

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

BİR GRAFIN DAYANIKLILIĞI

Hanife AKSU

Matematik Bölümü Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu: 619.03.03

Sunuş Tarihi: 28.12.2007

Tez Danışmanı: Yard. Doç. Dr. Aysun Aytaç

Bornova-İZMİR

II

Sayın **Hanife AKSU** tarafından YÜKSEK LİSANS tezi olarak sunulan “**Bir Grafın Dayanıklılığı**” başlıklı bu çalışma E.Ü Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 28/12/ 2007 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği / oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:

İmza

Jüri Başkanı:.....

.....

Raportör Üye:.....

.....

Üye:.....

.....

III

ÖZET

BİR GRAFIN DAYANIKLILIĞI

AKSU, Hanife

Yüksek Lisans Tezi Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Yard. Doç. Dr. Aysun AYTAÇ

Aralık 2008, 56 sayfa

Bir iletişim ağının zedelenebilirlik değeri, bazı merkezler veya bu merkezler arasındaki bağlantıların bozulmasıyla iletişimin kesildiği zamana kadar olan dayanma gücünü gösterir. n -merkezli bir iletişim ağı bir graf olarak modellenir. Burada ağın merkezleri grafın tepelerine, bu merkezler arasındaki bağlantılar ise grafın ayrıtlarına karşılık gelir. Böyle bir G grafının bazı tepelerinin graftan silinmesiyle bu grafın zedelenebilirlik değeri bulunabilir. Bağlama (connectivity) sayısı, dayanıklılık (toughness) sayısı, bağlayıcı (binding) sayısı, bütünlük (integrity) sayısı gibi parametreler bir G grafının zedelenebilirlik değeri bulunurken kullanılır. Bu tezde bir grafın rupture sayısı parametresi üzerine çalışılmıştır. Dikenli (thorny) grafların rupture sayısı hesaplanıp, graf işlemlerini de kullanarak rupture parametresi ile ilgili bazı teoremler verilmiştir. Ayrıca rupture sayısı hesaplanırken ulaşılan bağımsızlık sayısını bulmak için Paull-Unger algoritması, rupture parametresinin diğer parametrelerle ilişkisi ve $2K_2$ yapısı içermeyen grafların rupture sayısı verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Zedelenebilirlik, Dikenli Graf, Rupture Sayısı

IV

ABSTRACT

THE RESISTANCE OF A GRAPH

AKSU, Hanife

MSC in MATHEMATICS

Supervisor: Associate-Profesör Aysun AYTAÇ

December 2008, 56 pages

The vulnerability of a communication network shows that resistance of network until disconnection. A n -centers network can be symbolized like a graph, network centers draw like graph's vertices and connections of network draw like graph's edges. We can find vulnerability of that graph after deleting some vertices. Connectivity number, toughness number, binding number, integrity number and scattering number are used for finding vulnerability of a G graph. In this thesis; we search the rupture number parameter of thorny graphs. We give some theorems about the rupture parameter using the graph operations. Also we give Paul-Unger algorithm to find independence number, the relation between rupture parameter and the others and the rupture number of graphs which has no $2K_2$.

Keywords: Vulnerability, Thorny Graphs, Rupture Number

TEŞEKKÜR

Tez konumu veren, yönlendiren, alıőmalarımnda yardımlarını esirgemeyen ve kendimi hep özel hissetmemi sağlayan Sayın Hocam Yard. Doç. Dr. Aysun AYTAÇ 'a en içten teőekkürlerimi sunarım.

VI

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
1. 2. 1 Ağaç Graf Olarak Soyağacı.....	3
1. 2. 2 3 Tepeli Bir Yol Graf	4
1. 2. 3 7 Tepeli Ve Çok Katlı Bir Ağaç Graf	4
2. 2. 1. 1 $\Sigma = \{a, b, c\}$ Olan Yönlü Sonsuz Ağaç Graf	10
2. 2. 1. 2 $\Sigma = \{0, 1\}$ Olan Yönlü Sonsuz İkili Ağaç Graf	11
2. 2. 1. 3 İkili Ağaç	12
2. 2. 1. 4 Bölme İşlemini Temsil Eden İkili Ağaç Graf	15
2. 2. 1. 5 7 Tepeli Birleştirilmiş Bir Graf	16
2. 2. 1. 6 Algoritmanın Adımlarını Temsil Eden İkili Ağaç Graflar	17
2. 2. 1. 7 Algoritmanın Sonucunu Temsil İkili Ağaç Graf	18
3. 1 $2K_2$ Grafi	28
4. 1. 1 C_4^* Dikenli Grafi	33
4. 1. 2 6 Tepeli Birleştirilmiş G_1 ve G_2 Grafları.....	36
4. 1. 3 G_1^* Dikenli Grafi	37
4. 1. 4 G_2^* Dikenli Grafi	37
4. 1. 5 2 Tepeli G_1 Alt Grafi	40
4. 2. 1 2 Tepeli G_1 Alt Grafi	47

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	III
ABSTRACT	IV
TEŞEKKÜR.....	V
ŞEKİLLER DİZİNİ	VI
1.GİRİŞ.....	1
1.1 Bir Grafın Zedelenebilirliği	1
1.2 Graflar.....	2
2.BAZI BİLİNEN GRAF PARAMETRELERİ	6
2.1 Tanımlar	6
2.2 Bağımsızlık Sayısını Bulan Paull-Unger Algoritması.....	8
2. 2. 1 Algoritma.....	10
3.RUPTURE SAYISI	20
4.DİKENLİ GRAFLARIN RUPTURE SAYISI.....	33
4.1 Tanımlar Ve Teoremler	33
4.2 Taçlama İşlemi ve	
$G^* \circ P_2$ Grafının Rupture Sayısı	45
5. SONUÇ	51
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	52
ÖZGEÇMİŞ	56

1.GİRİŞ

1.1 BİR GRAFIN ZEDELENEİLİRLİĞİ

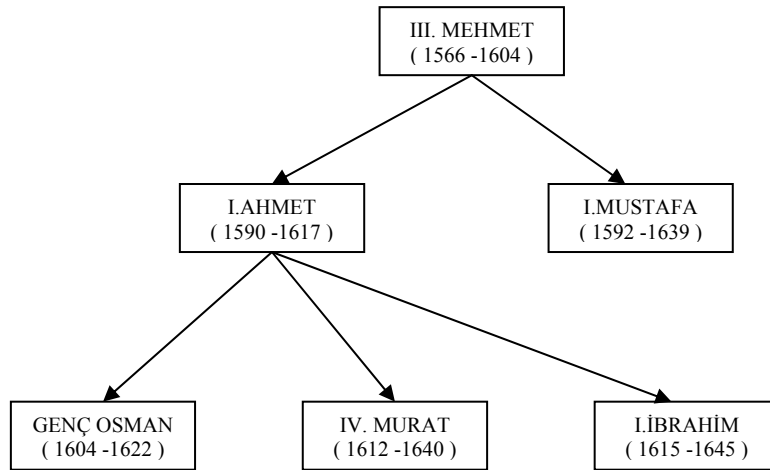
Günümüzde hemen hemen her türlü iş alanında hızlı ve kesintisiz iletişim kurmanın önemi ve vazgeçilmezliği giderek artmaktadır. Önceden beklediğimiz (önemli) haberler için kullandığımız posta yoluyla 1–2 gün beklemek sorun olmazken şimdilerde yaptığımız her iş için saniyelerin önemi gittikçe artmıştır. İletişim hızındaki bu artış ve önem bu bilgileri bize sağlayan sistemin değerini de arttırmıştır. Böylece kullandığımız sistemin mümkün oldukça zarar görmesini engelleme ya da zararı en aza indirme ihtiyacı doğmuştur. Bu ihtiyacı karşılamak ve pratik çözümler üretmek için devreye graflar girer ve graflarla birlikte zedelenebilirlik kavramı ortaya çıkar. Bu kavram bize sistemimizi nasıl modellersek daha az zarar görebileceğimiz ve iletişimi en uzun süre nasıl sağlayabileceğimiz konusunda yardımcı olur. Yani sistemde bazı elemanlar zarar gördükten sonra iletişimin dayanma gücünü gösterir. Bu dayanma gücünü belirlemek için bazı parametreler kullanılır. Bunlar bağlama (connectivity) sayısı, dayanıklılık (toughness) sayısı, bağlayıcı (binding) sayısı, bütünlük (integrity) sayısı, scattering sayısı gibi parametrelerdir. Bu çalışmamızda ise zedelenebilirlik değerini bulmak için rupture parametresinden yararlandık.

Aslında bu gibi bir iletişimde önemli merkezlerin zarar görmesi ve derhal eski haline dönmemesi durumunda sistemde ne gibi ciddi hasarlara yol açılacağını görmek çok da zor değildir. Örneğin vücudumuzdaki dolaşım sistemini düşünelim. Bu doğal bir iletişim

biçimidir. Vücudumuzda kan dolaşımını sağlayan bir sistemdir. Bu sistemi bir grafa benzetmek gerekirse organlarımız grafinin tepelerini ve damarlarımız da bu tepeler arasındaki ayrıtları temsil etsin. Sistem içinde paylaşılan bilgi de kandır. Elimizi kestiğimizi düşünelim. Buradaki damarlar zarar gördüğü için iletişimde bir yavaşlama söz konusudur. Biz bunu acı olarak hissederiz. Ve sistemdeki bu bozukluk bir an önce giderilmelidir. Her şeyin en kısa zamanda eski haline dönmesi için çalışılır. Şah damarımız bizim hayat kaynağımız sayılabilir. Bu nedenle sistemdeki bu denli önemli bir noktanın hasar görmemesi bizim için önemlidir. Şah damarı zarar görmüş bir insana 1 gün sonra müdahale edilmesi söz konusu bile olamaz. Yani sistemdeki şah damarını korumak sistemi korumak anlamına gelir. Öyleyse bu parametreleri kullanarak sistemin şah damarını bulabiliriz ve sistemi ayakta tutmak için nasıl ve ne kadar çalışmamız gerektiğine karar verebiliriz.

1.2 GRAFLAR

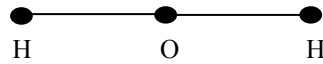
Graflar aslında anlatmak istediklerimizin karşımızdakine bir özetidir. Grafları eğitimin her alanında kullanıyoruz sadece bunları graf olarak tanımıyoruz. Örneğin tarih dersinde bir imparatorluğun soyunu şekilsel olarak göstermek istersek burada ağaç graftan yararlanmak durumundayız. Aslında bunu ‘soyağacı’ olarak nitelendirmemiz bu konuya hiç de yabancı olmadığımızın bir kanıtıdır. Ağaç graf yapısı için Şekil 1. 2. 1 bir örnektir.



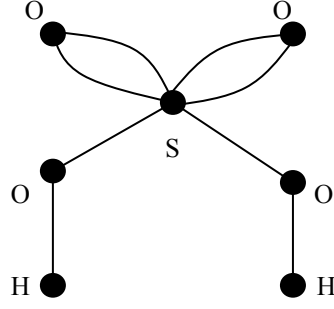
Şekil 1. 2. 1

Ayrıca graflar çok karmaşık yapıları basitleştirmemize de yardımcı olur. Mesela coğrafya dersinde her türlü ayrıntının çizildiği bir haritayı düşünelim. Burada öğrenmemiz gereken yalnızca şehirlerarasındaki bağlantılar ve bunlar arasındaki uzaklıklar olsun. Harita üzerinde dikkatimizi bu konuya yoğunlaştırmamızı engelleyecek birçok ayrıntı varken aynı düzeneği bir grafla çizmek istersek daha basit bir görüntü elde ederiz. Graftaki tepeler şehirleri temsil ederken aralarındaki ayrıtlar da şehirlerarasındaki uzaklıkları gösterir. Böylece daha kolay anlaşılır ve sade bir şekil elde etmiş oluruz.

