T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİPERHALKALARDA ASAL HİPERİDEALLER

Elif ÖZEL

DOKTORA TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT

Şubat, 2020

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİPERHALKALARDA ASAL HİPERİDEALLER

Elif ÖZEL tarafından hazırlanan tez çalışması 20.02.2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi ______________________

Doç. Dr. Esra SEVİM ŞENGELEN, Üye
Bilgi Üniversitesi ______________________

Doç. Dr. Murat ALAN, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi ______________________

Prof. Dr. Ömer GÖK , Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi ______________________

Prof. Dr. Ünsal TEKİR, Üye
Marmara Üniversitesi ______________________

Danışmanım Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT sorumluluğunda tarafımca hazırlanan HİPERHALKALARDA ASAL HİPERİDEALLER başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Elif ÖZEL

İmza

Kızlarım Azra

ve

İpek'e

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam sürecinde çalışmalarıma her türlü desteği veren, çalışmalarıma yön veren ve geliştiren, güleryüzünü ve samimiyetini hiçbir zaman eksik etmeyen, büyük bir ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden gelenden fazlasını sunan, her sorun yaşadığımda yanına çekinmeden gidebildiğim saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT' a teşekkürü bir borç biliyor ve şükranlarımı sunuyorum. Ayrıca tez çalışması boyunca önerileriyle tezimin gelişmesine katkı sağlayan, tez izleme süreçlerinde bana çok kıymetli vakitlerini ayıran komite üyesi hocalarım sayın Prof. Dr. Murat ALAN, Doç. Dr. Esra ŞENGELEN SEVİM ve Prof. Dr. Ünsal TEKİR'e teşekkür ederim. Yine çalışmamda konu, kaynak ve yöntem açısından bana sürekli yardımda bulunarak yol gösteren ve gelecekteki hayatında çok daha başarılı olacağına inandığım kıymetli Arş. Gör. Deniz SÖNMEZ'e ve bu süreçte maddi manevi desteğini esirgemeyen, her koşulda yanımda olan sevgili eşime teşekkür ederim.

Elif ÖZEL

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ **vii**

ÖZET **ix**

ABSTRACT **x**

1 GİRİŞ **1**

1.1 Literatür Özeti 1

1.2 Tezin Amacı 2

1.3 Hipotez 2

2 TEMEL KAVRAMLAR **3**

2.1 Halka İle İlgili Genel Tanımlar ve Özellikleri 3

2.2 Düzgün Asalımsı İdealler ve Özellikleri 5

2.3 2-yutan İdealler ve Özellikleri 7

2.4 δ-Asalımsı İdealler 9

2.5 2-yutan δ-Asalımsı İdealler 10

2.6 Krasner Hiperhalkası ve Temel Özellikleri 10

2.7 Çarpımsal Hiperhalka ve Temel Özellikleri 14

3 KRASNER HİPERHALKASINDA 2-YUTAN HİPERİDEALLER **17**

3.1 2-yutan Hiperideal İle İlgili Özellikler 18

4 HİPERİDEAL GENİŞLEME FONKSİYONU ve δ-ASALIMSI HİPERİDEALLER **22**

4.1 Genişleme Fonksiyonu İle İlgili Ek Özellikler 24

5 ÇARPIMSAL HİPERHALKALARDA 2-YUTAN δ-ASALIMSI HİPERİDEALLER **27**

5.1 2-yutan δ-asalımsı Hiperideallerin Özellikleri 28

6 DÜZGÜN ASALIMSI HİPERİDEALLER **31**

6.1 Düzgün Asalımsı Hiperideallerin Özellikleri 33

7 SONUÇ ve ÖNERİLER **36**

KAYNAKÇA **37**

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR **39**

SİMGE LİSTESİ

$\subseteq$	Alt kümesidir
$\nsubseteq$	Alt kümesi değildir
$(\Leftrightarrow)$	Ancak ve ancak
çekf	Bir f fonksiyonunun çekirdeği
$rad(I)$	Bir I idealinin radikali
$\cup$	Birleşim
$\geq$	Büyük eşit
δ	Delta fonksiyonu
$\notin$	Elemanı değildir
$\in$	Elemanıdır
$\exists$	En az bir
$\neq$	Eşit değildir
γ	Gama fonksiyonu
$(\Rightarrow)$	Gerek şart
$\forall$	Her
$\circ$	Hiperişlem
$P(H)$	H kümesinin bütün alt kümelerinin kümesi
$\cong$	İzomorftur
$\cap$	Kesişim
$Ord(Q)$	Q hiperidealinin mertebesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$Id(R)$	R hiperhalkasındaki tüm hiperideallerin kümesi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi

(x)	x Elemanıyla üretilen ideal
$(\Leftarrow)$	Yeter şart

ÖZET

HİPERHALKALARDA ASAL HİPERİDEALLER

Elif ÖZEL

Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi

Danışman: Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT
Eş-Danışman:

Hiperyapılar 1934 yılında temelleri atılan bir konudur. Bazı durumlarda toplama işleminin sonucunun bir küme olması, bazen çarpma işleminin sonucunun bir küme olması bazen ise her ikisinin de sonucunun bir küme olması hiperyapıları klasik cebirden farklı kılar. Ayrıca hiperyapılar kimya, yapay zeka, kodlama, fuzy kümeleri, graflar ve olasılık konularında çalışılmasından dolayı uygulama alanı geniş bir konudur. Bu çalışmada 3. bölümde 2-yutan hiperidealler üzerinde çalışılmış ve 2-yutan hiperideallerin sağladığı bazı özellikler gösterilmiştir. 4. bölümde δ-asalımsı hiperidealler araştırılmış ve çeşitli özellikleri verilmiştir. 5. bölümde ise 2-yutan δ-asalımsı hiperidealler incelenmiştir. 6. bölümde ise düzgün asalımsı hiperideal tanımlanmış ve çeşitli özellikleri ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Krasner Hiperhalkası, Çarpımsal Hiperhalka, Asal Hiperideal, Düzgün Asalımsı Hiperideal, δ-asalımsı Hiperideal

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ABSTRACT

PRIME HYPERIDEALS OVER HYPERRINGS

Elif ÖZEL

Department of Mathematics
Doctor of Philosophy Thesis

Advisor: Assoc. Prof. Gürsel YEŞİLOT
Co-advisor:

Hyperstructures is a subject founded in 1934. Hyperstructures are different from abstract algebra since in some case outcome of addition is a set, in some case outcome of multiplication is a set and in some case both of them is a set. Also hyperstructures are wide range of application field and used in chemistry, fuzzy sets, artificial intelligence, graphs, probability, coding. In this study, in chapter 3 we studied about 2-absorbing hyperideals. In chapter 4 we studied δ-primary hyperideals and gived some properties of them. In chapter 5 we investigated 2-absorbing δ-primary hyperideals ve gived some examples. In chapter 6 we analyse uniformly primary hyperideals.

Keywords: Krasner Hyperring, Multiplicative Hyperring, Prime Hyperideal, Uniformly Hyperideal, δ-primary Hyperideal

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

1
GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Hiperyapılar ilk olarak 1934 yılında 8. İskandinav Matematik kongresinde F. Marty tarafından tanımlanmıştır [1]. F. Marty hipergrupları tanımlamıştır. Marty nin tanımladığı hipergrup boştan farklı bir H kümesi ile H kümesinin kartezyen çarpımından H nin kuvvet kümesine giden bir fonksiyonla oluşturulur. 1940'lı yıllarda ise Fransada F. Marty, M. Krasner, M. Kuntzmann, R. Croisot, Amerikada M.Dresher, O. Ore, W. Prenowitz, H. Campaigne, Rusyada A. Dietzman, A. Vikhrov, İtalyada ise G. Zappa tarafından hiperyapılar teorisinin genel sonuçları, etkileri ve geometri ile ilişkisi üzerinde çalışılmıştır [2–7] .
1950'li ve 1960'lı yıllarda da İtalyada A. Orsatti ve Romanyada M.Benado tarafından yarıregüler hipergruplar ve hiperlatisler üzerinde çalışılmıştır. 1956 da Marc Krasner hiperhalka ve hipercisim tanımlarını yapmıştır [2, 8].
1970'li yıllarda ise Fransada M. Krasner, M. Koskas, ve Y. Sureau alt hipergrupları ve hiperyapılarla olan ilişkilerini araştırmıştır. Yunanistanda ise J. Mittas ve öğrencileri kanonik hipergruplar, hiperhalkalar ve hiperlatisler üzerinde çalışmışlardır [9–11].
1980'li yıllarda ise hiperhalkaların farklı çeşitleri tanımlanmıştır. Bunlar Çarpımsal hiperhalka ve Genel hiperhalkadır. Çarpımsal hiperhalkalar ilk olarak Rosaria Rota tarafından 1982 yılında bulunmuştur [12].
2000'li yıllarda ise B. Davvaz, Salasi, Asokkumar, Procesi, Kemprasit ve Velrajan tarafından çalışılmış ve çeşitli kaynaklar oluşturulmuştur [13–17].
Klasik cebirdeki δ-asalımsı idealler 2000 yılında Zhao Dongsheng tarafından tanımlanmıştır [18]. Klasik cebirdeki 2-yutan idealler ise 2007 yılında A. Badawi tarafından tanımlanmıştır [19]. Düzgün asalımsı idealler ise 2008 yılında J. A. Cox ve A. J. Hetzel tarafından tanımlanmıştır [20]. Klasik cebirdeki 2-yutan δ-asalımsı idealler ise 2017 yılında Zhao Donsheng ve Brahim Fahid tarafından tanımlanmış ve çeşitli özellikleri gösterilmiştir [21]. Hiperhalkalar 3 çeşittir. Eğer "+" ve "." iki hiperişlem ise genel hiperhalka, "+" hiperişlem "." normal işlem ise Krasner hiperhalkasıdır. "+" normal işlem "." hiperişlem ise çarpımsal hiperhalkadır [22].

1.2 Tezin Amacı

3. bölümde klasik cebirde tanımlanmış olan 2-yutan ideal tanımının Krasner hiperhalkasında sağlanıp sağlanmadığını inceledik. Sonrasında 2-yutan idealin sağladığı bazı özelliklerin Krasner hiperhalkasında da uygulabilir olup olmadığını inceledik. 5. bölümde ise çarpımsal hiperhalkalarda 2-yutan δ-asalımsı4. bölümde klasik cebirde tanımlanmış olan δ-asalımsı ideal tanımının Krasner hiperhalkasında sağlanıp sağlanmadığını gözlemledik ayrıca δ-asalımsı idealin sağladığı özelliklerin hiperyapılarda sağlanıp sağlanmadığını araştırdık. 5. bölümde ise çarpımsal hiperhalkalarda 2-yutan δ-asalımsı hiperideal tanımını araştırdık ve çeşitli örnekler vermeye çalıştık. 6. bölümde ise değişmeli cebirde tanımlanan düzgün asalımsı ideal, Mori güçlü asalımsı ideal ve Noether güçlü asalımsı ideal tanımlarının çarpımsal hiperhalkalarda hangi koşullarda sağlandığını gösterdik ve aralarındaki ilişkileri inceledik.Tezimizde 3. ve 4. bölümlerde Krasner hiperhalkası, 5. ve 6. bölümlerde ise çarpımsal hiperhalka kullanılmıştır.

1.3 Hipotez

Krasner hiperhalkasında tanımlanmamış olan 2-yutan hiperideali tanımladık ve sağladığı özellikleri araştırdık. Yine Krasner hiperhalkasında δ fonksiyonunu tanımlayıp δ-asalımsı hiperideali ve sağladığı özellikleri inceledik. Çarpımsal hiperhalka için ise 2-yutan δ-asalımsı hiperideal, düzgün asalımsı hiperideal, Mori güçlü asalımsı hiperideal ve Noether güçlü asalımsı hiperideal tanımlarını verip çeşitli özelliklerini araştırdık.

2
TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Halka İle İlgili Genel Tanımlar ve Özellikleri

Çalışmalarımızda kullanılan R halka ve hiperhalka yapısı birimli ve değişmeli olarak kabul edilmiştir.

Tanım 2.1. $R \neq \emptyset$ kümesi üzerinde tanımlı iki ikili işlem " +" ve "." olsun. $(R, +, .)$ cebirsel yapısı eğer aşağıdaki koşulları sağlarsa halka olarak adlandırılır.
(1) $(R, +)$ bir değişmeli gruptur.
(2) "." işleminin R de birleşme özelliği vardır.
(3) "." işleminin "+" işlemi üzerinde sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır:
$\forall a, b, c \in R$ için, $a(b + c) = ab + ac$ ve $(a + b)c = ac + bc$ [23].
Halkanın "+" işlemine göre etkisiz elemanına halkanın sıfır elemanı denir ve 0_R ile gösterilir. Halkanın "." işlemine göre etkisiz elemanı olmayabilir. Eğer ikinci işleme göre de etkisiz elemanı varsa bu elemana halkanın birim elemanı denir ve 1_R ile gösterilir. Böyle bir halkaya da birimli halka denir. Ayrıca halka ikinci işleme göre değişme özelliğine sahip ise halkaya değişmeli halka denir [23] .

Örnek 2.1. *$\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi, $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi birer halkadır [23] .*

Tanım 2.2. R bir halka ve $\emptyset \neq K \subseteq R$ olsun. R deki işlemlere göre K alt kümesi de bir halka ise K ye R halkasının bir alt halkası denir [23].

Örnek 2.2. *$\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası $\mathbb{R}$ reel sayılar halkasının bir alt halkasıdır. [23]*

Önerme 2.1. *R bir halka ve $\emptyset \neq K \subseteq R$ olsun. K nin R nin bir alt halkası olması için gerek ve yeter koşul $\forall a, b \in K$ için, $a - b \in K$ ve $ab \in K$ olmasıdır [23].*

Tanım 2.3. R bir halka ve $\emptyset \neq I \subset R$ olsun.
(1) $\forall a, b \in I$ için; $a - b \in I$ ve
(2) $\forall a \in I$ ve $r \in R$ için; $ra \in I (ar \in I)$ ise I ya R halkasının bir sol(sağ) ideali denir.
Hem sol, hem de sağ ideale iki taraflı ideal veya kısaca ideal denir [23].

Örnek 2.3. *$\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasında $n\mathbb{Z}$ bir idealdir [24].*

Tanım 2.4. A, R halkasının bir alt kümesi olsun. R nin A kümesini kapsayan bütün ideallerinin kesişimine A nın ürettiği ideal denir ve (A) ile gösterilir. Eğer $A = a$ tek elemanlı bir küme ise A nın ürettiği ideale temel ideal denir ve (a) ile gösterilir [23].

Önerme 2.2. *R halkasının bir I idealine göre tanımlanan denklik sınıfları arasında;*
$(a+I) \oplus (b+I) = (a+b)+I$, $(a+I) \odot (b+I) = (ab)+I$ ile tanımlanan bir $\oplus$ ve $\odot$ işlemlerine göre R/I bir halkadır. Bu şekilde tanımlanan halkaya R nin I hiperidealine göre bölüm halkası denir [23].

Tanım 2.5. R ve S iki halka ve $f : R \longrightarrow S$ bir fonksiyon olsun. $\forall a, b \in R$ için;
(1) $f(a+b) = f(a) + f(b)$,
(2) $f(ab) = f(a)f(b)$
koşullarını sağlıyorsa f'e bir halka homomorfizması denir [23].

Tanım 2.6. Bir homomorfizma birebir ise monomorfizma, örten homomorfizma ise epimorfizma ve hem birebir hem de örten homomorfizma ise izomorfizma denir [25].

Önerme 2.3. *$f : R \longrightarrow S$ fonksiyonu bir halka homomorfizması olsun.*
(1) R nin her H alt halkası için, $f(H)$ da S nin bir alt halkasıdır.
(2) S nin her K alt halkası için, $f^{-1}(K)$ da R nin bir alt halkasıdır [25].

Önerme 2.4. *$f : R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizması olsun. J, S nin bir ideali ise $f^{-1}(J) = \{r \in R : f(r) \in J\}$ ters görüntü kümesi de R nin bir idealidir [23].*

Teorem 2.1. *I, R halkasının bir ideali olsun. $f : R \longrightarrow R/I$, $f(r) = r + I$ ile tanımlı fonksiyon bir örten homomorfizmadır. f' e bir doğal homomorfizma denir [23].*

Tanım 2.7. R bir halka olsun. Sonlu sayıdaki $I_1, I_2, ..., I_n$ de R nin idealleri olsun. İdeallerin toplamı
$I_1+I_2+...+I_n = \{a_1 + a_2 + ... + a_n : a_i \in I_i\}$ şeklinde tanımlanır. Özel olarak iki idealin toplamı $I + J = \{a + b : a \in I, b \in J\}$ şeklinde tanımlanır [23].

