T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RAMANUJAN-NAGELL DENKLEMİ VE BAZI GENELLEŞTİRMELERİ

Uğur ZENGİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Cebir ve Sayılar Teorisi Programı

Danışman

Doç. Dr. Murat ALAN

Temmuz, 2019

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RAMANUJAN-NAGELL DENKLEMİ VE BAZI GENELLEŞTİRMELERİ

Uğur ZENGİN tarafından hazırlanan tez çalışması 22.07.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Cebir ve Sayılar Teorisi Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Murat ALAN
Yildiz Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Murat ALAN, Danışman
Yildiz Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Ünsal TEKİR, Üye
Marmara Ünivarsitesi

Danışmanım Doç. Dr. Murat ALAN sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Ramanujan-Nagell Denklemi ve Bazı Genelleştirmeleri başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Uğur ZENGİN

İmza

Sevgili Aileme…

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın planlanmasında, düzenli bir şekilde yürütülmesinde ve oluşmasında bana yol gösteren ve destek olan, karşılaştığım zorluklarda ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Doç. Dr. Murat ALAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Her şeyin başında bugünlere gelmemi sağlayan, bana destek ve yardımcı olan sevgili aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Uğur ZENGİN

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ

$\mathfrak{F}(D)$	Dedekind Bölgesinin Kesir İdeallerinin Kümesi
$\mathfrak{P}(D)$	Dedekind Bölgesinin Temel Kesir İdeallerinin Kümesi
u_n	Fibonacci Dizisinin n. Terimi
$(\frac{a}{n})$	Jacobi Sembolü
$\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$	$\mathbb{K}$ Kuadratik Cismi
$O_{\mathbb{K}}$	$\mathbb{K}$ Kuadratik Cisminin Cebirsel Tamsayılar Halkası
$(\frac{a}{p})$	Legendre Sembolü
L_n	Lucas Dizisinin n. Terimi
$Cl(O_{\mathbb{K}})$	$O_{\mathbb{K}}$'nın Sınıf Grubu
$h(\mathbb{K})$	$O_{\mathbb{K}}$'nın Sınıf Sayısı
(a, b)	a ve b Tamsayılarının Ortak Blenlerinin En Büyüğü

TABLO LİSTESİ

ÖZET

Ramanujan-Nagell Denklemi ve Bazı Genelleştirmeleri

Uğur ZENGİN

Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Murat ALAN

Bu tezde Ramanujan-Nagell Denklemi'nin bir varyasyonu olan $x^2 + 3^a 41^b = y^n$ denkleminin $x, y \geq 1$, $(x, y) = 1$, $a, b \geq 0$, $n \geq 3$ ve $a, b, x, y, n \in \mathbb{Z}$ şartları altında çözümleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Diyofantus denklemleri, ilkel bölen teoremi, üstel denklemler

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ABSTRACT

Ramanujan-Nagell's Equation and Some of its Variations

Uğur ZENGİN

Department of Mathematics
Master of Science Thesis

Advisor: Assoc. Prof. Murat ALAN

In this thesis, solutions of the equation $x^2 + 3^a 41^b = y^n$ which is a variation of Ramanujan-Nagell Equation has been examined under conditions $x, y \geq 1$ and $(x, y) = 1$ and $a, b \geq 0$ and $n \geq 3$ and a, b, x, y, n $\in \mathbb{Z}$.

Keywords: Diophantine equations, primitive divisor theorem, exponential equations

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

1
Giriş

1.1 Literatür Özeti

16. yy.da yaşamış olan Fransız rahip ve matematikçi Marine Mersenne $n \leq 257$ olmak üzere $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$ için $M_n = 2^n - 1$ sayısının asal olduğunu ileri sürmüştür. Tabiki Mersenne'in listesi kusursuz değildi. M_{61}, M_{89}, M_{107} sayıları asal olmakla beraber M_{67} ve M_{257} sayıları da bileşik sayılardı.
Lenstra, Pomerance ve Wagstaff sonsuz sayıda p asal sayısı için M_p sayısının asal olacağı varsayımında bulundular[1].
Üçgensel sayılar ise $\frac{n(n+1)}{2}$ şeklinde yazılabilen tam sayılardır. Srinivasa Ramanujan 1913 yılında sadece sonlu sayıda Mersenne Sayısının üçgensel olabileceği varsayımında bulunmuştur. Ramanujan'ın varsayımına cevap vermek $x^2 + 7 = 2^n$ denkleminin sonlu sayıda tam sayı çözümü olduğunu göstermekle denktir. 1948 yılında Nagell bu denkelmin çözümlerini $(x, n) = (1, 3), (3, 4), (5, 5), (11, 7), (181, 15)$ olarak ispatlamıştır[2].
Bundan sonra $x^2 + 7 = 2^n$ denklemi Ramanujan-Nagell Denklemi olarak anılmış ve $x^2 + C = y^n$ veya $Ax^2 + C = y^n$ formundaki Diyofantus Denklemlerine "Genelleştirilmiş Ramanujan-Nagell Denklemleri" denilmiştir.
İlk referanslar $x^2 + 2 = y^3$ denkleminin tek çözümünün $x = 5$ ve $y = 3$ olduğu Fermat tarafından öne sürülüp Euler tarafından ispatlandığıdır. Genel bir n için ilk ispat $x^2 + 1 = y^n$ denklemi için Lebesgue tarafından yapılmıştır[3]. Nagell $x^2 + 5 = y^n$ ve $x^2 + 3 = y^n$ denklemleri için bir çözüm olmadığını göstermiştir[4]. J.H.E Cohn is $x^2 + C = y^n$ denkleminin çözümlerini $0 \leq C \leq 100$ için ispatlamıştır[5].
S.A. Arif ve F.S.A. Muriefah $x^2 + q^{2k+1} = y^n$ ve $x^2 + q^{2k} = y^n$ denklemlerini bazı özel q asalları için genelleştirmişlerdir[6][7].
F. Luca, F.S.A. Muriefah, A. Togbe $x^2 + 2^a 3^b = y^n$ ve $x^2 + 5^a 13^b = y^n$ denklemlerinin çözümlerini[8][9] ve İ.N. Cangul, M. Demirci, F. Luca, İ. İnam and G. Soydan ise $x^2 + 2^a 3^b 11^c = y^n$ denleminin çözümlerini ispatlamışlardır[10].

1.2 Tezin Amacı

Bu tezde Genelleştirilmiş Ramanujan-Nagell Denkleminin bir özel durumu olan $x^2 + 3^a 41^b = y^n$ denkleminin çözümlerini cebirsel tamsayılar halkalarından, ilkel bölen teoreminden ve eliptik eğrilerden yararlanarak bulmak amaçlanmıştır. Bunun için ayrıca MAGMA programından da faydalanılmıştır.

1.3 Hipotez

Ramanujan-Nagell denkleminde olduğu gibi şimdiye kadar incelenen genelleştirilmiş durumlarda da belirli şartlar altında sonlu sayıda çözüm veya çözüm ailesi gelmektedir yada denklemin çözümü olmamaktadır. Tezin konusu olan $x^2 + 3^a 41^b = y^n$ denkleminde de kabul edilen şartlar altında sonlu sayıda çözümün olacağı veya herhangi bir çözümünün bulunmayacağı iddia edilmektedir.

2
Genel Bilgiler

2.1 Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1. Eğer bir $\alpha \in \mathbb{C}$ için $f(\alpha) = 0$ olacak şekilde bir $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ monik polinomu varsa α'ya Cebirsel Tamsayı denir.