Örnek 1.2.1: Kimyada H_2O su molekülünün ve H_2SO_4 sülfürik asidin şekilsel olarak ifadesinde de yine graflardan yararlanılmaktadır.



Şekil 1.2.2



Şekil 1.2.3

Graflar bize algılamamızı hızlandırmanın dışında da yarar sağlamaktadır. Örneğin aşağıdaki sorunun cevabını deneyerek bulmak çok fazla zaman alırken graf teoremlerini kullanarak sonuca ulaşmak bize zaman kazandırmaktadır.

Soru 1.2.1: 705 makineden oluşan ve her bir makinenin diğer makinelerden 605 tanesi ile bağlantılı olduğu bir bilgisayar laboratuvarı oluşturunuz.

Çözüm: Bu soruyu deneme-yanılma yöntemi ile çözmenin çok zor olduğunu açıkça görebiliyoruz. Fakat graf teoremlerini kullanarak bu problemi çözmek 1 dakikamızı bile almamaktadır. Bir grafın çiziminin mümkün olabilmesi için grafların dereceleri toplamının çift sayı olması gerekmektedir.

Burada her bir makineyi olası grafın tepeleri olarak ve makineler arasındaki bağlantıları da grafın ayrıtları olarak düşünelim. Her makinenin 605 makine ile bağlantılı olması demek graftaki her bir tepenin derecesinin 605 olması demektir. Grafta 705 makine olduğuna göre grafın toplam tepe derecesi $605 \cdot 705 = 426525$ bu da tek bir sayı

olduğu için bu grafin çizimi mümkün değildir. Gördüğünüz gibi graflar üzerindeki bu teorem bize zaman kazandırmanın dışında kurulması mümkün olmayan bir bilgisayar laboratuvarı için boşa para harcanmasını da önler.

Görüldüğü gibi graflar eğitimin çok da dışında olmayan ve neredeyse sıkça başvurduğumuz şekillerdir. Bir $G = (V(G), E(G))$ grafi, tepeler(vertices) denilen boş olmayan bir $V(G)$ sonlu objeler kümesi ile birlikte, ayrıtlar(edges) denilen G 'nin farklı tepe çiftlerinin düzensiz sıralanışı olan bir $E(G)$ (boş olabilir) kümesidir. Biz sadece yönlü ayrıtları ve bukleleri olmayan basit birleştirilmiş grafları ele alacağız.

2. BAZI BİLİLEN GRAF PARAMETRELERİ

2.1 TANIMLAR

Bu bölümde bir grafın dayanıklılığını hesaplamak için kullanılan daha önceden bilinen bazı graf parametrelerinin tanımları ve bir grafın bağımsızlık kümesini ve sayısını bulan bir algoritma verilecektir.

Tanım 2.1.1: Tepe Bağlantılılık Sayısı, Bir G grafını bağlantısız bir graf veya izole tepelerden oluşan bir graf haline getirmek için graftan atılması gerekli en az tepe sayısına grafın tepe bağlantılılık (connectivity) sayısı denir ve $k(G)$ ile gösterilir. Bir G grafının bileşenlerinin sayısı $w(G)$ olmak üzere

$$k(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \{ |S| : w(G - S) \geq 2 \} \text{ dir.}$$

Tanım 2.1.2: (Chvatal, 1973) Dayanıklılık Sayısı, Bir G grafının kesim tepesi S ve $G - S$ grafının bileşenlerinin sayısı $w(G - S)$ olmak üzere bu grafın dayanıklılık (toughness) sayısı

$$t(G) = \min_s \frac{|S|}{w(G - S)} \text{ dir.}$$

Tanım 2.1.3: (Barefoot et al., 1987) Bağlayıcı Sayısı, Bir G grafının tepeler kümesi $V(G)$ nin boş olmayan bir alt kümesi S olsun. G grafının, S deki en az bir tepeye bitişik olan tüm tepeleri S 'nin $N(S)$

komşuluğunu oluşturduğunda $N(S) \neq V(G)$ ise grafın bağlayıcı (binding) sayısı

$$b(G) = \min_s \frac{|N(S)|}{|S|} \text{ dir.}$$

Tanım 2.1.4: Minimum Tepe Derecesi, Bir G grafının herhangi bir tepesine bitişik olan ayrıtların sayısına o tepenin derecesi denir. Bir G grafının en küçük tepe derecesi $\delta(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.5: Bağımsızlık Sayısı, $S \subset V(G)$, bir G grafının tepeler kümesinin herhangi bir alt kümesi olsun. S kümesindeki tepeleri ikişerli aldığımızda G grafında bir ayrıta sahip değilse bu kümeye bağımsız küme denir. Bir G grafi en az bir bağımsız kümeye sahiptir. Bu kümeler içinde en çok elemana sahip olan kümenin eleman sayısına G grafının bağımsızlık sayısı (independence number) denir ve $\beta(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.6: Örtü Sayısı, $S \subseteq V(G)$, bir G grafının tepeler kümesinin boş olmayan bir alt kümesi olsun. G grafindaki her bir ayrıtlın en az bir uç noktası bu kümede ise bu kümeye örtü kümesi denir. Bir G grafi en az bir örtü kümesine sahiptir. Bu kümeler içinde en az elemana sahip olan kümenin eleman sayısına G grafının örtü sayısı (covering number) denir ve $\alpha(G)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.7: Kesim Tepesi, Eğer $k(G - v) > k(G)$ ise, o zaman bir G grafının v tepesine bir kesim tepe (cut vertex) denir. Böylece,

birleştirilmiş bir grafın bir tepesi çıkarıldığında grafi birleştirilmemiş graf haline getiriyorsa bu tepeye bir **kesim tepe** denir.

2.2 BAĞIMSIZLIK SAYISINI BULAN PAULL-UNGER ALGORİTMASI

Tanım 2. 2. 1 (Prather, 1976) $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ alfabeti ile $x = \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_k}$ gibi kelimeleri oluşturabiliriz. (ϵ , null uzunluğu sıfır olan bir kelimedir). Σ^* gösterilimi verilen Σ alfabetinden üretilen bütün kelimelerin kümesinin bir yığındır.

$$\Sigma^* = \{x: x, \Sigma \text{ alfabetinin bir kelimesidir} \}$$

Şimdi bu yığına ilişkilendiren bir ikili işlem tanımlayacağız. Bu işlem genellikle kelimelerin **birleşimi (bitişikliği)** olarak adlandırılır. x yukarıda verildiği gibi ve $y = \sigma_{j_1} \sigma_{j_2} \dots \sigma_{j_l}$ olsun. Birinci kelimeyi yazdıktan sonra ikinci kelimenin sembollerini yan yana dizeriz

$$x.y = \sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_k} \sigma_{j_1} \sigma_{j_2} \dots \sigma_{j_l}$$

görüldüğü gibi her x kelimesi için

$$x.\epsilon = \epsilon.x = x$$

öyleyse $\Sigma^* = (\Sigma^*, \cdot, \epsilon)$ bir monoid'e dönüştüğü görülür çünkü bitişiklik işleminin birleşmeli olduğu açıktır. Σ^* 'yi Σ alfabetinden elde edilen **free monoid** olarak adlandırırız.

Örnek 2. 2. 1: Eğer $\Sigma = \{a,b,c,d\}$ ise Σ^* 'deki bitişiklik işlemini aşağıdaki örnekle gösterebiliriz

$$abba \cdot dabba = abbadabba$$

$$da \cdot da = dada$$

$$cab \cdot \varepsilon = cab$$

Eğer Σ İngiliz alfabesinin küçük harflerinden oluşuyorsa bitişiklik işlemi aşağıdaki örnek gibidir

$$single \cdot ton = singleton$$

$$water \cdot gate = watergate$$

$$\varepsilon \cdot water = water$$

Örnek 2. 2. 2: Eğer $\Sigma = \{0,1\}$ ise $\Sigma^* = \{0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \dots\}$ dir. Birleşimlerin bazılarını gösterelim

$$01 \cdot 101 = 01101$$

$$101 \cdot 01 = 10101$$

$$01 \cdot \varepsilon = 01$$

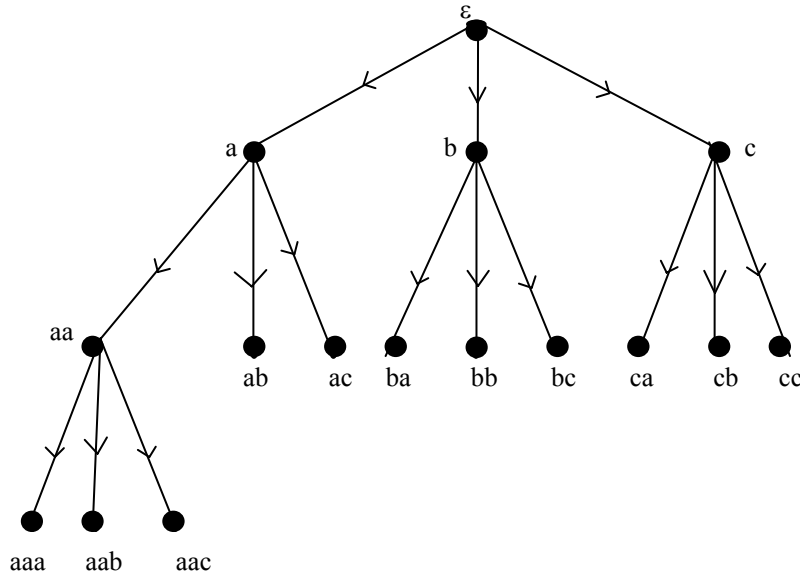
Σ alfabesinin tek bir harften oluşmadığı açıktır, Σ^* değişme özelliği yoktur. Bir alfabeden oluşturulabilecek kelimelerin sayısı sonsuzdur. Örneğin $\Sigma = \{1\}$ sadece bir karakterden oluşan bir alfabeden bile sonsuz tane kelime oluşturulabilir. Bu alfabedeki bazı bileşimler aşağıdadır.

$$11 \cdot 1111 = 111111$$

$$111 \cdot 111 = 111111$$

2.2.1 ALGORİTMA

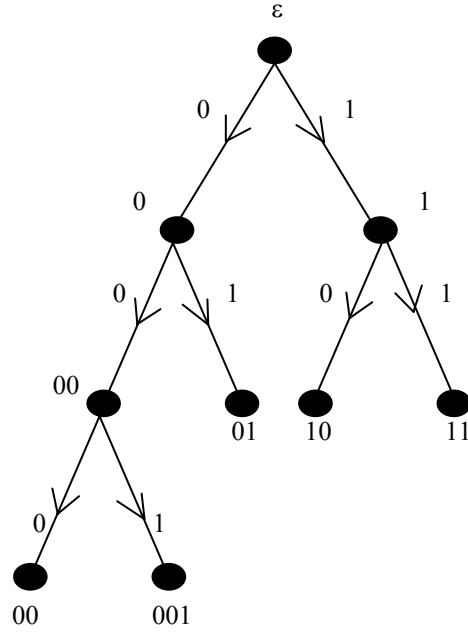
$x E y \Leftrightarrow y = x\sigma$ ($\sigma \in \Sigma$) ayrıt bağıntısı aracılığı ile birleştirilmiş bir sonsuz (digraf) $G = (\Sigma^*, E)$ grafının tepeler kümesi olarak, G grafının tepelerinin alfabelinden üretilen bütün kelimelerin kümesini Σ^* ile gösterelim (Prather, 1976).



