisi [41], dijital görüntüleme [42], veri tabanları, semantik ve lojik programlama [43] gibi alanlarda uygulamaya sahiptir.

$CAT(\kappa)$ uzaylarının kökeni Alexandrov [44-47] tarafından yapılmış olan çalışmalara dayanmaktadır. Alexandrov, bir metrik uzayın eğriliğinin üstten sınırlı olmasını açıklamak üzere bir dizi tanım vermiştir. Daha sonra Gromov [48] tarafından, Alexandrov'un çalışmalarına ek olarak, Cartan [49-52] ve Toponogov [53-55]'un da metrik fonksiyonu ile eğrilik arasındaki ilişkiyi açıklayan çalışmalarının önemi vurgulanarak $CAT(\kappa)$ (Cartan, Alexandrov ve Toponogov isimlerini baş harfleri) eşitsizliği terimi literatüre kazandırılmıştır. Kirk [56-57] tarafından yapılan çalışmalar ile $CAT(\kappa)$ uzaylarının geometrisinin, sabit nokta teorisinin çalışılması için yeterince zengin bir yapıya sahip olduğu ortaya konmuştur. Kirk'ün çalışmalarının ardından genellikle $\mathbb{R}-$tree ve $CAT(0)$ uzayları üzerinde tekil değerli dönüşümler için sabit nokta çalışmaları yapılmıştır [58-62]. Bu iki uzayın ve özellikle de $CAT(0)$ uzayının ilgi görmesinin nedeni, Hilbert uzaylarındaki paralelkenar özelliği, kosinüs teoremi, konveks küme üzerine metrik projeksiyonun tekliği gibi birçok geometrik özelliğin bu uzaylarda da geçerli olmasıdır. $\kappa > 0$ reel sayısı için $CAT(\kappa)$ uzaylarında ise tekil değerli sabit nokta çalışmaları mevcut olmakla birlikte [63-65], küme değerli dönüşümler için çok az sayıda çalışma mevcuttur [66-67]. Ayrıca her $\kappa \geq \kappa'$ için her $CAT(\kappa')$ uzayı bir $CAT(\kappa)$ uzayı olduğundan $\kappa > 0$ olmak üzere, $CAT(\kappa)$ uzaylarındaki bütün çalışmalar sınırlılık şartı ile birlikte $CAT(0)$ ve $CAT(-\kappa)$

uzaylarına da uygulanabilirdir. Bu sebeple bu uzaylarda yapılan çalışmalar ayrı bir önem kazanmaktadır.

Nadler [21] tarafından Picard iterasyonunun küme değerli dönüşümler aracılığıyla yeniden tanımlanmasının ardından, Sastry ve Babu [68] tarafından küme değerli Mann ve Ishikawa iterasyonlarının Hilbert uzaylarında bazı dönüşüm sınıfları için yakınsaklıkları çalışılmıştır. Sonrasında hem literatürde var olan tekil değerli iterasyon yöntemlerinin küme değerli hallerinin, hem de yeni tanımlanan küme değerli iterasyon yöntemlerinin yakınsaklığı birçok yazar tarafından çalışılmıştır [69-75]. Ayrıca 1976 yılında Lim [76] tarafından metrik uzaylarda $\Delta-$yakınsaklık ve Banach uzaylarında hemen hemen yakınsaklık olarak adlandırılan yeni yakınsaklık kavramı da kuvvetli yakınsamanın çok fazla koşul gerektirdiği durumlarda sabit noktaya yaklaşım olarak literatürde yerini almış ve gerek Banach uzaylarında gerekse $CAT(\kappa)$ uzaylarında birçok yazar tarafından çalışılmıştır [64], [69-71], [74-75].

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışmada, hem Hilbert uzayları ve Banach uzayları gibi doğrusal uzaylarda çalışılmış olan tekil değerli hibrid dönüşümlerin küme değerli genelleştirilmiş varyasyonları tanımlanarak hem de yeni küme değerli dönüşümler tanımlanarak belirli koşullar altında sabit noktalarının varlıkları gösterilecektir. Ayrıca bu dönüşüm sınıflarının, yapısına uygun olarak literatürde var olan bazı sabit nokta iterasyon yöntemlerinin küme değerli versiyonları tanımlanarak, bu dönüşümlerin sabit noktalarına $\Delta-$yakınsak ve kuvvetli yakınsak oldukları gösterilecektir ve bu iterasyonların $T-$kararlı oldukları kanıtlanacaktır. Ek olarak bu çalışmada tanımlanan bazı dönüşüm sınıflarının sabit nokta kümelerinin kararlı oldukları gösterilecektir. Son olarak da son nokta koşulu ile ve son nokta koşulsuz olarak tanımlanan küme değerli iterasyon yöntemi ile elde edilen dizinin, sonlu dönüşüm ailesinin ortak sabit noktasına belirli şartlar altında $\Delta-$yakınsaklığı ve kuvvetli yakınsaklığı elde edilecektir.

1.3 Hipotez

(X, ρ) doğal sınıra sahip bir $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı alt kümesi ve $T: C \to 2^C$ bir dönüşüm olsun. Eğer T dönüşümü Tanım 3.1, Tanım 3.17, Tanım 3.35, Tanım 3.51, Tanım 4.1 ve Tanım 4.10 ile verilen dönüşümlerden herhangi biri ise belirli şartlar altında, T nin en az bir sabit noktası vardır ve $F(T)$ kapalıdır. Ayrıca $T: C \to 2^X$ biçiminde non-self olarak alındığında, $p \in F(T)$ noktasında demiclosed özelliğini sağlar. Eğer $T: C \to 2^X$ dönüşümü Tanım 3.1, Tanım 3.17 ile verilen dönüşümlerden herhangi biri ise Tanım 2.61 ile verilen iterasyon yönteminden elde edilen dizi T'nin sabit noktasına belirli şartlar altında $\Delta -$yakınsak ve kuvvetli yakınsaktır. Eğer $T: C \to 2^X$ dönüşümü Tanım 3.35 ve Tanım 3.51 ile verilen dönüşümlerden herhangi biri ise, Tanım 2.64 ile verilen iterasyon yönteminden elde edilen dizi T'nin sabit noktasına belirli şartlar altında $\Delta -$yakınsak ve kuvvetli yakınsaktır. Eğer $T: C \to 2^X$ dönüşümü Tanım 4.1 ile verilen dönüşüm ise Tanım 2.62 ile verilen iterasyon yönteminden elde edilen dizi T'nin sabit noktasına belirli şartlar altında kuvvetli yakınsaktır. Eğer $T: C \to 2^X$ dönüşümü Tanım 4.10 ile verilen dönüşüm ise Tanım 2.65 ile verilen iterasyon yönteminden elde edilen dizi T'nin sabit noktasına belirli şartlar altında kuvvetli yakınsaktır. Ek olarak Tanım 2.62 ve Tanım 2.65 ile verilen iterasyon yöntemleri $T -$kararlıdır. Eğer T dönüşümü Tanım 3.51, Tanım 4.1 ve Tanım 4.10 ile verilen dönüşümlerden herhangi biri ise belirli koşullar altında , T'nin sabit nokta kümesi kararlıdır. Son olarak, Tanım 5.5 ile verilen dizi, sonlu sayıdaki nonexpansive dönüşümünün ortak sabit noktasına belirli şartlar altında $\Delta -$yakınsak ve kuvvetli yakınsaktır.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışma boyunca gerekli olan temel tanım ve teoremlere yer verilecektir.

2.1 Tekil Değerli Dönüşümler ve Sabit Nokta Kavramı

Tanım 2.1 X boş olmayan bir küme ve $\rho : X \times X \to \mathbb{R}^+$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in X$ için;

i) $\rho(x, y) \geq 0$,

ii) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

iii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,

iv) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$,

şartlarını sağlayan ρ fonksiyonuna X üzerinde bir metrik fonksiyonu, (X, ρ) ikilisine de bir metrik uzay denir [76].

Tanım 2.2 (X, ρ) bir metrik uzay ve $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0$ olduğunda, $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine $x \in X$ noktasına yakınsaktır denir [76].

Tanım 2.3 (X, ρ) bir metrik uzay ve $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_0$ olduğunda, $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa, $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine Cauchy dizisi denir [76].

Tanım 2.4 (X, ρ) bir metrik uzay olsun. Bu uzaydaki her $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ Cauchy dizisi yakınsak ise, X uzayına tam metrik uzay denir [77].

Tanım 2.5 (X,ρ) ve (Y,σ) iki metrik uzay, $T: X \to Y$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için,

$\rho(x,x_0) < \delta$ olduğunda $\sigma(T(x),T(x_0)) < \varepsilon$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, T dönüşümüne x_0 noktasında süreklidir denir. T, X'in her noktasında sürekli ise T dönüşümüne X üzerinde süreklidir denir [78].

Tanım 2.6 X boş olmayan bir küme ve $T: X \to X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer

$$Tx = x \tag{2.1}$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T'nin sabit noktası denir ve T'nin tüm sabit noktalarının kümesi F_T, $F(T)$ veya $Fix(T)$ ile gösterilir [79].

Örnek 2.7

i) X reel bir vektör uzayı ve $T: X \to X$, $Tx = 2x$ olmak üzere $F(T) = \{0\}$.

ii) $X = [0,2]$ ve $T: X \to X$, $Tx = x^2 - x$ olmak üzere $F(T) = \{0,2\}$.

iii) $X = [2,4] \times [2,4]$ ve $T: X \to X$, $T(x,y) = \left(y^2 - 1, \sqrt{x+1}\right)$ olmak üzere $F(T) = \{\left(x, \sqrt{x+1}\right) : x \in [2,4]\}$.

iv) $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ ve $T: X \to X$, $T(x,y) = (-y,x)$ olmak üzere $F(T) = \{(0,0)\}$.

v) $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ ve $T: X \to X$, $T(x,y) = (-y,x)$ olmak üzere $F(T) = \emptyset$.

Tanım 2.8 (X,ρ) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x,y \in X$ için

$$\rho(Tx,Ty) \leq L \cdot \rho(x,y) \tag{2.2}$$

olacak şekilde bir $L > 0$ sayısı mevcut ise T'ye bir Lipschitzian (veya L-Lipschitzian) dönüşüm denir. Burada özel olarak:

i) Eğer $0 \leq L < 1$ ise T'ye daraltan(contraction),

ii) Eğer $L = 1$ ise T'ye genişlemeyen(nonexpansive), dönüşüm denir [79]. Tanımı gereği, her T Lipschitzian dönüşümü düzgün süreklidir.

Örnek 2.9 $X=\mathbb{R}$, $\rho(x,y)=|x-y|$ ve $T: X\to X, Tx=2x-3$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda, her $x,y\in X$ için

$$\rho(Tx,Ty)=|(2x-3)-(2y-3)|=2|x-y|=2\rho(x,y)$$

elde edilir. Böylece $L\geq 2$ için T dönüşümü Lipschitzian dönüşümüdür.

Örnek 2.10 $X=[1,\infty)\times[1,\infty)$, $\rho((x,y),(x',y'))=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$ ve $T: X\to X, T(x,y)=(\frac{1}{2x},\frac{y}{2})$ olarak tanımlandığında, her $(x,y),(x',y')\in X$ için

$$\begin{aligned}\rho\big(T(x,y),T(x',y')\big)&=\sqrt{\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{2x'}\right)^2+\left(\frac{y}{2}-\frac{y'}{2}\right)^2}\\&=\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{x'-x}{x.x'}\right)^2+\frac{1}{4}(y-y')^2}\\&\leq\sqrt{\frac{1}{4}(x'-x)^2+\frac{1}{4}(y-y')^2}\\&=\frac{1}{2}\rho((x,y),(x',y'))\end{aligned}$$

olduğundan T dönüşümü, her $(x,y),(x',y')\in X$ için

$$\rho\big(T(x,y),T(x',y')\big)\leq\frac{1}{2}\rho((x,y),(x',y'))$$

şartını sağlar, yani T, $\frac{1}{2}\leq L<1$ için daraltan dönüşümdür.

Örnek 2.11 $X=\mathbb{R}^2$, $\rho((x,y),(x',y'))=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$ ve $T: X\to X$, $T(x,y)=(y-1,x-3)$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda, her $(x,y),(x',y')\in X$ için

$$\begin{aligned}\rho\big(T(x,y),T(x',y')\big)&=\sqrt{\big((y-1)-(y'-1)\big)^2+\big((x-3)-(x'-3)\big)^2}\\&=\sqrt{(y-y')^2+(x-x')^2}\\&=\rho((x,y),(x',y'))\end{aligned}$$

olduğundan T dönüşümü, her $(x,y),(x',y') \in X$ için

$$\rho\big(T(x,y),T(x',y')\big) \leq \rho((x,y),(x',y'))$$

şartını sağlar, yani T bir nonexpansive dönüşümdür.

1922'de Banach [80]'ın vermiş olduğu ve literatürde Banach daraltma ilkesi olarak bilinen teorem, tek değerli fonksiyonlar için metrik sabit nokta teorisinde en önemli teoremlerden biri olarak kabul edilir.

Teorem 2.12 (X,ρ) tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y \in X$ için

$$\rho(Tx,Ty) \leq L\rho(x,y) \tag{2.3}$$

olacak biçimde bir $0 \leq L < 1$ sabiti varsa o zaman T tek bir sabit noktaya sahiptir [80].

2.2 Küme Değerli Dönüşümler ve Sabit Nokta Kavramı

Tanım 2.13 X ve Y boştan farklı iki küme, 2^Y de Y'nin bütün boştan farklı alt kümelerinin ailesi olsun. $T: X \to 2^Y$ dönüşümüne, yani X kümesinden alınan her bir x elemanı ile Y'nin yanlızca bir $T(x)$ alt kümesini eşleyen bu dönüşüme, küme değerli (veya çoğul değerli) dönüşüm denir. Bazen bu dönüşüm $T: X \multimap Y$ veya $T: X \rightsquigarrow Y$ biçiminde de gösterilir. Burada $T(x)$ tek bir nokta içeren bir küme ise T tekil değerli dönüşümdür [81].

Herhangi bir tekil değerli $f: X \to Y$ dönüşümü, her $x \in X$ için $T(x) = \{f(x)\}$ ile bir küme değerli dönüşüm olarak düşünülebilir [81].

Tersine, seçme aksiyomu yardımı ile her bir küme değerli $T: X \to 2^Y$ dönüşümünden, her $x \in X$'e karşılık $f(x) \in T(x)$ olacak biçimde $f(x)$ seçilerek, bir $f: X \to Y$ dönüşümü üretilebilir ve burada f fonksiyonuna T'nin seçimi denir [81].

Örnek 2.14

i) $T : \mathbb{C} \to 2^{\mathbb{R}},\ T(x+iy) = \{x,y\}$.

ii) $T : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}},\ T(x) = \begin{cases} [x^3,x^2] & ;\ x \leq 1 \\ [x^2,x^3] & ;\ x > 1. \end{cases}$

iii) $T:\ \mathbb{R}^{+} \to 2^{\mathbb{R}},\ T(x) = \left\{1, 1+x, 1+x+\frac{x^2}{2}, 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right\}.$

iv) $T: \mathbb{Z}^{+} \to 2^{\mathbb{Z}^{+}},\ T(x) = \{5x+1, 6x+5\}.$

v) $T: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}},\ \ T(x,y) = \begin{cases} [x,y);\ x \le y \\ (x,y];\ x \ge y. \end{cases}$

Bir küme değerli $T : X \to 2^{Y}$ dönüşümünün tanım kümesi

$$\mathrm{Dom}(T) = \{x \in X : T(x) \neq \emptyset\}$$

şeklinde tanımlanır ve T'nin grafiği ise

$$\mathrm{graph}(T) = \{(x,y) \in X \times Y : y \in T(x)\}$$

biçimindedir. Bir $C \subset X$ kümesinin T altındaki görüntüsü ise

$$T(C) = \bigcup_{x \in C} T(x) \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanır [74].

Tanım 2.15 $T: X \to 2^{X}$ şeklinde verilen çok küme değerli bir dönüşüm için

$$x \in T(x) \tag{2.5}$$

koşulunu sağlayan $x \in X$ noktasına T'nin sabit noktası denir. T'nin bütün sabit noktaları kümesi ise $F(T)$ ile gösterilir [21].

Örnek 2.16

i) $T:\ \mathbb{C} \to 2^{\mathbb{R}},\quad T\,(x+iy) = \{x,y\}$ dönüşümünün sabit nokta kümesi $F(T) = \{x+iy \in \mathbb{C}\,; y = 0\}$.

ii) $T: \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}},\quad T(x) = \begin{cases} [x^3, x^2] & ;\ x \le 1 \\ [x^2, x^3] & ;\ x > 1 \end{cases}$ dönüşümünün sabit nokta kümesi $F(T) = \{-1, 0, 1\}$.

iii) $T:\ \mathbb{R}^{+} \to 2^{\mathbb{R}},\ T(x) = \{1, 1+x, 1+x+\frac{x^2}{2}, 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\}$ dönüşümünün sabit nokta kümesi $F(T) = \{1\}$.

iv) $T:\mathbb{Z}^{+} \to 2^{\mathbb{Z}^{+}}, T(x) = \{5x+1, 6x+5\}$ dönüşümünün sabit nokta kümesi $F(T) = \emptyset$.

v) $T:\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}\times\mathbb{R}},\ T(x,y) = \begin{cases} \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : y = \sqrt{x^2+1}\};\ x \leq y \\ \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : x = \sqrt{y^2+1}\};\ x > y \end{cases}$

dönüşümünün sabit nokta kümesi $F(T) = \emptyset$.

(X,ρ) bir metrik olmak üzere, X'in kapalı ve sınırlı alt kümelerinin ailesi üzerinde aşağıdaki biçimde metrik elde edilebilir.

Tanım 2.17 (X,ρ) bir metrik uzay, $x \in X$ ve C, X`in boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere, x'in C kümesine olan uzaklığı

$$\rho(x,C) = \inf\{\rho(x,y) :\ y \in C\} \tag{2.6}$$

biçimde tanımlanır [81].

Tanım 2.18 (X,ρ) bir metrik uzay ve $CB(X)$, X'in boştan farklı, kapalı ve sınırlı bütün alt kümelerinin ailesi olmak üzere $A,B \in CB(X)$ olsun. Bu durumda A kümesinin B kümesine olan uzaklığı

$$D(A,B) = \sup\{\rho(a,B) : a \in A\} \tag{2.7}$$

biçiminde ve A ve B kümeleri arasındaki uzaklık ise

$$H(A,B) = \max\{D(A,B), D(B,A)\} \tag{2.8}$$

biçiminde tanımlanır [81].

Örnek 2.19

i) $X = \mathbb{R}^2, (x,y), (x',y') \in X$ ve $\rho\big((x,y),(x',y')\big) = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$ olsun. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ ve
$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3 \leq x \leq 6, -1 \leq y \leq 1\}$ kümelerini alındığında
$D(A,B) = \sup_{a\in A}\rho(a,B) = 4$ ve $D(A,B) = \sup_{b\in B}\rho(b,A) = 5$ olup
$H(A,B) = \max\{D(A,B), D(B,A)\} = 5$ olur.

ii) $X = [1,2]$, $x,y \in X$ için $\rho(x,y) = |x-y|$ olsun. Her $x,y \in X, x \geq y$ için $A_{xy} = \rho[x, x^2+y], B_{xy} = [x+y, x^3+y]$ alındığında

$D(A_{xy}, B_{xy}) = \sup_{a\in A} \rho(a, B_{xy}) = y$ ve

$D(B_{xy}, A_{xy}) = \sup_{b\in B} \rho(b, A_{xy}) = x^3 - x^2$ dir.

Dolayısı ile $H(A_{xy}, B_{xy}) = \max\{ D(A_{xy}, B_{xy}), D(B_{xy}, A_{xy}) \} \max\{y, x^3 - x^2\}$ bulunur.

iii) $\mathbb{R}^2$\`de $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 2^2\}$ ve $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 5^2\}$ kümeleri için $D(A,B) = \sup_{a\in A} \rho(a,B) = 0$ ve $D(B,A) = \sup_{b\in B} \rho(b,A) = 3$ dir. Buna göre $H(A,B) = \max\{D(A,B), D(B,A)\} = 3$ olur.

Önerme 2.20 (X,ρ) bir metrik uzay ve $A, B, C \in CB(X)$ olsun. Bu durumda

i) $D(A,B) = 0 \;\Leftrightarrow A \subset B$

ii) $B \subset C \;\Rightarrow\; D(A,C) \le D(A,B)$

iii) $D(A \cup B, C) = \max\{ D(A,C) ,\; D(B,C) \}$

iv) $D(A,B) \le\; D(A,C) + D(C,B)$

özellikleri sağlanır [81].

Önerme 2.21 (X,ρ) bir metrik uzay olsun. Bu durumda Tanım 2.18 ile verilen H uzaklık fonksiyonu $CB(X)$ üzerinde bir metriktir [81].

Önerme 2.22 (X,ρ) bir metrik uzay, H' da, $CB(X)$ üzerindeki Hausdorff metriği olsun. Bu durumda $A, B, C, D \in CB(X)$ olmak üzere

$$H(A \cup B, C \cup D) \le \max\{H(A,C), H(B,D)\} \tag{2.9}$$

eşitsizliği sağlanır [81].

Önerme 2.23 $A, B \in CB(X)$ ve $a \in A$ olsun. Her $\epsilon > 0$ için

$$\rho(a,b) \le H(A,B) + \epsilon \tag{2.10}$$

olacak biçimde bir $b \in B$ vardır [21].

Önerme 2.24 $A, B \in CB(X)$ olsun. Herhangi bir $a \in A$ için

$$\rho(a,B) \leq H(A,B) \tag{2.11}$$

sağlanır [82].

Önerme 2.25 $A \in CB(X)$ olsun. Her $x \in X$ ve $k > 1$ için

$$\rho(x,a) \leq k\rho(x,A) \tag{2.12}$$

olacak biçimde bir $a \in A$ vardır [83].

Tanım 2.26 (X,ρ) bir metrik uzay , H'da $CB(X)$ üzerinde bir Hausdorff metriği olsun ve bir $T: X \to CB(X)$ küme değerli dönüşümü verilsin. Eğer X'deki her yakınsak $\{x_n\}$ dizisi için $x_n \to x$ iken $H(Tx_n, Tx) \to 0$ oluyorsa T'ye X üzerinde süreklidir denir.

1969`da Nadler [21] tarafından yapılan çalışma ile Banach daraltma ilkesi küme değerli dönüşümlere genellenerek küme değerli daraltan dönüşümler için ilk sabit nokta çalışması ortaya çıkmıştır. Aynı çalışmada Nadler, küme değerli daraltan dönüşümlerin sabit nokta kümesinin de kararlı olduğunu göstermiştir.

Tanım 2.27 (X,ρ) bir metrik uzay ve $T: X \to CB(X)$ bir küme değerli dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$H(Tx,Ty) \leq L\rho(x,y) \tag{2.13}$$

olacak şekilde bir $L > 0$ sayısı mevcut ise T'ye küme değerli bir Lipschitzian (veya L-Lipschitzian) dönüşüm denir. Burada özel olarak:

i) Eğer $0 \leq L < 1$ ise T'ye küme değerli daraltan(contraction),

ii) Eğer $L = 1$ ise T'ye küme değerli genişlemeyen (nonexpansive),

dönüşüm denir [81]. Tanımı gereği, her T küme değerli Lipschitzian dönüşümü düzgün süreklidir.

Tanım 2.26 ile verilen süreklilik kavramı gereğince her T küme değerli Lipschitzian dönüşümü süreklidir.

Teorem 2.28 (X,ρ) tam metrik uzay ve $T : X \to CB(X)$ bir küme değerli daraltan dönüşüm olsun. Bu durumda T'nin X'de sabit noktası vardır [21].

İspat: Keyfi bir $x_0 \in X$ alınsın ve $x_1 \in Tx_0$ olsun. Bu durumda k, T'nin Lipschitz sabiti olmak üzere Önerme 2.23'den

$$\rho(x_1, x_2) \leq H(Tx_0, Tx_1) + k$$

olacak biçimde bir $x_2 \in Tx_1$ vardır. Benzer biçimde

$$\rho(x_2, x_3) \leq H(Tx_1, Tx_2) + k^2$$

olacak biçimde bir $x_3 \in Tx_2$ vardır. Aynı seçme işlemi ile devam edildiğinde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\rho(x_n, x_{n+1}) \leq H(Tx_{n-1}, Tx_n) + k^n$$

ve $x_{n+1} \in Tx_n$ olacak biçimde bir $\{x_n\} \subset X$ dizisi oluşturulur. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$ ve T daraltan olduğundan

$$\begin{aligned}
\rho(x_n, x_{n+1}) &\leq H(Tx_{n-1}, Tx_n) + k^n \\
&\leq k\rho(x_{n-1}, x_n) + k^n \\
&\leq k[H(x_{n-2}, x_{n-1}) + k^{n-1}] + k^n \\
&\leq k[k\rho(x_{n-2}, x_{n-1}) + k^{n-1}] + k^n \\
&= k^2\rho(x_{n-2}, x_{n-1}) + 2k^n \\
&\quad \dots \\
&\leq k^n\rho(x_0, x_1) + nk^n
\end{aligned}$$

elde edilir. $k < 1$ olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty} k^n < \infty$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} nk^n < \infty$ olup,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) \leq \rho(x_0, x_1) \sum_{n=0}^{\infty} k^n + \sum_{n=0}^{\infty} nk^n < \infty$$

olur. Bu ise $\{x_n\}$ dizisinin, $(X, \rho)'$de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. (X, ρ) tam metrik uzay olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak biçimde bir $z \in X$ vardır. T dönüşümü daraltan olduğundan süreklidir ve bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} H(Tx_n, Tz) = 0$$

olur. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$ olduğundan ve $\rho(x_{n+1}, Tz) \leq H(Tx_n, Tz)$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_{n+1}, Tz) = 0$$

olur. ρ metriğinin özelliğinden

$$\rho(z, Tz) \leq \rho(z, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, Tz)$$

olup her iki tarafta limit alındığında

$$\rho(z, Tz) \leq \lim_{n\to\infty} \rho(z, x_{n+1}) + \lim_{n\to\infty} \rho(x_{n+1}, Tz) = 0$$

bulunur. Tz kapalı bir küme olduğundan $z \in Tz$ elde edilir. Sonuç olarak z, T'nin bir sabit noktasıdır.

Örnek 2.29 $X = [0,1]$ ve $f: X \to X, f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3} + \frac{1}{3} & ; \ 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{-x^2}{3} + 1 & ; \ \frac{1}{3} < x \leq 1 \end{cases}$ fonksiyonu verilsin. $T: X \to 2^X$, her $x \in X$ için $Tx = \{\, f(x)\} \cup \{0\}$ biçiminde tanımlansın. T daraltan dönüşümdür ve $x = 0\,, x = \sqrt{21}/2 \,-\, 3/2 \in F(T)$ dir.

Teorem 2.30 (X, ρ) tam metrik uzayı ve $T_1, T_2 : X \to CB(X)$ aynı Lipschitz sabitine sahip iki küme değerli daraltan dönüşüm olsun. Yani; her $x, y \in X$ ve $i = 1{,}2$ için

$$H(T_i x, T_i y) \leq k\rho(x, y)$$

olacak biçimde bir $k \in (0{,}1)$ sabiti var olsun. Bu durumda $F(T_1)$ ve $F(T_2)$ sırasıyla T_1 ve T_2 dönüşümlerinin sabit noktaları olmak üzere

$$H(F(T_1), F(T_2)) \leq \frac{1}{1-k} \sup_{x\in X} H(T_1 x, T_2 x)$$

eşitsizliği sağlanır [81].

İspat: Teorem 2.28'den $i = 1{,}2$ için $F(T_i) \neq \emptyset$ dir. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $c \sum_{n=0}^{\infty} nk^n < 1$ olacak biçimde bir $c > 0$ alınsın. $x_0 \in F(T_1)$ için

$$\rho(x_0, x_1) \leq H(T_1 x_0, T_2 x_0) + \varepsilon$$

olacak şekilde bir $x_1 \in T_2x_0$ aslınsın. T_2 daraltan olduğundan,

$$\rho(x_1, x_2) \le H(T_2x_0, T_2x_1) + \frac{c\varepsilon k}{1-k} \le k\rho(x_0, x_1) + \frac{c\varepsilon k}{1-k}$$

olacak biçimde bir $x_2 \in T_2x_1$ seçilebilir. Aynı biçimde devam edildiğinde

$$x_{n+1} \in T_2x_n, \rho(x_{n+1}, x_n) \le k\rho(x_n, x_{n-1}) + \frac{c\varepsilon k^n}{1-k}$$

biçiminde bir $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi oluşturulabilir. $m = \frac{c\varepsilon}{1-k}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\rho(x_{n+1}, x_n) &\le k\rho(x_n, x_{n-1}) + mk^n \\
&\le k[k\rho(x_{n-1}, x_{n-2}) + mk^{n-1}] + mk^n \\
&= k^2\rho(x_{n-1}, x_{n-2}) + 2mk^n \\
&\quad \dots \\
&\le k^n\rho(x_0, x_1) + nmk^n
\end{aligned}$$

elde edilir. $\sum_{n=0}^{\infty} k^n < \infty$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} nk^n < \infty$ olduğundan $\{x_n\}$, X içinde bir Cauchy dizisi olur. (X, ρ) tam metrik uzay olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak biçimde $z \in X$ vardır. T dönüşümü daraltan olduğundan sürekli olup $\lim_{n\to\infty} H(Tx_n, Tz) = 0$ dir. $x_{n+1} \in Tx_n$ olduğundan $z \in Tz$ yani $z \in F(T_2)$ dir.

$$\begin{aligned}
\rho(x_0, \mathrm{z}) &\le \sum_{n=0}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) \\
&\le \sum_{n=0}^{\infty} k^n\rho(x_0, x_1) + m\sum_{n=0}^{\infty} nk^n \\
&\le \frac{1}{1-k}\rho(x_0, x_1) + m\sum_{n=0}^{\infty} nk^n \\
&\le \frac{1}{1-k}(\rho(x_0, x_1) + \varepsilon) \\
&\le \frac{1}{1-k}(H(T_1x_0, T_2x_0) + 2\varepsilon)
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer biçimde T_1 ve T_2'nin rolleri değiştirildiğinde, her bir $y_0 \in F(T_2)$ için

$$\rho(y_0,z') \leq \frac{1}{1-k}(H(T_1y_0,T_2y_0)+2\varepsilon)$$

olacak biçimde $z' \in F(T_2)$ vardır. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan,

$$H(F(T_1),F(T_2)) \leq \frac{1}{1-k}\sup_{x\in X} H(T_1x,T_2x)$$

elde edilir.

Teorem 2.31 (X,ρ) tam metrik uzayı ve her $n \in \mathbb{N}$ için $T_n: X \to CB(X)$ aynı k Lipschitz sabitine sahip küme değerli daraltan dönüşümler olsunlar; yani, $k \in (0,1)$ olmak üzere her $x,y \in X$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$H(T_nx,T_ny) \leq k\rho(x,y)$$

olsun. Eğer $\{T_n\}_{n\geq 0}$ dizisi bir T dönüşümüne düzgün yakınsak; yani her $x \in X$ için $\lim\limits_{n\to\infty} H(T_nx,T_0x) = 0$ ise

$$\lim_{n\to\infty} H(F(T_n),F(T_0)) = 0$$

dır [21,81].

İspat: $\varepsilon > 0$ verilsin. $x \in X$ için düzgün olarak $\lim\limits_{n\to\infty} H(T_nx,T_0x) = 0$ olduğundan her $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ için

$$\sup_{x\in X} H(T_nx,T_0x) \leq (1-k)\varepsilon$$

olacak biçimde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Teorem 2.30'dan her $n \geq n_0$ için

$$H(F(T_n),F(T_0)) < \varepsilon$$

bulunur. Bu ise

$$\lim_{n\to\infty} H(F(T_n),F(T_0)) = 0$$

olduğunu verir.

Tanım 2.32 (X,ρ) bir metrik uzay ve $A,B \in B(X)$ olsun.

$$\delta(A,B) = \sup\{\rho(a,b) : a \in A, b \in B\} \tag{2.14}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer $A = \{a\}$ ise

$\delta(A,B) = \delta(a,B)$

ve eğer $B = \{b\}$ ise

$\delta(A,B) = \delta(a,b) = \rho(a,b)$

biçiminde yazılır.

2.3 Jeodezik Uzaylar ve Özellikleri

Banach ve Hilbert uzaylarının aksine, üzerinde konvekslik yapısı ile birlikte lineer olmayan yapıdaki jeodezik uzaylarda ilk sabit nokta çalışması Kirk [56-57]'e aittir.

Tanım 2.33 (X,ρ) bir metrik uzay olsun. Her $x, y \in X$ için

i) $c(0) = x, c(l) = y$ ve

ii) her $r, s \in [0,l]$ için $\rho\big(c(r), c(s)\big) = |r - s|$

olacak biçimde bir $c : X \to [0,l] \subset \mathbb{R}$ dönüşümü varsa bu c dönüşümüne x ve y'yi birleştiren jeodezik yol denir. Tanımdan da görüleceği üzere burada c bir izometridir ve $\rho(x,y) = l$ dir. c'nin görüntü kümesi, $c([0,l])$'ye x'den y'ye jeodezik yol (ya da jeodezik segment) denir. Bu jeodezik yol birden fazla olabilir fakat jeodezik yol tek ise $[x,y]$ ile gösterilir. $z \in [x,y]$ olması için gerek ve yeter koşul $\rho(x,z) = (1-t)\rho(x,y)$ ve $\rho(y,z) = t\rho(x,y)$ olacak biçimde tek bir $t \in [0,1]$ olmasıdır. Bu durumda z noktası $z = (1-t)x \oplus ty$ şeklinde gösterilir. Her $x, y \in X$ için jeodezik yol var ise (X,ρ) metrik uzayına jeodezik uzay, bu jeodezik yollar tek türlü ise tek türlü jeodezik uzay denir. Sabit bir $r > 0$ için, eğer $\rho(x,y) < r$ sağlayan $x, y \in X$ için jeodezik yol var ise uzaya $r-$jeodezik uzay denir. C, X'in boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer her $x, y \in C$ için x ve y'yi birleştiren jeodezik yol C'nin alt kümesi ise, bu C'ye konveks alt küme denir [84].

Tanım 2.34 Verilen bir $\kappa \in \mathbb{R}$ için;

i) Eğer $\kappa = 0$ ise M_κ^n, Öklid uzayı $\mathbb{E}^n$ dir.

ii) Eğer $\kappa > 0$ ise M_κ^n, $\mathbb{S}^n$ birim küresinden, uzaklık fonksiyonun $\frac{1}{\sqrt{\kappa}}$ ile çarpılmasıyla elde edilir.

iii) Eğer $\kappa < 0$ ise M_κ^n, $\mathbb{H}^n$ hiperbolik uzayından, uzaklık fonksiyonun $\frac{1}{\sqrt{-\kappa}}$ ile çarpılmasıyla elde edilir.

Burada M_κ^n'ya karşılaştırma uzayı denir [84].

Tanım 2.35 Bir (X,ρ) jeodezik uzayında, her $x,y,z \in X$ ve bu üç noktayı birleştiren üç jeodezik yolun oluşturduğu noktalar kümesine jeodezik üçgen denir ve $\Delta(x,y,z)$ ile gösterilir. Burada $u \in \Delta(x,y,z)$ olmasının anlamı $u \in [x,y] \cup [x,z] \cup [y,z]$ olması demektir. $\Delta(x,y,z)$ üçgenine karşılık eğer M_κ^2 karşılaştırma uzayında, $\rho(x,y) = d_2(\overline{x},\overline{y}\,)$, $\rho(x,z) = d_2(\overline{x},\overline{z}\,)$, $\rho(y,z) = d_2(\overline{y},\overline{z}\,)$ olacak biçimde $\Delta(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ üçgeni varsa $\Delta(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ ye $\Delta(x,y,z)$'nin karşılaştırma üçgeni denir. $\kappa > 0$ ise $D_\kappa = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$, değilse $D_\kappa = \infty$ olmak üzere, bu karşılaştırma üçgeni $\rho(x,y) + \rho(x,z) + \rho(y,z) < 2D_\kappa$ şartını sağlayan her $x,y,z \in X$ için vardır. $\overline{z} \in [\overline{x},\overline{y}]$ noktası ve bir $z \in [x,y]$ noktası $\rho(x,z) = d_2(\overline{x},\overline{z}\,)$ koşulunu sağlarsa $\overline{z}$ ye z'nin karşılaştırma noktası denir [84].

Tanım 2.36 Bir (X,ρ) jeodezik uzayında $\Delta(x,y,z)$ üçgeni $\rho(x,y) + \rho(x,z) + \rho(y,z) < 2D_\kappa$ koşulunu sağlasın ve $\Delta(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$'de bu üçgenin karşılaştırma üçgeni olsun. Eğer her $u,v \in \Delta(x,y,z)$ ve bu iki noktanın karşılaştırma noktaları $\overline{u},\overline{v} \in \Delta(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ için $\rho(u,v) \leq d_2(\overline{u},\overline{v})$ koşulunu sağlanıyorsa bu üçgene $CAT(\kappa)$ koşulunu sağlıyor denir. Eğer (X,ρ), bir D_κ —jeodezik metrik uzayındaki her jeodezik üçgen $CAT(\kappa)$ koşulunu sağlarsa bu uzaya $CAT(\kappa)$ uzayı denir [84].

Önerme 2.37 Her $\kappa > \kappa'$ için herhangi bir $CAT(\kappa')$ uzayı aynı zamanda $CAT(\kappa)$ uzayıdır [77].