Tanım 2.2. Eğer bir $\alpha \in \mathbb{C}$ için $f(\alpha) = 0$ olacak şekilde bir $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ monik polinomu varsa α'ya Cebirsel Sayı denir.

Tanım 2.3. $P(x) = x^2 + ax + b \in \mathbb{Q}[x]$ ve $P(x)$ polinonu $\mathbb{Q}[x]$'de indirgenemez olsun. $P(x)$ polinomunun köklerini α_1 ve α_2 olarak kabul edelim. $\mathbb{Q}(\alpha_1)$=$\{a + b\alpha_1 | a, b \in \mathbb{Q}\}$ kümesine kuadratik cisim denir.

Tanım 2.4. O_K ile K cismi içindeki tüm cebirsel tamsayıları gösterelim. Burada O_K'ya K Cisminin Cebirsel Tamsayılar Halkası denir.
Özel olarak K cismi kuadratik ise yani K=$\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ ise;

$$O_K = \begin{cases} \mathbb{Z}(\sqrt{m}),\ m \equiv 2,3 \mod 4 \\ \mathbb{Z}(\frac{1+\sqrt{m}}{2}),\ m \equiv 1 \mod 4 \end{cases} \tag{2.1}$$

ile tanımlıdır.

Tanım 2.5. D bir tamlık bölgesi, K D'nin kesir cismi ve $\emptyset \neq A \subseteq K$ olsun.

- $\forall a, b \in A$ için a+b $\in A$
- $\forall r \in D$ için ra $\in A$
- $0 \neq \gamma \in D$ öyleki $\gamma A \subseteq D$

şartları sağlanıyorsa A'ya D'nin kesir ideali (fractional ideal) denir.

Teorem 2.1. *D tamlık bölgesinin tüm kesir ideallerinin kümesini $\mathfrak{F}(D)$ ile gösterelim. Eğer D Dedekind Bölgesi ise $\mathfrak{F}(D)$ çarpma işlemine göre grup olur.[11]*

Teorem 2.2. *D tamlık bölgesinin tüm temel kesir ideallerinin kümesini $\mathfrak{P}(D)$ ile gösterelim. Bu durumda $\mathfrak{P}(D) \triangleleft \mathfrak{F}(D)$ olur.[11]*

Tanım 2.6. $\mathfrak{P}(D) \triangleleft \mathfrak{F}(D)$ olduğundan bölüm grubu tanımlanabilir. Böylece $Cl(O_K)$=$\mathfrak{F}(D)/\mathfrak{P}(D)$ bölüm grubuna O_K'nın Sınıf Grubu (Class Group of O_K) denir. Ayrıca $Cl(O_K)$ bölüm grubunun eleman sayısına da O_K'nın sınıf sayısı denir.

Teorem 2.3. *K bir cebirsel sayı cismi olsun ve h ise K'nın sınıf sayısını göstersin. A kümesi; (n,h)=1 olmak üzere n pozitif tamsayıları için A^n temel ideal olacak şekilde O_K'nın integral ideali olsun. Böylece A temel idealdir.[11]*

Tanım 2.7. α ve β cebirsel tamsayılar olsun. $\alpha+\beta$ ve $\alpha\beta$ aralarında asallar olmak ve α/β birimin kökü olmamak üzere (α,β) ikilisine Lucas İkilisi denir. Böylece verilen (α,β) Lucas İkilisi için, Lucas Sayılarında karşılık gelen dizi aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$u_n = u_n(\alpha,\beta) = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} \ (n=0,1,2,...) \tag{2.2}$$

Tanım 2.8. Δ=$(\alpha-\beta)^2$ olsun. Eğer q asal sayısı için $q\,|\,u_n$ ve $q \not| \Delta\sum_{1\le m<n} u_m$ oluyorsa q'ya u_n'in ilkel böleni denir.

Teorem 2.4. *Eğer q, L_p Lucas Dizisinde bir ilkel bölen ise $q \equiv \mp 1 \mod p$. Daha özel olarak $q \equiv e = (\frac{-4d}{q})$. Burada $(\frac{a}{q})$ Legendre sembolüdür.[12]*

Teorem 2.5. ***(İlkel Bölen Teoremi).*** *İlkel Bölen Teoremi bize şunu söylemektedir;*
Eğer $n \notin \{1,2,3,4,6\}$ ise u_n'in tamamını bildiğimiz sonlu sayıdaki durum haricinde ilkel böleni vardır.[12]

Teorem 2.6. *D bir Dedekind Bölgesi olsun. A, B, C idealleri D'nin integral idealleri olmak üzere bazı $n \in Z^+$ için A ve B aralarında asal ve $AB = C^n$ olsun. Böylece D'nin öyle A_1 ve B_1 idealleri vardır ki*

$$A = A_1^n, B = B_1^n, C = A_1^n B_1^n$$

(2.3)

İspat. D bir Dedekind Bölgesi olduğundan, D'nin 0'dan farklı her integral ideali asal ideallerin çarpımı şeklinde tektürlü yazılabilir. Böylece;

$C = P_1^{\alpha_1}...P_r^{\alpha_r}$.
Burada $P_1, P_2, ..., P_r$ $r \geq 0$ için birbirinden farklı asal idealler ve $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ pozitif tamsayılardır.
Böylece;
$AB = P_1^{n\alpha_1}...P_1^{n\alpha_r}$. A ve B idealleri aralarında asal ve herbir $P_i^{n\alpha_i}$ $i = 1, 2, ..., r$ asal kuvveti yalnızca A yada B'yi böler.
Buradan; bazı s tamsayıları için
$0 \leq s \leq r$ $A = P_1^{n\alpha_1}...P_s^{n\alpha_s}$, $P_{s+1}^{n\alpha_{s+1}}...P_r^{n\alpha_r}$ yazılabilir.
$A_1 = P_1^{\alpha_1}...P_s^{\alpha_s}$, $B_1 = P_{s+1}^{\alpha_{s+1}}...P_r^{\alpha_r}$ yazarsak;
$A = A_1^n$, $B = B_1^n$ ve $C = A_1 B_1$ olur.[11] ■

Teorem 2.7. *$\mathbb{K}$ bir cebirsel sayı cismi olsun. h ise $\mathbb{K}$'nın sınıf sayısını göstersin. A, O_K'nın bir integral ideali olmak üzere (h,k)=1 olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}^+$ için A^ktemel ideal olsun. Bu durumda A temel ideal olur.*

İspat. A idealinin sınıfını [A] ile gösterelim, $H(K)$'nın mertebesi de h olduğundan $[A]^h = I$'dır. Böylece A^h temel idealdir.
$(h, k) = 1$ olduğundan öyle r, s tamsayıları vardır ki $rh + sk = 1$.
Böylece; A^k temel ideal olduğundan
$A = A^{rh+sk} = (A^h)^r + (A^k)^s$ de temel idealdir.[11] ■

Tanım 2.9. p bir asal sayı ve (a,p)=1 olacak şekilde a bir tamsayı olsun. Eğer $x^2 \equiv a(modp)$ kongrüansının bir çözümü varsa a'ya p'nin bir kuadratik rezidüsü denir.

Tanım 2.10. p bir tek asal sayı ve (a,p)=1 olacak şekilde a tamsayısı için Legendre Sembolü;

$$(a|p) = (a/p) = (\frac{a}{p}) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x^2 \equiv a(modp)\text{'nin çözümü var} \\ -1, & x^2 \equiv a(modp)\text{'nin çözümü yok} \\ 0, & p|a \end{array} \right\} \quad (2.4)$$

ile tanımlıdır.