Şekil 2. 2. 1. 1

$\Sigma = \{a,b,c\}$ alfabelinden sonsuz tane oluşturulan kelimelerin Σ^* kümesinin elemanlarının bazıları Şekil 2. 2. 1. 1'de yönlendirilmiş bir ağaç graf olarak gösterilmiştir. Benzer şekilde Şekil 2. 2. 1. 2'de $B = \{0,1\}$ ikili alfabelinden oluşturulan B^* için sonsuz bir yönlendirilmiş ağaç graf gösterilmiştir. Şekil 2. 2. 1. 2'de görüldüğü gibi yönlendirilmiş dallar olarak gösterilen ayrıtları soldan sağa doğru etiketleriz, grafın bütününde B^* 'ı temsil eden bu sıralamayı gerçekten incelemek istiyorsak bu gerekli olacaktır. Bu yönlendirilmiş ağaç grafta ilk tepe grafın kök tepesi olarak

adlandırılır. Bu aynı zamanda Σ^* kümesindeki null kelimesidir. Eğer istenirse graf yönsüz graf olarakta düşünülebilir.



Şekil 2. 2. 1. 2

V, B^* 'in sonlu bir alt kümesi olmak üzere $T = (V, E)$ şeklinde sonsuz (digraf) bir ikili ağaçtır,

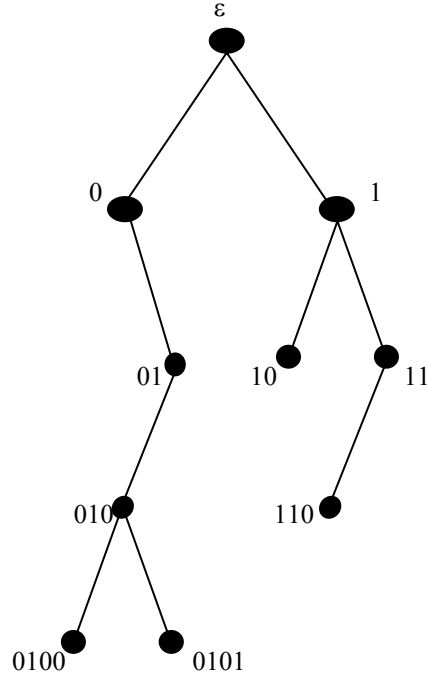
$$(i) \quad x\sigma \in V \Rightarrow x \in V (\sigma \in B)$$

$$(ii) \quad x E y \Leftrightarrow \text{bazı } \sigma \in B \text{ için } y = x\sigma$$

2. madde daha önce söylendiği gibi ayrıt bağıntısıdır. 1. madde bize her bir tepeden köke birleşmiş bir yol olduğunu garanti eder. Aynı zamanda ağacın uçlarındaki düğümlere (tepelere) ait olan kümeleri gösteren alt küme aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$L = L(T) = \{x \in V : \text{bütün } \sigma \in B \text{ için } x\sigma \notin V\} \subseteq V$$

Örnek 2. 2. 1. 1: Şekil 2. 2. 1. 3'de bir ikili ağaç gösterilmektedir. İkili ağacın tanımındaki (i). maddeyi örneklemek için $0101 \in V \Rightarrow 010 \in V \Rightarrow 01 \in V \Rightarrow 0 \in V \Rightarrow \varepsilon \in V$



Şekil 2. 2. 1. 3

Graftaki her bir tepenin gösterdiği x kelimesinin ($x \in \Sigma^*$) önce gelenlerinin grafta daha önceden var olduğu (i). madde tarafından garanti edilir. Örneğin Şekil 2. 2. 1. 3'teki 0100 graf tepesi $0100=010 \cdot 0$ şeklinde oluşturulmuş olup bu tepenin önce geleni 010'dur ve bu grafta daha

önceden grafin tepesi olarak vardır. Bu özel T ağacı aşağıdaki düğümler (tepeler) kümesine sahiptir.

$$L = L(T) = \{10, 110, 0100, 0101\}$$

$T = (V,E)$ ikili ağacı algoritmik işlemler içerisinde kullanılabilir. Sadece $V \subseteq B^*$ 'daki sonlu sayıdaki tepeler kullanılmalıdır. Bu yüzden algoritmada T için en uygun veri tipi dizi veri yapısıdır

T: array B^* of A

Burada A, tepeler etiketlenirken kullanılan cebirdir. B^* sonsuz bir küme olduğu için algoritmanın çalıştırılması sırasında bu tepelerin hepsini etiketlendirmek imkânsızdır. Sadece $V \subseteq B^*$ bir sonlu alt kümesi etiketlendirilecektir. Tepelerin etiketlendirildiği yukarıdan aşağıya doğru sıradan dolayı V alt kümesinin (i) durumu sağladığını söyleriz. Yani işlem sonlandığı zaman etiketlenmiş bir ikili ağaç elde ederiz.

Etiketlendirilmiş ikili ağaçlar, bir $G = (V,E)$ grafinin β bağımsızlık ve β' klik sayısının hesaplanmasında kullanılır. Bu hesaplamalar ilk M.C.Paull ve S.H.Unger tarafından yapılmıştır. Onların oluşturduğu çözümü aşağıdaki algoritma ile gösterebiliriz.

T: array B^* of $\mathcal{P}(V)$ β, i, j, n : **positive integer**

E: array $n^+ \times n^+$ of B **L, M: subset of B^***

v: array B of V **x: element of B^***

σ : element of B^*

begin $T \leftarrow \emptyset$; $T[\varepsilon] \leftarrow V$; $L \leftarrow \{\varepsilon\}$;

for $j \leftarrow 1$ **to** $n - 1$ **do**

for $i \leftarrow j + 1$ **to** n **do**

```

if  $E[i, j] = 1$  then
  begin  $M \leftarrow \{x \in L: \{v_i, v_j\} \subseteq T[x]\}; L \leftarrow L \sim M;$ 
     $v[0] \leftarrow v_i; v[1] \leftarrow v_j;$ 
    for  $x \in M$  do
      for  $\sigma \in B$  do
        begin  $T[x\sigma] \leftarrow T[x] \sim \{v[\sigma]\};$ 
        if  $((T[x\sigma] \not\subseteq T[y]) \text{ and } (T[x\sigma] \neq T[y]))$  for all  $y \in L$  then
           $L \leftarrow L \cup \{x\sigma\}$ 
        end;
      end;
    end;
   $\beta \leftarrow \max_{x \in L} \{|T[x]|\}$ 
end.

```

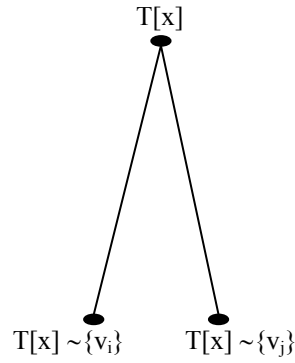
Bu algoritma herhangi bir $G = (V, E)$ grafi için β bağımsızlık sayısını belirler ve aynı zamanda bütün maximal bağımsız kümelerin listesini verir. Bunlardan daha büyük bir bağımsız küme içerilmez. Algoritmada

if $E[i, j] = 1$ then yerine if $E[i, j] = 0$ then

Yazarak küçük bir değişiklik ile β' klik sayısını ve bütün maximal kliklerin listesini elde ederiz. Algoritmanın uygulaması tanımlandığı kadar karmaşık değildir.

İkili ağaç $G = (V, E)$ grafinin tepeler kümesi V 'nin alt kümesi ile etiketlenir. Başlangıçta T ağacını etiketlemeyelim ya da eğer isterseniz ağacın tanımında gösterildiği gibi boş küme ile etiketleyebilirsiniz.

Daha sonra ağacın kökü (root) başlangıç kümesi V ile etiketlenir. $L \subseteq B^*$ alt kümesi etiketleme işlemleri sırasında ağacın yapraklarını ifade eder. Her iki **for** ifadesi grafın altüçgensel matrisinde $v_i \in v_j$ ($E[i,j] = 1$) koşulunu sağlayan tepe çiftlerini araştırır. Bu tepe çiftini altküme olarak içeren ağacın bütün yapraklarını M ile işaretleyelim. Daha sonra L kümesinden M 'leri silelim. Çünkü bu tepe çiftini içeren bir alt küme bağımsız olamaz. Kabul edelim ki ağacın işaretlendirilmiş tepelerinden biri $x \in B^*$ 'dir. En içteki **begin...end** bloğu x 'in maximal alt kümesi $T[x]$, v_i ve v_j tepelerinin ikisini aynı anda içermeyecek şekilde Şekil 2. 2. 1. 4'deki gibi soldan sağa etiketlenmesini sağlar.



Şekil 2. 2. 1. 4

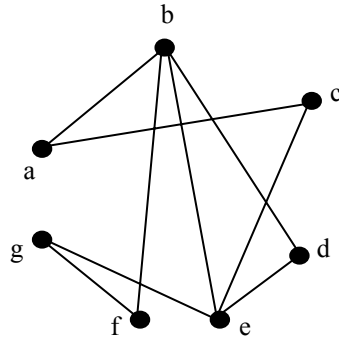
Aynı zamanda yeni etiketlediğimiz bu dalların ağacın etiketlenmiş diğer yaprakları tarafından içerilip içerilmediğini kontrol etmeliyiz.

Buna göre bu araştırmanın sonucunda L değiştirilebilir. Böylece yeni bir $E[i,j] = 1$ için aynı işlemler tekrarlanır.

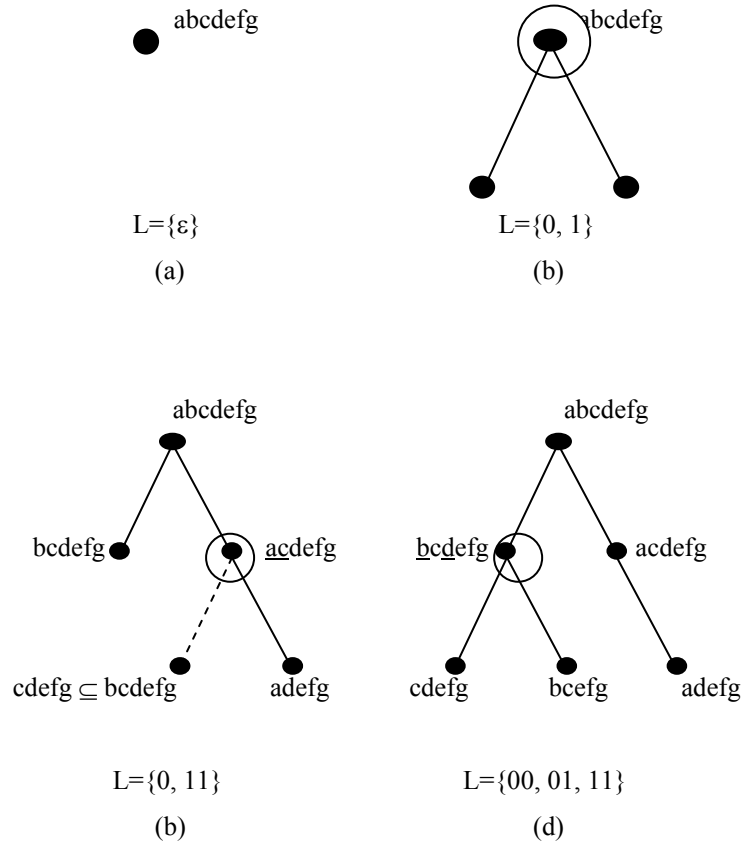
Örnek 2. 2. 1. 2: Paull-Unger algoritmasındaki çeşitli adımları sırasıyla örneklemek için Şekil 2. 2. 1. 5'deki grafi inceleyelim. İlk olarak Şekil 2. 2. 1. 6 (a) da gösterildiği gibi yalnızca ağacımızın kökünü etiketleyelim.