Tanım 2.8. R bir halka ve I, J de R nin iki ideali olsun. Bu ideallerin çarpımı $IJ = \{\Sigma a_i b_i : a_i \in I, b_i \in J\}$ şeklinde tanımlıdır [23].

Tanım 2.9. R bir halka, I da R nin bir ideali olsun. R de modulo I ya göre tüm kalan sınıflarının kümesini R/I ile göstereceğiz. $R/I = \{a + I : a \in R\}$ şeklinde tanımlanır. [25].

Tanım 2.10. $f : R \longrightarrow S$ fonksiyonu bir halka homomorfizması olsun. f nin çekirdeği, çek$f = \{a \in R : f(a) = 0\}$ şeklinde tanımlanır [24].

Teorem 2.2. *$f : R \longrightarrow S$ ye bir örten halka homomorfizması ise $R/$ çek$f \cong Im(f) = f(R) = S$ dir [23].*

Teorem 2.3. *R bir halka ve I da R nin bir ideali olsun. K de bir alt halkası ise $K+I$, R nin bir alt halkası ve $K \cap I$ da K nin bir idealidir. Ayrıca $K+I/I \cong S/K \cap I$ dır [23].*

Teorem 2.4. *R bir halka olsun. I ve J de R nin idealleri ve $I \subseteq J$ olsun. Bu durumda J/I, R/I nın ideali ve $(R/I)/(J/I) \cong R/J$ dır [23].*

Tanım 2.11. R bir halka ve P de R halkasının öz ideali olsun. $a, b \in R$ için; $ab \in P \Rightarrow a \in P$ veya $b \in P$ gerektirmesi doğru ise P ye bir asal ideal denir [24].

Örnek 2.4. *$\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasında $0, 2\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z}, 7\mathbb{Z}$ birer asal idealdir [24].*

Tanım 2.12. R bir halka olsun. R nin I ve J idealleri için kolon tanımı $(I : J) = \{a \in R : aJ \subseteq I\}$ şeklindedir [23].

Tanım 2.13. R bir halka ve I da R nin bir ideali olsun. I nın radikali $\sqrt{I} = \{r \in R : r^n \in I, n \in \mathbb{N}\}$ şeklindedir [24].

Tanım 2.14. R bir halka ve Q da R halkasının bir öz ideali olsun. $a, b \in R$ için; $ab \in Q$ iken $a \in Q$ veya pozitif bir n tamsayısı için $b^n \in Q$ ise Q idealine asalımsı ideal denir [24].

Örnek 2.5. *Her asal ideal bir asalımsı idealdir [23].*

Tanım 2.15. R halkasının Q öz ideali ve P asal ideali için; eğer $\sqrt{Q} = P$ ise Q ya R nin bir P asalımsı ideali denir [24].

2.2 Düzgün Asalımsı İdealler ve Özellikleri

Tanım 2.16. R bir halka ve Q da R nin bir öz ideali olsun. $r, s \in R$ için; $rs \in Q$ ve $r \notin Q$ iken pozitif bir n tamsayısı içi $s^n \in Q$ ise Q ya düzgün asalımsı ideal denir [20].

Tanım 2.17. R bir halka ve Q da R halkasının P-asalımsı bir ideali olsun.
(a) Pozitif bir n tamsayısı için; $P^n \subseteq Q$ şartı sağlanırsa Q ya R halkasının bir Noether güçlü asalımsı ideali denir. $P^N \subseteq Q$ şartını sağlayan en küçük tamsayıya Q nun üssü denir ve $e_R(Q) = N$ şeklinde gösterilir.
(b) $rP \subseteq Q$ olacak şekilde $r \in R - Q$ varsa Q ya Mori güçlü asalımsı ideal denir.
Noether güçlü asalımsı ideal Mori güçlü asalımsı idealdir. Q, R nin bir Noether güçlü asalımsı ideali olsun. Ayrıca $e_R(Q) = N$ olsun. Bir $r \in P^{N-1}$ seçelim. Buradan $rP \subseteq P^N \subseteq Q$ ve böylece Q, R nin bir Mori güçlü asalımsı idealidir. Fakat Mori güçlü asalımsı ideal Noether güçlü asalımsı ideal omayabilir [20].

Örnek 2.6. *K bir cisim olsun. $X = \{X_1, X_2, ...\}$, K üzerinde bağımsızlardan oluşan bir küme olsun. $Q = (\{X_i^2\}_{i=1}^{\infty}, \{X_1 X_i\}_{i=2}^{\infty})K[X]$ bir $P = XK[X]$ asalımsı idealdir. X_1, $X_1 P \subseteq Q$ şartını sağlayan bir elemandır ve $X_1 \in K[X] - Q$ dır [20].*

Önerme 2.5. *Q, R halkasının bir Noether güçlü P asalımsı ideali olsun. O zaman Q, R nin bir düzgün P asalımsı idealidir [20].*

İspat. Q, R nin bir Noether güçlü P asalımsı ideali olsun. $r,s \in R$ iken $rs \in Q$ ve $r \notin Q$ olduğunu varsayalım. O zaman $s \in P$ dir [20]. ■

Sonuç 2.4.1. *R bir halka ve P de R nin asal ideali olsun. Eğer P^n , R nin bir asalımsı ideali ise aynı zamanda düzgün asalımsı idealidir [20].*

Düzgün asalımsı olan bir ideal Mori güçlü asalımsı ve Noether güçlü asalımsı ideal olmayabilir [20].

Örnek 2.7. *R karakteristiği 2 olan bir halka olsun. $T = R[X]$ olsun öyle ki $X = \{X_1, X_2, X_3, ...\}$ kümesi R üzerinde bağimsızların oluşturduğu bir küme olsun. $Q = (\{X_i^2\}_{i=1}^{\infty})T$ olsun. Q, T nin bir $P = (X)T$ asalımsı idealidir. Q , T nin bir düzgün asalımsı idealidir. Fakat $X_{i_1}, X_{i_2} ... X_{i_n} \notin Q$ olduğundan $rP \subseteq Q$ şartını sağlayan $r \in R - Q$ bulunamaz. Dolayısıyla Q, T nin bir Mori güçlü asalımsı ideali değildir [20].*

Önerme 2.6. *R bir halka olsun. O zaman Q, R nin bir düzgün P asalımsı idealidir ancak ve ancak aşağıdaki iki koşul sağlanır:*
(1) Q, R nin bir P asalımsı idealidir ve
(2) Pozitif bir n tamsayısı vardır öyle ki $P = \{r \in R : r^n \in Q\}$dir. Dahası, $ord(Q) = N$ dir ancak ve ancak (2) bu koşulu sağlayan en küçük pozitif tamsayıdır [20].

İspat. ($\Rightarrow$): Q, mertebesi N olan bir düzgün P asalımsı ideal olsun. (1) açık bir şekilde sağlanır. $r \in P$ olsun. Pozitif bir m tamsayısı için $r^{m-1}r = r^m \in Q$ fakat $r^{m-1} \notin Q$ dur. Fakat Q nun mertebesi N olduğundan $r^N \in Q$ dur. Böylece (2) sağlanır.
($\Leftarrow$): Koşul (1) ve (2) nin sağlansın. $r,s \in R$ iken; $rs \in Q$ ve $r \notin Q$ olsun. (1) den $s \in P$ dir. (2) den $s^n \in Q$ olacak şekilde pozitif bir n tamsayısı vardır. Böylece sonuca ulaşılır [20]. ■

Önerme 2.7. *Q_1 ve Q_2, R halkasının $Q_1 \subseteq Q_2$ şartını sağlayan iki düzgün P asalımsı ideali olsun. O zaman $ord(Q_1) \geq ord(Q_2)$ dir [20].*

İspat. $ord(Q_1) = m$ ve $ord(Q_2) = n$ olsun. R de $rs \in Q_2$, $r \notin Q_2$, $s^{n-1} \notin Q_2$ ve $s^n \in Q_2$ olacak şekilde $r,s \in R$ vardır. O zaman $s \in P = rad(Q_1)$ yani $s^m \subseteq Q_1 \subseteq Q_2$ dir. Buradan $m > n - 1$ ve böylece $m \geq n$ elde edilir [20].

■

Teorem 2.5. *I bir indeks kümesi ve $\{Q_i\}_{i\in I}$, R nin düzgün P asalımsı ideallerinin bir kümesi olsun öyle ki bir pozitif N tamsayısı için $maks_{i\in I} ord(Q_i) = N$ olsun. O zaman $\cap_{i\in I} Q_i$, R nin mertebesi N olan düzgün P asalımsı bir idealidir [20].*

İspat. $Q = \cap_{i\in I} Q_i$ olsun. Açıkça, $rad(Q) = \cap_{i\in I} rad(Q_i) = P$ ve $P = \left\{r \in R : r^N \in Q\right\}$ dır. $r,s \in R$ için; $rs \in Q$ ve $r \notin Q$ olsun. Buradan bir $k \in I$ vardır öyle ki $rs \in Q_k$ ve $r \notin Q_k$ dır. O zaman $s \in P$ ve böylece $s^N \in Q$ vardır. Buradan Q, mertebesi en fazla N olan bir düzgün P asalımsı idealdir. Şimdi $Q_j \in \{Q_i\}_{i\in I}$ mertebesi N olan bir düzgün P asalımsı ideal olsun. Bir $r \in P$ vardır öyle ki $r^{N-1} \notin Q$ dır. Böylece Q nun mertebesi N dir [20]. ■

Önerme 2.8. *$\phi : R \longrightarrow T$ ye bir halka homomorfizması ve Q, T halkasının bir düzgün P asalımsı ideali olsun. O zaman $\phi^{-1}(Q)$, R nin $\phi^{-1}(P)$ asalımsı idealidir [20].*

İspat. Q nun T nin bir P asalımsı ideali olduğu açıktır. O zaman $\phi^{-1}(Q)$, R halkasının bir $\phi^{-1}(P)$ asalımsı idealidir. Dahası eğer Q nun T halkasının bir P asalımsı ideali ve $N = ord_T(Q)$ ise Önerme 2.6. dan $P = \left\{t \in T : t^N \in Q\right\}$ olduğunu ortaya koyar. Böylece $\phi^{-1}(P) = \left\{r \in R : r^N \in \phi^{-1}(Q)\right\}$ ve $\phi^{-1}(Q)$, R nin $\phi^{-1}(P)$ asalımsı idealidir [20]. ■

Sonuç 2.5.1. *R bir halka olsun. I, R halkasının bir ideali ve Q da R halkasının I yı kapsayan bir ideali olsun. O zaman Q, R nin bir düzgün P asalımsı idealidir ancak ve ancak Q/I, R/I nın bir P/I asalımsı idealidir [20].*

İspat. Varsayalım ki Q/I, R/I nın bir P/I asalımsı ideali olsun. Önerme 2.8. den $r + I \in P/I$ vardır öyle ki $(r + I)^{N-1} \notin Q/I$ dır. Böylece $r \in P$ dir öyle ki $r^{N-1} \notin Q$ dur. Karşıtı açıktır [20].

■

2.3 2-yutan İdealler ve Özellikleri

Tanım 2.18. R bir halka ve I da R nin bir ideali olsun. $x, y, z \in R$ için $xyz \in I$ iken $xy \in I$ ya da $xz \in I$ ya da $yz \in I$ ise I ya R nin 2-yutan ideali denir [19].

Örnek 2.8. *Tüm asal idealler 2-yutan ideallerdir [19].*

Teorem 2.6. *R bir halka ve I da R nin bir ideali olsun .O zaman $rad(I)$, R nin bir 2-yutan idealidir ve her $x \in rad(I)$ için $x^2 \in I$ dır [19].*

Lemma 2.7. *R bir halka ve I da R nin bir ideali olsun. P de R nin $I \subseteq P$ şartını sağlayan asal ideali olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:*
(1) P, I nın bir minimal asal idealidir.
(2) Her $x \in P$ için $yx^n \in I$ olacak şekilde bir $y \in R - P$ ve pozitif bir n tamsayısı vardır [26].

Teorem 2.8. *R bir halka ve I da R halkasının bir 2-yutan ideali olsun. R nin I üzerinde minimal olan en fazla iki asal ideali vardır [19].*

Teorem 2.9. *R bir halka ve I da R nin bir 2-yutan ideali olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:*
(1) $rad(I) = P$, R halkasının bir asal idealidir öyle ki $P^2 \subseteq I$ dır.
(2) $rad(I) = P_1 \cap P_2$ ise $P_1P_2 \subseteq I$ ve $rad(I)^2 \subseteq I$ dir. Burada P_1 ve P_2, R nin I üzerindeki ayrık minimal asal idealleridir [19].

Teorem 2.10. *R bir halka ve I da R halkasının bir 2-yutan ideali olsun öyle ki $rad(I) = P$, R halkasının bir asal ideali ve $I \neq P$ olsun. Her $x \in P - I$ için; $B_x = \{y \in R : yx \in I\}$ olsun. O zaman B_x, R nin P yi içeren bir asal idealidir [19].*

Teorem 2.11. *R bir halka ve I da R halkasının bir 2-yutan ideali olsun öyle ki $I \neq rad(I) = P_1 \cap P_2$ olsun. Burada P_1 ve P_2, R nin I üzerindeki sıfırdan farklı ayrık asal idealleridir. Bu durumda $\forall x \in rad(I) - I$ için; $B_x = \{y \in R : xy \in I\}$ R nin P_1 ve P_2 yi içeren asal idealidir [19].*

Teorem 2.12. *R bir halka ve I da R halkasının bir ideali olsun öyle ki $I \neq rad(I)$ ve $rad(I)$, R nin bir asal ideali olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:*
(1) I, R halkasının bir 2-yutan idealidir.
(2) Her $x \in rad(I) - I$ için; $B_x = \{y \in R : yx \in I\}$, R nin bir asal idealidir [19].

Teorem 2.13. *R bir halka ve I da R nin bir ideali olsun öyle ki $I \neq rad(I) = P_1 \cap P_2$ şartı sağlansın. Burada P_1 ve P_2, R nin I üzerindeki minimal olan asal ayrık idealleridir. O zaman aşağıdakiler denktir:*
(1) I, R nin bir 2-yutan idealidir.
(2) Her $x \in rad(I) - I$ için; $P_1P_2 \subseteq I$ ve $B_x = \{y \in R : yx \in I\}$ R nin bir asal idealidir.
(3) Her $x \in (P_1 \cup P_2) - I$ için; $B_x = \{y \in R : yx \in I\}$ R nin bir asal idealidir [19].

Teorem 2.14. *R bir halka ve I da R halkasının bir ideali olsun öyle ki $I \neq rad(I)$ şartı sağlansın. Her $x \in rad(I) - I$ için; $B_x = \{y \in R : yx \in I\}$ olsun. O zaman:*
(1) $x \in rad(I) - I$ ve $y \in R$ iken $yx \notin I$ ise $B_{yx} = B_x$ dir.
(2) $x, y \in rad(I) - I$ ve $B_x \subset B_y$ olsun. Her $f, d \in R$ ve $fd \notin B_x$ iken $B_{fx+dy} = B_x$ dir [19].

Teorem 2.15. *R bir halka ve I da R halkasının sıfırdan farklı öz ideali olsun. Aşağıdakiler denktir:*

(1) I, R halkasının 2-yutan idealidir.
(2) R halkasının I_1, I_2, I_3 idealleri için eğer $I_1I_2I_3 \subseteq I$ ise $I_1I_2 \subseteq I$ ya da $I_1I_3 \subseteq I$ ya da $I_2I_3 \subseteq I$ dır [19].

2.4 δ-Asalımsı İdealler

Tanım 2.19. δ, R halkasının her I idealini aynı halka üzerinden başka ideallere götüren bir fonksiyon olsun. Eğer aşağıdaki koşulları sağlarsa δ fonksiyonuna bir genişleme fonksiyonu denir:
(1) $I \subseteq \delta(I)$,
(2) P ve Q idealleri için; $P \subseteq Q$ iken $\delta(P) \subseteq \delta(Q)$ [18].

Örnek 2.9. *$\delta_0(I) = I$ birim fonksiyonu bir ideal genişlemesi fonksiyonudur [18].*

Tanım 2.20. R bir halka ve I da R halkasının bir ideali olsun. δ genişleme fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa δ-asalımsı fonksiyon denir:
$\forall a, b \in R$ için; $ab \in I$ ve $a \notin I$ iken $b \in \delta(I)$ dır [18].

