T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞMELİ HALKALAR ÜZERİNDEKİ BAZI BULANIK İDEALLER

Deniz SÖNMEZ

DOKTORA TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Danışman
Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT

Şubat, 2020

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DEĞİŞMELİ HALKALAR ÜZERİNDEKİ BAZI BULANIK İDEALLER

Deniz SÖNMEZ tarafından hazırlanan tez çalışması 20.02.2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programı **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT
Yıldız Teknik Üniversitesi
Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi ____________________

Prof. Dr. Bayram Ali ERSOY, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi ____________________

Prof. Dr. Uğur ŞENGÜL, Üye
Marmara Üniversitesi ____________________

Prof. Dr. Ömer GÖK, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi ____________________

Doç. Dr. Esra ŞENGELEN SEVİM, Üye
Bilgi Üniversitesi ____________________

Danışmanım Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Değişmeli Halkalar Üzerindeki Bazı Bulanık İdealler başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Deniz SÖNMEZ

Bu çalışma, TÜBİTAK BİDEB 2211-E Doğrudan Yurt İçi Doktora Burs Programı ve 2015-01-03-DOP03 kodlu YTÜ BAPK projesi ile desteklenmiştir.

Oğlum Berat Alp'e

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimimde tanıştığım, o günden bugüne bana bilgileriyle yoluma ışık tutan, insanlığıyla, eğitici rolüyle, hayattaki duruşuyla her zaman kendisini örnek aldığım, emeklerini benden esirgemeyen, tüm soru ve sorunlarımda bana çözüm sunan, ömrüm boyunca minnet duyacağım saygıya değer danışman hocam Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT'a; burs vererek eğitimimde finansal olarak yanımda olan bilimin ve bilim insanının destekçisi TÜBİTAK'a;

Bugünlere gelmemin ve başarılı olmamın sebebi bildiğim anneme, varlığıyla güç aldığım şükrümün sebebi çok sevgili eşime ve hayatımın anlamı olan biricik oğluma teşekkürü bir borç bilir, en içten duygularımla saygı ve sevgilerimi sunarım.

Deniz SÖNMEZ

İÇİNDEKİLER

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR 52

SİMGE LİSTESİ

$\cup$	Birleşim
μ	Bulanık Alt Küme
$f(\mu)$	Bulanık Alt Kümenin f Altındaki Görüntüsü
$f^{-1}(\mu)$	Bulanık Alt Kümenin f Altındaki Ters Görüntüsü
x_r	Bulanık Nokta
Çekf	Çekirdek f
$\diagdown$	Fark
$\sqrt{I}$	İdeal I'nın Radikali
$\cap$	Kesişim
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Halkası
μ^*	μ'nün Destekliyecisi
$Im\mu$	μ'nün Görüntü Kümesi
μ_t	μ'nün t-Seviye Kümesi
$\vee$	Maksimum ya da Supremum
$\wedge$	Minimum ya da İnfimum
$\mathscr{S}(M)$	M Modülünün Alt Modüllerinin Kümesi
λ_M	M'nin Karakteristik Fonksiyonu
$LI(R)$	R Halkasının Bulanık İdeallerinin Kümesi
$\mathscr{I}(R)$	R Halkasının İdeallerinin Kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel Sayılar Halkası
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Halkası
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar Halkası
L^X	X'in Tüm Bulanık Alt Kümelerinin Ailesi
1_Y	Y'nin Karakteristik Fonksiyonu

ŞEKİL LİSTESİ

ÖZET

Değişmeli Halkalar Üzerindeki Bazı Bulanık İdealler

Deniz SÖNMEZ

Matematik Anabilim Dalı
Doktora Tezi

Danışman: Doç. Dr. Gürsel YEŞİLOT

Matematikte, mühendislikte ya da çeşitli teknik alanlarda ifadesi zor ya da veriye dökmesi imkansız olan belirsizliklerin anlatımına ve çözümüne olanak sağlayan bulanık mantığa ihtiyaç git gide artmaktadır. Bu ihtiyaç üzerine bulanık küme kavramı geliştirilmiş temel tanım ve özellikleri ortaya çıkmıştır. Zadehin "Bulanık Kümeler" adlı çalışmasından bugüne kadar bu alanda birçok çalışma yapılmıştır. Bu alanlardan biri olan bulanık halkanın önemli bir yapıtaşı olan asal ve asalımsı bulanık idealler üzerine her ne kadar çalışmalar olsa da, asal ve asalımsı bulanık ideallerin genişlemesi henüz yapılmamıştır.

Bu tezde, bulanık idealler bir fonksiyon yardımı ile genişletecek, yeni bir ideal yapısı oluşturulacak ve bu yapının özellikleri araştırılacaktır. Daha sonra asalımsı bulanık ideal ve asal bulanık idealin genellemesi olan 2-yutan asalımsı bulanık ideal kavramı tanıtılacak ve temel özellikleri incelenecektir. Tüm bu çalışmalar ışığında da her iki kavram sentezlenerek 2-yutan δ-asalımsı bulanık ideal kavramı karakterize edilecektir. Bulanık halka teorisinde yapığımız çalışmaları bulanık modül teorisinde de araştırıp, tüm özellikleriyle ele alınacaktır.

Anahtar Kelimeler: Delta asalımsı bulanık idealler, 2-yutan bulanık idealler, 2-yutan asalımsı bulanık idealler, delta asalımsı bulanık alt modüller

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ABSTRACT

Some Fuzzy Ideals On Commutative Rings

Deniz SÖNMEZ

Department of Mathematics
Doctor of Philosophy Thesis

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Gürsel YEŞİLOT

There is a growing need for fuzzy logic in mathematics, engineering, or in various technical fields that allows expression and resolution of uncertainties that are difficult to express or impossible to pour into data. Based on this need, the concept of fuzzy set has been developed and its basic definitions and properties have emerged. Since the study of Zadeh titled "Fuzzy Sets", many studies have been conducted in this field. Although there are studies on prime and prime fuzzy ideals, an important building block of fuzzy ring, which is one of these areas, the expansion of prime and prime fuzzy ideals has not been done yet.In this thesis, fuzzy ideals will be expanded with the help of a function, a new ideal structure will be formed and the properties of this structure will be investigated. Then, the concept of 2-absorbing primary fuzzy ideal which is the generalization of prime fuzzy ideal and primary fuzzy ideal will be introduced and its basic properties will be examined. In the light of all these studies, both concepts will be synthesized and the 2-absorbing delta primary fuzzy ideal concept will be characterized. Our work in fuzzy ring theory will also be investigated in fuzzy module theory and will be covered with all its features.

Keywords: Delta primary fuzzy ideals, 2-absorbing fuzzy ideals, 2-absorbing primary fuzzy ideals, delta primary fuzzy submodules

YILDIZ TECHNICAL UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

1
GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Hayatta olduğu gibi; felsefede, mühendislik gibi teknik alanlarda, matematikte, sağlık bilimlerinde belirsizlikleri çözmek hatta anlamak her zaman kolay ya da mümkün olmayabilir. Olsa bile çözümlerin karşılığı olarak "evet" ya da "hayır", "doğru" ya da "yanlış", "1" ya da "0" yeterli gelmeyebilir. Aslında bu mantık işleyişi-"Boolean Mantığı"- bilgisayarlarda dahi kullanılıyor olsa da gelişen dünyada Aristo'nun dünyayı sadece siyah veya beyaz olarak kabul etmesinin aksine grilerin hatta açık gri ya da koyu, siyaha yakın gri gibi ara değerlerin de olması ile çelişmektedir. İşte hayatta siyah ve beyaz arasında sonsuz renk tonu olduğu gibi, matematikte ifade edilemeyen belirsizlikleri tanımlama ihtiyacından dolayı bulanık mantık bu noktada devreye girmişir. Bu konuda bir milat sayılan Lotfi Askerzade Zadeh'in "Bulanık Kümeler" [1] makalesi ile bulanık mantık sisteminin temelleri kurulmuş ve doğrunun da bir derecesi olduğu belirtilerek bulanık mantık matematiğe dahil edilmiş oldu. Bu çalışmayla ortaya atılan ana fikir; envensel küme içindeki elemanların bir kümeye ait veya ait değil olarak kesin bir çizgiyle ayrılmasından ziyade, bu kesin yargıyı ortadan kaldırıp kümeye aitliğin derece ile ifade edilebileceğine dayanmasıdır. Klasik mantığa bir alternatif olan bulanık mantık, uygulama alanlarında çözüm ürettiği gibi, bir çok araştırmacı tarafından cebirsel yapıların özelliklerini araştırmada da bir araç olmuştur.

Rosenfeld [2] yaptığı çalışmada bulanık küme kavramından yararlarak bulanık grup teorisini ortaya çıkarmıştır. Bu teoriden sonra Das [3] da seviye alt gruplarını inşaa etmiş ve böylece klasik cebir teorisi ile bulanık cebir teorisi arasındaki köprünün temellerini atmıştır. Bulanık grup teorisi inşaası üzerine de ilerleyen yıllarda Liu [4] tarafından bulanık halka teorisi kurulmuş ve bulanık ideal kavramları tanımlanmıştır. Ardından Mukherjee ve Sen [5] yine bulanık idealler ile ilgili çalışmalar yapmıştır. Klasik halka teorisinde asal idealler ne derece önemli ise bulanık halka teorisinde de asal bulanık idealler o kadar öneme sahip olmuş ve asal bulanık ideal kavramı 1989'da yine Mukherjee ve Sen [6] tarafından karakterize edilmiş ardından Malik ve Mordeson tarafından [7] çalışmasıyla geliştirilmiştir. Bu tanımlamadan sonra yine

Malik ve Mordeson'nun [8]'deki çalışmalarında asalımsı bulanık ideal ve radikal ideal kavramlarından bahsedilmiştir. Yine [9, 10], gibi birçok matematikçinin çalışmasında bulanık halka teorisi ilgi odağı olmuştur.

Bulanık halka teorisinde çalışmalar günümüze kadar geliştirilerek devam ederken klasik halka teorisinde de birçok yeni makaleler yayınlanmıştır. Klasik halka teorisinin temel kavramlarından olan asal ve asalımsı ideallerin genelleştirmesi çalışmaları bu yayınlardan başlıcalarıdır. 2001 yılında Zhao'nun [11] çalışmasında δ ideal genişlemesi kavramı verilerek asalımsı ideallerin genel bir tanımı yapılmıştır. Asalımsı ideallerin genişlemesi incelendikten sonra 2007 yılında ise Badawi tarafından [12] çalışmasında asal ve asalımsı ideallerin genellemesi olan 2-yutan idealler tanımlanmış daha sonra [13] çalışmasında da 2-yutan asalımsı idealler tanıtılmıştır. Bu araştırmalar baz alınarak 2017 yılında ise Zhao ve Fahid tarafından [14] çalışması yapılarak 2-yutan asalımsı idealler ile delta asalımsı idealler arasındaki ilişki sentezlenmiş bir sonraki çalışmalar için de ilham kaynağı olmuştur.

Klasik halka teorisindeki bu problemlerin çözümlenmesiyle birlikte modül teorisinde de bu yapıların nasıl tanımlandığı sorusu ortaya çıkmış, bu kavramlar modül teorisinde de tek tek ele alınmıştır. Geliştirilen modül teorisi tanımları bulanık halka teorisinde olduğu gibi bulanık modül teorisinde de merak uyandırmıştır. Bunun sonucunda bulanık modüller,bulanık asal ve asalımsı alt modüller gibi birçok yeni tanım yapılmış, Zahedi ve Al-Shamiri'nin [15–17]'deki makalelerinde olduğu gibi birçok çalışmaya kaynak olmuştur. Atani'nin [18]'deki çarpımsal bulanık modüller ile ilgili çalışmasıyla yeni bir tanım ortaya çıkmış ve bu kavram yardımıyla bulanık modül teorisi günümüze kadar geliştirilmeye devam etmiştir.

1.2 Tezin Amacı

Bu tez çalışmasında, klasik halka teorisi ve modül teorisinde tanımlanmış olan asal ve asalımsı ideal ve alt modüllerin bazı özel hallerini inceleyip bu kavramları bulanık halka ve bulanık modül teorisine uygulamak amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda daha önce tanımlanan bulanık idealler, bir fonksiyon yardımı ile genişletilecek böylece asalımsı bulanık ideal gibi bazı özel bulanık ideallerin genellemesi yapılacaktır. Tanımlanan yeni kavramların bulanık halka homomorfizması altındaki karakteristiği incelerek homomorf görüntü ve ters görüntü gibi cebirsel yapıları araştırılacaktır. Tanımlanan yeni bulanık idealler, seviye kümeleri yardımı ile halka teorisindeki özellikleri incelenecek ve halka teorisi ile bulanık halka teorisi arasındaki ilişki kurulacaktır. Tüm bu çalışmaların sonucunda bulanık halka ve modül teorisindeki problemler için bir kaynak oluşturulması hedeflenmiştir.