Tanım 2.38 Bir (X,ρ) jeodezik uzayında, her $x,y,z \in X$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\rho^2\big((1-t)x \oplus ty, z\big) \leq (1-t)\rho^2(x,z) + t\rho^2(y,z) - \frac{R}{2}t(1-t)\rho^2(x,y) \qquad (2.15)$$

eşitsizliğini sağlayacak biçimde bir $R \in (0,2]$ sabiti varsa (X,ρ) ye $R-$ konvekstir denir. Bu eşitsizliğe ise CN* eşitsizliği denir [85].

Önerme 2.39 (X,ρ) jeodezik uzayının $CAT(0)$ uzayı olması için gerek ve yeter koşul $2-$konveks olmasıdır [86].

Tanım 2.40 (X,ρ) bir metrik uzay olmak üzere, $diam(X) = \sup\{\rho(x,y) : x,y \in X\}$ değerine X uzayının çapı denir.

Önerme 2.41 $(X,\rho), \kappa > 0$ ve bir $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ olacak biçimde bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı olsun. Bu durumda (X,ρ) uzayı $R = (\pi - 2\varepsilon)\tan(\varepsilon)$ için $R-$konvekstir [86].

Önerme 2.42 Bir $CAT(\kappa)$ uzayında $\frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$' dan küçük yarıçaplı yuvarlar konvekstir [84].

Önerme 2.43 $\kappa > 0$ olmak üzere X, $diam(X) < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$ olacak şekilde (X,ρ) bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı olsun. Bu durumda her $x,y,z \in X$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\rho\big((1-t)x \oplus ty, z\big) \leq (1-t)\rho(x,z) + t\rho(y,z)$$

sağlanır [84].

Tanım 2.44 (X,ρ) bir $CAT(\kappa)$ uzayı, $\{x_n\}$ bu uzayda sınırlı bir dizi ve $x \in X$ olsun.

$$r(x,\{x_n\}) = \limsup_{n\to\infty} \rho(x,x_n) \tag{2.16}$$

olmak üzere $\{x_n\}$'in asimptotik yarı çapı

$$r(\{x_n\}) = \inf\{r(x,\{x_n\}) : x \in X\} \tag{2.17}$$

şeklinde, $\{x_n\}$'in $C \subset X$ alt kümesine göre asimptotik yarı çapı

$$r_C(\{x_n\}) = \inf\{r(x,\{x_n\}) : x \in \mathrm{C}\} \tag{2.18}$$

şeklinde ve son olarak ta $\{x_n\}$'in asimptotik merkezi

$$A(\{x_n\}) = \{x \in X : \ r(x,\{x_n\}) = r(\{x_n\})\} \tag{2.19}$$

şeklinde tanımlanır [87].

Tanım 2.45 (X,ρ) bir $CAT(\kappa)$ uzayı ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Eğer $\{x_n\}$ dizisinin bütün alt dizilerinin asimptotik merkezi, $\omega(x_n) := \cup A(\{u_n\})$, tek bir $x \in X$ noktası ise $\{x_n\}$ dizisine x noktasına Δ −yakınsaktır denir ve $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = x$ biçiminde gösterilir [87].

Önerme 2.46 $\kappa > 0$ olmak üzere (X,ρ) bir $CAT(\kappa)$ uzayı, $C \subset X$ kapalı ve $\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} -$ convex ve $\{x_n\}$'de, X de bir dizi olsun. Eğer $r_C(x_n) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$ ise $A_C(\{x_n\})$ yanlızca tek bir nokta içerir [87].

Lemma 2.47 (X,ρ) bir $CAT(\kappa)$ uzayı ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun.

i) X'deki her sınırlı dizi Δ −yakınsak bir alt diziye sahiptir.

ii) Eğer $C \subset X$ kapalı ve $\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} -$ convex ise ve eğer $\{x_n\}$ C' de sınırlı bir dizi ise $\{x_n\}$'in asimptotik merkezi C içindedir.

iii) $C \subset X$ kapalı ve $\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} -$ convex ve $T: C \to C$ bir genişleme olmayan dönüşüm olsun. Bu durumda eğer $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = x$ ve $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ sağlanıyorsa $Tx = x$ ve $x \in C$ sağlanır [88].

Lemma 2.48 (X,ρ) bir $CAT(\kappa)$ uzayı, $\{x_n\}$ X'de sınırlı bir dizi ve $A(\{x_n\}) = \{x\}$ olsun. Eğer $\{u_n\}$, $\{x_n\}$'nin $A(\{u_n\}) = \{u\}$ olacak şekilde bir alt dizisi ise ve $\{\rho(x_n, u)\}$ da yakınsak ise $x = u$ sağlanır [88].

Tanım 2.49 (X,ρ) bir metrik uzay ve $T: X \to CB(X)$ küme değerli dönüşüm olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ koşulunu sağlayan herhangi bir $\{x_n\}$ dizisinin $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = p \in X$ olacak şekilde bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizi varsa T'ye hemikompakt dönüşüm denir [69].

Önerme 2.50 (X,ρ) bir $CAT(\kappa)$ uzayı olsun. X için konvekslik modülü, $r < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$ ve m, x ile y noktalarını birleştiren $[x,y]$ jeodezik yolunun orta noktası; $m = \frac{1}{2}x \oplus \frac{1}{2}y$ olmak üzere

$$\delta(r,\epsilon) = \inf\{1 - \frac{1}{r}\rho(a,m)\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada infimum $\rho(x,a) \leq r, \rho(y,a) \leq r$ ve $\epsilon \leq \rho(x,y) < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$ koşullarını sağlayan tüm $a, x, y \in X$ üzerinden alınır [69].

Aşağıdaki Lemma $CAT(\kappa)$ uzayları içinde aynen geçerlidir.

Lemma 2.51 (X, ρ, W) bir düzgün konveks hiperbolik uzay ve düzgün konvekslik modülüde Önerme 2.50 ile tanımlı $\delta(r,\epsilon)$ olsun. Herhangi $r > 0, \epsilon \in (0,2), \lambda \in [0,1]$ ve $a, x, y \in X$ için, eğer $\rho(x,a) \leq r, \rho(y,a) \leq r$ ve $\epsilon r \leq \rho(x,y)$ ise $\rho\big((1-\lambda)x \oplus \lambda y, z\big) \leq (1 - 2\lambda(1-\lambda)\delta(r,\epsilon))r$ eşitsizliği sağlanır [89].

Önerme 2.52 $(X,\rho), \delta(r,\epsilon)$ konvekslik modülüne sahip bir $CAT(\kappa)$ uzayı ve $x \in X$ olsun. Sabit ϵ için $\delta(r,\epsilon)$, r ye göre artan ve $\{t_n\} \subset [b,c] \subset (0,1)$, $\{x_n\}, \{y_n\} \subset X$ dizileri $r \geq 0$ için $\limsup\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x) \leq r$, $\limsup\limits_{n\to\infty} \rho(y_n, x) \leq r$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} \rho((1-t_n)x_n \oplus t_n y_n, x) = r$ koşullarını sağlarsa $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n, y_n) = 0$ sağlanır [69].

Lemma 2.53 $(X,\rho), \kappa > 0$ ve bir $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ olacak biçimde bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı olsun ve C, X'in boştan farklı kapalı ve konveks alt kümesi olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır;

i) Her $x \in X$ noktasının C kümesi üzerine metrik projeksiyon altındaki $P_C(x)$ görüntü kümesi tek noktadan oluşur.

ii) Eğer $x \notin C$ve $y \in C$, $y \neq P_C(x)$ ise $\angle_{P_C(x)}(x,y) \geq \frac{\pi}{2}$.

iii) Her $y \in C$ için $\rho(P_C(x), P_C(y)) \leq \rho(x,y)$ sağlanır [87].

Tanım 2.54 (X,ρ) bir tam jeodezik uzay ve $\varphi : X \to \mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $\gamma: [0,1] \to X$ jeodezisi için

$$\varphi\left(\gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) \leq \tfrac{1}{2}\varphi\big(\gamma(0)\big) + \tfrac{1}{2}\varphi\big(\gamma(1)\big) - \eta\left(\rho\big(\gamma(0), \gamma(1)\big)\right) \tag{2.20}$$

olacak biçimde bir $\eta: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ artan bir fonksiyon varsa φ'ye düzgün konveks dönüşüm denir [90].

Lemma 2.55 (X, ρ) tam jeodezik uzay ve $\varphi : X \to \mathbb{R}$ dönüşümü düzgün konveks ve alttan yarı sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\varphi(z) = \inf_{x \in X} \varphi(x)$ olacak biçimde tek bir $z \in X$ vardır ve $z = \underset{x \in X}{\operatorname{argmin}} \varphi(x)$ şeklide yazılır [90].

2.4 Küme Değerli Sabit Nokta İterasyon Yöntemleri

X bir konveks uzay ve $T: X \to 2^X$ bir dönüşüm olsun. Küme değerli iterasyon yöntemi en genel haliyle

$$\begin{cases} x_0 \in X, \\ x_{n+1} \in f(T, x_n),\ n = 0,1,2, \dots \end{cases} \tag{2.21}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer dönüşümü bir tekil değerli dönüşüm ise bu genel gösterim

$$\begin{cases} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = f(T, x_n),\ n = 0,1,2, \dots \end{cases} \tag{2.22}$$

halini alır.

Tanım 2.56 Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_{n+1} \in T x_n \tag{2.23}$$

seçilerek elde edilen iterasyon yöntemine küme değerli Picard iterasyon yöntemi denir Bu yöntem ilk olarak 1969 yılında Nadler'in çalışmasında kullandığı yöntemdir [21].

Tekil değerli Picard iterasyon metodu, başlangıç değer problemlerinin veya integral denklemlerin çözümüne ulaşmak için kullanabilen bir algoritma olduğu gibi küme değerli Picard iterasyonu da integral içermelerin çözümlerine ulaşmak için kullanılır.

Tekil değerli Picard iterasyonu ile elde edilen dizi küme değerli nonexpansive dönüşümlerin sabit noktasına yakınsamadığı gibi küme değerli Picard iterasyonu da küme değerli nonexpansive dönüşümlerin sabit noktasına yakınsamayabilir. Fakat küme değerli Krasnoselskii iterasyon yöntemi ile elde edilen dizi ise nonexpansive dönüşümlerin sabit noktasına yakınsak olan en temel iterasyondur.

Tanım 2.57 Her $n \in \mathbb{N}$ için $u_n \in Tx_n$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}u_n \tag{2.24}$$

şeklinde ifade edilen iterasyon yöntemine Krasnoselskii iterasyon yöntemi denir [91].

Örnek 2.58 $X = [0,1]$ olmak üzere her $x \in [0,1]$ için $T: [0,1] \to 2^{[0,1]}$ dönüşümü $Tx = \{1 - x, 1/2\}$ şeklinde tanımlansın. Herhangi bir $x_0 \neq \frac{1}{2}$ başlangıç noktası için Tanım 2.56 ile verilen Picard iterasyonundan elde edilen bir dizi yakınsamayabilirken, Tanım 2.57ile verilen Krasnoselskii iterasyonu tarafından üretilen her $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi T'nin sabit noktası olan 1/2 değerine yakınsar.

Tanım 2.59 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset [0,1]$ belirli şartları sağlayan bir reel sayı dizisi olmak üzere,

$$\begin{cases} x_0 \in X, \\ x_{n+1} \in (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n \end{cases} \tag{2.25}$$

$$\begin{cases} x_0 \in X, \\ x_{n+1} \in (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n \in (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T x_n \end{cases} \tag{2.26}$$

şeklinde ifade edilen algoritmalara sırası ile küme değerli Mann ve küme değerli Ishikawa iterasyon yöntemleri denir [68]. Bu iki iterasyon için x_{n+1}'in seçimine belirli şartlar eklenerek bazı dönüşüm sınıfları için yakınsaklıkları çalışılmıştır [66-72].

Tanım 2.60 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset [0,1]$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere,

$$\begin{cases} x_0 \in C, \\ x_{n+1} = T y_n, \\ y_n = (1 - \alpha_n)T x_n + \alpha_n T z_n, \\ z_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T x_n \end{cases} \tag{2.27}$$

şeklinde ifade edilen iterasyon yöntemine Picard-S iterasyon yöntemi denir [85-86]. Gürsoy ve Karakaya tanımladıkları bu iterasyondan elde edilen dizinin, daraltan dönüşümlerin sabit noktasına, Ishikawa [94], Noor [95], SP [96], CR [97] ve bazı diğer yöntemlerle elde edilen dizilerden daha hızlı yakınsadığını göstermişler ve diferansiyel denklemlerin çözümleri için kullanılabileceğini kanıtlamışlardır.

Tanım 2.61 (X,ρ), bir jeodezik uzay, C, X' in boştan farklı ve konveks alt kümesi ve $T : C \to C(X)$ bir küme değerli dönüşüm olsun. $\{\alpha_n\},\{\beta_n\} \subset [0,1]$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri ve $u_n \in Ty_n, v_n \in Tz_n, w_n \in Tx_n$ olmak üzere,

$$\begin{cases} x_0 \in C, \\ x_{n+1} = P_C(u_n), \\ y_n = P_C\big((1-\alpha_n)w_n \oplus \alpha_n v_n\big), \\ z_n = P_C((1-\beta_n)x_n \oplus \beta_n w_n) \end{cases} \tag{2.28}$$

şeklinde tanımlanan algoritmaya küme değerli proximinal Picard-S iterasyon yöntemi denir.

Tanım 2.62 (X,ρ), bir jeodezik uzay, C, X' in boştan farklı ve konveks alt kümesi ve $T : C \to C(X)$ bir küme değerli dönüşüm olsun. $\{\alpha_n\},\{\beta_n\} \subset [0,1]$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri ve $u_n \in Ty_n, v_n \in Tz_n, w_n \in Tx_n$ olmak üzere,

$$\begin{cases} x_0 \in C, \\ x_{n+1} = u_n, \\ y_n = (1-\alpha_n)w_n \oplus \alpha_n v_n, \\ z_n = (1-\beta_n)x_n \oplus \beta_n w_n \end{cases} \tag{2.29}$$

şeklinde tanımlanan algoritmaya küme değerli Picard-S iterasyon yöntemi denir.

2008 de, S. Thianwan iki adımlı aşağıdaki iterasyonu aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

Tanım 2.63 $\{\alpha_n\},\{\beta_n\} \subset [0,1]$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)y_n + \alpha_n T y_n \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n \end{cases} \tag{2.30}$$

şeklinde ifade edilen iterasyon yöntemine Thianwan iterasyon yöntemi denir [98].

Tanım 2.64 (X,ρ), bir jeodezik uzay, C, X' in boştan farklı ve konveks alt kümesi ve $T : C \to C(X)$ bir küme değerli dönüşüm olsun. $\{\alpha_n\},\{\beta_n\} \subset [0,1]$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri ve $u_n \in Ty_n, v_n \in Tx_n,$ olmak üzere,

$$\begin{cases} x_0 \in C, \\ x_{n+1} = P_C\big((1-\alpha_n)y_n \oplus \alpha_n u_n\big), \\ y_n = P_C\big((1-\beta_n)x_n \oplus \beta_n v_n\big) \end{cases} \tag{2.31}$$

şeklinde tanımlanan algoritmaya küme değerli proximinal Thianwan iterasyon yöntemi denir.

Tanım 2.65 (X,ρ), bir jeodezik uzay, C, X' in boştan farklı ve konveks alt kümesi ve $T: C \to C(X)$ bir küme değerli dönüşüm olsun. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset [0,1]$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri ve $u_n \in Ty_n, v_n \in Tx_n,$ olmak üzere,

$$\begin{cases} x_0 \in C, \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n)y_n \oplus \alpha_n u_n, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n \oplus \beta_n v_n \end{cases} \tag{2.32}$$

şeklinde tanımlanan algoritmaya küme değerli Thianwan iterasyon yöntemi denir.

Lemma 2.66 $0 \le k < 1$ sabit bir reel sayı ve $\{a_n\}$ pozitif reel dizi olsun. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} \le k a_n$ ise $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ dır.

Lemma 2.67 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ negatif olmayan iki dizi ve $n_0 \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer her $n \in \mathbb{N}, n \ge n_0$ için

$$a_{n+1} \le (1-\mu_n)a_n + b_n \tag{2.33}$$

sağlanıyor ve $\mu_n \in (0,1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n = \infty$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{\mu_n} = 0$ olsun. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ [99].

BÖLÜM 3

KÜME DEĞERLİ HİBRİD DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARININ VARLIKLARI ve YAKINSAKLIKLARI

Bu bölümde hibrid dönüşüm sınıfları hakkında kısaca bilgi verilerek, bu sınıfların küme değerli genellemelerinin tanımları verilip sabit noktalarının varlıkları ve sabit noktalarına yakınsaklık sonuçları elde edilecektir.

H bir Hilbert uzayı ve C de H'ın boştan farklı alt kümesi olmak üzere, $T : C \to H$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in C$ için, T dönüşümü

$$||Tx - Ty|| \leq ||x - y||, \tag{3.1}$$

$$2||Tx - Ty||^2 \leq ||Tx - y||^2 + ||Ty - x||^2 \tag{3.2}$$

ve

$$3||Tx - Ty||^2 \leq ||x - y||^2 + ||Tx - y||^2 + ||Ty - x||^2 \tag{3.3}$$

şartlarından birini sağlıyorsa, T'ye sırasıyla nonexpansive dönüşüm, nonspreading dönüşüm [100] ve hibrid dönüşüm [101] denir. Bu üç dönüşüm birbirinden bağımsızdır, yani herhangi biri diğerini içermez. 2010'da Aoyama ve ark. [102] tarafından tanımlanan $\lambda -$ hibrid dönüşüm sınıfı, $\lambda \in \mathbb{R}$ sabit olmak üzere;

$$(1 + \lambda)||Tx - Ty||^2 - \lambda||x - Ty||^2 \leq (1 - \lambda)||x - y||^2 + \lambda||Tx - y||^2 \tag{3.4}$$

şeklindedir. Açıkça görüldüğü üzere $\lambda -$hibrid dönüşüm sınıfı, nonexpansive, nonspreading ve de hibrid dönüşüm sınıflarının üçünü de içeren daha geniş bir sınıftır. 2011'de, Aoyama ve Kohsaka [103] Banach uzaylarında $\alpha -$nonexpansive dönüşüm sınıfını, $\alpha < 1$ için

$$||Tx - Ty||^2 \leq (1-2\alpha)||x-y||^2 + \alpha||Tx-y||^2 + \alpha||x-Ty||^2 \tag{3.5}$$

koşulunu sağlayacak biçimde tanımladılar. Ayrıca $\alpha-$nonexpansive ve $\lambda-$ hibrid dönüşüm sınıflarının Hilbert uzaylarında $\lambda < 2$ için denk olduklarını gösterdiler. Sonrasında ise Kocourek ve ark. [104] Hilbert uzaylarında yukarıdaki dönüşümlerden daha genel olan $(\alpha,\beta)-$genelleştirilmiş hibrid dönüşüm sınıfını, her $x, y \in C$ için

$$\alpha||Tx - Ty||^2 + (1-\alpha)||x-Ty||^2 \leq \beta||Tx-y||^2 + (1-\beta)||x-y||^2 \tag{3.6}$$

koşulunu sağlayacak şekilde tanımladılar.

Ayrıca 2011'de Lin ve ark. [105] $CAT(0)$ uzaylarında nonexpansive, nonspreading ve hibrid dönüşümlerden daha genel olan genelleştirmiş hibrid dönüşüm sınıfını, her $x, y \in C$ için $a_1, a_2, a_3, k_1, k_2 : X \to [0,1]$, dönüşümleri $a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) < 1$, $2k_1(x) < 1 - a_2(x)$ ve $2k_2(x) < 1 - a_3(x)$ koşullarını sağlamak üzere T dönüşümü,

$$\begin{aligned} \rho^2(Tx,Ty) \leq{}& a_1(x)\rho^2(x,y) + a_2(x)\rho^2(Tx,y) + a_3(x)\rho^2(x,Ty) \\ &+ k_1(x)\rho^2(Tx,x) + k_2(x)\rho^2(Ty,y) \end{aligned} \tag{3.7}$$

koşulunu sağlayacak şekilde tanımladılar. Burada genelleştirmiş hibrid dönüşüm sınıfının, $(\alpha,\beta)-$genelleştirilmiş hibrid dönüşüm sınıfından bağımsızdır olduğu görülmektedir.

3.1 Küme Değerli Hibrid Dönüşümlerin Sabit Noktalarının Varlıkları ve Yakınsaklıkları

Bu kısımda Hausdorff metriğini içermeyen ve içeren küme değerli hibrid dönüşümlerin tanımları verilerek varlık ve yakınsaklık sonuçları elde edilecektir. Hausdorff metriğini içermeyen dönüşümler, küme değerli nonexpansive dönüşümlerin direk bir genellemesi olmamakla birlikte sadece metriği içerdiğinden dolayı tanımı daha kolay test edilebilirdir. Hausdorff metriğini içeren dönüşümler ise literatürde var olan küme değerli nonexpansive ve nonspreading dönüşümlerin genellemesi olduğu gibi, literatürde var olmayan fakat bu dönüşüm sınıfından elde edilebilecek olan küme değerli hibrid, küme değerli $\lambda-$hibrid, küme değerli $\alpha-$nonexpansive ve $(\alpha,\beta)-$genelleştirilmiş hibrid dönüşümlerini de içermektedir. Ek olarak tanımlanacak olan her iki dönüşüm türü için yakınsaklık sonuçları ilk defa elde edilmiştir.

Tanım 3.1 (X,ρ) bir metrik uzay, $T: X \to 2^X$ bir dönüşüm, $a_1, a_2 : X \to \mathbb{R}$ ve $b_1, b_2 : X \to [0,1]$ dönüşümleri her $x \in X$ için $a_1(x) + a_2(x) \geq 1$ ve $b_1(x) + b_2(x) \leq 1$ koşullarını sağlayan dönüşümler olsun. Eğer T dönüşümü her $x, y \in X$ için ve her $u \in Tx$, $v \in Ty$ için,

$$a_1(x)\rho^2(u,v) + a_2(x)\rho^2(u,y) \leq b_1(x)\rho^2(x,v) + b_2(x)\rho^2(x,y) \tag{3.8}$$

koşulunu sağlıyorsa T'ye, $(a_1, a_2, b_1, b_2) -$ küme değerli I. tip hibrid dönüşüm denir.

$C(X)$, ile X' in boştan farklı kapalı altkümelerinin ailesini, $CC(X)$ ile X'in boştan farklı, kapalı ve konveks altkümeleri ailesini, $KC(X)$ ile de X' in boştan farklı, kompakt ve konveks alt kümeleri ailesi gösterelim.

Lemma 3.2 (X,ρ), bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı ve C, X'in boştan farklı ve konveks alt kümesi olsun. Eğer $T : C \to 2^X$ bir $(a_1, a_2, b_1, b_2) -$ küme değerli I. tip hibrid dönüşüm ve $F(T) \neq \emptyset$ ise $F(T)$ kapalı ve her $p \in F(T)$ için $Tp = \{p\}$ dir.

İspat: $\{x_n\}$, $F(T)$ de bir dizi ve $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in C$ olsun. Bu durumda her $u \in Tx$ için,

$$\begin{aligned}\rho^2(u,x_n) &\leq a_1(x)\rho^2(u,x_n) + a_2(x)\rho^2(u,x_n)\\ &\leq b_1(x)\rho^2(x,x_n) + b_2(x)\rho^2(x,x_n)\\ &\leq \rho^2(x,x_n)\end{aligned}$$

elde edilir. $n \to \infty$ için limit alındığında

$$\rho(u,x) \leq 0$$

elde edilir, u keyfi olduğundan dolayı $u = x \in Tx = \{x\}$ sağlanır.

Teorem 3.3 (X,ρ), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı ve C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi olsun. Eğer $T : C \to 2^C$ bir $(a_1, a_2, b_1, b_2) -$ küme değerli I. tip hibrid dönüşüm ve her $x \in C$ için $a_1(x) \leq 0$ veya $a_2(x) \leq 0$ ise $F(T) \neq \emptyset$ dir.

İspat: Keyfi bir $x_0 \in C$ ve her $n \in \mathrm{N}$ için $\{x_n\}$ dizisi $x_n \in Tx_{n-1}$ seçimi ile elde edilsin. Hipotez gereği, Önerme 2.46'den, $A_C\{x_n\} = \{z\}$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. Lemma 2.47 gereğince $z \in C$ dir. T dönüşümünün özelliğinden her $n \in \mathrm{N}$ için ve her $u \in Tz$ için

$a_1(z)\rho^2(u,x_n)+a_2(z)\rho^2(u,x_{n-1})\leq b_1(z)\rho^2(z,x_n)+b_2(z)\rho^2(z,x_{n-1})$

sağlanır. Eşitsizliğin her iki tarafında limit supremuma geçildiğinde

$$\limsup_{n\to\infty}\rho^2(u,x_n)\leq\limsup_{n\to\infty}\rho^2(z,x_n)$$

elde edilir ve sonuç olarak asimptotik merkezin tekliğinden dolayı ve u'nun keyfi olmasından dolayı $u=z\in Tz=\{z\}$ dir.

Eğer Tanım 3.1 ile verilen T dönüşümü tekil değerli ise aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.4 (X,ρ), $\varepsilon\in(0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X)\leq\frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı ve C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi olsun. Eğer $T:C\to C$ bir $(a_1,a_2,b_1,b_2)-$ hibrid dönüşüm ve her $x\in C$ için $a_1(x)\leq 0$ veya $a_2(x)\leq 0$ ise $F(T)\neq\emptyset$ dır.

İspat: Her $x\in C$ için F dönüşümü, $F=\{T(x)\}$ biçiminde tanımlanırsa $F:C\to C$ şeklinde bir $(a_1,a_2,b_1,b_2)-$ küme değerli I. tip hibrid dönüşümü olacağından, Teorem 3.3'den $F(T)\neq\emptyset$ elde edilir.

Sonuç 3.5 (X,ρ), bir tam $CAT(0)$ uzayı ve C, X in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi olsun. Eğer $T:C\to 2^C$ bir $(a_1,a_2,b_1,b_2)-$ küme değerli I. tip hibrid dönüşüm ve her $x\in C$ için $a_1(x)\leq 0$ veya $a_2(x)\leq 0$ ise $F(T)\neq\emptyset$ olması için gerek ve yeter koşul her $n\in\mathbb{N}$ için $x_n\in Tx_{n-1}$ şeklinde tanımlı $\{x_n\}$ dizisi sınırlı olacak şekilde bir $x_0\in C$ başlangıç noktasının var olmasıdır.

İspat: Önerme 2.37 ve Teorem 3.3 den istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.6 (X,ρ), bir tam $CAT(0)$ uzayı ve C, X in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi olsun. Eğer $T:C\to C$ bir $(a_1,a_2,b_1,b_2)-$ hibrid dönüşüm ve her $x\in C$ için $a_1(x)\leq 0$ veya $a_2(x)\leq 0$ ise $F(T)\neq\emptyset$ olması için gerek ve yeter koşul her $n\in\mathbb{N}$ için $x_n=Tx_{n-1}$ tanımlı $\{x_n\}$ dizisi sınırlı olacak şekilde bir $x_0\in C$ başlangıç noktasının var olmasıdır.

İspat: Önerme 2.37 ve Sonuç 3.4'den istenen sonuç elde edilir.

Teorem 3.7 ((X,ρ), $\varepsilon\in(0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X)\leq\frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $T:C\to CC(X)$ bir $(a_1,a_2,b_1,b_2)-$

küme değerli I. tip hibrid dönüşüm ve her $x \in C$ için $a_1(x) \leq 0$ veya $a_2(x) \leq 0$ olsun. Eğer C kümesinde $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ olacak şekildeki bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $z \in C$ ve $z \in T(z)$ dir.

İspat: Lemma 2.47'dan $z \in C$ dir. Lemma 2.53'den her $n \in \mathbb{N}$ için $\rho(x_n, y_n) = \rho(x_n, Tx_n)$, olacak şekilde bir $\{y_n\}$ dizisi oluşturulabilir. $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$ dir. Ayrıca üçgen eşitsizliğinden

$\rho(x_n, u) \leq \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, u)$ ve $\rho(y_n, u) \leq \rho(y_n, x_n) + \rho(x_n, u)$

sağlandığından

$\limsup_{n\to\infty} \rho(x_n, u) \leq \limsup_{n\to\infty} \rho(y_n, u)$ ve

$\limsup_{n\to\infty} \rho(y_n, u) \leq \limsup_{n\to\infty} \rho(x_n, u)$

elde edilir. Bu ise $\limsup_{n\to\infty} \rho(x_n, u) = \limsup_{n\to\infty} \rho(y_n, u)$ olduğunu verir. T dönüşümünün özelliğinden, her $u \in Tz$ için

$$\begin{aligned} a_1(z)\rho^2(u, y_n) + a_2(z)\rho^2(u, x_n) &\leq b_1(z)\rho^2(z, y_n) + b_2(z)\rho^2(z, x_n) \\ &\leq b_1(z)[\rho(z, x_n) + \rho(x_n, y_n)]^2 + b_2(z)\rho^2(x_n, z) \end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafta limit supremuma geçildiğinde

$\limsup_{n\to\infty} \rho(x_n, u) \leq \limsup_{n\to\infty} \rho(x_n, \mathrm{z})$

elde edilir ve asimptotik merkezin tekliğinden $u = z \in Tz = \{z\}$.

Sonuç 3.8 (X, ρ), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $T : C \to X$ bir (a_1, a_2, b_1, b_2) $-$hibrid dönüşüm ve her $x \in C$ için $a_1(x) \leq 0$ veya $a_2(x) \leq 0$ olsun. Eğer C kümesinde $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ olacak şekildeki bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $z \in C$ ve $z = T(z)$ dır.

Sonuç 3.9 (X, ρ), bir tam $CAT(0)$ uzayı, C, X in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $T : C \to CC(X)$ bir (a_1, a_2, b_1, b_2) $-$ küme değerli I. tip hibrid dönüşüm ve her

$x \in C$ için $a_1(x) \leq 0$ veya $a_2(x) \leq 0$ olsun. Eğer C kümesinde $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ olacak şekildeki sınırlı bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $z \in K$ ve $z \in T(z)$ dır.

Sonuç 3.10 (X,ρ), bir tam $CAT(0)$ uzayı, C, X in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $T : C \to X$ bir $(a_1, a_2, b_1, b_2) -$ hibrid dönüşüm her $x \in C$ için $a_1(x) \leq 0$ veya $a_2(x) \leq 0$ olsun. Eğer C kümesinde $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ olacak şekildeki sınırlı bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $z \in C$ ve $z = T(z)$ dır.

$\omega(x_n) := \cup A(\{u_n\})$, $\{x_n\}$ dizisinin, bütün alt dizilerinin asimptotik merkezlerinin kümesi olsun.

Önerme 3.11 (X,ρ), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $T : C \to CC(X)$ bir $(a_1, a_2, b_1, b_2) -$ küme değerli I. tip hibrid dönüşüm, her $x \in C$ için $a_1(x) \leq 0$ veya $a_2(x) \leq 0$ ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. Eğer C kümesinde $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ ve her $p \in F(T)$ için $\{\rho(x_n, p)\}$ yakınsak olacak şekildeki bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $\omega_w(x_n) \subseteq F(T)$ dir ve $\omega_w(x_n)$ yanlızca tek nokta içerir.

İspat: Keyfi olarak $u \in \omega_w(x_n)$ alınsın. Bu durum da $A(\{u_n\}) = \{u\}$ olacak şekilde $\{x_n\}$ dizisinin bir alt dizisi $\{u_n\}$ bulunabilir. Dolayısı ile Lemma 2.47'den $\Delta - \lim_{n\to\infty} v_n = v \in C$ olacak biçimde $\{u_n\}$ dizisinin bir alt dizisi $\{v_n\}$ vardır. Buradan ise Teorem 3.7yardımıyla $v \in F(T)$ elde edilir ve Lemma 2.48'den $u = v$ olduğu bulunur. Sonuç olarak $\omega_w(x_n) \subseteq F(T)$ dir. Tekliği için ise: $\{x_n\}$ dizisinin $A(\{u_n\}) = \{u\}$ olacak şekilde alt dizisi $\{u_n\}$ alalım ve $A(\{x_n\}) = \{x\}$ olsun. $u \in \omega_w(x_n) \subseteq F(T)$ ve $\{\rho(x_n, u)\}$ yakınsak olduğundan dolayı, Lemma 2.48'den $x = u$ dur. Sonuç olarak $\omega_w(x_n)$ yanlızca tek nokta içerir.

Teorem 3.12 (X,ρ), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $T : C \to CC(X)$ bir $(a_1, a_2, b_1, b_2) -$ küme değerli I. tip hibrid dönüşüm, her $x \in C$ için $a_1(x) \leq 0$ veya $a_2(x) \leq 0$ ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $\liminf_{n\to\infty} (1-\beta_n)\beta_n > 0$ ve $(\alpha_n) \subset (0,1)$ olmak üzere Tanım 2.61 ile verilen $\{x_n\} \subset C$ dizisi $F(T)$ içindeki bir noktaya $\Delta -$ yakınsaktır.

İspat: $p \in F(T)$ olsun. Bu durumda $x \in C$, $u \in Tx$

$$\begin{aligned}\rho^2(u,p) &\leq a_1(x)\rho^2(u,p) + a_2(x)\rho^2(u,p)\\ &\leq b_1(x)\rho^2(x,p) + b_2(x)\rho^2(x,p)\\ &\leq \rho^2(x,p)\end{aligned}$$

ve buradan da $\rho(u,p) \leq \rho(x,p)$ elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}\rho(z_n,p) &= \rho(P_C((1-\beta_n)x_n \oplus \beta_n w_n),p)\\ &= \rho(P_C((1-\beta_n)x_n \oplus \beta_n w_n),P_C(p))\\ &\leq \rho((1-\beta_n)x_n \oplus \beta_n w_n,p)\\ &\leq (1-\beta_n)\rho(x_n,p) + \beta_n\rho(w_n,p)\\ &\leq (1-\beta_n)\rho(x_n,p) + \beta_n\rho(x_n,p)\\ &\leq \rho(x_n,p)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\rho(y_n,p) &= \rho(P_C((1-\alpha_n)w_n \oplus \alpha_n v_n,p)\\ &\leq \rho(P_C((1-\alpha_n)w_n \oplus \alpha_n v_n,P_C(p))\\ &\leq \rho((1-\alpha_n)w_n \oplus \alpha_n v_n,p)\\ &\leq (1-\alpha_n)\rho(w_n,p) + \alpha_n\rho(v_n,p)\\ &\leq (1-\alpha_n)\rho(x_n,p) + \alpha_n\rho(z_n,p)\\ &\leq \rho(x_n,p)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\rho(x_{n+1},p) &= \rho(P_C(u_n),P_C(p))\\ &\leq \rho(u_n,p)\\ &\leq \rho(y_n,p)\\ &\leq \rho(x_n,p)\end{aligned}$$

elde edilir, bu ise $\rho(x_{n+1},p) \leq \rho(y_n,p) \leq \rho(x_n,p)$ olduğunu, yani $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,p) = \lim_{n\to\infty}\rho(y_n,p)$ limitlerinin varlığını verir. $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,p) = \lim_{n\to\infty}\rho(y_n,p) = k$ olsun. $\rho(w_n,p) \leq \rho(x_n,p)$ ve $\rho(v_n,p) \leq \rho(z_n,p) \leq \rho(x_n,p)$ sağlandığından $\limsup_{n\to\infty}\rho(w_n,p) \leq k$ ve $\limsup_{n\to\infty}\rho(v_\text{n},p) \leq k$ sağlanır ve

$$\begin{aligned}\rho(y_n,p) &= \rho(P_C((1-\alpha_n)w_n \oplus \alpha_n v_n,p)\\ &\leq \rho((1-\alpha_n)w_n \oplus \alpha_n v_n,p)\\ &\leq \rho(x_n,p)\end{aligned}$$

olduğundan, $\lim_{n\to\infty}\rho((1-\alpha_n)w_n + \alpha_n v_n,p) = k$ elde edilir. Dolayısı ile Önerme 2.52 den $\lim_{n\to\infty}\rho(w_n,v_n) = 0$ elde edilir. Ayrıca

$$
\begin{aligned}
\rho(y_n, p) &= \rho(P_C((1-\alpha_n)w_n \oplus \alpha_n v_n, p) \\
&\leq (1-\alpha_n)\rho(w_n, p) + \alpha_n \rho(v_n, p) \\
&\leq (1-\alpha_n)(\rho(w_n, v_n) + \rho(v_n, p)) + \alpha_n \rho(v_n, p) \\
&\leq (1-\alpha_n)\rho(w_n, v_n) + \rho(v_n, p)
\end{aligned}
$$

sağlandığından $k \leq \liminf_{n\to\infty} \rho(v_n, p)$ ve $\rho(v_n, p) \leq \rho(z_n, p) \leq \rho(x_n, p)$, buradan da $\lim_{n\to\infty} \rho(z_n, p) = k$ elde edilir. CN* eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
\rho^2(z_n, p) &= \rho^2(P_C((1-\beta_n)x_n \oplus \beta_n w_n), p) \\
&= \rho^2(P_C((1-\beta_n)x_n \oplus \beta_n w_n), P_C(p)) \\
&\leq \rho^2((1-\beta_n)x_n \oplus \beta_n w_n, p) \\
&\leq (1-\beta_n)\rho^2(x_n, p) + \beta_n \rho^2(w_n, p) - \frac{R}{2}(1-\beta_n)\beta_n \rho^2(x_n, w_n) \\
&\leq (1-\beta_n)\rho^2(x_n, p) + \beta_n \rho^2(x_n, p) - \frac{R}{2}(1-\beta_n)\beta_n \rho^2(x_n, w_n) \\
&\leq \rho^2(x_n, p) - \frac{R}{2}(1-\beta_n)\beta_n \rho^2(x_n, w_n)
\end{aligned}
$$

elde edilir ve bu da

$$
\frac{R}{2}(1-\beta_n)\beta_n \rho^2(x_n, w_n) \leq \rho^2(x_n, p) - \rho^2(z_n, p)
$$

olmasını gerektirir. $\lim_{n\to\infty}(\rho^2(x_n, p) - \rho^2(z_n, p)) = 0$ ve varsayımdan $\liminf_{n\to\infty} (1-\beta_n)\beta_n > 0$ olması ise $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, w_n) = 0$ olduğunu verir. Dolayısı ile $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak Önerme 3.11'den $\{x_n\}$ dizisi $F(T)$ içindeki bir noktaya $\Delta -$ yakınsaktır.