Örnek 2.10. *Bir I ideali δ_0-asalımsıdır ancak ve ancak asal idealdir [18].*

Lemma 2.16. *Bir P asal ideali δ-asalımsıdır ancak ve ancak I ve J idealleri için eğer $IJ \subseteq P$ ve $I \nsubseteq P$ ise $J \subseteq \delta(P)$ dir [18].*

Teorem 2.17. *δ bir genişleme fonksiyonu olsun.*
(1) Eğer bir I ideali ve P δ-asalımsı ideali için; $I \nsubseteq \delta(P)$ ise $P : I = P$ dir.
(2) R halkasının bir N alt kümesi ve bir P δ-asalımsı ideali için; $P : N$ aynı zamanda δ-asalımsıdır [18].

Teorem 2.18. *δ bir ideal genişleme fonksiyonu olsun. Ayrıca her I ideali için $\delta(I) \leq \delta_1(I)$ olsun. O zaman herhangi bir δ-asalımsı P ideali için $\delta(P) = \delta_1(P)$ dir [18].*

Tanım 2.21. Bir δ ideal genişlemesi eğer her $I, J \in Id(R)$ için $\delta(I \cap J) = \delta(I) \cap \delta(J)$ ise kesişimi koruyan fonksiyon denir [18].

Tanım 2.22. $f : R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizması olsun. Eğer $\delta(f^{-1}(I)) = f^{-1}(\delta(I))$ ise δ ya global fonksiyon denir [18].

Örnek 2.11. *δ_0 hem kesişimi koruyan hem de global bir genişleme fonksiyonudur [18].*

Lemma 2.19. *δ kesişimi koruyan bir ideal genişleme fonksiyonu olsun. Eğer $Q_1, Q_2, ..., Q_n$, R nin δ-asalımsı idealleri ve her i için $P = \delta(Q_i)$ ise $Q = \cap_{i=1}^{n} Q_i$ de δ-asalımsıdır [18].*

Tanım 2.23. R halkasının bir a elemanı eğer $a \in \delta(\{0\})$ ise δ a ya δ nilpotent denir [18].

Örnek 2.12. *δ_0' ın nilpotent elemanı sıfırdır [18].*

Teorem 2.20. *δ global bir genişleme fonksiyonu olsun. R nin bir I ideali δ-asalımsıdır ancak ve ancak R/I nın her sıfır böleni δ nilpotenttir [18].*

Lemma 2.21. *$f : R \longrightarrow S$ bir halka homomorfizması, δ global bir genişleme fonksiyonu ise S nin herhangi bir δ-asalımsı I ideali için $f^{-1}(I)$, R nin δ-asalımsı idealidir [18].*

Önerme 2.9. *$f : R \longrightarrow S$ fonksiyonu örten bir halka homomorfizması olsun. R nin çek$f$'i kapsayan bir I ideali δ-asalımsıdır ancak ve ancak $f(I)$, S nin bir δ-asalımsı idealidir [18].*

2.5 2-yutan δ-Asalımsı İdealler

Tanım 2.24. R bir halka, δ bir ideal genişleme fonksiyonu ve I da R nin bir öz ideali olsun. Her $a, b, c \in R$ için; $abc \in I$, $ab \notin I$ ve $ac \notin \delta(I)$ iken $bc \in \delta(I)$ ise I ya R nin 2-yutan δ-asalımsı ideali denir [21].

Örnek 2.13. *R bir halka ve I da R nin bir ideali olsun.*
I, 2-yutan δ_0-asalımsı idealdir ancak ve ancak I, 2-yutan idealdir.
I, 2-yutan δ_1-asalımsı idealdir ancak ve ancak I, 2-yutan asalımsı idealdir [21].

Tanım 2.25. R bir halka, I da R nin bir ideali ve δ bir ideal genişleme fonksiyonu olsun. R nin I_1, I_2, I_3 idealleri $I_1I_2I_3 \subseteq I$, $I_1I_3 \nsubseteq I$ ve $I_2I_3 \nsubseteq \delta(I)$ iken $I_1I_2 \subseteq \delta(I)$ ise I ya R nin 2-yutan δ-asalımsı ideali denir [21].

Lemma 2.22. *R bir halka ve I da R nin bir 2-yutan δ-asalımsı ideali olsun. R nin bir J ideali ve $a, b \in R$ için; $abJ \subseteq I$ olsun. Eğer $ab \notin I$ ise $aJ \subseteq \delta(I)$ ya da $bJ \subseteq \delta(I)$ dır [21].*

2.6 Krasner Hiperhalkası ve Temel Özellikleri

Tanım 2.26. H boştan farklı bir küme ve $\circ : H \times H \longrightarrow P^*(H)$ bir hiperişlem olsun. $(H, \circ)$ bir hipergrupoid olarak adlandırılır.
H nin iki A ve B alt kümesi ve $x \in H$ için;
$A \circ B = \bigcup_{a \in A, b \in B} a \circ b$, $A \circ x = A \circ \{x\}$ ve $x \circ B = \{x\} \circ B$ şeklinde tanımlanır [22].

Tanım 2.27. Her $a, b, c \in H$ için; $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ ise $(H, \circ)$ hipergrupoidi yarıhipergrup olarak adlandırılır. Burada birleşim şu anlama gelmektedir:
$\bigcup_{u \in a \circ b} u \circ c = \bigcup_{v \in b \circ c} a \circ v$ [22].

Tanım 2.28. $(H, \circ)$ hipergrupoidi her $a \in H$ için; $a \circ H = H \circ a = H$ şartını sağlarsa H ye hemen hemen hipergrup denir [22].

Tanım 2.29. $(H, \circ)$ hipergrupoidi hem yarıhipergrup hem de hemen hemen hipergrup özelliklerini sağlarsa hipergrup olarak adlandırılır [22].

Örnek 2.14. *H boştan farklı bir küme olsun. Her $x, y \in H$ için; hiperişlemi $x \circ y = H$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $(H, \circ)$ bir hipergruptur [22].*

Örnek 2.15. *G bir grup olsun. Her $x, y \in G$ için; hiperişlemi $x \circ y = (x, y)$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $(G, \circ)$ bir hipergruptur [22].*

Tanım 2.30. $(H, .)$ bir yarıhipergrup olsun. H nin boş kümeden farklı K alt kümesi alt yarıhipergruptur.
Diğer bir deyişle, $(H, .)$ nin boş kümeden farklı bir alt kümesi eğer $K \circ K \subseteq K$ şartını sağlıyorsa K bir alt yarıhipergruptur [22].

Tanım 2.31. $(H, \circ)$ bir hipergrup olsun. H nin boş kümeden farklı bir K alt kümesi eğer bir hipergrup ise alt hipergrup olarak adlandırılır.
Böylece $(H, \circ)$ nin boş kümeden farklı bir alt kümesi $\forall a \in K$ için $a \circ K = K \circ a = K$ şartını sağlarsa bir alt hipergruptur denir. Birçok alt hipergrup çeşidi vardır. Bunlar kapalı, terslenebilir, ultrakapalı, eşlenebilir alt hipergruplardır [22].

Tanım 2.32. $(H, \circ)$ bir hipergrup ve $(K, \circ)$ da H nin bir alt hipergrubu olsun.

Her $k_1, k_2 \in K$ ve $x \in H$ için; $k_1 \in x \circ k_2$ veya $k_1 \in k_2 \circ x$ ise K kapalı alt hipergruptur.

Her $x, y \in H$ için; eğer $x \in K \circ y$ veya $x \in y \circ K$ iken sırasıyla $y \in K \circ x$ veya $y \in K \circ x$ ise K ya tersenebilirdir denir.

Her $x \in H$ için; $K \circ x \cap (H\ K) \circ x = \emptyset$ veya $x \circ K \cap x \circ (H\ K) = \emptyset$ ise K ya ultrakapalı alt hipergrup denir.

Her $x \in H$ için; $x' \circ x \subseteq K$ olacak şekilde $x' \in H$ varsa K ya eşlenebilir alt hipergrup denir [22].

Tanım 2.33. H hipergrubu aşağıdaki koşulları sağlarsa kanonik hipergrup olarak adlandırılır:
(1) Değişmeli,
(2) $\exists e \in H$ ve $\forall x \in H$ için; $x \circ e = e \circ x = x$,
(3) Her elemanın tek bir tersi vardır yani her $x \in H$ için, bir $x^{-1} \in H$ vardır öyle ki $e \in x \circ x^{-1} \cap x^{-1} \circ x$,
(4) Eğer $x \in y \circ z$ ise $z \in y^{-1} \circ x$ ve $y \in x \circ z^{-1}$ dir [22].

Örnek 2.16. *$C(n) = \{e_0, e_1, e_2, ..., e_{k(n)}\}$ olsun. Eğer n çift sayı ise $k(n) = \dfrac{n}{2}$, tek sayı ise $k(n) = \dfrac{(n-1)}{2}$ ve her $e_s, e_t \in C(n)$ için hiperişlem $e_s \circ e_t = \{e_p, e_v\}$ şeklinde tanımlansın.*

Burada $p = min\{s+t, n-(s+t)\}$, $v = |s-t|$ dir. Bu durumda $(C(n), \circ)$ kanonik bir hipergruptur [22].

Tanım 2.34. $(H_1, \circ)$ ve $(H_2, *)$ iki hipergrupoid olsun. $f : H_1 \longrightarrow H_2$ bir fonksiyon olsun.
Her $x, y \in H$ için; $f(x \circ y) \subseteq f(x) * f(y)$ ise f'e bir homomorfizma denir.
Her $x, y \in H$ için; $f(x \circ y) = f(x) * f(y)$ ise f'e bir iyi homomorfizma denir [22].

Tanım 2.35. Bir $(R, +, .)$ hiperhalkası aşağıdaki koşulları sağlayan cebirsel bir yapıdır:

(1) $(R, +)$ bir kanonik hipergruptur yani;

(i) Her $x, y, z \in R$ için; $x + (y + z) = (x + y) + z$,

(ii) Her $x, y \in R$ için; $x + y = y + x$,

(iii) Her $x \in R$ için; $0 \in R$ vardır öyle ki $0 + x = \{x\}$,

(iv) Her $x \in R$ için; tek bir $x^{'} \in R$ vardır öyle ki $0 \in x + x^{'}$,

(v) $z \in x + y$ olması $y \in -x + z$ ve $x \in z - y$ olmasını sağlar,

(2) $(R, .)$ sıfır yutan elemanı ile birlikte bir yarı gruptur öyle ki $x.0 = 0.x = 0$,

(3) Çarpma işleminin toplama işlemi üzerinde dağılma özelliği vardır [22].

Örnek 2.17. *Aşağıdaki hipertoplam ve çarpıma göre $(R, +, .)$ bir Krasner hiperhalkasıdır [27].*

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	R
2	2	R	2

ve

.	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	1	2

Tanım 2.36. $(R, +, .)$ bir hiperhalka ve A da R nin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. Eğer $(A, +, .)$ kendisi bir hiperhalka ise A ya R nin bir alt hiperhalkası denir [22].

Tanım 2.37. R bir hiperhalka ve A da R nin bir alt hiperhalkası olsun. $\forall r \in R$ ve $a, b \in A$ için; eğer $a - b \subseteq A$ ve $r.a \in A$ $(a.r \in A)$ şartını sağlarsa A ya sol(sağ) hiperideal denir. A hem sağ hem de sol hiperideal ise hiperidealdir denir [22].

Lemma 2.23. *R hiperhalkasının boş kümeden farklı bir A alt kümesi hiperidealdir ancak ve ancak*

(1) $a, b \in A$ iken $a - b \subseteq A$,

(2) $a \in A$ ve $r \in R$ iken $r.a \in A$ dir [22].

Tanım 2.38. R_1 ve R_2 iki hiperhalka olsun. Her $a, b \in R_1$ için, R_1 den R_2 ye giden φ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa iyi (güçlü) homomorfizma denir:
(1) $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$,
(2) $\varphi(a.b) = \varphi(a).\varphi(b)$,
(3) $\varphi(0) = 0$ [22].

Tanım 2.39. $f : R \longrightarrow S$ fonksiyonu bir hiperhalka homomorfizması olsun. f nin çekirdeği, çekf ile gösterilir ve şu şekilde tanımlanır; ç$ekf = \{x \in R : f(x) = 0\}$ [22].

Tanım 2.40. R hiperhalkasının bir P hiperideali, $a.b \in P$ iken $a \in P$ ya da $b \in P$ ise P hiperidealine asal hiperideal denir [22].

Örnek 2.18. *$H = \{0, 1, a\}$ olsun. H aşağıdaki hipertoplam "+" ve çarpmaya "." göre bir hiperhalkadır.*

+	0	1	a
0	0	1	a
1	1	H	1
a	a	1	B

ve

.	0	1	a
0	0	0	0
1	0	1	a
a	0	a	0

Bu hiperhalkada $B = \{0, a\}$ bir asal hiperidealdir. Fakat $\{0\}$ bir asal hiperideal değildir [27].

Tanım 2.41. I, R hiperhalkasının bir hiperideali olsun. I nın radikali $\sqrt{I}$ şeklinde gösterilir ve $rad(I)$= $\{x|x^n \in I$ bazı n$\in \mathbb{N}$için $\}$ şeklinde tanımlanır [22].

Tanım 2.42. R bir hiperhalka, I ve P de R nin hiperidealleri olsun. $a.b \in P$ iken $a \in P$ ya da $b \in rad(I)$ ise I hiperidealine asalımsı hiperideal denir [22].

Hiperyapıların birçok alanda uygulaması olduğunu söylemiştik. Aşağıda verdiğimiz örnek kimya alanındaki uygulamasına bir örnektir.

Örnek 2.19. *Aşağıdaki tablo bir orantısal(comproportion) tepkime ile ilgili sonuçları göstermektedir. Bu tepkime tüm elemanları aynı olan fakat oksitlenme numarası farklı olan kimsayal bir reaksiyondur.*
Kalay elementi için tüm olası ihtimaller aşağıdaki gibidir:

+	Sn	Sn^{2+}	Sn^{4+}
Sn	Sn	Sn, Sn^{2+}	Sn^{2+}
Sn^{2+}	Sn, Sn^{2+}	S^{2+}	Sn^{2+}, Sn^{4+}
Sn^{4+}	Sn^{2+}	Sn^{2+}, Sn^{4+}	Sn^{4+}

$Sn := a, Sn^{2+} := b, Sn^{4+} := c$ *olsun.*

$+$	a	b	c
a	a	$\{a,b\}$	b
b	$\{a,b\}$	b	$\{b,c\}$
c	b	$\{b,c\}$	c

tablosu elde edilir [15].

2.7 Çarpımsal Hiperhalka ve Temel Özellikleri

Tanım 2.43. Aşağıdaki koşulları sağlayan $(R,+,.)$ cebirsel yapısı çarpımsal bir hiperhalkadır.
(1) $(R,+)$ değişmeli bir gruptur.
(2) $(R,.)$ bir yarı hipergruptur.
(3) Her $a,b,c \in R$ için; $a.(b+c) \subseteq a.b + a.c$ ve $(b+c).a \subseteq b.a + c.a$;
(4) Her $a,b \in R$ için; $a.(-b) = (-a).b = -(a.b)$ dir. Eğer (3) deki ifadede eşitlik varsa bu hiperhalkaya güçlü dağılımlı çarpımsal hiperhalka denir [22].

Örnek 2.20. $(R,+,.)$ *bir halka ve* I *da* R *nin bir ideali olsun. Her* $a,b \in R$ *için hiperişlem* $a \circ b = ab + I$ *şeklinde tanımlansın.* $(R,+,\circ)$ *güçlü dağılımlı çarpımsal bir hiperhalkadır.* $(R,+)$ *değişmeli bir gruptur. Her* $a,b,c \in R$ *için* $a \circ (b \circ c) = a \circ (bc + I) = \cup_{h \in I} a \circ (bc + h) = \cup_{h \in I} a(bc + h) + I = abc + I$ *ve benzer şekilde* $(a \circ b) \circ c = abc + I$ *elde edilir. Her* $a,b,c \in R$ *için* $a \circ (b + c) = a(b + c) + I = ab + ac + I = a \circ b + a \circ c$ *ve benzer şekilde* $(b + c) \circ a = b \circ a + c \circ a$ *elde edilir. Son olarak her* $a,b \in R$ *için;* $a \circ (-b) = a(-b) + I = (-a) \circ b$ *ve* $-(a \circ b) = (-ab) + I = (-a)b + I = a \circ (-b)$ *bulunur [22].*

Örnek 2.21. $(R,+,.)$ *sıfırdan farklı bir halka olsun. Her* $a,b \in R$ *için; hiperişlemi* $a \circ b = \{ab, 2ab, 3ab, ...\}$ *şeklinde tanımlayalım.* $(R,+,\circ)$ *güçlü dağılımlı olmayan çarpımsal bir hiperhalkadır [22].*

Tanım 2.44. R hiperhalkasının boştan farklı bir I alt kümesi eğer aşağıdaki koşulları sağlarsa bir hiperideal olarak adlandırılır:
(1) Herhangi $x,y \in I$ için; $x - y \in I$;
(2) Her $r \in R$ için; $r.x \subseteq I$ [22].