1.3 Orijinal Katkı

Değişmeli ve birimli halkaların idealleri üzerinde Zhao [11] tarafından tanımlanmış δ ideal genişlemesi baz alınarak bulanık ideal genişlemesi tanımlanacak ve δ-asalımsı bulanık idealler üzerine çalışmalar yapılacaktır. Bu çalışmada, δ-asalımsı bulanık ideallerin bazı özellikler altında homomorf görüntü ve ters görüntülerinin yapısı incelenecektir. Ayrıca birbiri ile bileşim ve kesişim gibi işlemleri ile ilişkileri ele alınacaktır. Ardından, 2-yutan bulanık idealler tanımlanacak ve 2-yutan asalımsı bulanık idealler için bir zemin hazırlanacaktır. Bu tanımlar ışığında asal ve asalımsı bulanık idealler ile ilişkileri araştırılacaktır. Son olarak δ-asalımsı bulanık ideal ile 2-yutan asalımsı bulanık ideallerin sentezi olan 2-yutan δ-asalımsı bulanık ideallerin yapısı incelenip özellikleri üzerine çalışmalar yapılacaktır.

2
TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezin ilerleyen bölümlerinde göreceğimiz yapıların daha anlaşılabilir olması için gerekli temel bilgileri vereceğiz. Bu genel bilgilerin hazırlanmasıda çoğunlukla First Course In Abstract Algebra [19], Algebra Rings, Modules and Categories I [20], Abstract Algebra: An Introduction [21], Soyut Cebir Çözümlü Problemleri [22] ve Steps In Commutative Algebra [23] kaynaklarından faydalanılmıştır.

2.1 Halkalar ve İdealler

Bu kısımda, ikili işlemli bir yapı olan halka kavramı ve idealleri hakkında temel bilgileri vereceğiz.

Tanım 2.1. R boş kümeden farklı bir küme ve "+" ve "·" işlemleri de R üzerinde ikili işlemler olsun. Aşağıdaki koşulların sağlanması durumunda R'ye bir halka denir ve $(R,+,\cdot\,)$ sıralı üçlüsü ile gösterilir.

i. $(R,+)$ bir değişmeli gruptur.

ii. "·" işlemi R üzerinde birleşmelidir.

iii. "·" işlemi "+" işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılmalıdır, yani her $a,b,c \in R$ için $(a+b)c = ac+bc$ ve $a(b+c) = ab+ac$ sağlanmalıdır.

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ ve $\mathbb{R}$ adi toplama ve çarpma işlemine göre birer halkadır.

Yorum 2.1. R'yi bir halka olarak aldığımızda Tanım 2.1 (i) gereği R değişmeli bir toplamsal gruptur ve grubun birimi olan "0_R" elemanı halkanın sıfırı olarak adlandırılır. Ayrıca her $a \in R$'nin toplamsal tersi "$-a$" ile gösterilip $a,b \in R$ olmak üzere $a+(-b) = a-b$ olarak yazılabilir.

Tanım 2.2. R bir halka olsun.

i. Eğer R halkası "$\cdot$" işlemine göre birimli ise kısaca R halkasına birimli halka denir ve halkanın birimi 1_R olarak gösterilir.

ii. Eğer R halkası "$\cdot$" işlemine göre değişmeli ise R halkasına değişmeli halka denir.

iii. R birimli halka olmak üzere sıfırdan farklı her $a \in R$ için $ab = ba = 1_R$ olacak şekilde bir $b \in R$ varsa b elemanına a'nın tersi, a'ya da terslenebilir eleman denir.

iv. Sıfırdan farklı iki elemanın çarpımı sıfır oluyor ise bu elemanlara sıfır bölen eleman denir. R halkasının sıfır bölen elemanı yoksa halkaya sıfır bölensiz halka denir.

Tanım 2.3. R bir birimli halka ve $1_R \neq 0_R$ olsun.

i. R halkası değişmeli ve sıfır bölensiz ise R'ye tamlık bölgesi adı verilir.

ii. R halkasının sıfırdan farklı her elemanının bir tersi var ise R'ye bölenler halkası (bölme halkası) denir.

iii. Değişmeli bölenler halkasına cisim denir.

Tanım 2.4. R bir halka ve S de R'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer S de R'deki işlemlere göre halka oluyor ise S'ye R'nin bir alt halkası denir.

$\mathbb{Z}$ halkası, $\mathbb{Q}$'nun bir alt halkası, $\mathbb{Q}$ halkası, $\mathbb{R}$'nin bir alt halkası ve $\mathbb{R}$ halkası da $\mathbb{C}$'nin bir alt halkasıdır.

Teorem 2.1. *R bir halka ve S de R'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. S kümesinin R'nin bir alt halkası olması için gerek ve yeter koşul her $a, b \in S$ için $a - b \in S$ ve $ab \in S$ olmasıdır.*

Teorem 2.2. *R bir halka ve $\{S_i\}_{i \in I}$ kümeler ailesi ise R'nin boştan farklı alt halkaları olsun. O halde $\bigcap_{i \in I} S_i$ arakesiti de R'nin bir alt halkasıdır.*

Tanım 2.5. R bir halka ve S de R'nin bir alt kümesi olsun. S'yi kapsayan tüm alt halkaların arakesitine S ile üretilen alt halka denir ve $< S >$ ya da (S) ile gösterilir.

Eğer S boş küme ise S'nin ürettiği alt halka sadece 0 elemanından oluşan sıfır halkasıdır.

Teorem 2.3. *$(R, +, \cdot)$ bir halka olsun. Eğer $a, b \in R$ için $ab = 0_R$ iken $a = 0_R$ veya $b = 0_R$ oluyorsa , yani R'nin sıfır böleni yoksa aşağıdakiler sağlanır.*

i. *Her $a, b \in R$ ve $0_R \neq c \in R$ için $ac = bc$ ise $a = b$ sağlanır. (sağdan kısaltma özelliği)*

ii. *Her $a, b \in R$ ve $0_R \neq c \in R$ için $ca = cb$ ise $a = b$ sağlanır. (soldan kısaltma özelliği)*

Tanım 2.6. $(R, +, \cdot)$ bir halka olsun. $a \in R$ için $na = 0_R$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ elemanı varsa bu elemanların en küçüğüne R halkasının karakteristiği denir. Eğer bu şekilde bir n elemanı yoksa R'nin karakteristiği sıfırdır denir.

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ cisimlerinin karakteristiği 0 iken $\mathbb{Z}_p$ (p asal) cisminin karakteristiği p'dir

Tanım 2.7. $(R, +, \cdot)$ bir halka ve $\emptyset \neq I$, R'nin bir toplamsal alt grubu için

i. Her $a, b \in I$ için $a - b \in I$

ii. Her $a \in I$ ve $r \in R$ için $ar \in I$ $(ra \in I)$

şartları sağlanıyor ise I'ya R'nin sağ ideali (sol ideali) denir. Hem sağ hem de sol ideal ise de iki taraflı ideal ya da kısaca ideal denir.

0_R ve R'nin kendisi R'nin aşikar idealleridir, aşikar olmayan tüm ideallerine de öz ideal denir.

Teorem 2.4. *R bir halka olmak üzere R'nin boştan farklı $\{I_i\}_{i \in J}$ idealler ailesinin arakesiti olan $I = \bigcap_{i \in J} I_i$ kümesi de R'nin bir idealidir.*

Tanım 2.8. R bir halka ve I da R'nin bir alt kümesi olsun. I'yı kapsayan tüm ideallerin arakesitine I ile üretilen ideal denir ve $< I >$ ya da (I) ile gösterilir. Eğer I kümesi tek bir $\{a\}$ elemanından oluşuyorsa $I = \{a\}$'nın ürettiği (a) idealine temel ideal denir.

Her ideali temel ideal olan halkaya temel ideal halkası, her ideali temel ideal olan tamlık bölgesinde de temel ideal bölgesi denir

Eğer I boş küme ise I nın ürettiği ideal sıfır idealidir.

Teorem 2.5. *R birimli ve değişmeli bir halka olsun. O halde $\emptyset \neq I \subset R$ idealinin ürettiği ideal $(I) = \{\sum_{i=1}^{n} r_i a_i : r_i \in R, a_i \in I, n \in \mathbb{Z}^+\}$ olur.*

Tanım 2.9. R bir halka, I ve J birer ideal olsun. I ve J ideallerinin toplamı olan

$$I + J = \{a + b : a \in I, b \in J\} \tag{2.1}$$

kümesi de R'nin bir idealidir.

Tanım 2.10. R bir halka, I ve J birer ideal olsun. I ve J ideallerinin çarpımı olan

$$IJ = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i : a_i \in I, b_i \in J, n \in \mathbb{Z}^+ \right\} \tag{2.2}$$

kümesi de R'nin bir idealidir.

Tanım 2.11. $(R, +, \cdot)$ ve $(S, \oplus, \odot)$ birer halka ve $f : R \to S$ bir fonksiyon olsun. Eğer ,

i. Her $a, b \in R$ için $f(a+b) = f(a) \oplus f(b)$

ii. Her $a, b \in R$ için $f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b)$

şartları sağlanıyorsa f'ye halka homomorfizması denir.

$f : R \to S$ halka homomorfizması için eğer f bire-bir ise f'ye monomorfizma , f örten ise epimorfizma, f hem örten hem de bire-bir ise de f'ye izomorfizma adı verilir.

Yorum 2.2. $(R, +, \cdot)$ halkasından $(S, \oplus, \odot)$ halkasına f halka homomorfizması aynı zamanda $(R, +)$'den $(S, \oplus)$'ye bir grup homomorfizması olduğundan $f(0_R) = 0_S$ ve her $a \in R$ için $f(-a) = -f(a)$ olur.

R bir halka ve $Id : R \to R$ birim fonksiyon olsun. Burada Id fonksiyonu bir halka homomorfizmasıdır, ayrıca bire-bir ve örtendir. Böylece Id bir izomorfizma olur.

Teorem 2.6. *R , S birer halka ve $f : R \to S$ bir örten homomorfizma olmak üzere,*

i. R değişmeli ise S de değişmelidir.

ii. R birimli ise S de birimlidir ve $f(1_R) = 1_S$.

iii. A, R'nin bir alt halkası ise $f(A)$ da S'nin bir alt halkasıdır.

iv. B, S'nin bir alt halkası ise $f^{-1}(B)$ de R'nin alt halkasıdır.

Tanım 2.12. f fonksiyonu $(R, +, \cdot)$ halkasından $(S, \oplus, \odot)$ halkasına tanımlı bir homomorfizma olsun.

$$f^{-1}\{0_R\} = \{a \in R : f(a) = 0_S\} \tag{2.3}$$

kümesine f'nin çekirdeği denir ve Çek$f$ ile gösterilir. Çekf de R'nin bir idealidir.

Teorem 2.7. *R bir halka ve I da R'nin bir ideali olsun. R'nin I'ya göre kalan sınıflarının kümesi olan R/I,*

$$\begin{aligned} (a+I) + (b+I) &= (a+b) + I \\ (a+I) \cdot (b+I) &= a \cdot b + I \end{aligned} \tag{2.4}$$

ile tanımlı "+" ve "·" işlemleri ile bir halkadır. Bu $(R/I,+,\cdot)$ halkaya da bölüm halkası denir.

Teorem 2.8. *R bir halka ve I da R'nin bir ideali olsun. $f : R \to R/I$'ya her $a \in R$ için $f(a) = a+I$ ile tanımlı f fonksiyonu bir epimorfizmadır ve Çek$f = I$'dır. Burada tanımlı f fonksiyonuna da doğal homomorfizma denir.*

2.1.1 Bazı Özel İdealler

Bu kısımda halka teorisindeki bazı özel yapıdaki ideallere ve aralarındaki ilişkilere dair genel bilgiler vereceğiz. Bu kısımı oluştururken ek olarak [11–13] makelelerinden faydanılmıştır. Tez boyunca aksi belirtilmedikçe tüm halkalar en az iki elemana sahip birim elemanlı ve değişmeli halka olarak ele alınacaktır.

Tanım 2.13. R bir halka ve M de bir ideal olsun. Eğer,

i. $M \neq R$

ii. R'nin $M \subset I \subset R$ olacak şekilde bir I ideali yoksa

M'ye maksimal ideal denir.

Tanım 2.14. R değişmeli bir halka ve P de R'nin kendisinden farklı bir ideali olsun. $a,b \in R$ için $ab \in P$ iken $a \in P$ ya da $b \in P$ şartlarından biri sağlanıyor ise P'ye asal ideal denir.

Tanım 2.15. R değişmeli bir halka ve P de R'nin kendisinden farklı bir ideali olsun. $a,b \in R$ için $ab \in P$ iken $a \in P$ ya da bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için $b^n \in P$ şartlarından biri sağlanıyor ise P'ye asalımsı ideal denir.

Teorem 2.9. *Her maksimal ideal bir asal ideal, ve her asal ideal bir asalımsı idealdir.*

Tanım 2.16. R değişmeli bir halka ve I da R'nin bir ideali olsun.

$$\sqrt{I} = \{a \in R : \text{bir } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için } a^n \in I\} \tag{2.5}$$

kümesine I'nın radikali denir ve $\sqrt{I}$ da R'nin bir idealidir.

