T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

SERAP AYHAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
DR. ÖĞR. ÜYESİ SEBAHAT EBRU DAŞ

İSTANBUL, 2019

ÖNSÖZ

Kesirli türeve, mühendislikten doğa bilimlerine finanstan tıpa kadar birçok farklı alanda rastlanmaktadır. Klasik analizin yetersiz geldiği durumlarda, kesirli analizin daha etkin olduğu görülmüştür. Özellikle mekanik, elektrik, biyoloji, kimya, ekonomi, kontrol teorisi ve sinyal, görüntü işleme gibi birçok alanda oldukça önemli rol oynamaktadır. Bu çalışmada da bazı kesirli mertebeden diferansiyel denklemlere Legendre Operasyonel Matris yöntemi uygulanarak denklemlerin yaklaşık çözümleri elde edilmeye çalışılmıştır. Çalışmada Legendre Operasyonel Matris yönteminin tüm detaylarının verilmesi, bu yöntemle birlikte kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin elde edilmesi amaçlanmıştır.

Öncelikle bu tezi hazırlarken her konuda desteklerini esirgemeyen değerli tez danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Sebahat Ebru DAŞ'a en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca her zaman yanımda olan aileme, nişanlıma ve bu süreçte bana çok yardımcı olan canım arkadaşım Elveda Gamze MEMİŞ'e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

BÖLÜM 4

BÖLÜM 5

SİMGE LİSTESİ

D	Operasyonel Matris

ÖZET

KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Serap AYHAN

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Sebahat Ebru DAŞ

Kesirli analiz, mertebesi tamsayı olmayan adi türev ve integralin bir genellemesi olarak ortaya çıkmıştır. Daha sonraki yıllarda ise kendisine birçok uygulama alanı bulmuştur. Kesirli analizin doğmasıyla birlikte kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin birçok problemi modellemede daha etkin olduğu görülmüştür. Bu tip problemler genellikle tam çözüme sahip olmadıklarından, yaklaşık çözümleri bulmak için birçok sayısal yöntem geliştirilmiştir. Bu tezimizde, bazı kesirli mertebeden diferansiyel denklemlere Legendre operasyonel matris yöntemi uygulanarak, yaklaşık çözümleri elde edilmeye çalışılmıştır. Tezin birinci bölümünde, konunun kaynak taraması, tezin amacı ve hipotez kısmı bulunmaktadır. İkinci bölümde, kesirli analizle ilgili bazı özel fonksiyonlar hatırlatılmıştır. Üçüncü bölümde, kesirli analizle ilgili temel kavramlar tanıtılmıştır. Dördüncü bölümde ise, Legendre operasyonel matris yöntemi tüm yönleriyle açıklanmış ve birtakım sayısal örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Kesirli analiz, kesirli mertebeden diferansiyel denklemler, Legendre Operasyonel Matris yöntemi

ABSTRACT

NUMERICAL SOLUTIONS OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Serap AYHAN

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Adviser: Asst. Prof. Sebahat Ebru DAŞ

Fractional calculus is a generalization of ordinary derivation and integral with noninteger. In the following years, it has found many application areas. With the emergence of fractional analysis, it is seen that fractional differential equations are more effective in modeling many problems. Since such problems often do not have exact solutions, many numerical methods have been developed to find the approximate solutions.

In this thesis, the Legendre operational matrix method is applied to some fractional differential equations and the approximate solutions are tried to be obtained. In the first chapter, the literature review of the subject, the aim of the thesis and the hypothesis are given. In the second chapter, some special functions related to fractional analysis are explained. In the third chapter, the basic concepts of fractional calculus are introduced. In the fourth chapter, Legendre operational matrix method is explained in all aspects and some numerical examples are given.

Keywords: Fractional calculus, Fractional differential equations, Legendre operational matrix method

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Kesirli türev 300 yıldan fazla tarihi olan adi türevin bir genişlemesidir. Kesirli türev 1695 yılının son birkaç ayında Leibniz ve L'Hospital arasındaki yazışmalar sonucu başlatılmıştır. O yılda Leibniz L'Hospital'e aşağıdaki soruyu ortaya atarak bir mektup yazdı:

"Tam sayı dereceli olmayan türevler tam sayı dereceli türevler ile genelleştirilebilir mi ?"

L'Hospital bahsi geçen soruyu biraz merak etmiş ve Leibniz'e başka basit bir soru yöneltmiş: " Eğer mertebe $1/_2$ olursa ne olacak?" Leibniz 30 Eylül tarihli bir mektubunda şöyle cevaplamış: "Bu bir paradoksa sebep olacak ve bir gün bundan yararlı sonuçlar çizilecektir." O tarih kesirli analizin tam doğum günü olarak sayıldı.

L'Hospital ve Leibniz'in ilk araştırmalarından sonra kesirli analiz, matematikte en iyi anlamda öncelikli bir çalışma olarak edinildi. Kesirli analiz ve matematiksel sonuçlarla ilgilenen birçok çalışma arasında Fourier, Euler, Laplace da vardır.

