T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LOVE TİPİ İNTEGRAL DENKLEMİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

ERDEM ŞENTÜRK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
DR. ÖĞR. ÜYESİ SEBAHAT EBRU DAŞ

İSTANBUL, 2019

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LOVE TİPİ İNTEGRAL DENKLEMİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Erdem ŞENTÜRK tarafından hazırlanan tez çalışması 18.07.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Dr. Öğr. Üyesi Sebahat Ebru DAŞ

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Dr. Öğr. Üyesi Sebahat Ebru DAŞ

Yıldız Teknik Üniversitesi ______________________

Dr. Öğr. Üyesi Işım Genç DEMİRİZ

Yıldız Teknik Üniversitesi ______________________

Prof. Dr. Mustafa BAYRAM

İstanbul Gelişim Üniversitesi ______________________

ÖNSÖZ

Doğadaki fenomenleri açıklarken integral denklemler sıklıkla kullanılmaktadır. Bu denklemler, teori ve uygulamada genişçe bir yer edinmiştir. Bu çalışmada integral denklemlerin özel bir sınıfı olan love tipi integral denklemler incelenmiştir. Love tipi integral denklemler iki paralel plakadan oluşan elektrostatik potansiyeli hesaplamada kullanılmaktadır. Uygulamalı matematikte diferansiyel denklemler ve integral denklemlerin çözümünde kullanılan legendre sıralama yöntemi ilk defa love tipi integral denkleme uygulanmıştır. Bilgisayar yazılımları yardımıyla gerçek sonuçlar ile karşılaştırılma yapılması hedeflenmiştir.

Bu tezi hazırlama konusunda değerli bilgi ve desteklerimden dolayı danışmanım Dr. Öğretim. Üyesi SEBAT EBRU DAŞ’a şükranlarımı sunmaktayım. Ayrıca maddi ve manevi olarak her zaman yanımda olan anne ve babama teşekkür ediyorum. Kılavuzda tez içeriğinin düzenlenmesine, biçim ve yazımına ilişkin kurallar kısaca açıklanmıştır

Temmuz, 2019

Erdem ŞENTÜRK

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE LİSTESİ

P(x)	Legendre polinomları
V(x)	Elektrostatik Potansiyel
K(x,t)	Çekirdek Fonksiyonu

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

ÖZET

LOVE TİPİ İNTEGRAL DENKLEMİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Erdem ŞENTÜRK

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Sebahat Ebru DAŞ

Uygulamalı bilimlerde integral denklemler ile sıklıkla karşılaşılmaktadır. İlk olarak integral denklemlerde analitik yöntemler üzerinde daha çok çalışılmış olsa da zaman içerisinde bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle sayısal yöntemler önem kazanmıştır. İntegral denklemlerin lineer olmayan veya derecesi yüksek olan tiplerinde analitik çözüm neredeyse imkansızdır. Klasik sayısal yöntemlerin dışında (newton, gauss.) matris formuna dönüştürülüp çözümlere ulaşılmaya çalışılmaktadır.

Bu tezde, integral denklemin özel bir tipi olan love denklemini legendre sıralama yöntemi ile çözmek hedeflenmiştir. Denklemin katsayıları cebirsel sistem olarak düşünülüp matris formuna dönüştürülmüştür. Matris çözülerek legendre polinomunun katsayıları elde edilmiştir. Sonuçlar diğer sayısal yöntemlerin sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Love denklemi, Legendre sıralama

ABSTRACT

NUMERICAL SOLUTION OF LOVE’S TYPE INTEGRAL EQUATION

Erdem ŞENTÜRK

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Adviser: Asst. Prof. Sebahat Ebru DAŞ

Integral equations are frequently encountered in applied sciences. Firstly, although analytical methods have been studied more in integral equations, numerical methods have gained importance with the development of computer technology over time. For nonlinear or highly linear types of integral equations, the analytical solution is almost impossible. In addition to the classical numerical methods (newton, gauss.) Matrix solutions are tried to be converted to form.

In this thesis, it is aimed to solve the love equation which is a special type of integral equation by using the legendre collocation method. The coefficients of the equation are considered as algebraic systems and transformed into matrix form. The matrix was solved and the coefficients of the legendre polynomial were obtained. Results were compared with the results of other numerical methods.

Keywords: Love equation, Legendre collocation

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

İntegral denklemler 1820'lerde Abel'in çalışmalarıyla önem kazanmıştır. Abel integral denklemlerde sürekliliğin analizi ile ilgilenmiştir. Fredholm, Cauchy, Volterra gibi birçok matematikçi integral denklemler üzerine çalışmışlardır. Zaman içerisinde integral denklemler teoride ve uygulamada geniş bir yer edinmiştir. Elastisite, yarı-iletkenler, metalürji, sismoloji, ısı iletimi, kimyasal reaksiyonlar gibi konularda kullanım alanı bulmuştur. İntegral denklemlerin çözümleri beşeri bilimlerdeki birçok fenomeni anlamakta önemli rol oynamaktadır.