Teorem 3.13 (X, ρ), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kompakt ve konveks alt kümesi, $T : C \to CC(X)$ bir $(a_1, a_2, b_1, b_2) -$ küme değerli I. tip hibrid dönüşüm, her $x \in C$ için $a_1(x) \leq 0$ veya $a_2(x) \leq 0$ ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $\liminf_{n\to\infty}(1-\beta_n)\beta_n > 0$ ve $(\alpha_n) \subset (0,1)$ olmak üzere Tanım 2.61 ile verilen $\{x_n\} \subset C$ dizisi $F(T)$ içindeki bir noktaya kuvvetli yakınsaktır.

İspat: Teorem 3.12'den her $p \in F(T)$ için $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, p)$ mevcuttur ve $\lim_{n\to\infty} \rho(Tx_n, x_n) = 0$ dir. Lemma 2.53'den her $n \in \mathbb{N}$ için $y_n \in Tx_n$ ve $\rho(x_n, y_n) = \rho(x_n, Tx_n)$ olacak biçimde $\{y_n\}$ dizisi vardır ve $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$ sağlanır. C kompakt alt küme olduğundan, $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi $\{x_{n_i}\}$, $\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = z \in C$ olacak biçimde bulunabilir. Her $x \in C$ için

$$\rho(y_{n_i}, x) \leq \rho(y_{n_i}, x_{n_i}) + \rho(x_{n_i}, x)$$

olup i üzerinden limit alındığında

$\lim_{i\to\infty} \rho\left(y_{n_i}, x\right) = \lim_{i\to\infty} \rho\left(x_{n_i}, x\right)$ olduğundan ve her $u \in Tz$ ve $n_i \in \mathbb{N}$ için

$$a_1(z)\rho^2(u, y_{n_i}) + a_2(z)\rho^2(u, x_{n_i}) \leq b_1(z)\rho^2(z, y_{n_i}) + b_2(z)\rho^2(z, x_{n_i})$$

sağlandığından i üzerinden limit alınırsa, ρ metriğinin sürekliliğinden

$$\lim_{i\to\infty} \rho^2\left(u, x_{n_i}\right) = \rho^2(u, \mathrm{z}) \leq 0$$

elde edilir. Dolayısı ile $d^2(u, z) = 0$, yani $u = z \in Tz = \{z\}$ bulunur. Bu durumda $z \in F(T)$ olup $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, z)$ mevcut olduğundan, $\{\rho(x_{n_i}, z)\}$ dizisi $\{\rho(x_n, z)\}$ dizisinin alt dizisi olduğundan ve limit tekliğinden dolayı $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, z) = \lim_{n\to\infty} \rho\left(x_{n_i}, z\right) = 0$ bulunur.

Teorem 3.14 (X, ρ), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $T : C \to CC(X)$ bir hemikompakt ve $(a_1, a_2, b_1, b_2) -$ küme değerli I. tip hibrid dönüşüm, her $x \in C$ için $a_1(x) \leq 0$ veya $a_2(x) \leq 0$ ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $\liminf_{n\to\infty} (1 - \beta_n)\beta_n > 0$ ve $(\alpha_n) \subset (0,1)$ olmak üzere Tanım 2.61 ile verilen $\{x_n\} \subset C$ dizisi $F(T)$ içindeki bir noktaya kuvvetli yakınsaktır.

İspat: Teorem 3.12'den her $p \in F(T)$ için $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, p)$ mevcuttur ve $\lim_{n\to\infty} \rho(Tx_n, x_n) = 0$ dir. T hemikompakt olduğundan, $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi $\{x_{n_i}\}$, $\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = z \in C$ olacak biçimde bulunabilir. İspatın geri kalanı Teorem 3.13 ile aynıdır.

Örnek 3.15 $X = [1, 7]$, $\rho(x, y) = |x - y|$ ve $T : X \to C(X)$,

$$Tx = \begin{cases} \{1\}, & x \in [1,4], \\ \left[1, \frac{2x^2+1}{x^2+1}\right], & x \in (4,7] \end{cases}$$

olarak verilsin. Bu durumda T dönüşümü, her $x \in X$ için $a_1(x) = \frac{2x+3}{x+2}, a_2(x) = \frac{-x-1}{x+2}, b_1(x) = \frac{x+1}{x+2}, b_2(x) = \frac{1}{x+2}$ olmak üzere, T nonexpansive olmayan bir $(a_1, a_2, b_1, b_2) -$ küme değerli I. tip hibrid dönüşümdür. Gerçekten de;

Eğer $x, y \in [1, 4]$ ise açıktır.

Eğer $x \in [1, 4], y \in (4, 7]$ ise $u \in Tx$ ve $v \in Ty$ için $\rho^2(u, v) \leq 1,9 < \rho^2(Tx, y) \leq \rho^2(u, y), 0 < \rho^2(x, Ty) \leq \rho^2(x, v)$ sağlandığından

$$\begin{aligned}\frac{2x+3}{x+2}\rho^2(u, v) &\leq \frac{2x+3}{x+2} \\ &\leq \frac{9x+9}{x+2} + \frac{x+2}{x+2}\rho^2(x, v) + \frac{1}{x+2}\rho^2(x, y) \\ &\leq \frac{x+1}{x+2}\rho^2(u, \mathrm{y}) + \frac{x+2}{x+2}\rho^2(x, v) + \frac{1}{x+2}\rho^2(x, y)\end{aligned}$$

olur.

Eğer $x, y \in (4, 7]$ ise $u \in Tx$ ve $v \in Ty$ için $\rho^2(u, v) \leq 1$, $4 < \rho^2(Tx, y) \leq \rho^2(u, y), 4 < \rho^2(x, Ty) \leq \rho^2(x, v)$ sağlandığından

$$\begin{aligned}\frac{3x+3}{x+2}\rho^2(u, v) &\leq \frac{3x+3}{x+2} \\ &\leq \frac{4x+4}{x+2} + \frac{4x+4}{x+2}\rho^2(x, v) + \frac{1}{x+2}\rho^2(x, y) \\ &\leq \frac{x+1}{x+2}\rho^2(u, \mathrm{y}) + \frac{x+1}{x+2}\rho^2(x, v) + \frac{1}{x+2}\rho^2(x, y)\end{aligned}$$

olur. Dolayısı ile her durumda eşitsizlik sağlandığından bir $(a_1, a_2, b_1, b_2) -$ küme değerli I. tip hibrid dönüşümdür. $1 \in F(T)$ ve $T(1) = \{1\}$ dir. Fakat $x = 4, y = 4.1$ için $T(4) = \{1\}$, $T(4.1) = [1, 1.9438..]$ olduğundan $H(T(4),\ T(4.1)) = \max\{|1-1|, |1.9438..-1|\} = 0.9438.. > \rho(4{,}4.1) = 0.1$ olduğundan T nonexpansive değildir.

Önerme 3.16 (X, ρ) bir metrik uzay, $C \subset X$ ve $\{x_n\}$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$ olacak biçimde bir dizi olsun. Bu durumda $\rho\,(x, C) = \inf\{\rho(x, a) : a \in C\}$ dizisel süreklidir.

İspat: ρ metriğinin özelliğinden her $a \in C$ için

$$\rho\,(x, a) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, a)$$

olup bütün $a \in C$ üzerinden infimum alındığında

$\rho\ (x, C) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, C)$

elde edilebilir ve benzer yolla

$\rho\ (x_n, C) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x, C)$

elde edilebilir. Bu durumda

$|\rho\ (x_n, C) - \rho(x, C)| \leq \rho(x, x_n)$

olacağından

$\lim_{n\to\infty} |\rho\ (x_n, C) - \rho(x, C)| = \lim_{n\to\infty} \rho(x, x_n) = 0$

bulunur. Sonuç olarak $\lim_{n\to\infty} \rho\ (x_n, C) = \rho(x, C)$, yani $\rho\ (x, C)$ dizisel süreklidir.

Tanım 3.17 (X, ρ) bir metrik uzay, $T\colon X \to 2^X$ bir dönüşüm ve $a_1, a_2 : X \to \mathbb{R}$ ve $b_1, b_2 : X \to [0, 1]$ dönüşümleri her $x \in X$ için $a_1(x) + a_2(x) \geq 1$ ve $b_1(x) + b_2(x) \leq 1$ koşullarını sağlayan dönüşümler olsun. Eğer T dönüşümü her $x, y \in X$ için

$$a_1(x)H^2(Tx, Ty) + a_2(x)\rho^2(Tx, y) \leq b_1(x)\rho^2(x, Ty) + b_2(x)\rho^2(x, y) \tag{3.9}$$

koşulunu sağlıyorsa T ye $(a_1, a_2, b_1, b_2) -$ küme değerli II. tip hibrid dönüşüm denir.

Lemma 3.18 (X, ρ), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı ve C, X'in boştan farklı ve konveks alt kümesi olsun. Eğer $T : C \to C(X)$ bir $(a_1, a_2, b_1, b_2) -$ küme değerli II. tip hibrid dönüşüm, her $x \in C$ için $0 \leq a_1(x)$ ve $F(T) \neq \emptyset$ ise $F(T)$ kapalıdır.

İspat: $\{x_n\}$, $F(T)$ de bir dizi ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in C$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\rho^2(Tx, x_n) &\leq a_1(x)\rho^2(Tx, x_n) + a_2(x)\rho^2(Tx, x_n)\\ &\leq a_1(x)H^2(Tx, Tx_n) + a_2(x)\rho^2(Tx, x_n)\\ &\leq b_1(x)\rho^2(x, Tx_n) + b_2(x)\rho^2(x, x_n)\\ &\leq \rho^2(x, x_n)\end{aligned}$$

elde edilir. $n \to \infty$ için limit alındığında

$\rho(Tx, x) = 0$

elde edilir, sonuç olarak $x \in Tx$ elde edilir.

Teorem 3.19 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kompakt ve konveks alt kümesi, $T : C \to CC(X)$ bir $(a_1, a_2, b_1, b_2) -$ küme değerli II. tip hibrid dönüşüm ve her $x \in C$ için $a_1(x) \geq 0$ olsun. Eğer C'de $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ olacak biçimde bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $F(T) \neq \emptyset$ dir.

İspat: $\{x_n\}$ dizisi, C'de $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ olacak biçimde bir dizi olsun. C kompakt alt küme olduğundan, $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi $\{x_{n_i}\}$, $\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = z \in C$ olacak biçimde bulunabilir. Ayrıca Lemma 2.53'den her $n \in \mathbb{N}$ için $y_n \in Tx_n$ ve $\rho(x_n, y_n) = \rho(x_n, Tx_n)$ olacak biçimde $\{y_n\}$ dizisi vardır. $\rho(x_{n_i}, Tz) \leq \rho(x_{n_i}, y_{n_i}) + \rho(y_{n_i}, Tz)$ ve $\rho(y_{n_i}, Tz) \leq \rho(y_{n_i}, x_{n_i}) + \rho(x_{n_i}, Tz)$ olduğundan $\lim_{i\to\infty} \rho(x_{n_i}, Tz) = \lim_{i\to\infty} \rho(y_{n_i}, Tz) = \rho(z, Tz)$ elde edilir. T'nin özelliğinden

$$\begin{aligned} a_1(z)\rho^2(Tz, y_{n_i}) + a_2(z)\rho^2(Tz, x_{n_i}) &\leq a_1(z)H^2(Tz, Tx_{n_i}) + a_2(z)\rho^2(Tz, x_{n_i}) \\ &\leq b_1(z)\rho^2(z, Tx_{n_i}) + b_2(z)\rho^2(z, x_{n_i}) \\ &\leq b_1(z)\left[\rho(z, x_{n_i}) + \rho(x_{n_i}, Tx_{n_i})\right]^2 \\ &\qquad + b_2(z)\rho^2(z, x_{n_i}) \end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafta i üzerinden limite geçildiğinde

$$\rho(Tz, z) \leq [a_1(z) + a_2(z)]\rho(Tz, z) \leq 0$$

bulunur. Sonuç olarak $z \in Tz$ dir.

Sonuç 3.20 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı ve konveks alt kümesi, $T : C \to X$ bir $(a_1, a_2, b_1, b_2) -$ II. tip hibrid dönüşüm ve her $x \in C$ için $a_1(x) \geq 0$ olsun. Eğer C'de $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ olacak biçimde bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $F(T) \neq \emptyset$ dir.

İspat: Her $x \in C$ için F dönüşümü, $F = \{T(x)\}$ biçiminde tanımlanırsa $F : C \to CC(X)$ şeklinde bir $(a_1, a_2, b_1, b_2) -$ küme değerli II. tip hibrid dönüşümü olacağından, Teorem 3.19'den $F(T) \neq \emptyset$ elde edilir.

Sonuç 3.21 (X,ρ), bir tam $CAT(0)$ uzayı, C, X in boştan farklı, kompakt ve konveks alt kümesi, $T : C \to CC(X)$ bir $(a_1, a_2, b_1, b_2) -$ küme değerli II. tip hibrid dönüşüm ve her

$x \in C$ için $a_1(x) \geq 0$ olsun. Eğer C'de $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ olacak biçimde bir sınırlı bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $F(T) \neq \emptyset$ dir

İspat: Önerme 2.37 ve Teorem 3.19 den istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.22 (X,ρ), bir tam $CAT(0)$ uzayı, C, X in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $T : C \to C$ bir $(a_1, a_2, b_1, b_2) -$ II. tip hibrid dönüşüm ve her $x \in C$ için $0 \leq a_1(x)$ olsun. Eğer C'de $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ olacak biçimde sınırlı bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $F(T) \neq \emptyset$ dir.

İspat: Önerme 2.37 ve Sonuç 3.21'den istenen sonuç elde edilir.

Teorem 3.23 (X,ρ), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $T : C \to CC(X)$ bir hemikompakt ve $(a_1, a_2, b_1, b_2) -$ küme değerli II. tip hibrid dönüşüm ve her $x \in C$ için $a_1(x) \geq 0$ olsun. Eğer C'de $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ olacak biçimde bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $F(T) \neq \emptyset$ dir.

İspat: $\{x_n\}$ dizisi, C'de $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ olacak biçimde bir dizi olsun. T hemikompakt olduğundan, $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi $\{x_{n_i}\}$, $\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = z \in C$ olacak biçimde bulunabilir. İspatın geri kalanı Teorem 3.19'in ispatı ile aynıdır.

Sonuç 3.24 (X,ρ), bir tam $CAT(0)$ uzayı, C, X in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $T : C \to CC(X)$ bir hemikompakt ve $(a_1, a_2, b_1, b_2) -$ küme değerli II. tip hibrid dönüşüm ve her $x \in C$ için $a_1(x) \geq 0$ olsun. Eğer C'de $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ olacak biçimde bir sınırlı bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $F(T) \neq \emptyset$ dir

İspat: Önerme 2.37 ve Teorem 3.23'den istenen sonuç elde edilir.

Teorem 3.25 (X,ρ), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kompakt ve konveks alt kümesi, $T : C \to CC(X)$ bir $(a_1, a_2, b_1, b_2) -$ küme değerli II. tip hibrid dönüşüm ve her $x \in C$ için $a_1(x) \geq 0$ olsun. Eğer C kümesinde $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ olacak şekildeki bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $z \in C$ ve $z \in T(z)$ dır.

İspat: $\{x_n\}$ dizisi, C'de $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ olacak biçimde bir dizi olsun. Lemma 2.47'den $z \in C$ dir. C kompakt alt küme olduğundan, $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi $\{x_{n_i}\}$, $x_{n_i} \to u \in C$ olacak biçimde bulunabilir. $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = z$ olduğundan $u = z$ dir. İspatın geri kalanı Teorem 3.19'in ispatı ile aynıdır.

Teorem 3.26 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $T : C \to CC(X)$ bir hemikompakt ve $(a_1, a_2, b_1, b_2) -$ küme değerli II. tip hibrid dönüşüm ve her $x \in C$ için $a_1(x) \geq 0$ olsun. Eğer C kümesinde $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ olacak şekildeki bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $z \in C$ ve $z \in T(z)$ dır.

İspat: $\{x_n\}$ dizisi, C'de $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ olacak biçimde bir dizi olsun. Lemma 2.47'den $z \in C$ dir. T hemikompakt olduğundan, $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi $\{x_{n_i}\}$, $x_{n_i} \to u \in C$ olacak biçimde bulunabilir. $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = z$ olduğundan $u = z$ dir. İspatın geri kalanı Teorem 3.19'in ispatı ile aynıdır.

Önerme 3.27 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kompakt ve konveks alt kümesi, $T : C \to CC(X)$ bir $(a_1, a_2, b_1, b_2) -$ küme değerli II. tip hibrid dönüşüm, her $x \in C$ için $a_1(x) \geq 0$ ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. Eğer C kümesinde $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ ve her $p \in F(T)$ için $\{\rho(x_n, p)\}$ olacak şekildeki bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $\omega_w(x_n) \subseteq F(T)$ dir ve $\omega_w(x_n)$ yanlızca tek nokta içerir.

İspat: Önerme 3.11'in ispatına benzer olarak, Lemma 2.47, Teorem 3.25 ve Lemma 2.48 'den istenen elde edilir.

Önerme 3.28 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $T : C \to CC(X)$ bir hemikompakt ve $(a_1, a_2, b_1, b_2) -$ küme değerli II. tip hibrid dönüşüm, her $x \in C$ için $a_1(x) \geq 0$ ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. Eğer C kümesinde $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ ve her $p \in F(T)$ için $\{\rho(x_n, p)\}$ olacak şekildeki bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $\omega_w(x_n) \subseteq F(T)$ dir ve $\omega_w(x_n)$ yanlızca tek nokta içerir.

İspat: Önerme 3.11'in ispatına benzer olarak, Lemma 2.47, Teorem 3.26 ve Lemma 2.48 'den istenen elde edilir.

Teorem 3.29 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $T : C \rightarrow CC(X)$ bir (a_1, a_2, b_1, b_2) −küme değerli II. tip hibrid dönüşüm, her $x \in C$ için $a_1(x) \geq 1,\ a_2(x) \geq 0$ veya $a_1(x) \geq 0,\ a_2(x) \leq 0,\ F(T) \neq \emptyset$ ve her $p \in F(T)$ için $Tp = \{p\}$ olsun. Bu durumda $\liminf_{n\to\infty}(1-\beta_n)\beta_n > 0$ olmak üzere eğer $\{x_n\} \subset C$, Tanım 2.61 ile verilen dizi ise her $p \in F(T)$ için $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, p)$ vardır ve $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n, Tx_n) = 0$ dır.

İspat: $p \in F(T)$ ve $x \in C$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\rho^2(Tx,p) &\leq a_1(x)\rho^2(Tx,p) + a_2(x)\rho^2(Tx,p)\\
&\leq a_1(x)H^2(Tx,Tp) + a_2(x)\rho^2(Tx,p)\\
&\leq b_1(x)\rho^2(x,Tp) + b_2(x)\rho^2(x,p)\\
&\leq b_1(x)\rho^2(x,p) + b_2(x)\rho^2(x,p)\\
&\leq \rho^2(x,p)
\end{aligned}$$

Eğer $a_1(x) \geq 1$ ve $a_2(x) \geq 0$ ise T, (a_1, a_2, b_1, b_2) −küme değerli II. tip hibrid dönüşüm olduğundan dolayı

$$\begin{aligned}
a_1(x)H^2(Tx,Tp) &\leq b_1(x)\rho^2(x,p) + b_2(x)\rho^2(x,p) - a_2(x)\rho^2(Tx,p)\\
&\leq \rho^2(x,p)
\end{aligned}$$

olur. Buradan ise

$H^2(Tx,Tp) \leq \frac{1}{a_1(x)}\rho^2(x,p) \leq \rho^2(x,p)$ elde edilir.

Eğer $a_1(x) \geq 0$ ve $a_2(x) \leq 0$ ise

$$\begin{aligned}
H^2(Tx,Tp) &\leq a_1(x)H^2(Tx,Tp) + a_2(x)H^2(Tx,Tp)\\
&\leq a_1(x)H^2(Tx,Tp) + a_2(x)\rho^2(Tx,p)\\
&\leq b_1(x)\rho^2(x,Tp) + b_2(x)\rho^2(x,p)\\
&\leq b_1(x)\rho^2(x,p) + b_2(x)\rho^2(x,p)\\
&\leq \rho^2(x,p)
\end{aligned}$$

elde edilir. Her iki durumda da $H(Tx,Tp) \leq \rho(x,p)$ sağlanır. Bunun yardımı ile

$$
\begin{aligned}
\rho(z_n, p) &= \rho(P_C((1-\beta_n)x_n \oplus \beta_n w_n), p) \\
&= \rho(P_C((1-\beta_n)x_n \oplus \beta_n w_n), P_C(p)) \\
&\leq \rho((1-\beta_n)x_n \oplus \beta_n w_n, p) \\
&\leq (1-\beta_n)\rho(x_n, p) + \beta_n \rho(w_n, p) \\
&\leq (1-\beta_n)\rho(x_n, p) + \beta_n \rho(w_n, Tp) \\
&\leq (1-\beta_n)\rho(x_n, p) + \beta_n H(Tx_n, Tp) \\
&\leq (1-\beta_n)\rho(x_n, p) + \beta_n \rho(x_n, p) \\
&\leq \rho(x_n, p)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\rho(y_n, p) &= \rho(P_C((1-\alpha_n)w_n \oplus \alpha_n v_n, p) \\
&= \rho(P_C((1-\alpha_n)w_n \oplus \alpha_n v_n, P_C(p)) \\
&\leq \rho((1-\alpha_n)w_n \oplus \alpha_n v_n, p) \\
&\leq (1-\alpha_n)\rho(w_n, p) + \alpha_n \rho(v_n, p) \\
&\leq (1-\alpha_n)\rho(w_n, Tp) + \alpha_n \rho(v_n, Tp) \\
&\leq (1-\alpha_n)H(Tx_n, p) + \alpha_n H(Tz_n, Tp) \\
&\leq (1-\alpha_n)\rho(x_n, p) + \alpha_n \rho(z_n, p) \\
&\leq \rho(z_n, p)
\end{aligned}
$$

son olarak ta

$$
\begin{aligned}
\rho(x_{n+1}, p) &= \rho(P_C(u_n), P_C(p)) \\
&\leq \rho(u_n, p) \\
&\leq H(Ty_n, Tp) \\
&\leq \rho(y_n, p)
\end{aligned}
$$

sağlandığından dolayı $\rho(x_{n+1}, p) \leq \rho(y_n, p) \leq \rho(z_n, p) \leq \rho(x_n, p)$ edilir ve bu ise $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, p) = \lim_{n\to\infty} \rho(z_n, p)$ limitinin var olduğu anlamına gelir. By CN* eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
\rho^2(z_n, p) &= \rho^2(P_C((1-\beta_n)x_n \oplus \beta_n w_n), p) \\
&= \rho^2(P_C((1-\beta_n)x_n \oplus \beta_n w_n),\ P_C(p)) \\
&\leq \rho^2((1-\beta_n)x_n \oplus \beta_n w_n, p) \\
&\leq (1-\beta_n)\rho^2(x_n, p) + \beta_n \rho^2(w_n, p) - \frac{R}{2}(1-\beta_n)\beta_n \rho^2(x_n, w_n) \\
&\leq (1-\beta_n)\rho^2(x_n, p) + \beta_n \rho^2(w_n, Tp) - \frac{R}{2}(1-\beta_n)\beta_n \rho^2(x_n, Tx_n) \\
&\leq (1-\beta_n)\rho^2(x_n, p) + \beta_n H^2(Tx_n, Tp) - \frac{R}{2}(1-\beta_n)\beta_n \rho^2(x_n, Tx_n) \\
&\leq (1-\beta_n)\rho^2(x_n, p) + \beta_n \rho^2(x_n, p) - \frac{R}{2}(1-\beta_n)\beta_n \rho^2(x_n, Tx_n) \\
&\leq \rho^2(x_n, p) - \frac{R}{2}(1-\beta_n)\beta_n \rho^2(x_n, Tx_n)
\end{aligned}
$$

elde edilir ve bu ise

$$\frac{R}{2}(1-\beta_n)\beta_n\rho^2(x_n, Tx_n) \leq \rho^2(x_n, p) - \rho^2(z_n, p)$$

olduğunu gösterir. Ayrıca $\lim_{n\to\infty}[\rho^2(x_n, p) - \rho^2(x_n, p)] = 0$ ve $\liminf_{n\to\infty}(1-\beta_n)\beta_n > 0$ olduğundan dolayı $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n, Tx_n) = 0$ elde edilir

Teorem 3.30 (X,ρ), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kompakt ve konveks alt kümesi, $T : C \to CC(X)$ bir (a_1, a_2, b_1, b_2) −küme değerli II. tip hibrid dönüşüm, her $x \in C$ için $a_1(x) \geq 1$, $a_2(x) \geq 0$ veya $a_1(x) \geq 0$, $a_2(x) \leq 0$, $F(T) \neq \emptyset$ ve her $p \in F(T)$ için $Tp = \{p\}$ olsun. Bu durumda $\liminf_{n\to\infty}(1-\beta_n)\beta_n > 0$ olmak üzere Tanım 2.61 ile verilen $\{x_n\} \subset C$ dizisi $F(T)$ içindeki bir noktaya $\Delta -$ yakınsaktır.

İspat: Teorem 3.29 ve Önerme 3.27'den istenen elde edilir. $\{x_n\}$ dizisi $F(T)$ içindeki bir noktaya $\Delta -$ yakınsaktır.

Teorem 3.31 (X,ρ), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $T : C \to CC(X)$ bir hemikompakt ve (a_1, a_2, b_1, b_2) −küme değerli II. tip hibrid dönüşüm, her $x \in C$ için $a_1(x) \geq 1$, $a_2(x) \geq 0$ veya $a_1(x) \geq 0$, $a_2(x) \leq 0$, $F(T) \neq \emptyset$ ve her $p \in F(T)$ için $Tp = \{p\}$ olsun. Bu durumda $\liminf_{n\to\infty}(1-\beta_n)\beta_n > 0$ olmak üzere Tanım 2.61 ile verilen $\{x_n\} \subset C$ dizisi $F(T)$ içindeki bir noktaya $\Delta -$ yakınsaktır.

İspat: Teorem 3.29 ve Önerme 3.28'den istenen elde edilir. $\{x_n\}$ dizisi $F(T)$ içindeki bir noktaya $\Delta -$ yakınsaktır.

Teorem 3.32 (X,ρ), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kompakt ve konveks alt kümesi, $T : C \to CC(X)$ bir (a_1, a_2, b_1, b_2) −küme değerli II. tip hibrid dönüşüm, her $x \in C$ için $a_1(x) \geq 1$, $a_2(x) \geq 0$ veya $a_1(x) \geq 0$, $a_2(x) \leq 0$, $F(T) \neq \emptyset$ ve her $p \in F(T)$ için $Tp = \{p\}$ olsun. Bu durumda $\liminf_{n\to\infty}(1-\beta_n)\beta_n > 0$ olmak üzere Tanım 2.61 ile verilen $\{x_n\} \subset C$ dizisi $F(T)$ içindeki bir noktaya kuvvetli yakınsaktır.

İspat: Teorem 3.29'den her $p \in F(T)$ için $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, p)$ mevcuttur ve $\lim_{n\to\infty}\rho(Tx_n, x_n) = 0$ dir. Lemma 2.53'den her $n \in \mathbb{N}$ için $y_n \in Tx_n$ ve $\rho(x_n, y_n) = \rho(x_n, Tx_n)$ olacak biçimde $\{y_n\}$ dizisi vardır ve $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$ sağlanır. C kompakt alt küme olduğundan, $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi $\{x_{n_i}\}$, $\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = z \in C$ olacak biçimde bulunabilir. Ayrıca $\rho(y_{n_i}, z) \leq \rho(y_{n_i}, x_{n_i}) + \rho(x_{n_i}, z)$

olup i üzerinden limit alındığında

$\lim_{i\to\infty} \rho(y_{n_i}, \mathrm{z}) = \lim_{i\to\infty} \rho(x_{n_i}, z) = 0$ olduğundan ve her $u \in Tz$ ve $n_i \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} a_1(z)\rho^2(Tz, y_{n_i}) + a_2(z)\rho^2(Tz, x_{n_i}) &\leq a_1(z)H^2(Tz, Tx_{n_i}) + a_2(z)\rho^2(Tz, x_{n_i}) \\ &\leq b_1(z)\rho^2(z, Tx_{n_i}) + b_2(z)\rho^2(z, x_{n_i}) \\ &\leq b_1(z)\rho^2(z, y_{n_i}) + b_2(z)\rho^2(z, x_{n_i}) \end{aligned}$$

Sağlandığından dolayı i üzerinden limit alınırsa metriğin sürekliliğinden

$$[a_1(z) + a_2(z)]\rho^2(z, Tz) \leq [b_1(z) + b_2(z)]\rho^2(z, z)] = 0$$

elde edilir. Dolayısı ile $\rho^2(Tz, z) \leq 0$, yani $z \in Tz$ bulunur. Bu durumda $z \in F(T)$ olup $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n,\mathrm{z})$ mevcut olduğundan, $\{\rho(x_{n_i}, z)\}$ dizisi $\{\rho(x_n, z)\}$ dizisinin alt dizisi olduğundan ve limit tekliğinden dolayı $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n,\mathrm{z}) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_{n_i}, z) = 0$ bulunur

Teorem 3.33 (X, ρ), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $T : C \to CC(X)$ bir hemikompakt ve (a_1, a_2, b_1, b_2) −küme değerli II. tip hibrid dönüşüm, her $x \in C$ için $a_1(x) \geq 1$, $a_2(x) \geq 0$ veya $a_1(x) \geq 0$, $a_2(x) \leq 0$, $F(T) \neq \emptyset$ ve her $p \in F(T)$ için $Tp = \{p\}$ olsun. Bu durumda $\liminf_{n\to\infty} (1 - \beta_n)\beta_n > 0$ olmak üzere Tanım 2.61 ile verilen $\{x_n\} \subset C$ dizisi $F(T)$ içindeki bir noktaya kuvvetli yakınsaktır.

İspat: Teorem 3.29'den her $p \in F(T)$ için $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, p)$ mevcuttur ve $\lim_{n\to\infty}\rho(Tx_n, x_n) = 0$ dir. Lemma 2.53'den her $n \in \mathbb{N}$ için $y_n \in Tx_n$ ve $\rho(x_n, y_n) = \rho(x_n, Tx_n)$ olacak biçimde $\{y_n\}$ dizisi vardır ve $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$ sağlanır. T hemikompakt olduğundan, $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi $\{x_{n_i}\}$, $\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = z \in C$ olacak biçimde bulunabilir. İspatın geri kalanı Teorem 3.32'in ispatı ile aynıdır.

Örnek 3.34 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi ve $T : C \to CC(X)$ bir dönüşüm olsun. Eğer T nonexpansive ise, Tanım 3.17 ile verilen dönüşümde $a_1(x) = b_2(x) = 1$ ve $a_2(x) = b_1(x) = 0$ için T, (a_1, a_2, b_1, b_2) −küme değerli II. tip hibrid dönüşümdür. Eğer T hibrid ise, Tanım 3.17 ile verilen dönüşümde $a_2(x) = -\frac{1}{3}$, $b_1(x) = b_2(x) = \frac{1}{3}$ ve $a_1(x) = 1$ için T (a_1, a_2, b_1, b_2) −küme değerli II. tip hibrid dönüşümdür. Eğer T nonspreading ise, Tanım 3.17 ile verilen dönüşümde $a_2(x) = -\frac{1}{2}$, $b_1(x) = \frac{1}{2}, b_2(x) = 0$ ve $a_1(x) = 1$ için T (a_1, a_2, b_1, b_2) −küme değerli II. tip hibrid dönüşüm olduğundan her nonexpansive, hibrid ve nonspreading dönüşüm bir (a_1, a_2, b_1, b_2) −küme değerli II. tip hibrid dönüşüm örneğidir.

3.2 Küme Değerli Genelleştirilmiş Hibrid Dönüşümlerin Sabit Noktalarının Varlıkları ve Yakınsaklıkları

Bu kısımda Hausdorff metriğini içermeyen ve içeren küme değerli hibrid dönüşümlerin tanımları verilerek varlık ve yakınsaklık sonuçları elde edilecektir. Hausdorff metriğini içermeyen dönüşümler, küme değerli nonexpansive dönüşümlerin direk bir genellemesi olmamakla birlikte yine sadece metriği içerdiğinden dolayı tanımı daha kolay test edilebilirdir. Hausdorff metriğini içeren dönüşümler ise literatürde var olan küme değerli nonexpansive, nonspreading dönüşümlerin ve genelleştirilmiş hibrid dönüşümlerin en genelidir. Ek olarak tanımlanacak olan her iki dönüşüm türü için yakınsaklık sonuçları ilk defa elde edilmiştir.

Tanım 3.35 (X,ρ) bir metrik uzay, $T: X \to 2^X$ bir dönüşüm ve $a_1, a_2, a_3, k_1, k_2 : X \to [0,1]$ dönüşümleri her $x \in X$ için $a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) \leq 1$, $2k_1(x) < 1 - a_2(x)$ ve $2k_2(x) < 1 - a_3(x)$ koşullarını sağlayan dönüşümler olsun. Eğer T dönüşümü her $x, y \in X$ için ve her $u \in Tx, v \in Ty$ için

$$\begin{aligned}\rho^2(u,v) \leq a_1(x)\rho^2(x,y) + a_2(x)\rho^2(u,y) + a_3(x)\rho^2(x,v) \\ +k_1(x)\rho^2(Tx,x) + k_2(x)\rho^2(Ty,y)\end{aligned} \tag{3.10}$$

koşulunu sağlıyorsa T'ye, I. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm denir.

Lemma 3.36 (X, ρ), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı ve C, X'in boştan farklı alt kümesi olsun. Eğer $T : C \to 2^X$ bir I. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm ve $F(T) \neq \emptyset$ ise $F(T)$ kapalı ve her $p \in F(T)$ için $Tp = \{p\}$ dir.

İspat: $\{x_n\}$, $F(T)$ de bir dizi ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in C$ olsun. Bu durumda her $u \in Tx$ için,

$$\rho^2(u, x_n) \leq a_1(x)\rho^2(x, x_n) + a_2(x)\rho^2(u, x_n) + a_3(x)\rho^2(x, x_n)$$
$$+k_1(x)\rho^2(Tx, x) + k_2(x)\rho^2(Tx_n, x_n)$$

elde edilir ve buradan

$$\rho^2(u, x_n) \leq \rho^2(x, x_n) + \frac{k_1(x)}{1 - a_2(x)}\rho^2(u, x)$$

elde edilir. $n \to \infty$ için limit alındığında

$$\left(1 - \frac{k_1(x)}{1 - a_2(x)}\right)\rho^2(u, x) \leq 0$$

bulunur, u keyfi olduğundan dolayı $u = x \in Tx = \{x\}$ sağlanır.

Teorem 3.37 (X, ρ), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı ve C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi olsun. Eğer $T : C \to 2^C$ bir I. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm ve her $x \in C$ için $k_1(x) = k_2(x) = 0$ ise $F(T) \neq \emptyset$ dir.

İspat: Keyfi bir $x_0 \in C$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\{x_n\}$ dizisi $x_n \in Tx_{n-1}$ seçimi ile elde edilsin. Hipotez gereği, Önerme 2.46'den, $A_C\{x_n\} = \{z\}$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. Lemma 2.47 gereğince $z \in C$ dir. T dönüşümünün özelliğinden her $n \in \mathbb{N}$ için ve her $u \in Tz$ için

$$\rho^2(x_n, u) \leq a_1(z)\rho^2(x_{n-1}, z) + a_2(z)\rho^2(x_{n-1}, u) + a_3(z)\rho^2(x_n, z)$$

sağlanır. Eşitsizliğin her iki tarafında n üzerinden limit supremum alındığında

$$\limsup_{n\to\infty} \rho^2(x_n, u) \leq (a_1(z) + a_3(z))\limsup_{n\to\infty} \rho^2(x_n, z)$$
$$+a_2(z)\limsup_{n\to\infty} \rho^2(x_{n-1}, u)$$

olup

$$\limsup_{n\to\infty} \rho^2(u, x_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \rho^2(z, x_n)$$

elde edilir. Sonuç olarak asimptotik merkezin tekliğinden dolayı ve u nun keyfi olmasından dolayı $z = u \in Tz = \{z\}$ dir.

Sonuç 3.38 (X, ρ), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı ve C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi olsun. Eğer $T : C \to C$ bir genelleştirilmiş hibrid dönüşüm ve her $x \in C$ için $k_1(x) = k_2(x) = 0$ ise $F(T) \neq \emptyset$ dir.