Tam sayı mertebeli olmayan integral veya türevlerin uygun hale getirilen tanımlarının birçoğu kendi gösterim ve yöntemleri kullanılarak bulundu. Kesirli analiz alanında popüler olmuş tanımların en ünlüsü *Riemann-Liouville* ve *Grünwald-Letnikov* tanımlarıdır. Kesirli analiz çalışmaları için uygulanabilir matematiksel teorilerin çoğu 20.yy'ın başlangıcından önce geliştirildi. Bu yüzden, mühendislik ve bilimsel uygulamalarda en ilgi çekici atılımlar son 100 yılda bulundu.

Kesirli analizin kullanımı ve tanımların anlamı, bu anlayıştaki çalışmalarda ortaya çıkacak olan bazı gerekli fakat nispeten temel matematiksel tanımların hızla tartışılmasıyla daha anlaşılır hale getirilecektir. Bunlardan bazıları Gama Fonksiyonu, Beta Fonksiyonu ve Mittag-Lefler Fonksiyonudur.

Momani ve Odibat, [1] ’deki çalışmasında kesirli mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek için öncelikle Varyasyonel iterasyon yöntemi ve daha sonra ise Adomian Ayrıştırma yöntemini kullanmış ve elde edilen sonuçları birbirleriyle kıyaslayarak çözümlerin doğruluklarını ve etkinliklerini tablo halinde ifade etmişlerdir.

Odibat ve Momani [2] çalışmasında ise, He’nin Homotopi Pertürbasyon Yöntemini modifiye ederek nonlineer kesirli mertebeden diferansiyel denklemleri çözebilmek için yeni bir yöntem geliştirmiş ve bu yöntemi ikinci dereceden kesirli mertebeden Riccati diferansiyel denklemini çözmek için uygulamıştır.

Hossein Jafari ve Varsha Daftardar-Gejji, kesirli mertebeden lineer olmayan denklem sistemlerinin çözümlerini elde etmek için Adomian ayrıştırma (dekompozisyon) metodunu kullanmışlardır ve bununla ilgili sembolik hesaplamalar kullanarak bazı örnekler çözmüşlerdir[3].

S. Saha Ray ve R.K. Bera [4] çalışmalarında ilk olarak lineer olmayan kesirli mertebeden bir diferansiyel denklemin çözümü için Adomian ayrıştırma(dekompozisyon) metodunu uygulamayı analizin amacı olarak ele almışlar ve sonunda çözümü, tablolar halinde gösterilmiş nümerik olarak hesaplanmış dekompozisyon metodu olarak elde etmişlerdir.

E. Babolian, A. R. Vahidi ve A. Shoja [5] çalışmalarında kesirli mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini vermek için yeni bir tekrarlı metod kullanmışlardır. Bu yaklaşım spektral Adomian dekompozisyon metodu ve Adomian dekompozisyon metodu olmak üzere iki farklı denklemin kompozisyonuna dayanır.

Changpin Li ve Fanhai Zeng [6] çalışmalarında kesirli sonlu fark metodlarının kesirli diferansiyel denklemlerin çözümleri için faydalı olduğunu düşünmüşlerdir. Çalışmalarının amacı olarak kesirli Euler metodunun, kesirli Adams metodunun ve genelleştirilmiş ayrık Gronwall eşitsizliği olarak kullanılan kıvrım formüllerine bağlı yüksek mertebeden metodların kararlılık ve yaklaşımlarını ispatlamak olduğunu ifade etmişlerdir.

S. Kazem, S. Abbasbandy ve Sunil Kumar [7] çalışmalarında kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek için kesirli mertebeden Legendre fonksiyonları için genel bir formülasyon inşa etmişlerdir. Kesirli analizin kesirli diferansiyel denklemlerle en iyi şekilde tanımlanarak kurulan fiziki modelleme ve mühendislik uygulamalarında kullanıldığını bu yüzden onların çözümleri için etkili ve güvenilir bir tekniğin çok önemli olduğunu ifade etmişlerdir. Ayrıca kesirli türev için Riemann-Liouville kesirli integral operatörünü kullanarak Caputo'nun tanımını kullanacaklarını ve temel amaçlarının kesirli analiz için Legendre polinomlarından yola çıkarak yeni ortogonal fonksiyonlarını genelleştirmek olduğunu belirtmişlerdir.

Abbas Saadatmandi ve Mehdi Dehghan [8] çalışmalarında, kesirli diferansiyel denklemlerin bir sınıfının nümerik çözümleriyle ilginmişlerdir. Kesirli türevlerin Caputo anlamına göre tanımladıklarını ve asıl amaçlarının kesirli analizi Legendre işlemsel matrisine genelleştirmek olduğunu belirtmişlerdir.

H. Jafari, S.A. Yousefi, M.A. Firoozjaee, S. Momani ve C.M. Khalique [9] çalışmalarında, kesirli mertebeden türevleri ilgilendiren basit diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerin yaklaşımını elde etmek için Legendre dalga yaklaşımlarını kullanarak bir çalışma alanı geliştireceklerini ifade etmişlerdir.

1.2 Tezin Amacı

Bu tezin amacı aşağıda maddeler halinde sıralanmıştır.