Tanım 2.11. Jacobi Sembolü de $(a|n) = (a/n) = (\frac{a}{n})$ ile gösterilir ve Legendre Sembolü'nün herhangi bir n pozitif tek tamsayısı ve a tamsayısı için genellemesidir.

Tanım 2.12. Jacobi Sembolü m ve n pozitif tek tamsayıları ve a ve b tamsayıları için aşağıdaki özelliklere sahiptir. [13]

- $n = p_1^{c_1} p_2^{c_2} \cdots p_k^{c_k}$ bir tek tamsayı, p_i'ler tek asal sayılar ve c_i'ler de pozitif tamsayılar olmak üzere;
  $(\frac{a}{n}) = (\frac{a}{p_1})^{c_1} (\frac{a}{p_2})^{c_2} \cdots (\frac{a}{p_k})^{c_k}$

- Eğer $a \equiv b(modp)$ ise $(\frac{a}{n}) = (\frac{b}{n})$
- $(\frac{ab}{n}) = (\frac{a}{n})(\frac{b}{n})$
- $(\frac{a}{mn}) = (\frac{a}{m})(\frac{a}{n})$
- $(\frac{-1}{n}) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$
- $(\frac{2}{n}) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$
- (m,n)=1 olmak üzere $(\frac{m}{n}) = (\frac{n}{m})(-1)^{\frac{m-1}{2}\frac{n-1}{2}}$

Örnek 2.1.

$(\frac{1235}{10007}) = -(\frac{10007}{1235}) = -(\frac{127}{1235}) = (\frac{1235}{127}) = (\frac{92}{127}) = (\frac{4}{127})(\frac{23}{127})$

$= (\frac{23}{127}) = -(\frac{127}{23}) = -(\frac{12}{23}) = -(\frac{4}{23})(\frac{3}{23}) = -(\frac{3}{23}) = (\frac{23}{3})$

$= (\frac{2}{3}) = -1$

Tablo 2.1 İlkel Bölenin Olmadığı Sonlu Durumlar [12]

n	$\frac{\alpha+\sqrt{\Delta}}{2}$			
5	$\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1\mp\sqrt{-7}}{2}$	$1\mp\sqrt{-10}$	$\frac{1\mp\sqrt{-11}}{2}$
	$\frac{1\mp\sqrt{-15}}{2}$	$6\mp\sqrt{-19}$	$6\mp\sqrt{-341}$	
7	$\frac{1\mp\sqrt{-7}}{2}$	$\frac{1\mp\sqrt{-19}}{2}$		
8	$1\mp\sqrt{-6}$	$\frac{1\mp\sqrt{-7}}{2}$		
10	$1\mp\sqrt{-2}$	$\frac{5\mp\sqrt{-3}}{2}$	$\frac{5\mp\sqrt{-47}}{2}$	
12	$\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1\mp\sqrt{-7}}{2}$	$\frac{1\mp\sqrt{-11}}{2}$	
	$1\mp\sqrt{-14}$	$\frac{1\mp\sqrt{-15}}{2}$	$\frac{1\mp\sqrt{-19}}{2}$	
13	$\frac{1\mp\sqrt{-7}}{2}$			
18	$\frac{1\mp\sqrt{-7}}{2}$			
30	$\frac{1\mp\sqrt{-7}}{2}$			

Tablo 2.2 $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ ve $-195 \leq d < 0$ için İmajiner Kuadratik Cisimlerin Sınıf Sayısı [11]

d	h(K)	d	h(K)	d	h(K)	d	h(K)	d	h(K)
-1	1	-38	6	-78	4	-115	2	-158	8
-2	1	-39	4	-79	5	-118	6	-159	10
-3	1	-41	8	-82	4	-119	10	-161	16
-5	2	-42	4	-83	3	-122	10	-163	1
-6	2	-43	1	-85	4	-123	2	-165	8
-7	1	-46	4	-86	10	-127	5	-166	10
-10	2	-47	5	-87	6	-129	12	-167	11
-11	1	-51	2	-89	12	-130	4	-170	12
-13	2	-53	6	-91	2	-131	5	-173	14
-14	4	-55	4	-93	4	-133	4	-174	12
-15	2	-57	4	-94	8	-134	14	-177	4
-17	4	-58	2	-95	8	-137	8	-178	8
-19	1	-59	3	-97	4	-138	8	-179	5
-21	4	-61	6	-101	14	-139	3	-181	10
-22	2	-62	8	-102	4	-141	8	-182	12
-23	3	-65	8	-103	5	-142	4	-183	8
-26	6	-66	8	-105	8	-143	10	-185	16
-29	6	-67	1	-106	6	-145	8	-186	12
-30	4	-69	8	-107	3	-146	16	-187	2
-31	3	-70	4	-109	6	-149	14	-190	4
-33	4	-71	7	-110	12	-151	7	-191	13
-34	4	-73	4	-111	8	-154	8	-193	4
-35	2	-74	10	-113	8	-155	4	-194	20
-37	2	-77	8	-114	8	-157	6	-195	4

2.2 Ramanujan-Nagell Denklemi

Ramanujan'ın varsayımından yola çıkarak Üçgensel Sayıları, Mersenne Sayılarına eşitlediğimizde;
$\frac{m(m+1)}{2} = 2^k - 1$ eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliğin her iki tarafını 8 ile çarpıp 1 ile topladığımızda;
$4m^2 + 4m + 1 = 2^{k+3} - 7$ eşitliğine ulaşırız. $x = 2m + 1$ ve $n = k + 3$ değişken dönüşümlerini yapıldığında;
$x^2 + 7 = 2^n$ Ramanujan-Nagell Denklemi elde edilir. Bu denklemin sonlu sayıda (x,n) çözümünün olduğunu göstermek Ramanujan'ın sonlu sayıda Mersenne Sayısının, Üçgensel olduğu varsayımını ispatlayacaktır.

- n çift sayı olsun.
  $7 = 2^n - x^2$ eşitliğini $7 = (2^{n/2} + x)(2^{n/2} - x)$ şeklinde çarpanlarına ayırabiliriz. Burada;
  $2^{n/2} + x = 7$ ve $2^{n/2} - x = 1$ olduğu açıktır. Kolayca görüleceği gibi n=4 dışında bir çift sayı denklemi sağlayamaz.
  Bu durumda n=4 için $x = \mp 3$ olur.