Bu noktada $L = \{\varepsilon\}$ dir. Daha sonra altüçgensel matristeki girdileri inceleyebiliriz.

b	1
c	1 0
d	0 1 0
e	0 1 1 1
f	0 1 0 0 0
g	0 0 0 0 1 1
	a b c d e f



Şekil 2. 2. 1. 5



Şekil 2. 2. 1. 6

Şimdi 1'leri araştırıyoruz. **for** cümlelerinin düzenlemesi, sütunları soldan sağa, yukarıdan aşağıya taramamızı sağlar.

İlk 1'e a E b'de rastlıyoruz. Ağacın dallarının $\{a,b\}$ 'yi içeren alt küme ile etiketlenmiş herhangi birini araştırırız. Şekil 2. 2. 1. 6 (b)'de Şekil 2. 2. 1. 4'deki gibi bölme işlemine başvurmamız gerekmektedir. Şimdi dallarımızın kümesi $L = \{0,1\}$ 'dir. Daha sonraki 1'e a E c arasındaki ilişkide rastlarız. $\{a,c\} \subseteq T[x]=\{a,c,d,e,f,g\}$ olan bir tane dal vardır. Bu nedenle $M=1$ 'dir ve bu düğüm L'den silinir. Algoritmadaki kümeler

$$T[10]=T[x0] \Leftarrow T[x] \sim \{a\} = \{c,d,e,f,g\}$$

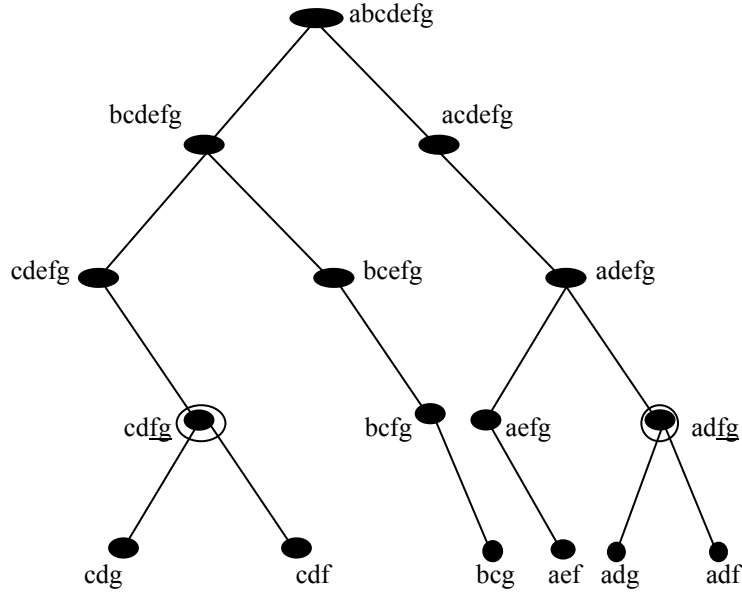
$$T[11]=T[x1] \Leftarrow T[x] \sim \{c\} = \{a,d,e,f,g\}$$

Sonraki satırda yeni oluşan dalların ağacın diğer dallarında içerilip içerilmediği kontrol edilir. Böylece

$$0 \in L \text{ ile } T[10] \subseteq T[0]$$

10 düğümü ağacın yeni bir dalı olarak gitmez (Şekil 2. 2. 1. 6 (c)).

Şimdi $L = \{0,11\}$ dir. Şekil 2. 2. 1. 6 (d)'de (b E d)'den elde edilen sonraki 1-girişi için uygun bölmenin sonucu gösterilmiştir, burada $L = \{00, 01, 11\}$ dir. Bu durumda bu hesaplama Şekil 2. 2. 1. 7'deki gibi gösterilebilir.



Şekil 2. 2. 1. 7

Şekil 2. 2. 1. 7'de yuvarlak içine alınmış düğümler, matriste son olarak bulunmuş 1-girişi (f E g) tanımlandığı zaman işaretlenmiş M'lerdir. Bununla birlikte sonuç olarak

$L = \{0010, 0011, 0111, 1101, 1110, 1111\}$ dir.

Böylece, $\beta = \max_{x \in L} \{|T[x]|\} = 3$ tür.

Gerçekten algoritmanın uygulaması sonucunda elde edilen bütün dalların etiketleri maximal bağımsız kümelerle eşleşir. Sırasıyla bütün bağımsız alt kümeler

$\{c,d,g\}, \{c,d,f\}, \{b,c,g\}, \{a,e,f\}, \{a,d,g\}, \{a,d,f\}$

şeklindedir.

3. RUPTURE SAYISI

Bu bölümde tezimizde kullandığımız dayanıklılık parametresi olan rupture parametresinin tanımını verip bu parametre ile ilgili daha önceden bulunmuş bazı sonuçları ve teoremleri vereceğiz.

Ayrıca bu bölümde rupture sayısının Bölüm 2’de tanımlarını verdiğimiz parametrelerle ilişkisini göstereceğiz.

n tepeli yol ve çevre grafları sırasıyla P_n ve C_n ile gösterilir. $C_{t,r}$ comet graf ise, ortasında $K_{l,r}$ yıldız grafi ve sonunda P_t ($t \geq 2$) yol grafi ile tanımlanır. Bu bölümde daha önceden hesaplanmış P_n , C_n , $C_{t,r}$ ve k -parçalı tam graf K_{n_1, n_2, \dots, n_k} özel graflarının rupture değerlerini verdik.

Tanım 3. 1: Rupture Parametresi, Birleştirilmiş bir tam graf K_n için rupture parametresi $1-n$ ’dir ve birleştirilmiş tam olmayan G grafi için rupture parametresi

$$r(G) = \max \{w(G - S) - |S| - m(G - S) : S \subset V(G), w(G - S) > 1\}$$

olarak tanımlanmıştır. Burada $w(G - S)$, $G - S$ grafının bileşen sayısı ve $m(G - S)$, $G - S$ grafının en fazla tepeye sahip bileşenidir. Bu parametre bir grafın zedelenebilirlik değeri için kullanılır.

Teorem 3. 1: (Li et.al, 2005) $C_{t,r}$ comet, P_n ($n \geq 3$) yol, $K_{l, n-1}$ ($n \geq 3$) yıldız ve C_n çevre graflarının rupture sayıları

a) $C_{t,r}$ comet grafin rupture sayısı

$$r(C_{t,r}) = \begin{cases} r-1, & r \text{ çift ise} \\ r-2, & r \text{ tek ise} \end{cases} \text{ dir.}$$

b) P_n ($n \geq 3$) yol grafin rupture sayısı

$$r(P_n) = \begin{cases} -1, & n \text{ çift ise} \\ 0, & n \text{ tek ise} \end{cases} \text{ dir.}$$

c) $K_{1,n-1}$ ($n \geq 3$) yıldız grafin rupture sayısı $n-3$ tür.

d) C_n çevre grafinin rupture sayısı

$$r(C_n) = \begin{cases} -1, & n \text{ çift ise} \\ -2, & n \text{ tek ise} \end{cases} \text{ dir.}$$

Teorem 3. 2: (Li et.al, 2005) k -parçalı K_{n_1, n_2, \dots, n_k} tam grafin rupture sayısı

$$2\max \{n_1, n_2, \dots, n_k\} - \sum_{i=1}^k n_i - 1 \text{ dir.}$$

Teorem 3. 3: (Li et.al, 2005) G_1 ve G_2 birleştirilmiş graflar, sırasıyla n_1 ve n_2 de bu grafların tepe sayıları olsun. Bu durumda

$$r(G_1 + G_2) = \max \{r(G_1) - n_2, r(G_2) - n_1\} \text{ dir.}$$

Teorem 3. 4: (Li et.al, 2005) G , n tepeli birleştirilmiş tam olmayan bir graf olsun. Bu durumda

$$\text{a) } 2\alpha(G) - n - 1 \leq r(G) \leq \frac{[\alpha(G)]^2 - \kappa(G)[\alpha(G) - 1] - n}{\alpha(G)}$$

$$\text{b) } 3 - n \leq r(G) \leq n - 3$$

$$\text{c) } r(G) \leq 2\delta(G) - 1$$

dir.

Teorem 3. 5: G , n tepeli birleştirilmiş bir graf olsun. Eğer $t(G) > 0$ ise o zaman

$$r(G) \leq \frac{\alpha(G)(1 + \alpha(G))}{t(G)} - (k(G) + \delta(G) + 1) \text{ dir.}$$

Kanıt: Herhangi bir S kesim tepesi (cut vertex) ele alalım. Bu durumda

$$k(G) \leq |S| \leq \alpha(G) \text{ olacağı aşikârdır.}$$

$$t(G) = \min \left\{ \frac{|S|}{w(G-S)} \right\} \text{ buradan}$$

$$t(G) \leq \frac{|S|}{w(G-S)} \text{ ve } w(G-S) \leq \frac{|S|}{t(G)} \text{ dir.}$$

Eşitsizliğin her iki tarafından $|S|$ yi çıkaralım.

$$w(G - S) - |S| \leq \frac{|S|}{t(G)} - |S|$$

$k(G) \leq |S| \leq \alpha(G)$ olduğunu biliyoruz. Böylece

$$w(G - S) - |S| \leq \frac{\alpha(G)}{t(G)} - k(G) \text{ olur. Ayrıca}$$

$$m(G - S) \geq \delta(G) - |S| + 1 \text{ dir.}$$

Bu değerleri ruptüre tanımında yerine yazdığımızda

$$r(G) = \max \{ w(G - S) - |S| - m(G - S) \}$$

$$r(G) \leq \max \left\{ \frac{\alpha(G)}{t(G)} - k(G) - (\delta(G) - |S| + 1) \right\}$$

$$r(G) \leq \max \left\{ \frac{\alpha(G)}{t(G)} - k(G) - \delta(G) + |S| - 1 \right\}$$

$$r(G) \leq \max \left\{ \frac{\alpha(G)}{t(G)} + \alpha(G) - (k(G) + \delta(G) + 1) \right\}$$

$$r(G) \leq \frac{\alpha(G)(1+t(G))}{t(G)} - (k(G) + \delta(G) + 1)$$

elde edilir. Böylece ispatımız tamamlanır.

Teorem 3. 6: G , n tepeli birleştirilmiş bir graf olsun ve $t(G) > 0$ ise bu durumda

$$r(G) \leq \left[\frac{2 - b(G)}{t(G)} + 1 \right] \alpha(G) - (\delta(G) + 1) \text{ dir.}$$

$$\mathbf{Kant:} \quad b(G) = \min_s \frac{|N(S)|}{|S|}$$

$$b(G) \leq t(G) + 1 \Rightarrow t(G) \geq b(G) - 1$$

$$t(G) = \min \left\{ \frac{|S|}{w(G-S)} \right\}$$

$$t(G) = \min \left\{ 1 - \frac{w(G-S) - |S|}{w(G-S)} \right\}$$

$$t(G) = 1 - \max \left\{ \frac{w(G-S) - |S|}{w(G-S)} \right\}$$

$$1 - \max \left\{ \frac{w(G-S) - |S|}{w(G-S)} \right\} \geq b(G) - 1 \text{ dir. Öyleyse}$$

$$1 - \frac{w(G-S) - |S|}{w(G-S)} \geq b(G) - 1$$

$$w(G-S) - |S| \leq (2 - b(G)) w(G-S) \quad (1)$$

$$t(G) = \min \left\{ \frac{|S|}{w(G-S)} \right\} \Rightarrow t(G) \leq \frac{|S|}{w(G-S)}$$

$$t(G) \leq \frac{|S|}{w(G-S)} \Rightarrow w(G-S) \leq \frac{|S|}{t(G)} \quad (2)$$

(2) eşitsizliğini (1)'de yerine koyalım

$$w(G-S) - |S| \leq (2 - b(G)) \frac{|S|}{t(G)}$$

ve

$$m(G-S) \geq \delta(G) + 1 - |S| \text{ dir.}$$

Bu değerleri ruptüre tanımında yerine yazdığımızda

$$r(G) = \max \{ w(G-S) - |S| - m(G-S) \}$$

$$r(G) \leq \max \left\{ (2 - b(G)) \frac{|S|}{t(G)} - (\delta(G) + 1 - |S|) \right\}$$

$$r(G) \leq \max \left\{ (2 - b(G)) \frac{|S|}{t(G)} - \delta(G) - 1 + |S| \right\}$$

$$r(G) \leq \max \left\{ \frac{|S| (2 - b(G) + t(G))}{t(G)} - \delta(G) - 1 \right\}$$

$|S| \leq \alpha(G)$ olduğundan

$$r(G) \leq \max \left\{ \frac{\alpha(G) (2 - b(G) + t(G))}{t(G)} - \delta(G) - 1 \right\}$$

$$r(G) \leq \alpha(G) \left[\frac{2 - b(G)}{t(G)} + 1 \right] - (\delta(G) + 1)$$

elde edilir. Böylece ispatımız tamamlanır.