- Tezden yararlanacak araştırmacıların Kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerle ilgili genel bir bakış açısı kazanması
- Legendre Operasyonel Matris Yöntemini tüm özellikleriyle birlikte öğrenmek
- Bu yöntemi birtakım kesirli mertebeden diferansiyel denklemlere uygulayarak yaklaşık çözümler elde etmek
- Daha sonra yapılabilecek çalışmalarla ilgili fikirler vermek

1.3 Hipotez

“Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri” adlı hipotezimizde, Öncelikle Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerle ilgili bir literatür taraması yaparak Legendre Operasyonel Matris Yöntemini tüm ayrıntılarıyla inceledik. Daha sonra ise bu yöntemi bir takım kesirli mertebeden diferansiyel denklemlere uygulayarak bazı denklem sistemi elde ettik. Bu sistemleri çözüp sonuçları ifade ettik.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezde gerekli olan bazı tanım ve kavramlardan bahsedilecektir.

2.1 ÖZEL FONKSİYONLAR

2.1.1 GAMMA FONKSİYONU

Gamma fonksiyonu 18. Yüzyılda İsviçreli bir matematikçi olan *Leonhard Euler* tarafından ortaya atılmış bir fonksiyondur. Kısaca, Gamma fonksiyonuna tam olmayan değerler için faktöriyel fonksiyonunun genelleştirilmiş bir hali de denebilir.

Tanım 2.1 $\Gamma:(0,\infty)\rightarrow\mathbb{R}^{+}$ olmak üzere,

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} e^{-t}\,t^{x-1}dt$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona *Gamma Fonksiyonu* denir[11].

Teorem 2.1 Gamma fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlar:

i. $\Gamma(x+1)=x\,.\,\Gamma(x)$

ii. $\Gamma(x)=(x-1)!$

iii. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

İspat.

i. Gamma fonksiyonunun tanımından kolaylıkla görülür ki

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x}dt=[-e^{-t}t^{x}]_{t=0}^{t=\infty}+x\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt=x.\Gamma(x)$$

ii. Burada bir genelleme yapacak olursak $\Gamma(1)=1$ olduğu açıktır.

$x = 1,2,3. ..$ için

$\Gamma(2)=1.\Gamma(1)=1=1!$

$\Gamma(3)=2.\Gamma(2)=2.1!=2!$

$\Gamma(4)=3.\Gamma(3)=3.2!=3!$

...

$\Gamma(x)=(x-1).\Gamma(x-1)$

$= (x-1)(x-2)!$

$= (x-1)!$ olur.

iii.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{-\frac{1}{2}}dt$$ 'dir.

$\left.\begin{matrix} t = y^2 \\ dt = 2ydy \end{matrix}\right\}$ dönüşümü yapılırsa

$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^{\infty} e^{-y^2}dy$ elde edilir. Aynı şekilde, $\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$ olarak da yazılabilir.

Bu iki denklemi çarpacak olursak,

$[\Gamma(\frac{1}{2})]^2 = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$ elde ederiz. Bu iki katlı integrali kutupsal koordinatları kullanarak rahatlıkla çözebiliriz:

$\left.\begin{matrix} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{matrix}\right\}$ dönüşümü ile $[\Gamma(\frac{1}{2})]^2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\, r dr d\theta = \pi$ olur *[14].*

2.1.2 BETA FONKSİYONU

Beta fonksiyonu, 1990 yılında Legendre, Whittaker ve Watson tarafından Beta integralini ifade etmek için (diğer adıyla birinci tür Euler integralini) tanımlanan bir fonksiyondur. Beta fonksiyonu Gamma fonksiyonu ile yakından ilişkili olduğundan birçok karmaşık integraller beta fonksiyonu içeren ifadelere indirgenebilir.

Tanım 2.2 $x, y \in \mathbb{R}^+$ için,

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt$$

fonksiyonu *Beta Fonksiyonu* olarak adlandırılır. Beta fonksiyonu aşağıdaki gibi Gamma fonksiyonları yardımıyla da ifade edilebilir.

TEOREM 2.2 $x, y \in \mathbb{R}^+$ için

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad \text{dir.}$$

İspat.

$$\Gamma(\mathrm{x})\Gamma(\mathrm{y}) = \int_0^{\infty} e^{-u}u^{x-1}du \int_0^{\infty} e^{-v}v^{y-1}dv$$

Şimdi, $u = a^2$, $v = b^2$ yazalım

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4\int_0^{\infty} e^{-a^2}a^{2x-1}da \int_0^{\infty} e^{-b^2}b^{2y-1}db$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a^2+b^2)}|a|^{2x-1}|b|^{2y-1}da\, db$$

Kutupsal koordinatlar dönüşümünden $a = rcos\theta \;\; b = rsin\theta$

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}|rcos\theta|^{2x-1}\,|rsin\theta|^{2y-1}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-r^2}r^{2x+2y-2}\, r\, dr \int_0^{2\pi} |(cos\theta)^{2x-1}(sin\theta)^{2y-1}|\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2(x+y-1)} d(r^2)\ \ 4\int_0^{\pi/2} (cos\theta)^{2x-1}(sin\theta)^{2y-1}\, d\theta$$

$$= \Gamma(x+y) 2\int_0^{\pi/2} (cos\theta)^{2x-1}(sin\theta)^{2y-1}\, d\theta$$

$$= \Gamma(x+y)B(x,y)\ .$$

■

Özel olarak,

$$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt = 2\int_0^1 (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}du = 2\arcsin(1) = 2\frac{\pi}{2} = \pi$$

olur.