- n tek sayı olsun.
  n=3 olursa $x = \mp 1$ ve n=5 olursa $x = \mp 5$ olduğu grülebilir. $n \geq 7$ olduğunu var sayalım. 2'yi
  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[\sqrt{-7}]$'de çarpanlarına ayırırsak $2 = (\frac{1-\sqrt{-7}}{2})(\frac{1+\sqrt{-7}}{2})$ eşitliğini yazabiliriz. Burada $(\frac{1-\sqrt{-7}}{2})$ ve $(\frac{1+\sqrt{-7}}{2})$ indirgenemez elemanlar olup, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[\sqrt{-7}]$ tek türlü çarpanlara ayrılabilir bölge olduğundan aynı zamanda asaldırlar.
  $x^2 + 7 = 2^n$ denklemini mod4'de kontrol ettiğimizde $n \geq 7$ için x'in tek sayı olduğunu görürüz. $x = 2k + 1$ için $4k^2 + 4k + 8$ ifadesi 4 ile bölünebilmektedir. $m = n - 2$ için esas denklemimizi, $\frac{x^2+7}{4} = 2^m$ şeklinde yazabilir ve bunu da $(\frac{x+\sqrt{-7}}{2})(\frac{x-\sqrt{-7}}{2}) = (\frac{1+\sqrt{-7}}{2})^m(\frac{1+\sqrt{-7}}{2})^m$ şeklinde çarpanlarına ayırabiliriz.
  $(\frac{x+\sqrt{-7}}{2}) = (\frac{u+v\sqrt{-7}}{2})^n = \gamma^n$ ve $(\frac{x-\sqrt{-7}}{2}) = (\frac{u-v\sqrt{-7}}{2})^n = \bar{\gamma}^n$ eşitliklerinden de
  $L_n = \frac{\gamma^n - \bar{\gamma}^n}{\gamma - \bar{\gamma}} = \frac{1}{v} \in \mathbb{Z}$ Lucas Dizini yazabiliriz. $v = \mp 1$ olabilir, buna göre L_n Lucas Dizisinin ilkel böleni (primitive divisor) yoktur. Tablodan kontrol ettiğimizde m=5,7,8,12,13,18,30 olabilir. $m = n - 2$ ve n tek sayı kabulümüz gereği n=7,9,15 olabilir. Burada da denklemimizi sağlayan değerler n=7,15'dir ve bunlara karşılık gelen x çözümleri de $x = \mp 11, \mp 181$'dir.
  Sonuç olarak $x^2 + 7 = 2^n$ denkleminin tüm tamsayı çözümleri;
  $(x, n) = (\mp 1, 3), (\mp 3, 4), (\mp 5, 5), (\mp 11, 7), (\mp 181, 15)$ olmaktadır.

3
$x^2 + 3^a 41^b = y^n$ Denkleminin Çözümleri

$x^2 + C = y^n$ denkleminin farklı C değerleri için çeşitli incelemeler yapılmış ve bazı genellemelere ulaşılmıştır.

- $0 \leq C \leq 100$ için COHN (x,C,y,n) değerlerini göstermiştir[5].
- S.A. Arif ve F.S.A. Muriefah $C = q$ asallarının tek ve çift kuvvleteri için bazı özel durumları incelemişlerdir[6][7].
- F. Luca, F.S.A. Muriefah, A. Togbe de $C = 2^a 3^b, 5^a 13^b$ için denklemlerin çözümlerini ispatlamışlardır[8][9].
- I.N. Cangul, M. Demirci, F. Luca, I. Inam and G. Soydan ise $C = 2^a 3^b 11^c$ için çözümleri göstermişlerdir[10].

Biz de bu bölümde;

$$x^2 + 3^a 41^b = y^n \tag{3.1}$$

Denkleminin çözümlerini $x, y \geq 1$, $(x, y) = 1$, $a, b \geq 0$, $n \geq 3$ ve $a, b, x, y, n \in \mathbb{Z}$ şartları altında inceledik.

3.1 n=3 Durumu

(3.1) denklemini $(\frac{x}{z^3})^2$+A= $(\frac{y}{z^2})^3$ şeklinde yazabiliriz. Burada;

- $3^a 41^b = Az^6$
- $A = 3^{a_1} 41^{b_1}$
- $a_1, b_1 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Ayrıca

- $\dfrac{x}{z^3} = V$
- $\dfrac{y}{z^2} = U$

değişken dönüşümü ile

$$V^2 = U^3 - 3^{a_1}41^{b_1} \tag{3.2}$$

denklemini elde ederiz. Böylece problemimiz (3.2) denkleminden elde edilecek 36 eliptik eğri üzerindeki {3,41}-integer point'leri bulmaya dönüşür.
Burada belirtmek gerekir ki eğer $\mathfrak{S}$ kümesi asal sayıların sonlu kümesi ise $\mathfrak{S}$-integer da $\dfrac{a}{b}$ şeklinde aralarında asal a,b sayılarıdır ve b'nin asal bölenleri $\mathfrak{S}$ kümesindedir.
Yukarıdaki 36 eliptik eğri üzerindeki tüm {3,41}-integer point'lerini bulmak için MAGMA programından faydalandık ve aşağıdaki sonuçları elde ettik.

(U,V,a_1,b_1)=(1,0,0,0), (3,0,3,0), (13,46,4,0), (7,-10,5,0), (43,-280,3,1), (367,-7030,5,1), $(\frac{697}{9}, \frac{-18368}{27}, 0, 2)$, $(\frac{1189}{9}, \frac{39770}{27}, 4, 2)$, $(\frac{6643}{9}, \frac{541160}{27}, 5, 2)$, (41,0,0,3), (123,0,3,3), (1681,-67240,4,4)

Burada elde edilen (U,V,a_1,b_1)=(1,0,0,0), (3,0,3,0), (41,0,0,3), (123,0,3,3) değerleri $x, y \geq 0$ şartını sağlamadığından (3.1) denklemi için aranılan çözümleri elde edemeyiz
Ayrıca (U,V,a_1,b_1)=$(\frac{697}{9}, \frac{-18368}{27}, 0, 2)$, $(\frac{1189}{9}, \frac{39770}{27}, 4, 2)$, $(\frac{6643}{9}, \frac{541160}{27}, 5, 2)$ değerleri de $\dfrac{x}{z^3} = V$ $\dfrac{y}{z^2} = U$ tanımından dolayı $(x, y) = 1$ şartını sağlamamaktadır.

Dolayısıyla başlangıçtaki şartlarımız ve U ile V'nin tanımından
(x,y,a,b)=(46,13,4,0), (10,7,5,0), (280,43,3,1), (7030,367,5,1), (660592,7585,4,2), (541160,6643,11,2)
(3.1)denklemi için aranan çözümlerdir.

3.2 n=4 Durumu

Bir önceki durum ile benzer şekilde (3.1) denklemini $(\dfrac{x}{z^2})^2$+A=$(\dfrac{y}{z})^4$ şeklinde yazabiliriz.

Burada;

- $3^a 41^b = Az^4$
- $A = 3^{a_1} 41^{b_1}$
- $a_1, b_1 \in \{0, 1, 2, 3\}$

Ayrıca

- $\dfrac{x}{z^2} = V$
- $\dfrac{y}{z} = U$

değişken dönüşümü ile

$$V^2 = U^4 - 3^{a_1} 41^{b_1} \tag{3.3}$$

denklemini elde ederiz. Böylece problemimiz tekrar (3.3) denkleminden elde edilecek 16 eliptik eğri üzerindeki {3,41}-integer point'leri bulmaya dönüşür.
Yukarıdaki 16 kuartik eğri üzerindeki tüm {3,41}-integer point'lerini bulmak için tekrar MAGMA programından faydalandık ve aşağıdaki sonuçları elde ettik.

(U, V, a_1, b_1)=$(\pm 1, 0, 0, 0)$, $(\pm 5, -162, 1)$, $(\pm 29, -840, 0, 2)$, $(\pm \frac{41}{3}, -\frac{1640}{9}, 0, 2)$

Başlangıçtaki şartlarımız ve U ile V'nin tanımından
(x, y, a, b)=(16,5,2,1), (840,29,0,2) (3.1)denklemi için aranan çözümlerdir.

3.3 $n \geq 5$ Durumu

Burada genel durumu bozmadan (3.1) denklemini p bir asal sayı, $d \in \{1, 3, 41, 123\}$ ve $z = 3^\alpha 41^\beta$ olmak üzere

$$x^2 + 3^a 41^b = y^p \tag{3.4}$$

$$x^2 + dz^2 = y^p \tag{3.5}$$

şeklinde yazabiliriz. $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$ olmak üzere (3.5) denklemini $\mathbb{K}$'da çarpanlarına ayırırsak

$$(x+z\sqrt{-d})(x-z\sqrt{-d}) = y^p \tag{3.6}$$

eşitliğini elde ederiz. $O_{\mathbb{K}}$'nın tanımından (Tanım 2.4) iki durum oluşur.