Teorem 3. 7: $n > 3$ olmak üzere n tepeli bir G grafi için

$$r(G) \geq k(G) - \alpha(G) - n + 3 \text{ olur.}$$

Kanıt: S kümesi bir kesim tepesi (cut vertex) olsun. Bu durumda

$k(G) \leq |S| \leq \alpha(G)$ olacağı aşikârdır.

$w(G - S) \geq 2$ ve $m(G - S) \leq |V(G)| - |S| - 1$ dir.

$|S| \geq k(G)$ olduğundan $m(G - S) \leq |V(G)| - k(G) - 1$ olur.

Bu değerleri rupture tanımında yerine yazdığımızda

$$r(G) = \max \{ w(G - S) - |S| - m(G - S) \}$$

$$r(G) \geq \max \{ 2 - |S| - |V(G)| + k(G) + 1 \}$$

$$r(G) \geq \max \{ 2 - \alpha(G) - |V(G)| + k(G) + 1 \}$$

$$r(G) \geq \max \{ k(G) - \alpha(G) - n + 3 \}$$

$$r(G) \geq k(G) - \alpha(G) - n + 3$$

elde edilir. Böylece ispatımız tamamlanır.

Teorem 3. 8: (Chartrand ve Harary 1968) G , n tepeli birleştirilmiş bir graf olsun. Eğer G tam olmayan bir graf ise o zaman

$$k(G) \geq 2\delta(G) - n + 2 \text{ dir.}$$

Sonuç 3. 1: G , n tepeli birleştirilmiş bir graf olsun. Eğer G tam olmayan bir graf ise o zaman

$$r(G) \geq 2\delta(G) - \alpha(G) - 2n + 5 \text{ olur.}$$

Kanıt: Teorem 3. 7 ve Teorem 3. 8 'den kolayca görülür.

Tanım 3. 2 $p \geq 2$ olsun. Bir G grafının tepeler kümesi birbirinden bağımsız p tane kümeye ayrılabiliriyorsa yani V_1, V_2, \dots, V_p olmak üzere $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_p$ ve her bir $i=1, 2, \dots, p$ için $E(G[V_i]) = \emptyset$ oluyorsa G , grafına **p -parçalı graf** denir.

Teorem 3. 9: (Topp and Volkmann 1993) $p \geq 2$ olmak üzere bir tamsayı ve G n tepeli bir p -parçalı graf olsun. Eğer $k(G) < \delta(G)$ ise o zaman

$$k(G) \geq 2p \delta(G) - n(2p - 3) \text{ dir.}$$

Teorem 3. 10: (Topp and Volkmann 1993) $p \geq 2$ olmak üzere bir tamsayı ve G n tepeli bir p -parçalı graf olsun. Eğer $\delta(G) \geq \frac{2p-3}{2p-1}n$ ise o zaman $k(G) = \delta(G)$ dir.

Teorem 3. 11: $p \geq 2$ olmak üzere bir tamsayı ve G n tepeli bir p -parçalı graf olsun. Eğer $k(G) < \delta(G)$ ise o zaman

$$r(G) \geq 2p \delta(G) - n(2p-2) - \alpha(G) + 3 \text{ dir.}$$

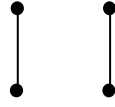
Kanıt: Teorem 3. 7 ve Teorem 3. 9'dan kolayca görülür.

Teorem 3. 12: $p \geq 2$ olmak üzere bir tamsayı ve G n tepeli bir p -parçalı graf olsun. Eğer $\delta(G) \geq \frac{2p-3}{2p-1}n$ ise $k(G) = \delta(G)$ dir. Bu durumda

$$r(G) \geq \frac{2p-3}{2p-1} - \alpha(G) - n + 3 \text{ dir.}$$

Kanıt: Teorem 3. 7 ve Teorem 3. 10'dan kolayca görülür.

Tanım 3. 3: Birleştirilmiş bir G grafından bazı tepelerini attıktan sonra Şekil 3. 1'deki gibi bir $2K_2$ alt grafi elde edemiyorsak bu G grafi $2K_2$ alt grafi içermez denir.



Şekil 3. 1

Teorem 3. 13: n tepeli ve $2K_2$ içermeyen bir birleştirilmiş G grafinin rupture değeri

$$r(G) = \beta(G) - \alpha(G) - 1 \text{ dir.}$$

Kanıt: $S \subset V(G)$ ve aynı zamanda S , G grafinin rupture sayısını sağlayan bir küme olsun. Böylece S kümesine göre 3 durum söz konusudur.

Durum 1: Eğer S , G 'nin bir örtü kümesi ise bu durumda $|S| = \alpha(G)$, $w(G - S) = \beta(G)$ ve $m(G - S) = 1$ dir.

Bu değerleri rupture tanımında yerine yazdığımızda

$$r(G) = \max \{ w(G - S) - |S| - m(G - S) \}$$

$$r(G) = \max \{ \beta(G) - \alpha(G) - 1 \}$$

$$r(G) = \beta(G) - \alpha(G) - 1 \quad (3)$$

elde edilir.

Durum 2: Eğer $|S| < \alpha(G)$ ise o zaman

$$w(G - S) \leq n - |S| \text{ ve } m(G - S) \geq 2 \text{ dir.}$$

Bu değerleri rupture tanımında yerine yazdığımızda

$$r(G) = \max \{ w(G - S) - |S| - m(G - S) \}$$

$$r(G) \leq \max \{ n - |S| - |S| - 2 \}$$

$$\begin{aligned}
r(G) &\leq \max \{ n - 2(|S| + 1) \} \\
r(G) &\leq \max \{ n - 2(\alpha(G) + 1) \} \\
r(G) &\leq \max \{ \beta(G) + \alpha(G) - 2\alpha(G) - 2 \} \\
r(G) &\leq \max \{ \beta(G) - \alpha(G) - 2 \} \\
r(G) &\leq \beta(G) - \alpha(G) - 2 \tag{4}
\end{aligned}$$

(3)'de elde ettiğimiz değer (4)'de elde ettiğimiz değerden daha büyük olduğunu iddia ediyoruz. Bu durumda

$$\beta(G) - \alpha(G) - 2 < \beta(G) - \alpha(G) - 1$$

olduğu açıktır.

Durum 3: Eğer $|S| > \alpha(G)$ ise o zaman $S = S_1 \cup S_2$ olsun. Bu durumda S_1 kümesi G 'nin bir örtü kümesi olsun ve böylece $|S_2| < \beta(G)$ olur. Böylece

$$w(G - S) = |V(G)| - |S| \text{ ve } m(G - S) = 1 \text{ dir.}$$

Bu değerleri ruptüre tanımında yerine yazdığımızda

$$\begin{aligned}
r(G) &= \max \{ w(G - S) - |S| - m(G - S) \} \\
r(G) &= \max \{ |V(G)| - |S| - |S| - 1 \} \\
r(G) &= \max \{ \beta(G) + \alpha(G) - 2|S| - 1 \} \\
r(G) &\leq \max \{ \beta(G) + \alpha(G) - 2\alpha(G) - 1 \} \\
r(G) &\leq \max \{ \beta(G) - \alpha(G) - 1 \} \\
r(G) &\leq \beta(G) - \alpha(G) - 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispatımız tamamlanır.

Tanım 3. 4: Tümlleme İşlemi, G , p tepeli ve q ayrıtlı birleştirilmiş bir graf olsun. G grafının tümlenyeni \bar{G} ile gösterilir. \bar{G} grafi G 'de bulunan tepeler ile G 'de bulunmayan ayrıtların oluşturduğu bir graftır. \bar{G} grafi birleştirilmiş olmayabilir.

Sonuç 3. 2: $2K_2$ yapısı içermeyen graflar için

(a) $\alpha(G) = \alpha(\bar{G})$ ise $r(\bar{G}) = r(G)$ dir.

(b) $\alpha(G) = \beta(\bar{G})$ ise $r(\bar{G}) = -r(G) - 2$ dir.

Kanıt:

(a)

G ve \bar{G} graflarının rupture değeri Teorem 3. 13'den hesaplanır.

$$r(G) = \beta(G) - \alpha(G) - 1 \text{ ve } r(\bar{G}) = \beta(\bar{G}) - \alpha(\bar{G}) - 1$$

$$\alpha(G) = \alpha(\bar{G}) \text{ ise } \beta(G) = \beta(\bar{G}) \text{ dir.}$$

$$r(G) = \beta(G) - \alpha(G) - 1 = \beta(\bar{G}) - \alpha(\bar{G}) - 1 = r(\bar{G}) \text{ dir.}$$

(b)

G ve \bar{G} graflarının rupture değeri Teorem 3. 13'den hesaplanır.

$$r(G) = \beta(G) - \alpha(G) - 1 \text{ ve } r(\bar{G}) = \beta(\bar{G}) - \alpha(\bar{G}) - 1$$

$$\alpha(G) = \beta(\bar{G}) \text{ ise } \beta(G) = \alpha(\bar{G}) \text{ dir.}$$

$$r(G) = \beta(G) - \alpha(G) - 1$$

$$r(G) = \alpha(\bar{G}) - \beta(\bar{G}) - 1 \quad (5)$$

$$r(\overline{G}) = \beta(\overline{G}) - \alpha(\overline{G}) - 1 \quad (6)$$

(5) ve (6) eşitsizliklerini taraf tarafa topladığımızda

$$r(G) + r(\overline{G}) = -2$$

$$r(\overline{G}) = -r(G) - 2$$

elde edilir. Böylece ispatımız tamamlanır.

Sonuç 3. 3: $G = P_n$ için G grafına grafta olmayan bir e ayrıtı ekleyerek elde ettiğimiz $G + e$ grafının rupture değeri

$$\alpha(G) = \alpha(G + e) \text{ ise } r(G) = r(G + e) \text{ dir.}$$

Kanıt: G ve $G + e$ graflarının rupture değeri Teorem3. 13'den hesaplanır.

$$r(G) = \beta(G) - \alpha(G) - 1 \text{ ve}$$

$$r(G + e) = \beta(G + e) - \alpha(G + e) - 1 \text{ dir.}$$

$$\alpha(G) = \alpha(G + e) \text{ ise } \beta(G) = \beta(G + e) \text{ dir.}$$

$$r(G) = \beta(G) - \alpha(G) - 1$$

$$\alpha(G) = \alpha(G + e) \text{ ve } \beta(G) = \beta(G + e) \text{ olduğundan}$$

$$r(G) = \beta(G + e) - \alpha(G + e) - 1$$

$$r(G) = r(G + e) \text{ dir.}$$

Sonuç 3. 4: $G = P_n$ ve $G = C_n$ olmak üzere \overline{G} grafının rupture değeri

$$r(\overline{G}) = -n + 3 \text{ tür.}$$

Kanıt: \bar{G} grafi için ruptüre değeri

$r(\bar{G}) = \beta(\bar{G}) - \alpha(\bar{G}) - 1$ (Teorem 3. 13 den) hesaplanır. Burada

$\alpha(\bar{G}) = n - 2$ ve $\beta(\bar{G}) = 2$ olarak hesaplanmıştır.