2.1.3 LEGENDRE POLİNOMLARI

İngiliz matematikçi olan Isaac Todhunter "Legendre katsayıları" olarak adlandırdığı polinomları, ilk kez tanıtan ve çalışan Fransız matematikçi olan Adrien-Marie Legendre (1752–1833)'na atfetmiştir. Todhunter fonksiyonları polinomlar yerine katsayılar olarak adlandırmıştır; çünkü üreten fonksiyonunun seri açılımındaki h^n katsayıları olarak ortaya çıkarlar. Todhunter ayrıca genellikle kullanılan P_n notasyonunu da tanımlamıştır.

Legendre polinomları, Legendre tarafından [1] 'deki tanımlanmıştır. Fonksiyonlar ayrıca Laplace yaptığı [2]'deki çalışmada da ortaya çıkmıştır; fakat orijinal tanımlama yazmış olmasında rağmen birkaç sene yayınlamamış olan Legendre'ye aittir. Legendre'nin kendisi Laplace'ın potansiyel fonksiyonu tanımladığını ancak kendisinin açılımı geliştirdiğini açıklamıştır. Daha sonraları, Jacobi, Dirichlet ve Heine öncelik sorusunu yazmışlar ve sonuç olarak takdiri hak edenin Legendre olduğuna karar vermişlerdir.

Legendre Polinomları

Legendre polinomları [-1,1] aralığında tanımlı polinomlardır ve aşağıdaki yineleme formülü ile belirlenebilir:

$$L_{i+1}(z) = \frac{2i+1}{i+1} z L_i(z) - \frac{i}{i+1} L_{i-1}(z) \quad , \qquad i = 1,2,\ldots$$

Burada $L_0(z) = 1$ ve $L_1(z) = z$'dir. Polinomları [-1,1] aralığında değil de [0,1] aralığında tanımlamak istediğimizde $z = 2x - 1$ dönüşümünü kullanalım. O zaman ötelenmiş Legendre polinomları $L_i(2x-1)$ yerine $P_i(x)$ notasyonunu kullanabiliriz. Buna göre

$$P_{i+1}(x) = \frac{2i+1}{i+1}(2x-1)P_i(x) - \frac{i}{i+1} P_{i-1}(x) \quad , \qquad i = 1,2,\ldots$$

olacaktır. Bu bağlantıya göre $P_0(x) = 1$ ve $P_1(x) = 2x - 1$ 'dir. Yineleme bağıntısından yararlanarak i. Legendre polinomu $P_i(x)$'i analitik olarak

$$P_i(x) = \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i+k} \frac{(i+k)!}{(i-k)!} \frac{x^k}{(k!)^2}$$

şeklinde ifade edilir.

Legendre polinomları ortogonal olduklarından dolayı, ortogonallik özelliğine göre

$$\int_0^1 P_i(x) P_j(x) dx = \begin{cases} \dfrac{1}{2i+1}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

olur.

BÖLÜM 3

3.1 KESİRLİ TÜREV VE İNTEGRAL

Kesirli analiz ortaya atıldıktan zamanımıza kadar kendisine birçok uygulama alanı bulmuştur. Bunlardan bazıları aşağıda ayrıntılı olarak verilmiştir.

3.1.1 Kesirli Türevin Uygulama Alanları

Kesirli türev, mühendislikten doğa bilimlerine finanstan tıpa kadar birçok farklı alanda kendine yer bulmuştur. Klasik analizin yetersiz geldiği durumlarda, kesirli analizin daha etkin olduğu görülmüştür. Daha ayrıntıya girecek olursak, kesirli analiz, mekanik, elektrik, biyoloji, kimya, ekonomi, kontrol teorisi ve sinyal, görüntü işleme gibi birçok alanda çok önemli bir rol oynar. Örneğin son üç alanda modelleme, eğri uydurma, süzme, örüntü tanıma, ayrıt saptama, kimlik saptama, kararlılık, kontol edilebilirlik, gözlenebilirlik ve sağlamlık gibi bazı önemli değerlendirmeler şimdi uzun dalga bağımlılık davranışına bağlıdır. Benzer gelişmeler listede bulunan diğer alanlarda da gözlenmiştir.(Springer Nature,2018)

Bu alanların bazılarını belirteceğiz:

- **Elektrik Enerji Akım Hatları**

19.yüzyılın son yılları boyunca, çok titiz matematiksel görüş olmadan *Heaviside* işlemsel analizini başarılı bir şekilde geliştirmiştir. 1892'de elektrik enerji akım hatları çalışmasına kesirli türev fikrini katmıştır. *Gregory* (1846) 'dan dolayı ısı denkleminin sembolik operatör çözümünden yola çıkarak, *Heaviside* $\frac{d}{dt}$ diferansiyel operatörü için p harfini kullanmıştır ve difüzyon denkleminin çözümünü,

$p \equiv \frac{d}{dx}$ sabit olacak şekilde, ayrıca a, A ve B de yine sabit olmak üzere,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 p$$

şeklinde, sembolik formdaki $u(x,t)$ ısı dağılımı denklemini,

$$u(x,t) = A\, exp\left(ax\sqrt{p}\right) + B\, exp\left(-ax\sqrt{p}\right)$$

şeklinde kullanmıştır.