İspat: Her $x \in C$ için $F = \{T(x)\}$ seçilirse $F: C \to 2^C$ dönüşümü, bir küme değerli I. tip genelleştirilmiş dönüşüm olacağından, Teorem 3.37'den $F(F) = F(T) \neq \emptyset$ elde edilir.

Sonuç 3.39 (X, ρ), bir tam $CAT(0)$ uzayı ve C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi olsun. Eğer $T : C \to 2^C$ bir I. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm ve her $x \in C$ için $k_1(x) = k_2(x) = 0$ ise $F(T) \neq \emptyset$ olması için gerek ve yeter koşul her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in Tx_{n-1}$ ile tanımlı $\{x_n\}$ dizisi sınırlı olacak şekilde bir $x_0 \in C$ başlangıç noktasının var olmasıdır.

Sonuç 3.40 (X, ρ), bir tam $CAT(0)$ uzayı ve C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi olsun. Eğer $T : C \to C$ bir genelleştirilmiş hibrid dönüşüm ve her $x \in C$ için $k_1(x) = k_2(x) = 0$ ise $F(T) \neq \emptyset$ olması için gerek ve yeter koşul her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in Tx_{n-1}$ ile tanımlı $\{x_n\}$ dizisi sınırlı olacak şekilde bir $x_0 \in C$ başlangıç noktasının var olmasıdır.

Teorem 3.41 (X, ρ), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi ve $T : C \to CC(X)$ dönüşümü, $R = (\pi - 2\varepsilon)\tan(\varepsilon)$ olmak üzere her $x \in C$ için $\frac{2k_1(x)}{1-a_2(x)} < \frac{R}{2}$ koşulunu sağlayan bir I. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm olsun. Eğer C kümesinde $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ olacak şekildeki bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $z \in C$ ve $z \in T(z)$ dir.

İspat: $\{x_n\}$ dizisi, C'de $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ olacak biçimde bir dizi olsun. Lemma 2.47'den $z \in C$ dir. Önerme 2.53 Her $n \in \mathbb{N}$ için $y_n \in Tx_n$ ve $\rho(x_n, y_n) = \rho(x_n, Tx_n)$, olacak şekilde bir $\{y_n\}$ dizisi bulunabilir. $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ olduğundan

$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$ dır. T, I. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm olduğundan, her $u \in Tz$ için,

$$\begin{aligned}\rho^2(y_n, u) &\le a_1(z)\rho^2(x_n, z) + a_2(z)\rho^2(u, x_n) + a_3(z)\rho^2(y_n, z) \\ &\quad + k_1(z)\rho^2(Tx_n, x_n) + k_2(x)\rho^2(Tz, z) \\ &\le a_1(z)\rho^2(x_n, z) + a_2(z)[\rho(u, y_n) + \rho(y_n, x_n)]^2 \\ &\quad + a_3(z)[\rho(y_n, x_n) + \rho(x_n, z)]^2 \\ &\quad + k_1(z)\rho^2(y_n, x_n) + k_2(x)\rho^2(u, z)\end{aligned}$$

olduğundan limit supremuma geçildiğinde

$$\limsup_{n\to\infty} \rho^2(y_n, u) \le \limsup_{n\to\infty} \rho^2(x_n, z) + \frac{k_2(x)}{1 - a_2(x)}\rho^2(z, u)$$

elde edilir ve bu kullanılarak

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \rho^2(x_n, u) &\le \limsup_{n\to\infty} [\rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, u)]^2 \\ &= \limsup_{n\to\infty} \rho^2(y_n, u) \\ &\le \limsup_{n\to\infty} \rho^2(x_n, z) + \frac{k_1(x)}{1 - a_2(x)}\rho^2(z, u)\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca CN* eşitsizliğinden

$$\rho^2\left(x_n, \frac{1}{2}z \oplus \frac{1}{2}u\right) \le \frac{1}{2}\rho^2(x_n, z) + \frac{1}{2}\rho^2(x_n, u) - \frac{R}{8}\rho^2(z, u)$$

sağlandığından dolayı

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \rho^2\left(x_n, \frac{1}{2}z \oplus \frac{1}{2}u\right) &\le \frac{1}{2}\limsup_{n\to\infty} \rho^2(x_n, z) + \frac{1}{2}\limsup_{n\to\infty} \rho^2(x_n, u) \\ &\quad - \frac{R}{8}\rho^2(z, u) \\ &\le \frac{1}{2}\limsup_{n\to\infty} \rho^2(x_n, z) + \frac{1}{2}\limsup_{n\to\infty} \rho^2(x_n, z) \\ &\quad + \frac{k_1(x)}{2\big(1 - a_2(x)\big)}\rho^2(z, u) - \frac{R}{8}\rho^2(z, u) \\ &= \frac{1}{2}\limsup_{n\to\infty} \rho^2(x_n, z) + \frac{1}{2}\limsup_{n\to\infty} \rho^2(x_n, z) \\ &\quad + \left(\frac{k_1(x)}{2\big(1 - a_2(x)\big)} - \frac{R}{8}\right)\rho^2(z, u)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\limsup_{n\to\infty} \rho^2(x_n, z) + \frac{1}{2}\limsup_{n\to\infty} \rho^2(x_n, z)$$
$$+ \left(\frac{k_1(x)}{2\big(1 - a_2(x)\big)} - \frac{R}{8}\right)\rho^2(z, u)$$

bulunur. Buradan ise

$$\left(\frac{R}{8} - \frac{k_1(x)}{2\big(1 - a_2(x)\big)}\right)\rho^2(z, \mathrm{u}) \le \limsup_{n\to\infty} \rho^2(x_n, z) - \limsup_{n\to\infty} \rho^2\left(x_n, \frac{1}{2}z \oplus \frac{1}{2}u\right) \le 0$$

elde edilir ki hipotezden dolayı $z = u \in Tz = \{z\}$ bulunur.

Sonuç 3.42 (X, ρ), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ sabiti için $diam(X) \le \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi ve $T : C \to X$ dönüşümü, $R = (\pi - 2\varepsilon)\tan(\varepsilon)$ olmak üzere her $x \in C$ için $\frac{2k_1(x)}{1-a_2(x)} < \frac{R}{2}$ koşulunu sağlayan bir genelleştirilmiş hibrid dönüşüm olsun. Eğer C kümesinde $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ olacak şekildeki bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $z \in C$ ve $z \in T(z)$ dir.

Sonuç 3.43 (X, ρ), bir tam $CAT(0)$ uzayı, C, X'in boştan farklı kapalı konveks alt kümesi ve $T : C \to CC(X)$ bir I. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm olsun. Eğer C kümesinde $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ olacak şekildeki sınırlı bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $z \in C$ ve $z \in T(z)$ dir.

Sonuç 3.44 (X, ρ), bir tam $CAT(0)$ uzayı, C, X'in boştan farklı kapalı konveks alt kümesi ve $T : C \to X$ bir genelleştirilmiş hibrid dönüşüm olsun. Eğer C kümesinde $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ olacak şekildeki sınırlı bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $z \in C$ ve $z \in T(z)$ dir.

Önerme 3.45 (X, ρ), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ sabiti için $diam(X) \le \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $T : C \to CC(X)$, $R = (\pi - 2\varepsilon)\tan(\varepsilon)$ olmak üzere her $x \in C$ için $\frac{2k_1(x)}{1-a_2(x)} < \frac{R}{2}$ koşulunu sağlayan bir I. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. Eğer C kümesinde $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ ve her $p \in F(T)$ için $\{\rho(x_n, p)\}$ olacak şekildeki bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $\omega_w(x_n) \subseteq F(T)$ dir ve $\omega_w(x_n)$ yanlızca tek nokta içerir.

İspat: : Önerme 3.11'in ispatına benzer olarak, Lemma 2.47, Teorem 3.41 ve Lemma 2.48'den istenen elde edilir.

Teorem 3.46 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi ve $T: C \to CC(X)$, $R = (\pi - 2\varepsilon)\tan(\varepsilon)$ olmak üzere her $x \in C$ için $\frac{2k_1(x)}{1-a_2(x)} < \frac{R}{2}$ koşulunu sağlayan bir I. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm olsun. Bu durumda $\liminf_{n\to\infty} \beta_n \left[(1-\beta_n)\frac{R}{2} - \frac{2k_2(x)}{1-a_3(x)}\right] > 0$ olmak üzere eğer $\{x_n\} \subset C$, Tanım 2.64 ile verilen dizi ise her $p \in F(T)$ için $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, p)$ vardır ve $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ dir.

İspat: $p \in F(T)$ olsun. Bu durumda $x \in C,\ u \in Tx$ için

$$\rho^2(u,p) \leq \rho^2(x,p) + \frac{k_2(p)}{1-a_3(p)}\rho^2(u,x)$$

sağlanır. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\rho^2(y_n,p) &= \rho^2(P_C((1-\beta_n)x_n \oplus \beta_n v_n), P_C(p)) \\
&\leq \rho^2((1-\beta_n)x_n \oplus \beta_n v_n, p) \\
&\leq (1-\beta_n)\rho^2(x_n,p) + \beta_n\rho^2(v_n,p) \\
&\qquad -\frac{R}{2}(1-\beta_n)\beta_n\rho^2(x_n,v_n) \\
&\leq (1-\beta_n)\rho^2(x_n,p) + \beta_n\left(\rho^2(x_n,p) + \frac{k_2(p)}{1-a_3(p)}\rho^2(v_n,x_n)\right) \\
&\qquad -\frac{R}{2}(1-\beta_n)\beta_n\rho^2(x_n,v_n) \\
&\leq (1-\beta_n)\rho^2(x_n,p) + \beta_n\left(\rho^2(x_n,p) + \frac{k_2(p)}{1-a_3(p)}\rho^2(v_n,x_n)\right) \\
&\qquad -\frac{R}{2}(1-\beta_n)\beta_n\rho^2(x_n,v_n) \\
&\leq \rho^2(x_n,p) + \beta_n\left(\frac{k_2(p)}{1-a_3(p)} - \frac{R}{2}(1-\beta_n)\right)\rho^2(v_n,x_n)) \\
&\leq \rho^2(x_n,p)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\rho^2(x_{n+1},p) &= \rho^2(P_C((1-\alpha_n)y_n \oplus \alpha_n u_n), P_C(p) \\
&\leq \rho^2((1-\alpha_n)y_n \oplus \alpha_n u_n), p) \\
&\leq (1-\alpha_n)\rho^2(y_n,p) + \alpha_n\rho^2(u_n,p)
\end{aligned}$$

$$-\frac{R}{2}(1-\alpha_n)\alpha_n\rho^2(y_n,u_n)$$

$$\leq (1-\alpha_n)\rho^2(y_n,p)+\alpha_n\left(\rho^2(y_n,p)+\frac{k_2(p)}{1-a_3(p)}\rho^2(u_n,y_n)\right)$$

$$-\frac{R}{2}(1-\alpha_n)\alpha_n\rho^2(y_n,u_n)$$

$$\leq (1-\alpha_n)\rho^2(y_n,p)+\alpha_n\left(\rho^2(y_n,p)+\frac{k_2(p)}{1-a_3(p)}\rho^2(u_n,y_n)\right)$$

$$-\frac{R}{2}(1-\alpha_n)\alpha_n\rho^2(y_n,u_n)$$

$$\leq (1-\alpha_n)\rho^2(y_n,p)+\alpha_n(\rho^2(y_n,p))+\alpha_n\left(\frac{k_2(p)}{1-a_3(p)}\right)\rho^2(u_n,y_n)$$

$$-\frac{R}{2}\alpha_n(1-\alpha_n)\rho^2(u_n,y_n))$$

$$\leq (1-\alpha_n)\rho^2(y_n,p)+\alpha_n(\rho^2(y_n,p))+\alpha_n\left(\frac{k_2(p)}{1-a_3(p)}\right)\rho^2(u_n,y_n)$$

$$-\frac{R}{2}\alpha_n(1-\alpha_n)\rho^2(u_n,y_n))$$

$$\leq \rho^2(y_n,p)+\alpha_n\left(\frac{k_2(p)}{1-a_3(p)}-\frac{R}{2}(1-\alpha_n)\right)\rho^2(u_n,y_n))$$

$$\leq \rho^2(y_n,p)$$

$$\leq \rho^2(x_n,p)$$

elde edilir ve buradan da $\rho^2(x_{n+1},p)\leq\rho^2(x_n,p)$ sağlanır. Dolayısı ile $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,p)$ vardır. Ayrıca $\rho(x_{n+1},p)\leq\rho(y_n,p)\leq\rho(x_n,p)$ sağlandığından $\lim_{n\to\infty}\rho(y_n,p)$ limitide vardır ve $\lim_{n\to\infty}[\rho(x_n,p)-\rho(y_n,p)]=0$ elde edilir. Varsayımdan $\liminf_{n\to\infty}\beta_n\left[(1-\beta_n)\frac{R}{2}-\frac{2k_2(x)}{1-a_3(x)}\right]>0$ olduğundan ve $\beta_n\left[(1-\beta_n)\frac{R}{2}-\frac{k_2(p)}{1-a_3(p)}\right]\rho^2(v_n,x_n))\leq\rho^2(x_n,p)-\rho^2(y_n,p)$ sağlandığından dolayı $\lim_{n\to\infty}\rho^2(v_n,x_n)=0$ elde edilir bu ise $\lim_{n\to\infty}\rho(Tx_n,x_n)=0$ olduğunu kanıtlar.

Teorem 3.47 (X,ρ), $\varepsilon\in(0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X)\leq\frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi ve $T:C\to CC(X)$, $R=(\pi-2\varepsilon)\tan(\varepsilon)$ olmak üzere her $x\in C$ için $\frac{2k_1(x)}{1-a_2(x)}<\frac{R}{2}$ koşulunu sağlayan bir I. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm olsun. Bu durumda $\liminf_{n\to\infty}\beta_n\left[(1-\right.$

$\beta_n)\frac{R}{2} - \frac{2k_2(x)}{1-a_3(x)}\Big] > 0$ olmak üzere Tanım 2.64 ile verilen $\{x_n\} \subset C$ dizisi $F(T)$ içindeki bir noktaya $\Delta -$ yakınsaktır.

İspat: Teorem 3.46 ve Önerme 3.45 istenen elde edilir.

Teorem 3.48 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kompakt ve konveks alt kümesi ve $T : C \to CC(X)$, $R = (\pi - 2\varepsilon)\tan(\varepsilon)$ olmak üzere her $x \in C$ için $\frac{2k_1(x)}{1-a_2(x)} < \frac{R}{2}$ koşulunu sağlayan bir I. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm olsun. Bu durumda $\liminf\limits_{n\to\infty} \beta_n \Big[(1 - \beta_n)\frac{R}{2} - \frac{2k_2(x)}{1-a_3(x)}\Big] > 0$ olmak üzere Tanım 2.64 ile verilen $\{x_n\} \subset C$ dizisi $F(T)$ içindeki bir noktaya kuvvetli yakınsaktır.

İspat: Teorem 3.46'den her $p \in F(T)$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, p)$ mevcuttur ve $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(Tx_n, x_n) = 0$ dir. Lemma 2.53'den her n için $y_n \in Tx_n$ ve $\rho(x_n, y_n) = \rho(x_n, Tx_n)$ olacak biçimde $\{y_n\}$ dizisi vardır ve $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$ sağlanır. C kompakt alt küme olduğundan, $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi $\{x_{n_i}\}$, $\lim\limits_{i\to\infty} x_{n_i} = z \in C$ olacak biçimde bulunabilir. Bu durumda

$$\rho(y_{n_i}, z) \leq \rho(y_{n_i}, x_{n_i}) + \rho(x_{n_i}, z)$$

olup i üzerinden limit alındığında

$$\lim_{i\to\infty} y_{n_i} = z$$

elde edilir. Her $u \in Tz$ ve $n_i \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\rho^2(u, y_{n_i}) \leq{} & a_1(z)\rho^2(z, x_{n_i}) + a_2(z)\rho^2(u, x_{n_i}) + a_3(z)\rho^2(z, y_{n_i}) \\ & + k_1(z)\rho^2(u, z) + k_2(z)\rho^2(y_{n_i}, x_{n_i})\end{aligned}$$

sağlandığından i üzerinden limit alınırsa ρ metriğinin sürekliliğinden

$$\rho(u,z)^2 \leq [a_2(z) + k_1(z)]\rho(u,z)^2$$

elde edilir. Dolayısı ile $\rho^2(u,z) \leq 0$, yani $u = z \in Tz = \{z\}$ bulunur.

Bu durumda $z \in F(T)$ olup $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, z)$ mevcut olduğundan, $\{\rho(x_{n_i}, z)\}$ dizisi

$\{\rho(x_n, z)\}$ dizisinin alt dizisi olduğundan ve limit tekliğinden dolayı $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, z) = \lim_{n\to\infty} \rho\left(x_{n_i}, z\right) = 0$ bulunur.

Teorem 3.49 (X,ρ), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi ve $T: C \to CC(X)$, $R = (\pi - 2\varepsilon)\tan(\varepsilon)$ olmak üzere her $x \in C$ için $\frac{2k_1(x)}{1-a_2(x)} < \frac{R}{2}$ koşulunu sağlayan bir hemikompakt ve I. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm olsun. $\liminf_{n\to\infty} \beta_n \left[(1-\beta_n)\frac{R}{2} - \frac{2k_2(x)}{1-a_3(x)}\right] > 0$ olmak üzere Tanım 2.64 ile verilen $\{x_n\} \subset C$ dizisi $F(T)$ içindeki bir noktaya kuvvetli yakınsaktır.

İspat: Teorem 3.46'den her $p \in F(T)$ için $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, p)$ mevcuttur ve $\lim_{n\to\infty} \rho(Tx_n, x_n) = 0$ dir. Lemma 2.53'den her n için $y_n \in Tx_n$ ve $\rho(x_n, y_n) = \rho(x_n, Tx_n)$ olacak biçimde $\{y_n\}$ dizisi vardır ve $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$ sağlanır. T hemikompakt olduğundan, $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi $\{x_{n_i}\}$, $\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = z \in C$ olacak biçimde bulunabilir. İspatın geri kalanı Teorem 3.48'in ispatı ile aynıdır.

Örnek 3.50 $X = [1,5]$, $\rho(x,y) = |x-y|$ ve $T: X \to C(X)$,

$$Tx = \begin{cases} \left[\frac{4x+1}{x}, 5\right] & x \in [1,3], \\ \{5\} & x \in (4,5] \end{cases}$$

olarak verilsin. Bu durumda T dönüşümü, her $x \in X$ için $a_1(x) = 0, a_2(x) = \frac{x}{x+3}, a_3(x) = \frac{3}{x+3}$ olmak üzere, T nonexpansive olmayan bir I. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşümdür. Gerçekten de;

Eğer $x, y \in [1,3]$ ise $u \in Tx$ ve $v \in Ty$ için $\rho^2(u,v) \leq 1, 1 \leq \rho^2(u,y), 1 \leq \rho^2(x,v)$ sağlandığından

$$\begin{aligned} \rho^2(u,v) &\leq 1 \\ &= \left(\frac{x}{x+3}\right) + \left(\frac{3}{x+3}\right) \\ &\leq \frac{x}{x+3}\rho^2(x,v) + \frac{3}{x+3}\rho^2(u,y) \end{aligned}$$

olur. Eğer $x \in [1,3], y \in (3,5]$ ise $u \in Tx$ ve $v \in Ty$ için $\rho^2(u,v) \leq 1, 0 < \rho^2(u,y)$, $4 < \rho^2(x,v)$ sağlandığından

$$
\begin{aligned}
\rho^2(u,v) &\leq 1 \\
&\leq \frac{4x}{x+3} + \frac{3}{x+3}\rho^2(u,\mathrm{y}) \\
&\leq \frac{x}{x+1}\rho^2(x,v) + \frac{x}{x+1}\rho^2(u,y)
\end{aligned}
$$

olur. Eğer $y \in [1,3], x \in (3,5]$ ise $u \in Tx$ ve $v \in Ty$ için $\rho^2(u,v) \leq 1, 4 < \rho^2(u,y)$, $0 < \rho^2(x,v)$ sağlandığından

$$
\begin{aligned}
\rho^2(u,v) &\leq 1 \\
&\leq \frac{x}{x+3}\rho^2(x,v) + \frac{3}{x+3}4 \\
&\leq \frac{x}{x+3}\rho^2(x,v) + \frac{x}{x+3}\rho^2(u,y)
\end{aligned}
$$

olur. Eğer $x, y \in (3,5]$ ise açıktır.

Dolayısı ile her durumda eşitsizlik sağlandığından bir I. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşümdür ve $5 \in F(T)$ ve $T(5) = \{5\}$ dir. Fakat $x = 3, y = 3.1$ için $T(3) = [4.\overline{3}, 5]$, $T(3.1) = \{5\}$ olduğundan $H\big(T(3),\ T(3.1)\big) = \max\{|5-5|, |4.\overline{3}-5|\} = 0.\overline{7} > \rho(3{,}3.1) = 0.1$ olduğundan T nonexpansive değildir.

Tanım 3.51 (X,ρ) bir metrik uzay, $T: X \to 2^X$ bir dönüşüm ve $a_1, a_2, a_3, k_1, k_2 : X \to [0,1]$ dönüşümleri her $x \in X$ için $a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) \leq 1$, $2k_1(x) < 1 - a_2(x)$ ve $2k_2(x) < 1 - a_3(x)$ koşullarını sağlayan dönüşümler olsun. Eğer T dönüşümü her $x, y \in X$ için

$$
\begin{aligned}
H^2(Tx,Ty) \leq\ & a_1(x)\rho^2(x,y) + a_2(x)\rho^2(Tx,y) + a_3(x)\rho^2(x,Ty) \\
& + k_1(x)\rho^2(Tx,x) + k_2(x)\rho^2(Ty,y)
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

koşulunu sağlıyorsa T'ye II. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm denir.

Lemma 3.52 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı ve C, X'in boştan farklı alt kümesi olsun. Eğer $T : C \to C(X)$ bir II. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm ve $F(T) \neq \emptyset$ ise $F(T)$ kapalıdır.

İspat: $\{x_n\}$, $F(T)$ de bir dizi ve $x_n \to x \in C$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\rho^2(Tx,x_n) &\le H^2(Tx,Tx_n)\\ &\le a_1(x)\rho^2(x,x_n)+a_2(x)\rho^2(Tx,x_n)+a_3(x)\rho^2(x,Tx_n)\\ &\qquad +k_1(x)\rho^2(Tx,x)+k_2(x)\rho^2(Tx_n,x_n)\\ &\le a_1(x)\rho^2(x,x_n)+a_2(x)\rho^2(Tx,x_n)+a_3(x)\rho^2(x,x_n)\\ &\qquad +k_1(x)\rho^2(Tx,x)\end{aligned}$$

elde edilir ve buradan da

$$\rho^2(Tx,x_n)\le \rho^2(x,x_n)+\frac{k_1(x)}{1-a_2(x)}\rho^2(Tx,x)$$

elde edilir. $n\to\infty$ için limit alındığında

$$\left(1-\frac{k_1(x)}{1-a_2(x)}\right)\rho(Tx,x)\le 0$$

elde edilir, sonuç olarak $x\in Tx$ sağlanır.

Teorem 3.53 (X,ρ), $\varepsilon\in(0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X)\le\frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kompakt ve konveks alt kümesi ve $T:C\to CC(X)$ bir II. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm olsun. Eğer C'de $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,Tx_n)=0$ olacak biçimde bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $F(T)\neq\emptyset$ dir.

İspat: $\{x_n\}$ dizisi, C'de $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,Tx_n)=0$ olacak biçimde bir dizi olsun. C kompakt alt küme olduğundan, $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi $\{x_{n_i}\}$, $\lim_{i\to\infty}x_{n_i}=z\in C$ olacak biçimde bulunabilir. Ayrıca Lemma 2.53'den her $n\in\mathbb{N}$ için $y_n\in Tx_n$ ve $\rho(x_n,y_n)=\rho(x_n,Tx_n)$ olacak biçimde $\{y_n\}$ dizisi vardır. Her $n_i\in\mathbb{N}$ için $\rho(y_{n_i},Tz)\le\rho(y_{n_i},x_{n_i})+\rho(x_{n_i},Tz)$ ve $\rho(x_{n_i},Tz)\le\rho(y_{n_i},x_{n_i})+\rho(y_{n_i},Tz)$ olduğundan $\lim_{i\to\infty}\rho(x_{n_i},Tz)=\lim_{i\to\infty}\rho(y_{n_i},Tz)=\rho(z,Tz)$ elde edilir. T' nin özelliğinden

$$\begin{aligned}\rho^2(Tz,y_{n_i}) &\le H^2(Tz,Tx_{n_i})\\ &\le a_1(z)\rho^2(z,x_{n_i})+a_2(z)\rho^2(Tz,x_{n_i})+a_3(z)\rho^2(z,Tx_{n_i})\\ &\qquad +k_1(z)\rho^2(Tz,z)+k_2(z)\rho^2(Tx_{n_i},x_{n_i})\\ &\le a_1(z)\rho^2(z,x_{n_i})+a_2(z)\rho^2(Tz,x_{n_i})\\ &\qquad +a_3(z)\left[\rho(z,x_{n_i})+\rho(x_{n_i},Tx_{n_i})\right]^2+k_1(z)\rho^2(Tz,z)\\ &\qquad +k_2(z)\rho^2(Tx_{n_i},x_{n_i})\end{aligned}$$

elde edilir ve her iki tarafta i üzerinden limite geçildiğinde

$$\left(1-\frac{k_1(x)}{1-a_2(x)}\right)\rho^2(Tz,z)\leq 0$$

bulunur. Sonuç olarak $z \in Tz$ dir.

Sonuç 3.54 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi ve $T : C \to C$ bir genelleştirilmiş hibrid dönüşüm olsun. Eğer C'de $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,Tx_n)=0$ olacak biçimde bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $F(T)\neq\emptyset$ dir.

İspat: Her $x \in C$ için F dönüşümü, $F=\{T(x)\}$ biçiminde tanımlanırsa $F : C \to C(C)$ şeklinde bir II. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm olacağından, Teorem 3.53'den $F(T)\neq\emptyset$ elde edilir.

Sonuç 3.55 (X,ρ), bir tam $CAT(0)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kompakt ve konveks alt kümesi ve $T : C \to CC(X)$ bir II. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm olsun. Eğer C'de $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,Tx_n)=0$ olacak biçimde bir sınırlı bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $F(T)\neq\emptyset$ dir.

İspat: Önerme 2.37 ve Teorem 3.19 den istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.56 (X,ρ), bir tam $CAT(0)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi ve $T : C \to C$ bir genelleştirilmiş hibrid dönüşüm olsun. Eğer C'de $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,Tx_n)=0$ olacak biçimde sınırlı bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $F(T)\neq\emptyset$ dir.

İspat: Önerme 2.37 ve Sonuç 3.54'dan istenen sonuç elde edilir.

Teorem 3.57 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi ve $T : C \to CC(X)$ bir hemikompakt ve II. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm olsun. Eğer C'de $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,Tx_n)=0$ olacak biçimde bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $F(T)\neq\emptyset$ dir.

İspat: $\{x_n\}$ dizisi, C'de $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,Tx_n)=0$ olacak biçimde bir dizi olsun. T hemikompakt olduğundan, $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi $\{x_{n_i}\}$, $\lim_{i\to\infty}x_{n_i}=z\in C$ olacak biçimde bulunabilir. İspatın geri kalanı Teorem 3.53'ün ispatı ile aynıdır.

Sonuç 3.58 (X,ρ), bir tam $CAT(0)$ uzayı, C, X in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi ve $T : C \to CC(X)$ bir II. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm olsun. Eğer C'de $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ olacak biçimde bir sınırlı bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $F(T) \neq \emptyset$ dir

İspat: Önerme 2.37 ve Teorem 3.57 den istenen sonuç elde edilir.

Teorem 3.59 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kompakt ve konveks alt kümesi ve $T : C \to CC(X)$ bir II. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm olsun. Eğer C kümesinde $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ olacak şekildeki bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $z \in C$ ve $z \in T(z)$ dir.

İspat: $\{x_n\}$ dizisi, C'de $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ olacak biçimde bir dizi olsun. Lemma 2.47'den $z \in C$ dir. C kompakt alt küme olduğundan, $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi $\{x_{n_i}\}$, $\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = u \in C$ olacak biçimde bulunabilir. $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = z$ olduğundan $u = z$ dir. İspatın kalan kısmı Teorem 3.53'ün ispatı ile aynıdır.

Sonuç 3.60 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kompakt ve konveks alt kümesi ve $T : C \to X$ bir genelleştirilmiş hibrid dönüşüm olsun. Eğer C kümesinde $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ olacak şekildeki bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $z \in C$ ve $z \in T(z)$ dir.

Sonuç 3.61 (X,ρ), tam bir $CAT(0)$ uzayı, C, X in boştan farklı, kompakt ve konveks alt kümesi ve $T : C \to CC(X)$ bir II. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm olsun. Eğer C kümesinde $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ olacak şekildeki bir sınırlı bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $z \in C$ ve $z \in T(z)$ dir.

Sonuç 3.62 (X,ρ), tam bir $CAT(0)$ uzayı, C, X in boştan farklı, kompakt ve konveks alt kümesi ve $T : C \to X$ bir genelleştirilmiş dönüşüm olsun. Eğer C kümesinde $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ olacak şekildeki bir sınırlı bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $z \in C$ ve $z \in T(z)$ dir.

Teorem 3.63 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi ve $T : C \to CC(X)$ bir hemikompakt ve II. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm olsun. Eğer C kümesinde $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ olacak şekildeki bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $z \in C$ ve $z \in T(z)$ dir.

İspat: $\{x_n\}$ dizisi, C'de $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ olacak biçimde bir dizi olsun. Lemma 2.47'den $z \in C$ dir. T hemikompakt olduğundan, $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi $\{x_{n_i}\}$, $\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = u \in C$ olacak biçimde bulunabilir. $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = z$ olduğundan $u = z$ dir. İspatın kalan kısmı Teorem 3.53'ün ispatı ile aynıdır.

Sonuç 3.64 (X, ρ), tam bir $CAT(0)$ uzayı, C, X in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi ve $T : C \to CC(X)$ bir hemikompakt ve II. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm olsun. Eğer C kümesinde $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ olacak şekildeki bir sınırlı bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $z \in C$ ve $z \in T(z)$ dir.

Önerme 3.65 (X, ρ), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı ve C, X'in boştan farklı, kompakt ve konveks alt kümesi, $T : C \to CC(X)$ bir II. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. Eğer C kümesinde $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ ve her $p \in F(T)$ için $\{\rho(x_n, p)\}$ olacak şekildeki bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $\omega_w(x_n) \subseteq F(T)$ dir ve $\omega_w(x_n)$ yanlızca tek nokta içerir.

İspat: Önerme 3.11'in ispatına benzer olarak, Lemma 2.47, Teorem 3.59 ve Lemma 2.48 'den istenen elde edilir.

Önerme 3.66 (X, ρ), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $T : C \to CC(X)$ bir hemikompakt ve II. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. Eğer C kümesinde $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ ve her $p \in F(T)$ için $\{\rho(x_n, p)\}$ olacak şekildeki bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $\omega_w(x_n) \subseteq F(T)$ dir ve $\omega_w(x_n)$ yanlızca tek nokta içerir.

İspat: Önerme 3.11'in ispatına benzer olarak, Lemma 2.47, Teorem 3.63 ve Lemma 2.48 'den istenen elde edilir.

Teorem 3.67 (X, ρ), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $T : C \to CC(X)$ bir II. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm, $F(T) \neq \emptyset$ ve her $p \in F(T)$ için $Tp = \{p\}$ olsun. $R = (\pi - 2\varepsilon)\tan(\varepsilon)$ için $\liminf_{n\to\infty} \beta_n \left[(1-\beta_n)\frac{R}{2} - \frac{k_2(x)}{1-a_3(x)}\right] > 0$ olmak üzere eğer $\{x_n\}$ dizisi, Tanım 2.64 ile verilen dizi ise her $p \in F(T)$ için $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, p)$ vardır ve $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, Tx_n) = 0$ dır.

İspat: $p \in F(T)$ olsun. Bu durumda her $x \in C$

$$H^2(Tx, Tp) \leq \rho^2(x,p) + \frac{k_2(p)}{1-a_3(p)}\rho^2(Tx, x)$$

sağlanır. Bu kullanılarak

$$\begin{aligned}
\rho^2(y_n, p) &= \rho^2(P_C((1-\beta_n)x_n \oplus \beta_n v_n), P_C(p)) \\
&\leq \rho^2((1-\beta_n)x_n \oplus \beta_n v_n, p) \\
&\leq (1-\beta_n)\rho^2(x_n, p) + \beta_n \rho^2(v_n, p) \\
&\qquad -\frac{R}{2}(1-\beta_n)\beta_n \rho^2(x_n, v_n) \\
&\leq (1-\beta_n)\rho^2(x_n, p) + \beta_n \rho^2(v_n, Tp) \\
&\qquad -\frac{R}{2}(1-\beta_n)\beta_n \rho^2(x_n, Tx_n) \\
&\leq (1-\beta_n)\rho^2(x_n, p) + \beta_n H^2(Tx_n, Tp) \\
&\qquad -\frac{R}{2}(1-\beta_n)\beta_n \rho^2(x_n, Tx_n) \\
&\leq (1-\beta_n)\rho^2(x_n, p) + \beta_n \left(\rho^2(x_n, p) + \frac{k_2(p)}{1-a_3(p)}\rho^2(Tx_n, x_n)\right) \\
&\qquad -\frac{R}{2}(1-\beta_n)\beta_n \rho^2(x_n, Tx_n) \\
&\leq \rho^2(x_n, p) + \beta_n \left(\frac{k_2(p)}{1-a_3(p)} - \frac{R}{2}(1-\beta_n)\right)\rho^2(Tx_n, x_n) \\
&\leq \rho^2(x_n, p)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\rho^2(x_{n+1}, p) &= \rho^2\left(P_C\big((1-\alpha_n)y_n \oplus \alpha_n u_n\big), P_C(p)\right) \\
&\leq \rho^2((1-\alpha_n)y_n \oplus \alpha_n u_n), p) \\
&\leq (1-\alpha_n)\rho^2(y_n, p) + \alpha_n \rho^2(u_n, p) \\
&\qquad -\frac{R}{2}(1-\alpha_n)\alpha_n \rho^2(y_n, u_n) \\
&\leq (1-\alpha_n)\rho^2(y_n, p) + \alpha_n \rho^2(u_n, Tp)
\end{aligned}$$

$$-\frac{R}{2}(1-\alpha_n)\alpha_n\rho^2(y_n,Ty_n)$$
$$\leq (1-\alpha_n)\rho^2(y_n,p)+\alpha_n H^2(Ty_n,Tp)$$
$$-\frac{R}{2}(1-\alpha_n)\alpha_n\rho^2(y_n,Ty_n)$$
$$\leq (1-\alpha_n)\rho^2(y_n,p)+\alpha_n(\rho^2(y_n,p)$$
$$-\frac{R}{2}(1-\alpha_n)\alpha_n\rho^2(y_n,Ty_n)$$
$$\leq (1-\alpha_n)\rho^2(y_n,p)+\alpha_n(\rho^2(y_n,p)$$
$$+\alpha_n\left(\frac{k_2(p)}{1-a_3(p)}-\frac{R}{2}(1-\alpha_n)\right)\rho^2(Ty_n,y_n)$$
$$\leq (1-\alpha_n)\rho^2(y_n,p)+\alpha_n(\rho^2(y_n,p))$$
$$+\alpha_n\left(\frac{k_2(p)}{1-a_3(p)}-\frac{R}{2}(1-\alpha_n)\right)\rho^2(Ty_n,y_n)$$
$$\leq \rho^2(y_n,p)+\alpha_n(\frac{k_2(p)}{1-a_3(p)}$$
$$-\frac{R}{2}(1-\alpha_n))\rho^2(Ty_n,y_n)$$
$$\leq \rho^2(y_n,p)$$
$$\leq \rho^2(x_n,p)$$

elde edilir. Buradan $\rho^2(x_{n+1},p)\leq\rho^2(x_n,p)$ sağlanır, yani $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,p)$ limitini vardır. Ayrıca $\rho(x_{n+1},p)\leq\rho(y_n,p)\leq\rho(x_n,p)$ sağlandığından, $\lim_{n\to\infty}[\rho(x_n,p)-\rho(y_n,p)]=0$ elde edilir. Hipotezden ve $\beta_n\left[(1-\beta_n)\frac{R}{2}-\frac{k_2(p)}{1-a_3(p)}\right]\rho^2(v_n,x_n)\leq\rho^2(x_n,p)-\rho^2(y_n,p)$ olduğundan dolayı $\lim_{n\to\infty}\rho^2(v_n,x_n)=0$ elde edilir bu ise $\lim_{n\to\infty}\rho(Tx_n,x_n)=0$ olduğunu kanıtlar.

Teorem 3.68 (X,ρ), $\varepsilon\in(0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X)\leq\frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kompakt ve konveks alt kümesi, $T:C\to CC(X)$ bir II. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm, $F(T)\neq\emptyset$ ve her $p\in F(T)$ için $Tp=\{p\}$ olsun. $R=(\pi-2\varepsilon)\tan(\varepsilon)$ için $\liminf_{n\to\infty}\beta_n\left[(1-\beta_n)\frac{R}{2}-\frac{k_2(x)}{1-a_3(x)}\right]>0$ olmak üzere Tanım 2.64 ile tanımlı $\{x_n\}\subset C$ dizisi $F(T)$ içindeki bir noktaya $\Delta-$ yakınsaktır.