Bu değerleri ruptüre tanımında yerine yazdığımızda

$$r(\bar{G}) = \beta(\bar{G}) - \alpha(\bar{G}) - 1$$

$$r(\bar{G}) = 2 - (n - 2) - 1$$

$$r(\bar{G}) = -n + 3$$

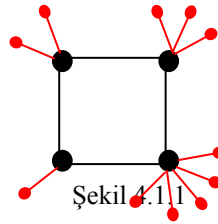
elde edilir. Böylece ispatımız tamamlanır.

4. DİKENLİ GRAFLARIN RUPTURE SAYISI

Bu bölümde bir grafın dikenli grafının tanımı verilmiştir. Daha sonra dikenli grafların rupture sayısı değeri hesaplanmıştır. Son olarak taçlama (corona) graf işlemi uygulanarak elde edilen grafların rupture sayısı hesaplanmıştır.

4.1 TANIMLAR VE TEOREMLER

Tanım 4. 1. 1: Dikenli Graf, Birleştirilmiş bir G grafının her bir i tepesine $p_i > 0$ olacak şekilde p_i tane tepe eklendiğinde elde edilen G^* grafına **dikenli graf (thorny graph)** denir.



Şekil 4.1.1 'de C_4^* dikenli grafi gösterilmiştir. Burada C_4 çevre grafının her bir tepesine farklı sayıda tepe ekleyerek C_4^* dikenli grafi elde edilmiştir.

Teorem 4. 1. 1: G , n tepeli birleştirilmiş bir graf olsun. Her $p_i = 1$ olacak şekilde G nin bir thorny grafi G^* ise o zaman G^* grafının rupture değeri

$$r(G^*) = \beta(G) - 2 \text{ dir.}$$

Kanıt: $S^* \subset V(G^*)$ ve aynı zamanda S^* , G^* 'in ruptüre sayısını sağlayan bir küme olsun. Böylece S^* kümesine göre 2 durum söz konusudur.

Durum 1: Eğer S^* , G^* 'nin bir örtü kümesi ise bu durumda

$$w(G^* - S^*) = \beta(G) + \alpha(G) \text{ ve } m(G^* - S^*) = 2 \text{ dir.}$$

Böylece

$$r(G^*) = \max \{ w(G^* - S^*) - |S^*| - m(G^* - S^*) \}$$

$$r(G^*) = \max \{ \beta(G) + \alpha(G) - \alpha(G) - 2 \}$$

$$r(G^*) = \max \{ \beta(G) - 2 \}$$

$$r(G^*) = \beta(G) - 2 \tag{7}$$

elde edilir.

Durum 2: S^* , G^* 'nin bir örtü kümesi olmasın ve $|S^*| \neq n$ olsun.

Bu durumda

$$w(G^* - S^*) = w(G - S^*) + |S^*| \text{ ve } m(G^* - S^*) > 2 \text{ olur.}$$

Böylece

$$r(G^*) = \max \{ w(G^* - S^*) - |S^*| - m(G^* - S^*) \}$$

$$r(G^*) < \max \{ w(G - S^*) + |S^*| - |S^*| - 2 \}$$

$$r(G^*) < \max \{ w(G - S^*) - 2 \}$$

$$w(G - S^*) < \beta(G) \text{ olduğundan}$$

$$r(G^*) \leq \max \{ \beta(G) - 2 \}$$

$$r(G^*) \leq \beta(G) - 2 \tag{8}$$

elde edilir.

Eğer $|S^*| = n$ ise bu durumda

$$w(G^* - S^*) = n \text{ ve } m(G^* - S^*) = 1 \text{ olur.}$$

Böylece

$$r(G^*) = \max \{ w(G^* - S^*) - |S^*| - m(G^* - S^*) \}$$

$$r(G^*) = \max \{ n - n - 1 \}$$

$$r(G^*) = \max \{ -1 \}$$

$$r(G^*) = -1$$

$1 \leq \beta(G) - 2$ olduğunu iddia ediyoruz. Bu iddiamızı ispatlayalım.

$1 \leq \beta(G)$ olduğunu biliyoruz.

Eşitsizliğin her iki tarafından 2 çıkaralım.

$-1 \leq \beta(G) - 2$ olur. Böylece iddiamızın ispatı tamamlanır.

(7) ve (8) den $r(G^*) = \beta(G) - 2$ olduğu kolayca görülür.

$$r(G^*) = \beta(G) - 2$$

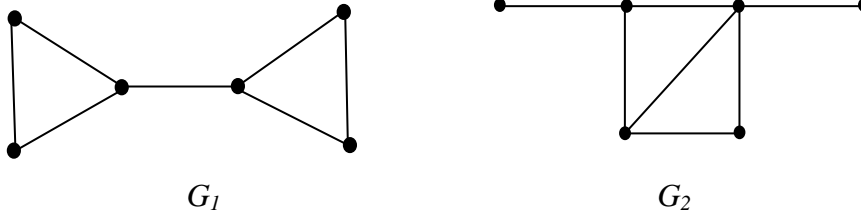
elde edilir. Böylece ispatımız tamamlanır.

Sonuç 4. 1. 1: Eğer G grafi n tepeli bir P_n (yol), K_n (tam), C_n (çevre), $S_{1,n-1}$ (yıldız) ve $W_{1,n-1}$ (tekerlek) graf olarak alınırsa bu grafların $p_i=1$ olacak şekilde dikenlilerinin rupture sayıları Teorem 4.1.1'e göre Tablo 4.1.1'de verilmiştir.

n tepeli dikenli graf	$r(G^*)$
P_n^*	$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2$
C_n^*	$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2$
K_n^*	-1
$W_{1,n-1}^*$	$\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - 2$
$S_{1,n-1}^*$	$n - 3$
$K_{m,p}^*$ (tam bipartite) $n = m + p$ ($m \geq p$)	$m - 2$

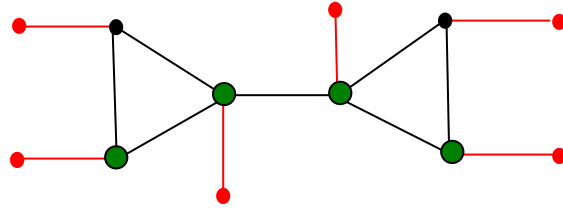
Tablo 4.1.1

Örnek 4. 1. 1: Teorem 4. 1. 1'i bilinen yapıya sahip olmayan aşağıdaki herhangi 6 tepeli Şekil 4. 1. 2 gibi 2 graf için inceleyelim.



Şekil 4. 1. 2

G_1 ve G_2 'nin her bir tepesine $p_i = 1$ olacak şekilde 1 tane tepe eklediğimizde elde edilen dikenli graflar ve rupture sayıları Tablo 4. 1. 2 ve Tablo 4. 1. 3'de verilmiştir.

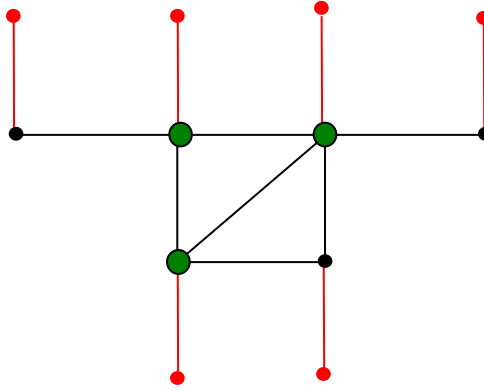


Şekil 4. 1. 3

$w(G_1^* - S^*)$	$ S^* $	$m(G_1^* - S^*)$	$r(G_1^*)$
3	1	6	-4
4	2	4	-2
6	6	1	-1
3	2	8	-7
6	4	2	0

Tablo 4. 1. 2

$\beta(G_1)=2$ ve $\alpha(G_1)=4$ öyleyse $r(G_1^*)=\beta(G_1)-2=2-2=0$ dır.



Şekil 4.1.4

$w(G_2^* - S^*)$	$ S^* $	$m(G_2^* - S^*)$	$r(G_2^*)$
6	4	2	0
6	6	1	-1
5	2	4	-1
6	3	2	1

Tablo 4. 1. 3

$\beta(G_2)=3$ ve $\alpha(G_2)=3$ öyleyse $r(G_2^*)=\beta(G_2)-2=3-2=1$ dir.

Tanım 4. 1. 2: Alt graf, Tepelerinin ve ayrıtlarının herhangi bir alt kümesini aldığımızda oluşan grafa G 'nin alt grafi denir ve genellikle $H \subseteq G$ ile gösterilir.

Teorem 4. 1. 2: G n tepeli birleştirilmiş bir graf olsun. Her $p_i \geq 2$ olacak şekilde G nin bir dikenli grafi G^* ise o zaman G^* grafının rupture değeri

$$r(G^*) = \beta(G^*) - \alpha(G^*) - 1 \text{ dir.}$$

Kanıt: Burada $\beta(G^*) = \sum_{i=1}^n p_i$ ve $\alpha(G^*) = n$ dir.

Eğer $S^* \subset V(G^*)$ ise o zaman $w(G^* - S^*) = \sum_{i=1}^k p_i + w(G - S^*)$ olur.

Burada $|S^*| = k$ dır. İlk olarak S^* kümesi G^* grafının bir örtü kümesi olduğunu kabul edelim. Bu durumda $k = \alpha(G^*) = n$ dir.

$$w(G^* - S^*) = \sum_{i=1}^n p_i \text{ ve } m(G^* - S^*) = 1 \text{ olur.}$$

Bu değerleri ruptüre tanımında yerine yazdığımızda

$$r(G^*) = \max \{ w(G^* - S^*) - |S^*| - m(G^* - S^*) \}$$

$$r(G^*) = \max \left\{ \sum_{i=1}^n p_i - \alpha(G^*) - 1 \right\}$$

$$r(G^*) = \sum_{i=1}^n p_i - \alpha(G^*) - 1$$

$$r(G^*) = \beta(G^*) - \alpha(G^*) - 1 \quad (9)$$

elde edilir.

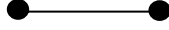
Şimdi ise S^* kümesi G^* grafının bir örtü kümesi olmasın. Bu durumda S^* kümesi için 3 durum söz konusu olur.

Durum 1: Eğer $|S^*| < \alpha(G)$ ise o zaman

$$w(G - S^*) < \beta(G) \text{ ve } w(G^* - S^*) < \sum_{i=1}^k p_i + \beta(G) \text{ olur.}$$

Ayrıca $m(G^* - S^*) \geq 6$ dır.

Çünkü en azından G 'nin iki tepesi G 'de bitişik olacaktır. Yani G 'den k tane tepe atıldığında G 'nin en azından Şekil 4. 1. 5'de olduğu gibi bir G_I alt grafi olacaktır.



Şekil 4. 1. 5

Bu değerleri ruptüre tanımında yerine yazdığımızda

$$r(G^*) = \max \{ w(G^* - S^*) - |S^*| - m(G^* - S^*) \}$$

$$r(G^*) \leq \max \left\{ \sum_{i=1}^k p_i + \beta(G) - k - 6 \right\}$$

$$r(G^*) \leq \sum_{i=1}^k p_i + \beta(G) - k - 6 \quad (10)$$

elde edilir.