- **İnsandaki Süngerimsi Kemikteki Ses Ötesi Dalga Yayılımı**

Kesirli analiz, sıvı ve katılar arasındaki akışkan olmayan etkileşimleri tanımlamak için kullanılır. Yansıma ve iletme dağıtım operatörleri *Blot's teorisi* kullanılarak elastik bir çerçevede süngerimsi kemiğin bir parçası için türevlenir. İnsan süngerimsi kemik örnekleri aracılığıyla iletilen hızlı ve yavaş dalgalar için deneysel sonuçlar, teorik tahminler ile karşılaştırılır. [10]

- **Kesirli Analiz Kullanılarak Konuşma Sinyallerinin Modellenmesi**

Kesirli analiz kullanılarak konuşma sinyali modellemede yeni bir yakşalım sunulur. Bu yaklaşım tam sayılı mertebeden modeller temel alınarak bilinen *Doğrusal Tahmini Kodlama(LPC)* yaklaşımı ile karşılaştırılır. [11]

- **Kardiyak Doku Elektrot Arayüzünün Kesirli Analiz Kullanılarak Modellenmesi**

Doku elektrot arayüzü, bio-potansiyel kayıtların tüm formlarında (örneğin *ECG*, *EMG*, *EEG*) ve fonksiyoel elektrik uyarılarında (örneğin pacemaker, koklear implant, derin beyin stimülasyonu) yaygındır. Elektrotların klasik toplu devre element modelleri akım-gerilim ilişkilerini tanımlayan değişiklikler yardımıyla diferansiyelin mertebesinin genelleştirilmesi ile genişletilebilir. Bu tür kesirli mertebeden modeller, bioelektrot hareketleri gözlenen geliştirilmiş bir tanımı sağlar, ama kardiyak doku ile ilgili son deneysel çalışmalar bu karmaşık sistemi tanımlamak için ek matematiksel araçlara ihtiyaç duyulabileceğini belirtir. [12]

- **Otonom Araçların Yanal Ve Boylamsal Kontrolleri İçin Kesirli Analiz Uygulaması**

Bir otonom elektrik aracında yol izleme problemine uyarlanan *Kesirli Mertebeden Kontroller*in kullanımı (*FOC*) sunulmuştur. Endüstriyel bir aracın yanal hareketli bir modeli konvansiyonel ve kesirli mertebeden kontrollerin uygulanması için hesaba katılmıştır. [13]

Bu bölümde bazı temel türev ve integral tanımlarını vereceğiz.

3.2 RİEMANN-LİOUVİLLE İNTEGRALİ VE TÜREVİ

Tanım 3.2 $\alpha > 0$ olmak üzere, f $J^{'} = (0,\infty)$ üzerinde sürekli ve $J = [0,\infty)$ 'nin herhangi bir sonlu alt aralığında integrallenebilen parçalı bir fonksiyon olsun.

O zaman, $t > 0$ için

$$ {}_0I_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau $$

ifadesine, f 'nin α.mertebeden *Riemann-Liouville kesirli integrali* denir [14].

Tanım 3.3 $n-1 \le \alpha < n$ için

$$ D_{a,t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \qquad 0<\alpha<1, \quad t>0 $$

ifadesine *Riemann-Liouville sol kesirli türevi* ve

$$ D_{t,b}^{\alpha} f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \qquad 0<\alpha<1, \quad t>0 $$

ifadesine ise *Riemann-Liouville sağ kesirli türevi* denir.

$\alpha \in (0,1)$ olması durumu çok önemli olup yukarıdaki Riemann-Liouville sol kesirli türevi

$$ D_{a,t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{-\alpha} d\tau $$

şeklinde indirgenir.

3.3 CAPUTO TÜREVİ

Kesirli analize en önemli katkılardan birisi 1967 yılında M.Caputo tarafından yapılmıştır. Kesirli türevin Riemann-Liouville tanımındaki temel sorunlardan biri, kesirli diferansiyel denklemler ile bu tip diferansiyel operatörlerin birtakım yeni başlangıç şartlarına ihtiyaç duymasıdır. Özellikle belli kesirli integral ve türevlerin değerlerinin, bulunan kesirli diferansiyel denklemlerin çözümü için başlangıçta belirlenmesi gerekmektedir. Caputo klasik başlangıç koşullarını kullanarak Riemann-Liouville kesirli türevinin daha klasik tanımını geliştirmiştir. *f*, (*n*-1) tam sayı dereceli sürekli bir fonksiyon olsun,

$$D^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{0}^{t} (t-s)^{n-\alpha-1} \left(\frac{d}{ds}\right)^{n} f(s) ds$$

ifadesi *Caputo kesirli türevi* olarak tanımlanır.