Örnek 2.22. *(Z,+,.) tamsayılar halkasında* $A = \{2,4\}$ *olsun. Bu durumda hiperçarpım* $x \circ y = \{2xy, 4xy\}$ *şeklindedir.* $I = 6\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_A$ *nın bir hiperidealidir [28].*

Tanım 2.45. Eğer A ve B, R hiperhalkasının hiperidealleri ise $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ ve $A.B = \cup\{\sum_{i=1}^{n} a_i.b_i : a_i \in A, b_i \in B\}$ şeklinde tanımlanır. Bu kümeler de hiperideallerdir [22].

Tanım 2.46. R hiperhalkasının temel hiperideali $\langle a\rangle = \{p.a : p \in \mathbb{Z}\} + \{\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{j=1}^{m} y_j + \sum_{k=1}^{l} z_k : \forall i,j,k, \exists r_i, s_j, u_k \in R \mid x_i \in r_i \circ a, y_i \in a \circ s_j, z_k \in t_k \circ a \circ 0 \circ u_k\}$ şeklinde tanımlanır [22].

Tanım 2.47. P, R hiperhalkasının bir öz hiperideali olsun. Herhangi $x, y \in R$ için; $xy \subseteq P$ iken $x \in P$ veya $y \in P$ ise P ye R nin asal hiperideali denir [22].

Tanım 2.48. Q, R hiperhalkasının bir öz hiperideali olsun. Herhangi $x, y \in R$ için; $xy \subseteq Q$ iken $x \in Q$ veya $y \in \sqrt{Q}$ ise Q ya R nin asalımsı hiperideali denir [22].

Örnek 2.23. *$\mathbb{Z}_A$ çarpımsal bir hiperhalka olsun. $A = \{2, 3\}$ olsun. O zaman asal bir tamsayı tarafından üretilen tüm temel idealler asal hiperideallerdir [28].*

Örnek 2.24. *$A = \{14, 21\}$ olsun. $\mathbb{Z}_A$ çarpımsal hiperhalkasında $(7) = \{7n : n \in \mathbb{Z}\}$ bir asal hiperideal değildir. $1 \circ 1 = \{14, 21\} \subseteq (7)$ fakat $1 \notin (7)$ dir [28].*

Örnek 2.25. *Değişmeli çarpımsal bir hiperhalkada tüm asal hiperidealler asalımsı hiperideallerdir. Tüm çift tamsayılar kümesi A kümesi çift tamsayılardan oluştuğunda asalımsı hiperidealdirler fakat asal değildirler [28].*

Önerme 2.10. *$\mathbb{Z}_A$ çarpımsal bir hiperhalka olsun. (p), $\mathbb{Z}_A$ nın bir asal hiperidealidir ancak ve ancak p bir asal tamsayıdır ve $A \nsubseteq (p)$ dir [28].*

Tanım 2.49. I, R hiperhalkasının bir hiperideali olsun. I nın radikali $\sqrt{I}$ şeklinde gösterilir ve $rad(I)$= $\{x | x^n \subseteq I$ bazı n$\in \mathbb{N}$için $\}$ şeklinde tanımlanır [22].

Tanım 2.50. R bir hiperhalka olsun.
$(0) = \{ \sum_i x_i + \sum_j y_j + \sum_k z_k$: tüm toplamlar sonlu ve her i, j, k için $r_i, s_j, t_k, u_k \in R$ öyle ki $x_i \in r_i.0, y_j \in 0.s_j, z_k \in t_k.0.u_k$ $\}$ şeklinde tanımlanır [22].

Tanım 2.51. $(R_1, +, \circ_1)$ ve $(R_2, +, \circ_2)$ iki hiperhalka ve $f : R_1 \longrightarrow R_2$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in R$ için; $f(x+y) = f(x)+f(y)$ ve $f(x \circ_1 y) \subseteq f(x) \circ_2 f(y)$ koşulları sağlanırsa f fonksiyonuna homomorfizma denir. Eğer ikinci koşul için eşitlik sağlanırsa iyi homomorfizma denir [22].

Tanım 2.52. $f : R_1 \longrightarrow R_2$ bir iyi hiperhalka homomorfizması olsun. f nin çekirdeği (0) nin ters görüntüsüdür. Burada $f((0)) \subseteq (0)$ yani $(0) \subseteq çekf$ dir [22].

Tanım 2.53. R bir hiperhalka ve I da R nin bir hiperideali olsun. Eğer C, R nin elemanlarının sonlu çarpımlarının bir sınıfı ise yani $C = \{r_1 r_2 ... r_n : r_i \in R, n \in \mathbb{N}\}$ ve herhangi $A \in C$ için; $A \cap I \neq \emptyset$ iken $A \subseteq I$ ise I hiperidealine bir C-ideal denir [22].

Örnek 2.26. *R bir halka ve I da R nin bir ideali olsun. Hiperçarpım $a \circ b = ab + I$ şeklinde tanımlandığında $(R, +, \circ)$ bir çarpımsal hiperhalkadır. Burada I bir C-idealdir [28].*

Örnek 2.27. *$\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasında hiperçapımı $x \circ y = \{2xy, 4xy\}$ şeklinde tanımladığımızda $(\mathbb{Z}, +, \circ)$ bir çarpımsal hiperhalkadır ve $12\mathbb{Z} = \{12n : n \in N\}$ bir hiperidealdir. Fakat bir C-ideal değildir [28].*

Örnek 2.28. *$(\mathbb{Z}, +, .)$ tamsayılar halkasını düşünelim. Burada hiperçarpım $x \circ y = \{2xy, 3xy\}$ şeklinde tanımlansın. Burada $I = 5\mathbb{Z}$ hiperideali bir C-idealdir [29].*

Tanım 2.54. R çarpımsal bir hiperhalka olsun. R nin elemanlarının sonlu sayıdaki çarpım sınıfı C olsun. $C = \{r_1 r_2 r_3 ... r_n : r_i \in R, i = 1, 2, ..., n\}$. Eğer $A_j \in C$ ve $\cup A_j \cap I \neq \emptyset$ iken $\cup A_j \subseteq I$ ise I ya R nin C birleşik ideali denir ve C_u şeklinde gösterilir [29].

Örnek 2.29. *$(\mathbb{Z}, +, .)$ tamsayılar halkasında hiperçarpımı $x \circ y = \{2xy, 4xy\}$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda R deki tüm elemanların sonlu sayıdaki çarpımları $2\mathbb{Z}$ nin alt kümesidir. Tüm A_j ler için $\{\cup A_j\} \cap I \neq \emptyset$ ve $\cup A_j \subseteq 2\mathbb{Z}$ olduğundan $2\mathbb{Z}$ bir C_u idealdir. Her C_u ideal bir C-idealdir [29].*

Tanım 2.55. R çarpımsal bir hiperhalka ve I da R nin bir hiperideali olsun. $x, y, z \in R$ için $x \circ y \circ z \subseteq I$ iken $x \circ y \subseteq I$ ya da $x \circ z \subseteq I$ ya da $y \circ z \subseteq I$ ise I ya R nin 2-yutan hiperideali denir [29].

Örnek 2.30. *Tüm asal hiperidealler 2-yutan hiperideallerdir.*

3
KRASNER HİPERHALKASINDA 2-YUTAN HİPERİDEALLER

Bu bölümde R bir Krasner hiperhalkasıdır.

Tanım 3.1. R bir hiperhalka ve I da R nin bir hiperideali olsun. Her $a, b, c \in R$ ve $abc \in I$ iken, $ab \in I$ ya da $ac \in I$ ya da $bc \in I$ ise I hiperidealine R nin 2-yutan hiperideali denir [30].

Örnek 3.1. *R bir hiperhalka olsun. R hiperhalkasındaki bir P asal hiperideali 2-yutan hiperidealdir [30].*

Örnek 3.2. *[22] $H = \{0, 1, a\}$ olsun. H aşağıdaki hipertoplam "+" ve çarpmaya "." göre bir hiperhalkadır.*

+	0	1	a
0	0	1	a
1	1	H	1
a	a	1	B

ve

.	0	1	a
0	0	0	0
1	0	1	a
a	0	a	0

$\{0\}$ hiperideali 2-yutan hiperidealdir. Fakat asal hiperideal değildir [30].

Örnek 3.3. *[27] $R = \{0, a, b, c\}$ olsun. R aşağıdaki hipertoplam ve çarpmaya göre bir hiperhalkadır.*

+	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	$\{0, b\}$	$\{a, c\}$	b
b	b	$\{a, c\}$	$\{0, b\}$	a
c	c	b	a	0

ve

.	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	a	b	c
b	0	b	b	0
c	0	c	0	c

$I = \{0, b\}$ hiperideali bir 2-yutan hiperidealdir [30].

3.1 2-yutan Hiperideal İle İlgili Özellikler

Teorem 3.1. *R bir hiperhalka, I da R nin 2-yutan hiperideali olsun. $rad(I)$, R nin 2-yutan hiperidealidir ve her $a \in rad(I)$ için $a^2 \in I$ dır [30].*

İspat. Her $a \in rad(I)$ için; I nın 2-yutan hiperideal olmasından $a^2 \in I$ dır. $a, b, c \in R$ olsun. Ayrıca $abc \in rad(I)$ şartı sağlansın. $(abc)^2 = a^2b^2c^2 \in I$ dır. I, 2-yutan hiperideal olduğundan $(ab)^2 = a^2b^2 \in I$ olsa $ab \in rad(I)$, $(bc)^2 = b^2c^2 \in I$ olsa $bc \in rad(I)$ ve $(ac)^2 = a^2c^2 \in I$ olsa $ac \in rad(I)$ olduğundan $rad(I)$, R nin 2-yutan hiperidealidir [30]. ■

Teorem 3.2. *Varsayalım ki I, R nin 2-yutan hiperideali olsun. O zaman R nin I üzerinde minimal olan en fazla 2 tane asal hiperideali vardır [30].*

İspat. Varsayalım ki $K = \{P_i : P_i, R$ nin I üzerinde minimal asal hiperideali $\}$ ve K nin en az 3 elemanı olsun. $P_1, P_2 \in K$ iki ayrık asal hiperideal olsun. Böylece bir $x_1 \in P_1 - P_2$ ve bir $x_2 \in P_2 - P_1$ vardır. Öncelikle $x_1x_2 \in I$ olduğunu gösterelim. Lemma 2.7. den $m_2 \notin P_1$ ve $m_1 \notin P_2$ vardır öyle ki bazı $a, b \geq 1$ için; $m_2x_1^b \in I$ ve $m_1x_2^a \in I$ dır. $x_1, x_2 \notin P_1 \cap P_2$ ve I, R nin 2-yutan hiperideali olduğundan $m_2x_1 \in I$ ve $m_1x_2 \in I$ elde edilir. $x_1, x_2 \notin P_1 \cap P_2$ ve $m_1x_2 \in I \subseteq P_1 \cap P_2$ ve $m_2x_1 \in I \subseteq P_1 \cap P_2$ olduğundan $m_2 \in P_2 - P_1$ ve $m_1 \in P_1 - P_2$ sonucunu elde ederiz. Buradan $m_1m_2 \notin P_1 \cap P_2$ bulunur. $m_2x_1 \in I$ ve $m_1x_2 \in I$ olduğundan $(m_1 + m_2)x_1x_2 \subseteq I$ olur. $(m_1 + m_2) \nsubseteq P_1$ ve $(m_1 + m_2) \nsubseteq P_2$ dir. $(m_1 + m_2)x_1 \nsubseteq P_2$ ve $(m_1 + m_2)x_2 \nsubseteq P_1$ olduğundan ne $(m_1 + m_2)x_1 \subseteq I$ ne de $(m_1 + m_2)x_2 \subseteq I$ dır. Böylece $x_1x_2 \in I$ elde edilir.
Şimdi bir $P_3 \in K$ olduğunu varsayalım. Seçtiğimiz P_3, P_1 ve P_2 den farklı olsun. Bu durumda bir $t_1 \in P_1 - (P_2 \cup P_3)$ ve $t_2 \in P_2 - (P_1 \cup P_3)$ ve $t_3 \in P_3 - (P_1 \cup P_2)$ seçebiliriz. $t_1, t_2 \in I$ dır. $I \subseteq P_1 \cap P_2 \cap P_3$ ve $t_1t_2 \in I$ dır. Buradan ya $t_1 \in P_3$ ya da $t_2 \in P_3$ dür. Bu da çelişki oluşturur. Böylece K nin en fazla iki elemanı vardır [30]. ■

Teorem 3.3. *I, R nin 2-yutan hiperideali olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır:*
(1) $rad(I) = P$, burada P, R nin asal hiperidealidir öyle ki $P^2 \subseteq I$ dır.
(2) $rad(I) = P_1 \cap P_2$, $P_1.P_2 \subseteq I$ ve $rad(I)^2 \subseteq I$ dır. Burada P_1 ve P_2, R nin I üzerindeki minimal olan ayrık asal hiperidealidir [30].

İspat. Teorem 3.2. den ya $rad(I) = P$ ya da $rad(I) = P_1 \cap P_2$ dir. Burada P, R nin asal hiperideali, P_1 ve P_2, I üzerinde minimal olan ayrık asal hiperideallerdir. Varsayalım ki $rad(I) = P$ olsun. $a \in P^2$ olsun. $(P^2 = \{a : a \in \sum_{i=1}^{n} x_iy_i, x_i \in P_1, y_i \in P_2\})$ $a \in I$ olup olmadığını göstermeliyiz. $a \in \sum_{i=1}^{n} x_iy_i = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n = P^2$, $a \in \{x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n\}$ dir. Burada $x_i.y_i \in P$ dir. $x_i \in P$ ise $x_i^2 \in I, y_i \in P$ ise $y_i^2 \in I$ dır. $x_i^2 + y_i^2 \subseteq I$ ise $x_i^2y_i + x_iy_i^2 \subseteq I$ yani $x_i(x_i + y_i)y_i \subseteq I$. Herhangi bir

$t \in x_i + y_i$ için; $x_i t y_i \in I$ ve I, 2-yutan hiperideal olduğundan $x_i t \in I$ ya da $t y_i$ ya da $x_i y_i \in I$ dır.

$\forall t \in x_i + y_i$ için; $\cup_{t_{ij} \in (x_i+y_i)} x_i t_{ij} = x_i(x_i + y_i) = x_i^2 + x_i y_i \subseteq I$ bulunur. $t y_i \in I$ ise $\forall t \in x_i + y_i$ için; $t y_i \in (x_i + y_i) y_i = x_i y_i + y_i^2 \subseteq I$ ve $x_i y_i \in I$ bulunur. Yani her durumda $x_i y_i \in I$ elde edilir. I hiperideal olduğundan $a \in \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \subseteq I$ dır. Yani $a \in I$ bulunur. Böylece $P^2 \subseteq I$ dır. Şimdi $rad(I) = P_1 \cap P_2$ olsun. $x_i, y_i \in P_1 \cap P_2$ için yukarıdaki ifadeden $x_i y_i \in I$ dır. Böylece $rad(I)^2 \subseteq I$ dır. Şimdi $P_1 P_2 \subseteq I$ olduğunu göstereceğiz. $x_1 \in P_1 - P_2$ ve $x_2 \in P_2 - P_1$ olsun. Teorem 3.2. den $x_1 x_2 \in I$ dır.
$P_1 P_2 = \{a \in R : a \in \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, x_i \in P_1 - P_2, y_i \in P_2 - P_1\}$ dir. $a \in P_1 P_2$ olsun. $a \in I$ olup olmadığını göstermeliyiz. $a \in P_1 P_2$ ise $a \in \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$ olur. $a \in x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$ dir. Buradan $x_i y_i \in I$ olur. Dolayısıyla $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \subseteq I$ dır. Buradan $a \in I$ elde edilir. $P_1 P_2 \subseteq I$ dır [30]. ■

Teorem 3.4. *I, R nin 2-yutan hiperideali olsun öyle ki $rad(I) = P$, R nin asal hiperideali ve $I \neq P$ olduğunu kabul edelim. $\forall x \in P - I$ için;*

$K_x = \{y \in R : yx \in I\}$ olsun. O zaman K_x, R nin P yi içeren bir asal hiperidealidir [30].