Tanım 2.17. R değişmeli ve sıfırdan farklı birimli bir halka ve I bir ideal olsun. Herhangi $a,b,c \in R$ için $abc \in I$ iken $ab \in I$ ya da $ac \in I$ ya da $bc \in I$ şartlarından biri sağlanıyor ise I'ya 2-yutan ideal denir.

p asal bir tam sayı olmak üzere $\mathbb{Z}$ halkasının (p^2) ideali bir 2-yutan idealdir.

Teorem 2.10. *Her asal ideal bir 2-yutan idealdir.*

Tanım 2.18. R değişmeli ve sıfırdan farklı birimli bir halka ve I bir ideal olsun. Herhangi $a, b, c \in R$ için $abc \in I$ iken $ab \in I$ ya da $ac \in \sqrt{I}$ ya da $bc \in \sqrt{I}$ şartlarından biri sağlanıyor ise I'ya 2-yutan asalımsı ideal denir.

p asal bir tam sayı olmak üzere $\mathbb{Z}$ halkasının $n \in \mathbb{Z}^+$ için (p^n) ideali bir 2-yutan asalımsı idealdir.

Teorem 2.11. *Her 2-yutan ve asalımsı ideal bir 2-yutan asalımsı idealdir.*

Teorem 2.12. *R bir halka ve I bir ideal olsun. Eğer $\sqrt{I}$ ideali asal ise I ideali de 2-yutan asalımsı idealdir. Dolayısıyla, P asal ideali için de $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere P^n ideali de 2-yutan asalımsı ideal olur.*

Tanım 2.19. R bir halka ve I da bir 2-yutan asalımsı ideal olsun. O halde $P = \sqrt{I}$ ideali 2-yutan idealdir ve bu I idealine P-2-yutan asalımsı ideal denir

Teorem 2.13. *R halkasının $\{I_i\}_{i \in J}$ P-2-yutan asalımsı idealler ailesinin arakesiti olan $I = \bigcap_{i \in J} I_i$ kümesi de R'nin bir P-2-yutan asalımsı idealidir.*

Tanım 2.20. R birimli, değişmeli bir halka ve $\mathscr{I}(R)$, R'nin ideallerinin kümesi olmak üzere $\delta : \mathscr{I}(R) \to \mathscr{I}(R)$ için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa δ'ya ideal genişlemesi denir.

i. Her $I \in \mathscr{I}(R)$ için $I \subseteq \delta(I)$'dir.

ii. $I, J \in \mathscr{I}(R)$ olmak üzere $I \subseteq J$ iken $\delta(I) \subseteq \delta(J)$'dir.

R halkasının her I ideali için $\delta_1(I) = \sqrt{I}$ ile tanımlansın. $I \in \mathscr{I}(R)$ olduğundan $\delta_1(I) = \sqrt{I} \in \mathscr{I}(R)$'dir. Ayrıca $I, J \in \mathscr{I}(R)$ için $I \subseteq J$ ise $\delta_1(I) = \sqrt{I} \subseteq \sqrt{J} = \delta_1(J)$ olur ve δ_1 bir ideal genişlemesidir.

Tanım 2.21. R bir halka, I bir ideal ve δ bir ideal genişlemesi olsun. Her $a, b \in R$ için $ab \in I$ ve $a \notin I$ iken $b \in \delta(I)$ oluyor ise I'ya δ-asalımsı ideal denir.

Bu tanımın $ab \in I$ ve $a \notin \delta(I)$ iken $b \in I$ olmasına denk olduğu görülmektedir.

2.2 Modüller

Bu bölümde halka teorisi üzerine kurulu önemli bir yapı olan modüller hakkında genel bilgiler vereceğiz. Bu bilgilerin derlenmesinde genel olarak Multiplication Modules [24, 25], Değişmeli Halkalar ve Modüller [26] kaynaklarından faydalanılmıştır. Tezin önceki kısımlarında kabul edildiği gibi R halkası yine birimli ve değişmeli olarak kabul edilecektir.

Tanım 2.22. R bir halka ve $(M,+)$ bir değişmeli grup olsun. R ve M'nin skaler çarpımı ile tanımlı $\cdot : R \times M \to M$ fonksiyonu her $r,s \in R$ ve $m,n \in M$ için

i. $r(m+n) = rm + rn$

ii. $(r+s)m = rm + sm$

iii. $r(sm) = (rs)m$

iv. $1_R m = m$

şartlarını sağlıyorsa M'ye bir R-modül denir.

Aşağıdakiler modüller için birer örnektir.

i. Her R halkası, halkadaki çarpım işlemi ile kendi üzerinde bir R-modüldür.

ii. Her G toplamsal grubu, $\mathbb{Z} \times G \to G$ fonksiyonunda çarpım $n \in \mathbb{Z}, x \in G$ için $(n,x) \to nx$ ile tanımlandığında bir $\mathbb{Z}$-modül olur.

R bir halka, M bir R-modül ve N kümesi M'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer N de kendi başına bir R-modül ise N'ye M'nin alt modülü denir.

Aşağıdakiler alt modüller için birer örnektir.

i. R halkasını kendi üzerinde bir R-modül olarak aldığımızda R'nin idealleri R-modül R'nin alt modülleridir.

ii. Her G toplamsal grubunun alt grupları $\mathbb{Z} \times G \to G$ fonksiyonunda çarpım $n \in \mathbb{Z}, x \in G$ için $(n,x) \to nx$ ile tanımlandığında bir $\mathbb{Z}$-modül olur.

Tanım 2.23. R birimli, değişmeli bir halka, M bir R-modül ve $\mathscr{S}(M)$, M'nin alt modüllerinin kümesi olmak üzere $\delta : \mathscr{S}(M) \to \mathscr{S}(M)$ için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa δ'ya alt modül genişlemesi denir.

i. Her $N \in \mathscr{S}(M)$ için $N \subseteq \delta(N)$'dir.

ii. $N,K \in \mathscr{S}(M)$ olmak üzere $N \subseteq K$ iken $\delta(N) \subseteq \delta(K)$'dir.

2.3 Bulanık Halkalar ve Bulanık İdealler

Bu kısımda Bulanık Halka Teorisindeki temel bilgiler verilecektir. Bu bilgilerin edinilmesinde M. Mordeson'un Fuzzy Commutative Algebra adlı kitabından [27], Rosenfeld [2], Malik ve Mordeson [7, 28], Mukherjee ve Sen'in [5, 6, 8] çalışmalardan faydalanılmıştır.

Tanım 2.24. X boş kümeden farklı bir küme olmak üzere X'den $L = [0,1]$'ye tanımlı $\mu : X \to L$ fonksiyonuna X'in bulanık alt kümesi denir. X'in tüm bulanık alt kümelerinin ailesine de X'in bulanık kuvvet kümesi denir ve $L^X = \{\mu | \mu : X \to L\}$ ile gösterilir.

Yorum 2.3. $\mu : X \to L = [0,1]$ olmak üzere her $x \in X$ için $\mu(x) = c \in [0,1]$ oluyorsa μ'ye sabit bulanık alt küme denir. Tez boyunca aksi belirtilmedikçe tüm bulanık fonksiyonların sabitten farklı olduğunu ve $L = [0,1]$ kapalı aralağını da tam sıralı olarak kabul edeceğiz.

Tanım 2.25. μ , X kümesinin bulanık alt kümesi olsun.

$$Im\mu = \{\mu(x) : x \in X\} \tag{2.6}$$

ile tanımlanan kümeye μ'nün görüntü kümesi denir.

Tanım 2.26. μ , X kümesinin bulanık alt kümesi olsun.

$$\mu^* = \{x \in X : \mu(x) > 0\} \tag{2.7}$$

ile tanımlanan kümeye μ'nün destekleyicisi denir.

Tanım 2.27. X boş kümeden farklı bir küme ve Y de X'in bir alt kümesi olsun. $r \in L$ olmak üzere

$$r_Y(x) = \left\{ \begin{array}{ll} r, & x \in Y \\ 0, & x \notin Y \end{array} \right\} \tag{2.8}$$

ile tanımlı fonksiyon da bir bulanık alt kümedir. Burada $Y = \{y\}$ kümesi tek bir elemandan oluşuyorsa fonksiyon

$$y_r(x) = \left\{ \begin{array}{ll} r, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{array} \right\} \tag{2.9}$$

olarak tanımlanır ve L-nokta ya da bulanık nokta adını alır. x_s ve y_r iki bulanık noktasının çarpımı ise

$$(x_s y_r)(a) = ((xy)_{s\wedge r})(a) \left\{ \begin{array}{ll} s \wedge r, & a = xy \\ 0, & a \neq xy \end{array} \right\} \tag{2.10}$$

ile tanımlanır.

Eğer $r = 1$ ise de fonksiyon

$$1_Y(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \in Y \\ 0, & x \notin Y \end{array} \right\} \tag{2.11}$$

şeklinde ifade edilir ve Y'nin karakteristik fonksiyonu denir. $1_Y = \lambda_Y$ olarak da gösterilebilir.

Karakteristik fonksiyon yardımı ile klasik cebirden bulanık cebire bir bağlantı kurulabilmektedir.

Tanım 2.28. μ ve η , X kümesinin iki bulanık alt kümesi olsun. Her $x \in X$ için,

i. $\mu(x) = \eta(x)$ ise $\mu = \eta$'dır.

ii. $\mu(x) \leq \eta(x)$ ise $\mu \subseteq \eta$'dır. ($\mu(x) \lneq \eta(x)$ ise $\mu \subsetneq \eta$'dır.)

iii. $\lambda(x) = \mu(x) \wedge \eta(x) = min\{\mu(x), \eta(x)\}$ ile tanımlı λ bulanık alt kümesine μ ve η bulanık kümelerinin kesişimi denir ve $\lambda = \mu \cap \eta$ olarak ifade edilir.

iv. $\lambda(x) = \mu(x) \vee \eta(x) = max\{\mu(x), \eta(x)\}$ ile tanımlı λ bulanık alt kümesine μ ve η bulanık kümelerinin birleşimi denir ve $\lambda = \mu \cup \eta$ olarak ifade edilir.

İki bulanık kümenin kesişimi ve birleşiminin verilen tanımı genişletilerek herhangi bir bulanık aile kümesinin de en küçük üst sınır ve en büyük alt sınırı elde edilebilir.

v. $\{\mu_i : i \in I\}$, X 'in bulanık alt kümeleri ailesi olmak üzere, bulanık alt kümelerinin en küçük üst sınırı $\bigcap_{i\in I} \mu_i$;

$$\left(\bigcap_{i\in I} \mu_i\right)(x) = \bigwedge_{i\in I} \mu_i(x) \tag{2.12}$$

ve bulanık alt kümelerinin en büyük alt sınırı $\bigcup_{i\in I} \mu_i$;

$$\left(\bigcup_{i\in I} \mu_i\right)(x) = \bigvee_{i\in I} \mu_i(x) \tag{2.13}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.29. R bir halka ve μ, η ve ζ bulanık alt kümeler olsun. $x, y, z \in R$ için $\mu + \eta$, $\mu - \eta$, $\mu \cdot \eta$ ve $[\mu : \zeta]$ bulanık alt kümeleri

i. $(\mu + \eta)(x) = \bigvee_{x=y+z} \{\mu(y) \wedge \eta(z)\}$

ii. $(\mu - \eta)(x) = \bigvee_{x=y-z} \{\mu(y) \wedge \eta(z)\}$

iii. $(\mu \cdot \eta)(x) = \bigvee_{x=y\cdot z} \{\mu(y) \wedge \eta(z)\}$

iv. $[\mu : \zeta] = \cup\{\eta : \eta \in LI(R), \eta\zeta \subseteq \mu\}$

ile tanımlanır.

Tanım 2.30. Boş kümeden farklı bir X kümesinin bulanık alt kümesi olan μ için $t \in L = [0, 1]$ olmak üzere,

$$\mu_t = \{x \in X : \mu(x) \geq t\} \tag{2.14}$$

ile tanımlı kümeye μ'nün t-seviye alt kümesi ya da t-kesimi kümesi denir.

Bu tanım yardımı ile de bulanık cebirden klasik cebire geçiş sağlanmaktadır.

Teorem 2.14. *μ ve η , X kümesinin iki bulanık alt kümesi olsun. $t \in L$ için,*

i. $\mu \subseteq \eta$ ise $\mu_t \leq \eta_t$'dir.

ii. Bir $k \in L$ için $k \leq t$ ise $\mu_k \leq \mu_t$'dir.

iii. Her $t \in L$ için $\mu = \eta$ olması için gerek ve yeter koşul $\mu_t = \eta_t$ olmasıdır.

iv. Herhangi $k, t \in Im(\mu)$ için $\mu_t = \mu_k$ olması için gerek ve yeter koşul $t = k$ olmasıdır.