İntegral denklemleri çözmek için çok sayıda yöntem kullanılmaktadır. Bu yöntemler analitik ve sayısal olmak üzere ayrılmaktadır. Bu yöntemlerden sonlu sayıda bileşenden oluşan fonksiyonun ayrıştırılmasını sağlayan adomian ayrıştırma yöntemi [1-2], fonksiyonun birden fazla polinom, trigonometrik fonksiyon, hiperbolik fonksiyondan oluşması durumunda kullanılan modifiye ayrıştırma yöntemi [3-4], adomian ayrıştırma yönteminde daha hızlı yakınsama sağlamak için gürültü terimi yöntemi [5-6], kapalı formda çözüm mevcut olduğunda hızlı bir şekilde kesin sonuca yakınsama sağlayan varyasyonel iterasyon metodu [7-8], başlangıç değer tahminiyle başlayıp ardışık yaklaşımla denklemi çözmeyi sağlayan ardışık yaklaşımlar yöntemi [7-8], integral denklemin çözümünü analitik fonksiyon olarak varsayıp taylar serilerinden yararlanılan seri çözüm yöntemi [9-10].

İntegral denklemlerin çözümünde nümerik yöntemler sıkça kullanılmaktadır. En çok kullanılan yöntemlerden biri nümerik integrali kullanarak integral denklemi çözmeye imkan sağlayan kuadratür yöntemi [11-12].

1.2 Tezin Amacı

Bu tezin amacı, diferansiyel ve integral denklemlerin sayısal çözümünde kullanılan legendre sıralama yöntemi ile fiziksel uygulaması mevcut olan love tipi integral denklemi çözmek ve diğer sayısal yöntemlerle karşılaştırmaktır.

1.3 Hipotez

Love tipi integral denklemi cebirsel sistem olarak ele alıp matris sistemine dönüştürülecektir. Matris sistemi çözülerek bilinmeyen fonksiyonun katsayılar elde edilecektir.

BÖLÜM 2

LEGEDRE POLİNOMLARI

Tanım 2.1 Legendre polinomları, legendre denkleminin (2.1) çözümü olarak karşımıza çıkmaktadır.

$$(1-x^2)u''-2xu'+mu=0, \quad m=n(n+1), \qquad n=0,1,2,\cdots \tag{2.1}$$

Denklemin çözümü $P_n(x)$ olarak n sayısının özel bir değeri için yazılır. N polinom derecesidir. Eğer n tek/çift ise polinom da tek/çift olur. N değeri göre legendre polinomları şu şeklidedir:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}\left(3x^2-1\right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

2.2 Rodrigue Formülü

Legendre polinomları rodrigue formülü yardımıyla ifade edilebilir.

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n. \tag{2.2}$$

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n-2k}{n}x^{n-2k}, \quad n=0,1,2,....$$

$$\left[\frac{n}{2}\right]=\begin{cases}\dfrac{n}{2}, & n\ \text{çift}\\[4pt] \dfrac{n-1}{2}, & n\ \text{tek}\end{cases}$$

2.3 Ortogonallik

$P_n(x)$ ve $P_m(x)$ legendre denkleminin çözümleri ise

$$\left[\left(1-x^2\right)P_n'\right]'+n(n+1)P_n=0, \tag{2.3}$$

$$\left[\left(1-x^2\right)P_m'\right]'+m(m+1)P_m=0, \tag{2.4}$$

denklemlerini sağlar. (2.3) ve (2.4) denklemleri integre edilip birleştirildiğinde

$$\int_{-1}^{1} P_m\left[\left(1-x^2\right)P_n'\right]'-P_n\left[\left(1-x^2\right)P_m'\right]'dx+\left[n(n+1)-m(m+1)\right]\int_{-1}^{1} P_nP_m dx=0.$$

birinci integral için kısmi integrasyon kullanılırsa,

$$P_m\left[\left(1-x^2\right)P_n'\right]_{-1}^{1}-P_n\left[\left(1-x^2\right)P_m'\right]_{-1}^{1}-\underbrace{\int_{-1}^{1} P_m'\left(1-x^2\right)P_n'-P_n'\left(1-x^2\right)P_m'dx}_{=0}=0$$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx=0, \qquad n\neq m \tag{2.5}$$

ortogonalite bağıntısı elde edilir. Legendre polinomları bu bağıntıyı sağlar.

2.4 Legendre Polinomları için Doğrucu Fonksiyon

İki değişkenli $G(x,t)$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$G(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

Şeklinde yazılırsa legendre polinomları, $G(x,t)$ fonksiyonunun taylor serisinin katsayıları olur. Küresel koordinatlarda $r=0$ dışında r^{-1} fonksiyonunun harmonik olduğunu biliyoruz.

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = \nabla^2 \frac{1}{|\underline{x}|} = 0.$$

Harmonik fonksiyon ϕ'den bağımsızdır. Benzer şekilde $\underline{x}=\underline{x}_0$ dışında $1/\left(|\underline{x}-\underline{x}_0|\right)$ harmoniktir. Eğer $\underline{x}_0$, z- yönünde birim vektör ise,

$$\begin{aligned}|\underline{x}-\underline{x}_0| &= \left(\underline{x}-\underline{x}_0\right).\left(\underline{x}-\underline{x}_0\right)\\ &= \underline{x}.\underline{x} - 2\underline{x}.\underline{x}_0 + \underline{x}_0.\underline{x}_0\\ &= r^2 - 2r\cos\theta + 1\end{aligned}$$

olur. Bu yüzden

$$\frac{1}{\sqrt{r^2-2r\cos\theta+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n\left(\cos\theta\right)$$

formunda yazılabilir. $A_n=1$ olduğu gösterilirse x ve t'den meydana gelen $\cos\theta$'daki yer değiştirme gerekli sonucu verecektir. A_n'i bulmak için $\cos\theta=1$ için fonksiyon z-ekseni boyunca değerlendirilir.