İspat. $x \in P - I$ olsun. Teorem 3.3. den $P^2 \subseteq I$ olduğundan $rad(I) = P \subseteq K_x$ dir. Çünkü; $x \in P - I$ için; $x^2 \in I$ dır. Buradan $x \in K_x$ dir. Varsayalım ki $P \neq K_x$ olsun. Bazı $y, z \in R$ için $yz \in K_x$ olsun. $P \subseteq K_x$ olduğundan $y, z \notin P$ iken $yz \notin I$ dır. $yz \in K_x$ olduğundan $yzx \in I$ dır. Ayrıca I, R nin 2-yutan hiperideali olduğundan ve $yz \notin I$ olmasından ya $yx \in I$ ya da $zx \in I$ bulunur. Böylece ya $y \in K_x$ ya da $z \in K_x$ dir. Buradan K_x, R nin P yi kapsayan asal hiperidealidir [30]. ■

Teorem 3.5. *R bir hiperhalka ve I da R nin bir 2-yutan hiperideali olsun öyle ki $I \neq rad(I) = P_1 \cap P_2$ alalım. Burada P_1 ve P_2, R nin I üzerindeki sıfırdan farklı minimal ayrık asal hiperidealleridir. Her $x \in rad(I) - I$ için; $K_x = \{y \in R : xy \in I\}$, R nin P_1 ve P_2 yi içeren bir asal hiperidealidir [30].*

İspat. $x \in rad(I) - I$ olsun. Teorem 3.3. den $P_1 P_2 \subseteq I$ dır. $x P_1 \subseteq I$ ve $x P_2 \subseteq I$ ayrıca $x p_1, x p_2 \in I$ dır. Böylece $p_1, p_2 \in K_x$ dir. $P_1 \subseteq K_x$ ve $P_2 \subseteq K_x$ olur. Varsayalım ki $yz \in K_x$ olsun. $P_1 \subseteq K_x$ ve $P_2 \subseteq K_x$ olduğundan $y, z \notin P_1$ ve $y, z \notin P_2$ olduğunu varsayabiliriz ve $yz \notin I$ olduğu sonucuna ulaşırız. $yz \in K_x$ olduğundan $yzx \in I$ dır. I, 2-yutan hiperideal olduğundan $yx \in I$ ya da $zx \in I$ bulunur. Böylece ya $y \in K_x$ ya da $z \in K_x$ dir. K_x, R nin asal hiperidealidir [30].

■

Teorem 3.6. *Varsayalım ki I, R nin $I \neq rad(I)$ şartını sağlayan bir hiperideali ve $rad(I)$, R hiperhalkasının bir asal hiperideali olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:*
(1) I, R nin bir 2-yutan hiperidealidir.
(2) $K_x = \{y \in R : yx \in I\}$, $\forall x \in rad(I) - I$ için; R hiperhalkasının asal hiperidealidir [30].

İspat. $(1) \Rightarrow (2)$: Teorem 3.5. de ispatlandı.
$(2) \Rightarrow (1)$: $a, b, c \in R$ iken; $abc \in I$ olsun. $a \in rad(I)$ olduğunu varsayabiliriz. Eğer $a \in I$ ise $ab \in I$ bulunur. Böylece sonuca ulaşılır. $a \in rad(I) - I$ olduğunu varsayalım. Buradan $bc \in K_x$ dir. K_x, R nin bir asal hiperideali olduğundan $b \in K_x$ ya da $c \in K_x$ dir. Böylece $ba \in I$ ya da $ca \in I$ sonucuna ulaşılır. Böylece I, R nin bir 2-yutan hiperidealidir [30].

■

Teorem 3.7. *I, R hiperhalkasının bir hiperideali, P_1 ve P_2, I üzerinde sıfırdan farklı minimal iki ayrık asal hiperidealler ve $I \neq rad(I) = P_1 \cap P_2$ olsun. O zaman aşağıdakiler denktir:*
(1) I, R nin bir 2-yutan hiperidealidir.
(2) $\forall x \in rad(I) - I$ için; $P_1P_2 \subseteq I$ ve $K_x = \{y \in R : yx \in I\}$, R nin bir asal hiperidealidir.
(3) $\forall x \in (P_1 \cup P_2 - I)$ için; $K_x = \{y \in R : yx \in I\}$, R nin bir asal hiperidealidir [30].

İspat. $(1) \Rightarrow (2)$: Teorem 3.5. de ispatlandı.
$(2) \Rightarrow (3)$: $x \in P_1 - P_2$ olsun. $yx \in I \Longleftrightarrow y \in P_2$ dir. $P_1P_2 \subseteq I$ olduğundan $K_x = P_2$, R nin asal hiperidealidir. $y \in P_2$ için tanımdan $P_2 \subseteq K_x$ ve $y \in K_x$ olsun. $yx \in I, y \in P_2, z \in P_2 - P_1$ olsun. Buradan $K_z = P_1$, R nin asal hiperidealidir. $z \in P_2 - P_1$ iken $a \in P_1$ için $P_1 \subseteq K_z$ dir.
$P_1P_2 \subseteq I$ olduğundan $az \in I$ dır. Buradan $a \in K_z$ dolayısıyla $P_1 \subseteq K_z$ bulunur. Tersine; $y \in K_z$ olsun. Tanımdan $yz \in I$ dır. $z \notin P_1 \cap P_2$ idi. Ayrıca $P_1P_2 \subseteq I$ olduğundan $y \in P_1, z \in P_2$ dir. Buradan $K_z \subseteq P_1$ bulunur. Yani $K_z = P_1$ elde edilir. Her $d \in rad(I) - I$ için K_d nin asal hiperideal olduğu gösterilmiş oldu.
$(3) \Rightarrow (1)$: $xyz \in I$ ve $x \in (P_1 \cup P_2) - I$ olsun. Böylece $yz \in K_x$ dir. K_x, R nin asal hiperideali olduğundan ya $yx \in I$ ya da $zx \in I$ dır. Böylece I, R hiperhalkasının 2-yutan hiperidealidir [30]. ■

Teorem 3.8. *I, R nin bir 2-yutan hiperideali olsun öyle ki $I \neq rad(I)$ şartını sağlasın. $\forall x \in rad(I) - I$ için; $K_x = \{y \in R : yx \in I\}$ olsun. Bu durumda;*
(1) $x \in rad(I) - I$ ve $y \in R$ iken eğer $yx \notin I$ ise $K_{yx} = K_x$
(2) Eğer $x, y \in rad(I) - I$ ve $K_x \subset K_y$ ise her $f, d \in R$ için; $K_{fx+dy} = K_x$ dir öyle ki $fd \notin K_x$ [30].

İspat. (1) Tanımdan $K_x \subseteq K_{yx}$....(1) dir. $c \in K_{yx}$ olsun. $cyx \in I$ olduğundan $cy \in K_x$ dir. Ayrıca $yx \notin I$ olmasından $y \notin K_x$ dir. I, 2-yutan hiperideal olduğundan $cx \in I$ ya da $cy \in I$ dır. K_x in asal hiperideal olmasından $y \notin K_x$ ise $c \in K_x$ dir. Böylece $cx \in I$ bulunur. $K_{yx} \subseteq K_x$....(2) elde edilir. (1) ve (2) den eşitlik elde edilir.
(2) $c \in K_x$ olsun. Tanımdan $cx \in I$ bulunur. $fd \notin K_x$ olduğundan $f \notin K_x$ iken $fx \notin I$ dır. $d \notin K_x$ iken $dx \notin I$ dır. Buradan $dx \notin I$ olduğundan ve $cx \in I$ olduğundan herhangi bir $f \in R$ için $cfx \in I$ dır. $dx \notin I$ ve $x \notin I$ olduğundan $d \notin I$ dır. Herhangi bir $d \in R$ için; $cdx \in I$ dır. Tanımdan $cd \in K_x$ ayrıca $K_x \subseteq K_y$ olduğundan $cd \in K_y$ dir. Buradan $cdy \in I$ elde edilir. $cfx \in I$ ve $cdy \in I$ olduğundan $cfx + cdy \subseteq I$ bulunur. Böylece $c \in K_{fx+dy}$ bulunur. $K_x \subseteq K_{fx+dy}$...(1) elde edilir. $c \in K_{fx+dy}$ olsun. Tanımdan; $cfx + cdy \subseteq I$dır. $cfx \in I$ ve $cdy \in I$ dır. Ayrıca $fd \notin K_x$ olduğundan ve K_x asal hiperideal olduğundan $f \notin K_x$ için; $fx \notin I$, $d \notin K_x$ için; $dx \notin I$ dır.
$cfx \in I$ iken $fx \notin I$ ve I bir hiperideal olduğundan $c \in I$ ve dolayısıyla $cx \in I$ bulunur. Buradan $c \in K_x$ dir. Yani $K_{fx+dy} \subseteq K_x$....(2) bulunur. (1) ve (2) den eşitlik elde edilir [30]. ■

Teorem 3.9. *I, R hiperhalkasının sıfırdan farklı bir öz hiperideali olsun. O zaman aşağıdakiler denktir:*
(1) I, R hiperhalkasının bir 2-yutan hiperidealidir.
(2) R hiperhalkasının bazı I_1, I_2, I_3 hiperidealleri için; $I_1I_2I_3 \subseteq I$ ise $I_1I_2 \subseteq I$ ya da $I_2I_3 \subseteq I$ ya da $I_1I_3 \subseteq I$ dır [30].

İspat. $(2) \Rightarrow (1)$: Eleman alımı ile elde edilir.
$(1) \Rightarrow (2)$: R nin bazı I_1, I_2, I_3 hiperidealleri için; $I_1I_2I_3 \subseteq I$ olsun. Eğer $rad(I) = I$ ise $I_1I_2 \subseteq I$ ya da $I_2I_3 \subseteq I$ ya da $I_1I_3 \subseteq I$ olduğu açıktır. (asal $\Rightarrow$ 2-yutan). $I \neq rad(I)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda iki seçenek vardır. Birinci durum: Varsayalım ki; $rad(I)$, R nin bir asal hiperideali olsun. $I_1 \subseteq rad(I)$ ve $I_1 \nsubseteq I$ olduğunu varsayalım. $x \in I_1 - I$ olsun. $xI_2I_3 \subseteq I$ olduğundan $I_2I_3 \subseteq K_x$ dir. Teorem 3.5. den K_x bir asal hiperidealdir. Buradan $I_2 \subseteq K_x$ ya da $I_3 \subseteq K_x$ bulunur. Her $d \in I_1 - I$ için; $I_2 \subseteq K_d$ ya da $I_3 \subseteq K_d$ ise $I_1I_2 \subseteq I$ ve $I_1I_3 \subseteq I$ dır. Varsayalım ki bazı $y \in I_1 - I$ için; $I_2 \subseteq K_y$ ve $I_3 \nsubseteq K_y$ olsun. Her $z \in I_1 - I$ için; $I_2 \subseteq K_z$ dir. Böylece $I_1I_2 \subseteq I$ elde edilir. İkinci durum: Varsayalım ki $rad(I) = P_1 \cap P_2$ olsun. $I_1 \subseteq P_1$ olduğunu varsayabiliriz. Eğer $I_2 \subseteq P_2$ ya da $I_3 \subseteq P_2$ ise ya $I_1I_2 \subseteq I$ ya da $I_1I_3 \subseteq I$ dır. Çünkü; $P_1P_2 \subseteq I$ idi. Böylece $I_1 \subseteq rad(I)$ ve $I_1 \nsubseteq I$ olduğunu varsayalım. 1. durumdan ve K_x in asal olmasından $I_1I_3 \subseteq I$ elde edilir [30]. ■

4
HİPERİDEAL GENİŞLEME FONKSİYONU ve δ-ASALIMSI HİPERİDEALLER

Bu bölümde R bir Krasner hiperhalkası olarak kabul edilecektir.

Tanım 4.1. R nin tüm hiperideallerini aynı hiperhalka üzerindeki diğer hiperideallere götüren δ fonksiyonuna eğer aşağıdaki koşulları sağlarsa hiperideal genişleme fonksiyonu denir:
1) Her I hiperideali için; $I \subseteq \delta(I)$
2) R nin P ve Q hiperidealleri için; $P \subseteq Q$ iken $\delta(P) \subseteq \delta(Q)$ [31].

Örnek 4.1. *Her $I \in Id(R)$ için; δ_0 birim fonksiyonu $\delta_0(I) = I$ olduğundan bir hiperideal genişlemesi fonksiyonudur [31].*

Örnek 4.2. *Her I hiperideali için $\delta_1(I) = \sqrt{I}$ şeklinde tanımlansın. Buradan δ_1 bir hiperideal genişlemesi fonksiyonudur.*
$I \subseteq \delta(I) = \sqrt{I}$ ve $I \subseteq \delta(I)$ olmasından ilk koşul sağlanır. $I_1 \subseteq I_2$ olduğunda $\sqrt{I}_1 \subseteq \sqrt{I}_2$ ve $\delta_1(I_1) \subseteq \delta_1(I_2)$ dir. Böylece δ_1 bir hiperideal genişleme fonksiyonudur [31].

Tanım 4.2. δ bir hiperideal genişleme fonksiyonu ve I, R nin bir hiperideali olsun. Her $a, b \in R$ için; $ab \in I$ ve $a \notin I$ iken $b \in \delta(I)$ ise I hiperidealine δ-asalımsı hiperideal denir.
Tanım şu şekilde de verilebilir; her $a, b \in R$ için $ab \in I$ ve $a \notin \delta(I)$ iken $b \in I$ dır [31].

Örnek 4.3. *Bir I hiperideali δ_0-asalımsıdır ancak ve ancak I asal hiperidealdir.*
Varsayalım ki I, δ_0-asalımsı hiperideal olsun. I nın asal olduğunu gösterelim. $ab \in I$ olsun. I, δ_0-asalımsı olduğundan $a \in I$ ya da $b \in \delta_0(I) = I$. Dolayısıyla I asal hiperidealdir.
Tersine, I bir asal hiperideal ve $ab \in I$ olsun. I asal hiperideal olduğundan $a \in I$ ya da $b \in I = \delta_0(I)$ ve I, δ_0-asalımsı hiperideal bulunur [31].

Örnek 4.4. *Bir I hiperideali δ_1-asalımsı hiperidealdir ancak ve ancak I asalımsı hiperidealdir.*

Varsayalım ki I , δ_1-asalımsı hiperideal ve $ab \in I$ olsun. Böylece $a \in I$ ya da $b \in \delta_1(I) = \sqrt{I}$ dır. Dolayısıyla I asalımsı hiperidealdir.
Tersine, I asalımsı hiperideal ve $ab \in I$ olsun. Böylece I asalımsı hiperideal olduğundan $a \in I$ ya da $b \in \sqrt{I}$ dır. Böylece $a \in I$ ya da $b \in \sqrt{I} = \delta_1(I)$ bulunur [31].

Uyarı:(1) Eğer δ ve γ, her I hiperideali için $\delta(I) \subseteq \gamma(I)$ şartını sağlayan iki genişleme fonksiyonu ise her δ-asalımsı hiperideal aynı zamanda γ-asalımsıdır. Özel olarak her δ hiperideal genişleme fonksiyonu için; bir asal hiperideal δ-asalımsı hiperidealdir.
I, δ-asalımsı olsun. Her $a, b \in R$ için; $ab \in I$ ve $a \notin I$ olsun. I, δ-asalımsı, $\delta(I) \subseteq \gamma(I)$ ve $b \in \delta(I) \subseteq \gamma(I)$ olduğundan $b \in \gamma(I)$ dır.
(2) δ_1 ve δ_2 iki hiperideal genişlemesi olsun. $\delta(I) = \delta_1(I) \cap \delta_2(I)$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda δ aynı zamanda bir hiperideal genişlemesidir.
δ_1 ve δ_2 hiperideal genişlemesi olduğu için; $I \subseteq \delta_1(I)$ ve $I \subseteq \delta_2(I)$ dır. $I \subseteq \delta_1(I) \cap \delta_2(I) = \delta(I)$ olduğundan $I \subseteq \delta(I)$ sonucuna ulaşılır.
P ve Q, R nin $P \subseteq Q$ şartını sağlayan hiperidealleri olsun. Böylece $\delta_1(P) \cap \delta_2(P) \subseteq \delta_1(Q) \cap \delta_2(Q)$ elde edilir.
(3) δ bir hiperideal genişlemesi olsun. $E_{\delta(P)} = \cap \{J \in Id(R) : P \subseteq J,\ J\ \delta\text{-asalımsı}\}$ şeklinde tanımlansın. E_δ bir hiperideal genişlemesidir.
Her $P \in Id(R)$ için; $P \subseteq E_\delta(P)$ ve herhangi $K, L \in Id(R)$ için eğer $K \subseteq L$ ise $E_\delta(K) \subseteq E_\delta(L)$ olduğunu göstereceğiz. $E_\delta(P)$ nin tanımından $P \subseteq E_\delta(P)$ sonucuna ulaşılır. $K, L \in Id(R)$ için eğer $K \subseteq L$ ise L yi kapsayan hiperidealler K yı da kapsar. Ek olarak, L de kapsanan fakat K da kapsanmayan hiperidealler vardır. Böylece $E_\delta(K) \subseteq E_\delta(L)$ elde edilir [31].