İspat: Teorem 3.67 ve Önerme 3.65'den istenen elde edilir.

Teorem 3.69 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $T : C \to CC(X)$ bir hemikompakt ve II. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm, $F(T) \neq \emptyset$ ve her $p \in F(T)$ için $Tp = \{p\}$ olsun. $R = (\pi - 2\varepsilon)\tan(\varepsilon)$ için $\liminf_{n\to\infty} \beta_n \left[(1-\beta_n)\frac{R}{2} - \frac{k_2(x)}{1-a_3(x)}\right] > 0$ olmak üzere Tanım 2.64 ile tanımlı $\{x_n\} \subset C$ dizisi $F(T)$ içindeki bir noktaya $\Delta -$ yakınsaktır.

İspat: Teorem 3.67 ve Önerme 3.66'den istenen elde edilir.

Teorem 3.70 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kompakt ve konveks alt kümesi, $T : C \to CC(X)$ bir II. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm, $F(T) \neq \emptyset$ ve her $p \in F(T)$ için $Tp = \{p\}$ olsun. $R = (\pi - 2\varepsilon)\tan(\varepsilon)$ için $\liminf_{n\to\infty} \beta_n \left[(1-\beta_n)\frac{R}{2} - \frac{k_2(x)}{1-a_3(x)}\right] > 0$ olmak üzere Tanım 2.64 ile tanımlı $\{x_n\} \subset C$ dizisi $F(T)$ içindeki bir noktaya kuvvetli yakınsaktır.

İspat: Teorem 3.67'den her $p \in F(T)$ için $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, p)$ mevcuttur ve $\lim_{n\to\infty} \rho(Tx_n, x_n) = 0$ dir, ayrıca Teorem 3.68'den $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = z$ olacak şekilde bir $z \in C$ mevcuttur ve Teorem 3.59'dan $z \in F(T)$ dir. Ayrıca C kompakt alt küme olduğundan, $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi $\{x_{n_i}\}$, $\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = u \in C$ olacak biçimde bulunabilir. Bu durumda $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = z$ olduğundan $u = z$ dir ve $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n,z)$ mevcut olup $\{\rho(x_{n_i}, z)\}$ dizisi $\{\rho(x_n, z)\}$ dizisinin alt dizisi olduğundan ve limit tekliğinden dolayı $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n,z) = \lim_{n\to\infty} \rho\left(x_{n_i}, z\right) = 0$ bulunur.

Teorem 3.71 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $T : C \to CC(X)$ bir hemikompakt ve II. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm, $F(T) \neq \emptyset$ ve her $p \in F(T)$ için $Tp = \{p\}$ olsun. $R = (\pi - 2\varepsilon)\tan(\varepsilon)$ için $\liminf_{n\to\infty} \beta_n \left[(1-\beta_n)\frac{R}{2} - \frac{k_2(x)}{1-a_3(x)}\right] > 0$ olmak üzere Tanım 2.64 ile tanımlı $\{x_n\} \subset C$ dizisi $F(T)$ içindeki bir noktaya kuvvetli yakınsaktır.

İspat: Teorem 3.67'den her $p \in F(T)$ için $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, p)$ mevcuttur ve $\lim_{n\to\infty} \rho(Tx_n, x_n) = 0$ dir. T hemikompakt olduğundan, $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi $\{x_{n_i}\}$, $\lim_{i\to\infty} x_{n_i} =$

$z \in C$ olacak biçimde bulunabilir. İspatın geri kalanı Teorem 3.69'un yardımıyla Teorem 3.70'nın ispatına benzer olarak tamamlanır.

Teorem 3.72 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $T : C \to CC(C)$ bir II. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm ve $R = (\pi - 2\varepsilon)\tan(\varepsilon)$ olmak üzere her $x \in C$ için

i) $a_2(x) = 0$, $\frac{2k_2(x)}{1-a_3(x)} < \frac{R}{2}$ ve $k = \sqrt{\sup_{x\in C} \frac{a_1(x)+k_2(x)}{1-k_1(x)}} < 1$

ii) $a_3(x) = 0$, $\frac{2k_1(x)}{1-a_2(x)} < \frac{R}{2}$ ve $k = \sqrt{\sup_{x\in C} \frac{a_1(x)+k_1(x)}{1-k_2(x)}} < 1$

koşullarından biri sağlanıyor olsun. Bu durumda $F(T) \neq \emptyset$ dir.

İspat: Keyfi olarak $x_0 \in C$ alınsın. Her $n \in \mathrm{N}$ için $\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(Tx_n, x_n)$ olacak biçimde $x_{n+1} \in Tx_n$ seçilebilir. T dönüşümü i) şartını sağlıyor olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\rho^2(x_{n+1}, x_n) &= \rho^2(Tx_n, x_n) \\
&\leq H^2(Tx_n, Tx_{n-1}) \\
&\leq a_1(x_n)\rho^2(x_n, x_{n-1}) + a_3(x)\rho^2(Tx_{n-1}, x_n) \\
&\qquad + k_1(x_n)\rho^2(Tx_n, x_n) + k_2(x_n)\rho^2(Tx_{n-1}, x_{n-1}) \\
&\leq a_1(x_n)\rho^2(x_n, x_{n-1}) + k_1(x_n)\rho^2(x_{n+1}, x_n) \\
&\qquad + k_2(x_n)\rho^2(x_n, x_{n-1})
\end{aligned}$$

olduğundan dolayı

$$\rho^2(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{a_1(x_n) + k_2(x_n)}{1 - k_1(x_n)} \rho^2(x_n, x_{n-1})$$

elde edilir. Her iki tarafta karekök alınırsa

$$\begin{aligned}
\rho(x_{n+1}, x_n) &\leq \sqrt{\frac{a_1(x_n) + k_2(x_n)}{1 - k_1(x_n)}} \rho(x_n, x_{n-1}) \\
&\leq k\rho(x_n, x_{n-1}) \\
&\qquad \cdots \\
&\leq k^n \rho(x_1, x_0).
\end{aligned}$$

olur. $n < m$ için

$$\begin{aligned}\rho(x_m, x_n) &\leq \sum_{i=n}^{m-1} \rho(x_{i+1}, x_i) \\ &\leq \sum_{i=n}^{m-1} k^i \, \rho(x_1, x_0) \\ &\leq \rho(x_1, x_0) \sum_{i=n}^{m-1} k^i\end{aligned}$$

olduğundan dolayı ve $k < 1$ olduğundan dolayı (x_n) dizisi Cauchy dizisidir ve ayrıca uzay tam olduğundan dolayı $x_n \to z \in X$, C kapalı olduğundan $z \in C$ dir.

$$\begin{aligned}\rho^2(x_n, Tz) &\leq H^2(Tx_{n-1}, Tz) \\ &\leq a_1(z)\rho^2(x_{n-1}, z) + a_3(z)\rho^2(x_{n-1}, Tz) \\ &\quad +k_1(z)\rho^2(Tx_{n-1}, x_{n-1}) + k_2(z)\rho^2(Tz, z)\end{aligned}$$

olduğundan ve diğer bir taraftan her $u \in Tz$ için

$$\rho^2(x_n, \frac{1}{2}u \oplus \frac{1}{2}z) \leq \frac{1}{2}\rho^2(x_n, u) + \frac{1}{2}\rho^2(x_n, z) - \frac{R}{8}\rho^2(z, u)$$

olduğundan dolayı

$$\rho^2(z, u) \leq \frac{4}{R}\rho^2(x_n, u) + \frac{4}{R}\rho^2(x_n, z)$$

elde edilir. Eğer $u \in Tz$ üzerinden infimum alınırsa

$$\rho^2(z, Tz) \leq \frac{4}{R}\rho^2(x_n, Tz) + \frac{4}{R}\rho^2(x_n, z)$$

elde edilir ve buradan da

$$\begin{aligned}\rho^2(x_n, Tz) &\leq a_1(z)\rho^2(x_{n-1}, z) + a_3(z)\rho^2(x_{n-1}, Tz) \\ &\quad +k_1(z)\rho^2(Tx_{n-1}, x_{n-1}) + k_2(z)\rho^2(Tz, z) \\ &\leq a_1(z)\rho^2(x_{n-1}, z) + a_3(z)\rho^2(x_{n-1}, Tz) + k_1(z)\rho^2(Tx_{n-1}, x_{n-1}) \\ &\quad +k_2(z)\left(\frac{4}{R}\rho^2(x_n, Tz) + \frac{4}{R}\rho^2(x_n, z)\right)\end{aligned}$$

elde edilir ki bu ise ve limite geçildiğinde, metriğin sürekliliğinden

$$\left(1 - k_2(z)\frac{4}{R} - a_3(z)\right)\lim_{n\to\infty} \rho^2(z, Tz) \leq 0$$

bulunur. $0 \leq 1 - k_2(z)\frac{4}{R} - a_3(z)$ olduğundan $z \in Tz$ elde edilir. Bezer ispat yöntemiyle ii) sağlanması durumda da kanıtlanabilir.

Sonuç 3.73 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $T : C \to C$ bir genelleştirilmiş hibrid dönüşüm ve $R = (\pi - 2\varepsilon)\tan(\varepsilon)$ olmak üzere her $x \in C$ için

i) $a_2(x) = 0$, $\frac{2k_2(x)}{1-a_3(x)} < \frac{R}{2}$ ve $k = \sqrt{\sup_{x\in C} \frac{a_1(x)+k_2(x)}{1-k_1(x)}} < 1$

ii) $a_3(x) = 0$, $\frac{2k_1(x)}{1-a_2(x)} < \frac{R}{2}$ ve $k = \sqrt{\sup_{x\in C} \frac{a_1(x)+k_1(x)}{1-k_2(x)}} < 1$

koşullarından biri sağlanıyor olsun. Bu durumda $F(T) \neq \emptyset$ dir.

Sonuç 3.74 (X,ρ), bir tam $CAT(0)$ uzayı, C, X in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $T : C \to CC(C)$, bir II. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm olmak üzere her $x \in C$ için

i) $a_2(x) = 0$, $\frac{2k_2(x)}{1-a_3(x)} < \frac{R}{2}$ ve $k = \sqrt{\sup_{x\in C} \frac{a_1(x)+k_2(x)}{1-k_1(x)}} < 1$

ii) $a_3(x) = 0$, $\frac{2k_1(x)}{1-a_2(x)} < \frac{R}{2}$ ve $k = \sqrt{\sup_{x\in C} \frac{a_1(x)+k_1(x)}{1-k_2(x)}} < 1$

koşullarından biri sağlanıyor olsun. Bu durumda $F(T) \neq \emptyset$ dir

Sonuç 3.75 (X,ρ), bir tam $CAT(0)$ uzayı, C, X in boştan farklı, kompakt ve konveks alt kümesi, $T : C \to C$ bir genelleştirilmiş hibrid dönüşüm olmak üzere her $x \in C$ için

i) $a_2(x) = 0$, $\frac{2k_2(x)}{1-a_3(x)} < \frac{R}{2}$ ve $k = \sqrt{\sup_{x\in C} \frac{a_1(x)+k_2(x)}{1-k_1(x)}} < 1$

ii) $a_3(x) = 0$, $\frac{2k_1(x)}{1-a_2(x)} < \frac{R}{2}$ ve $k = \sqrt{\sup_{x\in C} \frac{a_1(x)+k_1(x)}{1-k_2(x)}} < 1$

koşullarından biri sağlanıyor olsun. Bu durumda $F(T) \neq \emptyset$ dir

Teorem 3.76 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $T_1, T_2 : C \to CC(C)$, aynı katsayı fonksiyonlarına sahip iki II. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm ve $R = (\pi - 2\varepsilon)\tan(\varepsilon)$ olmak üzere her $x \in C$ için

i) $a_2(x) = 0,\ \frac{2k_2(x)}{1-a_3(x)} < \frac{R}{2}$ ve $k = \sqrt{\sup_{x\in C} \frac{a_1(x)+k_2(x)}{1-k_1(x)}} < 1$

ii) $a_3(x) = 0,\ \frac{2k_1(x)}{1-a_2(x)} < \frac{R}{2}$ ve $k = \sqrt{\sup_{x\in C} \frac{a_1(x)+k_1(x)}{1-k_2(x)}} < 1$

koşullarından biri sağlanıyor olsun. Bu durumda

$$H(F(T_1), F(T_2)) \leq \frac{1}{1-k} \sup_{x\in C} H(T_1x, T_2x)$$

sağlanır.

İspat: Teorem 3.72'den $F(T_1), F(T_2) \neq \emptyset$ dir. i) koşunu sağlansın ve $x_0 \in F(T_1)$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(T_2x_n, x_n)$ olacak biçimde $x_{n+1} \in T_2x_n$ seçimiyle $\{x_n\}$ dizisi oluşturulsun. Bu durumda Teorem 3.72'den $z \in T_2z$ elde edilir. Dolayısı ile

$$\begin{aligned}
\rho(x_0, z) &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \rho(x_i, x_{i+1}) \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} k^i \rho(x_0, x_1) \\
&= \rho(x_0, x_1) \sum_{i=0}^{\infty} k^i \\
&\leq \rho(x_0, x_1) \frac{1}{1-k}
\end{aligned}$$

olduğundan ve

$$\rho(x_0, x_1) = \rho(x_0, T_2x_0) \leq H(T_1x_0, T_2x_0) \leq \sup_{x\in C} H(T_1x, T_2x)$$

sağlandığından

$$\rho(x_0, z) \leq \frac{1}{1-k} \sup_{x\in C} H(T_1x, T_2x)$$

elde edilir. Yine her $x_0 \in F(T_1)$ için benzer şekilde $z \in F(T_2)$ bulunabileceği gibi, her $x'_o \in F(T_2)$ için $z' \in F(T_1)$ bulunabilir. Sonuç olarak

$$H(F(T_1), F(T_2)) \leq \frac{1}{1-k} \sup_{x\in K} H(T_1x, T_2x)$$

sağlanır.

Önerme 3.77 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $\{T_n : C \to CC(C)\}$ aynı katsayı fonksiyonuna sahip II. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşümlerin bir dizisi ve $R = (\pi - 2\varepsilon)\tan(\varepsilon)$ olmak üzere her $x \in C$ için

i) $a_2(x) = 0,\ \frac{2k_2(x)}{1-a_3(x)} < \frac{R}{2}$ ve $k = \sqrt{\sup_{x\in C} \frac{a_1(x)+k_2(x)}{1-k_1(x)}} < 1$

ii) $a_3(x) = 0,\ \frac{2k_1(x)}{1-a_2(x)} < \frac{R}{2}$ ve $k = \sqrt{\sup_{x\in C} \frac{a_1(x)+k_1(x)}{1-k_2(x)}} < 1$

koşullarından biri sağlanıyor olsun. Ayrıca $\{T_n\}$ dönüşümler dizisi düzgün olarak bir $T : C \to CC(C)$ dönüşümüne yakınsak ise T dönüşümü, bir II. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşümdür.

İspat: Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} H^2(T_nx,T_ny) \leq{}& a_1(x)\rho^2(x,y) + a_2(x)\rho^2(T_nx,y) + a_3(x)\rho^2(x,T_ny) \\ &+k_1(x)\rho^2(T_nx,x) + k_2(x)\rho^2(T_ny,y) \end{aligned}$$

sağlanır. $n \in \mathbb{N}$ üzerinden limit alındığında, $\{T_n\}$ dönüşümler dizisi düzgün olarak yakınsadığından

$$\begin{aligned} H^2(Tx,Ty) \leq{}& a_1(x)\rho^2(x,y) + a_2(x)\rho^2(Tx,y) + a_3(x)\rho^2(x,Ty) \\ &+k_1(x)\rho^2(Tx,x) + k_2(x)\rho^2(Ty,y) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.78 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $\{T_n : C \to CC(C)\}$ aynı katsayı fonksiyonuna sahip II. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşümlerin bir dizisi ve $R = (\pi - 2\varepsilon)\tan(\varepsilon)$ olmak üzere her $x \in C$ için

i) $a_2(x) = 0,\ \frac{2k_2(x)}{1-a_3(x)} < \frac{R}{2}$ ve $k = \sqrt{\sup_{x\in C} \frac{a_1(x)+k_2(x)}{1-k_1(x)}} < 1$

ii) $a_3(x) = 0,\ \frac{2k_1(x)}{1-a_2(x)} < \frac{R}{2}$ ve $k = \sqrt{\sup_{x\in C} \frac{a_1(x)+k_1(x)}{1-k_2(x)}} < 1$

koşullarından biri sağlanıyor olsun. Eğer $\{T_n\}$ dönüşümler dizisi düzgün olarak bir $T:$ $C \to CC(C)$ dönüşümüne yakınsak ise $F(T_n)$' de $F(T)$' ye yakınsaktır.

İspat: Teorem 3.76 den her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$H(F(T_n), F(T)) \leq \frac{1}{1-k} \sup_{x \in C} H(T_n x, Tx)$$

sağlanır. n üzerinden limit alındığında

$$\lim_{n\to\infty} H(F(T_n), F(T)) = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak $F(T_n)$'de $F(T)$' ye yakısaktır.

Örnek 3.79 (X,ρ), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi ve $T : C \to CC(X)$ bir dönüşüm olsun. Eğer T nonexpansive ise, Tanım 3.51 ile verilen dönüşümde $a_1(x) = 1$, $a_2(x) = 0$ ve $a_2(x) = a_3(x) = k_1(x) = k_2(x) = 0$ için T II. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşümdür. Eğer T hibrid ise, Tanım 3.51 ile verilen dönüşümde $a_1(x) = a_2(x) = a_3(x) = \frac{1}{3}$ $k_1(x) = k_2(x) = 0$ için$T$ II. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşümdür. Eğer T nonspreading ise, Tanım 3.51 ile verilen dönüşümde $a_1(x) = 0$, $a_2(x) = a_3(x) = \frac{1}{2}, k_1(x) = k_2(x) = 0$ için T II. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşümdür. Bu yüzden her nonexpansive, hibrid ve nonspreading dönüşüm bir II. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm örneğidir.

Örnek 3.80 $X = [3,9]$, $\rho(x,y) = |x-y|$ ve $T : X \to C(X)$

$$Tx = \begin{cases} \{3\}, & x \in [3,5], \\ \left[3, \frac{4x^3+1}{x^3+1}\right], & x \in (5,9] \end{cases}$$

olsun. Bu durumda T dönüşümü, her $x \in X$ için $a_1(x) = k_1(x) = k_2(x) = 0$, $a_2(x) = \frac{x}{x+2}$, $a_3(x) = \frac{2}{x+2}$ olmak üzere, T nonexpansive olmayan bir II. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşümdür. Gerçekten de;

Eğer $x, y \in [3, 5]$ ise açıktır.

Eğer $x \in [3,5]$, $y \in (5,9]$ ise $H^2(Tx, Ty) \leq 1$, $4 < \rho^2(Tx, y)$, $0 \leq \rho^2(x, Ty)$ olduğundan

$$H^2(Tx,Ty) \leq \frac{x}{x+2}4 + \frac{2}{x+2}\rho^2(x,Ty) \leq \frac{x}{x+2}\rho^2(Tx,y) + \frac{2}{x+2}\rho^2(x,Ty)$$

sağlanır.

Eğer $x, y \in (5,9]$ ise $H^2(Tx,Ty) \leq 1$, $1 < \rho^2(Tx,y)$, $1 < \rho(x,Ty)$ olduğundan

$$H^2(Tx,Ty) \leq \frac{x}{x+2} + \frac{2}{x+2} \leq \frac{x}{x+2}\rho^2(Tx,y) + \frac{2}{x+2}\rho^2(x,Ty)$$

sağlanır. Sonuç olarak T küme değerli II. Tip genelleştirilmiş hibrid dönüşümdür, $3 \in \mathrm{F(T)}$ ve $T(3) = \{3\}$. Fakat T nonexpansive değildir çünkü $T(5) = 3$ ve $T(5.1) = [3,3.978\ldots]$ iken $H(T(5),T(5.1)) = 0.978\ldots > \rho(5,5.1) = 0.1$ dir.

3.3 Küme Değerli N −Genelleştirilmiş Hibrid Dönüşümlerin Sabit Noktalarının Varlıkları ve Yakınsaklıkları

Bu kısımda Altbölüm 3.1 ve Altbölüm 3.2 tanımları verilen dönüşümlerden bazılarının genel durumlarının tanımları verilerek varlık ve yakınsaklık sonuçları elde edilecektir.

Tanım 3.81 μ, ℓ^∞, sınırlı diziler uzayı üzerinde sürekli bir fonksiyonel ve $\{a_n\} \in \ell^\infty$ olsun. $\mu\big((a_1, a_2, \ldots)\big) = \mu_n(a_n)$ olmak üzere, eğer μ,

i) $\|\mu\| = \mu(1,1,\ldots) = 1$,

ii) her $\{a_n\} \in \ell^\infty$ için $\mu_n(a_n) = \mu_n(a_{n+1})$

koşullarını sağlarsa μ'ya Banach limiti denir. μ, her $\{a_n\} \in \ell^\infty$ için

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \mu_n(a_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

özelliğini sağlar ve dolayısı ile

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \to c$ ise $\mu_n(a_n) = c$ dir [106].

Lemma 3.82 (X,ρ), bir tam $CAT(0)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $\{x_n\}$, X'de sınırlı bir dizi ve μ bir Banach limiti olsun Eğer $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(z) = \mu_n\rho^2(x_n,z)$ biçiminde tanımlı ise $f(z_0) = \min\{f(x) : x \in C\}$ olacak biçimde bir $z_0 \in C$ vardır. [107]

Lemma 3.83 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı, konveks alt kümesi, $\{x_n\}$ bu uzayda sınırlı bir dizi ve μ bir Banach limiti olsun. Bu durumda $f(x) = \mu_n d^2(x_n, x)$ biçiminde tanımlı $f : C \to \mathbb{R}$ düzgün konveks fonksiyonu için $f(z) = \min\{f(x) : x \in C\}$ olacak biçimde $z \in C$ vardır.

İspat: f fonksiyonu tanımından dolayı süreklidir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
f((1-t)x \oplus ty) &= \mu_n \rho^2(x_n, (1-t)x \oplus ty) \\
&= \mu_n \rho^2 \left(x_n, \frac{1}{2}x \oplus \frac{1}{2}y\right) \\
&\leq (1-t)\mu_n \rho^2(x_n, x) + t\mu_n \rho^2(x_n, y) - \frac{R}{2}(1-t)t\mu_n \rho^2(x,y) \\
&= (1-t)f(x) + tf(x) - \frac{R}{2}(1-t)t\mu_n \rho^2(x,y)
\end{aligned}$$

eşitsizliğinden dolayı Lemma 2.55'den istenen bulunmuş olur.

Tanım 3.84 (X,ρ) bir metrik uzay ve $T : X \to 2^X$ bir dönüşüm ve her $k = 1,2,\dots,N$ için $a_k : X \to \mathbb{R}$ ve $b_k : X \to [0,1]$ dönüşümleri her $x \in X$ için $\sum_{k=0}^{N} a_k(x) \geq 1$ ve $\sum_{k=0}^{N} b_k(x) \leq 1$ koşullarını sağlayan dönüşümler olsun. Eğer T dönüşümü her $x, y \in X$, $u \in Tx$ ve her $k = 1,2,\dots,N$ için $v_k \in T^k y$ için

$$\sum_{k=1}^{N} a_k(x)\rho^2(u, v_k) + a_0(x)\rho^2(u,y) \leq \sum_{k=1}^{N} b_k(x)\rho^2(x, v_k) + b_0(x)\rho^2(x,y) \tag{3.12}$$

koşulunu sağlıyorsa T 'ye I. tip N −genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm denir.

Teorem 3.85 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi ve μ bir Banach limiti olsun. Eğer $T : C \to CC(C)$ bir I. tip N −genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm ise $F(T) \neq \emptyset$ dir.

İspat: Keyfi bir $x_0 \in C$ ve her $n \in$ N için $\{x_n\}$ dizisi $x_n \in Tx_{n-1}$ seçimi ile elde edilsin. Lemma 3.83'den $f(x) = \mu_n d^2(x_n, x)$ fonksiyonu için $f(z) = \min\{f(x) : x \in C\}$ olacak biçimde bir $z \in C$ vardır. T'nin özelliğinden olduğundan, her $k = 1,2,\dots,N$, $n \in \mathbb{N}$ ve $u \in Tx$ için

$$\sum_{k=1}^{N} a_k(z)\rho^2(u, x_{n+k}) + a_0(x)\rho^2(u, x_n) \leq \sum_{k=1}^{N} b_k(z)\rho^2(z, x_{n+k}) + b_0(z)\rho^2(z, x_n)$$

sağlandığından ve $\{x_n\}$ is sınırlı olduğundan

$$\sum_{k=1}^{N} a_k(z)\mu_n\rho^2(u, x_{n+k}) + a_0(x)\mu_n\rho^2(u, x_n)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N} b_k(z)\mu_n\rho^2(z, x_{n+k}) + b_0(z)\mu_n\rho^2(z, x_n)$$

elde edilir. her $k = 1,2,\dots,N$, $n \in \mathbb{N}$ ve $y \in C$ için

$$\mu_n\rho^2(x_n, y) = \mu_n\rho^2(x_{n+1}, y) = \ldots = \mu_n\rho^2(x_{n+k}, y)$$

olduğundan

$$\sum_{k=1}^{N} a_k(z)\mu_n\rho^2(u, x_n) + a_0(x)\mu_n\rho^2(u, x_n)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N} b_k(z)\mu_n\rho^2(z, x_n) + b_0(z)\mu_n\rho^2(z, x_n)$$

olup buradan ise

$$\mu_n\rho^2(u, x_n) \leq \mu_n\rho^2(z, x_n)$$

bulunur. Bu ise z nin tekliğinden $u = z \in Tz = \{z\}$ olmasını gerektirir.

Teorem 3.86 (X, ρ), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi ve μ bir Banach limiti olsun. Eğer $T : C \to CC(X)$ bir I. tip N −genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm olsun. Eğer C kümesinde $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve her $k = 1,2,\dots,N$ için $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, T^k x_n) = 0$ olacak şekildeki bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $z \in C$ ve $z \in T(z)$ dir.

İspat: C kümesinde $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve her $k = 1,2,\dots,N$ için $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, T^k x_n) = 0$ olacak şekildeki bir $\{x_n\}$ dizisi var olsun. Lemma 2.47'dan $z \in C$ dir. Ayrıca her $k = 1,2,\dots,N$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $\rho(x_n, y_{n,k}) = \rho(x_n, T^k x_n), k = 1, 2..N$ olacak biçimde $y_{n,k} \in$

$T^k x_n$ var olduğundan her $k = 1,2, \dots, N$ için $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_{n,k}) = 0$ olacak biçimde $\{y_{n,k}\}_n$ dizisi oluşturulabilir. Üçgen eşitsizliğinden her $y \in C$ için $\rho^2(y, x_n) \leq [\rho(y, y_{n,k}) + \rho(y_{n,k}, x_n)]^2$ ve $\rho^2(y, y_{n,k}) \leq [\rho(y, x_n) + \rho(x_n, y_{n,k})]^2$ olduğundan her $k = 1, 2..N$ için $\limsup_{n\to\infty} \rho^2(y, y_{n,k}) = \limsup_{n\to\infty} \rho^2(y, x_n)$ olur. Her $x \in C$ için $1 - \sum_{k=1}^{N} a_k(x) \leq a_0(x)$ olduğundan ve T'nin özelliğinden, her $k = 1,2, \dots, N$, $n \in \mathbb{N}$ ve $u \in Tz$ için

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} a_k(x)\rho^2(u, y_{n,k}) + \left[1 - \sum_{k=1}^{N} a_k(x)\right]\rho^2(u, x_n) & \\
\leq \sum_{k=1}^{N} a_k(x)\rho^2(u, y_{n,k}) + a_0(x)\rho^2(u, x_n) & \\
\leq \sum_{k=1}^{N} b_k(x)\rho^2(z, y_{n,k}) + b_0(x)\rho^2(z, x_n) &
\end{aligned}
$$

elde edilir. Eğer $\sum_{k=1}^{N} a_k(x) \geq 1$ ise

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} a_k(x)\rho^2(u, y_{n,k}) &\leq \sum_{k=1}^{N} b_k(x)\rho^2(z, y_{n,k}) + b_0(x)\rho^2(z, x_n) + \left[\sum_{k=1}^{N} a_k(x) - 1\right]\rho^2(u, x_n) \\
&\leq \sum_{k=1}^{N} b_k(x)[\rho(z, x_n) + \rho(x_n, y_{n,k})]^2 + b_0(x)\rho^2(z, x_n) \\
&\quad + \left[\sum_{k=1}^{N} a_k(x) - 1\right][\rho(u, y_{n,k}) + \rho(y_{n,k}, x_n)]^2
\end{aligned}
$$

olup her iki tarafta limit supremum alındığında

$$\limsup_{n\to\infty} \rho^2(u, x_n) = \limsup_{n\to\infty} \rho^2(u, y_{n,k}) \leq \limsup_{n\to\infty} \rho^2(z, x_n)$$

elde edilir. Eğer $\sum_{k=1}^{N} a_k(x) \leq 0$ ise benzer olarak

$$\limsup_{n\to\infty} \rho^2(u, x_n) = \limsup_{n\to\infty} \rho^2(u, y_{n,k}) \leq \limsup_{n\to\infty} \rho^2(z, x_n)$$

elde edilir. Sonuç olarak $u = z = Tz = \{z\}$ bulunur.

Önerme 3.87 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı kapalı konveks alt kümesi, $T : C \to CC(X)$ bir I. tip N −genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. Eğer C kümesinde her $k = 1,2,\ldots,N$ için $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, T^k x_n) = 0$ ve her $p \in F(T)$ için $\{\rho(x_n,p)\}$ olacak şekildeki bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $\omega_w(x_n) \subseteq F(T)$ dir ve $\omega_w(x_n)$ yanlızca tek nokta içerir.

İspat: Önerme 3.11'in ispatına benzer olarak, Lemma 2.47, Teorem 3.86 ve Lemma 2.48 'den istenen elde edilir.

Not 3.88 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı kapalı konveks alt kümesi, $T : C \to C(X)$ bir I. tip N −genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda her $x \in C$, $u \in Tx$ ve $p \in F(T)$ için

$$\rho^2(u,p) = \sum_{k=1}^{N} a_k(x)\rho^2(u,p) + a_0(x)\rho^2(u,p) \leq \sum_{k=1}^{N} b_k(x)\rho^2(x,p) + b_0(x)\rho^2(x,p)$$

$$= \rho^2(x,p)$$

olup

$$\rho(u,p) \leq \rho(x,p)$$

elde edilir. Bu yüzden Teorem 3.12 ve Teorem 3.13 ile aynı ispat tekniği kullanılarak aşağıdaki teoremler elde edilebilir.

Teorem 3.89 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı kapalı konveks alt kümesi, $T : C \to CC(X)$ bir I. tip N −genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $\liminf_{n\to\infty}(1-\beta_n)\beta_n > 0$ ve $(\alpha_n) \subset (0,1)$ olmak üzere Tanım 2.61 ile verilen $\{x_n\} \subset C$ dizisi $F(T)$ içindeki bir noktaya $\Delta -$ yakınsaktır.

Teorem 3.90 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in farklı kompakt konveks alt kümesi, $T : C \to C(X)$ bir I. tip N −genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $\liminf_{n\to\infty}(1-\beta_n)\beta_n > 0$ ve $(\alpha_n) \subset (0,1)$ olmak üzere Tanım 2.61 ile verilen $\{x_n\} \subset C$ dizisi $F(T)$ içindeki bir noktaya kuvvetli yakınsaktır.

Tanım 3.91 (X,ρ) bir metrik uzay ve $T : X \to 2^X$ bir dönüşüm, ve her $k = 1,2,\dots,N$ için $a_i : X \to \mathbb{R}$ ve $b_i : X \to [0,1]$ dönüşümleri her $x \in X$ için $\sum_{k=0}^{N} a_k(x) \geq 1$ ve $\sum_{k=0}^{N} b_k(x) \leq 1$ koşullarını sağlayan dönüşümler olsun. Eğer T dönüşümü her $x, y \in X$ ve her $k = 1,2,\dots,N$ için $v_k \in T^k y$ için

$$\sum_{k=1}^{N} a_k(x)\rho^2(Tx, v_k) + a_0(x)\rho^2(Tx, y) \leq \sum_{k=1}^{N} b_k(x)\rho^2(x, T^k y) + b_0(x)\rho^2(x, y)$$

koşulunu sağlıyorsa T 'ye II. tip N −genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm denir.

Teorem 3.92 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kompakt ve konveks alt kümesi ve $T : C \to CC(C)$ bir II. tip N −genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm olsun. Eğer C'de her $k = 1,2,\dots,N$ için $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, T^k x_n) = 0$ olacak biçimde bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $F(T) \neq \emptyset$ dir.

İspat: $\{x_n\}$ dizisi, C'de her $k = 1,2,\dots,N$ için $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, T^k x_n) = 0$ olacak biçimde bir dizi olsun. C kompakt alt küme olduğundan, $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi $\{x_{n_i}\}$, $x_{n_i} \to z \in C$ olacak biçimde bulunabilir. Ayrıca Lemma 2.53'den her $k = 1,2,\dots,N$ için ve her $n \in \mathbb{N}$ için $u_{n,k} \in T^k x_n$ ve $\rho(x_n, u_{n,k}) = \rho(x_n, T^k x_n)$ olacak biçimde $\{u_{n,k}\}_n$ dizisi vardır. Üçgen eşitsizliğinden ve ρ metriği sürekli olduğundan $\lim_{i\to\infty} \rho(x_{n_i}, Tz) = \lim_{i\to\infty} \rho(u_{n_i,k}, Tz) = \rho(z, Tz)$ elde edilir. T' nin özelliğinden

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N} a_k(z)\rho^2(Tz, u_{n_i,k}) + a_0(z)\rho^2(Tz, x_{n_i}) \\
&\qquad \leq \sum_{k=1}^{N} b_k(z)\rho^2(z, T^k x_{n_i}) + b_0(z)\rho^2(z, x_{n_i}) \\
&\qquad \leq \sum_{k=1}^{N} b_k(z)\rho^2(z, u_{n_i,k}) + b_0(z)\rho^2(z, x_{n_i})
\end{aligned}$$

olup

$$
\begin{aligned}
\rho^2(Tz,z) &= \sum_{k=1}^{N} a_k(z)\rho^2(Tz,z) + a_0(x)\rho^2(Tz,z) \\
&= \sum_{k=1}^{N} a_k(z)\lim_{i\to\infty}\rho^2(Tz,u_{n_i,k}) + a_0(x)\lim_{i\to\infty}\rho^2(Tz,x_{n_i}) \\
&= \sum_{k=1}^{N} b_k(x)\lim_{i\to\infty}\rho^2\big(z,u_{n_i,k}\big) + b_0(x)\lim_{i\to\infty}\rho^2(z,x_{n_i}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Sonuç olarak $z \in Tz$ elde edilir.

Teorem 3.93 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi ve $T : C \to CC(C)$ bir hemikompakt ve II. tip $N-$genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm olsun Eğer C'de her $k = 1,2,\dots,N$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, T^k x_n) = 0$ olacak biçimde bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $F(T) \neq \emptyset$ dir.

İspat: $\{x_n\}$ dizisi, C'de her $k = 1,2,\dots,N$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, T^k x_n) = 0$ olacak biçimde bir dizi olsun. T hemikompakt olduğundan, $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi $\{x_{n_i}\}$, $x_{n_i} \to z \in C$ olacak biçimde bulunabilir. İspatın geri kalanı Teorem 3.92 ile aynıdır.

Teorem 3.94 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kompakt ve konveks alt kümesi ve $T : C \to CC(X)$ bir II. tip $N-$genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm olsun. Eğer C kümesinde $\Delta - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = z$ ve her $k = 1,2,\dots,N$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, T^k x_n) = 0$ olacak şekildeki bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $z \in C$ ve $z \in T(z)$ dir.

İspat: C kümesinde $\Delta - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = z$ ve her $k = 1,2,\dots,N$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, T^k x_n) = 0$ şekildeki bir $\{x_n\}$ dizisi var olsun. Lemma 2.47'dan $z \in C$ dir. C kompakt alt küme olduğundan, $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi $\{x_{n_i}\}$, $x_{n_i} \to u \in C$ olacak biçimde bulunabilir. Fakat $\Delta - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = z$ olduğundan $u = z$ dir. Ayrıca Lemma 2.53'den her $k = 1,2,\dots,N$ için ve her n için $u_{n,k} \in T^k x_n$ ve $\rho\big(x_n, u_{n,k}\big) = \rho(x_n, T^k x_n)$ olacak biçimde $\{u_{n,k}\}_n$ dizisi vardır. Üçgen eşitsizliğinden ve ρ metriği sürekli olduğundan $\lim\limits_{i\to\infty} \rho\big(x_{n_i}, Tz\big) = \lim\limits_{i\to\infty}\rho(u_{n_i,k}, Tz) = \rho(z, Tz)$ elde edilir. T' nin özelliğinden

$$\sum_{k=1}^{N} a_k(x)\rho^2(Tz, u_{n_i,k}) + a_0(x)\rho^2(Tz, x_{n_i}) \leq \sum_{k=1}^{N} b_k(x)\rho^2(z, u_{n_i,k}) + b_0(x)\rho^2(z, x_{n_i})$$

elde edilir ve her iki tarafta limit alındığında

$$\begin{aligned}
\rho^2(Tz,z) &= \sum_{k=1}^{N} a_k(z)\rho^2(Tz,z) + a_0(x)\rho^2(Tz,z) \\
&= \sum_{k=1}^{N} a_k(z)\lim_{i\to\infty}\rho^2(Tz, u_{n_i,k}) + a_0(x)\lim_{i\to\infty}\rho^2(Tz, x_{n_i}) \\
&= \sum_{k=1}^{N} b_k(x)\lim_{i\to\infty}\rho^2\left(z, u_{n_i,k}\right) + b_0(x)\lim_{i\to\infty}\rho^2(z, x_{n_i}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $z \in Tz$ elde edilir.