1. $d \in \{1, 41\}$ ise $-d \equiv 3 \mod 4$
2. $d \in \{3, 123\}$ ise $-d \equiv 1 \mod 4$

$d \in \{1, 3, 41, 123\}$ için $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$'nın sınıf sayısını kontrol ettiğimizde $h(\mathbb{K}) \in \{1, 2, 8\}$ olduğunu görmekteyiz. Böylece (h,p)=1 olacağından Teorem 2.6. ve Teorem 2.7.den de faydalanarak $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$ tek türlü çarpanlara ayrılabilir bölgeymiş gibi işlem yapabiliriz.
Yani $\gamma \in \mathbb{K}$ cebirsel tamsayısı ve $j_1, j_2 \in O_{\mathbb{K}}$ birimsel elemanları için

- (x+z$\sqrt{-d}) = \gamma^p j_1$
- (x-z$\sqrt{-d}) = \bar{\gamma}^p j_2$ eşitliklerini yazabiliriz.

Burada d'nin değerine bağlı olarak $O_{\mathbb{K}}$ cebirsel tamsayılar halkasnda birimsel elemanların çarpımsal grubunun mertebesi 2, 4 veya 6 olabilir. Bu mertebeler de $p \geq 5$ asalı ile aralarında asaldır. Böylece j_1 ve j_2 birimselleri γ^p tarafından absorbe edilebilir, dolayısıyla j_1 ve j_2 birimsel elemanlarını ihmal edebilir ve aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

- (x+z$\sqrt{-d}) = \gamma^p$
- (x-z$\sqrt{-d}) = \bar{\gamma}^p$
- $y = \gamma\bar{\gamma}$

1. $d \in \{1, 41\}$ ise $-d \equiv 3 \mod 4$ durumunu inceleyecek olursak;

$x^2 + dz^2 = y^p$, $z = 3^{\alpha}41^{\beta}$ denklemini mod 4'te kontrol ettiğimizde x'in çift sayı ve y'nin tek sayı olduğu görülmektedir. Böylece y tek sayı ve (x,y)=1 olduğundan (3.6) eşitliğinin sol tarafındaki çarpanlar aralarında asaldır. Aşağıdaki eşitlikleri tanımlayıp $\mathrm{L}_p = \dfrac{\gamma^p - \bar{\gamma}^p}{\gamma - \bar{\gamma}}$ Lucas Dizisini yazacak olursak

$(x + z\sqrt{-d})$=γ^p=$(u + v\sqrt{-d})^p$
(x-z$\sqrt{-d}) = \bar{\gamma}^p = (u - v\sqrt{-d})^p$

$$\frac{\gamma^p - \bar{\gamma}^p}{\gamma - \bar{\gamma}} = \frac{2z\sqrt{-d}}{2v\sqrt{-d}} = \frac{z}{v} = \frac{3^\alpha 41^\beta}{v} = L_p \in \mathbb{Z} \tag{3.7}$$

elde edilir.

Tabloyu incelediğimizde $d \in \{1, 41\}$ için L_p'nin ilkel böleni olmaması durumu yoktur dolayısıyla q asal sayısının L_p için bir ilkel bölen olduğunu varsayarsak $q \in \{3, 41\}$ olabilir.

- $q = 3$ için $3 \equiv \mp 1 \mod p \implies p|2$ veya $p|4$. Bu da $p \geq 5$ asal olmasıyla çelişir.
- $q = 41$ için $41 \equiv \mp 1 \mod p \implies p|40$ veya $p|42$. Bu durumda $p = 5$ veya $p = 7$ olabilir. Tanım 2.8.'den $p \not| (\gamma - \bar{\gamma})^2 = -4dv^2$'dir böylece d=1 olur. Diğer yandan $\left(\dfrac{-4dv^2}{q}\right) = \left(\dfrac{-1}{41}\right) = 1$ olduğundan $41 \equiv 1 \mod p$. Böylece p=5 elde edilir.

$d = 1$, $p = 5$, $q = 41$ ve $\gamma^p - \bar{\gamma}^p = 2z\sqrt{-d}$ için
$(u + vi)^5 - (u - vi)^5 = 2i3^\alpha 41^\beta$ eşitliğini yazabiliriz. Burada kuvvetleri açıp gerekli düzenlemeleri yaparsak;

$$v(5u^4 - 10u^2v^2 + v^4) = 3^\alpha 41^\beta \tag{3.8}$$

eşitliğini elde ederiz.
(x,y)=1 olduğundan u,v aralarında asaldır ve elimizde "v" için 4 olası durum söz konusudur, $v = \mp 3^\alpha 41^\beta$, $v = \mp 41^\beta$, $v = \mp 3^\alpha$, $v = \mp 1$. Ancak q=41 olabilmesi için $v = \mp 3^\alpha$, $v = \mp 1$ durumları geçerlidir.

- $v = \mp 3^\alpha$ durumu için;
(3.7) eşitlini "v^4" ile bölersek $5(\dfrac{u}{v})^4 - 10(\dfrac{u}{v})^2 + 1 = \mp\dfrac{41^\beta}{v^4}$ elde edilir.

$X = \dfrac{u}{v}, Y = \dfrac{41^{\beta_1}}{v^2}, \beta_1 = \lfloor \dfrac{\beta}{2} \rfloor, D_1 = \mp 1, \mp 41$ değişken dönüşümleri yapılırsa;

$$5X^4 - 10X^2 + 1 = D_1 Y^2 \tag{3.9}$$

eşitliğini elde ederiz.

- $D_1 = \mp 1$ için (3.9) denklemi
  $5X^4 - 10X^2 + 1 = \mp(Y^2)$
  olur ve elde edilen bu denklemlerde {3,41}-integral pointleri hesaplarsak

  $(X,Y) = (0,1), (\mp 1, -2), (\mp\frac{1}{3}, \frac{-2}{9})$ ve

- $D_1 = \mp 41$ için (3.9) denklemi
  $5X^4 - 10X^2 + 1 = \mp 41(Y^2)$
  olur ve elde edilen bu denklemlerde {3,41}-integral pointleri hesaplarsak

  $(X,Y) = (\mp 2, -1), (\mp\frac{8}{3}, \frac{19}{9})$

sonuçlarına ulaşırız ki burada elde edilen değerlerden $(X,Y) = (\mp 2, -1)$ için (3.1) denklemini sağlayacak olan (x,y)=(38,5) elde edilir ve (x,y,n,a,b)=(38,5,5,0,2) çözümüne ulaşırız.

- $v = \mp 1$ durumu için;

(3.8) eşitlini "v^4" ile bölersek $5(\frac{u}{v})^4 - 10(\frac{u}{v})^2 + 1 = \mp\frac{3^\alpha 41^\beta}{v^4}$ elde edilir.

$X = \frac{u}{v}, Y = \frac{3^{\alpha_1}41^{\beta_1}}{v^2}, \alpha_1 = \lfloor\frac{\alpha}{2}\rfloor, \beta_1 = \lfloor\frac{\beta}{2}\rfloor, D_1 = \mp 1, \mp 3, \mp 41, \mp 123$ değişken dönüşümleri yapılırsa;

$$5X^4 - 10X^2 + 1 = D_1 Y^2 \tag{3.10}$$

eşitliğini elde ederiz.

- $D_1 = \mp 1$ ve $D_1 = \mp 41$ için (3.10) denkleminde önceki durum ile benzerdir.