Lemma 4.1. *R bir hiperhalka ve P de R nin bir asal hiperideali olsun. R nin I ve J hiperidealleri için $IJ \subseteq P$ ve $I \nsubseteq P$ ise $J \subseteq \delta(P)$ ancak ve ancak P δ-asalımsı hiperidealdir [31].*

İspat. P, δ-asalımsı hiperideal olsun. Varsayalım ki $IJ \subseteq P$ ve $I \nsubseteq P$ fakat $J \nsubseteq \delta(P)$ olsun. Bir $a \in I - P$ ve $b \in J - \delta(P)$ seçelim. Buradan $ab \in IJ \subseteq P$ fakat $a \notin P$ ve $b \notin \delta(P)$ dir. Bu da P nin δ-asalımsı hiperideal olması ile çelişir.
Tersine; kabulden a ve b elemanları için; $ab \in P$ ve $a \notin P$ olsun. $(a)(b) \subseteq P$ ve $(a) \nsubseteq P$ dir. Buradan $(b) \subseteq \delta(P)$ elde edilir. Böylece $b \in (b) \subseteq \delta(P)$ iken $b \in \delta(P)$ dir. Böylece P, δ-asalımsı hiperideal bulunur [31]. ∎

Teorem 4.2. *δ bir hiperideal genişleme fonksiyonu olsun. O zaman;*
(1) Eğer P, R hiperhalkasının δ-asalımsı hiperideali, I bir hiperideal ve $I \subsetneq \delta(P)$ ise $(P : I) = P$ dir.
(2) R nin herhangi bir P δ-asalımsı hiperideali ve bir N alt kümesi için; $(P : N)$ δ-asalımsıdır [31].

İspat. (1)$(P:I)$ nın tanımından $\forall x \in I(P:I)$ için; $a_i \in I$ ve $p_i \in (P:I)$ iken $x \in \sum_{i=1}^{n} a_i p_i$ dir. P bir hiperideal olduğundan $x \in \sum_{i=1}^{n} a_i p_i \subseteq P$ ve $x \in P$ elde ederiz. Başka bir deyişle $I(P:I) \subseteq P$ dir. P, δ-asalımsı hiperideal olduğundan $I \nsubseteq \delta(P)$ ise $(P:I) \subseteq P$ bulunur. Tersine, $P \subseteq (P:I)$ olduğundan $(P:I) = P$ elde edilir.
(2) Her $a, b \in R$ için; $ab \in (P:N)$ ve $a \notin (P:N)$ olduğunu kabul edelim. Bir $n \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $an \notin P$ dir. Fakat $anb = abn \in P$ dir. Buradan $b \in \delta(P)$ elde edilir. $\delta(P) \subseteq \delta(P:N)$ olduğundan $b \in \delta(P:N)$ bulunur. Böylece $(P:N)$ nin δ-asalımsı hiperideal olduğu gösterilmiş oldu [31]. ■

Teorem 4.3. *Her I hiperideali için; eğer δ, $\delta(I) \subseteq \delta_1(I)$ şartını sağlayan bir hiperideal genişleme fonksiyonu ise herhangi bir P δ-asalımsı hiperideali için $\delta(P) = \delta_1(P)$ dir [31].*

İspat. Her I hiperideali için; $\delta(I) \subseteq \delta_1(I)$ olduğundan $\delta(P) \subseteq \delta_1(P)$ dir. Tersine, $a \in \delta_1(P)$ olsun. $a \in \delta(P)$ olduğunu göstereceğiz. k, $a^k \in P$ şartını sağlayan en küçük pozitif tamsayı olsun. Eğer $k = 1$ ise $a \in P \subseteq \delta(P)$ dir. Eğer $k > 1$ ise $a^{k-1}a \in P$ dir. Fakat $a^{k-1} \notin P$ ve böylece $a \in \delta(P)$ dir. Buradan $\delta_1(P) \subseteq \delta(P)$ ve $\delta(P) = \delta_1(P)$ sonucuna ulaşılır [31].

■

4.1 Genişleme Fonksiyonu İle İlgili Ek Özellikler

Tanım 4.3. δ bir hiperideal genişleme fonksiyonu olsun. Eğer aşağıdaki koşulu sağlarsa δ ya kesişimi koruyan fonksiyon denir:
Herhangi $I, J \in Id(R)$ için $\delta(I \cap J) = \delta(I) \cap \delta(J)$ [31].

Tanım 4.4. $f : R \longrightarrow S$ bir hiperhalka homomorfizması olsun. Her $I \in Id(S)$ için; eğer $\delta(f^{-1}((I))) = f^{-1}(\delta(I))$ ise δ genişlemesine global fonksiyon denir [31].

Örnek 4.5. *δ_0 ve δ_1 genişleme fonksiyonları hem kesişimi koruyan hem de global fonksiyonlardır [31].*

Teorem 4.4. *δ kesişimi koruyan bir hiperideal genişleme fonksiyonu olsun. Eğer $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ R nin δ asalımsı hiperidealleri ve her i için; $P = \delta(Q_i)$ ise $Q = \cap_{i=1}^{n} Q_i$ bir δ-asalımsı hiperidealdir [31].*

İspat. δ kesişimi koruyan bir genişleme fonksiyonu olsun. Bazı k lar için; eğer $xy \in Q$ ve $x \notin Q$ ise $x \notin Q_k$ elde edilir. Fakat $xy \in Q \subseteq Q_k$ ve Q_k δ-asalımsı olduğundan $y \in \delta(Q_i)$ bulunur. $\delta(Q) = \delta(\cap_{i=1}^{n} Q_i) = \cap_{i=1}^{n} \delta(Q_i) = P = \delta(Q_k)$ elde edilir. Böylece $y \in \delta(Q)$ sonucuna ulaşılır. Buradan Q nun δ-asalımsı olduğu bulunur [31]. ■

Tanım 4.5. R bir hiperhalka ve δ bir hiperideal genişleme fonksiyonu olsun. Herhangi $a \in R$ için; eğer $a \in \delta(\{0\})$ ise a elemanına δ nilpotent denir [31].

Örnek 4.6. *Hiperhalkanın sıfır elemanı δ_0 nilpotent elemandır.*
δ_1'in nilpotent elemanları ise klasik nilpotent elemanlardır [31].

Teorem 4.5. *δ bir global genişleme fonksiyonu olsun. R nin bir I hiperideali δ-asalımsı ise R/I nın her sıfır böleni δ nilpotenttir [31].*

İspat. I, δ-asalımsı olsun. Eğer $\overline{r} = r + I$, R/I nın bir sıfır böleni ise $\overline{rs} = rs + I = I$ olan bir $\overline{s} = s + I \neq I$ vardır. Yani $rs \in I$ ve $s \notin I$ olacak şekilde $rs \in R$ vardır. I, δ-asalımsı olduğundan $r \in \delta(I)$ yani $\overline{r} \in \delta(I)/I$ elde edilir.
$q : R \longrightarrow R/I$ ya bir doğal bölüm hiperhalka homomorfizması olsun. δ global olduğundan $\delta(I) = \delta(q^{-1}(0_{R/I})) = q^{-1}(\delta(0_{R/I}))$ elde edilir. q örten olduğundan $\delta(I)/I = q(\delta(I)) = \delta(0_{R/I})$ sonucuna ulaşılır. Böylece $\overline{r} \in \delta(0_{R/I})$ elde edilir. Yani $\overline{r}$, δ nilpotent bulunur [31].

■

Teorem 4.6. *$f : R \longrightarrow S$ bir hiperhalka homomorfizması olsun. S nin herhangi δ-asalımsı I hiperideali için; eğer δ global ise $f^{-1}(I)$ da R nin δ-asalımsı hiperidealidir [31].*

İspat. $a, b \in R$ ve $ab \in f^{-1}(I)$ olsun. Eğer $a \notin f^{-1}(I)$ ise $f(a)f(b) \in I$ fakat $f(a) \notin I$ dır. I, δ-asalımsı olduğundan $f(b) \in \delta(I)$ bulunur. Böylece $b \in f^{-1}(\delta(I)) = \delta(f^{-1}(\delta(I)))$ elde edilir. Böylece $f^{-1}(I)$, δ-asalımsı hiperidealdir [31]. ■

Teorem 4.7. *$f : R \longrightarrow S$ bir örten hiperhalka homomorfizması ve δ global genişleme fonksiyonu olsun. Eğer I, R nin çek$f$ yi içeren δ-asalımsı hiperideali ise $f(I)$ da S nin δ-asalımsı hiperidealidir [31].*

İspat. Eğer $f(I)$, δ-asalımsı ise $I = f^{-1}(f(I))$ olması ve Teorem 4.6. dan I, δ-asalımsıdır. Şimdi $f(I)$ nın δ-asalımsı olduğunu varsayalım. Eğer $a, b \in S$ ve $ab \in f(I)$ ve $a \notin f(I)$ ise; $x, y \in R$ vardır öyle ki $f(x) = a, f(y) = b$ dir. Buradan $f(xy) = f(x)f(y) = ab \in f(I)$ olması $xy \in f^{-1}(f(I)) = I$ ve $f(x) = a \notin f(I)$ olması $x \notin I$ olmasını sağlar. Böylece $y \in \delta(I)$ ve $b = f(y) \in f(\delta(I))$ dır. Şimdi $f(\delta(I)) = \delta(f(I))$ olduğunu göstermeliyiz. Bu da $\delta(I) = \delta(f^{-1}(f(I))) = f^{-1}(\delta(f(I)))$ ve f nin örten olmasından elde edilir [31].

■

Teorem 4.8. *δ-**Asalımsı Hiperidealler için Eşleme Teoremi** δ bir global hiperhalka genişleme fonksiyonu , $f : R \longrightarrow S$ ye bir örten hiperhalka homomorfizması olsun. O zaman f, R nin çek$f$ yi içeren δ-asalımsı hiperidealleri ile S nin δ-asalımsı hiperidealleri arasında eşliği koruyan bir içerme fonksiyonudur öyle ki eğer I, R nin çek$f$'i içeren bir δ-asalımsı hiperideali ise $f(I)$, S nin δ-asalımsı hiperideali ile eşlenir ve eğer J, S nin δ-asalımsı hiperideali ise R nin δ-asalımsı $f^{-1}(J)$ hiperidealleri ile eşlenir [31].*

İspat. ispatı teorem 4.6. ve 4.7. den elde edilir [31]. ∎

5
ÇARPIMSAL HİPERHALKALARDA 2-YUTAN δ-ASALIMSI HİPERİDEALLER

Bu bölümden itibaren R Çarpımsal hiperhalka olarak kabul edilecektir.

Tanım 5.1. R çarpımsal bir hiperhalka olsun. R nin tüm hiperideallerini aynı hiperhalka üzerindeki diğer hiperideallere götüren δ fonksiyonuna eğer aşağıdaki koşulları sağlarsa hiperideal genişleme fonksiyonu denir:
(1) R nin her I hiperideali için; $I \subseteq \delta(I)$,
(2) R nin P ve Q hiperidealleri için; $P \subseteq Q$ iken $\delta(P) \subseteq \delta(Q)$ dir.

Örnek 5.1. *Birim fonksiyon $\delta_0(I) = I$ ve $\delta_1(I) = \sqrt{I}$ birer hiperideal genişleme fonksiyonlarıdır.*

Tanım 5.2. R çarpımsal bir hiperhalka olsun. I da R nin bir hiperideali olsun. δ bir genişleme fonksiyonu olsun. Her $a, b \in R$ için; $ab \subseteq I$ ve $a \notin I$ iken $b \in \delta(I)$ ise I ya δ-asalımsı hiperideal denir.

Örnek 5.2. *$(\mathbb{Z}, +, .)$ tamsayılar halkası için hiperçarpımı $x \circ y = \{2xy, 3xy\}$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $(\mathbb{Z}, +, \circ)$ çarpımsal bir hiperhalkadır. δ_0 genişleme fonksiyonu olsun. Bu hiperhalkada $I = 5\mathbb{Z}$ hiperideali δ_0-asalımsı hiperidealdir.*

Tanım 5.3. R çarpımsal bir hiperhalka ve I da R nin bir öz hiperideali olsun. Her $a, b, c \in R$ için; $abc \subseteq I$ iken $ab \subseteq I$ ya da $bc \subseteq \delta(I)$ ya da $ac \subseteq \delta(I)$ ise I ya R nin 2-yutan δ-asalımsı hiperideali denir.

Örnek 5.3. *R bir hiperhalka ve I da R nin bir hiperideali olsun. I, 2-yutan δ_0-asalımsı hiperidealdir ancak ve ancak I, 2-yutan hiperidealdir.*
Çözüm: I, 2-yutan hiperideal olsun. $\forall a, b, c \in R$ için; $abc \subseteq I$ iken $ab \subseteq I$ ya da $bc \subseteq I = \delta_0(I)$ ya da $ac \subseteq I = \delta_0(I)$ olduğundan I, 2-yutan δ_0-asalımsıdır. Benzer şekilde diğer taraf da gösterilir.

Örnek 5.4. *R çarpımsal bir hiperhalka ve I da R nin bir hiperideali olsun. I, 2-yutan δ_1-asalımsı hiperidealdir ancak ve ancak I, 2-yutan asalımsı hiperidealdir.*

Çözüm: I, 2-yutan δ_1-asalımsı hiperideal olsun. Her $a, b, c \in R$ için; $abc \subseteq I$ iken $ab \subseteq I$ ya da $bc \subseteq \sqrt{I} = \delta_1(I)$ ya da $ac \subseteq \sqrt{I} = \delta_1(I)$ olmasından 2-yutan asalımsı hiperideal bulunur. Benzer şekilde karşıtı da gösterilebilir.

Her δ genişleme fonksiyonu için; çarpımsal bir hiperhalkada her 2-yutan hiperideal 2-yutan δ-asalımsı hiperidealdir. Fakat karşıtı doğru değildir.

Örnek 5.5. *$(\mathbb{Z}, +, .)$ tamsayılar halkasını ele alalım. Hiperçarpımı $x \circ y = \{2xy, 3xy\}$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $(\mathbb{Z}, +, \circ)$ çarpımsal bir hiperhalkadır. δ_1 genişleme fonksiyonu olsun. Bu hiperhalkada $I = 12\mathbb{Z}$ hiperideali 2-yutan δ_1-asalımsı hiperidealdir. Fakat 2- yutan hiperideal değildir. $a = 2, b = 2, c = 3$ olsun. $a \circ b \circ c = \{48, 72, 108\} \subseteq I = 12\mathbb{Z}$ iken $a \circ b = \{8, 12\} \nsubseteq I$ ve $b \circ c = \{12, 18\} \nsubseteq I$ ve $a \circ c = \{12, 18\} \nsubseteq I$ olduğundan 2-yutan hiperideal değildir. Fakat δ_1 genişleme fonksiyonu için; $\sqrt{I} = 6\mathbb{Z}$ olduğundan çarpımlardan en az biri radikale düşer.*

2-yutan δ-asalımsı hiperideal olmayan hiperideal örneği;

Örnek 5.6. *$(\mathbb{Z}, +, .)$ tamsayılar halkasını düşünelim. Hiperçarpımı $x \circ y = \{5xy, 6xy\}$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $(\mathbb{Z}, +, \circ)$ çarpımsal bir hiperhalkadır. $I = 30\mathbb{Z}$ hiperidealini düşünelim. δ genişleme fonksiyonu I hiperidealini I nın radikaline götüren bir fonksiyon olsun. I hiperidealinin radikali $a^2 = \{5a^2, 6a^2\}, a^3 = \{25a^3, 30a^3, 36a^3\}, a^4 = \{125a^4, 150a^4, 180a^4, 150a^4, 216a^4\}, ..., a^n = \{5^{n-1}.a^n, 6.5^{n-2}.a^n, ...\}$ bulunur. $\sqrt{I} = 30\mathbb{Z}$ dir.*
$a = 2, b = 3, c = 5$ için; $2 \circ 3 \circ 5 = \{750, 900, 1080\} \subseteq I$ iken $2 \circ 3 = \{30, 36\} \nsubseteq I$ ve $3 \circ 5 = \{75, 90\} \nsubseteq \delta_1(I) = 30\mathbb{Z}$ ve $2 \circ 5 = \{50, 60\} \nsubseteq \delta_1(I) = 30\mathbb{Z}$ olduğundan I bir 2-yutan δ-asalımsı hiperideal değildir.