$$\frac{1}{\sqrt{r^2-2r+1}} = \frac{1}{\sqrt{(r-1)^2}} = \frac{1}{|r-1|} = 1+r+r^2+r^3+\cdots, \quad |r|<1$$

ifadesi dikkate alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(1) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n,$$

olur. Buradan $A_n=1$ bulunur. $x=\cos\theta$ ve $t=r$ olarak alınırsa

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

ifadesi elde edilir.

BÖLÜM 3

LOVE DENKLEMİ

Tanım 3.1 1949'da Eric Russell Love yarıçapı R, aralarındaki mesafe h olan iki paralel dairesel levha tarafından üretilen elektrostatik potansiyeli tanımladı. Levhaların dışındaki keyfi noktadaki potansiyel

$$V(r,z)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left\{\frac{1}{\sqrt{r^2+\left(z-\frac{1}{2}d+ix\right)}}-\frac{1}{\sqrt{r^2+\left(z+\frac{1}{2}d+ix\right)}}\right\}f(x)dx,$$

Şeklinde ifade edilmektedir. Kareköklü ifadeler düzenlenirse,

$$f(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{d}{d^2+(x-y)^2}f(y)dy=1, \qquad -1\le x\le 1. \tag{3.1}$$

Denklem ikinci çeşit fredholm integral denklemine dönüşmektedir. Russell Love bu integral denklemin çözümünün [-1,1] aralığında tek, gerçek ve sürekli olduğunu ispatlamıştır. Bu denklem (3.1) Love'un birinci integral denklemi olarak adlandırılmaktadır. (3.1)'in yaklaşık çözümü, d=1 durumu için Love [13] tarafından

$$f(x)\approx f_L(x)=1.919200-0.311717x^2+0.015676x^4+0.019682x^6-0.000373x^8$$

olarak hesaplamıştır.

Norgen & Jonsson [14] love integral denkleminin çözümünü kullanarak paralel plakalardaki kapasitansı hesaplamışlardır. 2010'da A.S. Kumar [15] Boubaker polinomlarını kullanarak love integral denkleminin analitik çözümünü sunmuştur. Bununla beraber yaklaşımında ciddi hatalar ortaya çıkmıştır.

Bu tezde legendre sıralama yöntemi love tipi integral denkleme uygulanmıştır.

BÖLÜM 4

LEGENDRE SIRALAMA YÖNTEMİ

Legendre sıralama yönteminde diferansiyel veya integral denklemlerin seri çözümündeki katsayılar sıralama noktaları yardımıyla matris formuna dönüştürülür. Matris sistemi çözülerek katsayılar hesaplanır. Hesaplanan katsayılar legendre polinomları ile çarpılıp çözüm elde edilir.

4.1 Diferansiyel Denklemler için Sıralama Yöntemi

$$\sum_{v=0}^{m} F_v(x) y^{(v)}(x) = h(x), \quad -1 \le x \le 1 \tag{4.1}$$

Diferansiyel denkleminin

$$\sum_{v=0}^{m-1} \left[f_{vi} y^{(v)}(-1) + g_{vi} y^{(v)}(0) + h_{vi} y^{(v)}(-1) \right] = \beta_i, \quad i = 0,1,\ldots,m-1$$

koşullarında

$$y(x) = \sum_{i=0}^{N} a_n P_n(x)$$

legendre polinomlarından oluşan bir seri çözümü olduğunu varsayalım. Bu toplam

$$y(x) = P(x)A \tag{4.2}$$

şeklinde matris olarak ifade edilebilir.

Bu durumda (4.2)'deki matris ifadesi

$$x_j = a + \frac{b-a}{N} j, \quad j = 0,1,\ldots,N$$

Sıralama noktaları kullanılarak

$$\left[y(x_j) \right] = P(x_j)A, \quad j = 0,1,\ldots,N$$

şekline dönüşür. Kesim 2.2'de verilen legendre polinomlarını elde etmek için kullanılan formülü matris olarak

$$P^T(x) = DX^T(x)$$

yazılabilir. D matrisi N sayısının çift ve tek olmasına göre değişiklik göstermektedir.

$$X^{(v)}(x) = \left[\left(\left((x-k)^0 \right)^{(v)} \left((x-k)^1 \right)^{(v)} \right) \ldots \left((x-k)^N \right)^{(v)} \right]$$

Olarak yazılır.

v=0 için

$$X(x) = \left[(x-k)^0 (x-k)^1 \ldots (x-k)^N \right]$$

v=1 için

$$X^{(1)}(x) = \left[\left(\left((x-k)^0 \right)^{(1)} \left((x-k)^1 \right)^{(1)} \right) \ldots \left((x-k)^N \right)^{(1)} \right]$$

olarak hesaplanır.