- $D_1 = \mp 3$ için (3.10) denklemi
  $5X^4 - 10X^2 + 1 = \mp 3(Y^2)$
  olur ve elde edilen bu denklemlerde {3,41}-integral pointleri hesaplarsak
  (X,Y) çözümleri yoktur.

- $D_1 = \mp 123$ için (3.10) denklemi
  $5X^4 - 10X^2 + 1 = \mp 123(Y^2)$

olur ve elde edilen bu denklemlerde {3,41}-integral pointleri hesaplarsak (X,Y) çözümleri yoktur.

Dolayısıyla $x^2+dz^2=y^p$ denkleminin $d=1,41$ için tam sayılarda çözümü sadece (x,y,n,a,b)=(38,5,5,0,2)'dir.

2. $d\in\{3,123\}$ ise $-d\equiv 1 \mod 4$ durumunu inceleyecek olursak;
$x^2+dz^2=y^p$, $z=3^{\alpha}41^{\beta}$ denklemini mod 8'de kontrol ettiğimizde x'in çift sayı ve y'nin tek sayı olduğu görülmektedir. Böylece y tek sayı ve (x,y)=1 olduğundan (3.6) eşitliğinin sol tarafındaki çarpanlar aralarında asaldır. Aşağıdaki eşitlikleri tanımlayıp $\mathrm{L}_p=\dfrac{\gamma^p-\bar{\gamma}^p}{\gamma-\bar{\gamma}}$ Lucas Dizisini yazacak olursak

$(x+z\sqrt{-d})=(\dfrac{u+v\sqrt{-d}}{2})^p=\gamma^p$
$(x-z\sqrt{-d})=(\dfrac{u-v\sqrt{-d}}{2})^p=\bar{\gamma}^p$, $u\equiv v \mod 2$

$$\frac{\gamma^p-\bar{\gamma}^p}{\gamma-\bar{\gamma}}=\frac{2z\sqrt{-d}}{2v\sqrt{-d}}=\frac{z}{v}=\frac{3^{\alpha}41^{\beta}}{v}=L_p\in\mathbb{Z} \tag{3.11}$$

elde edilir.

Tabloyu incelediğimizde $d\in\{1,41\}$ için L_p'nin ilkel böleni olmaması durumu yoktur dolayısıyla q asal sayısının L_p için bir ilkel bölen olduğunu varsayarsak $q\in\{2,3,41\}$ olabilir.

- $q=2,3$ için $q\equiv\mp1 \mod p$ şartını kontrol ettiğimizde $p\geq 5$ kabulümüz ile çelişmektedir.
- $q=41$ için $41\equiv\mp1 \mod p \implies p=5$ veya $p=7$ olabilir. Tanım 2.8.'den $p \not| (\gamma-\bar{\gamma})^2=-dv^2$'dir ve d=3 olur. Diğer yandan $\left(\dfrac{-dv^2}{q}\right)=\left(\dfrac{-3}{41}\right)=-1$ olduğundan $41\equiv -1 \mod p$ olur. Böylece p=7 elde edilir.

$p=7$, $d=3$, $q=41$, $\gamma^p-\bar{\gamma}^p=2z\sqrt{-d}$ için
$(\frac{u+v\sqrt{-3}}{2})^7-(\frac{u-v\sqrt{-3}}{2})^7=2\cdot3^{\alpha}\cdot41^{\beta}\sqrt{-3}$ eşitliğini yazabiliriz. Burada kuvvetleri açıp gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$v(7u^6-105u^4v^2+189u^2v^4-27v^6)=2^7 3^{\alpha}41^{\beta} \tag{3.12}$$

eşitliğini elde ederiz.
u,v aralarında asal olduğundan elimizde "v" için 8 olası durum söz konusudur,

$v=\mp 2^7 3^\alpha 41^\beta$, $v=\mp 3^\alpha 41^\beta$, $v=\mp 2^7 41^\beta$, $v=\mp 2^7 3^\alpha$, $v=\mp 41^\beta$, $v=\mp 3^\alpha$, $v=\mp 2^7$, $v=\mp 1$. Ancak q=41 olabilmesi için $v=\mp 2^7 3^\alpha$, $v=\mp 3^\alpha$, $v=\mp 2^7$, $v=\mp 1$ durumları geçerlidir.

- $v=\mp 2^7 3^\alpha$ durumu için;
  (3.12) denklemi $7u^6-105u^4v^2+189u^2v^4-27v^6=\mp 41^\beta$ denklemine dönüşür ve bu eşitliği de "v^6" ile bölersek ve
  $X=\dfrac{u^2}{v^2}, Y=\dfrac{41^{\beta_1}}{v^3}, \beta_1=\lfloor\dfrac{\beta}{2}\rfloor, D_1=\mp 1,\mp 41$ değişken dönüşümlerini uygularsak

  $$7X^3-105X^2+189X-27=D_1Y^2 \tag{3.13}$$

  eşitliğini elde ederiz ki burada da (3.13) eşitliğinin her iki tarafını da "7^2" ile çarpıp $7X=U_1$ ve $7Y=V_1$ değişken dönüşümü uygularsak;

  $$U_1^3-15U_1^2+1323U_1-1323=D_1V_1^2 \tag{3.14}$$

  denklemini elde ederiz. Burada da elde ettiğimiz eliptik eğriler üzerindeki {2,3,41}-integral pointleri araştıracak olursak;

  - $D_1=\mp 1$ için
    $U_1^3-35U_1^2+147U_1-49=\mp(V_1^2)$
    denklemlerinde sadece $D_1=1$ için
    $(7X=U_1, 7Y=V_1)=(\frac{7252}{81},\frac{616231}{729})$
    sonucuna ulaşırız ki burada elde edilen değerler (3.1) denklemini sağlayacak olan (x,y) ikililerini bize vermemektedir.

  - $D_1=\mp 41$ için
    (3.14) denklemini "41^3" ile çarparsak
    $(41U_1)^3-615(41U_1)^2+2223963(41U_1)-91182483=(41^2V_1)^2$
    elde edilir ve buradan herhangi bir çözüm gelmemektedir.

- $v=\mp 3^\alpha$ durumu için ;
  (3.12) denklemi $7u^6-105^4v^2+189u^2v^4-27v^6=\mp 2^7 41^\beta$ denklemine dönüşür ve bu eşitliği de "v^6" ile bölersek ve
  $X=\dfrac{u^2}{v^2}, Y=\dfrac{2^3 41^{\beta_1}}{v^3}, \beta_1=\lfloor\dfrac{\beta}{2}\rfloor, D_1=\mp 1,\mp 41$ değişken dönüşümlerini uygularsak

  $$7X^3-105X^2+189X-27=2D_1Y^2 \tag{3.15}$$

denklemini elde ederiz. Burada da elde ettiğimiz eliptik eğriler üzerindeki {2,3,41}-integral pointleri araştıracak olursak;

- $D_1 = \mp 1$ için
  (3.15) denkleminde eşitliğin her iki tarafını da "$2^3 7^2$" ile çarpıp $\bar{X} = 2 \cdot 7X$ ve $\bar{Y} = 2^2 \cdot 7Y$ değişken dönüşümü uygularsak;
  $\bar{X}^3 - 210\bar{X}^2 + 5295\bar{X} - 10584 = \bar{Y}^2$
  eliptik eğrilerini elde ederiz ve $D_1 = -1$ için
  $(2 \cdot 7X = \bar{X}, 2^2 7Y = \bar{Y}) = (146, 776)$ sonucuna ulaşırız ki bu değer bize (3.1) denklemini sağlayacak olan (x,y) ikilisini vermez.