Teorem 2.15. *$\{\mu_i : i \in I\}$, X 'in bulanık alt kümeleri ailesi olsun. O halde $t \in L$ için,*

i. $\bigcap_{i \in I} (\mu_i)_t = \left(\bigcap_{i \in I} \mu_i\right)_t$

ii. $\bigcup_{i \in I} (\mu_i)_t \subseteq \left(\bigcup_{i \in I} \mu_i\right)_t$ *'dir. L sonlu zincir ise de eşitlik sağlanır.*

Teorem 2.16. *Boş kümeden farklı X ve Y kümeleri için, $\mu \in L(X)$ ve $\eta \in L(Y)$ ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun.*

μ'nün f fonksiyonu altındaki görüntüsü

$$f(\mu)(y) = \left\{ \begin{array}{ll} \vee\{\mu(x) : x \in X, f(x) = y\}, & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & f^{-1}(y) = \emptyset \end{array} \right\} \tag{2.15}$$

ile tanımlanır ve $f(\mu)$ de Y'nin bir bulanık alt kümesidir. η'nın f altındaki ters görüntüsü ise,

$$f^{-1}(\eta)(x) = \eta(f(x)) \tag{2.16}$$

ile tanımlanır ve $f^{-1}(\eta)$ da X'in bir bulanık alt kümesidir.

Tanım 2.31. R bir halka ve μ, R'nin bir bulanık alt kümesi olsun. Eğer her $x, y \in R$ için

i. $\mu(x - y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$

ii. $\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$

koşulları sağlanıyorsa μ'ye R'nin bulanık alt halkası denir ve R'nin tüm bulanık alt kümelerinin kümesi de $L(R)$ ile gösterilir.

$\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar halkası ve $\mu : \mathbb{Q} \to [0, 1]$'e bir fonksiyon olmak üzere ;

$$\mu(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \in \mathbb{Z} \\ 0, & x \notin \mathbb{Z} \end{array} \right\} \tag{2.17}$$

bulanık alt kümesi bir bulanık alt halkadır.

Tanım 2.32. R bir halka ve μ, R'nin bir bulanık alt kümesi olsun. Eğer her $x, y \in R$ için

i. $\mu(x - y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$

ii. $\mu(xy) \geq \mu(x)$

koşulları sağlanıyorsa μ'ye R'nin bulanık sağ ideali denir. (ii.) koşulu yerine

iii. $\mu(xy) \geq \mu(y)$

koşulu sağlanıyorsa da μ'ye R'nin bulanık sol ideali denir.

Tanım 2.33. R bir halka ve μ, R'nin bir bulanık alt kümesi olsun. Eğer her $x, y \in R$ için

i. $\mu(x-y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$

ii. $\mu(xy) \geq \mu(x) \vee \mu(y)$

koşulları sağlanıyorsa μ'ye R'nin bulanık ideali denir ve R'nin tüm bulanık ideallerinin kümesi de $LI(R)$ ile gösterilir.

Yorum 2.4. Bir bulanık idealin bulanık alt halka olduğu açıktır.

$\mathbb{Z}$ tam sayılar halkası ve $\mu \in L(\mathbb{Z})$ olmak üzere ;

$$\mu(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x = 0 \\ \frac{1}{2}, & x \in 2\mathbb{Z} - \{0\} \\ \frac{1}{3}, & \text{diğer} \end{array} \right\} \tag{2.18}$$

bir bulanık idealdir.

Tanım 2.34. R bir halka ve μ bir bulanık ideal olsun. R'nin x_r bulanık noktası için

$$< x_r > (\tilde{a}) = \left\{ \begin{array}{ll} r, & \tilde{a} = xa, \text{ en az bir } a \in R \text{ için} \\ 0, & \text{diğer} \end{array} \right\} \tag{2.19}$$

ile tanımlı bulanık idealine x_r bulanık noktası ile üretilmiş bulanık ideal denir.

Teorem 2.17. *R bir halka ve μ bir bulanık ideal olsun. Her $x, y \in R$ için*

i. $\mu(0_R) \geq \mu(x)$.

ii. $\mu(x) = \mu(-x)$.

iii. $\mu(x-y) = \mu(0_R)$ *ise* $\mu(x) = \mu(y)$*'dir.*

Teorem 2.18. *R bir halka olsun. R'nin $\{\mu_i\}_{i\in I}$ bulanık idealler (bulanık alt halkalar) ailesinin arakesiti olan $\mu = \bigcap_{i\in I} \mu_i$ kümesi de R'nin bir bulanık idealidir (bulanık alt halkasıdır).*

Teorem 2.19. *$\{\mu_i : i \in I\}$ kümesi R'nin bulanık ideallerinin bir zinciri olsun. O halde $\mu = \bigcup_{i \in I} \mu_i$ bulanık alt kümesi de bir bulanık idealdir.*

Teorem 2.20. *R bir halka ve μ ve η birer bulanık ideal olsun. O halde $[\mu : \eta]$ da bir bulanık idealdir.*

Teorem 2.21. *R bir halka olsun. μ, η ve ζ bulanık idealleri için $[\mu : \mu] = 1_R$ ve $\mu \subseteq [\mu : \eta]$'dir. Ayrıca $\mu \subseteq \eta$ ise $[\mu : \zeta] \subseteq [\eta : \zeta]$ ve $[\zeta : \eta] \subseteq [\zeta : \mu]$'dir.*

Lemma 2.1. *R bir halka ve μ bir bulanık alt küme olsun. μ'nün bir bulanık ideal olması için gerek ve yeter koşul $t \in [0, \mu(0)]$ için μ_t seviye alt kümesinin R'nin bir ideali olmasıdır.*

Literatürde asal ve asalımsı bulanık ideallerin bir kaç tanımı bulunmaktadır. Bu tanımlardan bahsedip aralarındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.

Tanım 2.35. R bir halka ve μ sabitten farklı bir bulanık ideal olsun. Herhangi $\alpha, \beta \in LI(R)$ için $\alpha\beta \subseteq \mu$ iken $\alpha \subseteq \mu$ ya da $\beta \subseteq \mu$ şartlarından biri sağlanıyor ise μ bulanık idealine asal bulanık ideal denir.

Tanım 2.36. R bir halka ve μ sabitten farklı bir bulanık ideal olsun. Herhangi x_r, y_s bulanık noktaları için $x_r y_s \in \mu$ iken $x_r \in \mu$ ya da $y_s \in \mu$ şartlarından biri sağlanıyorsa μ bulanık idealine asal bulanık ideal denir.

Tanım 2.37. R bir halka ve μ bir bulanık ideal olsun. $x, y \in R$ için $\mu(xy) = \mu(0_R)$ iken $\mu(x) = \mu(0_R)$ ya da $\mu(y) = \mu(0_R)$ şartlarından biri sağlanıyorsa μ bulanık idealine asal bulanık ideal denir.

Tanım 2.38. R bir halka ve μ bir bulanık ideal olsun. Her $x, y \in R$ için $\mu(xy) = \mu(x)$ ya da $\mu(xy) = \mu(y)$ şartlarından biri sağlanıyor ise μ bulanık idealine asal bulanık ideal denir.

Burada dört tanım da incelendiğinde aralarında şöyle bir ilişki bulunur. Tanım 2.35 ve Tanım 2.36 birbirine denktir. Tanım 2.36, Tanım 2.38 için gerekli şart, Tanım 2.38 ise Tanım 2.37 için gerekli şarttır. Kısaca,

$$\text{Tanım 2.35} \Leftrightarrow \text{Tanım 2.36} \Rightarrow \text{Tanım 2.38} \Rightarrow \text{Tanım 2.37}$$

ilişkisi mevcuttur.

Tezin bundan sonraki kesiminde asal bulanık ideal ile Tanım 2.36'ı kastedeceğiz. Tanım 2.38'de tanımlanan asal bulanık idealine de tamamen zayıflatılmış asal bulanık ideal diyeceğiz.

Lemma 2.2. *R bir halka ve μ bir bulanık ideal olsun. Eğer μ asal bulanık ideal ise her $t \in [0, \mu(0)]$ için μ_t de asal idealdir.*

Tanım 2.39. R bir halka ve μ bir bulanık ideal olsun. Her $x, y \in R$ için $\mu(xy) = \mu(x)$ ya da bir $n \in \mathbb{Z}$ için $\mu(xy) = \mu(y^n)$ şartlarından biri sağlanıyor ise μ bulanık idealine asalımsı bulanık ideal denir.

Tanım 2.40. R bir halka ve μ sabitten farklı bir bulanık ideal olsun. Herhangi x_r, y_s bulanık noktaları için $x_r y_s \in \mu$ iken $x_r \in \mu$ ya da bir $n \in \mathbb{Z}$ için $y_s^n \in \mu$ şartlarından biri sağlanıyorsa μ bulanık idealine asalımsı bulanık ideal denir.

Buradaki iki tanım arasında Tanım 2.40 sağlanıyorken Tanım 2.39 sağlanır durumu mevcuttur. (Tanım 2.40 $\Rightarrow$ Tanım 2.39). Dolayısıyla tezin bu kısmından sonra Tanım 2.40, asalımsı bulanık ideal tanımı olarak kullanılacaktır. Tanım 2.39'da tanımlanan asalımsı bulanık idealine de tamamen zayıflatılmış asalımsı bulanık ideal diyeceğiz.

Lemma 2.3. *R bir halka ve μ bir bulanık ideal olsun. Eğer μ asalımsı bulanık ideal ise her $t \in [0, \mu(0)]$ için μ_t de asalımsı idealdir.*

Tanım 2.41. R bir halka ve μ bir bulanık ideal olsun. μ'nün radikali $x \in R$ için

$$\sqrt{\mu}(x) = \bigvee_{n \geq 1} \mu(x^n) \tag{2.20}$$

olarak tanımlanır.

Burada R'nin x_r bulanık noktası için $x_r \in \sqrt{\mu}$ olması için gerek ve yeter koşul bir $n \in \mathbb{Z}$ için ${x^n}_r \in \mu$ olmasıdır.

Teorem 2.22. *Eğer μ, R'nin bir bulanık ideali ise $\sqrt{\mu}$ de bir bulanık idealdir.*

Teorem 2.23. *R bir halka ve μ bir bulanık ideal olsun. $t \in [0, \mu(0)]$ için $\sqrt{(\mu_t)} = (\sqrt{\mu})_t$'dir.*

Teorem 2.24. *R bir halka ve $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ birer bulanık ideal olsun. O halde*

$$\bigcap_{i=1}^{n} \sqrt{\mu_i} = \sqrt{\bigcap_{i=1}^{n} \mu_i} \tag{2.21}$$

sağlanır.

Teorem 2.25. *$\{\mu_i : i \in I\}$ kümesi R'nin bulanık ideallerinin bir zinciri olsun. O halde $\bigcup_{i \in I} \sqrt{\mu_i} = \sqrt{\bigcup_{i \in I} \mu_i}$'dir.*

Teorem 2.26. *R bir halka ve μ bulanık ideali asal bulanık ideal olsun. O halde $\sqrt{\mu}$ de R'nin bir asal bulanık idealidir ve her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\sqrt{\mu^n} = \sqrt{\mu}$'dür.*

Tanım 2.42. $f : R \to S$ bir halka homomorfizması ve $\mu \in LI(R)$ bir bulanık ideal olsun. $x \in R$ ve $y \in S$ için μ bulanık idealinin f altındaki görüntüsü

$$f(\mu)(y) = \left\{ \begin{array}{ll} \vee\{\mu(x) : x \in X, f(x) = y\}, & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & f^{-1}(y) = \emptyset \end{array} \right\} \tag{2.22}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.43. $f : R \to S$ bir halka homomorfizması ve $\eta \in LI(S)$ bir bulanık ideal olsun. $x \in R$ için η bulanık idealinin f altındaki ters görüntüsü

$$f^{-1}(\eta)(x) = \eta(f(x)) \tag{2.23}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.27. *$f : R \to S$ bir halka homomorfizması, $\mu \in LI(R)$ ve $\eta \in LI(S)$ olacak şekilde iki bulanık ideal olsun. O halde,*

i. $f^{-1}(\eta)$ da Çek$f$ üzerinde sabit olacak şekilde R'nin bir bulanık idealidir.

Eğer f bir epimorfizma ise,

ii. $f(\mu)$ de S'nin bulanık idealidir.

iii. $f(f^{-1}(\eta)) = \eta$'dır.

Eğer f bir epimorfizma ve μ bulanık ideali Çek$f$ üzerinde sabit ise,

iv. $f^{-1}(f(\mu)) = \mu$'dür.

v. Her $x \in R$ için $f(\mu)(f(x)) = \mu(x)$'dir.

2.4 Bulanık Modüller

Bulanık modüller ile ilgili temel bilgilerin derlenmesinde genel olarak [15–18] kaynaklarından faydalanılmıştır.

Tanım 2.44. R bir halka ve M bir R-modül olsun. M üzerinde tanımlı μ bulanık alt kümesi için

i. Her $x, y \in M$ için $\mu(x - y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$

ii. Her $x \in M$ ve $r \in R$ için $\mu(rx) \geq \mu(x)$

iii. $\mu(0_M) = 1$

şartları sağlanıyor ise μ'ye M'nin bulanık R-modülü denir.