Teorem 3.95 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi ve $T : C \to CC(X)$ bir hemikompakt ve II. tip N −genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşüm olsun. Eğer C kümesinde $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve her $k = 1,2,\dots,N$ için $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, T^k x_n) = 0$ olacak şekildeki bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $z \in C$ ve $z \in T(z)$ dir.

İspat: C kümesinde $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve her $k = 1,2,\dots,N$ için $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, T^k x_n) = 0$ şekildeki bir $\{x_n\}$ dizisi var olsun. Lemma 2.47'dan $z \in C$ dir. T hemikompakt olduğundan, $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi $\{x_{n_i}\}$, $x_{n_i} \to u \in C$ olacak biçimde bulunabilir. İspatın geri kalanı Teorem 3.94'in ispatı ile benzer şekildedir.

BÖLÜM 4

KÜME DEĞERLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ DARALTAN HİBRİD DÖNÜŞÜMLERİN SABİT NOKTALARININ VARLIKLARI ve YAKINSAKLIKLARI

Bu bölümde küme değerli daraltan dönüşümlerden daha genel olan küme değerli daraltan hibrid dönüşümlerin tanımları verilerek, sabit noktalarının varlıkları ve sabit noktalarına yakınsaklık sonuçları elde edilecektir. Ayrıca bu dönüşümlerin sabit nokta kümelerinin ve sabit noktalarına yakınsak olan iterasyon yöntemlerinin kararlı oldukları gösterilecektir.

Tanım 4.1 (X,ρ) bir metrik uzay, $T: X \to CB(X)$ bir dönüşüm, $a_1, a_2 : X \to \mathbb{R}$ ve $b_1, b_2 : X \to [0,1]$ dönüşümleri her $x \in X$ için $a_1(x) + a_2(x) \geq 1$ ve $b_1(x) + b_2(x) \leq 1$ koşullarını sağlayan dönüşümler ve $r \in [0,1)$ olsun. Eğer T dönüşümü her $x, y \in X$ için,

$$a_1(x)H(Tx,Ty) + a_2(x)\rho(Tx,x) \leq r[b_1(x)\rho(Ty,y) + b_2(x)\rho(x,y)] \tag{4.1}$$

koşulunu sağlıyorsa T ye, I. tip genelleştirilmiş küme değerli daraltan hibrid dönüşüm denir.

Lemma 4.2 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $T: C \to CC(X)$ bir I. tip genelleştirilmiş küme değerli daraltan hibrid dönüşüm, $r \in [0,1)$, her $x \in C$ için $a_1(x) \geq 0$ ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $F(T)$ kapalıdır.

İspat: $\{x_n\}$, $F(T)$ de bir dizi ve $x_n \to x \in C$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} a_1(x)\rho(Tx,x_n) + a_2(x)\rho(Tx,x) &\leq a_1(x)H(Tx,Tx_n) + a_2(x)\rho(Tx,x) \\ &\leq rb_2(x)\rho(x,x_n) \end{aligned}$$

olup n üzerinden limit alındığında

$\rho(Tx, x) \leq 0$

elde edilir. Sonuç olarak $x \in Tx$ dir.

Teorem 4.3 (X, ρ), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $T : C \to CC(C)$, $r \in [0, 1)$ daraltma sabitine sahip bir I. tip genelleştirilmiş küme değerli daraltan hibrid dönüşüm ve her $x \in C$ için $a_1(x) \geq 0$ olsun. Bu durumda $F(T) \neq \emptyset$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\rho(x_n, x_{n+1}) = \rho(x_n, Tx_n)$ olmak üzere keyfi $x_0 \in C$ başlangıç koşullu $x_{n+1} \in Tx_n$ şeklindeki küme değerli Picard iterasyon yöntemi ile elde edilen dizi $F(T)$ içindeki bir noktaya yakınsar. Ayrıca her $p \in F(T)$ için ve her $x \in C$ için

i) $\rho(x_n, p) \leq \frac{r^n}{1-r}\rho(x_0, x_1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

ii) $\rho(x_n, p) \leq \frac{r}{1-r}\rho(x_{n-1}, x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

yaklaşımları mevcuttur.

İspat: $x_0 \in C$ alınsın. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\rho(x_n, x_{n+1}) = \rho(x_n, Tx_n)$ olmak üzere $x_{n+1} \in Tx_n$ seçimi ile $\{x_n\}$ dizisi oluşturulsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\rho(x_{n+1}, x_n) &= \rho(Tx_n, x_n) \\
&\leq a_1(x_n)\rho(Tx_n, x_n) + a_2(x_n)\rho(Tx_n, x_n) \\
&\leq a_1(x_n)H(Tx_n, Tx_{n-1}) + a_2(x_n)\rho(Tx_n, x_n) \\
&\leq r[b_1(x_n)\rho(Tx_{n-1}, x_{n-1}) + b_2(x_n)\rho(x_n, x_{n-1})] \\
&\leq r\rho(x_n, x_{n-1})
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısı ile her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\rho(x_n, x_{n+1}) &\leq r\rho(x_{n-1}, x_n) \\
&\leq r^2\rho(x_{n-2}, x_{n-1}) \\
&\leq r^2\rho(x_{n-3}, x_{n-2}) \\
&\quad \ldots \\
&\leq r^n\rho(x_0, x_1)
\end{aligned}$$

olup, her $m, n \in \mathbb{N}$, $n \leq m$ için

$$
\begin{aligned}
\rho(x_n, x_m) &\leq \sum_{i=n}^{m-1} \rho(x_i, x_{i+1}) \\
&\leq \sum_{i=n}^{m-1} r^i \rho(x_0, x_1) \\
&\leq \sum_{i=n}^{\infty} r^i \rho(x_0, x_1) \\
&\leq \frac{r^n}{1-r} \rho(x_0, x_1)
\end{aligned}
$$

bulunur. n üzerinde limite geçildiğinde $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_m) = 0$ bulunur. Yani $\{x_n\}$ Cauchy dizisidir. X uzayı tam olduğundan dolayı bir $p \in X$ için $\lim_{n\to\infty} x_n = p$ dir. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için

$$
\rho(x_n, Tx_n) \leq \rho(x_n, x_{n+1}) \leq \rho(x_n, p) + \rho(p, x_{n+1})
$$

olduğundan dolayı $\rho(x_n, Tx_n) \to 0$ dir. T'nin özelliğinden her $n \in \mathbb{N}$ için

$$
\begin{aligned}
a_1(p)\rho(Tp, x_{n+1}) + a_2(p)\rho(Tp, p) &\leq a_1(p)H(Tp, Tx_n) + a_2(z)\rho(Tp, p) \\
&\leq r[b_1(p)\rho(x_n, Tx_n) + b_2(z)\rho(p, x_n)]
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
\rho(p, Tp) &\leq a_1(p)\rho(p, Tp) + a_2(p)\rho(p, Tp) \\
&\leq a_1(p)\rho(p, x_{n+1}) + a_1(p)\rho(x_{n+1}, Tp) + a_2\rho(p, Tp) \\
&= a_1(p)\rho(p, x_{n+1}) + a_1(p)\rho(Tp, x_{n+1}) + a_2(p)\rho(Tp, p) \\
&\leq a_1(p)\rho(p, x_{n+1}) + r[b_1(p)\rho(x_n, Tx_n) + b_2(p)\rho(p, x_n)]
\end{aligned}
$$

elde edilir. n üzerinden limite geçildiğinde $p \in Tp$ elde edilir. Her $m, n \in \mathbb{N}$, $n \leq m$ için

$$
\rho(x_n, x_m) \leq \frac{r^n}{1-r} \rho(x_0, x_1)
$$

sağlandığından m üzerinden limit alınırsa

$$
\rho(x_n, p) \leq \frac{r^n}{1-r} \rho(x_0, x_1)
$$

bulunur. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için

$$
\rho(x_n, x_{n+1}) \leq r\rho(x_{n-1}, x_n)
$$

sağlandığından her $m_1 \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\rho(x_{n+m_1}, x_{n+m_1+1}) &\leq r\rho(x_{n+m_1-1}, x_{n+m_1}) \\ &\leq r^2\rho(x_{n+m_1-2}, x_{n+m_1-1}) \\ &\quad\ldots \\ &\leq r^{m_1}\rho(x_n, x_{n+1})\end{aligned}$$

sağlanır. Her $n \leq m$ için

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x_m) &\leq \sum_{i=n}^{m-1} \rho(x_i, x_{i+1}) \\ &\leq \sum_{i=n}^{m-1} r^{i-n+1}\rho(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} r^{i-n+1}\rho(x_{n-1}, x_n) \\ &= r^{-n+1}\frac{r^n}{1-r}\rho(x_{n-1}, x_n) \\ &= \frac{r}{1-r}\rho(x_{n-1}, x_n)\end{aligned}$$

olduğundan m iüzerinden limit durumunda

$$\rho(x_n, p) \leq \frac{r}{1-r}\rho(x_{n-1}, x_n)$$

elde edilir.

Teorem 4.4 (X, ρ), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $T_1, T_2 : C \to CC(C)$ I. tip genelleştirilmiş küme değerli daraltan hibrid dönüşüm, $r \in [0, 1)$ ve her $x \in C$ için $a_1(x) \geq 0$ olsun. Bu durumda $r = \max\{r_1, r_2\}$ olmak üzere

$$H\big(F(T_1), F(T_2)\big) \leq \frac{1}{1-r}\sup_{x\in C} H(T_1x, T_2x)$$

elde edilir.

İspat: Teorem 4.3'den $F(T_1), F(T_2) \neq \emptyset$ dir. $x_0 \in F(T_1)$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(T_2 x_n, x_n)$ olacak biçimde $x_{n+1} \in T_2 x_n$ seçimiyle $\{x_n\}$ dizisi oluşturulsun. Bu durumda yine Teorem 4.3'den $\lim_{n\to\infty} x_n = p \in F(T_2)$ elde edilir.

$$\rho(x_0, x_1) = \rho(x_0, T_2 x_0) \leq H(T_1 x_0, T_2 x_0) \leq \sup_{x\in C} H(T_1 x, T_2 x)$$

sağlandığından

$$\rho(x_0, p) \leq \frac{1}{1-r}\rho(x_0, x_1) \leq \frac{1}{1-r}\sup_{x\in C} H(T_1 x, T_2 x)$$

elde edilir. Dolayısı ile her $x_0 \in F(T_1)$ için $p \in F(T_2)$ bulunabileceği gibi benzer yöntemle her $x'_0 \in F(T_2)$ içinde $p' \in F(T_1)$ bulunabilir. Sonuç olarak

$$H(F(T_1), F(T_2)) \leq \frac{1}{1-r}\sup_{x\in C} H(T_1 x, T_2 x)$$

sağlanır.

Önerme 4.5 (X, ρ), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, her $n \in \mathbb{N}$ için $T_n : C \to CC(C)$ I. tip genelleştirilmiş küme değerli daraltan hibrid dönüşüm, r_n, T_n dönüşümünün sabiti olmak üzere $r = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{r_n\} < 1$ ve her $x \in C$ için $a_1(x) \geq 0$ olsun. Eğer $\{T_n\}$ dönüşümler dizisi düzgün olarak bir $T : C \to CC(C)$ dönüşümüne yakınsak ise T dönüşümü, I. tip genelleştirilmiş küme değerli daraltan hibrid dönüşümdür.

İspat: Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$a_1(x)H(T_n x, T_n y) + a_2(x)\rho(T_n x, x) \leq r_n[b_1(x)\rho(y, T_n y) + b_2(x)\rho(x, y)]$$

sağlanır. n üzerinden limit alındığında, $\{T_n\}$ dönüşümler dizisi düzgün olarak yakınsadığından

$$a_1(x)H(Tx, Ty) + a_2(x)\rho(Tx, x) \leq r[b_1(x)\rho(y, Ty) + b_2(x)\rho(x, y)]$$

elde edilir.

Teorem 4.6 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, her $n \in \mathbb{N}$ için $T_n : C \to CC(C)$, I. tip genelleştirilmiş küme değerli daraltan hibrid dönüşüm, r_n, T_n dönüşümünün sabiti olmak üzere $r = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{r_n\} < 1$ ve her $x \in C$ için $a_1(x) \geq 0$ olsun. Eğer $\{T_n\}$ dönüşümler dizisi düzgün olarak bir $T : C \to CC(C)$ dönüşümüne yakınsak ise $F(T_n)$ de $F(T)$ yakınsaktır.

İspat: Teorem 4.4'den her $n \in \mathbb{N}$ için

$$H(F(T_n), F(T)) \leq \frac{1}{1-r}\sup_{x\in C} H(T_n x, Tx)$$

sağlanır. n üzerinden limite geçildiğinde

$$\lim_{n\to\infty} H(F(T_n), F(T)) = 0$$

elde edilir.

Teorem 4.7 (X,ρ), bir $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile tam bir $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $T : C \to CC(C)$ bir I. tip genelleştirilmiş küme değerli daraltan hibrid dönüşüm, $r \in [0,1)$ ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. Eğer her $x \in C$ için $\sup_{x\in C}\frac{rb_1(x)+rb_2(x)}{a_1(x)-rb_1(x)} < 1$ veya $\sup_{x\in C}\frac{rb_2(x)}{a_1(x)} < 1$ ve $0 \leq a_1(x), a_2(x)$ veya $\sup_{x\in C}\frac{rb_2(x)-a_2(x)}{a_1(x)+a_2(x)}$ ve $0 \leq a_1(x), a_2(x) \leq 0$ ise Tanım 2.62 ile tanımlı $\{x_n\}$ dizisi $F(T)$ nin bir elemanına kuvvetli yakınsaktır.

İspat: $p \in F(T)$ olsun. Eğer her $x \in C$ için $\sup_{x\in C}\frac{rb_1(x)+rb_2(x)}{a_1(x)-rb_1(x)} < 1$ sağlanıyorsa,

$$a_1(p)H(Tp,Tx) + a_2(p)\rho(Tp,p) \leq r[b_1(p)\rho(Tx,x) + b_2(p)\rho(p,x)]$$

sağlandığından

$$a_1(p)H(Tp,Tx) \leq r[b_1(p)\rho(Tx,p) + b_1(p)\rho(x,p) + b_2(p)\rho(p,x)]$$

olur. Dolayısı ile

$$a_1(p)H(Tp,Tx) \leq r[b_1(p)H(Tx,Tp) + b_1(p)\rho(x,p) + b_2(p)\rho(p,x)]$$

olup

$[a_1(p) - rb_1(p)]H(Tp, Tx) \leq r[b_1(p)\rho(x,p) + b_2(p)\rho(p,x)]$

elde edilir. Burada $k = \sup_{x\in C} \frac{rb_2(p)-rb_1(p)}{a_1(p)-rb_1(p)}$ alınabilir.

Eğer her $x \in C$ için $\sup_{x\in C} \frac{rb_2(x)}{a_1(x)} < 1$ ve $0 \leq a_1(x), a_2(x)$ sağlanıyorsa

$a_1(x)H(Tx, Tp) \leq rb_2(x)\rho(x,p) - a_2(x)\rho(Tx, x)$

elde edilir. Burada $k = \sup_{x\in C} \frac{rb_2(x)}{a_1(x)}$ alınabilir.

Eğer her $x \in C$ için $0 \leq a_1(x), a_2(x) \leq 0$ ise

$$\begin{aligned} a_1(x)H(Tx, Tp) &\leq rb_2(x)\rho(x,p) - a_2(x)\rho(Tx, x\,) \\ &\leq rb_2(x)\rho(x,p) - a_2(x)(H(Tx, Tp) + \rho(p, x) \end{aligned}$$

olduğundan

$a_1(x)H(Tx, Tp) + a_2(x)H(Tx, Tp) \leq rb_2(x)\rho(x,p) - a_2(x)\rho(x,p)$

olup

$$H(Tx, Tp) \leq \frac{rb_2(x) - a_2(x)}{a_1(x) + a_2(x)}\rho(x,p)$$

elde edilir. Burada $k = \sup_{x\in C} \frac{rb_2(x)-a_2(x)}{a_1(x)+a_2(x)}$ alınabilir. Her durumda $k < 1$ olup için

$H(Tx, Tp) \leq k\rho(x,p)$

sağlanır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \rho(z_n, p) &\leq \rho((1-\beta_n)x_n \oplus \beta_n w_n, p) \\ &\leq (1-\beta_n)\rho(x_n, p) + \beta_n\rho(w_n, p) \\ &\leq (1-\beta_n)\rho(x_n, p) + \beta_n\rho(w_n, Tp) \\ &\leq (1-\beta_n)\rho(x_n, p) + \beta_n H(Tx_n, Tp) \\ &\leq (1-\beta_n)\rho(x_n, p) + k\beta_n\rho(x_n, p) \\ &\leq (1-\beta_n)\rho(x_n, p) + \beta_n\rho(x_n, p) \\ &\leq \rho(x_n, p) \end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\rho(y_n, p) &= \rho((1-\alpha_n)w_n \oplus \alpha_n v_n, p) \\
&\leq (1-\alpha_n)\rho(w_n, p) + \alpha_n \rho(v_n, p) \\
&\leq (1-\alpha_n)\rho(w_n, Tp) + \alpha_n \rho(v_n, Tp) \\
&\leq (1-\alpha_n)H(Tx_n, Tp) + \alpha_n H(Tz_n, Tp) \\
&\leq k(1-\alpha_n)\rho(x_n, p) + k\alpha_n \rho(z_n, p) \\
&\leq k(1-\alpha_n)\rho(x_n, p) + k\alpha_n \rho(x_n, p) \\
&\leq k\rho(x_n, p)
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
\rho(x_{n+1}, p) &= \rho(u_n, p) \\
&\leq \rho(u_n, Tp) \\
&\leq H(Ty_n, Tp) \\
&\leq k^2 \rho(x_n, p)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Dolayısı ile Lemma 2.66’den $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, p)$ elde edilir.

Teorem 4.8 (X, ρ), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X’in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $T: C \to CC(C)$ bir I. tip genelleştirilmiş küme değerli daraltan hibrid dönüşüm, $r \in [0,1)$, $F(T) \neq \emptyset$ ve her $p \in F(T)$ için $Tp = \{p\}$ olsun. Eğer her $x \in C$ için $\sup_{x\in C} \frac{rb_1(x)+rb_2(x)}{a_1(x)-rb_1(x)} < 1$ veya $\sup_{x\in C} \frac{rb_2(x)}{a_1(x)} < 1$ ve $0 \leq a_1(x), a_2(x)$ veya $\sup_{x\in C} \frac{rb_2(x)-a_2(x)}{a_1(x)+a_2(x)}$ ve $0 \leq a_1(x), a_2(x) \leq 0$ ise Tanım 2.62 ile tanımlı $\{x_n\}$ dizi T-kararlıdır.

İspat: $p \in F(T)$ olsun. $\{x'_n\} \subset C$ herhangi bir dizi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $u'_n \in Ty'_n$, $v'_n \in Tz'_n$, $w'_n \in Tx'_n$ ve $y'_n = (1-\alpha_n)w'_n \oplus \alpha_n v'_n$, $z'_n = (1-\beta_n)x'_n \oplus \beta_n w'_n$ olmak üzere, $\varepsilon_n = \rho(x'_{n+1}, u'_n)$

için $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$
\begin{aligned}
\rho(x'_{n+1},p) &\le \rho(x'_{n+1},u'_n)+\rho(u'_n,p)\\
&\le \varepsilon_n+\rho(y'_n,Tp)\\
&\le \varepsilon_n+H(Ty'_n,Tp)\\
&\le \varepsilon_n+k\rho(y'_n,p)\\
&\le \varepsilon_n+k\rho((1-\alpha_n)w'_n\oplus\alpha_n v'_n,p)\\
&\le \varepsilon_n+k(1-\alpha_n)\rho(w'_n,Tp)+k\alpha_n\rho(v'_n,Tp)\\
&\le \varepsilon_n+k(1-\alpha_n)H(Tx'_n,Tp)+k\alpha_n H(Tz'_n,Tp)\\
&\le \varepsilon_n+k^2(1-\alpha_n)\rho(x'_n,p)+k^2\alpha_n\rho(z'_n,p)\\
&\le \varepsilon_n+k^2(1-\alpha_n)\rho(x'_n,p)+k^2\alpha_n\rho((1-\beta_n)x'_n\oplus\beta_n w'_n,p)\\
&\le \varepsilon_n+k^2(1-\alpha_n)\rho(x'_n,p)+k^2\alpha_n(1-\beta_n)\rho(x'_n,p)\\
&\qquad +k^2\alpha_n\beta_n\rho(w'_n,p)\\
&\le \varepsilon_n+k^2(1-\alpha_n)\rho(x'_n,p)+k^2\alpha_n(1-\beta_n)\rho(x'_n,p)\\
&\qquad +k^2\alpha_n\beta_n\rho(w'_n,Tp)\\
&\le \varepsilon_n+k^2(1-\alpha_n)\rho(x'_n,p)+k^2\alpha_n(1-\beta_n)\rho(x'_n,p)\\
&\qquad +k^2\alpha_n\beta_n H(Tx'_n,Tp)\\
&\le \varepsilon_n+k^2(1-\alpha_n)\rho(x'_n,p)+k^2\alpha_n(1-\beta_n)\rho(x'_n,p)\\
&\qquad +k^3\alpha_n\beta_n\rho(x'_n,p)\\
&\le \varepsilon_n+k^2(1-\alpha_n)\rho(x'_n,p)+k^2\alpha_n\rho(x'_n,p)\\
&\le \varepsilon_n+k^2\rho(x'_n,p)
\end{aligned}
$$

olup Lemma 2.66'den $\lim_{n\to\infty}\rho(x'_n,p)$ elde edilir. Şimdi ise $\lim_{n\to\infty}x'_n=p$ olsun. Her $n\in\mathbb{N}$ için

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_n &= \rho(x'_{n+1},u'_n)\\
&\le \rho(x'_{n+1},p)+\rho(p,u'_n)\\
&\le \rho(x'_{n+1},p)+\rho(u'_n,Tp)\\
&\le \rho(x'_{n+1},p)+H(Ty'_n,Tp)\\
&\le \rho(x'_{n+1},p)+k\rho(y'_n,p)\\
&\le \rho(x'_{n+1},p)+k\rho((1-\alpha_n)w'_n\oplus\alpha_n v'_n,p)\\
&\le \rho(x'_{n+1},p)+k(1-\alpha_n)\rho(w'_n,Tp)+k\alpha_n\rho(v'_n,Tp)\\
&\le \rho(x'_{n+1},p)+k(1-\alpha_n)H(Tx'_n,Tp)+k\alpha_n H(Tz'_n,Tp)\\
&\le \rho(x'_{n+1},p)+k^2(1-\alpha_n)\rho(x'_n,p)+k^2\alpha_n\rho(z'_n,p)\\
&\le \rho(x'_{n+1},p)+k^2(1-\alpha_n)\rho(x'_n,p)+k^2\alpha_n\rho((1-\beta_n)x'_n\oplus\beta_n w'_n,p)\\
&\le \rho(x'_{n+1},p)+k^2(1-\alpha_n)\rho(x'_n,p)+k^2\alpha_n(1-\beta_n)\rho(x'_n,p)\\
&\qquad +k^2\alpha_n\beta_n\rho(w'_n,p)\\
&\le \rho(x'_{n+1},p)+k^2(1-\alpha_n)\rho(x'_n,p)+k^2\alpha_n(1-\beta_n)\rho(x'_n,p)\\
&\qquad +k^2\alpha_n\beta_n\rho(w'_n,Tp)\\
&\le \rho(x'_{n+1},p)+k^2(1-\alpha_n)\rho(x'_n,p)+k^2\alpha_n(1-\beta_n)\rho(x'_n,p)\\
&\qquad +k^2\alpha_n\beta_n H(Tx'_n,Tp)\\
&\le \rho(x'_{n+1},p)+k^2(1-\alpha_n)\rho(x'_n,p)+k^2\alpha_n(1-\beta_n)\rho(x'_n,p)\\
&\qquad +k^3\alpha_n\beta_n\rho(x'_n,p)
\end{aligned}
$$

olduğundan limit durumunda $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$ elde edilir.

Örnek 4.9 $X = [0,6]$, $\rho(x,y) = |x-y|$ ve $T : X \to C(X)$, $Tx = \left[0, \frac{x}{6}\right]$ olarak verilsin. Bu durumda T dönüşümü, her $x \in X$ için $a_1(x) = \frac{2x+3}{x+2}, a_2(x) = \frac{-x-1}{x+2}, b_1(x) = \frac{1}{x+2}, b_2(x) = \frac{x+1}{x+2}$ ve $r = \frac{3}{4}$ olmak üzere, T bir II. tip genelleştirilmiş daraltan küme değerli hibrid dönüşüm. Gerçekten de her $x, y \in [0,6]$ ise, her $u \in Ty$ için $H(Tx,Ty) = max\{\frac{y}{6}, \frac{x}{6}\}$, $\rho(x,y) = |x-y|$, $\rho(Tx,x) = \frac{5x}{6}, \rho(y,Ty) = \frac{5y}{6}$ sağlandığından

$$\begin{aligned}
\frac{2x+3}{x+2} H(Tx,Ty) &= \frac{2x+3}{x+2}\max\{\frac{y}{6}, \frac{x}{6}\} \\
&\le \frac{x+1}{x+2}\frac{5x}{6} + \frac{3}{4}\left[\frac{x+1}{x+2}\frac{5y}{6} + \frac{1}{x+2}|x-y|\right] \\
&= \frac{x+1}{x+2}\rho(Tx,x) + \frac{3}{4}\left[\frac{1}{x+2}\rho(y,Ty) + \frac{x+1}{x+2}\rho(x,y)\right]
\end{aligned}$$

olur. Dolayısı ile T bir I. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşümdür.

Tanım 4.10 (X,ρ) bir metrik uzay, $T: X \to 2^X$ bir dönüşüm, $a_1, a_2 : X \to \mathbb{R}$ ve $b_1, b_2 : X \to [0,1]$ dönüşümleri her $x \in X$ için $a_1(x) + a_2(x) \ge 1$ ve $b_1(x) + b_2(x) \le 1$ koşullarını sağlayan dönüşümler ve $r \in [0,1)$ olsun. Eğer T dönüşümü her $x, y \in X$ ve $u \in Ty$ için,

$$a_1(x)\delta(Tx,u) + a_2(x)\delta(Tx,y) \le r[b_1(x)\rho(x,Ty) + b_2(x)\rho(x,y)] \tag{4.2}$$

koşulunu sağlanıyorsa T'ye, II. tip genelleştirilmiş daraltan küme değerli hibrid dönüşüm denir.

Lemma 4.11 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \le \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $T : C \to 2^C$ bir II. tip genelleştirilmiş daraltan küme değerli hibrid dönüşüm, $r \in [0,1)$ ve $F(T) \ne \emptyset$ olsun. Bu durumda $F(T)$ kapalıdır ve her $p \in F(T)$ için $Tp = \{p\}$ dir.

İspat: $\{x_n\}$, $F(T)$ de bir dizi ve $x_n \to x \in C$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
a_1(x)\delta(Tx,x_{n+1}) + a_2(x)\delta(Tx,x_n) &\le r[b_1(x)\rho(x,Tx_n) + b_2(x)\rho(x,x_n)] \\
&\le r[b_1(x)\rho(x,x_{n+1}) + b_2(x)\rho(x,x_n)]
\end{aligned}$$

olup n üzerinden limit alındığında

$$\lim_{n\to\infty} \delta(Tx, x_n) \leq 0$$

elde edilir. Ayrıca her $u \in Tx$ için $\rho(u, x_n) \leq \delta(Tx, x_n)$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \rho(u, x) \leq \lim_{n\to\infty} \delta(Tx, x_n) \leq 0$$

olup metriğin sürekliliğinden $u = x \in Tx = \{x\}$ bulunur.

Teorem 4.12 (X, ρ), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $T: C \to CC(C)$ bir II. tip genelleştirilmiş daraltan küme değerli hibrid dönüşüm, $r \in [0, 1)$, her $x \in C$ için $a_1(x) \leq 0$ veya $a_2(x) \leq 0$ olsun. Bu durumda $F(T) \neq \emptyset$ dir.

İspat: $x_0 \in C$ alınsın ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \in Tx_n$ seçimi ile $\{x_n\}$ dizisi oluşturulsun. Bu durumda Önerme 2.46'den, $A_C\{x_n\} = \{z\}$ olacak şekilde bir $z \in X$ vardır. Lemma 2.47 gereğince $z \in C$ dir. T'nin özelliğinden

$$\begin{aligned} a_1(z)\delta(Tz, x_{n+1}) + a_2(z)\delta(Tz, x_n) &\leq r[b_1(z)\rho(z, Tx_n) + b_2(z)\rho(z, x_n)] \\ &\leq r[b_1(z)\rho(z, x_{n+1}) + b_2(z)\rho(z, x_n)] \end{aligned}$$

sağlanır. Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $u \in Tz$ için $\rho(u, x_{n+1}) \leq \delta(Tz, x_{n+1})$ sağlandığından

her iki tarafta limit supremuma geçildiğinde

$$\limsup_{n\to\infty} \rho(x_{n+1}, u) \leq \limsup_{n\to\infty} \delta(x_{n+1}, Tz) \leq \limsup_{n\to\infty} \rho(x_{n+1}, z).$$

bulunur. Asimptotik merkez tek olduğundan dolayı $u = z \in Tz = \{z\}$ elde edilir.

Teorem 4.13 (X, ρ), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $T: C \to CC(C)$ bir II. tip genelleştirilmiş daraltan küme değerli hibrid dönüşüm, $r \in [0, 1)$ ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset (0,1)$ dizileri $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(1-r) = \infty$ koşulunu sağlamak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n \oplus \alpha_n u_n, u_n \in Tx_n$ biçiminde tanımlı $x_0 \in C$ keyfi başlangıç noktalı $\{x_n\}$ dizisi $F(T)$'nin bir elemanına kuvvetli yakınsaktır.

İspat: $p \in F(T)$ alınsın. Bu durumda Lemma 4.11'dan $Tp = \{p\}$ dir. T'nin özelliğinden her $x \in C$ ve $u \in Tx$ için

$$\begin{aligned}\delta(Tx,p) &\leq a_1(x)\delta(Tx,p) + a_2(x)\delta(Tx,p)\\ &\leq r[b_1(x)\rho(x,Tp) + b_2(x)\rho(x,p)]\\ &\leq r\rho(x,p)\end{aligned}$$

dir. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\rho(x_{n+1},p) &= \rho((1-\alpha_n)x_n \oplus \alpha_n u_n, p)\\ &\leq (1-\alpha_n)\rho(x_n,p) + \alpha_n\rho(u_n,p)\\ &\leq (1-\alpha_n)\rho(x_n,p) + \alpha_n\delta(Tx_n,p)\\ &\leq (1-\alpha_n)\rho(x_n,p) + \alpha_n r\rho(x_n,p)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\rho(x_{n+1},p) &\leq (1-\alpha_n)\rho(x_n,p) + \alpha_n r\rho(x_n,p)\\ &\leq (1-\alpha_n(1-r))\rho(x_n,p)\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak Lemma 2.67'den $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,p) = 0$ bulunur.

Teorem 4.14 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $T_1, T_2 : C \to CC(C)$, II. tip genelleştirilmiş daraltan küme değerli hibrid dönüşümler ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $r = \max\{r_1, r_2\}$ olmak üzere

$$H(F(T_1),F(T_2)) \leq \frac{1}{1-r}\sup_{x\in C} H(T_1x,T_2x)$$

sağlanır.

İspat: $x_0 \in F(T_1)$ olsun. $\{\alpha_n\},\{\beta_n\} \subset (0,1)$ dizileri $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(1-r) = \infty$ koşulunu sağlamak üzere, $\rho(x_0,u_0) = \rho(x_0,T_2x_0)$ olacak şekilde $u_0 \in T_2x_0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n \oplus \alpha_n u_n, u_n \in T_2x_n$ biçiminde tanımlı x_0 başlangıç noktalı $\{x_n\}$ dizisinin Teorem 4.13'den bir $p \in F(T_2)$'ye kuvvetli yakınsaktır. Bu durumda

$$\begin{aligned}\rho(x_0,p) &\leq \rho(x_0,x_1) + \rho(x_1,p)\\ &\leq \rho(x_0,(1-\alpha_0)x_0 \oplus \alpha_0u_0) + \rho((1-\alpha_0)x_0 \oplus \alpha_0u_0, p)\\ &\leq \alpha_0\rho(x_0,u_0) + (1-\alpha_0)\rho(x_0,p) + \alpha_0\rho(u_0,p)\\ &\leq \alpha_0\rho(x_0,T_2x_0) + (1-\alpha_0)\rho(x_0,p) + \alpha_0\delta(T_2x_0,p)\\ &\leq \alpha_0H(T_1x_0,T_2x_0) + (1-\alpha_0)\rho(x_0,p) + \alpha_0r\rho(x_0,p)\\ &\leq \alpha_0H(T_1x_0,T_2x_0) + (1-\alpha_0(1-r))\rho(x_0,p)\end{aligned}$$

olduğundan

$$(1-(1-\alpha_0(1-r)))\rho(x_0,p) \leq \alpha_0 H(T_1x_0,T_2x_0)$$

sağlanır. Dolayısı ile

$$\alpha_0(1-r)\rho(x_0,p) \leq \alpha_0 H(T_1x_0,T_2x_0)$$

olup

$$\rho(x_0,p) \leq \frac{1}{1-r} H(T_1x_0,T_2x_0)$$

elde edilir. Buradan ise

$$\rho(x_0,p) \leq \frac{1}{1-r} \sup_{x\in C} H(T_1x,T_2x)$$

elde edilir. Dolayısı ile her $x_0 \in F(T_1)$ için $p \in F(T_2)$ bulunabileceği gibi benzer yöntemle her $x'_0 \in F(T_2)$ içinde $p' \in F(T_1)$ bulunabilir. Sonuç olarak

$$H(F(T_1),F(T_2)) \leq \frac{1}{1-r} \sup_{x\in C} H(T_1x,T_2x)$$

sağlanır.

Önerme 4.15 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, her $n \in \mathbb{N}$ için $T_n :\ C \to CC(C)$, II. tip genelleştirilmiş daraltan küme değerli hibrid dönüşüm ve r_n, T_n dönüşümünün sabiti olmak üzere $r = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{r_n\} < 1$ ve her $x \in C$ için $0 \leq a_1(x)$olsun. Eğer $\{T_n\}$ dönüşümler dizisi düzgün olarak bir $T : C \to CC(C)$ dönüşümüne yakınsak ise T dönüşümü, bir II. tip genelleştirilmiş daraltan küme değerli hibrid dönüşümdür.

İspat: Her $n \in \mathbb{N}$ için $u_n \in T_n y$ olmak üzere,

$$a_1(x)\delta(T_nx,u_n) + a_2(x)\delta(T_nx,y) \leq r[b_1(x)\rho(x,T_ny) + b_2(x)\rho(x,y)]$$

sağlandığından

$$a_1(x)\delta(T_nx,T_ny) + a_2(x)\delta(T_nx,y) \leq r[b_1(x)\rho(x,T_ny) + b_2(x)\rho(x,y)]$$

olur. n üzerinden limite geçildiğinde $u \in Ty$ olmak üzere

$$a_1(x)\delta(Tx,u) + a_2(x)\delta(Tx,y) \leq r[b_1(x)\rho(x,Ty) + b_2(x)\rho(x,y)]$$

elde edilir.

Teorem 4.16 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, her $n \in \mathbb{N}$ için $T_n : C \to CC(C)$, II. tip genelleştirilmiş daraltan küme değerli hibrid dönüşüm, r_n, T_n dönüşümünün sabiti olmak üzere $r = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{r_n\} < 1$ ve her $x \in C$ için $0 \leq a_1(x)$olsun. Eğer $\{T_n\}$ dönüşümler dizisi düzgün olarak bir $T : C \to CC(C)$ dönüşümüne yakınsak ise $F(T_n)$ de $F(T)$ yakınsaktır.

İspat: Teorem 4.14'den her $n \in \mathbb{N}$ için

$$H(F(T_n), F(T)) \leq \frac{1}{1-r} \sup_{x\in C} H(T_n x, Tx)$$

sağlanır. n üzerinden limite geçildiğinde

$$\lim_{n\to\infty} H(F(T_n), F(T)) = 0$$

elde edilir.

Teorem 4.17 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $T : C \to CC(C)$ bir II. tip genelleştirilmiş daraltan küme değerli hibrid dönüşüm ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset (0,1)$ dizileri, $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(1-r) = \infty$ koşulunu sağlamak üzere Tanım 2.65 ile tanımlı $\{x_n\}$ dizisi $F(T)$'nin bir elemanına kuvvetli yakınsaktır.