3.4 GRUNWALD- LETNİKOV TÜREVİ

Grünwald-Letnikov kesirli türevi, matematikçi olan A. Grünwald ve A.V. Letnikov tarafından 1860'lı yıllarda ortaya atılmış bir türevdir. Liouville'nin yaklaşımındaki kısıtlamalardan rahatsız olan Grunwald, başlangıç noktası olarak bir fark kesirinin limitini bir türev tanımı olarak yeniden tanımlamıştır. Buna göre,

$$D_{x}^{\alpha} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(\Delta_{h}^{\alpha} f)}{h^{\alpha}}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{k=0} (-1)^{k} \binom{\alpha}{k} f(x-kh)}{h^{\alpha}} \quad , \alpha > 0$$

denklemi *Grunwald-Letnikov kesirli türevi* olarak adlandırılır.

Tanımdaki $\binom{\alpha}{k}$ genelleştirilmiş binom katsayısıdır ayrıca faktöriyeller Euler Gama fonksiyonunun yerini alır.

BÖLÜM 4

LEGENDRE OPERASYONEL MATRİS YÖNTEMİ

[0,1] aralığında integrallenebilen herhangi bir y(x) fonksiyonu ötelenmiş Legendre polinomları yardımıyla

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i\, P_i(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \cdots + c_i P_i(x) + \cdots \tag{4.1}$$

şeklinde seriye açılabilir. Buradaki c_i katsayılarını bulmak için ortogonallik özelliğini kullanırsak

$$\int_0^1 P_i(x)y(x)dx = c_0 \int_0^1 P_0(x)P_i(x)dx + c_1 \int_0^1 P_1(x)P_i(x)dx + \cdots + c_i \int_0^1 P_i(x)P_i(x)dx + \cdots$$

olur. Buna göre c_i ,

$$c_i = (2i+1) \int_0^1 P_i(x)y(x)dx$$

yardımıyla hesaplanır. Pratikte, (4.1) denkleminde serinin ilk (m+1) terimi alınır ve buna göre,

$$y(x) \approx \sum_{i=0}^{m+1} c_i\, P_i(x) = C^T \Phi(x) \tag{4.2}$$

elde edilir. Burada $C^T = [c_0\ c_1\ \ldots\ c_m]$ matrisi $1 \times (m+1)$ lik Legendre katsayı matrisi ve $\Phi(x) = [P_0(x)\ P_1(x)\ \ldots\ P_m(x)]^T$ matrisi ise $(m+1) \times 1$ lik Legendre öteleme matrisidir.

$\Phi(x)$'in birinci türevi

$$\frac{d\Phi}{dx} = D\Phi(x) \tag{4.3}$$

olarak ifade edilebilir. Buradaki D matrisi $(m+1)\times(m+1)$'lik operasyonel matristir ve matrisin elemanları

- m tek ise

$$d_{ij} = \begin{cases} 2(2i+1)\,, & j = i-k \quad , \quad k = 1,3,\dots,m \\ 0, & diğer \end{cases}$$

- m çift ise

$$d_{ij} = \begin{cases} 2(2i+1)\,, & j = i-k \quad , \quad k = 1,3,\dots,m-1 \\ 0, & diğer \end{cases}$$

olarak alınır. Örneğin, $m = 3$ için

$$D = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$m = 4$ için

$$D = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Phi(x)$'in *n*. türevi için bir genelleme yapacak olursak,

$$\frac{d^n\Phi}{dx^n} = D^n\Phi(x) \tag{4.4}$$

olur. Burada D^n, D matrisinin *n*. Kuvvetini göstermektedir.

4.1 Lineer Çoklu Mertebeden Kesirli Diferansiyel Denklemler

Lineer çoklu mertebeden bir kesirli diferansiyel denklemi sınıfı

$$D^{\alpha}y(x) = a_1 D^{\beta_1}y(x) + \cdots + a_k D^{\beta_k}y(x) + a_{k+1}y(x) + a_{k+2}g(x) \tag{4.5}$$

'yi

$$y^{(i)}(0) = d_i, \quad i = 0,1,\dots,n \tag{4.6}$$

Başlangıç şartları ile ele alalım. Burada $j = 1,2,\dots,(k+2)$ için a_j'ler reel sabit katsayılar ve

$n < \alpha \leq n+1$ $için$ $0 < \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_k < \alpha$ 'dır. Ayrıca D^{α} , α mertebeden *Caputo* kesirli türevini ifade eder.

(4.5)-(4.6) problemini çözmek için $y(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarına ötelenmiş *Legendre Polinomları* ile yaklaşırız.

$$y(x) \cong \sum_{i=0}^{m} c_i P_i(x) = C^T \phi(x) \tag{4.7}$$

$$g(x) \cong \textstyle\sum_{i=0}^{m} g_i P_i(x) = G^T \phi(x) \tag{4.8}$$

Burada $G = [g_0, \dots, g_m]^T$ bilinen matristir; fakat $C = [c_0, \dots, c_m]^T$ bilinmeyen bir matristir.

$D^{\alpha}\phi(x) \cong \boldsymbol{D}^{\boldsymbol{\alpha}}\phi(x)$ eşitliğini de kullanarak

$D^{\alpha}y(x) \cong C^T D^{\alpha}\phi(x) \cong C^T \boldsymbol{D}^{\alpha}\phi(x)$

elde ederiz.

4.2 Uygulamalar

Örnek 1.