(9) de elde ettiğimiz değer (10) de elde ettiğimiz değerden daha büyük olduğunu iddia ediyoruz. Yani

$$\sum_{i=1}^k p_i + \beta(G) - k - 6 \leq \beta(G^*) - \alpha(G^*) - 1$$

Şimdi bu iddiamızı ispatlayalım. Herhangi bir G grafi için

$$2\beta(G) \leq \sum_{i=\alpha(G)+1}^n p_i$$

$$\alpha(G) - k \leq \sum_{i=k+1}^{\alpha(G)} p_i$$

bu eşitsizlikleri taraf tarafa toplarsak

$$2\beta(G) + \alpha(G) - k \leq \sum_{i=k+1}^{\alpha(G)} p_i + \sum_{i=\alpha(G)+1}^n p_i$$

eşitsizliğin her iki tarafına $\sum_{i=1}^k p_i$ ifadesini ekleyelim

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^k p_i + 2\beta(G) + \alpha(G) - k &\leq \sum_{i=1}^k p_i + \sum_{i=k+1}^{\alpha(G)} p_i + \sum_{i=\alpha(G)+1}^n p_i \\
\sum_{i=1}^k p_i + \beta(G) + (\beta(G) + \alpha(G)) - k &\leq \sum_{i=1}^n p_i \\
\sum_{i=1}^k p_i + \beta(G) + n - k &\leq \sum_{i=1}^n p_i \\
\sum_{i=1}^k p_i + \beta(G) - k &\leq \sum_{i=1}^n p_i - n \tag{11}
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$-6 < -1 \tag{12}$$

(11) ve (12) eşitsizliklerini taraf tarafa topladığımızda

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^k p_i + \beta(G) - k - 6 &\leq \sum_{i=1}^n p_i - n - 1 \\
\sum_{i=1}^n p_i = \beta(G^*) \text{ ve } n = \alpha(G^*) &\text{ olduğunu biliyoruz. Öyleyse} \\
\sum_{i=1}^k p_i + \beta(G) - k - 6 &\leq \beta(G^*) - \alpha(G^*) - 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispatımız tamamlanır.

Durum 2: Eğer $|S^*| = \alpha(G)$ ise o zaman

$$w(G - S^*) = \beta(G) \text{ ve } w(G^* - S^*) = \sum_{i=1}^{\alpha(G)} p_i + \beta(G) \text{ olur.}$$

Ayrıca $m(G^* - S^*) \geq 3$ tür.

Bu değerleri ruptüre tanımında yerine yazdığımızda

$$r(G^*) = \max \{ w(G^* - S^*) - |S^*| - m(G^* - S^*) \}$$

$$r(G^*) \leq \max \left\{ \sum_{i=1}^{\alpha(G)} p_i + \beta(G) - \alpha(G) - 3 \right\}$$

$$r(G^*) \leq \max \sum_{i=1}^{\alpha(G)} p_i + \beta(G) - \alpha(G) - 3 \quad (13)$$

elde edilir.

(9) de elde ettiğimiz değer (13) de elde ettiğimiz değerden daha büyük olduğunu iddia ediyoruz. Yani

$$\sum_{i=1}^{\alpha(G)} p_i + \beta(G) - \alpha(G) - 3 \leq \beta(G^*) - \alpha(G^*) - 1$$

Şimdi bu iddiamızı ispatlayalım. Herhangi bir G grafi için

$$2\beta(G) \leq \sum_{i=\alpha(G)+1}^n p_i$$

Eşitsizliğin her iki tarafına $\sum_{i=1}^{\alpha(G)} p_i$ ifadesini ekleyelim

$$\sum_{i=1}^{\alpha(G)} p_i + 2\beta(G) \leq \sum_{i=1}^{\alpha(G)} p_i + \sum_{i=\alpha(G)+1}^n p_i$$

$$\sum_{i=1}^{\alpha(G)} p_i + 2\beta(G) \leq \sum_{i=1}^n p_i$$

Eşitsizliğin her iki tarafından $\alpha(G)$ ifadesini çıkaralım

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\alpha(G)} p_i + 2\beta(G) - \alpha(G) &\leq \sum_{i=1}^n p_i - \alpha(G) \\
\sum_{i=1}^{\alpha(G)} p_i + \beta(G) - \alpha(G) &\leq \sum_{i=1}^n p_i - (\alpha(G) + \beta(G)) \\
\sum_{i=1}^{\alpha(G)} p_i + \beta(G) - \alpha(G) &\leq \sum_{i=1}^n p_i - n
\end{aligned} \tag{14}$$

elde edilir. Ayrıca

$$-3 < -1 \tag{15}$$

(14) ve (15) eşitsizliklerini taraf tarafa topladığımızda

$$\sum_{i=1}^{\alpha(G)} p_i + \beta(G) - \alpha(G) - 3 \leq \sum_{i=1}^n p_i - n - 1$$

$\sum_{i=1}^n p_i = \beta(G^*)$ ve $n = \alpha(G^*)$ olduğunu biliyoruz. Öyleyse

$$\sum_{i=1}^{\alpha(G)} p_i + \beta(G) - \alpha(G) - 3 \leq \beta(G^*) - \alpha(G^*) - 1$$

elde edilir. Böylece iddiamızın tamamlanır.

Durum 3: Eğer $|S^*| > \alpha(G)$ ise o zaman $S^* = S_1 \cup S_2$ olsun. Bu durumda S_1 kümesi G 'nin bir örtü kümesi olsun ve böylece $|S_2| < \beta(G)$

olur. Böylece $w(G^* - S^*) = \sum_{i=1}^k p_i + |V(G)| - |S^*|$ ve $m(G^* - S^*) \geq 3$ olur.

Bu değerleri ruptüre tanımında yerine yazdığımızda

$$r(G^*) = \max \{ w(G^* - S^*) - |S^*| - m(G^* - S^*) \}$$

$$r(G^*) \leq \max \left\{ \sum_{i=1}^k p_i + |V(G)| - |S^*| - |S^*| - 3 \right\}$$

$$r(G^*) \leq \max \left\{ \sum_{i=1}^k p_i + |V(G)| - 2|S^*| - 3 \right\}$$

Ayrıca

$$\sum_{i=1}^k p_i < \beta(G^*), |V(G)| = \alpha(G) + \beta(G) \text{ ve}$$

$$|S^*| = |S_1| + |S_2| = \alpha(G) + |S_2| \text{ dir.}$$

Bu değerleri ruptüre tanımında yerine yazdığımızda

$$r(G^*) \leq \max \{ \beta(G^*) + \alpha(G) + \beta(G) - 2(\alpha(G) + |S_2|) - 3 \}$$

$$r(G^*) \leq \max \{ \beta(G^*) + \alpha(G) + \beta(G) - 2(\alpha(G) + \beta(G)) - 3 \}$$

$$r(G^*) \leq \max \{ \beta(G^*) - (\alpha(G) + \beta(G)) - 3 \}$$

$$r(G^*) \leq \max \{ \beta(G^*) - n - 3 \}$$

$$r(G^*) \leq \beta(G^*) - n - 3$$

$$r(G^*) \leq \beta(G^*) - \alpha(G^*) - 3 \tag{16}$$

(9)'de elde ettiğimiz değer (16)'da elde ettiğimiz değerden daha büyük olduğunu iddia ediyoruz.

$$\beta(G^*) - \alpha(G^*) - 3 < \beta(G^*) - \alpha(G^*) - 1$$

olduğu açıktır. Böylece ispatımız tamamlanır ve

$$r(G^*) = \beta(G^*) - \alpha(G^*) - 1 \text{ dir.}$$

4.2 TAÇLAMA (CORONA) İŞLEMİ VE $G^* \circ P_2$ GRAFININ RUPTURE SAYISI

Tanım 4. 2. 1: Taçlama (Corona) İşlemi, G_1 ve G_2 graflarının taçlama işlemi sonucunda elde edilen graf $G_1 \circ G_2$ ile gösterilir. $G_1 \circ G_2$ grafında G_1 'in her bir tepesine karşılık G_2 'nin bir kopyası alınır. Ardından G_1 'in her bir tepesinden bu tepeye karşılık gelen G_2 'nin kopyasının her bir tepesine bir ayrıt çizilir. Taçlama işleminin değişme özelliği yoktur.

Teorem 4. 2. 1: G , n tepeli birleştirilmiş bir graf olsun. Her $p_i \geq 1$ olacak şekilde G 'nin bir dikenli grafı G^* ve P_2 grafını alalım. $G^* \circ P_2$ grafının rupture değeri

$$r(G^* \circ P_2) = \beta(G^*) - 3 \text{ tür.}$$

Kanıt: Burada $\alpha(G^*) = n$ dir. Eğer $S^* \subset V(G^* \circ P_2)$ ise o zaman ilk olarak S^* kümesinin G^* grafının bir örtü kümesi olduğunu kabul edelim.

Bu durumda

$$|S^*| = \alpha(G^*) = n \text{ dir. Ayrıca}$$

$$w((G^* \circ P_2) - S^*) = n + \sum_{i=1}^n p_i \text{ ve } m((G^* \circ P_2) - S^*) = 3 \text{ dür.}$$

Bu değerleri rupture tanımında yerine yazdığımızda

$$\begin{aligned}
r(G^* \circ P_2) &= \max \{ w((G^* \circ P_2) - S^*) - |S^*| - m((G^* \circ P_2) - S^*) \} \\
&= \max \{ n + \sum_{i=1}^n p_i - n - 3 \} \\
&= \max \{ \sum_{i=1}^n p_i - 3 \} \\
&= \max \{ \beta(G^*) - 3 \} \\
&= \beta(G^*) - 3 \tag{17}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi ise S^* kümesi G^* grafının bir örtü kümesi olmasın. Bu durumda S^* kümesi için 3 durum söz konusu olur.

Durum 1: Eğer $|S^*| < \alpha(G)$ ise o zaman $|S^*| = k$ olsun.

$$w((G^* \circ P_2) - S^*) = \sum_{i=1}^k p_i + k + w(G - S^*) \text{ ve } w(G - S^*) \leq \beta(G) \text{ dir.}$$

Öyleyse

$$w((G^* \circ P_2) - S^*) \leq k + \sum_{i=1}^k p_i + \beta(G) \text{ olur.}$$

$m((G^* \circ P_2) - S^*) \geq 12$ dir. Çünkü en azından G 'nin 2 tepesi bitişik olacaktır. Yani G 'den k tane tepe atıldığında G 'nin en azından Şekil 4. 2. 1'deki gibi bir G_l alt grafi olacaktır.



Şekil 4.2.1

Bu değerleri rupture tanımında yerine yazdığımızda

$$r(G^* \circ P_2) = \max \{ w((G^* \circ P_2) - S^*) - |S^*| - m((G^* \circ P_2) - S^*) \}$$

$$r(G^* \circ P_2) \leq \max \{ k + \sum_{i=1}^k p_i + \beta(G) - k - 12 \}$$

$$r(G^* \circ P_2) \leq \max \{ \sum_{i=1}^k p_i + \beta(G) - 12 \} \quad (18)$$

elde edilir.

(17) de elde ettiğimiz deęerin (18) de bulduğumuz değerden daha büyük olduğunu iddia ediyoruz. Yani

$$\sum_{i=1}^k p_i + \beta(G) - 12 < \beta(G^*) - 3$$

Şimdi bu iddiamızı ispatlayalım.

$$\sum_{i=1}^k p_i - 12 \leq \sum_{i=1}^k p_i - 3 \quad (19)$$

olduğu açıktır

$\beta(G) = n - \alpha(G)$ dir.