Diğer v değerleri için aynı işlemler tekrar edildiğinde ifade matris olarak

$$\begin{bmatrix} \left((x-k)^0\right)^{(1)} \\ \left((x-k)^1\right)^{(1)} \\ \left((x-k)^2\right)^{(1)} \\ \vdots \\ \left((x-k)^N\right)^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x-k)^0 \\ (x-k)^1 \\ (x-k)^2 \\ \vdots \\ (x-k)^N \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Burada

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N & \dots \end{bmatrix}$$

Bu ifade daha sade bir şekilde

$$\left(X^{(1)}(x)\right)^T = B(X(x))^T$$

Olarak yazılır.

$$\begin{aligned} X^{(1)}(x) &= X(x)B^T \\ X^{(2)}(x) &= X^{(1)}(x)B^T \\ &= X(x)B^T B^T \\ X^{(2)}(x) &= X(x)\left(B^T\right)^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$X^{(v)}(x) = X(x)\left(B^T\right)^v \tag{4.3}$$

Yazılabilir. (4.2)'deki ifadenin v. mertebeden türevi

$$y^{(v)}(x) = P^{(v)}(x)A \tag{4.4}$$

olarak yazılır.

Daha önce elde edilen

$$P^T(x) = DX^T(x)$$

İfadesi ile (4.4) denklemi birleştirildiğinde

$$y^{(v)}(x) = X(x)\left(B^T\right)^v D^T A \tag{4.5}$$

Denklemi elde edilir.

$x = x_j$ için (4.1) denklemi sıralama noktaları kullanılarak

$$\sum_{v=0}^{m} F_v(x_j) y^{(v)}(x_j) = h(x_j), \quad -1 \le x \le 1$$

şeklinde düzenlenir. Bu denklem matris olarak yazılırsa

$$\sum_{v=0}^{m} F_v Y^{(v)} = H \tag{4.6}$$

Şeklini alır. Burada

$$F_v = \begin{bmatrix} F_v(x_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_v(x_1) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & F_v(x_N) \end{bmatrix}, \quad Y^{(v)} = \begin{bmatrix} y^{(v)}(x_0) \\ y^{(v)}(x_1) \\ \vdots \\ y^{(v)}(x_N) \end{bmatrix}, \quad H(x) = \begin{bmatrix} h(x_0) \\ h(x_1) \\ \vdots \\ h(x_N) \end{bmatrix}$$

olarak yazılır. (4.5)'deki denklem (4.6)'da yerine yazılırsa

$$\sum_{v=0}^{m} F_v X \left(B^T\right)^k D^T A = H \tag{4.7}$$

Temel matris bağıntısı elde edilir. (4.7)'deki ifade

$$W = \sum_{v=0}^{m} F_v X \left(B^T\right)^k D^T$$

olarak isimlendirilir.

(4.7) aynı zamanda

$$WA = H$$

şeklinde yazılan (N+1)x(N+1) boyutlu bir cebirsel sistem olarak düşünülebilir. Bu sisteme koşullar yerine yazıldığında arttırılmış matris elde edilir. Arttırılmış matriste ters alma işlemleri uygulanarak

$$A = \left(\bar{W}\right)^{-1} \bar{H}$$

katsayılar matrisi

$$A = \left[a_0 a_1 ... a_N\right]^T$$

olarak bulunur. Diferansiyel denklemin çözümü ise

$$y(x) = P(x)A$$

veya

$$y(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n P_n(x)$$

legendre polinomları kullanılarak bulunur.

4.2 Fredholm İntegral Denklemi için Sıralama Yöntemi

Fredholm integral denklemi

$$y(x) = h(x) + \beta_1 \int_{-1}^{1} K_z(x,t) y(t) dt, \quad -1 \le x, t \le 1 \tag{4.8}$$

şeklinde ifade edilir. Daha sade bir biçimde

$$y(x) = h(x) + \beta_1 L_z(x)$$

yazılabilir. Burada

$$L_z(x) = \int_{-1}^{1} K_z(x,t) y(t) dt \tag{4.9}$$

çözüm fonksiyonu y(x) legendre polinomları ve katsayıların çarpımı şeklinde ifade edilebilir. Yani

$$y(x) = P(x)A \tag{4.10}$$

Şeklinde yazılabilir. Seri açılımdan

$$K_z(x,t) = X(x)K_t X^T(t), \qquad K_t = \left[k^t{}_{ij}\right], \quad i,j = 0,1,...,N$$

ve legendre polinom özelliklerinden

$$K_z(x,t) = P(x)K_z P^T(t), \qquad K_z = \left[k^z{}_{ij}\right], \quad i,j = 0,1,...,N \tag{4.11}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} X(x)K_t X^T(t) &= P(x)K_z P^T(t) \\ X(x)K_t X^T(t) &= X(x)D^T K_z D X^T(t) \\ K_t &= D^T K_z D \\ K_z &= (D^T)^{-1} K_t D^{-1} \\ K_z &= (D^{-1})^T K_t D^{-1} \end{aligned} \tag{4.12}$$

elde edilir. (4.10) ve (4.11)'deki denklemler (4.9)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} L_z(x) &= \int_{-1}^{1} P(x)K_z P^T(t)P(t)A\,dt \\ &= P(x)K_z \int_{-1}^{1} P^T(t)P(t)A\,dt \end{aligned}$$