- $D_1 = \mp 41$ için
  (3.15) denkleminin her iki tarafını da "$2^3 7^2 41^3$" ile çarpıp $\bar{X} = 2 \cdot 7 \cdot 41X$ ve $\bar{Y} = 2^2 41^2 7Y$ değişken dönüşümü uygularsak;
  $\bar{X}^3 - 8610\bar{X}^2 + 8895852\bar{X} - 729459864 = \bar{Y}^2$
  eliptik eğrisini elde ederiz ve $D_1 = 41$ için
  $(2 \cdot 7 \cdot 41X = \bar{X}, 2^2 41^2 7Y = \bar{Y}) = (1066, -13448), (57103, -12594877)$

  sonuçlarını elde ederiz ki bu değerler bize (3.1) denklemini sağlayacak olan (x,y) ikilisini vermez.

- $v = \mp 2^7$ durumu için;
  (3.12) denklemi $7u^6 - 105u^4v^2 + 189u^2v^4 - 27v^6 = \mp 3^\alpha 41^\beta$ denklemine dönüşür ve bu eşitliği de "v^6" ile bölersek ve
  $X = \dfrac{u^2}{v^2}, Y = \dfrac{3^\alpha 41^{\beta_1}}{v^3}, \beta_1 = \lfloor \dfrac{\beta}{2} \rfloor, \alpha_1 = \lfloor \dfrac{\alpha}{2} \rfloor, D_1 = \mp 1, \mp 3, \mp 41, \mp 123$ değişken dönüşümlerini uygularsak

$$7X^3 - 105X^2 + 189 - 27 = D_1 Y^2 \tag{3.16}$$

denklemini elde ederiz. Burada da elde ettiğimiz eliptik eğri üzerindeki {2,3,41}-integral pointleri araştıracak olursak;

- $D_1 = \mp 1$ için $7X^3 - 105X^2 + 189X - 27 = D_1 Y^2$
  eşitliğinin her iki tarafını da "7^2" ile çarparsak ve $\bar{X} = 7X$ ve $\bar{Y} = 7Y$ dönüşümlerini yaparsak
  $(\bar{X})^3 - 735(\bar{X})^2 + 1323(\bar{X}) - 1323 = \mp(\bar{Y})^2$
  eliptik eğrileri elde edilir ve $D_1 = \mp 1$ için herhangi bir çözüm gelmemektedir.

- $D_1 = \mp 3$ için $7X^3 - 105X^2 + 189X - 27 = \mp 3Y^2$

eşitliğinin her iki tarafını da "$7^2 3^3$" ile çarparsak ve $\bar{X} = 3\cdot 7X$ ve $\bar{Y} = 3^2\cdot 7Y$ dönüşümlerini yaparsak
$(\bar{X})^3 - 315(\bar{X})^2 + 11907(\bar{X}) - 35721 = \mp(\bar{Y})^2$
eliptik eğrileri elde edilir ve
$D_1 = 3$ için
$(3\cdot 7X = \bar{X}, 3^2\cdot 7Y = \bar{Y})$ = (9,216), (522,-7911)
$D_1 = -3$ için
$(3\cdot 7X = \bar{X}, 3^2\cdot 7Y = \bar{Y})$ = (-189,1512), (-77,-728), (-45,216), (0,189), (63,-1512), (351,9288), $(\frac{2709}{4}, \frac{-172179}{8})$ sonuçlarına ulaşırız ki burada elde edilen değerler (3.1) denklemini sağlayacak olan (x,y) ikililerini bize vermemektedir.

- $D_1 = \mp 41$ için $7X^3 - 105X^2 + 189X - 27 = \mp 41Y^2$
  eşitliğinin her iki tarafını da "$7^2 41^3$" ile çarparsak ve $\bar{X} = 7\cdot 41X$ ve $\bar{Y} = 7\cdot 41^2 Y$ dönüşümlerini yaparsak
  $(\bar{X})^3 - 4305(\bar{X})^2 + 741321(\bar{X}) - 91182483 = \mp(\bar{Y})^2$
  eliptik eğrileri elde edilir ve buradan herhangi bir çözüm gelmemektedir.

- $D_1 = \mp 123$ için $7X^3 - 105X^2 + 189X - 27 = \mp 123Y^2$
  eşitliğinin her iki tarafını da "$3^3 7^2 41^3$" ile çarparsak ve $\bar{X} = 3\cdot 7\cdot 41X$ ve $\bar{Y} = 3^2\cdot 7\cdot 41^2 Y$ dönüşümlerini yaparsak
  $(\bar{X})^3 - 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 41(\bar{X})^2 + 3^4\cdot 7^2\cdot 41^2(\bar{X}) + 3^6\cdot 7^2\cdot 41^3 = \mp(\bar{Y})^2$
  eliptik eğrileri elde edilir ve
  $D_1 = 123$ için
  $(\bar{X} = 3\cdot 7\cdot 41X, \bar{Y} = 3^2\cdot 7\cdot 41X)$=(21240,3943701) sonucuna ulaşırız ki burada elde edilen değerler (3.1) denklemini sağlayacak olan (x,y) ikililerini bize vermemektedir.

- $v = \mp 1$ durumu için;
  (3.12) denklemi $7u^6 - 105u^4v^2 + 189u^2v^4 - 27v^6 = \mp 2^7 3^\alpha 41^\beta$ eşitliğine dönüşür ve burada eşitliğin her iki tarafını "v^6" ile bölersek ve
  $X = \frac{u^2}{v^2}, Y = \frac{2^3 3^\alpha 41^{\beta_1}}{v^3}, \beta_1 = \lfloor\frac{\beta}{2}\rfloor, \alpha_1 = \lfloor\frac{\alpha}{2}\rfloor, D_1 = \mp 1, \mp 3, \mp 41, \mp 123$ değişken dönüşümlerini uygularsak

$$7X^3 - 105X^2 + 189X - 27 = 2D_1Y^2 \qquad (3.17)$$

denklemini elde ederiz. Burada da elde ettiğimiz eliptik eğriler üzerindeki {2,3,41}-integral pointleri araştıracak olursak;

- $D_1 = \mp 1$ için $7X^3 - 105X^2 + 189X - 27 = \mp 2(Y^2)$

eşitliğinin her iki tarafını da "$7^2 2^3$" ile çarparsak ve $\bar{X} = 14X$ ve $\bar{Y} = 28Y$ dönüşümlerini yaparsak

$(\bar{X})^3 - 210(\bar{X})^2 + 5292(\bar{X}) - 10584 = \mp(\bar{Y})^2$

eliptik eğrileri elde edilir ve

$D_1 = -1$ için

$(\bar{X}, \bar{Y})$=(146,776), sonucuna ulaşırız ki burada elde edilen değerler (3.1) denklemini sağlayacak olan (x,y) ikililerini bize vermemektedir.

- $D_1 = \mp 3$ için $7X^3 - 35X^2 + 21X - 1 = \mp 2 \cdot 3(Y^2)$
  eşitliğinin her iki tarafını da "$2^3 3^3 7^2$" ile çarparsak ve $\bar{X} = 42X$ ve $\bar{Y} = 2^2 3^2 7Y$ dönüşümlerini yaparsak
  $(\bar{X})^3 - 630(\bar{X})^2 + 47628(\bar{X}) - 285768 = \mp(\bar{Y})^2$
  eliptik eğrileri elde edilir ve
  $D_1 = -3$ için
  $(42X = \bar{X}, 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7Y = \bar{Y})$ = (-542,568), (-126,1512), (63,2457) sonuçlarına ulaşırız ki burada elde edilen değer (3.1) denklemini sağlayacak olan (x,y) ikilisini bize vermemektedir.