5.1 2-yutan δ-asalımsı Hiperideallerin Özellikleri

Teorem 5.1. *δ ve γ her I hiperideali için; $\delta(I) \subseteq \gamma(I)$ şartını sağlayan genişleme fonksiyonları olsun. Eğer I, bir 2-yutan δ-asalımsı hiperideal ise I aynı zamanda 2-yutan γ-asalımsı hiperidealdir.*

İspat. δ ve γ fonksiyonlarının tanımından açıktır. ∎

İki 2-yutan δ-asalımsı hiperidealin kesişimi genel olarak 2-yutan δ-asalımsı hiperideal değildir.
Çözüm: I ve J, 2-yutan δ- asalımsı hiperideal olsun. $K = I \cap J$ olsun. $\forall a, b, c \in R$ için; $abc \subseteq K$ ve $ab \nsubseteq K$ olsun. $ab \nsubseteq K$ ise $ab \nsubseteq I$ ve $ab \nsubseteq J$ dir. I ve J ,2-yutan

δ-asalımsı hiperideal olduğundan $ab \nsubseteq I$ ise $ac \subseteq \delta(I)$ ya da $bc \subseteq \delta(I)$ ve $ab \nsubseteq J$ ise $ac \subseteq \delta(J)$ ya da $bc \subseteq \delta(J)$ dir.
$ac \subseteq \delta(I)$ olsa $bc \subseteq \delta(J)$ olsa $ac \nsubseteq \delta(K)$ ve $bc \nsubseteq \delta(K)$ bulunur.

Teorem 5.2. *R bir hiperhalka, δ bir hiperideal genişleme fonksiyonu, P_1 ve P_2 asal hiperidealler olsun. Bu durumda $P_1 \cap P_2$, R çarpımsal hiperhalkasının bir 2-yutan δ-asalımsı hiperidealidir.*

İspat. Her $a, b, c \in R$ için; $abc \subseteq P_1 \cap P_2$ ve $ab \nsubseteq P_1 \cap P_2$ olsun. $bc \subseteq \delta(P_1 \cap P_2)$ ya da $ac \subseteq \delta(P_1 \cap P_2)$ olduğunu göstermemiz gerekir.
$abc \subseteq P_1 \cap P_2$ ise $abc \subseteq P_1$ ve $abc \subseteq P_2$ dir. $ab \nsubseteq P_1 \cap P_2$ olduğundan $ab \nsubseteq P_1$ ve $ab \nsubseteq P_2$ dir. P_1 ve P_2 asal hiperideal olduklarından $abc \subseteq P_1$ ve $ab \nsubseteq P_1$ iken $c \in P_1$ dir. $abc \subseteq P_2$ ve $ab \nsubseteq P_2$ iken $c \in P_2$ dir. $c \in P_1 \cap P_2$ ise $bc \subseteq P_1 \cap P_2$ ve $ac \subseteq P_1 \cap P_2$ elde edilir. δ tanımından $P_1 \cap P_2 \subseteq \delta(P_1 \cap P_2)$ olmasından $bc \subseteq \delta(P_1 \cap P_2)$ ve $ac \subseteq \delta(P_1 \cap P_2)$ ve dolayısıyla $P_1 \cap P_2$, 2-yutan δ-asalımsı hiperidealdir.

■

Örnek 5.7. *$(\mathbb{Z}, +, .)$ tamsayılar halkasında $A = \{2, 7\}$ kümesini ele alalım. $x \circ y = \{2xy, 7xy\}$ şeklinde tanımlanan çarpımla birlikte $(\mathbb{Z}, +, \circ)$ çarpımsal bir hiperhalkadır. $P_1 = (2)$ ve $P_2 = (3)$ birer asal hiperideallerdir. $P_1 \cap P_2 = (2) \cap (3) = (6)$, 2-yutan δ-asalımsı hiperidealdir.*

Teorem 5.3. *R bir çarpımsal hiperhalka ve P de R nin 2-yutan δ-asalımsı hiperideali olsun. Herhangi $a, b \in R$ için; $abI \subseteq P$ ve $ab \nsubseteq P$ ise $aI \subseteq \delta(P)$ ya da $bI \subseteq \delta(P)$ dir.*

İspat. Bazı $a, b \in R$ için; $abI \subseteq P$ ve $ab \nsubseteq P$ olsun. $aI \nsubseteq \delta(P)$ ve $bI \nsubseteq \delta(P)$ olduğunu kabul edelim. $c, d \in I$ için; $ac \nsubseteq \delta(P)$ ve $bd \nsubseteq \delta(P)$ sonucuna ulaşırız. P, 2-yutan δ-asalımsı hiperideal olduğundan $abc \subseteq P$ ve $ab \nsubseteq P$ iken $ac \nsubseteq \delta(P)$ ise $bc \subseteq \delta(P)$ ve $abd \subseteq P$ ve $ab \nsubseteq P$ iken $bd \nsubseteq \delta(P)$ olması $ad \subseteq \delta(P)$ olmasını sağlar.
$abc + abd = ab(c + d) \subseteq P$ ve $ab \nsubseteq P$ olduğundan ya $a(c + d) \subseteq \delta(P)$ ya da $b(c + d) \subseteq \delta(P)$ elde edilir.
$a(c + d) \subseteq \delta(P)$ ise $ad \subseteq \delta(P)$ olduğundan $ac \subseteq \delta(P)$ çelişkisi elde edilir. $b(c + d) \subseteq \delta(P)$ ise $bc \subseteq \delta(P)$ olduğundan $bd \subseteq \delta(P)$ çelişkisi elde edilir. Buradan $aI \subseteq \delta(P)$ ya da $bI \subseteq \delta(P)$ sonucuna ulaşırız. ■

Örnek 5.8. *$(\mathbb{Z}, +, .)$ tamsayılar halkasında $A = \{2, 5\}$ kümesini ele alalım. $x \circ y = \{2xy, 5xy\}$ şeklinde tanımladığımız çarpımla birlikte $(\mathbb{Z}, +, \circ)$ çarpımsal bir hiperhalkadır. $P = 3\mathbb{Z}$ bir 2-yutan δ-asalımsı hiperidealdir. $a = 4, b = 5$ ve $I = 6\mathbb{Z}$ olsun. $a \circ b = \{40, 100\} \nsubseteq P$ dir. $a \circ b \circ I = \{480, 1200, 960, 2400, 1440, 3600, 1200, 3000, 2400, 6000, 3600, 1200, 3000, 2400, 6000, 3600, 900$*
$P = 3\mathbb{Z}$ iken $a \circ I = 4 \circ I = \{48, 120, 144, 360, ...\} \subseteq \delta_0(P), \delta_1(P)$ bulunur.

Teorem 5.4. *R çarpımsal bir hiperhalka ve P de R nin bir öz hiperideali olsun. P, 2-yutan δ-asalımsıdır ancak ve ancak R nin bazı I, J, K hiperidealleri için eğer $IJK \subseteq P$ ise $IJ \subseteq P$ ya da $IK \subseteq \delta(P)$ ya da $JK \subseteq \delta(P)$ dir.*

İspat. P, 2-yutan δ-asalımsı hiperideal olsun. $IJK \subseteq P$ ve $IJ \nsubseteq P$ olsun. $IK \subseteq \delta(P)$ ya da $JK \subseteq \delta(P)$ olduğunu göstermeliyiz. $IK \nsubseteq \delta(P)$ ve $JK \nsubseteq \delta(P)$ olduğunu varsayalım. $\exists r \in I, s \in J$ vardır öyle ki $rK \nsubseteq \delta(P)$ ve $sK \nsubseteq \delta(P)$ dir. $rsK \subseteq P$, $rK \nsubseteq \delta(P)$, $sK \nsubseteq \delta(P)$ olduğundan Teorem 5.3. den $rs \subseteq P$ elde ederiz. $IJ \nsubseteq P$ olduğundan $a \in I$ ve $b \in J$ vardır öyle ki $ab \nsubseteq P$ dir. $abK \subseteq P$ ve $ab \nsubseteq P$ olduğundan $aK \subseteq \delta(P)$ ya da $bK \subseteq \delta(P)$ dir. $aK \subseteq \delta(P)$ ve $bK \nsubseteq \delta(P)$ olduğunu varsayalım. $rbK \subseteq P$, $bK \nsubseteq \delta(P)$ ve $rK \nsubseteq \delta(P)$ olduğundan $rb \subseteq P$ dir. $(a+r)bK \subseteq P$, $aK \subseteq \delta(P)$ ve $rK \nsubseteq \delta(P)$ olduğundan $(a+r)K \nsubseteq \delta(P)$ dir.
Eğer $(a+r)K \subseteq \delta(P)$ ise $(a+r)k \subseteq \delta(P)$ ve $rk \nsubseteq \delta(P)$ elde edilir. $aK \subseteq \delta(P)$ ve $rk \subseteq \delta(P)$ olduğundan Teorem 5.3. den $(a+r)b \subseteq P$ elde edilir. $rb \subseteq P$ olduğundan $ab \subseteq P$ dir. Böylece çelişki elde edilir. $aK \nsubseteq \delta(P)$ ve $bK \subseteq \delta(P)$ olduğunu varsayarsak benzer şekilde çelişki elde ederiz. ■

6
DÜZGÜN ASALIMSI HİPERİDEALLER

Tanım 6.1. R çarpımsal bir hiperhalka ve Q da R nin bir öz hiperideali olsun. Eğer $r,s \in R$ iken; $rs \subseteq Q$ ve $r \notin Q$ iken pozitif bir n tamsayısı için $s^n \subseteq Q$ ise bu Q hiperidealine düzgün asalımsı hiperideal denir. Düzgün asalımsı bir hiperideal için; $s^n \subseteq Q$ koşulunu sağlayan en küçük N tamsayısına bu hiperidealin mertebesi denir ve $ord_R(Q) = N$ şeklinde gösterilir.

Örnek 6.1. *Tüm asal hiperidealler mertebesi 1 olan bir düzgün asalımsı hiperideallerdir. Tüm asalımsı hiperidealler düzgün asalımsı hiperideallerdir ve $ord_R(Q) = N$ dir.*
Çözüm: Q, R çarpımsal hiperhalkasının bir asal hiperideali olsun. $a,b \in R$ iken $ab \subseteq Q$ ve $a \notin Q$ olsun. Bu durumda $n = 1$ için $b^1 \subseteq Q$ olduğundan Q düzgün asalımsı hiperidealdir. Karşıtı $n \neq 1$ iken doğru değildir.
T, R çarpımsal hiperhalkasının bir asalımsı hiperideali olsun. $r,s \in R$ iken $rs \subseteq T$ ve $r \notin T$ olsun. Bu durumda $s^n \subseteq T$ olduğundan T düzgün asalımsı hiperidealdir.

Örnek 6.2. *Toplam ve hiperçarpım aşağıdaki gibi tanımlansın:*

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$

ve

$\circ$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\{\overline{0}\}$	$\{\overline{0}\}$	$\{\overline{0}\}$	$\{\overline{0}\}$
$\overline{1}$	$\{\overline{0}\}$	$\{\mathbb{Z}_4\}$	$\{\overline{0},\overline{2}\}$	$\{\mathbb{Z}_4\}$
$\overline{2}$	$\{\overline{0}\}$	$\{\overline{0},\overline{2}\}$	$\{\overline{0}\}$	$\{\overline{0},\overline{2}\}$
$\overline{3}$	$\{\overline{0}\}$	$\{\mathbb{Z}_4\}$	$\{\overline{0},\overline{2}\}$	$\{\mathbb{Z}_4\}$

Bu durumda $(\mathbb{Z}_4,+,\circ)$ çarpımsal bir hiperhalkadır [28]. Bu hiperhalkada $Q = \{\overline{0}\}$ hiperideali düzgün asalımsı hiperidealdir fakat asal hiperideal değildir.

Tanım 6.2. R çarpımsal bir hiperhalka ve Q, R nin bir P asalımsı hiperideali olsun. Bir pozitif n tamsayısı için; $P^n \subseteq Q$ ise Q ya Noether güçlü asalımsı hiperideal denir. Ayrıca Q, Noether güçlü asalımsı hiperideal ise $P^N \subseteq Q$ şartını sağlayan en küçük pozitif N tamsayısına Q nun üssü denir. $e_R(Q) = N$ şeklinde gösterilir.

Tanım 6.3. R çarpımsal bir hiperhalka ve Q da R nin bir P asalımsı hiperideali olsun. Eğer $rP \subseteq Q$ olacak şekilde $r \in R-Q$ varsa Q ya Mori güçlü asalımsı hiperideal denir.

Yorum. Genel olarak Noether güçlü asalımsı bir hiperideal Mori güçlü asalımsı bir hiperidealdir.
$e(Q) = N$ olsun. $r \in P^{N-1} - Q$ alalım. $r \circ P \subseteq P^N \subseteq Q$ olduğu elde edilir.

Örnek 6.3. *Toplam ve hiperçarpım aşağıdaki gibi tanımlansın:*

$$\begin{array}{c|cccc} + & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} \\ \hline \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{0} & \overline{1} \\ \overline{3} & \overline{3} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \end{array} \quad ve \quad \begin{array}{c|cccc} \circ & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} \\ \hline \overline{0} & \{\overline{0}\} & \{\overline{0}\} & \{\overline{0}\} & \{\overline{0}\} \\ \overline{1} & \{\overline{0}\} & \{\mathbb{Z}_4\} & \{\overline{0},\overline{2}\} & \{\mathbb{Z}_4\} \\ \overline{2} & \{\overline{0}\} & \{\overline{0},\overline{2}\} & \{\overline{0}\} & \{\overline{0},\overline{2}\} \\ \overline{3} & \{\overline{0}\} & \{\mathbb{Z}_4\} & \{\overline{0},\overline{2}\} & \{\mathbb{Z}_4\} \end{array}$$

Bu durumda $(\mathbb{Z}_4, +, \circ)$ çarpımsal bir hiperhalkadır [28]. $Q = \{\overline{0}\}$ hiperidealini düşünelim. $P = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ olsun. Q bir P asalımsı hiperidealdir. $r = \overline{2}$ olsun. $r \circ P = \{\overline{2}, \overline{0}\} \circ \overline{2} = \{\overline{0}, \overline{0}\} \subseteq \{\overline{0}\}$ olduğundan Q bir Mori güçlü asalımsı hiperidealdir.
$\{\overline{0}, \overline{2}\} \nsubseteq \{\overline{0}\}$, $\{\overline{0}, \overline{2}\}^2 = \{\overline{0}\} \subseteq Q$ olduğundan Q bir Noether güçlü asalımsı hiperidealdir.

Önerme 6.1. *Q, R hiperhalkasının bir Noether güçlü P asalımsı hiperideali olsun. O zaman, Q bir düzgün P asalımsı hiperidealdir.*

İspat. Q, R hiperhalkasının bir Noether güçlü P asalımsı hiperideali olsun. $a, b \in R$ olsun öyle ki $a \circ b \subseteq Q$ ve $a \notin Q$ olduğunu kabul edelim. Q nun P asalımsı olmasından $b \in P$ dir. Pozitif bir n tamsayısı için $b^n \subseteq P^n \subseteq Q$ olduğundan $b^n \subseteq Q$ elde edilir. ■

Örnek 6.4. $(\mathbb{Z}, +, .)$ *tamsayılar halkasını düşünelim. $A = \{2, 3\}$ olsun. Bu durumda $(\mathbb{Z}_A, +, .)$ çarpımsal bir hiperhalkadır. Bu hiperhalkada $Q = 8\mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda $P = 2\mathbb{Z}$ dir. $r = 3 \in \mathbb{Z} - Q$ için; $3 \circ 2\mathbb{Z} = 3 \circ \{2.n : n \in \mathbb{N}\} = \{12.n, 18.n : n \in \mathbb{N}\} \nsubseteq Q$ olduğundan Q Mori güçlü asalımsı hiperideal değildir.*

Önerme 6.2. *R çarpımsal bir hiperhalka ve P de R nin bir asal hiperideali olsun. Eğer P^n, R nin bir asalımsı hiperideali ise P^n bir düzgün asalımsı hiperidealdir.*

İspat. Düzgün asalımsı hiperideal tanımından açıktır.