elde edilir. Bu kısımda

$$Q=\int_{-1}^{1}P^T(t)P(t)dt$$

$$=\int_{-1}^{1}\begin{bmatrix}P_0(t)\\P_1(t)\\\vdots\\P_N(t)\end{bmatrix}\left[P_0(t)P_1(t)\ldots P_N(t)\right]dt$$

$$=\int_{-1}^{1}\begin{bmatrix}P_0(t)P_0(t) & P_0(t)P_1(t) & P_0(t)P_N(t)\\P_1(t)P_0(t) & P_1(t)P_1(t) & P_1(t)P_N(t)\\\vdots & \vdots & \vdots\\P_N(t)P_0(t) & P_N(t)P_1(t) & P_N(t)P_N(t)\end{bmatrix}dt$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[P_i(t)P_j(t)\right]dt=\left[q_{ij}\right]; \qquad i,j=0,1,\ldots,N$$

legendre polinomlarının ortogonalliğinden

$$\left[q_{ij}\right]=\int_{-1}^{1}P_i(t)P_j(t)dt=\begin{cases}\dfrac{2}{2i+1}, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \tag{4.13}$$

(El-Mikkawy vd., 2005)

şeklinde yazılabilir. Bu durumda

$$L_z(x)=P(x)K_zQA$$

matris şekline dönüşür.

$x=x_i$ noktaları için

$$y(x_i)=h(x_i)+\beta_1L_z(x_i), \quad i=0,1,\ldots,N$$

olur. Matris olarak ifadesi

$$\begin{bmatrix}y(x_0)\\y(x_1)\\\vdots\\y(x_N)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h(x_0)\\h(x_1)\\\vdots\\h(x_N)\end{bmatrix}+\beta_1\begin{bmatrix}L_z(x_0)\\L_z(x_1)\\\vdots\\L_z(x_N)\end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bu ifade daha sade olarak

$$Y = H + \beta_i L_z \tag{4.14}$$

yazılabilir.

$$y(x) = P(x)A = X(x)D^T A \tag{4.15}$$

Olduğundan $x = x_i$ için

$$\begin{bmatrix} y(x_0) \\ y(x_1) \\ \vdots \\ y(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(x_0) \\ P(x_1) \\ \vdots \\ P(x_N) \end{bmatrix} \left[A\right] = \begin{bmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ \vdots \\ X(x_N) \end{bmatrix} \left[D^T A\right]$$

olursa

$$Y = XD^T A$$

Denklemi elde edilir. H ve L_z ise

$$H = \begin{bmatrix} h(x_0) \\ h(x_1) \\ \vdots \\ h(x_N) \end{bmatrix}, \quad L_z = \begin{bmatrix} L(x_0) \\ L(x_1) \\ \vdots \\ L(x_N) \end{bmatrix}$$

olur.

$$L_z = P(x) K_z Q A$$
$$L_z = X(x) D^T K_z Q A$$

Matris şeklinde ifadesi

$$\begin{bmatrix} L_z(x_0) \\ L_z(x_1) \\ \vdots \\ L_z(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ \vdots \\ X(x_N) \end{bmatrix} \left[D^T K_z Q A\right]$$

veya sade bir şeklide

$$L_z = XD^T K_z QA \tag{4.16}$$

olarak yazılır. (4.15) ve (4.16)'da bulunan denklemler (4.14)'de yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&Y = H + \beta L_z \\
&XD^T A = H + \beta XD^T K_z QA \\
&(XD^T - \beta XD^T K_z Q)A = H \\
&XD^T (1 - \beta K_z Q)A = H
\end{aligned} \tag{4.17}$$

temel matris bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı

$$W_z A = H$$

sistemine çevrilir. Başlangıç koşulları kullanılarak katsayılardan oluşan matris elde edilir.

$$y(x) = P(x)A$$

şeklinde çözüm bulunur.

BÖLÜM 5

SAYISAL SONUÇLAR

Bu bölümde diferansiyel, integral ve love tipindeki integral denklem örneği ele alınacaktır. Bilgisayar programı ile çözülecek olan denklem Russell Eric Love'un [13] bulduğu sonuç ile karşılaştırılacaktır.

Örnek 1. $(x+2)^2 y'' - 3\left(x+2\right) y' + 4y = \ln(x+2)\,, \qquad -1 \le x \le 1$ denklemini

$y(-1) = \frac{1}{2}, \quad y'(-1) = 1$ ve başlangıç değer şartlarını göz önüne alalım. Sıralama noktaları N=2 değeri için

$$x_0 = -1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1$$

olarak hesaplanır. Fonksiyonların katsayıları

$$f_0(x) = -2, \quad f_1(x) = -3(x+2), \quad f_2(x) = (x+2)^2, \quad g(x) = \ln(x+2)$$