- $D_1 = \mp 41$ için $7X^3 - 105X^2 + 189X - 27 = \mp 2 \cdot 41(Y^2)$
  eşitliğinin her iki tarafını da "$2^3 7^2 41^3$" ile çarparsak ve $\bar{X} = 2 \cdot 7\dot{4}1X$ ve $\bar{Y} = 2^2 \cdot 41^2 \cdot 7Y$ dönüşümlerini yaparsak
  $(\bar{X})^3 - 8610(\bar{X})^2 + 8895852(\bar{X}) + 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 41^3 = \mp(\bar{Y})^2$
  eliptik eğrileri elde edilir ve
  $D_1 = 41$ için
  $(14 \cdot 41X = \bar{X}, 28 \cdot 41^2 Y = \bar{Y})$ = (1066,-13448), (5703,-12594877)
  $D_1 = -41$ için $(14 \cdot 41X = \bar{X}, 28 \cdot 41^2 Y = \bar{Y})$ = (574,94136), (1267,-166901)sonuçlarına ulaşırız ki burada elde edilen değerler (3.1) denklemini sağlayacak olan (x,y) ikililerini bize vermemektedir.

- $D_1 = \mp 123$ için $7X^3 - 105X^2 + 189X - 27 = \mp 2 \cdot 123(Y^2)$
  eşitliğinin her iki tarafını da "$2^3 3^3 7^2 41^3$" ile çarparsak ve $\bar{X} = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 41X$ ve $\bar{Y} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 41^2 Y$ dönüşümlerini yaparsak
  $(\bar{X})^3 + 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 41(\bar{X})^2 + 2^2 \cdot 3^5 \cdot 7^2 \cdot 41^2(\bar{X}) + 2^3 \cdot 3^6 \cdot 7^2 \cdot 41^3 = \mp(\bar{Y})^2$
  eliptik eğrileri elde edilir ve
  $D_1 = -123$ için
  $(2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 41X = \bar{X}, 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 41^2 Y = \bar{Y})$ = (3321,45387), $(\frac{1579617}{4}, \frac{2049700491}{8})$ sonuçlarına ulaşırız ki burada elde edilen değerler (3.1) denklemini sağlayacak olan (x,y) ikililerini bize vermemektedir.

Dolayısıyla $x^2+dz^2 = y^p$ denkleminin $d = 3, 123$ için de tam sayılarda çözümü yoktur.

$$x^2 + 3^a 41^b = y^n$$

Denkleminin başlangıç şartlarındaki tüm çözümleri aşağıdaki sonlu sayıda tamsayılar olmaktadır.

n	x	y	a	b
3	10	7	5	0
	46	13	4	0
	280	43	3	1
	7030	367	5	1
	541160	6643	11	2
	660592	7585	4	2
4	16	5	2	1
	840	29	0	2
5	38	5	0	2

4
Sonuç ve Öneriler

İncelemenin ana konusu Genelleştirilmiş Ramanujan-Nagell Denklemlerinin bir varyasyonu olan $x^2 + 3^a 41^b = y^2$ denkleminin eğer varsa tüm pozitif tamsayı çözümmlerinin nasıl elde edilebileceği olmuştur. Bunun için cebirsel sayı cisimlerinden, ilkel bölen teoreminden, eliptik eğrilerden ve bu eğriler üzerindeki $\mathfrak{S}$-integral pointleri bulmak için MAGMA programından faydalanılmıştır.
Burada kullanılan yöntemden benzer denklemlerin çözülmesinde de faydalanılacağı gibi yöntemin bazı sınırlılıkları vardır. Örneğin n=3 ve n=4 durumlarında sadece eliptik eğrilerden faydalandığımız için bir sorun olmamakla beraber $n \geq 5$ durumunda $x^2 + dz^2 = y^n$ denklemini $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[\sqrt{-d}]$ cisminde çarpanlarına ayırdığımızda eğer $d \equiv 7 \mod 8$ oluyorsa denklemin sol tarafındaki çarpanların aralarında asal olmama ihtimali ortaya çıkmaktadır. Bunun sebebi ise $(x + \sqrt{-7})$ ve $(x - \sqrt{-7})$ ikisi de $\frac{x+\sqrt{-7}}{2}$ ve $\frac{x-\sqrt{-7}}{2}$ ile bölünebilmektedir ki $(\frac{x+\sqrt{-7}}{2})(\frac{x-\sqrt{-7}}{2}) = 2$ yani 2'nin $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[\sqrt{-7}]$'de asal kalmamasıdır. Bu nedenle $d \equiv 7 \mod 8$ durumunda farklı bir yaklaşım uygulamak gerekmektedir.
Yeni çalışmalar $x^2 + p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_r^{a_r} = y^2$ veya $x^2 + p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_r^{a_r} = by^2$ denklemlerinin çözümlerine doğru ilerlemekle beraber bu durumlar daha da genelleştirilebilir veya daha az sınırlılıkları olan yeni birleştirici bir metod üzerine çalışılabilir.

Kaynakça

[1] S. Wagstaff, H. Lenstra, and C. Pomerance, "Divisors of mersenne numbers," 161, AMS, vol. 40, 1983, pp. 385–397.

[2] T. Nagell, "The diophantine equation $x^2 + 7 = 2^n$," *Norsk Mat. Tidsskr.*, vol. 30, pp. 62–64, 1948.

[3] V. Lebesgue, "Sur l'impossibilite en nombres entiersde l'equation $x^m = y^2 + 1$," *Nouvelles Annales des Mathematiques*, vol. 1, no. 9, pp. 178–181, 1850.

[4] T. Nagell, "Sur l'impossibilite de quelques equations 'a deux ind eterminees," *Norsk. Mat. Forensings Skrifter*, no. 13, pp. 65–82, 1923.

[5] J. Cohn, "The diophantine equation $x^2+c = y^n$," *Acta Arithmetica Mathematica*, vol. 65, pp. 367–381, 1993.

[6] S. Arif and F. Muriefah, "On the diophantine equation $x^2 + q^{2k+1} = y^n$," *J. Number Theory*, vol. 95, pp. 95–100, 2002.

[7] S. Arif and F. Muriefah, "The diophantine equation $x^2 + q^{2k} = y^n$," *Arab.J. Sci. Eng. Sect. A Sci.*, vol. 26, pp. 53–62, 2001.

[8] F. Luca, "On the diophantine equation $x^2+2^a3^b = y^n$," *Int. J. Math. Sci.*, vol. 29, no. 4, pp. 239–244, 2002.

[9] S. Arif, F. Muriefah, F. Luca, and A. Togbe, "On the diophantine equation $x^2 + 5^a13^b = y^n$," *Glasgow Math. J.*, vol. 1, no. 50, pp. 175–181, 2008.

[10] I. Cangul, M. Demirci, F. Luca, I. Inam, and G. Soydan, "On the diophantine equation $x^2 + 2^a3^b11^c = y^n$," *Math. Slovaca*, vol. 65, no. 210, pp. 647–659, 2013.

[11] S. Alaca and K. Williams, "Introductory algebraic number theory," p. 325, 2004.

[12] P. Voutier, "Primitive divisors of lucas and lehmer sequences," *Math. Comp.*, vol. 65, no. 210, pp. 869–888, 1995.

[13] D. Burton, "Elementary number theory," 2007.

Tezden Üretilmiş Yayınlar

İletişim Bilgileri: ugurzengin88@gmail.com

Konferans Bildirileri

1. Alan,M., Zengin,U., Solutions of some generalized Ramanujan-Nagell Equations, International conference on applied analysis and mathematical modelling, Abstract book pp.258, 2019