İspat: $p \in F(T)$ alınsın. Bu durumda Lemma 4.11'dan $Tp = \{p\}$ dir. $T: C \to CC(C)$, II. tip genelleştirilmiş daraltan küme değerli hibrid dönüşüm olduğundan ve Teorem 4.13 'den her $x \in C$ ve için $\delta(Tx, p) \leq r\rho(x,p)$ dir. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\rho(y_n, p) &= \rho((1-\beta_n)x_n \oplus \beta_n v_n, p) \\
&\leq (1-\beta_n)\rho(x_n, p) + \beta_n \rho(v_n, p) \\
&\leq (1-\beta_n)\rho(x_n, p) + \beta_n \delta(Tx_n, p) \\
&\leq (1-\beta_n)\rho(x_n, p) + \beta_n r\rho(x_n, p) \\
&= (1-\beta_n(1-r))\rho(x_n, p)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\rho(x_{n+1},p) &= \rho((1-\alpha_n)y_n \oplus \alpha_n u_n, p)\\ &\le (1-\alpha_n)\rho(y_n,p) + \alpha_n\rho(u_n,p)\\ &\le (1-\alpha_n)\rho(y_n,p) + \alpha_n\delta(Ty_n,p)\\ &\le (1-\alpha_n)\rho(y_n,p) + \alpha_n r\rho(y_n,p)\\ &= \rho(y_n,p)\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}\rho(x_{n+1},p) &\le \rho(y_n,p)\\ &\le (1-\beta_n)\rho(x_n,p) + \beta_n r\rho(x_n,p)\\ &\le (1-\beta_n(1-r))\rho(x_n,p)\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak Lemma 2.67'den $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,p) = 0$ bulunur.

Teorem 4.18 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \le \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $T : C \to CC(C)$ bir II. tip genelleştirilmiş daraltan küme değerli hibrid dönüşüm, $r \in [0,1)$ ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $\{\alpha_n\},\{\beta_n\} \subset (0,1)$ dizileri, $\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n(1-r) = \infty$ koşulunu sağlamak üzere Tanım 2.65 ile tanımlı $\{x_n\}$ dizisi T-kararlıdır.

İspat: $\{x'_n\}$, C kümesinde keyfi bir dizi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $y'_n = (1-\beta_n)x'_n \oplus \beta_n v'_n$, $v'_n \in Tx'_n$ ve $u'_n \in Ty'_n$ olmak üzere $\epsilon_n = \rho(x'_{n+1},(1-\alpha_n)y'_n \oplus \alpha_n u'_n)$ için $\lim_{n\to\infty}\epsilon_n = 0$ olsun. Bu durumda Teorem 4.13'den her $x \in C$ için $\delta(Tx,p) \le r\rho(x,p)$ olduğundan

$$\begin{aligned}\rho(y'_n,p) &= \rho((1-\beta_n)x'_n \oplus \beta_n v'_n, p)\\ &\le (1-\beta_n)\rho(x'_n,p) + \beta_n\rho(v'_n,p)\\ &\le (1-\beta_n)\rho(x'_n,p) + \beta_n\delta(Tx'_n,p)\\ &\le (1-\beta_n)\rho(x'_n,p) + \beta_n r\rho(x'_n,p)\\ &\le \big(1-\beta_n(1-r)\big)\rho(x'_n,p)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\rho(x'_{n+1},p) &\le \rho(x'_{n+1},(1-\alpha_n)y'_n \oplus \alpha_n u'_n) + \rho((1-\alpha_n)y'_n \oplus \alpha_n u'_n, p)\\ &\le \varepsilon_n + (1-\alpha_n)\rho(y'_n,p) + \alpha_n\rho(u'_n,p)\\ &\le \varepsilon_n + (1-\alpha_n)\rho(y'_n,p) + \alpha_n\delta(Ty'_n,p)\\ &\le \varepsilon_n + (1-\alpha_n)\rho(y'_n,p) + \alpha_n r\rho(y'_n,p)\\ &\le \varepsilon_n + \rho(y'_n,p)\\ &\le \varepsilon_n + \big(1-\beta_n(1-r)\big)\rho(x'_n,p)\end{aligned}$$

olup Lemma 2.67'den $\lim_{n\to\infty} \rho(x'_n, p)$ elde edilir.

Şimdi ise $\lim_{n\to\infty} \rho(x'_n, p) = 0$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n &= \rho(x'_{n+1}, (1-\alpha_n)y'_n \oplus \alpha_n u'_n) \\
&\leq \rho(x'_{n+1}, p) + \rho(p, (1-\alpha_n)y'_n \oplus \alpha_n u'_n) \\
&\leq \rho(x'_{n+1}, p) + (1-\alpha_n)\rho(y'_n, p) + \alpha_n \rho(u'_n, p) \\
&\leq \rho(x'_{n+1}, p) + (1-\alpha_n)\rho(y'_n, p) + \alpha_n \delta(Ty'_n, p) \\
&\leq \rho(x'_{n+1}, p) + (1-\alpha_n)\rho(y'_n, p) + \alpha_n r \rho(y'_n, p) \\
&\leq \rho(x'_{n+1}, p) + \rho(y'_n, p) \\
&\leq \rho(x'_{n+1}, p) + \big(1-\beta_n(1-r)\big)\rho(x'_n, p)
\end{aligned}$$

olduğundan limit durumunda $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$ elde edilir.

Örnek 4.19 $X = [0, 5]$, $\rho(x, y) = |x - y|$ ve $T : X \to C(X)$,

$$Tx = \begin{cases} \left[0, \frac{x}{5}\right] & x \in [0,3), \\ \left[\frac{x}{5}, 1\right] & x \in [3,5] \end{cases}$$

olarak verilsin. Bu durumda T dönüşümü, her $x \in X$ için $a_1(x) = \frac{3x+4}{2x+3}, a_2(x) = \frac{-x-1}{2x+3}, b_1(x) = \frac{x+2}{2x+3}, b_2(x) = \frac{x+1}{2x+3}$ ve $r = \frac{7}{8}$ olmak üzere, T daraltan olmayan bir I. tip genelleştirilmiş küme değerli daraltan hibrid dönüşümdür. Gerçekten de;

Eğer $x, y \in [0,3)$ ise, her $u \in Tx$ için $\delta(Tx, u) \leq \delta(Tx, Ty) = \max\{\frac{x}{5}, \frac{y}{5}\}$, $\delta(Tx, y) = \max\{|0 - y|, |\frac{x}{5} - y|\}, \rho(x, Ty) = \min\{|x - 0|, |x - \frac{y}{5}|\}$ ve $\rho(x, y) = |x - y|$ olduğundan

$$\max\{x, y\} \leq \max\left\{|0 - y|, \left|\frac{x}{5} - y\right|\right\} + \frac{7}{8}\left[\min\left\{|x - 0|, \left|x - \frac{y}{5}\right|\right\} + |x - y|\right]$$

sağlanır ve

$$\begin{aligned}
\frac{3x+4}{2x+3}\delta(Tx, u) &\leq \frac{3x+4}{2x+3}\delta(Tx, Ty) \\
&\leq \frac{3x+4}{2x+3}\max\left\{\frac{x}{5}, \frac{y}{5}\right\} \\
&= \frac{3x/5 + 4/5}{2x+3}\max\{x, y\} \\
&\leq \frac{x+1}{2x+3}\max\{x, y\}
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{x+1}{2x+3}\max\left\{|0-y|,\left|\frac{x}{5}-y\right|\right\}$$
$$+\frac{7}{8}\left[\frac{x+2}{2x+3}\min\left\{|x-0|,\left|x-\frac{y}{5}\right|\right\}+\frac{x+1}{2x+3}|x-y|\right]$$
$$=\frac{x+1}{2x+3}\delta(Tx,y)+\frac{7}{8}\left[\frac{x+2}{2x+3}\rho(x,Ty)+\frac{x+1}{2x+3}\rho(x,y)\right]$$

olur.

Eğer $x\in[0,3), y\in[3,5]$ ise her $u\in Tx$ için $\delta(Tx,u)\leq\delta(Tx,Ty)=1$, $\delta(Tx,y)=y$, $\rho(x,Ty)=\min\{|x-1|,|x-\frac{y}{5}|\}$ olduğundan

$$4\leq y+\frac{7}{8}\left[\min\left\{|x-0|,\left|x-\frac{y}{5}\right|\right\}+|x-y|\right]$$

sağlanır ve

$$\frac{3x+4}{2x+3}\delta(Tx,u)\leq\frac{3x+4}{2x+3}\delta(Tx,Ty)$$
$$\leq\frac{3x+4}{2x+3}$$
$$\leq\frac{x+1}{2x+3}4$$
$$\leq\frac{x+1}{2x+3}y+\frac{7}{8}\left[\frac{x+2}{2x+3}\min\left\{|x-1|,\left|x-\frac{y}{5}\right|\right\}+\frac{x+1}{2x+3}|x-y|\right]$$
$$=\frac{x+1}{2x+3}\delta(Tx,y)+\frac{7}{8}[\frac{x+2}{2x+3}\rho(x,Ty)+\frac{x+1}{2x+3}\rho(x,y)]$$

olur.

Eğer $x,y\in(3,5]$ ise her $u\in Tx$ için $\delta(Tx,u)\leq\delta(Tx,Ty)=\max\{|\frac{x}{5}-1|,|1-\frac{y}{5}|\}\leq\frac{2}{5}$, $2<\delta(Tx,y)=\max\{|1-y|,|\frac{x}{5}-y|\}=|\frac{x}{5}-y|$,$2<\rho(x,Ty)=\min\{|x-1|,|x-\frac{y}{5}|\}=|x-1|$ olduğundan

$$\frac{8}{5}\leq|\frac{x}{5}-y|+\frac{7}{8}[|x-1|+|x-y|]$$

sağlanır ve

$$\frac{3x+4}{2x+3}\delta(Tx,u)\leq\frac{3x+4}{2x+3}\delta(Tx,Ty)$$
$$=\frac{3x+4}{2x+3}\max\left\{\left|\frac{x}{5}-1\right|,\left|1-\frac{y}{5}\right|\right\}$$

$$\leq \frac{x+1}{2x+3}\frac{8}{5}$$

$$\leq \frac{x+1}{2x+3}|\frac{x}{5}-y| + \frac{7}{8}\left[\frac{x+2}{2x+3}\min\left\{|x-1|,\left|x-\frac{y}{5}\right|\right\}\right.$$

$$\left. + \frac{x+1}{2x+3}|x-y|\right]$$

$$= \frac{x+1}{2x+3}\delta(Tx,y) + \frac{7}{8}\left[\frac{x+2}{2x+3}\rho(x,Ty) + \frac{x+1}{2x+3}\rho(x,y)\right]$$

olur. Dolayısı ile her durumda eşitsizlik sağlandığından T bir II. tip genelleştirilmiş küme değerli hibrid dönüşümdür, $0 \in F(T)$ ve $T(0) = \{0\}$ dir. Fakat $x = 2.9$, $y = 3$ için $T(2.9) = [0, 0.58]$, $T(3) = [0.60, 1]$ olduğundan $H\big(T(2.9),\ T(3)\big) = \max\{|0 - 0.60|, |1 - 0.58|\} = 0.60 > \rho(2.9,3) = 0.1$ olduğundan T daraltan ya da nonexpansive değildir. Şimdi ise Tanım 2.65 ile tanımlı $\{x_n\}$ dizinin $0 \in F(T)$ yakınsadığını gösterelim; $x_0 \in X$ ve $(\alpha_n) = (\frac{1}{2}), (\beta_n) = (\frac{1}{n+1})$ olsun.

$n = 0$ ve $u_0 \in Tx_0 \subset [0,1]$ için; $v_0 \in Ty_0 \subset [0, \frac{y_0}{5}] \subset [0,1/2]$ olmak üzere

$y_0 = (1 - 1/1)x_0 + (1/1)u_0 \in [0,1]$ ve $x_1 = \frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}v_0 \in [0,1]$.

$n = 1$ için $u_1 \in Tx_1 = \left[0, \frac{x_1}{5}\right]$ *ve* $y_1 = (1 - 1/2)x_1 + (1/2)u_1 \in [0, \frac{x_1}{2}]$ olduğundan $v_1 \in Ty_1 \subset [0, \frac{y_0}{5}] \subset [0, \frac{x_1}{10}]$ olmak üzere $x_2 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}v_1 \in [0, \frac{x_1}{2}]$.

$n = 2$ için $u_2 \in Tx_2 = \left[0, \frac{x_2}{5}\right]$ *ve* $y2 = (1 - 1/3)x_2 + (1/3)u_2 \in [0, \frac{2x_2}{3}]$ olduğundan $v_2 \in Ty_2 \subset [0, \frac{y_1}{5}] \subset [0, \frac{2x_2}{15}]$ olmak üzere $x_3 = \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}v_2 \in [0, \frac{2x_2}{6}] \subset [0, \frac{x_2}{2}]$.

Benzer yolla devam edildiğinde, her $n \geq 3$ için $u_n \in Tx_n = \left[0, \frac{x_n}{5}\right]$ ve $y_n = ((1 - 1/(n+1)))x_2 + (1/(n+1))u_2 \in [0, \frac{nx_2}{n+1}]$ olduğundan $v_n \in Ty_n \subset [0, \frac{y_n}{5}] \subset [0, \frac{nx_n}{5(n+1)}]$ olmak üzere $x_{n+1} = \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2}v_n \in [0, \frac{nx_2}{2(n+1)}] \subset [0, \frac{x_n}{2}]$ sağlanır. Yani $x_{n+1} \in [0, \frac{x_n}{2}] \subset [0, \frac{x_{n-1}}{2^2}] \subset \ldots \subset [0, \frac{x_0}{2^{n+1}}]$ olup $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Sonuç olarak (x_n) dizisi T`nin sabit noktasına yakınsaktır.

BÖLÜM 5

SONLU NONEXPANSİVE DÖNÜŞÜM AİLESİ İÇİN YAKINSAKLIK SONUÇLARI

Bölüm 3 ve Bölüm 4'de varlık ve yakınsaklık sonuçları çalışılan bazı dönüşümler, sabit noktalarının varlığı durumunda ve bazı kısıtlamalar ile quasi-nonexpansive dönüşüm sınıfına dahil olurlar. Bu sebeple bu bölümde elde edilecek olan quasi-nonexpansive dönüşüm sınıfının sonlu ailesi için yakınsaklık sonuçları bu dönüşüm sınıfları içinde geçerli olacaktır.

Önerme 5.1 $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ iki reel sınırlı dizi ve $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ olsun. Bu durumda ise

$$\liminf_{n\to\infty}[a_n + b_n] = a + \liminf_{n\to\infty} b_n \tag{5.1}$$

sağlanır.

Tanım 5.2 (X,ρ) bir metrik uzay ve $\{T_i : C \to CC(X) : i = 1,2,\dots,N\}$ küme değerli dönüşümlerin ailesi $F = \bigcap_{i=1}^{N} F(T_i) \neq \emptyset$ koşulunu sağlasın. Eğer en az bir $i \in \{1,2,\dots N\}$ ve her $x \in X$ için $\rho(x, T_i x) \geq f(\rho(x,F))$ olacak şekilde, her $r \in (0,\infty)$ için $f(r) > 0$ koşulunu sağlayan ve azalmayan bir $f: [0,\infty] \to [0,\infty]$ dönüşümü varsa $\{T_i\}_{i=1}^{N}$ ailesine Koşul(I)'yı sağlar denir.

Tanım 5.3 (X,ρ), bir jeodezik uzay, $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \subset [0,1]$ ve $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ olsun. $\{x_1, x_2, \dots x_n\} \subset X$ sonlu kümesinin konveks kombinasyonu

$$\begin{aligned}
\bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i x_i &= \lambda_1 x_1 \oplus (1-\lambda_1)\left[\bigoplus_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_1} x_i\right] \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{2} \lambda_k \left[\frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^{2}\lambda_k} x_1 \oplus \frac{\lambda_2}{\sum_{k=1}^{2}\lambda_k} x_2\right] \oplus \left(1 - \sum_{k=1}^{2}\lambda_k\right)\left[\bigoplus_{i=2}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\sum_{k=1}^{2}\lambda_k} x_i\right] \\
&\quad \dots \\
&= \lambda_1 x_1 \oplus \lambda_2 x_2 \oplus \dots \oplus \lambda_n x_n
\end{aligned} \tag{5.2}$$

biçiminde tanımlıdır.

Önerme 5.4 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, $\{\lambda_1,\lambda_2,..,\lambda_n\} \subset [0,1]$ ve $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ olsun. Her sonlu $\{x_1,x_2,..x_n\} \subset X$ alt küme ve $x \in X$ için

$$\rho\left(\bigoplus_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, z\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \rho(x_i,z) \tag{5.3}$$

sağlanır [108].

Tanım 5.5 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi ve $\{T_i : C \to CC(X) : i = 1,2,\dots,N\}$ küme değerli dönüşümlerin bir ailesi olsun. $b,c \in (0,1)$ ve her $i = 0,1,2,\dots,N$ için $\{\alpha_{n,i}\}_n, \{\beta_{n,i}\}_n, \{\lambda_{n,i}\}_n \subset [b,\mathrm{c}]$, dizileri $\sum_{i=0}^{N} \lambda_{n,i} = 1$, $\sum_{i=1}^{N} (\alpha_{n,i} + \beta_{n,i}) = 1$, $\sum_{i=0}^{N} \gamma_{n,i} = 1$ şartlarını sağlayan reel diziler ve her $n \in \mathbb{N}$ için $u_{n,i} \in T_i y_n, v_{n,i} \in T_i z_n, w_{n,i} \in T_i x_n$ olmak üzere,

$$\begin{cases} x_0 \in C, \\ x_{n+1} = P_C\left(\bigoplus_{i=0}^{N} \lambda_{n,i} u_{n,i}\right), \\ y_n = P_C\left(\bigoplus_{i=1}^{N} \alpha_{n,i} w_{n,i} \oplus \bigoplus_{i=1}^{N} \beta_{n,i} v_{n,i}\right), \\ z_n = P_C\left(\gamma_{n,0} x_n \oplus \bigoplus_{i=1}^{N} \gamma_{n,i} w_{n,i}\right) \end{cases} \tag{5.4}$$

şeklinde tanımlanan algoritmaya N −küme değerli proximinal Picard-S iterasyon yöntemi denir.

Önerme 2.52'in daha genel hali, benzer kanıt yöntemini kullanılarak aşağıdaki şekilde verilebilir.

Önerme 5.6 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile $\delta(r,\epsilon)$ konvekslik modülüne sahip bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı ve $x \in X$ olsun. Ayrıca sabit ϵ için $\delta(r,\epsilon)$, r' ye göre artan olsun ve her $i = 1,2,\dots,N$ için $\{t_{n,i}\}_n \subset [b,c] \subset (0,1)$ dizileri her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{i=1}^{N} t_{n,i} = 1$ koşulunu sağlasın. Bu durumda her $i = 1,2,\dots,N$ için $\{x_{n,i}\} \subset X$ dizileri, sabit $r \geq 0$ ve her $i = 1,2,\dots,N$ için $\limsup\limits_{n\to\infty} \rho(x_{n,i}, x) \leq r$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} \rho\left(\bigoplus\limits_{i=1}^{N} t_{n,i}x_{n,i}, x\right) = r$ koşullarını sağlarsa her $k, l \in \{1,2,\dots N\}, k \neq l$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_{n,k}, x_{n,l}) = 0$ sağlanır.

İspat: Eğer $r = 0$ ise aşikardır. $r > 0$ olsun. Eğer en az iki sabit $k, l \in \{1,2,\dots N\}$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_{n,k}, x_{n,l}) \neq 0$ ise;

Her $i = 1,2,\dots,N$ için $\limsup\limits_{n\to\infty} \rho\big(x_{n,i}, x\big) \leq r$ sağlandığından, Önerme 5.4 yardımı ile her $m = 1, 2, \dots, N$ için

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \rho\left(\bigoplus_{\substack{i=1,\\ i\neq m}}^{N} \frac{t_{n,i}}{1-t_{n,m}} x_{n,i}, x\right) &\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{i=1,\\ i\neq m}}^{n} \frac{t_{n,i}}{1-t_{n,m}} \rho\big(x_{n,i}, x\big) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{i=1,\\ i\neq m}}^{n} \frac{t_{n,i}}{1-t_{n,m}} \left(\limsup_{n\to\infty} \rho\big(x_{n,i}, x\big)\right) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{i=1,\\ i\neq m}}^{n} \frac{t_{n,i}}{1-t_{n,m}} r = r.
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\lim_{n\to\infty} \rho\left(\bigoplus_{i=1}^{N} t_{n,i}x_{n,i}, x\right) = \lim_{n\to\infty} \rho\left(\big(1-t_{n,m}\big)\left[\bigoplus_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{N} \tfrac{t_{n,i}}{1-t_{n,m}} x_{n,i}\right] \oplus t_{n,m}x_{n,m}, x\right) = r$$

olduğundan Önerme 2.52'den $\lim\limits_{n\to\infty} \rho\left(\bigoplus\limits_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{N} \tfrac{t_{n,i}}{1-t_{n,m}} x_{n,i}, x_{n,m}\right) = 0$ olmalıdır. Halbuki; $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_{n,k}, x_{n,l}) \neq 0$ olduğundan $\{x_{n,k}\}$ ve $\{x_{n,l}\}$ dizilerinin (genelliği kaybetmeden yine aynı terimlerle gösterilen) $\inf_n \rho(x_{n,k}, x_{n,l}) > 0$ olacak biçimde $\{x_{n,k}\}$ ve $\{x_{n,l}\}$ alt dizileri vardır. Bu durumda her $m = 1, 2, \dots, N$ için

$$\rho(\bigoplus_{i=1}^{N} t_{n,i}x_{n,i}, x_{n,m}) = \rho\left((1-t_{n,m})\left[\bigoplus_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{N}\frac{t_{n,i}}{1-t_{n,m}}x_{n,i}\right]\oplus t_{n,m}x_{n,m}, x_{n,m}\right)$$

$$\leq (1-t_{n,m})\rho\left(\bigoplus_{\substack{i=1,\\ i\neq m}}^{N}\frac{t_{n,i}}{1-t_{n,m}}x_{n,i}, x_{n,m}\right) + t_{n,m}\rho(x_{n,m}, x_{n,m})$$

$$= (1-t_{n,m})\rho\left(\bigoplus_{\substack{i=1,\\ i\neq m}}^{N}\frac{t_{n,i}}{1-t_{n,m}}x_{n,i}, x_{n,m}\right)$$

sağlandığından

$$0 < \rho(x_{n,k}, x_{n,l})$$
$$\leq \rho\left(\bigoplus_{i=1}^{N} t_{n,i}x_{n,i}, x_{n,k}\right) + \rho\left(\bigoplus_{i=1}^{N} t_{n,i}x_{n,i}, x_{n,l}\right)$$
$$\leq (1-t_{n,k})\rho\left(\bigoplus_{\substack{i=1,\\ i\neq k}}^{N}\frac{t_{n,i}}{1-t_{n,k}}x_{n,i}, x_{n,k}\right) + (1-t_{n,l})\rho\left(\bigoplus_{\substack{i=1,\\ i\neq l}}^{N}\frac{t_{n,i}}{1-t_{n,l}}x_{n,i}, x_{n,l}\right)$$

elde edilir. $\{t_{n,k}\}_n$, $\{t_{n,l}\}_n \subset [b,c] \subset (0,1)$ ve metriğin pozitif tanımlı olmasından dolayı $m = k$ veya $m = l$ için $\lim_{n\to\infty}\rho\left(\bigoplus_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{N}\frac{t_{n,i}}{1-t_{n,m}}x_{n,i}, x_{n,m}\right) \neq 0$ dır. Bu ise çelişkidir.

Sonuç olarak her $k, l \in \{1,2,\dots N\}$ için $\lim_{n\to\infty}\rho(x_{n,k}, x_{n,l}) = 0$ sağlanır.

Önerme 5.7 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $\{T_i : C \to CC(X) \mid i = 1,2,\dots,N\}$ küme değerli nonexpansive dönüşümlerin bir ailesi, $F = \bigcap_{i=1}^{N} F(T_i) \neq \emptyset$ koşulunu sağlasın. Bu durumda F kapalıdır.

İspat: $\{x_n\} \subset F$ ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in C$ olsun.

Bu durumda her $i = 1,2,\dots,N$ için

$$\rho(x, T_i x) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, T_i x) \leq \rho(x, x_n) + H(T_i x_n, T_i x) \leq 2\rho(x_n, x)$$

olduğundan limit durumunda

$$\rho(x, T_i x) = 0$$

olup, $x \in F$ elde edildiğinden F kapalıdır

Teorem 5.8 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $\{T_i : C \to CC(X) \mid i = 1,2,\dots,N\}$ küme değerli nonexpansive dönüşümlerin bir ailesi, $F = \bigcap_{i=1}^{N} F(T_i) \neq \emptyset$ ve her $p \in F$ için $T_i p = \{p\}$ olsun. Bu durumda Tanım 5.5 ile verilen $\{x_n\}$ dizisi için ve her $p \in F$ için $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n,p)$ mevcuttur.

İspat: $p \in F$ olsun. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisinin tanımından her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\rho(z_n,p) &= \rho(P_C\left(\gamma_{n,0}x_n \oplus \bigoplus_{i=1}^{N} \gamma_{n,i}w_{n,i}\right),p) \\
&\leq \rho\left(\gamma_{n,0}x_n \oplus \bigoplus_{i=1}^{N} \gamma_{n,i}w_{n,i},p\right) \\
&\leq \gamma_{n,0}\rho(x_n,p) + \sum_{i=1}^{N} \gamma_{n,i}\rho(w_{n,i},p) \\
&\leq \gamma_{n,0}\rho(x_n,p) + \sum_{i=1}^{N} \gamma_{n,i}\rho(w_{n,i},T_ip) \\
&\leq \gamma_{n,0}\rho(x_n,p) + \sum_{i=1}^{N} \gamma_{n,i}H(T_ix_n,T_ip) \\
&\leq \gamma_{n,0}\rho(x_n,p) + \sum_{i=1}^{N} \gamma_{n,i}\rho(x_n,p) \\
&= \rho(x_n,p)
\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\rho(y_n,p) &= \rho(P_C\left(\bigoplus_{i=1}^{N}\alpha_{n,i}w_{n,i}\oplus\bigoplus_{i=1}^{N}\beta_{n,i}v_{n,i}\right),p) \\
&\leq \rho\left(\bigoplus_{i=1}^{N}\alpha_{n,i}w_{n,i}\oplus\bigoplus_{i=1}^{N}\beta_{n,i}v_{n,i},p\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{N}\alpha_{n,i}\rho(w_{n,i},p)+\sum_{i=1}^{N}\beta_{n,i}\rho(v_{n,i},p) \\
&\leq \sum_{i=1}^{N}\alpha_{n,i}\rho(w_{n,i},T_ip)+\sum_{i=1}^{N}\beta_{n,i}\rho(v_{n,i},T_ip) \\
&\leq \sum_{i=1}^{N}\alpha_{n,i}H(T_ix_n,T_ip)+\sum_{i=1}^{N}\beta_{n,i}H(T_iz_n,T_ip) \\
&\leq \sum_{i=1}^{N}\alpha_{n,i}\rho(x_n,p)+\sum_{i=1}^{N}\beta_{n,i}\rho(z_n,p) \\
&= \rho(x_n,p)
\end{aligned}
$$

ve de

$$
\begin{aligned}
\rho(x_{n+1},p) &= \rho(P_C\left(\bigoplus_{i=1}^{N}\lambda_{n,i}u_{n,i}\right),p) \\
&\leq \rho\left(\bigoplus_{i=1}^{N}\lambda_{n,i}u_{n,,},p\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{N}\lambda_{n,i}\rho(u_{n,i},p) \\
&\leq \sum_{i=1}^{N}\lambda_{n,i}\rho(u_{n,i},T_ip) \\
&\leq \sum_{i=1}^{N}\lambda_{n,i}H(T_iy_n,T_ip) \\
&\leq \sum_{i=1}^{N}\lambda_{n,i}\rho(y_n,p) \\
&= \rho(y_n,p)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Dolayısı ile her $n\in\mathbb{N}$ için $\rho(z_n,p)\leq\rho(x_n,p)$ ve $\rho(x_{n+1},p)\leq\rho(y_n,p)\leq\rho(x_n,p)$ olduğundan $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,p)$ mevcuttur.

Teorem 5.9 (X,ρ), $\varepsilon\in(0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X)\leq\frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $\{T_i : C\to CC(X)\mid i=1,2,\dots,N\}$ küme değerli nonexpansive dönüşümlerin bir ailesi, $F=\bigcap_{i=1}^{N}F(T_i)\neq\emptyset$ ve her $p\in F$ için

$T_ip = \{p\}$ olsun. Bu durumda Tanım 5.5 ile verilen $\{x_n\}$ dizisi için ve her $i = 1, 2, \ldots, N$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, T_ix_n) = 0$ dır.

İspat: $p \in F$ olsun. Bu durumda Teorem 5.8'den $\lim_{n\to\infty}\rho(x_n, p)$ vardır. $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, p) = c$ olsun. Bu durumda $\rho(z_n, p) \le \rho(x_n, p)$ ve $\rho(x_{n+1}, p) \le \rho(y_n, p) \le \rho(x_n, p)$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \rho(y_n, p) = c,\ \limsup_{n\to\infty} \rho(z_n, p) \le c$$

ve

$$\rho\big(v_{n,i}, p\big) \le \rho\big(v_{n,i}, T_ip\big) \le H(T_iz_n, Tp) \le \rho(z_n, p),$$

$$\rho\big(u_{n,i}, p\big) \le \rho(u_{n,i}, T_ip) \le H(T_iy_n, Tp) \le \rho(y_n, p),$$

$$\rho(w_{n,i}, p) \le \rho(w_{n,i}, T_ip) \le H(T_ix_n, Tp) \le \rho(x_n, p)$$

olduğundan da

$\limsup\limits_{n\to\infty} \rho(u_{n,i}, p) \le c,\ \limsup\limits_{n\to\infty} \rho\big(v_{n,i}, p\big) \le c$ ve $\limsup\limits_{n\to\infty} \rho\big(w_{n,i}, p\big) \le c$ olur.

$$\begin{aligned}
c = {} & \lim_{n\to\infty} \rho(y_n, p) \\
\le {} & \lim_{n\to\infty} \rho\left(\bigoplus_{i=1}^{N} \alpha_{n,i}w_{n,i} \oplus \bigoplus_{i=1}^{N} \beta_{n,i}v_{n,i}, p\right) \\
\le {} & \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{N} \alpha_{n,i}\limsup_{n\to\infty} \rho(w_n, p) + \sum_{i=1}^{N} \beta_{n,i}\limsup_{n\to\infty} \rho\big(v_{n,i}, p\big)\right] \\
\le {} & \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{N} \alpha_{n,i}c + \sum_{i=1}^{N} \beta_{n,i}c\right] \le c
\end{aligned}$$

olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} \rho\left(\bigoplus_{i=1}^{N} \alpha_{n,i}w_{n,i} \oplus \bigoplus_{i=1}^{N} \beta_{n,i}v_{n,i}, p\right) = c$ dir. Ayrıca $\limsup\limits_{n\to\infty} \rho(v_{n,i}, p) \le c$ ve $\limsup\limits_{n\to\infty} \rho(w_{n,i}, p) \le c$ olduğundan, yine Önerme 5.6'dan her $i, j = 1, 2, \ldots, N$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(v_{n,i}, v_{n,j}) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(v_{n,i}, w_{n,j}) = 0$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(w_{n,i}, w_{n,j}) = 0$ bulunur. $\{x_n\}$ dizisinin tanımından ve metriğin özelliğinden

$$
\begin{aligned}
\rho(y_n, p) &= \rho(P_C\left(\bigoplus_{i=1}^{N} \alpha_{n,i} w_{n,i} \oplus \bigoplus_{i=1}^{N} \beta_{n,i} v_{n,i}\right), p) \\
&\leq \rho\left(\bigoplus_{i=1}^{N} \alpha_{n,i} w_{n,i} \oplus \bigoplus_{i=1}^{N} \beta_{n,i} v_{n,i}, p\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \alpha_{n,i} \rho(w_{n,i}, p) + \sum_{i=1}^{N} \beta_{n,i} \rho(v_{n,i}, p) \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \alpha_{n,i} [\rho(w_{n,i}, v_{n,m}) + \rho(v_{n,m}, p)] + \sum_{i=1}^{N} \beta_{n,i} \rho(v_{n,i}, p) \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \alpha_{n,i} \rho(w_{n,i}, v_{n,m}) + (1 - \sum_{i=1}^{N} \beta_{n,i}) \rho(v_{n,m}, p) + \sum_{i=1}^{N} \beta_{n,i} \rho(v_{n,i}, p) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \alpha_{n,i} \rho(w_{n,i}, v_{n,m}) + \rho(v_{n,m}, p) + \sum_{i=1}^{N} \beta_{n,i} [\rho(v_{n,i}, p) - \rho(v_{n,m}, p)] \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \alpha_{n,i} \rho(w_{n,i}, v_{n,m}) + \rho(v_{n,m}, p) \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{N} \beta_{n,i} [\rho(v_{n,i}, v_{n,m}) + \rho(v_{n,m}, p) - \rho(v_{n,m}, p)]
\end{aligned}
$$

$$
\leq \sum_{i=1}^{N} \alpha_{n,i} \rho\big(w_{n,i}, v_{n,m}\big) + \rho(v_{n,m}, p) + \sum_{i=1}^{N} \beta_{n,i} \rho\big(v_{n,i}, v_{n,m}\big)
$$

olduğundan her $m = 1, 2, .., N$ için $\liminf_{n\to\infty} \rho(v_{n,m}, p) \geq c$ dir. Ayrıca $\limsup_{n\to\infty} \rho\big(v_{n,i}, p\big) \leq c$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \rho\big(v_{n,i}, p\big) = c$ dir. $\rho(v_{n,i}, p) \leq \rho(z_n, p)$ ve $\limsup_{n\to\infty} \rho(z_n, p) \leq c$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \rho(z_n, p) = c$ elde edilir. Son olarak

$$
\begin{aligned}
c &= \lim_{n\to\infty} \rho(z_n, p) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \rho\left(P_C\left(\gamma_{n,0} x_n \oplus \bigoplus_{i=1}^{N} \gamma_{n,i} w_{n,i}\right), p\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \rho\left(\gamma_{n,0} x_n \oplus \bigoplus_{i=1}^{N} \gamma_{n,i} w_{n,i}, p\right) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \left[\gamma_{n,0} \limsup_{n\to\infty} \rho(x_n, p) + \sum_{i=1}^{N} \gamma_{n,i} \limsup_{n\to\infty} \rho\big(w_{n,i}, p\big)\right] \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \left[\gamma_{n,0} c + \sum_{i=1}^{N} \gamma_{n,i} c\right] \leq c
\end{aligned}
$$

olduğundan $\lim_{n\to\infty}[\rho\left(\gamma_{n,0}x_n \oplus \bigoplus_{i=1}^{N} \gamma_{n,i}w_{n,i}, p\right) = c$ dir. Yine $\limsup_{n\to\infty} \rho(w_{n,i,}, p) \leq c$ ve $\limsup_{n\to\infty} \rho(x_n, p) \leq c$ olduğundan Önerme 5.6'dan her $i, j = 1, 2, \ldots, N$ için $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, w_{n,i}) = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} \rho(w_{n,i}, w_{n,j}) = 0$ elde edilir. Sonuç olarak her $i = 1, 2, \ldots, N$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\rho(x_n, T_i x_n) \leq \rho(x_n, w_{n,i})$ ve $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, v_{n,i}) = 0$ a olduğundan $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, T_i x_n) = 0$ elde edilir.

Teorem 5.10 (X, ρ), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kompakt ve konveks alt kümesi, $\{T_i : C \to CC(X) \mid i = 1,2, \ldots, N\}$ küme değerli nonexpansive dönüşümlerin bir ailesi, $F = \bigcap_{i=1}^{N} F(T_i) \neq \emptyset$ ve her $p \in F$ için $T_i p = \{p\}$ olsun. Eğer C kümesinde $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve her $i = 1, 2, \ldots, N$ için $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, T_i x_n) = 0$ olacak şekildeki bir sınırlı bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $z \in C$ ve $z \in F$ dir.

İspat: $\{x_n\}$ dizisi, C'de $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve her $i = 1, 2, \ldots, N$ için $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, T_i x_n) = 0$ olacak biçimde bir dizi olsun. Lemma 2.47'den $z \in C$ dir. C kompakt alt küme olduğundan, $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi $\{x_{n_k}\}$, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = u \in C$ olacak biçimde bulunabilir. $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = z$ olduğundan $u = z$ dir. Lemma 2.53'den her $n \in \mathbb{N}$ için $y_{n,i} \in T_i x_n$ ve $\rho(x_n, y_{n,i}) = \rho(x_n, T_i x_n)$ olacak biçimde her $i = 1, 2, \ldots, N$ için $\{y_{n,i}\}_n$ dizisi vardır ve $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, T_i x_n) = 0$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_{n,i}) = 0$ dir. Her $i = 1, 2, \ldots, N$ için $\rho(y_{n_k,i}, T_i z) \leq \rho(y_{n_k,i}, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, T_i z)$ ve $\rho(x_{n_k}, T_i z) \leq \rho(y_{n_k,i}, x_{n_k}) + \rho(y_{n_k,i}, T_i z)$ olduğundan $\lim_{k\to\infty} \rho(x_{n_k}, T_i z) = \lim_{k\to\infty} \rho(y_{n_k,i}, T_i z) = \rho(z, T_i z)$ elde edilir. her $i = 1, 2, \ldots, N$ için T_i' nin özelliğinden

$$\rho(T_i z, y_{n_k,i}) \leq H(T_i z, T_i x_{n_k}) \leq \rho(z, x_{n_k})$$

olup k üzerinden limit alındığından ρ metriğinin sürekliliğinden

$$\rho(T_i z, z) = \lim_{k\to\infty} \rho(T_i z, y_{n_k}) \leq \lim_{k\to\infty} \rho(z, x_{n_k}) = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak $z \in F$ dir.