Tanım 2.45. R bir halka ve M bir R-modül olsun. M'nin μ ve η bulanık R-modülleri için $\eta \subseteq \mu$ ise η'ya μ'nün bulanık alt modülü denir. Eğer $\mu = \lambda_M$ ise de η'ya M'nin bulanık alt modülü denir.

Yorum 2.5. Tanım 2.44'den M R-modülü için λ_M'nün M'nin bir bulanık R-modülü olduğu açıktır.

Teorem 2.28. *R bir halka olsun. R-modül R üzerinde μ'nün bir bulanık alt modül olması için gerek ve yeter koşul μ'nün R'nin $\mu(0) = 1$ olacak şekilde bir bulanık ideali olmasıdır.*

Teorem 2.29. *R bir halka ve M bir R-modül olsun. μ ve λ, $\mu(0) = 1$ ve $\lambda(0) = 1$ olacak şekilde birer bulanık ideal ; σ ve η da birer bulanık alt modül olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır.*

i. $\sigma + \eta$ *bulanık alt modüldür.*

ii. $\mu\sigma$ *bulanık alt modüldür.*

iii. $(\mu + \lambda)\sigma = \mu\sigma + \lambda\sigma$

iv. $(\mu\lambda)\sigma = \mu(\lambda\sigma)$

Tanım 2.46. M bir R-modül , μ ve λ bulanık alt modüller olmak üzere $[\mu\colon \lambda]$ kümesi

$$[\mu\colon \lambda] = \{r_t : r_t\lambda \subseteq \mu,\ r_t, R\text{'nin bir bulanık noktası}\} \qquad (2.24)$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.30. *R bir halka ve M bir R-modül olsun. μ ve λ bulanık idealler ise $[\mu\colon \lambda]$ bir bulanık idealdir.*

Teorem 2.31. *R bir halka ve M bir R-modül olsun. α bir bulanık ideal; μ ve ν da birer bulanık alt modül olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır.*

i. $[\mu : \nu]\,\nu \subseteq \mu$.

ii. $\alpha[\mu : \alpha] \subseteq \mu$.

iii. $\alpha\nu \subseteq \mu \Leftrightarrow \alpha \subseteq [\mu : \nu] \Leftrightarrow \nu \subseteq [\mu : \alpha]$.

Teorem 2.32. *μ ve λ , R-modül M'nin bulanık alt modülü olsun. O zaman $[\mu : \lambda]$ bir bulanık idealdir*

Tanım 2.47. R bir halka ve ν, R-modül M'nin bir bulanık modülü olsun. x_r, R'nin, m_t de M 'nin bulanık noktaları ve μ de ν'nün sabitten farklı bir bulanık alt modülü olsun. Eğer $x_r m_t \in \mu$ iken $x_r \in [\mu : \nu]$ ya da $m_t \in \mu$ ise μ'ye ν'nün asal bulanık alt modülü denir.

Özel olarak $\nu = \lambda_M$ alınırsa $x_r m_t \in \mu$ iken $x_r \in [\mu : \lambda_M]$ ya da $m_t \in \mu$ ise μ'ye M'nin asal bulanık alt modülü denir.

Teorem 2.33. *μ, R-modül R'nin bir bulanık alt modülü olmak üzere μ'nün R-modül R'nin asal bulanık alt modülü olması için gerek ve yeter koşul μ'nün, R'nin $\mu(0) = 1$ olacak şekilde asal bulanık ideali olmasıdır.*

Tanım 2.48. R bir halka ve ν, R-modül M'nin bir bulanık modülü olsun. R'nin x_r ve M'nin m_t bulanık noktaları ve ν'nün sabitten farklı bir μ bulanık alt modülü için eğer $x_r m_t \in \mu$ iken bir $n \in \mathbb{Z}^+$ sayısı için $(x_r)^n \in [\mu : \nu]$ ya da $m_t \in \mu$ ise μ'ye ν'nün asalımsı bulanık alt modülü denir.

Özel olarak $\nu = \lambda_M$ alınırsa $x_r m_t \in \mu$ iken bir $n \in \mathbb{Z}^+$ sayısı için $(x_r)^n \in [\mu : \lambda_M]$ ya da $m_t \in \mu$ ise μ'ye M'nin asalımsı bulanık alt modülü denir.

Teorem 2.34. *μ, R-modül R'nin bir bulanık alt modülü olmak üzere μ'nün R-modül R'nin asalımsı bulanık alt modülü olması için gerek ve yeter koşul μ'nün, R'nin $\mu(0) = 1$ olacak şekilde asalımsı bulanık ideali olmasıdır.*

Tanım 2.49. R bir halka ve M bir R-modül olsun. Eğer M'nin her μ bulanık alt modülü için $\xi(0) = 1$ olmak üzere $\xi\lambda_M = \mu$ olacak şekilde bir ξ bulanık ideali var ise M'ye çarpımsal bulanık modül denir.

3
BAZI ÖZEL BULANIK İDEALLER

Bu bölümde R halkası üzerinde tanımlı bazı özel bulanık idealler tanımlanıp yapıları incelenecektir.

3.1 δ-Asalımsı Bulanık İdealler

Tanım 3.1. R değişmeli ve birimli halka ve μ bir bulanık ideal olmak üzere $\delta : LI(R) \to LI(R)$ için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa δ'ya bulanık ideal genişlemesi denir.

i. $\mu \subseteq \delta(\mu), \forall \mu \in LI(R)$

ii. $\mu, \eta \in LI(R)$ olmak üzere $\mu \subseteq \eta$ iken $\delta(\mu) \subseteq \delta(\eta)$

R bir halka olsun.

(1) $\delta_0(\mu) = \mu$ ile tanımlı δ_0 birim fonksiyonu her $\mu \in LI(R)$ için bir bulanık ideal genişlemesidir.

(2) $\delta_1(\mu) = \sqrt{\mu}$ ile tanımlı δ_1 fonksiyonu da her $\mu \in LI(R)$ için bir bulanık ideal genişlemesidir.

μ bir bulanık ideal olduğundan her $x \in R$ için,

$$\sqrt{\mu}(x) = \bigvee_{n\geq 1} \mu(x^n) \geq \mu(x^{n-1}) \bigvee \mu(x) \geq \mu(x) \tag{3.1}$$

elde edilir. Böylece ilk koşul olan $\mu \subseteq \sqrt{\mu} = \delta_1(\mu)$ sağlanır. Bir $\eta \in LI(R)$ için $\mu \subseteq \eta$ ise,

$$\sqrt{\mu}(x) = \bigvee_{n\geq 1} \mu(x^n) \leq \bigvee_{n\geq 1} \eta(x^n) = \sqrt{\eta}(x) \tag{3.2}$$

olur ve böylece $\sqrt{\mu} \subseteq \sqrt{\eta}$ yani $\delta_1(\mu) \subseteq \delta_1(\eta)$ elde edilir. Buradan da δ_1'in bir bulanık ideal genişleme olduğu görülür.

(3) Herhangi ζ bulanık ideali ve her μ bulanık ideali için $\delta_\zeta(\mu) = [\mu : \zeta]$ ile tanımlı δ_ζ da bir bulanık ideal genişlemesidir.

Teorem 2.21 gereği her μ bulanık ideali için $\mu \subseteq [\mu : \zeta] = \delta_\zeta(\mu)$ ve $\mu \subseteq \eta$ iken $[\mu : \zeta] = \delta_\zeta(\mu) \subseteq [\eta : \zeta] = \delta_\zeta(\eta)$'dir. Böylece δ_ζ'nın da bulanık ideal genişlemesi olduğu görülmüş olur.

Tanım 3.2. R bir halka, μ bir bulanık ideal ve δ bir bulanık ideal genişlemesi olsun. Her $a, b \in R$ için $\mu(ab) > \mu(a)$ iken $\delta(\mu)(b) \geq \mu(ab)$ oluyor ise μ'ye tamamen zayıflatılmış δ-asalımsı bulanık ideal denir. Ayrıca bu tanımı $\mu(ab) > \delta(\mu)(a)$ iken $\mu(b) \geq \mu(ab)$ sağlanır şeklinde de ifade edebiliriz.

μ bulanık idealinin tamamen zayıflatılmış δ_0-asalımsı bulanık ideal olması için gerek ve yeter koşul μ bulanık idealinin tamamen zayıflatılmış asal bulanık ideal olmasıdır.

μ bir tamamen zayıflatılmış δ_0-asalımsı bulanık ideal ve $x, y \in R$ için $\mu(xy) \neq \mu(x)$ olsun. O halde $\mu(xy) > \mu(x)$'dir. μ bir tamamen zayıflatılmış δ_0-asalımsı bulanık ideal olduğundan $\delta_0(\mu)(y) = \mu(y) \geq \mu(xy)$ olduğu görülür. Böylece $\mu(xy) = \mu(y)$ elde edilir ve μ bir tamamen zayıflatılmış asal bulanık ideal olur.

Tersine, μ bir tamamen zayıflatılmış asal bulanık ideal ve $\mu(xy) > \mu(x)$ olsun. O halde $\delta_0(\mu)(y) \geq \mu(xy)$ olduğu gösterilmelidir. μ tamamen zayıflatılmış asal bulanık ideal ve $\mu(xy) > \mu(x)$ yani $\mu(xy) \neq \mu(x)$ olduğundan, $\mu(xy) = \mu(y)$ elde edilir. Böylece $\delta_0(\mu)(y) = \mu(y) \geq \mu(xy)$ olduğu görülür ve μ bir tamamen zayıflatılmış δ_0-asalımsı bulanık ideal olur.

μ bulanık idealinin tamamen zayıflatılmış δ_1-asalımsı bulanık ideal olması için gerek ve yeter koşul μ bulanık idealinin tamamen zayıflatılmış asalımsı bulanık ideal olmasıdır.

μ bir tamamen zayıflatılmış δ_1-asalımsı bulanık ideal olsun. O halde μ'nün tamamen zayıflatılmış asalımsı bulanık ideal olduğunu göstermeliyiz. $x, y \in R$ için $\mu(xy) > \mu(x)$ olduğunu kabul edelim. μ bir tamamen zayıflatılmış δ_1-asalımsı bulanık ideal olduğundan, $\delta_1(\mu)(y) = \sqrt{\mu}(y) \geq \mu(xy)$ bulunur. Her $k \in \mathbb{Z}^+$ için, $\mu(y^k) < \mu(xy)$ ise $\bigvee\limits_{n\geq 1} \mu(y^k) < \mu(xy)$ olur ve $\bigvee\limits_{n\geq 1} \mu(y^k) = \sqrt{\mu}(y) < \mu(xy)$ elde edilir ki bu da bir çelişkidir. Böylece en az bir $k \in \mathbb{Z}^+$ için $\mu(y^k) \geq \mu(xy)$'dir ve μ bir tamamen zayıflatılmış asalımsı bulanık ideal olur.

Tersine, μ bir tamamen zayıflatılmış asalımsı bulanık ideal olsun. $x, y \in R$ için $\mu(xy) > \mu(y)$ iken $\delta_1(\mu)(y) \geq \mu(xy)$ olduğu gösterilmelidir. μ tamamen zayıflatılmış asalımsı bulanık ideal olduğundan, $\mu(xy) > \mu(y)$ iken bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\mu(y^n) \geq \mu(xy)$ olur. Buradan $\bigvee\limits_{n\geq 1} \mu(y^n) \geq \mu(xy)$ elde edilir. Böylece $\bigvee\limits_{n\geq 1} \mu(y^n) = \sqrt{\mu}(y) \geq \mu(xy)$

olduğu görülür ve bu da $\delta_1(\mu)(y) \geq \mu(xy)$ olduğu yani μ'nün tamamen zayıflatılmış δ_1-asalımsı bulanık ideal olduğu anlamına gelir.

Tanım 3.3. R bir halka, μ bir bulanık ideal ve δ bir bulanık ideal genişlemesi olsun. R'nin x_r ve y_s bulanık noktaları için $x_r y_s \in \mu$ iken $x_r \in \mu$ ya da $y_s \in \delta(\mu)$ oluyor ise μ'ye δ-asalımsı bulanık ideal denir.

Tanım 3.3 ve Tanım 3.2'den anlaşılacağı üzere her δ-asalımsı bulanık ideal bir tamamen zayıflatılmış δ-asalımsı bulanık idealdir. Ayrıca tezin bundan sonraki kısımlarında aksi belirtilmedikçe , δ-asalımsı bulanık idealde bahsedilen δ'yı bir bulanık ideal genişlemesi olarak kabul edeceğiz.

R halka ve μ bir bulanık ideal olsun.

(1) μ'nün δ_0-asalımsı bulanık ideal olması için gerek ve yeter kosul μ'nün asal bulanık ideal olmasıdır.

(2) μ'nün δ_1-asalımsı bulanık ideal olması için gerek ve yeter kosul μ'nün asalımsı bulanık ideal olmasıdır.