Aşağıdaki lineer başlangıç değer problemini dikkate alalım.

$1{,}3D^{1{,}5}y(t) + 2{,}6y(t) = sin2t$

$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

Legendre yöntemini $m = 2$ alarak uygulayalım. Burada

$y(t) = c_0P_0(t) + \ c_1P_1(t) + \ c_2P_2(t) = C^T\phi(t)$

olur. Buna göre

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^{\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{16}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{5} & \frac{-1}{7} \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

elde ederiz.

$C^T\boldsymbol{A} = G^T$

eşitliğini kullanarak

$$C^T\left[\mathbf{1,3}\ \boldsymbol{D}^{\mathbf{1,5}}+\mathbf{2,6\ I}\right]=G^T$$

elde ederiz.

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}=G^T A^{-1}$$

olduğundan,

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{5}{13} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Böylece,

$$y(t)=\begin{bmatrix} \frac{5}{13} & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2t-1 \\ 6t^2-6t+1 \end{pmatrix}=\frac{5}{13}$$

yazabiliriz.

Örnek 2. Aşağıdaki homojen olmayan lineer başlangıç değer problemini ele alalım.

$$D^2y(t)+0{,}2D^{1,5}y(t)+0{,}3D^{0,5}y(t)=cost$$

$$y(0)=y'(0)=0$$

Bu problemin tam çözümü $y(t)=cost$ 'dir. $m=2$ alarak çözüme

$$y(t)=c_0P_0(t)+\ c_1P_1(t)+\ c_2P_2(t)=C^T\phi(t)$$

olarak yaklaşırız. Burada

$$D^{(1)}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix},\ D^{(2)}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad D^{\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{8}{\sqrt{\pi}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{21} \\ \frac{-1}{5} & \frac{3}{7} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$D^{\left(\frac{3}{2}\right)}=\frac{16}{\sqrt{\pi}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{5} & \frac{-1}{7} \end{pmatrix},\ G=\begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{12} \end{pmatrix}$$

$C^T\left[\boldsymbol{D^2} + \mathbf{0{,}2}\boldsymbol{D^{1,5}} + \mathbf{0{,}3}\boldsymbol{D^{0,5}} + \mathbf{I}\right]\phi(t) = G^T\phi(t)$ elde ederiz.

Her iki tarafı sağdan $\phi^{-1}(t)$ ile çarparsak

$$C^T\boldsymbol{A} = G^T$$

olur. Burada $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D^2} + \mathbf{0{,}2}\boldsymbol{D^{1,5}} + \mathbf{0{,}3}\boldsymbol{D^{0,5}} + \mathbf{I}$ dır.

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{12} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\frac{32}{5\sqrt{\pi}}+\frac{25}{4}}{\frac{-192}{32\sqrt{\pi}}-\frac{175\sqrt{\pi}}{16}-9} & \left(\frac{-5}{43} - \frac{175\sqrt{\pi}}{516}\right)\left(\frac{1}{\frac{-44}{301\sqrt{\pi}}-\frac{12}{43}-\frac{175\sqrt{\pi}}{516}}\right) & \frac{1}{\frac{192}{35\sqrt{\pi}}+\frac{235\sqrt{\pi}}{16}+\frac{21}{4}} \\ \frac{\frac{672}{25\sqrt{\pi}}+\frac{329}{4}+\frac{875\sqrt{\pi}}{16}}{\frac{-192}{35\sqrt{\pi}}-\frac{175\sqrt{\pi}}{16}-9} + 7 & \frac{1}{\frac{44}{301\sqrt{\pi}}-\frac{12}{43}-\frac{175\sqrt{\pi}}{516}} & \left(\frac{21}{5} + \frac{31\sqrt{\pi}}{4}\right)\left(\frac{1}{\frac{192}{35\sqrt{\pi}}+\frac{235\sqrt{\pi}}{16}+\frac{21}{4}}\right) \end{pmatrix}$$

$$c_0 = \frac{5}{6} - \frac{1}{4}\left(\frac{\frac{32}{5\sqrt{\pi}} + \frac{25}{4}}{\frac{-192}{32\sqrt{\pi}} - \frac{175\sqrt{\pi}}{16} - 9}\right) - \frac{1}{12}\left(\frac{\frac{672}{25\sqrt{\pi}} + \frac{329}{4} + \frac{875\sqrt{\pi}}{16}}{\frac{-192}{35\sqrt{\pi}} - \frac{175\sqrt{\pi}}{16} - 9} + 7\right)$$

$$c_1 = \frac{-1}{4}\left(\left(\frac{-5}{43} - \frac{175\sqrt{\pi}}{516}\right)\left(\frac{1}{\frac{-44}{301\sqrt{\pi}} - \frac{12}{43} - \frac{175\sqrt{\pi}}{516}}\right)\right) - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{\frac{44}{301\sqrt{\pi}} - \frac{12}{43} - \frac{175\sqrt{\pi}}{516}}\right)$$

$$c_2 = \frac{-1}{4}\left(\frac{1}{\frac{192}{35\sqrt{\pi}} + \frac{235\sqrt{\pi}}{16} + \frac{21}{4}}\right) - \frac{1}{12}\left(\left(\frac{21}{5} + \frac{31\sqrt{\pi}}{4}\right)\left(\frac{1}{\frac{192}{35\sqrt{\pi}} + \frac{235\sqrt{\pi}}{16} + \frac{21}{4}}\right)\right)$$

katsayıları elde edilir. Böylece,

$$y(t) = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2t-1 \\ 6t^2 - 6t + 1 \end{pmatrix} = 6c_2t^2 + (2c_1 - 6c_2)t + c_0 - c_1 + c_2$$

yazabiliriz.