Olduğundan, katsayıların matris olarak ifadesi

$$F_0 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad F_1 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}, \quad F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.6931 \\ 1.0986 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1.5 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. N=2 için denklem

$$\sum_{k=0}^{2} F_k X \left(B^T\right)^k D^T A = G \tag{5.1}$$

olarak yazılabilir. Elde edilen matrisler (5.1) denkleminde yerine yazıldığında arttırılmış matris

$$\left[W;G\right] = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 16; & 0 \\ 4 & -6 & 10; & 0.6931 \\ 4 & -5 & 4; & 1.0986 \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

olarak elde edilir. Arttırılmış koşul matrisleri

$$U_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1; & 0.5 \end{bmatrix}$$
$$U_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3; & 1 \end{bmatrix}$$

olarak yazılır. (5.2) matrisinin son iki satırı yerine arttırılmış koşul matrisleri yazıldığında, arttırılmış matris

$$\left[\bar{W};\bar{G}\right] = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 16; & 0 \\ 1 & -1 & 1; & 0.5 \\ 0 & 1 & -3; & 1 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. Katsayılar matrisi

$$\begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 16 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/6 \\ 2 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. Bulunan katsayılar legendre polinomları ile çarpılırsa

$$y(x) = \frac{13}{6} P_0(x) + 2P_1(x) + \frac{1}{3} P_2(x)$$
$$y(x) = \frac{13}{6} \times 1 + 2 \times x + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$y(x)=\frac{x^2}{2}+2x+2$$

olarak çözüm fonksiyonu bulunur. Tam çözüm belirsiz katsayılar yöntemi ile

$$y(x)=\frac{(2+x)^2}{4}+\frac{(2+x)^2}{4}\ln(x+2)+\frac{\ln(x+2)}{4}+\frac{1}{4}$$

olarak hesaplanır.

N=2, N=4 ve N=6 alınarak örnek 1'deki denklemin tam çözümünün sonuçları ile karşılaştırma yapılmıştır.

Çizelge 5.1 N=2, N=4 ve N=6 için sonuçların karşılaştırılması

x	Tam Çözüm	N=2 için Sıralama	N=2 için Hata	N=4 için Sıralama	N=4 için Hata	N=6 için Sıralama	N=6 için Hata
-1	0.5	0.5	0	0.5	0	0.5	0
-0.7778	0.7486	0.7469	0.0017	0.7483	0.0003	0.7485	1E-04
-0.5556	1.0553	1.0432	0.0121	1.0539	0.0014	1.0552	1E-04
-0.3333	1.4269	1.3889	0.038	1.4236	0.0033	1.4266	0.0003
-0.1111	1.8683	1.784	0.0843	1.8627	0.0056	1.8677	0.0006
0.1111	2.3835	2.2284	0.1551	2.3755	0.008	2.3828	0.0007
0.3333	2.9762	2.7222	0.254	2.9645	0.0117	2.9751	0.0011
0.5556	3.6492	3.2654	0.3838	3.6314	0.0178	3.6477	0.0015
0.7778	4.4052	3.858	0.5472	4.3764	0.0288	4.4029	0.0023
1	5.2465	3.858	1.3885	5.1981	0.0484	5.2416	0.0049

Çizelge 5.1'den anlaşılacağı üzere kesim sayısı(N) arttıkça legendre sıralama yöntemi ile bulunan sonuçlar tam çözüme çok yaklaşmaktadır. Fonksiyonda logaritma fonksiyonu olsa bile polinom yaklaşımında belli kesim sayısından sonra aynı değere yakınsama görülmektedir.

Örnek 2. Tam çözümü $y(x)=3x$ olan

$$y(x)=x+\int_{-1}^{1} xty(t)dt \qquad -1\le x,t\le 1$$

fredholm integral denklemini legendre sıralama yöntemi ile çözelim.

$K(x,t)=xt, \quad h(x)=1$ ve N=2 için sıralama noktaları

$$x_0=-1, \quad x_1=0, \quad x_2=1$$

olduğunu bilinmektedir.

$$k_{mn}^{z}=\frac{1}{m!n!}\frac{\partial^{m+n}K(0,0)}{\partial x^m \partial x^n}, \quad m,n=0,1,...,N$$

Şeklinde hesaplanmaktadır. Bu durumda

$$k_{00}=\frac{1}{0!0!}\frac{\partial^0 K(0,0)}{\partial x^0\partial t^0}=0,\ k_{01}=\frac{1}{0!1!}\frac{\partial^1 K(0,0)}{\partial x^0\partial t^1}=0,\ k_{02}=\frac{1}{0!2!}\frac{\partial^2 K(0,0)}{\partial x^0\partial t^2}=0$$
$$k_{10}=\frac{1}{1!0!}\frac{\partial^1 K(0,0)}{\partial x^1\partial t^0}=0,\ k_{11}=\frac{1}{1!1!}\frac{\partial^2 K(0,0)}{\partial x^1\partial t^1}=1,\ k_{12}=\frac{1}{1!2!}\frac{\partial^3 K(0,0)}{\partial x^1\partial t^2}=0$$
$$k_{20}=\frac{1}{2!0!}\frac{\partial^2 K(0,0)}{\partial x^2\partial t^0}=0,\ k_{21}=\frac{1}{2!1!}\frac{\partial^3 K(0,0)}{\partial x^2\partial t^1}=1,\ k_{22}=\frac{1}{1!2!}\frac{\partial^4 K(0,0)}{\partial x^2\partial t^2}=0$$

olarak bulunur. O halde

$$K_t=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix} \text{ ve } D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1/2&0&3/2\end{bmatrix}$$

şeklindedir.

$$K_z = \left(D^{-1}\right)^T K_t \left(D^{-1}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$W = XD^T(1-\beta K_z Q) = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 1 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır.

$$W_z^{-1}G = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 1 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ 1 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

İşleminin sonucunda katsayılar matrisi

$$\begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

$$y(x) = 0P_0(x) + 3P_1(x) + 0P_2(x)$$
$$y(x) = 0\times 1 + 3\times x + 0\times \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$y(x) = 3x$$

Çözüm fonksiyonu elde edilir.