■

Önerme 6.3. *R çarpımsal bir hiperhalka olsun. Q, R nin bir düzgün P asalımsı hiperidealidir ancak ve ancak aşağıdaki iki koşul sağlanır.*
(1) Q, R nin bir P asalımsı hiperidealidir ve
(2) Pozitif bir n tamsayısı vardır öyle ki $P = \{r \in R : r^n \subseteq Q\}$ dir. Dahası $ord(Q) = N$, (2) koşulunu sağlayan en küçük pozitif tamsayıdır.

İspat. Varsayalım ki Q, R nin bir düzgün P asalımsı hiperideali olsun. Birinci koşul kabulden sağlanır. $r \in P$ olsun. Pozitif bir t tamsayısı için $r^{t-1} \circ r = r^t \subseteq Q$ fakat $r^{t-1} \nsubseteq Q$ dur. Buradan r nin herhangi bir kuvveti Q nun alt kümesi bulunur. Q nun mertebesi N olduğundan $r^N \subseteq Q$ elde edilir.
Tersine iki koşulun da sağlandığını varsayalım. $r,s \in R$ için $r \circ s \subseteq Q$ ve $r \notin Q$ olsun. (1) den $s \in P$ dir. (2) den $s^n \subseteq Q$ elde edilir.

■

6.1 Düzgün Asalımsı Hiperideallerin Özellikleri

Önerme 6.4. *R çarpımsal bir hiperhalka olsun. Q_1, Q_2 de $Q_1 \subseteq Q_2$ şartını sağlayan iki düzgün asalımsı hiperideal olsun. Bu durumda $ord(Q_1) \geq ord(Q_2)$ dir.*

İspat. $ord(Q_1) = a$ ve $ord(Q_2) = b$ olsun. Q_1, Q_2 düzgün asalımsı hiperidealler olduğundan $r,s \in R$ için $r \circ s \subseteq Q_1$ ve $r \notin Q_1$ iken $s^b \subseteq Q_1 \subseteq Q_2$ dir. $s \in P$ olduğundan $s^a \subseteq Q_1 \subseteq Q_2$ ve $s^a \subseteq Q_2$ bulunur. Önerme 6.3. den $s^{b-1} \nsubseteq Q_1$ dir. $a > b-1$ yani $a \geq b$ elde edilir.
Mertebeleri eşit fakat kendileri eşit olmayan düzgün P asalımsı hiperidealler bulunabilir. ■

Örnek 6.5. *$(\mathbb{Z},+,.)$ tamsayılar halkası için hiperçarpımı $x \circ y = \{2xy, 4xy\}$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $(\mathbb{Z},+,\circ)$ bir hiperhalkadır. Bu hiperhalkada $Q_1 = 4\mathbb{Z}$ ve $Q_2 = 9\mathbb{Z}$ hiperidealleri düzgün asalımsı hiperideallerdir. $Q_1 \neq Q_2$ fakat $ord(Q_1) = ord(Q_2) = 2$ dir.*

Teorem 6.1. *I bir indeks kümesi ve $\{Q_i\}_{i \in I}$, R çarpımsal hiperhalkasının düzgün P asalımsı hiperideallerinin kümesi olsun öyle ki $max ord(Q_i) = N$ olsun. O zaman $\cap_{i \in I} Q_i$ de R nin bir düzgün P asalımsı hiperidealidir ve mertebesi N dir.*

İspat. $Q = \cap_{i \in I} Q_i$ olsun. Q_i ler P asalımsı hiperideal olduğundan $rad(Q) = \cap_{i \in I} rad(Q_i) = P$ dir. $a, b \in R$ olsun öyle ki $a \circ b \subseteq Q$ ve $a \notin Q$ olsun. Bir $t \in I$ için; $a \circ b \subseteq Q_t$ ve $a \notin Q_t$ vardır. Buradan $b \in P$ ve $b^N \subseteq Q$ bulunur. Böylece Q nun mertebesi en fazla N olan bir düzgün P asalımsı hiperideal olduğu bulunur. Önerme 6.3. den N nin $P = \left\{r \in R : r^N \subseteq Q\right\}$ koşulunu sağlayan en küçük pozitif tamsayı olduğunu biliyoruz. $Q_j \in Q_i$ mertebesi N olan düzgün P asalımsı hiperideal olsun. Böylece $b \in P$ vardır öyle ki $b^{N-1} \nsubseteq Q_j$ ve $b^{N-1} \nsubseteq Q$ dur. Buradan Q nun mertebesi N olmalıdır.

■

Yorum. Genel olarak iki düzgün asalımsı hiperidealin kesişimi düzgün asalımsı hiperidealdir diyemeyiz.

Örnek 6.6. $(\mathbb{Z}, +, .)$ *tamsayılar halkasını düşünelim.* $A = \{2, 4\}$ *olsun. Bu durumda* $(\mathbb{Z}_A, +, .)$ *çarpımsal bir hiperhalkadır. Tanımlanan çarpımla birlikte* $Q_1 = 6\mathbb{Z}$ *ve* $Q_2 = 4\mathbb{Z}$ *olsun.* $Q_1 \cap Q_2 = 12\mathbb{Z}$ *düzgün asalımsı hiperideal değildir.*

Önerme 6.5. $f : R \longrightarrow S$ *ye örten bir iyi hiperhalka homomorfizması olsun.* Q *da* R *nin bir* C*-ideali olsun öyle ki* $çekf \subseteq Q$ *şartını sağlasın.* Q *,*R *nin bir düzgün* P *asalımsı hiperideali ise* $f(Q)$ *da* S *nin bir düzgün* P *asalımsı hiperidealidir.*

İspat. Öncelikle $f(Q)$ nun S nin bir hiperideali olduğunu gösterelim. $r_1, r_2 \in R$ ve $f(r_1), f(r_2) \in f(Q)$ olsun. $f(r_1) - f(r_2) = f(r_1 - r_2) \in f(Q)$ ve f örten homomorfizma olduğundan $f(r) = s$ olacak şekilde $s \in S$ ve $r \in R$ vardır öyle ki $s \circ f(x) = f(r) \circ f(x) = f(rx) \subseteq f(Q)$ bulunur.
$r_1 \circ r_2 \subseteq f(Q)$ olsun. f örten olduğundan $f(r_1) = s_1$ ve $f(r_2) = s_2$ olacak şekilde $r_1, r_2 \in R$ vardır. $f(r_1 \circ r_2) = f(r_1) \circ f(r_2) = s_1 \circ s_2 \subseteq f(Q)$ ve $0 \in f(Q) - f(r_1 \circ r_2)$ dir. Buradan $0 \in f(Q) - f(r_1 \circ r_2) = f(Q - r_1 \circ r_2) = \{f(t) : t \in Q - r_1 \circ r_2\}$ vardır öyle ki $f(m) = 0 \in \langle 0 \rangle \subseteq çekf \subseteq Q$ olacak şekilde bir $m \in Q - r_1 \circ r_2$ vardır. Böylece $Q - r_1 \circ r_2 \cap Q \neq \emptyset$ bulunur. Q bir C-ideal olduğundan $Q - r_1 \circ r_2 \subseteq Q$ ve $r_1 \circ r_2 \subseteq Q$ bulunur. Q, düzgün P asalımsı hiperideal olduğundan $r_1 \circ r_2 \subseteq Q$ iken $r_1 \notin Q$ ve $r_2 \in P$ dir. Buradan $f(r_1) \notin f(Q)$ ve $f(r_2) \in f(P)$ yani $[f(r_2)]^n \subseteq f(Q)$ elde edilir. ■

Önerme 6.6. $f : R \longrightarrow S$ *ye bir iyi hiperhalka homomorfizması olsun ve* Q *da* S *nin bir düzgün* P *asalımsı hiperideali olsun. O zaman* $f^{-1}(Q)$*,* R *nin düzgün* $f^{-1}(P)$ *asalımsı hiperidealidir.*

İspat. Q, S nin bir düzgün P asalımsı hiperideali olsun. $a, b \in R$ olsun öyle ki $a \circ b \subseteq f^{-1}(Q)$ ve $a \notin f^{-1}(Q)$ olsun. Homomorfizmadan $f(a) \circ f(b) \subseteq Q$ ve $f(a) \notin Q$ olduğundan ayrıca Q nun kabulunden $f(b) \in P$ elde edilir. $b \in f^{-1}(P)$ ve $b^n \subseteq f^{-1}(Q)$ bulunur. ■

Sonuç 6.1.1. R *çarpımsal bir hiperhalka olsun.* I*,* R *nin bir hiperideali ve* Q *da* R *nin* I *yı içeren bir* C*-ideali olsun öyle ki* $çekf \subseteq Q$ *şartını sağlasın.* Q*,* R *nin bir düzgün* P *asalımsı hiperidealidir ve mertebesi* N *dir ancak ve ancak* Q/I *da* R/I *nın mertebesi* N *olan bir düzgün* P/I *asalımsı hiperidealidir.*

İspat. $f : R \longrightarrow R/I$ bir örten iyi hiperhalka homomorfizması olsun. Önerme 6.5. den Q, R nin bir düzgün P asalımsı hiperidealidir ve mertebesi en fazla N dir. $r + I \in P/I$ vardır öyle ki $(r + I)^{N-1} \nsubseteq Q/I$ ve $r \in P$ için $r^{N-1} \nsubseteq Q$ elde edilir. Buradan Q nun mertebesi N olmalıdır.

Tersine Q nun mertebesi N olan bir düzgün P asalımsı hiperideal olduğunu düşünelim. $r+I, s+I \in R/I$ olsun öyle ki $(r+I)\circ(s+I) \subseteq Q/I$ ve $r+I \notin Q/I$ olsun. $(r+I)\circ(s+I) = (r \circ s + I) \subseteq Q/I$ elde edilir. Buradan $r \circ s \subseteq Q$ bulunur. $r \notin Q$ olduğundan $s \in P$ yani $s + I \in P + I$ elde edilir. Yani $s^n + I \subseteq Q/I$ bulunur. ■

7
SONUÇ ve ÖNERİLER

Çalışmamızda öncelikle hiperyapılar ile ilgili geniş bir literatür taraması yapılmıştır. Özellikle Krasner hiperhalkası ve çarpımsal hiperhalka araştırılmıştır. 2-yutan idealler, δ-asalımsı idealler ve özellikleri Krasner hiperhalkasında incelenmiştir. Daha sonra çarpımsal hiperhalkalarda 2-yutan δ-asalımsı idealler üzerinde çalışılmıştır. Son bölümde ise düzgün asalımsı ideallerin çarpımsal hiperhalkalardaki durumu araştırılmıştır.

Hiperyapılar geliştirilmeye çok uygun olması ve uygulamalı birçok alanda kullanılmasından dolayı üzerinde çalışılması çok gerekli bir konudur. Klasik cebirdeki birçok konu hiperyapılarda araştırılabilir.

KAYNAKÇA

[1] F. Marty, “Sur une generalization de la notion de groupe,” in *8th congress Math. Scandinaves*, 1934, pp. 45–49.

[2] M. Benado, “Les ensembles partiellement ordonnés et le théorème de raffinement de schreier. ıı. théorie des multistructures,” *Czechoslovak Mathematical Journal*, vol. 5, no. 3, pp. 308–344, 1955.

[3] A. Dietzman, “On the multigroups of complete conjugate sets of elements of a group, cr (doklady) acad,” *Sci. URSS (NS)*, vol. 49, pp. 315–317, 1946.

[4] W. Prenowitz, “Spherical geometries and multigroups,” *Canadian journal of Mathematics*, vol. 2, pp. 100–119, 1950.

[5] H. Campaigne, “Partition hypergroups,” *American Journal of Mathematics*, vol. 62, no. 1, pp. 599–612, 1940.

[6] M. Kuntzmann, “Opérations multiformes. hypergroupes,” *CR Acad. Sci. Paris Math*, vol. 204, pp. 1787–1788, 1937.

[7] M. Dresher O. Ore, “Theory of multigroups,” *American Journal of Mathematics*, vol. 60, no. 3, pp. 705–733, 1938.

[8] M. Krasner, “A class of hyperrings and hyperfields,” *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol. 6, no. 2, pp. 307–311, 1983.

[9] M. Koskas, “Groupoıds, semı-hypergroups and hypergroups,” *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, vol. 49, no. 2, p. 155, 1970.

[10] J. Mittas, “Hypergroups canoniques,” *Math. Balkanica*, vol. 2, pp. 165–179, 1972.

[11] Y. Sureau, “Contribution à la théorie des hypergroupes et hypergroupes opérant transitivement sur un ensemble,” PhD thesis, 1980.

[12] R. Rota, “Sugli iperanelli moltiplicativi,” *Rend. Di Mat., Series*, vol. 7, no. 4, p. 2, 1982.

[13] B. Davvaz A. Salasi, “A realization of hyperrings,” *Communications in Algebra®*, vol. 34, no. 12, pp. 4389–4400, 2006.

[14] M. Velrajan A. Asokkumar, “Note on isomorphism theorems of hyperrings,” *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol. 2010, 2010.

[15] B. Davvaz, A. Dehghan Nezhad, A. Benvidi, “Chemical hyperalgebra: Dismutation reactions,” *Match-Communications in Mathematical and Computer Chemistry*, vol. 67, no. 1, p. 55, 2012.

[16] M. Kaewneam Y. Kemprasit, “On homomorphisms of some multiplicative hyperrings,” *Ital. J. Pure Appl. Math*, vol. 27, pp. 313–320, 2010.

[17] R. Procesi R. Rota, “On some classes of hyperstructures,” *Discrete mathematics*, vol. 208, pp. 485–497, 1999.

[18] D. Zhao, “δ-primary ideals of commutative rings,” 2001.

[19] A. Badawi, “On 2-absorbing ideals of commutative rings,” *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, vol. 75, no. 3, pp. 417–429, 2007.

[20] J. A. Cox A. J. Hetzel, “Uniformly primary ideals,” *Journal of Pure and Applied Algebra*, vol. 212, no. 1, pp. 1–8, 2008.

[21] B. Fahid Z. Dongsheng, “2-absorbing δ-primary ideals in commutative rings,” *Kyungpook Mathematical Journal*, vol. 57, no. 2, 2017.

[22] B. Davvaz, *Hyperring theory and applications*. 2007.

[23] F. Çallıalp Ü. Tekir, *Değişmeli halkalar ve modüller*. Birsen Yayınevi, 2009.

[24] R. Y. Sharp, *Steps in commutative algebra*, 51. Cambridge university press, 2000.

[25] D. G. Northcott, *Ideal theory*. Cambridge University Press, 2004, vol. 42.

[26] J. A. Huckaba, *Commutative rings with zero divisors*. Dekker, 1988.

[27] N. Ramaruban, “Commutative hyperalgebra,” PhD thesis, University of Cincinnati, 2014.

[28] U. Dasgupta, *On prime and primary hyperideals of a multiplicative hyperring*, 2012.

[29] N. Suzen G. Yesilot, “On 2-absorbing primary hyperideals of multiplicative hyperrings,” *arXiv preprint arXiv:1803.09921*, 2018.

[30] E. Ozel Ay G. Yesilot, “Some properties of 2-absorbing hyperideals of krasner hyperrings,” in *Proceedings of International Congress on Fundamental and Applied Sciences*, 2016.

[31] E. Ozel Ay, G. Yesilot, D. Sonmez, “δ-primary hyperideals on commutative hyperrings,” *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, vol. 2017, 2017.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

İletişim Bilgileri: elif-ozel@hotmail.com

Makale

1. Ozel Ay E., Yeşilot G., Sönmez D., Delta Primary Hyperideals on Commutative Hyperrings, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Vol. 2017, 5428160

Konferans Bildirisi

1. Özel Ay E., Yeşilot G. , Some Properties of 2- Absorbing Hyperideals of Krasner Hyperring, International Congress on Fundemantal and Applied Sciences(ICFAS-2016), 22-26 Ağustos, İstanbul

2. Özel Ay E., Yeşilot G., Sönmez D. , Delta Primary Hyperideals on Commutative Hyperrings, 5th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2016), Belgrad, 16 Ağustos 2016, ss. 18