Teorem 3.1. *R bir halka, μ bir bulanık ideal ve δ bir bulanık ideal genişlemesi olsun. μ bulanık idealinin δ-asalımsı bulanık ideal olması için gerek ve yeter koşul η, ξ bulanık idealleri için $\eta\xi \subseteq \mu$ iken $\eta \subseteq \mu$ ya da $\xi \subseteq \delta(\mu)$ olmasıdır.*

İspat. R bir halka ve μ bir δ-asalımsı bulanık ideal olsun. Herhangi η, ξ bulanık idealleri için $\eta\xi \subseteq \mu$ iken $\eta \nsubseteq \mu$ ve $\xi \nsubseteq \delta(\mu)$ olduğunu kabul edelim. O halde $\eta(x) > \mu(x)$ ve $\xi(y) > \delta(\mu)(y)$ olacak şekilde en az bir $x, y \in R$ vardır. Buradan $\eta(x) = r$ ve $\xi(y) = s$ için $x_r \notin \mu$ ve $y_s \notin \delta(\mu)$ elde edilir. Fakat kabulümüz gereği $\eta\xi \subseteq \mu$ olduğundan da $r \wedge s \leq \eta\xi(xy) \leq \mu(xy)$ böylece $(xy)_{r\wedge s} = x_r y_s \in \mu$ bulunur. μ bir δ-asalımsı bulanık ideal olduğundan da $x_r \in \mu$ ya da $y_s \in \delta(\mu)$ olmalıdır, ki bu bir çelişkidir.

Tersine, herhangi η, ξ bulanık idealleri için $\eta\xi \subseteq \mu$ iken $\eta \subseteq \mu$ ya da $\xi \subseteq \delta(\mu)$ şartlarından biri sağlansın. R'nin x_r, y_s bulanık noktaları için $x_r y_s \in \mu$ olsun. O halde Tanım 2.34 gereği $< x_r y_s >=< x_r >< y_s >\subseteq \mu$ olur. Hipotezden de $< x_r >\subseteq \mu$ ya da $< y_s >\subseteq \delta(\mu)$ elde edilir. Böylece $x_r \in \mu$ ya da $y_s \in \delta(\mu)$ olduğu görülür ve μ bir δ-asalımsı bulanık ideal olur. ■

Teorem 3.2. *μ bir bulanık ideal, δ bir bulanık ideal genişlemesi ve $\tilde{\delta}$ da $t \in [0, \mu(0)]$ için $\tilde{\delta}(\mu_t) = \delta(\mu)_t$ olacak şekilde bir ideal genişlemesi olsun. O halde μ bulanık ideali δ-asalımsı bulanık ideal ise $t \in [0, \mu(0)]$ için μ_t seviye kümesi de R'nin $\tilde{\delta}$-asalımsı idealidir.*

İspat. μ bir δ-asalımsı bulanık ideal olsun. R'nin x, y elemanları için $xy \in \mu_t$ ve $x \notin \mu_t$ iken $y \in \tilde{\delta}(\mu_t)$ olduğu gösterilmelidir. $xy \in \mu_t$ ve $x \notin \mu_t$ ise $x_t y_t \in \mu$ ve $x_t \notin \mu$ olur. μ bir δ-asalımsı bulanık ideal olduğundan da $y_t \in \delta(\mu)$ ve $y \in \delta(\mu)_t = \tilde{\delta}(\mu_t)$ elde edilir. Buradan da μ_t'nin δ-asalımsı ideal olduğu söylenir. ■

R bir halka, $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}_1$ ve $\delta = \delta_1$ sırasıyla ideal genişlemesi ve bulanık ideal genişlemesi olmak üzere, μ bir bulanık ideal ise $\sqrt{\mu_t} = \sqrt{\mu}_t$ olduğundan $\tilde{\delta}_1(\mu_t) = \delta_1(\mu)_t$ dir. μ bir δ_1-asalımsı bulanık ideal ise de Örnek 3.1 (2) gereği μ bir asalımsı bulanık idealdir ve Lemma 2.3'den de μ_t'nin asalımsı ideal olduğu görülür. Böylece μ_t bir $\tilde{\delta}_1$-asalımsı ideal bulunur.

Teorem 3.3. *μ bir bulanık ideal, δ bir bulanık ideal genişlemesi ve $\tilde{\delta}$ da $t \in [0, \mu(0)]$ için $\tilde{\delta}(\mu_t) = \delta(\mu)_t$ olacak şekilde bir ideal genişlemesi olsun. O halde μ bulanık ideali tamamen zayıflatılmış δ-asalımsı bulanık ideal olması için gerek ve yeter koşul $t \in [0, \mu(0)]$ için μ_t seviye kümesinin de R'nin $\tilde{\delta}$-asalımsı ideali olmasıdır.*

İspat. μ bir tamamen zayıflatılmış δ-asalımsı bulanık ideal olsun. $x, y \in R$ ve $t \in [0, \mu(0)]$ için $xy \in \mu_t$ ve $x \notin \mu_t$ iken $y \in \tilde{\delta}(\mu_t)$ olduğu gösterilmelidir. $xy \in \mu_t$ ve $x \notin \mu_t$ ise $\mu(xy) \geq t$ ve $\mu(x) < t$'dir. Buradan $\mu(xy) > \mu(x)$ elde edilir. μ bir tamamen zayıflatılmış δ-asalımsı bulanık ideal olduğundan $\delta(\mu)(y) \geq \mu(xy) \geq t$ olur. Böylece $\delta(\mu)(y) \geq t$ ve $y \in \delta(\mu)_t = \tilde{\delta}(\mu_t)$ elde edilir ve μ_t'nin bir δ-asalımsı ideal olduğu görülür.

Tersine, her $t \in [0, \mu(0)]$ için μ_t bir $\tilde{\delta}$-asalımsı ideal olsun. $x, y \in R$ için $\mu(xy) > \mu(x)$ olduğunu kabul edelim. O halde $\mu(xy) = k$ olacak şekilde bir $k \in [0, \mu(0)]$ vardır. Burada $k = \mu(xy) > \mu(x)$ olduğundan $xy \in \mu_k$ ve $x \notin \mu_k$ elde edilir. Herhangi $k \in [0, \mu(0)]$ için μ_k de bir $\tilde{\delta}$-asalımsı ideal olduğundan, $y \in \tilde{\delta}(\mu_k) = \delta(\mu)_k$ sonucuna varılır. Böylece $\delta(\mu)(y) \geq k = \mu(xy)$ olur ve μ'nün bir tamamen zayıflatılmış δ-asalımsı bulanık ideal olduğu söylenir. ■

Teorem 3.4. *γ ve δ iki bulanık ideal genişlemesi olsun. Her μ bulanık ideali için $\delta(\mu) \subseteq \gamma(\mu)$ ise, her δ-asalımsı bulanık ideal bir γ-asalımsı bulanık idealdir. Ayrıca, her δ bulanık ideal genişlemesi için her asal bulanık ideal bir δ-asalımsı bulanık idealdir.*

İspat. δ bir bulanık ideal genişlemesi ve μ bir δ-asalımsı bulanık ideal olsun. x_r ve y_s bulanık noktaları için $x_r y_s \in \mu$ ve $x_r \notin \mu$ iken kabulümüz gereği $y_s \in \delta(\mu)$ bulunur. Her bulanık ideali için $\delta(\mu) \subseteq \gamma(\mu)$ olduğundan $y_s \in \delta(\mu) \subseteq \gamma(\mu)$ elde edilir bu da μ'nün γ-asalımsı bulanık ideal olduğunu gösterir.

ζ bir asal bulanık ideal olsun . Her δ bulanık ideal genişlemesi için ζ'nın bir δ-asalımsı bulanık ideal olduğunu gösterelim. x_r ve y_s bulanık noktaları için $x_r y_s \in \zeta$ ve $x_r \notin \zeta$

olsun. ζ bir asal bulanık ideal olduğundan $y_s \in \zeta$ olur. δ bulanık ideal genişlemesi olduğundan da $y_s \in \zeta \subseteq \delta(\zeta)$ elde edilir. Böylece ζ bir δ-asalımsı bulanık ideal bulunur. ■

Teorem 3.5. *δ_1 ve δ_2 bulanık ideal genişlemeleri ve herhangi μ bulanık ideali için $\delta(\mu) = \delta_1(\mu) \cap \delta_2(\mu)$ olarak tanımlanan δ da bir bulanık ideal genişlemesidir. Genel olarak, bulanık ideal genişlemelerinin kesişimi de bulanık ideal genişlemesidir.*

İspat. δ_1 ve δ_2 bulanık ideal genişlemeleri olduğundan, $\mu \subseteq \delta_1(\mu)$ ve $\mu \subseteq \delta_2(\mu)$ olur. Buradan, $\mu \subseteq \delta_1(\mu) \cap \delta_2(\mu) = \delta(\mu)$ elde edilir. Diğer taraftan η, γ bulanık idealleri için $\gamma \subseteq \eta$ ise $\delta_1(\gamma) \subseteq \delta_1(\eta)$ ve $\delta_2(\gamma) \subseteq \delta_2(\eta)$'dır. Buradan da $\delta(\gamma) = \delta_1(\gamma) \cap \delta_2(\gamma) \subseteq \delta_1(\eta) \cap \delta_2(\eta) = \delta(\eta)$ olduğu görülür. Böylece $\delta(\gamma) \subseteq \delta(\eta)$ elde edilir ve δ'nın da bir bulanık ideal genişlemesi olduğu söylenir. ■

Teorem 3.6. *δ bir bulanık ideal genişlemesi ve μ bir bulanık ideal olsun. $E_\delta(\mu) = \bigcap\{\nu \in LI(R) : \mu \subseteq \nu, \nu$ bir δ-asalımsı bulanık ideal$\}$ ile tanımlı E_δ da bir bulanık ideal genişlemesidir.*

İspat. Her $\mu \in LI(R)$ için $\mu \subseteq E_\delta(\mu)$ ve herhangi $\zeta, \gamma \in LI(R)$ için $\zeta \subseteq \gamma$ iken $E_\delta(\zeta) \subseteq E_\delta(\gamma)$ olduğunu göstermeliyiz. $E_\delta(\mu)$'nin tanımından $\mu \subseteq E_\delta(\mu)$ olduğu görülür. Herhangi $\zeta, \gamma \in LI(R)$ için $\zeta \subseteq \gamma$ ise γ bulanık idealini kapsayan δ-asalımsı idealler ayrıca ζ'yı da kapsar ve ayrıca ζ'yı kapsayan δ-asalımsı bulanık idealler γ'yı kapsayamayabileceğinden $E_\delta(\zeta) \subseteq E_\delta(\gamma)$ olduğu sonucuna varılır. ■

Tanım 3.4. δ bir bulanık ideal genişlemesi olsun. Her $\mu, \xi \in LI(R)$ için

$$\delta(\mu \cap \xi) = \delta(\mu) \cap \delta(\xi) \tag{3.3}$$

sağlanıyorsa δ bulanık ideal genişlemesine kesişim koruyan bulanık ideal genişlemesi denir.

Tanım 3.5. $f : R \to S$ halka homomorfizması olmak üzere her $\eta \in LI(S)$ için $\delta(f^{-1}(\eta)) = f^{-1}(\delta(\eta))$ eşitliği sağlanıyor ise δ 'ya global bulanık ideal genişlemesi denir.

δ_0 ve δ_1 bulanık ideal genişlemeleri hem global hem de kesişim koruyan bulanık ideal genişlemeleridir.

Herhangi $\mu, \xi \in LI(R)$ bulanık idealleri için

$$\delta_0(f^{-1}(\mu)) = f^{-1}(\mu) = f^{-1}(\delta_0(\mu)) \tag{3.4}$$

ve

$$\delta_0(\mu \cap \xi) = \mu \cap \xi = \delta_0(\mu) \cap \delta_0(\xi) \tag{3.5}$$

olduğundan δ_0 sırasıyla global ve de kesişim koruyan bulanık ideal genişlemesidir.

$$\delta_1(f^{-1}(\mu)) = \sqrt{f^{-1}(\mu)} = f^{-1}(\sqrt{\mu}) = f^{-1}(\delta_1(\mu)) \tag{3.6}$$

ve

$$\delta_1(\mu \cap \xi) = \sqrt{\mu \cap \xi} = \sqrt{\mu} \cap \sqrt{\xi} = \delta_1(\mu) \cap \delta_1(\xi) \tag{3.7}$$

olduğundan da δ_1 sırasıyla global ve de kesişim koruyan bulanık ideal genişlemesidir.

Teorem 3.7. *δ kesişim koruyan bir bulanık ideal genişlemesi ve $\mu_1, \ldots, \mu_n$ de R'nin δ-asalımsı bulanık idealleri olsun. Her $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için $\xi = \delta(\mu_i)$ ise $\mu = \bigcap_{i=1}^{n} \mu_i$ de bir δ-asalımsı bulanık idealdir.*

İspat. x_r ve y_s bulanık noktaları için $x_r y_s \in \mu = \bigcap_{i=1}^{n} \mu_i$ iken $x_r \notin \mu = \bigcap_{i=1}^{n} \mu_i$ olduğunu kabul edelim. O halde her $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için $x_r y_s \in \mu_i$ ve en az bir $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için $x_r \notin \mu_j$'dir. μ_j de bir δ-asalımsı bulanık ideal olduğundan $y_s \in \delta(\mu_j) = \xi$ elde edilir. δ kesişim koruyan bir bulanık ideal genişlemesi olduğundan

$$\delta(\mu) = \delta(\bigcap_{i=1}^{n} \mu_i) = \bigcap_{i=1}^{n} \delta(\mu_i) = \bigcap_{i=1}^{n} \xi = \xi = \delta(\mu_j) \tag{3.8}$$

olduğu görülür. Böylece $y_s \in \delta(\mu) = \xi$ ve μ'nün de bir δ-asalımsı bulanık ideal olduğu sonucuna varılır.