Örnek 3. $f(x)=1+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{d}{d^2+(x-y)^2}f(y)dy \qquad -1\le x\le 1.$ denklemini göz önüne alalım.

İlk olarak sıralama noktalarını belirlenir. Sıralama noktaları için $x_i=a+\frac{b-a}{N}i, \quad i=0,1,\ldots,N$ formülü kullanılmaktadır. Fonksiyon [-1,1] aralığında değiştiği için a=1 ve b=-1 alınır. Kesim noktası N=3 seçildiğinde sıralama noktaları

$x_0=-1 \quad x_1=-1/3 \quad x_2=1/3 \quad x_3=1$

olarak bulunur. Sıralama noktaları denklemde yerine yazılırsa matrisler şu şekilde bulunur:

$$X=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1/3 & 1/9 & -1/27\\ 1 & 1/3 & 1/9 & 1/27\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -1/2 & 0 & 3/2 & 0\\ 0 & -3/2 & 0 & 5/2\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2/3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2/5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2/7\end{bmatrix}$$

$$K_z=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & -24\\ -2 & 0 & 24 & 0\\ 0 & -24 & 0 & 720\end{bmatrix},\quad G=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

Fredholm integral denklemi için katsayıları hesaplama formülü;

$XD^T\left(1-\beta K_Z Q\right)A=G$ şeklindedir.

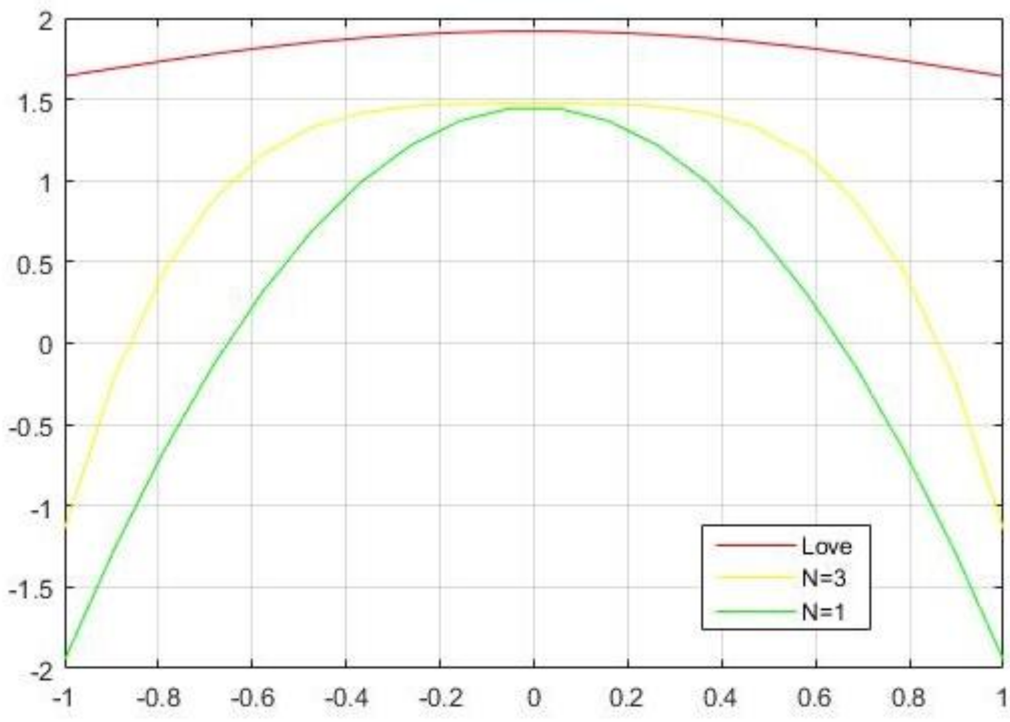
Matrisler yerlerine yazıldığında katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 0.3189 \\ 0 \\ -2.2674 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Olarak bulunur. Legendre polinomları ile katsayılar çarpıldığında çözüm

$$f(x) = -2.52x^4 - 0.096x^2 + 1.4753$$

olarak bulunur.



Şekil 5.1 Örnek 3 için karşılaştırma

İterasyon sayısı arttıkça legendre sıralama yöntemi ile bulunan sonuç gerçek sonuca yaklaşmaktadır.