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

Tezimizde, Legendre Operasyonel Matris Yöntemini birtakım kesirli mertebeden diferansiyel denkleme uyguladık. Daha ileriki çalışmalarda bu yöntem kısmi kesirli diferansiyel denklemlere uygulanabilir.

KAYNAKLAR

[1] Momani S ve Odibad Z., (2007). “Numerical comparison of methods for solving linear differential equations of fractional order”, Chaos, Solitons and Fractals, 31: 1248–1255.

[2] Odibad Z ve Momani S., (2008). “Modified homotopy perturbation method: Application to quadratic Riccati differential equation of fractional order”, Chaos, Solitons and Fractals, 36: 167–174.

[3] Hossein Jafari ve Varsha Daftardar-Gejji, (2005). “Solving a system of nonlinear fractional differential equations using Adomian decomposition”, Journal of Computational and Applied Mathematics, 196: 644-651.

[4] S. Saha Ray ve R.K. Bera, (2005). “An approximate solution of a nonlinear Fractional differential equation by Adomian decomposition method”, Applied Mathematics and Computation, 167: 561-571.

[5] E. Babolian, A. R. Vahidi ve A. Shoja, (2014). “An Efficient Method For Nonlinear Fractional Differential Equatıons: Combınatıon Of The Adomian Decomposition Method And Spectral Method”, Indian J.Pure Appl. Math.,December2014, 1017-1028.

[6] Changpin Li ve Fanhai Zeng, (2013). “The Finite Difference Methods For Fractional Ordinary Differential Equations”, Numerical Functional Analysis and Optimization, 34(2):149–179.

[7] S. Kazem, S. Abbasbandy ve Sunil Kumar,(2013). “Fractional-Order Legendre Functions For Solving Fractional-Order Differential Equations”, Applied Mathematical Modelling, 37(2013): 5498-5510.

[8] Abbas Saadatmandi ve Mehdi Dehghan,(2010).” A new operational matrix for solving fractional-order differential equations”, Computers and Mathematics with Applications,59(2010) 1326-1336.

[9] H. Jafari, S.A. Yousefi, M.A. Firoozjaee, S. Momani ve C.M. Khalique,(2011).” Application of Legendre wavelets for solving fractional differential Equations”, Computers and Mathematics with Applications,62(2011) 1038-1045.

[10] N. Sebaa, Z. E. A. Fellah, W. Lauriks, C. Depollier, Application of fractional calculus to ultrasonic wave propagation in human cancellous bone, Signal Processing archive Volume 86, Issue 10 (2006)2668 – 2677.

[11] K. Assaleh; W.M. Ahmad, Modeling of speech signals using fractional calculus 9th International Symposium on Signal Processing and Its Applications,2007. ISSPA 2007. 12-15 Feb. 2007 Page(s):1 – 4.

[12] R. L. Magin, Modeling the Cardiac Tissue Electrode Interface Using Fractional Calculus Journal of Vibration and Control, Vol. 14, No. 9-10, 1431-1442 (2008).

[13] J.I. Su´arez, B.M. Vinagre, A.J. Calder´on, C.A. Monje and Y.Q. Chen Using Fractional Calculus for Lateral and Longitudinal Control of Autonomous Vehicles Lecture Notes in Computer Science, Springer Berlin/ Heidelberg, Volume 2809/2004.

[14] Igor Podlubny,Fractional Differantial Equations An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of their Solution and some of their Applications, Academic press, 1998.

[15] Joseph M.Kimeu, Fractional Calculus: Definitions and Applications,4-2009.

[16] Adam Loverro, Fractional Calculus: History, Definitions and Applications for the Engineer, Notre Dame, IN 46556, U.S.A. May 8, 2004.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Serap AYHAN

Doğum Tarihi ve Yeri : 17.11.1990 / İstanbul

Yabancı Dili : İngilizce

E-Posta : serapyhan@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	**Alan**	**Okul/Üniversite**	**Mezuniyet Yılı**
Y.Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2019
Lisans	Matematik	Kocaeli Üniversitesi	2013
Lise	Matematik/Fen	Hüseyin Bürge Anadolu Lisesi	2009

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	**Firma/Kurum**	**Görevi**
2015-2019	Özel Nazmi Arıkan Fen Bilimleri Özel Öğretim Kursu	Matematik Öğretmeni
2013-2015	Şair Baki Ortaokulu	Matematik Öğretmeni

YAYINLARI

Konferans Bildirileri

1. Ayhan, S. ve Daş, S.E. , (2019). "A Numerical Method Based On Fractional Legendre-Collocation Method for Solving Fractional Initial Value Problems", International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, 10-13 Mart 2019, İstanbul.