$k = |S^*| < \alpha(G) \Rightarrow -\alpha(G) < -k$ dir. Öyleyse

$\beta(G) = n - \alpha(G) < n - k \leq \sum_{i=k+1}^n p_i$ bu durumda

$$\beta(G) \leq \sum_{i=k+1}^n p_i \quad (20)$$

(19) ve (20) eşıtsizliklerini taraf tarafa toplarsak

$$\sum_{i=1}^k p_i - 12 + \beta(G) \leq \sum_{i=1}^k p_i + \sum_{i=k+1}^n p_i - 3$$

$$\sum_{i=1}^k p_i + \beta(G) - 12 \leq \sum_{i=1}^n p_i - 3$$

$$\sum_{i=1}^k p_i + \beta(G) - 12 \leq \beta(G^*) - 3$$

elde edilir. Böylece iddiamızın ispatı tamamlanır.

Durum 2: Eğer $k = |S^*| = \alpha(G)$ ise o zaman

$$w((G^* \circ P_2) - S^*) = k + \sum_{i=1}^k p_i + \beta(G)$$

ve $m((G^* \circ P_2) - S^*) \geq 6$ dir.

Bu değerleri ruptüre tanımında yerine yazdığımızda

$$r(G^* \circ P_2) = \max \{ w((G^* \circ P_2) - S^*) - |S^*| - m((G^* \circ P_2) - S^*) \}$$

$$r(G^* \circ P_2) \leq \max \{ k + \sum_{i=1}^k p_i + \beta(G) - k - 6 \}$$

$$r(G^* \circ P_2) \leq \max \{ \sum_{i=1}^k p_i + \beta(G) - 6 \}$$

$$r(G^* \circ P_2) \leq \sum_{i=1}^k p_i + \beta(G) - 6 \quad (21)$$

elde edilir.

(17) de elde ettiğimiz değer (21) de bulduğumuz değerden daha büyük olduğunu iddia ediyoruz. Yani

$$\sum_{i=1}^k p_i + \beta(G) - 6 < \beta(G^*) - 3$$

Şimdi bu iddiamızı ispatlayalım.

$$\begin{aligned} \beta(G) &\leq \sum_{i=k+1}^n p_i \\ -6 &< -3 \end{aligned}$$

Bu eşitsizlikleri taraf tarafa toplarsak

$$\beta(G) - 6 \leq \sum_{i=k+1}^n p_i - 3$$

Eşitsizliğin her iki tarafına $\sum_{i=1}^k p_i$ ekleyelim. Böylece

$$\sum_{i=1}^k p_i + \beta(G) - 6 \leq \sum_{i=1}^k p_i + \sum_{i=k+1}^n p_i - 3$$

$$\sum_{i=1}^k p_i + \beta(G) - 6 \leq \beta(G^*) - 3 \text{ olur.}$$

Böylece iddiamızın ispatı biter.

Durum 3:Eğer $k = |S^*| > \alpha(G)$ ve $k \neq n$ ise o zaman

$S^* = S_1 \cup S_2$ olsun. S_1 , G grafi için bir örtü kümesi olsun. Yani $|S_1| = \alpha(G)$ dir.

$$w((G^* \circ P_2) - S^*) = k + \sum_{i=1}^k p_i + w(G - S^*) \text{ ve } w(G - S^*) = n - k \text{ Öyleyse}$$

$$w((G^* \circ P_2) - S^*) = k + \sum_{i=1}^k p_i + n - k \text{ olur ve } m((G^* \circ P_2) - S^*) \geq 6 \text{ dir.}$$

Bu değerleri rupture tanımında yerine yazdığımızda

$$r(G^* \circ P_2) = \max \{ w((G^* \circ P_2) - S^*) - |S^*| - m((G^* \circ P_2) - S^*) \}$$

$$r(G^* \circ P_2) \leq \max \left\{ \sum_{i=1}^k p_i + n - k - 6 \right\}$$

$$r(G^* \circ P_2) \leq \max \left\{ \sum_{i=1}^k p_i + n - (|S_1| + |S_2|) - 6 \right\}$$

$|S_1| = \alpha(G)$ ve $|S_2| < \beta(G)$ olduğu bilindiğine göre

$$r(G^* \circ P_2) \leq \max \left\{ \sum_{i=1}^k p_i + n - (\alpha(G) + \beta(G)) - 6 \right\}$$

$$r(G^* \circ P_2) \leq \max \left\{ \sum_{i=1}^k p_i + n - n - 6 \right\}$$

$$r(G^* \circ P_2) \leq \max \left\{ \sum_{i=1}^k p_i - 6 \right\}$$

$$r(G^* \circ P_2) \leq \sum_{i=1}^k p_i - 6 \quad (22)$$

(17) de elde ettiğimiz değer (22) da bulduğumuz değerden daha büyük olduğunu iddia ediyoruz. Yani

$$\sum_{i=1}^k p_i - 6 < \beta(G^*) - 3 \text{ olduğunu iddia ediyoruz.}$$

$$\sum_{i=1}^k p_i - 6 < \sum_{i=1}^n p_i - 3 \text{ olduğu açıktır. Öyleyse}$$

$$\sum_{i=1}^k p_i - 6 < \beta(G^*) - 3 \text{ tür.}$$

Bu durumda

$$r(G^* \circ P_2) = \beta(G^*) - 3 \text{ elde edilir. Böylece ispatımız tamamlanır.}$$

5. SONUÇ

Bir grafın rupture sayısı, iletişim ağına hasar vermek için yapılan çalışmanın büyüklüğü ile iletişim ağının bu hasardan ne derece etkilendiği arasındaki değişikliği ifade eder.

Yapısı 100 tepeli bir dikenli graf G_{50}^* ($p_i=1$) olacak şekilde bir iletişim ağı tasarlamak istediğimizi varsayalım. Bu ağı rupture parametresine göre nasıl tasarlamalıyız. Tablo 5. 1'de görüldüğü gibi dikenli graflar aynı connectivity değerine sahip iken farklı rupture değerlerine sahiptir.

Bu durumda rupture değerlerine göre $K_{1,49}^*$ yapısını seçmeliyiz. Tepeler ve iletişim hatlarından oluşan bir iletişim ağının dayanıklılığı network tasarımcıları için oldukça önemlidir. Bir networkun ayrıt veya tepelerinin herhangi birindeki bir kayıp ya da hasar networkun etkinliğinde de kayba neden olur. Bu nedenle iletişim hatları mümkün oldukça dayanıklı oluşturulmalıdır. Rupture parametresi iletişim ağının bir modeli olan grafın dayanıklılığının bir ölçümüdür.

$p_i=1$ olan 100 tepeli dikenli graflar	$r(G^*)$	$k(G^*)$
P_{50}^*	23	1
C_{50}^*	23	1
$K_{1,49}^*$	47	1
$W_{1,49}^*$	22	1

Tablo 5. 1

KAYNAKLAR DİZİNİ

Bagga, K.S., Beineke, L.W., Goddard, W.D., Lipman, M.J., Pippert, R.E. : 1992, A survey of Integrity, *Discrete Applied Mathematics* 37/38, 13-28p

Barefoot, C.A., Entringer, R., Swart, H.C. : 1987, Vulnerability in Graphs – A Comparative Survey, *J. Combin. Math. Combin. Comp.*1, 13-22p

Chartrand G. and Harary F., *Graphs with prescribed connectivities, Theory of graphs*. Academic Press, New York, 1968, pp. 61–63.

Chartrand, G., Lesniak, L. : 1986, *Graphs and Digraphs*, Second Edition, Wadsworth. Monterey

Chvatal V., Tough Graphs and Hamiltonian Circuits, *Discrete Math.*5, 215- 218(1973).

Cozzens M., Stability Measures and Data Fusion Networks, *Graph Theory Notes of New York* XXVI, pp.8-14(1994).

KAYNAKLAR DİZİNİ(Devam)

Cozzens M., Moazzami D., Stueckle S., The Tenacity of A Graph, Graph Theory, Combinatorisc, Algorithms and Applications. Vol 2. 1995. Proceedings of the seventh quadrennial international conference on the theory and applications of graphs, Kalamazoo, MI, USA, June15, 1992. New York, NY.Wiley, pp.1111-1122.10.

Cozzens. M., Moazzami D., and Stueckle S.,The Tenacity of Harary Graphs, *J.Comb. Math. Comb. Comput.* 16, 33-56(1994).

Cozzens M.B., and Wu S.Y,Bounds of Edge Neighbour-integrity of Graphs, *Australian J.of Combinatorics* 15, 71-80(1997).

Cozzens, M.B.and Wu S.Y., Vertex Neighbour-integrity of Trees, *Ars. Combinatoria* 43, 169-180(1996).

Dündar P., Accessibility Number and the Neighbour-integrity of Generalised Petersen Graphs, *Neural Network World*, Vol.2, 167-174(2001).

Dündar P., Stability Measures of Some Static Interconnection Networks, *Int.J. Computer Math.* Vol.76, 455-462(2001).

KAYNAKLAR DİZİNİ(Devam)

Dünder P., Aytac A., Integrity of Total Graphs via Some Parameters, *Mathematical Notes* Vol.76, N5 (November), p.665-672(2004).

Dünder P., Aytac A. and Aytac V., Calculation of Accessibility Number and Neighbour-integrity of a Graph, *Mathematical Notes*, in print (2005).

Glebow N. I., Kostochka A. V., 1998, On the Independent Domination Number of Graphs with given minimum degree, *Discrete Math.*, 261-266

Goddard, W. : 1989, On the Vulnerability of Graphs, Ph.D. Thesis, University of Natal, Durban, S.A.

Goddard, W.D., Swart, H.C. : 1988, On the Integrity of Combinations of Graphs, *J. Combin. Math. Combin. Comp.* 4, 3-18p

Harary F., 1969, *Graph Theory*, Addison Wesley

Haviland J., 1995, Independent domination in regular graphs, *Discrete Math.* 143, 275-280.

KAYNAKLAR DİZİNİ(Devam)

Kırlangıç A., Ozan Aytaç A., The Scattering Number of Thorn Graphs, *International Journal of Computer Mathematics*, Vol. 81, No. 3, 299-311, 2004.

Lee J., Young Sohn M., Zhang Z., 1987, On The Relations of Graph Parameters and its Total Parameters, The National science of foundation of China

Li F., Li X., Computing the Rupture Degrees of Graphs, *IEEE Computer Society, Proc. ISPAN*, 2004. El.

Li Y., Zhang S., Li X., Rupture Degree of Graphs, *International Journal of Computer Mathematics*, Vol. 82, No. 7, 793-803, 2005.

Prather Ronald E., *Discrete Mathematical Structures for Computer Science*, Houghton Mifflin Company, 1976

Sun L., Wang J. :1999, An upper Bound for the Independent Domination Number, *J. of Comb. Theory series B* 76, 240-246

Topp J. and VolkmannL., Sufficient conditions for equality of connectivity and minimum degree of a graph, *J Graph Theory* 17 (1993), 695–700.

West D.B., *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall, NJ, (2001).

ÖZGEÇMİŞ

27 Haziran 1984 tarihinde Afyon'da doğan AKSU, Hanife ilköğrenimini 1990–1998 yılları arasında Halil Atilla Yeşilova İlköğretim Okulu'nda, ortaöğrenimini 1999–2002 yılları arasında Çimentaş Lisesi'nde tamamladı. Liseden mezun olduğu yıl, Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandı. 2006 yılında Matematik Bölümü'nün Bilgisayar Opsiyonu'ndan iyi derece ile mezun oldu. Aynı yıl, Ege Üniversitesi Matematik Bölümü'nde yüksek lisans programına başladı.