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında love tipi integral denkleme legendre sıralama yöntemi uygulanmıştır. İlk olarak integral denklemlerle ilgili literatür çalışmaları verilmiştir. Daha sonra ortogonal polinom olan legendre polinomları tanıtılmıştır. Son olarak da legendre sıralama yöntemini kullanarak lineer diferansiyel denklemler ve fredholm integral denklemleri için matris bağıntıları elde edilmiştir. Yöntemin geçerliliğini ve kullanışlılığını göstermek için love denkleminden önce diferansiyel ve integral denklem örnekleri ele alınmıştır. Diferansiyel denklem için önce N=2 için çözüm yapılmıştır. Kesim sayısının artmasıyla işlemler zorlaşacağı için MATLABR2017a programı yardımıyla algoritma kurulup denklem çözülmüştür. Çizelge 5.1’den anlaşılacağı üzere kesim sayısı(N) arttıkça legendre sıralama yöntemi ile bulunan sonuçlar tam çözüme çok yaklaşmaktadır. Fonksiyonda logaritma fonksiyonu olsa bile polinom yaklaşımında belli kesim sayısından sonra aynı değere yakınsama görülmektedir. İntegral denklem için alınan örnekte bilgisayar programına gerek kalmadan tam sonuç elde edilmiştir. Love tipi integral denklem örneği çözülüp şekil 5.1’de gösterilmiştir. Şekil 5.1’de görüldüğü üzere kesim sayısı arttıkça gerçek sonuca yaklaşılmıştır. Matrislerin kurulumu ve işlemlerin basitliğinden dolayı diğer nümerik yöntemlere göre tercih edilebilir. Programlamaya uygun olduğunu için yüksek kesim noktaları için kolayca hesaplama yapılabilmektedir. İlerleyen çalışmalarda ortogonal türdeki diğer polinomlar love denklemi çözümünde kullanılabilir. Aynı zamanda nonlineer integral denklemler için matris bağıntıları oluşturulabilir. Bu durum, bir sonraki çalışmanın araştırma konusudur.

KAYNAKLAR

[1] Abaoub, A.E., Shkheam, A.S. ve Zali S.M., (2018). “The Adomian Decomposition Method of Volterra İntegral Equation of Second Kind”, American Journal of Applied Mathematics, 6:141-147.

[2] Bougoffa, L., Al-Haqbani, M. ve Rach, R.C., (2012). “A convenient technique for solving integral equations of the first kind by the Adomian decomposition method”, Keybernetes, 41:145-156.

[3] Xie, L., (2013). “A new modificaton of Adomian Decomposition method for Volterra İntegral Equations of the Second Kind”, Journal of Applied Mathematics, 2013:1-7.

[4] Bildik, N. ve Inc, M., (2007). “Modified decomposition method for nonlinear Volterra-Fredholm integral equations”, Chaos, Solitans and Fractals, 33:308-313.

[5] Wazwaz, A.M., (1997). “Necessary Conditions for the Appearance of Noise Terms in Terms in Decomposition Solution Series”, Applied Mathematics and Computation, 81:265-274.

[6] Bakodah, H.O., (2012). “The appearance of noise terms in modified Adomian decomposition method for quadratic integral equations”, American Journal of Computational Mathematics, 2:125-129.

[7] Biazar, J. ve Ebrahimi, H., (2009). “Variational İteration method for Fredholm İntegral equations of the second kind”, Iranian Journal of Optimization, 1:13-23.

[8] Xu, L., (2007). “Variational iteration method for solving integral equtions”, Computers and Mathematics Applications, 54:1071-1078.

[9] Norkin, B.V., (2004). “Method of Successive Approximations for Solving integral equations of the Theory of Risk Processes”, Cybernetics and Systems Analysis, 40:517-526.

[10] Sulaiman, N.A., Sallah, S.B. ve Hassan, T.C., (2014). “Solving a System of Volterra-Fredholm İntegral Equation of the Second Kind via Series Solution”, Applied Mathematical Sciencies, 8:2181-2195.

[11] Cardone, A., Ixaru, L.Gr., Paternoster B. ve Santomauro, G., (2015). “Ef-Gaussian direct quadrature methods for Volterra integral equations with periodic solution”, Mathematics and Computers in Simulation, 110:125-143.

[12] Katani, R., (2019). “Numerical solution of the Fredholm integral equations with a quadrature method”, Sociedad Espanola de Matematica Applicada, 76:217-276.

[13] Love, E.R., (1990). “The potential due to a circular parallel plate condenser”, Mathematika, 37:217-231.

[14] Norgren M. ve Jonsson, B.L.G., (2009). “The capacitace of the circular parallel plate capacitor obtained by solving the Love integral equation using an analytic expansion of the kernel”, Progress in Electromagnetics Research, 97:357-372.

[15] Kumar, A.S., (2010). “An analytical solution to applied mathematics-related love’s equation using the Boubaker polynomials expansion scheme,” Journal of Franklin Institute.347:1755-1761.

[16] Kabakçı, F., (2007). Lineer Diferansiyel, İntegral ve İntegroDiferansiyel Denklemlerin Legendre Polinom Çözümleri, Yüksek Lisans Tezi, Muğla Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Muğla.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	: Erdem ŞENTÜRK
Doğum Tarihi ve Yeri	: 01.01.1990 \ İstanbul
Yabancı Dili	: İngilizce
E-posta	: erdem1990@yahoo.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Y. Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	Devam ediyor
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2016
Lisans	İnşaat Mühendisliği	İstanbul Üniversitesi	2012
Lise	Fen	Çatalca Çok Programlı Lisesi	2008

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	**Firma/Kurum**	**Görevi**
2019-Devam ediyor	MEB	Matematik Öğretmeni

YAYINLARI

Bildiri

1. Daş, S.E. ve Şentürk E., (2018). "Legendre Matrix Method for Solving a Class of Integral Equations", 7th International Conference on Applied and Mathematical Modelling, 20-24 June 2018, Istanbul.