■

Teorem 3.8. *δ bir global bulanık ideal genişlemesi ve $f : R \to S$ bir halka homomorfizması olsun. O halde S'nin herhangi bir η, δ-asalımsı bulanık ideali için $f^{-1}(\eta)$ de R'nin bir δ-asalımsı bulanık idealidir.*

İspat. R'nin x_r ve y_s bulanık noktaları için $x_r y_s \in f^{-1}(\eta)$ ve $x_r \notin f^{-1}(\eta)$ olsun. O halde $f^{-1}(\eta)(xy) \geq r \wedge s$ ve $f^{-1}(\eta)(x) < r$ olur. Buradan $\eta(f(xy)) = \eta(f(x)f(y) \geq r \wedge s$ ve $\eta(f(x)) < r$ elde edilir. Bu ise $f(x)_r f(y)_s \in \eta$ ve $f(x)_r \notin \eta$ olduğunu gösterir. η da bir δ-asalımsı bulanık ideal olduğundan, $f(y)_s \in \delta(\eta)$ ve $\delta(\eta)(f(y)) \geq s$ bulunur. Bulanık ideallerin ters görüntüsü tanımından $f^{-1}(\delta(\eta))(y) \geq s$ ve δ da global olduğundan $\delta(f^{-1}(\eta))(y) \geq s$ elde edilir. Böylece $y_s \in \delta(f^{-1}(\eta))$ sonucuna varılır. ■

Teorem 3.9. *$f : R \to S$ örten bir halka homomorfizması ve δ global bulanık ideal genişlemesi olsun. R'nin Çek$f$ üzerinde sabit olan μ bulanık ideali δ-asalımsı bulanık ideal ise $f(\mu)$ de S'nin bir δ-asalımsı bulanık idealidir.*

İspat. S'nin a_r ve b_s bulanık noktaları için $a_r b_s \in f(\mu)$ ve $a_r \notin f(\mu)$ olsun. O halde $f(\mu)(ab) \geq r \wedge s$ ve $f(\mu)(a) < r$ olur. f örten bir homomorfizma olduğundan her $a, b \in S$ için $f(x) = a$ ve $f(y) = b$ olacak şekilde $x, y \in R$ vardır. Buradan $f(\mu)(f(x)f(y)) \geq r \wedge s$ ve $f(\mu)f(x) < r$ elde edilir. μ bulanık ideali Çek$f$ üzerinde sabit olduğundan Teorem 2.27 (v.) gereğince $\mu(xy) \geq r \wedge s$ ve $\mu(x) < r$ olduğu görülür. Böylece $x_r y_s \in \mu$, $x_r \notin \mu$ ve μ de bir δ-asalımsı bulanık ideal olduğundan $y_s \in \delta(\mu)$ ve $\delta(\mu)(y) \geq s$ sonucuna varılır. $\delta(\mu)$'nün f altındaki görüntüsü tanımından $f(\delta(\mu))(f(y)) \geq \delta(\mu)(y) \geq s$ ve $(f(y))_s = b_s \in f(\delta(\mu))$ olur. Eğer $f(\delta(\mu)) = \delta(f(\mu))$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. μ bulanık ideali Çek$f$ üzerinde sabit ve δ da global olduğundan $\delta(\mu) = \delta(f^{-1}(f(\mu))) = f^{-1}(\delta(f(\mu)))$ elde edilir. f homomorfizmasının da örten olmasından $\delta(f(\mu)) = f(\delta(\mu))$ bulunur ve ispat tamamlanır. ■

Sonuç [δ-Asalımsı Bulanık İdealler için Eşleme Teoremi]

$f : R \to S$ bir örten homorfizma, δ bir global bulanık ideal genişlemesi olsun. R'nin Çek$f$ üzerinde sabit olan δ-asalımsı bulanık idealleri ile S'nin δ-asalımsı bulanık idealleri arasında bire bir eşleme vardır.

3.2 2-Yutan Bulanık İdealler

Bu bölümde asal bulanık ideallerin bir genişlemesi olan 2-yutan bulanık idealler tanımlanacak ve sonraki bölümler için alt yapılar oluşturulacaktır.

Tanım 3.6. R'nin sabitten farklı μ bulanık ideali ve herhangi $x, y, z \in R$ için

$$\mu(xyz) \leq \mu(xy) \text{ ya da } \mu(xyz) \leq \mu(xz) \text{ ya da } \mu(xyz) \leq \mu(yz) \tag{3.9}$$

şartlarından biri sağlanıyor ise μ'ye tamamen zayıflatılmış 2-yutan bulanık ideal denir.

Lemma 3.1. *μ , R'nin bir bulanık ideali ve $t \in [0, \mu(0)]$ olsun. O halde μ'nün tamamen zayıflatılmış 2-yutan bulanık ideal olması için gerek ve yeter koşul μ_t'nin 2-yutan ideal olmasıdır.*

İspat. μ bir tamamen zayıflatılmış 2-yutan bulanık ideal olsun. Herhangi $x, y, z \in R$ için $t \in [0, \mu(0)]$ olmak üzere $xyz \in \mu_t$ ve $xy \notin \mu_t$ olduğunu kabul edelim. O halde

$yz \in \mu_t$ ya da $xz \in \mu_t$ olduğu gösterilmelidir. $xyz \in \mu_t$ ve $xy \notin \mu_t$ ise $\mu(xyz) \geq t > \mu(xy)$'dir. μ bir tamamen zayıflatılmış 2-yutan bulanık ideal olduğundan $\mu(xz) \geq \mu(xyz) \geq t$ ya da $\mu(yz) \geq \mu(xyz) \geq t$ olur. Böylece $xz \in \mu_t$ ya da $yz \in \mu_t$ elde edilir ve μ_t'nin bir 2-yutan ideal olduğu görülür.

Tersine, her $t \in [0, \mu(0)]$ için μ_t bir 2-yutan ideal olsun. Herhangi $x, y, z \in R$ için $\mu(xyz) > \mu(xy)$ ise $\mu(xyz) = k$ olacak şekilde bir $k \in [0, \mu(0)]$ vardır ve $k = \mu(xyz) > \mu(xy)$'dir. Böylece $xyz \in \mu_k$ ve $xy \notin \mu_k$ olur. Her $t \in [0, \mu(0)]$ için μ_t bir 2-yutan ideal olduğundan μ_k da bir 2-yutan ideal olur ve $xz \in \mu_k$ ya da $yz \in \mu_k$ elde edilir. Buradan $\mu(xz) \geq k = \mu(xyz)$ ya da $\mu(yz) \geq k = \mu(xyz)$ sonucuna varılır.

■

Teorem 3.10. *Her tamamen zayıflatılmış asal bulanık ideal bir tamamen zayıflatılmış 2-yutan bulanık idealdir.*

İspat. μ bir tamamen zayıflatılmış asal bulanık ideal ve $x, y, z \in R$ için $\mu(xyz) > \mu(xy)$ olsun. μ tamamen zayıflatılmış asal bulanık ideal olduğundan $\mu(xz) \geq \mu(z) = \mu((xy)z)$ ya da $\mu(yz) \geq \mu(z) = \mu((xy)z)$ olur. Böylece μ de bir tamamen zayıflatılmış 2-yutan bulanık ideal olur. ■

Bir sonraki örnek Teorem 3.10'de verilen genellemenin karşıtının her zaman doğru olmadığını göstermektedir.

$R = \mathbb{Z}$ tam sayılar halkası olmak üzere, $x \in \mathbb{Z}$ için $\mathbb{Z}$'nin bir μ bulanık ideali,

$$\mu(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \in 4\mathbb{Z} \\ \frac{1}{2}, & x \notin 4\mathbb{Z} \end{array} \right\} \tag{3.10}$$

olarak tanımlansın. $\mu(2.2) = 1 > \mu(2) = \frac{1}{2}$ olduğundan μ tamamen zayıflatılmış asal bulanık ideal değildir.

Fakat herhangi $x, y, z \in R$ için $\mu(xyz) > \mu(xy)$ olsun. O halde $\mu(xyz) = 1$ ve $\mu(xy) = \frac{1}{2}$ yani $xyz \in 4\mathbb{Z}$ ve $xy \notin 4\mathbb{Z}$ elde edilir. Buradan $xy \in 2\mathbb{Z} \diagdown 4\mathbb{Z}$ ya da $xy \notin 2\mathbb{Z}$'dir. $xyz \in 4\mathbb{Z}$ ve $xy \in 2\mathbb{Z} \diagdown 4\mathbb{Z}$ ise $z \in 2\mathbb{Z}$ ve $x \in 2\mathbb{Z}$ ya da $y \in 2\mathbb{Z}$ olur. Böylece $yz \in 4\mathbb{Z}$ ya da $xz \in 4\mathbb{Z}$ elde edilir. Eğer $xy \notin 2\mathbb{Z}$ ise $z \in 4\mathbb{Z}$ olmalıdır. Böylece tüm durumlarda $\mu(xyz) \leq \mu(xz)$ ya da $\mu(xyz) \leq \mu(yz)$ olur ve μ'nün tamamen zayıflatılmış 2-yutan bulanık ideal olduğu görülür.

Tanım 3.7. μ bir bulanık ideal olmak üzere herhangi $x, y, z \in R$ için $\mu(xyz) = \mu(0)$ iken $\mu(xy) = \mu(0)$ ya da $\mu(yz) = \mu(0)$ ya da $\mu(xz) = \mu(0)$ şartlarından biri sağlanıyor ise μ'ye $K-2$-yutan bulanık ideal denir.

Tanım 3.8. R'nin sabitten farklı bir μ bulanık ideali ve x_r, y_s, z_t bulanık noktaları için $x_r y_s z_t \in \mu$ iken $x_r y_s \in \mu$ ya da $x_r z_t \in \mu$ ya da $y_s z_t \in \mu$ şartlarından biri sağlanıyor ise μ'ye 2-yutan bulanık ideal denir.

Teorem 3.11. *Her asal bulanık ideal bir 2-yutan bulanık idealdir.*

İspat. Asal bulanık ideal ve 2-yutan bulanık ideal tanımından kolayca görülür. ■

Lemma 3.2. *μ , R'nin bir bulanık ideali ve $t \in [0, \mu(0)]$ olsun. O halde μ bir 2-yutan bulanık ideal ise μ_t de 2-yutan idealdir.*

İspat. μ bir 2-yutan bulanık ideal ve $t \in [0, \mu(0)]$ olsun. $x, y, z \in R$ için $xyz \in \mu_t$ olduğunu kabul edelim. O halde $\mu(xyz) \geq t$'dir. Buradan $(xyz)_t(xyz) = t \leq \mu(xyz)$ ve $(xyz)_t = x_t y_t z_t \in \mu$ elde edilir. μ bir 2-yutan bulanık ideal olduğundan $x_t y_t = (xy)_t \in \mu$ ya da $x_t z_t = (xz)_t \in \mu$ ya da $y_t z_t = (yz)_t \in \mu$ sağlanır. Böylece $xy \in \mu_t$ ya da $xz \in \mu_t$ ya da $yz \in \mu_t$ olur ve μ_t de bir 2-yutan ideal olmuş olur. ■

3.3 2-Yutan Asalımsı Bulanık İdealler

Tanım 3.9. R'nin sabitten farklı bir μ bulanık ideali ve herhangi $x, y, z \in R$ için $\mu(xyz) \leq \mu(xy)$ ya da $\mu(xyz) \leq \sqrt{\mu}(xz)$ ya da $\mu(xyz) \leq \sqrt{\mu}(yz)$ şartlarından biri sağlanıyor ise μ'ye tamamen zayıflatılmış 2-yutan asalımsı bulanık ideal denir.

Teorem 3.12. *Her tamamen zayıflatılmış asalımsı bulanık ideal bir tamamen zayıflatılmış 2-yutan asalımsı bulanık idealdir.*

İspat. μ bir tamamen zayıflatılmış asalımsı bulanık ideal ve $x, y, z \in R$ için $\mu(xyz) > \mu(xy)$ olsun. μ tamamen zayıflatılmış asalımsı bulanık ideal olduğundan $\sqrt{\mu}(xz) \geq \sqrt{\mu}(z) \geq \mu(z^n) \geq \mu(xyz)$ ya da $\sqrt{\mu}(yz) \geq \sqrt{\mu}(z) \geq \mu(z^n) \geq \mu(xyz)$ olur. Böylece μ de bir tamamen zayıflatılmış 2-yutan asalımsı bulanık ideal elde edilir.