Teorem 5.11 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $\{T_i : C \to CC(X) \mid i = 1,2,\dots,N\}$ küme değerli nonexpansive dönüşümlerin bir ailesi, $F = \bigcap_{i=1}^{N} F(T_i) \neq \emptyset$ ve her $p \in F$ için $T_i p = \{p\}$ olsun. Eğer en az bir $i = 1,2,\dots,N$ için T_i hemikompakt ve C kümesinde $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve her $i = 1,2,\dots,N$ için $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, T_i x_n) = 0$ olacak şekildeki bir sınırlı bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $z \in C$ ve $z \in F$ dir.

İspat: $\{x_n\}$ dizisi, C'de $\Delta - \lim_{n\to\infty} x_n = z$ ve her $i = 1,2,\dots,N$ için $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, T_i x_n) = 0$ olacak biçimde bir dizi olsun. Lemma 2.47'den $z \in C$ dir. En az bir $i = 1,2,\dots,N$ için T_i hemikompakt olduğundan, $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi $\{x_{n_k}\}$, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = u \in C$ olacak biçimde bulunabilir. İspatın geri kalanı Teorem 5.10 ile aynıdır.

Önerme 5.12 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kompakt ve konveks alt kümesi, $\{T_i : C \to CC(X) \mid i = 1,2,\dots,N\}$ küme değerli nonexpansive dönüşümlerin bir ailesi, $F = \bigcap_{i=1}^{N} F(T_i) \neq \emptyset$ ve her $p \in F$ için $T_i p = \{p\}$ olsun. Eğer C kümesinde her $i = 1,2,\dots,N$ için $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, T_i x_n) = 0$ ve her $p \in F$ için $\{\rho(x_n, p)\}$ olacak şekildeki bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $\omega_w(x_n) \subseteq F$ dir ve $\omega_w(x_n)$ yanlızca tek nokta içerir.

İspat: Önerme 3.11'in ispatına benzer olarak, Lemma 2.47, Teorem 5.10 ve Lemma 2.48 'den istenen elde edilir.

Önerme 5.13 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $\{T_i : C \to CC(X) \mid i = 1,2,\dots,N\}$ küme değerli nonexpansive dönüşümlerin bir ailesi, $F = \bigcap_{i=1}^{N} F(T_i) \neq \emptyset$ ve her $p \in F$ için $T_i p = \{p\}$ olsun. Eğer en az bir $i = 1,2,\dots,N$ için T_i hemikompakt ve C kümesinde her $i = 1,2,\dots,N$ için $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, T_i x_n) = 0$ ve her $p \in F$ için $\{\rho(x_n, p)\}$ olacak şekildeki bir $\{x_n\}$ dizisi varsa $\omega_w(x_n) \subseteq F$ dir ve $\omega_w(x_n)$ yanlızca tek nokta içerir.

İspat: Önerme 3.11'in ispatına benzer olarak, Lemma 2.47, Teorem 5.11 ve Lemma 2.48 'den istenen elde edilir.

Teorem 5.14 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kompakt ve konveks alt kümesi, $\{T_i : C \to CC(X) \mid i = 1,2,\dots,N\}$ küme değerli nonexpansive dönüşümlerin bir ailesi, $F = \bigcap_{i=1}^{N} F(T_i) \neq \emptyset$ ve her $p \in F$ için $T_i p = \{p\}$ olsun. Bu durumda Tanım 5.5 ile tanımlı $\{x_n\} \subset C$ dizisi F içindeki bir noktaya $\Delta -$yakınsaktır.

İspat: Teorem 5.8, Teorem 5.9 ve Önerme 5.12'den isten sonuç elde edilir.

Teorem 5.15 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $\{T_i : C \to CC(X) \mid i = 1,2,\dots,N\}$ küme değerli nonexpansive dönüşümlerin bir ailesi, $F = \bigcap_{i=1}^{N} F(T_i) \neq \emptyset$ ve her $p \in F$ için $T_i p = \{p\}$ olsun. Eğer en az bir $i = 1, 2, \dots, N$ için T_i hemikompakt ise, Tanım 5.5 ile tanımlı $\{x_n\} \subset C$ dizisi F içindeki bir noktaya $\Delta -$yakınsaktır.

İspat: Teorem 5.8, Teorem 5.9 ve Önerme 5.13'den isten sonuç elde edilir.

Teorem 5.16 (X,ρ), $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $\{T_i : C \to CC(X) \mid i = 1,2,\dots,N\}$ Koşul(I)'yı sağlayan küme değerli nonexpansive dönüşümlerin bir ailesi, $F = \bigcap_{i=1}^{N} F(T_i) \neq \emptyset$ ve her $p \in F$ için $T_i p = \{p\}$ olsun. Bu durumda Tanım 5.5 ile tanımlı $\{x_n\} \subset C$ dizisi F içindeki bir noktaya kuvvetli yakınsaktır.

İspat: $\{T_i\}_{i=1}^{N}$ ailesi Koşul(I)'yı sağladığından $\lim_{n\to\infty} f(\rho(x_n, F)) = 0$ dır. Bu durumda her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\rho\left(x_{n_k}, q_k\right) \leq \frac{1}{2^k}$$

olacak biçimde $\{x_n\}$ dizinsinin bir alt dizisi $\{x_{n_k}\}$ ve F içinde de $\{q_k\}$ dizisi bulunabilir. Teorem 5.8'den her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\rho(x_{n_{k+1}}, q_k) \leq \rho(x_{n_k}, q_k) \leq \frac{1}{2^k}$$

olup

$$\rho(q_{k+1}, q_k) \leq \rho(q_{k+1}, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}} q_k) \leq \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^{k-1}}$$

bulunur. Bu kullanılarak her $m \geq n$ için

$$\rho(q_n, q_m) \leq \sum_{k=1}^{m-1} \rho(q_k, q_{k+1}) \leq \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{2^{k-1}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}}$$

elde edilir. Bu ise $\{q_k\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğu anlamına gelir ve (X, ρ) tam uzay olduğundan $\lim_{k\to\infty} q_k = q \in X$ ve F kapalı olduğundan $q \in F$ dir. Teorem 5.8'den her $p \in F$ için $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, p)$ var olduğundan ve $\lim_{k\to\infty} \rho(x_{n_k}, q) = 0$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, q) = 0$ dır.

Teorem 5.17 (X, ρ), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $\{T_i : C \to CC(X) \mid i = 1,2, \dots, N\}$ en az bir $i = 1, 2, \dots, N$ için T_i hemikompakt, küme değerli nonexpansive dönüşümlerin bir ailesi, $F = \bigcap_{i=1}^{N} F(T_i) \neq \emptyset$ ve her $p \in F$ için $T_i p = \{p\}$ olsun. Bu durumda Tanım 5.5 ile tanımlı $\{x_n\} \subset C$ dizisi F içindeki bir noktaya kuvvetli yakınsaktır.

İspat: Teorem 5.9'den her $i = 1, 2, \dots, N$ için $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, T_i x_n) = 0$ ve }, en az bir $i = 1, 2, \dots, N$ için T_i hemikompakt olduğundan $\{x_n\}$ dizinsinin bir alt dizisi $\{x_{n_k}\}$ vardır. $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = q \in C$ olsun. Bu durumda her $i = 1, 2, \dots, N$ için

$$\begin{aligned} \rho(q, T_i q) &\leq \rho(q, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, T_i x_{n_k}) + H(T_i x_{n_k}, T_i q) \\ &\leq \rho(q, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, T x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, q) \end{aligned}$$

olup k üzerinden limite geçildiğinde her $i = 1, 2, \dots, N$ için

$$\rho(q, T_i q) \leq 0$$

olup $q \in F$ dir. Teorem 5.8'den her $p \in F$ için $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, p)$ var olduğundan ve $\lim_{k\to\infty} \rho(x_{n_k}, q) = 0$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, q) = 0$ dır; $\{x_n\} \subset C$ dizisi $q \in F$ ye kuvvetli yakınsaktır.

Teorem 5.18 (X, ρ), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi-\varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'in boştan farklı, kompakt ve konveks alt kümesi, $\{T_i : C \to CC(X) \mid i = 1,2, \dots, N\}$

küme değerli nonexpansive dönüşümlerin bir ailesi, $F = \bigcap_{i=1}^{N} F(T_i) \neq \emptyset$ ve her $p \in F$ için $T_i p = \{p\}$ olsun. Bu durumda Tanım 5.5 ile tanımlı $\{x_n\} \subset C$ dizisi F içindeki bir noktaya kuvvetli yakınsaktır.

İspat: Teorem 5.9'den her $i = 1, 2, \ldots, N$ için $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, T_i x_n) = 0$ ve }, C kompakt alt küme olduğundan $\{x_n\}$ dizinsinin bir alt dizisi $\{x_{n_k}\}$ vardır. $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = q \in C$ olsun. Bu durumda her $i = 1, 2, \ldots, N$ için

$$\begin{aligned}\rho(q, T_i q) &\leq \rho(q, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, T_i x_{n_k}) + H(T_i x_{n_k}, T_i q)\\ &\leq \rho(q, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, T x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, q)\end{aligned}$$

olup k üzerinden limite geçildiğinde her $i = 1, 2, \ldots, N$ için

$$\rho(q, T_i q) \leq 0$$

olup $q \in F$ dir. Teorem 5.8'den her $p \in F$ için $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, p)$ var olduğundan ve $\lim_{k\to\infty} \rho(x_{n_k}, q) = 0$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, q) = 0$ dır; $\{x_n\} \subset C$ dizisi $q \in F$ ye kuvvetli yakınsaktır.

Bu bölümde ve Bölüm 3 de verilen yakınsaklık sonuçları her T_i dönüşümü ve $p \in F(T_i)$ için $T_i\, p = \{p\}$ koşulu(son nokta koşulu) altında elde edildi. Fakat aşağıda tanımlanan iterasyon yöntemi ile bu koşulu ortadan kaldırmak mümkündür.

Tanım 5.19 (X, ρ), $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ sabiti için $diam(X) \leq \frac{\pi - \varepsilon}{2\sqrt{\kappa}}$ ile bir tam $CAT(\kappa)$ uzayı, C, X'inin boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümesi ve $\{T_i : C \to CC(X) : i = 1,2, \ldots, N\}$ küme değerli dönüşümlerin bir ailesi olsun. $b, c \in (0,1)$ ve her $i = 0,1,2, \ldots, N$ için $\{\alpha_{n,i}\}_n, \{\beta_{n,i}\}_n, \{\lambda_{n,i}\}_n \subset [b, c] \subset (0,1)$, dizileri $\sum_{i=0}^{N} \lambda_{n,i} = 1$, $\sum_{i=1}^{N} (\alpha_{n,i} + \beta_{n,i}) = 1$, $\sum_{i=0}^{N} \gamma_{n,i} = 1$ şartlarını sağlayan reel diziler ve her $n \in \mathbb{N}$ için $u_{n,i} \in P_{T_i} y_n, v_{n,i} \in P_{T_i} z_n, w_{n,i} \in P_{T_i} x_n$ olmak üzere,

$$\begin{cases} x_0 \in C, \\ x_{n+1} = P_C\left(\bigoplus_{i=0}^{N} \lambda_{n,i} u_{n,i}\right), \\ y_n = P_C\left(\bigoplus_{i=1}^{N} \alpha_{n,i} w_{n,i} \oplus \bigoplus_{i=1}^{N} \beta_{n,i} v_{n,i}\right), \\ z_n = P_C\left(\gamma_{n,0} x_n \oplus \bigoplus_{i=1}^{N} \gamma_{n,i} w_{n,i}\right) \end{cases} \tag{5.5}$$

şeklinde tanımlanan algoritmaya modifiyeli $N-$küme değerli proximinal Picard-S iterasyon yöntemi denir. Burada her $i=1,2,\ldots,N$ ve $x\in X$ için

$$P_{T_i}x=\{y\in T_ix\,:\,\rho(x,y)=\rho(x,T_ix)\}\subset T_ix \tag{5.6}$$

ile tanımlıdır. Her $p\in F(T_i)$ için $P_{T_i}(p)=\{y\in T_ip\,:\,\rho(p,y)=\rho(p,T_ip)=0\}=\{p\}$ dir. Dolayısı ile küme değerli $\{T_i:C\to CC(X):i=1,2,\ldots,N\}$ ailesi verildiğinde eğer her $i=1,2,\ldots,N$ için P_{T_i} nonexpansive ise, her $x\in X$, $u\in Tx$ ve $p\in F$ için

$$\rho(u,p)\le\rho\big(u,P_{T_i}p\big)\le H\big(Tu,P_{T_i}p\big)\le\rho(x,p) \tag{5.7}$$

sağlanacaktır. Bu yüzden bu bölümde elde edilen sonuçlar da $\{T_i:C\to CC(X):i=1,2,\ldots,N\}$ ailesi yerine $\{P_{T_i}\}_{i=1}^{N}$ ailesi nonexpansive, hemikompakt veya Koşul(*I*)'yı sağlar olarak alındığında ve iterasyon yöntemi olarak Tanım 5.5 ile verilen iterasyon yöntemi yerine Tanım 5.19 ile verilen iterasyon yöntemi kullanıldığında, Bölüm 5'teki sonuçlar son nokta koşulu olmaksızın elde edilebilir.

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, hem yeni tanımlanan küme değerli hibrid dönüşüm sınıflarının hem de literatürde var olan tekil değerli hibrid dönüşüm sınıflarının küme değerli genellemeleri için jeodezik uzaylarda varlık ve yakınsaklık sonuçları elde edilmiştir.

Bölüm 3'te nonexpansive benzeri küme değerli hibrid dönüşümlerin genellemeleri tanımlandı ve belirli şartlar altında jeodezik uzaylarda sabit noktalarının varlıkları gösterildi. Bu dönüşüm sınıflarının sabit noktalarına bazı yakınsaklık sonuçları elde edildi ve bu dönüşüm sınıflarından bazılarının sabit nokta kümelerinin kararlı olduğu ispatlandı. Tanımı verilen bu dönüşüm sınıfları, dolayısı ile nonexpansive ve nonspreding dışındaki mümkün olan bütün küme değerli alt sınıfları ilk defa bu tezde tanımlanmıştır.

Bölüm 4'te daraltan benzeri küme değerli hibrid dönüşümler tanımlanarak belirli şartlar altında sabit noktalarının varlıkları gösterildi. Bu dönüşüm sınıflarının sabit noktalarına bazı yakınsaklık sonuçları elde edilerek sabit nokta kümelerinin kararlı olduğu ispatlandı. Ayrıca yakınsaklığı çalışılan dizilerin elde edildiği iterasyon yöntemlerinin kararlı oldukları gösterildi. Tanımı verilen bu dönüşüm sınıfları, daraltan ve zayıf daraltan gibi literatürde var olan dönüşüm sınıflarından daha geneldirler.

Bölüm 5'te nonexpansive dönüşümlerin sonlu ailesi için son nokta koşulu ile ve son nokta koşulu olmaksızın bazı yakınsaklık sonuçları elde edildi. Elde edilen bu sonuçlar Bölüm 3 ve Bölüm 4'te verilen bazı dönüşüm sınıfları için de geçerli olmakla birlikte, gerek çalışılan Picard-S iterasyonu, gerekse çalışılan dönüşüm sınıfı yönünden literatürdeki bazı çalışmaların $CAT(\kappa)$ uzaylarındaki genellemeleridir.

Ayrıca Bölüm 3, Bölüm 4 ve Bölüm 5’te verilen sonuçların elde edildiği $CAT(\kappa)$ uzayları, $CAT(0)$ ve $\kappa < 0$ için $CAT(\kappa)$ ve Hilbert uzaylarını da içerdiğinden dolayı elde edilen bu sonuçlar bu alt uzaylarda da sınır koşulu altında geçerlidir.

Küme değerli dönüşümler ve jeodezik uzaylarla ilgilenen araştırmacılar, bu tezde Hausdorff metriğini içeren dönüşüm sınıfları için elde edilen sonuçları, kompaktlık ve hemikompaktlık gibi koşullardan arındırarak ve asimptotik yarıçap, merkez gibi tanımları ve bunlarla ilgili önermeleri, küme değerli dönüşümler için yeniden inşa ederek tekrar irdeleyebilirler. Ayıca jeodezik uzaylarda küme değerli sabit nokta teorisi yeni olduğundan, Banach uzaylarındaki küme değerli sabit nokta çalışmalarının mevcut uygulama alanları gibi uygulama alanları jeodezik uzaylarda çok fazla bulunmamaktadır. İlgili araştırmacılar Banach uzaylarındaki uygulama alanlarının jeodezik uzaylarda nasıl olabileceğini irdeleyebilirler.

KAYNAKLAR

[1] Amini-Harandi, A. ve Emami, H., (2010). "A Fixed Point Theorem for Contraction Type Maps in Partially Ordered Metric Spaces and Application to Ordinary Differential Equations", Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 72 (5): 2238-2242.

[2] Bonsall, F.F. ve Vedak, K., (1962). Lectures On Some Fixed Point Theorems of Functional Analysis, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay.

[3] Collatz, L., (1966). Functional Analysis and Numerical Mathematics, Academic Press, Newyork.

[4] Dugundji, J. ve Granas, A., (1982). Fixed Point Theory, Polish Scientific Publishers, Warszawa.

[5] Harjani, J. ve Sadarangani, K., (2010). "Generalized Contractions in Partially Ordered Metric Spaces and Applications to Ordinary Differential Equations", Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 72 (3): 1188-1197.

[6] Joshi, M.C. ve Bose, R.K., (1985). Some Topics in Nonlinear Functional Analysis, John Wiley & Sons, New York.

[7] Kirk, W. ve Sims, B., (2013). Handbook of Metric Fixed Point Theory, Springer Science & Business Media.

[8] Murthy, P. P., (2001). "Important Tools and Possible Applications of Metric Fixed Point Theory", Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 47 (5): 3479-3490.

[9] Ortega, J.M. ve Rheinboldt, W.C., (1970). Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, Society for Industrial and Applied Mathematics.

[10] Schweizer, B. ve Sklar, A., (1960). "Statistical Metric Spaces", Pacific Journal of Mathematics, 10(1): 313-334.

[11] Simmons, G.F., (1963). Introduction to Topology and Modern Analysis, Robert E. Krieger Publishing Company, Florida.

[12] Singh, S. L., (1990). "Application of Fixed Point Theorems to Nonlinear Integrodifferential Equations", Rivista di Matematica della Università di Parma, 16 (4): 205-212.

[13] Wieczorek, A., (1988). "Applications of Fixed-Point Theorems in Game Theory and Mathematical Economics", Wisdom Mat., 28: 25-34.

[14] von Neuman, J., (1937). "ÄUber ein Äokonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes, Ergebn", Math. Kolloq. 8: 73-83.

[15] Kakutani, S., (1941). "A generalization of Brouwer's fixed point theorem", Duke Math. J., 8: 457-459.

[16] Eilenberg, S., ve Montgomery, D., (1946), "Fixed point theorems for multi-valued transformation"s, Amer. J. Math. 68(2): 14-222.

[17] Fan, K., (1952). "Fixed-Point And Minimax Theorems İn Locally Convex Linear Topological Spaces", Proc. Natn. Acad. Sci. USA 38: 121-126.

[18] Aubin, J.P., (1979). Mathematical Methods Of Game Theory And Economic Theory, North Holland, New York.

[19] Nash, J., (1951). "Non-Cooperative Games", Ann. Math. 54: 286-295.

[20] Markin, J., (1968). "A Fixed Point Theorem For Set Valued Mappings", Bull. Amer. Math. Soc., 74: 639-640.

[21] Nadler Jr, S. B., (1969). "Multi-Valued Contraction Mappings", Pacific J. Math, 30(2): 475-488.

[22] Berinde, M., ve Berinde, V., (2007). "On A General Class Of Multi-Valued Weakly Picard Mappings", J. Math. Anal. Appl., 326: 772–782.

[23] Daffer, P. Z. ve Kaneko, H., (1995). "Fixed Points Of Generalized Contractive Multi-Valued Mappings", J. Math. Anal. Appl., 192: 655–666.

[24] Hitzler, P. ve Seda, A. K., (1999). "Multi-Valued Mappings, Fixed Point Theorems And Disjunctive Databases", 3rd Irish Workshop On Formal Methods (IWFM-99), EWIC, British Computer Society.

[25] Husain, T. ve Latif, A. (1991). Fixed Points Of Multi-Valued Nonexpansive Maps. Internat. J. Math. & Math. Sci. (14)3: 421-430.

[26] Jungck, G. ve Rhoades, B. E. (1998). "Fixed Point For Set Valued Functions Without Continuity", Ind. J. Pure And Appl. Math., 29(3): 227–238.

[27] Kaneko, H., (1988). "A Common Fixed Point Of Weakly Commuting Multi-Valued Mappings", Math. Japon., 33(5): 741–744.

[28] Kaneko, H. ve Sessa, S. (1989). "Fixed Point Theorems For Compatible Multi-Valued And Single-Valued Mappings", Internat. J. Math. Math. Sci., 12(2): 257–262.

[29] Kubiak, T., (1985). "Fixed Point Theorems For Contractive type multi-valued mappings". Math. Japon., 30: 89–101.

[30] Kubiaczyk, I. and Mostafa Ali, N., (1996). "A multi-valued fixed point theorems in non Archimedean vector spaces", Novi Sad J. Math., 26(2): 111–115.

[31] Lami Dozo, E., (1973). "Multi-valued nonexpansive mappings and Opial's condition", Proc. Amer. Math. Soc. 38: 286-292.

[32] Popa, V., (1999). “A general fixed point theorem for weakly commuting multi-valued mappings”, Anal. Univ. Dunarea de Jos, Galaμi, Ser. Mat. Fiz. Mec. Teor., Fasc. II 18 (22): 19–22.

[33] Miklaszewski, D., (2001). “A fixed point theorem for multivalued mappings with noncyclic values”, Topological Methods in Nonlinear Analysis Journal of the Juliusz Schauder Center, 17: 125–131.

[34] Moutawakil, D. E., (2004). “A fixed point theorem for multivalued maps in symmetric spaces”, Applied Mathematics ENotes, 4: 26-32.

[35] Olatinwo, M. O., (2009). “A fixed point theorem for multivalued weakly picard operators in b-metric spaces”, Demonstratio mathematica, (XLII)3

[36] Percup, R., (2002). “Fixed point theorems for acyclic multivalued maps and inclusions of Hammerstein type”, Seminar on Fixed Point Theory Cluj-Napoca, 3: 327-334.

[37] Kyzyska, S. ve Kubiaczyk, I., (1998). “Fixed point theorems for upper semicontinuous and weakly upper semicontinuous multi-valued mappings”, Math. Japonica, (47)2: 237–240.

[38] Popa,V., (2000). “A general coincidence theorem for compatible multi-valued mappings satisfying an implicit relation”, Demonstratio Math. (33)1: 159–164.

[39] Popa, V., (2015). A general fixed point theorem for implicit cyclic multi-valued contraction mappings”, Annales Mathematicae Silesianae 29: 119–129.

[40] Kaczynski, T. ve Zeidan, V., (1989). “An application of Ky-Fan fixed point theorem to an optimization problem”, Nonlinear Anal TMA, 13(3):259-261.

[41] Benchohra, M., Henderson, J., Ntouyas, S. K. ve Ouahab, A., (2008). “Existence results for fractional functional differential inclusions with infinite delay and applications to control theory”, Fractional Calculus and Applied Analysis, 11(1): 35-56.

[42] Allili, M., Corriveau, D., Deriviere, S. ve Kaczynski, T., (2007). “Detecting critical regions in multidimensional data sets via the Conley index approach”.

[43] Hitzler, P., ve Seda, A. K., (1999). “Multivalued mappings, fixed-point theorems and disjunctive databases”, 3rd Irish Workshop on Formal Methods (IWFM-99), EWIC, British Computer Society.

[44] Alexandrov, A. D., (1951). “A Theorem On Triangles in A Metric Space And Some Of Its Applications”, Trudy Mat. Inst. Steklov 38: 5-23.

[45] Alexandrov, A. D., (1955). Die Innere Geometrie Der Konvexen Flachen, Akadamie Verlag, Berlin.

[46] Alexandrov, A. D., (1957). “Ubereine Verallgemeinerung Der Riemannschen Geometrie”, Schriftreihe Des Forschinstituts Fur Mathematik 1: 33-84.

[47] Alexandrov, A. D., (1957). “Ruled Surfaces İn Metric Spaces”, Vestnik Leningrad Univ. 12: 5-26.

[48] Gromov, M., (1984). Metric Structure for Riemannian and non-Riemannian Spaces, Progress in Mathematics 152, Birkh¨auser, Boston.

[49] Cartan, É., (1926). "Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann", Bull. Soc. Math. France, 54(55):214-264.

[50] Cartan, É., (1927). "Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann II", Bull. Soc. Math. France, 55:114-134.

[51] Cartan, E. (1928). Lecons sur la Geometrie des Espaces de Riemann, Gauthier-Villars, Paris, 1928.

[52] Cartan, E. , (1932). "Les espaces riemanniens symetriques", Verh. Int. Math. Kongr. ZurichI, 152-161.

[53] Toponogov, V. A. (1959). Riemann spaces with curvature bounded below. Uspekhi Matematicheskikh Nauk, 14(1), 87-130.

[54] Toponogov, V. A., (1968). "Wıth Nonnegative Curvature Which Contain Straight Lines", In Thirty-one invited addresses at the International Congress of Mathematicians in Moscow, 70: 225.

[55] Toponogov, V. A. (1964). "Riemannian spaces with curvature bounded below". Engl. translation. Trans. Amer. Math. Soc., 37: 291-336.

[56] Kirk, W. A., (2003). "Geodesic Geometry and Fixed Point Theory-I", In Seminar of Mathematical Analysis", Malaga/Seville, 64: 195-225.

[57] Kirk, W. A., (2004). "Geodesic Geometry and Fixed Point Theory--II", In International Conference on Fixed Point Theory and Applications, 113-142.

[58] Dhompongsa, S., Kaewkhao, A ve Panyanak, B., (2005). "Lim's Theorems For Multivalued Mappings in CAT(0)Spaces" , J. Math. Anal. Appl. 312(2):478–487.

[59] Dhompongsa, S., Kirk, W. A. ve Sims, B., (2005). "Fixed Points Of Uniformly Lipschitzian Mappings", NonlinearAnal., 65: 762–772.

[60] Kirk, W. A. ve Panyanak, B.,(2008). "A Concept Of Convergence In Geodesic Spaces", Nonlinear Anal. 68(12): 3689-3696.

[61] Kohlenbach U., ve Leustean, L., (2007). "The Approximate Fixed Point Property in Product Spaces", Nonlinear Anal. 66(4): 806–818.

[62] Shahzad, N. ve Markin, J., (2008). "Invariant approximations for commuting mappings in CAT(0) and hyperconvex spaces", J. Math. Anal. Appl. 337(2):1457–1464.

[63] Piątek, Bożena., (2011). "Halpern iteration in CAT (κ) spaces." Acta Mathematica Sinica 27.4:635-646.

[64] Huang, S., (2012). "The Δ-convergence of iterations for nonexpansive mappings in CAT(κ) spaces", J. Nonlinear Convex Anal, 13(3): 541-554.

[65] Piatek, B., (2013). "Viscosity iteration in CAT(κ) spaces", Numerical Functional Analysis and Optimization, 34(11): 1245-1264.

[66] Wan, L. L., (2015). “Some Convergence Results for Multivalued Quasi-Nonexpansive Mappings in CAT(K) Spaces”, Fixed Point Theory and Applications, 2015(1), 5.

[67] Panyanak, B., (2014). “On total asymptotically nonexpansive mappings in CAT (κ) spaces”, Journal of Inequalities and Applications, 2014(1), 336.

[68] Sastry, K. P. R. ve G. V. R. Babu., (2005). "Convergence of Ishikawa iterates for a multi-valued mapping with a fixed point." Czechoslovak Mathematical Journal 55.4: 817-826.

[69] Rashwan, R. A., & Altwqi, S. M. (2015). On the convergence of SP-iterative scheme for three multivalued nonexpansive mappings in CAT (κ) spaces. Palestine Journal of Mathematics, 4(1), 73-83.

[70] Chang, S. S., Wang, G., Wang, L., Tang, Y. K. ve Ma, Z. L., (2014). “Δ-Convergence theorems for multi-valued nonexpansive mappings in hyperbolic spaces”, Applied Mathematics and Computation, 249:535-540.

[71] Puttasontiphot, T., (2010). “Mann and Ishikawa iteration schemes for multivalued mappings in CAT (0) spaces”, Appl. Math. Sci, 4(61): 3005-3018.

[72] Kim, J. K., Pathak, R. P., Dashputre, S., Diwan, S. D. ve Gupta, R., (2016). “Convergence theorems for generalized nonexpansive multivalued mappings in hyperbolic spaces”, SpringerPlus, 5(1): 1-16.

[73] Lim, T. C., (1974). “A fixed point theorem for multi-valued nonexpansive mappings in a uniformly convex Banach space”, Bull. Amer. Math. Soc. 80: 1123-1126.

[74] Uddin, I., Nieto, J. J. ve Ali, J., (2016). “One-step iteration scheme for multivalued nonexpansive mappings in CAT (0) spaces”, Mediterranean Journal of Mathematics, 13(3):1211-1225.

[75] Pathak, R. P., Dashputre, S., Diwan, S. D. ve Gupta, R., (2015). “On Noor-type iteration schemes for multivalued mappings in CAT (0) spaces”, Fixed point theory and applications, 2015(1), 133.

[76] Kreyszig, E., (1989). Introductory Functional Analysis with Applications, Wiley New York.

[77] Maddox, I.J., (1988). Elements of Functional Analysis, CUP Archive.

[78] Brown, A.L. ve Page, A., (1970). Elements of Functional Analysis, Van Nostrand-Reinhold.

[79] Berinde, V., (2007). Iterative Approximation of Fixed Points, Springer, Berlin.

[80] Banach, S., (1922). "Sur Les Opérations Dans Les Ensembles Abstraits et Leur Application Aux Equations Intégrales", Fundamenta Mathematicae, 3 (1): 133-181.

[81] Agarwal ,R. P., O’Regan, D. ve Sahu ,D.R., (2009). Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications, Springer

[82] Dube, L. S., (1975). “A Theorem on Common Fixed Points of multivalued Mappings”, Annal. Soc. Sci Bruxells, 84(4): 463 -468.

[83] Kamran,T., (2009). “Mizoguchi-Takahashi's Type Fixed Point Theorem”, Computers & Mathematics with Applications , 57: 507-511.

[84] Bridson, M. R. ve Haefliger, A., (1999). Metric Spaces of Non-positive Curvature, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.

[85] Ohta, S, (2007). “Convexities of metric spaces”, Geom. Dedic., 125:225-250.

[86] Panyanak, B.,(2007). “Mann and Ishikawa iterative processes for multivalued mappings in Banach spaces”, Comput. Mathe.Applic. 54: 872-877.

[87] Espínola, R. ve Fernández-León, A. (2009). CAT (k)-spaces, weak convergence and fixed points. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 353(1): 410-427.

[88] Dhompongsa, S. ve Panyanak, B., (2008). “On_-convergence theorems in CAT(0) spaces”, Comput. Math. Appl., 56: 2572-2579.

[89] Leustean, L., (2007). “A quadratic rate of asymptotic regularity for CAT (0)-spaces”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 325(1): 386-399.

[90] Sturm, Karl-Theodor, (2003). “Probability Measures on Metric Spaces of Nonpositive Curvature”, In 'Heat Kernels and Analysis on Manifolds, Graphs, and Metric Spaces', American Mathematical Society AMS. Contemp. Math. 338.

[91] Chidume, C. E., Chidume, C. C. O., Djitte, N. Ve Minjibir, M. S., (2013). “Krasnoselskii-type algorithm for fixed points of multi-valued strictly pseudo-contractive mappings”, Fixed Point Theory and Applications, (1), 58.

[92] Gursoy, F. ve Karakaya, V., (2014). “A Picard-S hybrid type iteration method for solving a differential equation with retarded argument”, ArXiv preprint, arXiv:1403.2546.

[93] Gursoy, F., (2016). “A Picard-S Iterative Method for Approximating Fixed Point of Weak-Contraction Mappings”, Filomat,30:2829–2845.

[94] Ishikawa, S., (1974). "Fixed Points by a New Iteration Method", Proceedings of the American Mathematical Society, 44 (1): 147-150.

[95] Noor, M.A., (2000). "New Approximation Schemes for General Variational Inequalities", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 251 (1): 217-229.

[96] Phuengrattana, W. ve Suantai, S., (2011). "On the Rate of Convergence of Mann, Ishikawa, Noor and SP-Iterations for Continuous Functions on an Arbitrary Interval", Journal of Computational and Applied Mathematics, 235 (9): 3006-3014.

[97] Chugh, R. Kumar, V. ve Kumar, S., (2012). "Strong Convergence of a New Three Step Iterative Scheme in Banach Spaces", American Journal of Computational Mathematics, 2: 345-357.

[98] Thianwan, S., (2009). “Common fixed points of new iterations for two asymptotically nonexpansive nonself-mappings in a Banach space”. Journal of Computational and Applied Mathematics, 224(2), 688-695.

[99] Weng, X., (1991). "Fixed Point Iteration for Local Strictly Pseudo-Contractive Mapping", Proceedings of the American Mathematical Society, 113 (3): 727-731.

[100] Kohsaka, F., ve Takahashi,W., (2008). “Fixed point theorems for a class of nonlinear mappings related to maximal monotone operators in Banach spaces”, Arch. Math. (Basel), 91:166-177.

[101] Takahashi, W., (2010). “Fixed point theorems for new nonlinear mappings in a Hilbert space”, J.Nonlinear Convex Anal.,11: 79-88.

[102] Aoyama, K., Iemoto, S., Kohsaka, F. ve Takahashi,W., (2010). “Fixed point and ergodic theorems for _-hybrid mappings in Hilbert spaces”, J. Nonlinear Convex Anal., 11 :335-343.

[103] Aoyama, K. and Kohsaka, F., (2011). “Fixed point theorem for _-nonexpansive mappings in Banach spaces”, Nonlinear Anal., 74:4387-4391.

[104] Kocourek, P., Takahashi, W. ve Yao, JC., (2010). “Fixed point theorems and weak convergence theorems for generalized hybrid mappings in Hilbert spaces”, Taiwanese J. Math., 14: 2497-2511.

[105] Lin, L. J., Chuang, C. S., & Yu, Z. T. (2011). “Fixed point theorems for mappings with condition (B)”. Fixed Point Theory and Applications, 2011(1), 92.

[106] Banach, Stefan, (1978). Théorie des opérations linéaires. Chelsea Publ. Comp., New York.

[107] Phuengrattana, Withun. "Fixed point theorems for N-generalized hybrid mappings in uniformly convex metric spaces." Fixed Point Theory and Applications 2013.1 (2013): 188.

[108] Dhompongsa, S., Kaewkhao, A. ve Panyanak, B., (2012). “On Kirk’s strong convergence theorem for multivalued nonexpansive mappings on CAT (0) spaces”, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 75(2):459-468.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Emirhan HACIOĞLU

Doğum Tarihi ve Yeri : 30/01/1986 - Erzurum

Yabancı Dili : İngilizce

E-posta : emirhanhacioglu@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Doktora	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2019
Y. Lisans	Matematik	Trakya Üniversitesi	2012
Lisans	Matematik (İngilizce)	Abant İzzet Baysal Üniversitesi	2008
Lise	Fen	Babaeski Lisesi	2003

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2008-2013	Trakya Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2013-	Yıldız Teknik Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

YAYINLARI

Makale

1. Hacıoglu, E. Ve Karakaya V., (2018). "Some Fixed Point Results for A Multivalued Generalization of Generalized Hybrid Mappings in CAT (κ)-Spaces", Konuralp Journal of Mathematics, 6(1) : 26-34.
2. Hacıoglu, E. ve Karakaya V., (2017). "Existence and convergence for a new multivalued hybrid mapping in CAT(κ) spaces", Carpathian Journal of Mathematics, 33(3): 319-326.
3. Hacioglu, E. ve Telci, E., (2012). "A Common Fixed Point Theorem For Set-Valued Mappings Using [Delta]-Distance In Complete Metric Spaces", Scientific Studies and Research, 22(2)

Bildiri

1. Hacıoğlu, E., Atalan, Y. ve Karakaya V., (2017). "On Existence And Convergence Theorems For A New Multivalued Mapping In Geodesic Spaces", International Conference On Operators In Morrey-Type Spaces And applications, 10-13 Temmuz 2017 in Ahi Evran Universitesi, Kırşehir.
2. Hacıoğlu, E. ve Karakaya, V., (2016). "Existence And Convergence Theorems For multivalued Generalized Hybrid Mappings In CAT(κ) Spaces", International Conference on Analysis and its Applications, 12-15 Temmuz 2016, Kırşehir.
3. Hacıoğlu, E., Karakaya, V. ve Atalan, Y. (2016). "On Existence and Convergence Theorems for a New General Nonlinear Mapping on CAT(0) Spaces", International Conference on Analysis and its Applications, 12-15 Temmuz 2016, Kırşehir.
4. Hacıoğlu, E., Karakaya, V., Doğan, K. ve Atalan, Y., (2014). "On The Convergence Results For A New İteration Method Under Generalized Multivalued Nonexpansive Mappings İn Banach Spaces", Karatekin Mathematics Days, KMD-2014, 11-13 June 2014, Çankırı.