■

Teorem 3.13. *Her tamamen zayıflatılmış 2-yutan bulanık ideal bir tamamen zayıflatılmış 2-yutan asalımsı bulanık idealdir.*

İspat. Tamamen zayıflatılmış 2-yutan bulanık ideal ve tamamen zayıflatılmış 2-yutan asalımsı bulanık ideal tanımından ispat açıktır. ■

Bir sonraki örnek Teorem 3.13'te verilen genellemenin karşıtının her zaman doğru olmadığını göstermektedir.

$R = \mathbb{Z}$ tam sayılar halkası olmak üzere, $x \in \mathbb{Z}$ için $\mathbb{Z}$'nin bir μ bulanık ideali,

$$\mu(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \in 8\mathbb{Z} \\ 0, & x \notin 8\mathbb{Z} \end{array} \right\} \tag{3.11}$$

olarak tanımlansın. Burada μ bir tamamen zayıflatılmış 2-yutan asalımsı bulanık idealdir. Gerçekten de $x, y, z \in R$ için $\mu(xyz) > \mu(xy)$ ise $\mu(xyz) = 1$ ve $0 = \mu(xy)$ olur. Böylece $xyz \in 8\mathbb{Z}$ ve $xy \notin 8\mathbb{Z}$ elde edilir. $8\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$'nin bir asalımsı ideali olduğundan $z \in 2\mathbb{Z} = \sqrt{8\mathbb{Z}}$'dir. Burada $a \in \mathbb{Z}$ olmak üzere bulanık ideallerin radikali tanımı gereği $\sqrt{\mu}$,

$$\sqrt{\mu}(a) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & a \in 2\mathbb{Z} \\ 0, & a \notin 2\mathbb{Z} \end{array} \right\} \tag{3.12}$$

olarak tanımlanır. Buradan $\sqrt{\mu}(xz) = 1$ ve $\sqrt{\mu}(yz) = 1$ elde edilir ve $\sqrt{\mu}(xz) \geq \mu(xyz)$ ya da $\sqrt{\mu}(yz) \geq \mu(xyz)$ olduğu görülür. Bu ise μ'nün bir tamamen zayıflatılmış 2-yutan asalımsı bulanık ideal olduğunu gösterir.

Fakat $\mu(2.2.2) = 1 > 0 = \mu(2.2)$ olduğundan μ tamamen zayıflatılmış 2-yutan bulanık ideal değildir.

Lemma 3.3. *μ , R'nin bir bulanık ideali ve $t \in [0, \mu(0)]$ olsun. O halde μ'nün tamamen zayıflatılmış 2-yutan asalımsı bulanık ideal olması için gerek ve yeter koşul μ_t'nin 2-yutan asalımsı ideal olmasıdır.*

İspat. μ bir tamamen zayıflatılmış 2-yutan asalımsı bulanık ideal olsun. Herhangi $x, y, z \in R$ için $t \in [0, \mu(0)]$ olmak üzere $xyz \in \mu_t$ ve $xy \notin \mu_t$ olduğunu kabul edelim. O halde $yz \in \sqrt{\mu_t}$ ya da $xz \in \sqrt{\mu_t}$ olduğu gösterilmelidir. $xyz \in \mu_t$ ve $xy \notin \mu_t$ ise $\mu(xyz) \geq t > \mu(xy)$'dir. μ bir tamamen zayıflatılmış 2-yutan asalımsı bulanık ideal olduğundan $\sqrt{\mu}(xz) \geq \mu(xyz) \geq t$ ya da $\sqrt{\mu}(yz) \geq \mu(xyz) \geq t$ olur. Böylece $xz \in \sqrt{\mu}_t = \sqrt{\mu_t}$ ya da $yz \in \sqrt{\mu}_t = \sqrt{\mu_t}$ elde edilir ve μ_t'nin bir 2-yutan asalımsı ideal olduğu görülür.

Tersine, her $t \in [0, \mu(0)]$ için μ_t bir 2-yutan asalımsı ideal olsun. Herhangi $x, y, z \in R$ için $\mu(xyz) > \mu(xy)$ ise $\mu(xyz) = k$ olacak şekilde bir $k \in [0, \mu(0)]$ vardır ve $k = \mu(xyz) > \mu(xy)$'dir. Böylece $xyz \in \mu_k$ ve $xy \notin \mu_k$ olur. Her $t \in [0, \mu(0)]$ için μ_t bir 2-yutan asalımsı ideal olduğundan μ_k da bir 2-yutan asalımsı ideal olur ve $xz \in \sqrt{\mu_k} = \sqrt{\mu}_k$ ya da $yz \in \sqrt{\mu_k} = \sqrt{\mu}_k$ elde edilir. Buradan $\sqrt{\mu}(xz) \geq k = \mu(xyz)$ ya da $\sqrt{\mu}(yz) \geq k = \mu(xyz)$ sonucuna varılır. ■

Teorem 3.14. *R bir halka ve μ bir bulanık ideal olsun. Eğer μ tamamen zayıflatılmış 2-yutan asalımsı bulanık ideal ise $\sqrt{\mu}$ de bir tamamen zayıflatılmış 2-yutan bulanık idealdir.*

İspat. μ tamamen zayıflatılmış 2-yutan asalımsı bulanık ideal ise Lemma 3.3'dan herhangi $t \in [0, \mu(0)]$ için μ_t 2-yutan asalımsı idealdir. Teorem 2.23 ve Tanım 2.19'dan $\sqrt{\mu_t} = \sqrt{\mu}_t$ de bir 2-yutan idealdir. Buradan da Lemma 3.1 gereği de $\sqrt{\mu}_t$'nin bir 2-yutan ideal olması için gerek ve yeter koşul $\sqrt{\mu}$'nün tamamen zayıflatılmış 2-yutan bulanık ideal olmasıdır ve böylece istenen elde edilmiş olur. ■

Tanım 3.10. μ bir bulanık ideal olmak üzere herhangi $x, y, z \in R$ için $\mu(xyz) = \mu(0)$ iken $\mu(xy) = \mu(0)$ ya da $\sqrt{\mu}(yz) = \mu(0)$ ya da $\sqrt{\mu}(xz) = \mu(0)$ şartlarından biri sağlanıyor ise μ'ye $K-2$-yutan asalımsı bulanık ideal denir.

Teorem 3.15. *Her tamamen zayıflatılmış 2-yutan asalımsı bulanık ideal bir $K-2$-yutan asalımsı bulanık idealdir.*

İspat. μ tamamen zayıflatılmış 2-yutan asalımsı bulanık ideal olsun. $x, y, z \in R$ için $\mu(xyz) = \mu(0)$ ise μ bir tamamen zayıflatılmış 2-yutan asalımsı bulanık ideal olduğundan $\mu(0) \geq \mu(xy) \geq \mu(xyz) = \mu(0)$ ya da $\mu(0) = \sqrt{\mu}(0) \geq \sqrt{\mu}(xz) \geq \mu(xyz) = \mu(0)$ ya da $\mu(0) = \sqrt{\mu}(0) \geq \sqrt{\mu}(yz) \geq \mu(xyz) = \mu(0)$ sağlanır. Böylece $\mu(xy) = \mu(0)$ ya da $\sqrt{\mu}(xz) = \mu(0)$ ya da $\sqrt{\mu}(yz) = \mu(0)$ olur ve μ'nün bir $K-2$-yutan asalımsı bulanık ideal olduğu görülür. ■

Şimdi vereceğimiz örnekte bir μ bulanık idealinin $K-2$-yutan asalımsı bulanık ideal iken tamamen zayıflatılmış 2-yutan asalımsı bulanık ideal olmak zorunda olmadığını göstereceğiz.

$R = \mathbb{Z}$ tam sayılar halkası olsun. R halkası üzerinde $x \in R$ için

$$\mu(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x = 0 \\ \frac{1}{2}, & x \in 30\mathbb{Z} \\ \frac{1}{3}, & x \in \mathbb{Z} \diagdown 30\mathbb{Z} \end{array} \right\} \tag{3.13}$$

ile tanımlı bulanık idealin $K-2$-yutan asalımsı bulanık ideal olduğu açıktır. Fakat

$$\mu(2.3.5) = \frac{1}{2} > \vee\{\mu(2.3), \mu(2.5), \mu(3.5)\} = \frac{1}{3} \tag{3.14}$$

ve

$$\mu(2.3.5) = \frac{1}{2} > \vee\{\sqrt{\mu}(2.3), \sqrt{\mu}(2.5), \sqrt{\mu}(3.5)\} = \frac{1}{3} \tag{3.15}$$

olduğundan μ tamamen zayıflatılmış 2-yutan asalımsı bulanık ideal olamaz.

Sonuç Her tamamen zayıflatılmış asal bulanık ideal bir tamamen zayıflatılmış 2-yutan asalımsı idealdir.

İspat. Her tamamen zayıflatılmış asal bulanık ideal bir tamamen zayıflatılmış asalımsı bulanık idealdir. Teorem 3.12'den de istenen elde edilir. ■

Teorem 3.16. *Her $K-2$-yutan bulanık ideal bir $K-2$-yutan asalımsı bulanık idealdir.*

İspat. Tanım 3.7 ve Tanım 3.10'den açıkça görülür. ■

Bir sonraki örnek Teorem 3.16'un karşıtı her zaman doğru olmadığını göstermektedir.

μ tam sayılar halkası $\mathbb{Z}$ üzerinde $x \in \mathbb{Z}$ için

$$\mu(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \in 8\mathbb{Z} \\ 0, & x \notin 8\mathbb{Z} \end{array} \right\} \tag{3.16}$$

ile tanımlı μ bulanık ideali $K-2$-yutan asalımsı bulanık idealdir. Fakat $\mu(2.2.2) = \sqrt{\mu}(2.2) = \bigvee_{n\geq 1} \mu(4^n) = 1 = \mu(0)$ ve $\mu(2.2.2) = 1 = \mu(0) \neq \mu(4) = 0$ olduğundan, μ $K-2$-yutan bulanık ideal olamaz.

Tanım 3.11. R'nin sabitten farklı bir μ bulanık ideali ve x_r, y_s, z_t bulanık noktaları için $x_r y_s z_t \in \mu$ iken $x_r y_s \in \mu$ ya da $x_r z_t \in \sqrt{\mu}$ ya da $y_s z_t \in \sqrt{\mu}$ şartlarından biri sağlanıyor ise μ'ye 2-yutan asalımsı bulanık ideal denir.

Teorem 3.17. *Her asalımsı bulanık ideal bir 2-yutan asalımsı bulanık idealdir.*

İspat. Asalımsı bulanık ideal ve 2-yutan asalımsı bulanık ideal tanımlarından kolayca görülür. ■

Tanım 3.12. Herhangi $x, y, z \in L$ ve $1 > \alpha \in L$ elemanı için $x \wedge y \wedge z < \alpha$ iken $x \wedge y < \alpha$ ya da $x \wedge z < \alpha$ or $y \wedge z < \alpha$ şartlarından biri sağlanıyor ise α'ya 2-yutan eleman denir.

Teorem 3.18. *R bir halka, I bir 2-yutan asalımsı ideal ve $1 \neq \alpha \in L$ bir 2-yutan eleman olsun. O halde $x \in R$ için,*

$$\mu(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \in I \\ \alpha, & x \notin I \end{array} \right\} \tag{3.17}$$

ile tanımlı μ bulanık ideali de bir 2-yutan asalımsı bulanık idealdir.

İspat. R bir halka ve I bir 2-yutan asalımsı ideal olsun. R'nin x_r, y_s, z_t bulanık noktaları için $x_r y_s z_t \in \mu$ ve $x_r y_s \notin \mu$, $x_r z_t \notin \sqrt{\mu}$ ve $y_s z_t \notin \sqrt{\mu}$ olduğunu kabul edelim. O halde her $n \geq 1$ için $\mu(xy) < r \wedge s$, $\mu((yz)^n) \leq \sqrt{\mu}(yz) < s \wedge t$ ve $\mu((xz)^n) \leq \sqrt{\mu}(xz) < r \wedge t$'dir. Bu durumda $\mu(xy) = \alpha$ ve $xy \notin I$, $\mu((yz)^n) = \alpha$ ve $(yz)^n \notin I$ yani $yz \notin \sqrt{I}$, $\mu((xz)^n) = \alpha$ ve $(xz)^n \notin I$ yani $xz \notin \sqrt{I}$ olur. I bir 2-yutan asalımsı ideal olduğundan

$xyz \notin I$ ve buradan da $\mu(xyz) = \alpha$ elde edilir. Kabulümüz gereği $r \wedge s \wedge t \leq \mu(xyz) = \alpha$'dır. α bir 2-yutan eleman olduğundan da $r \wedge s \leq \alpha$ veya $s \wedge t \leq \alpha$ veya $r \wedge t \leq \alpha$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. ■

Teorem 3.19. *Her 2- yutan bulanık ideal bir 2-yutan asalımsı bulanık idealdir.*

İspat. 2- yutan bulanık ideal ve 2-yutan asalımsı bulanık ideal tanımlarından ispat açıktır. ■

Teorem 3.19'de verilen genellemenin karşıtı her zaman doğru olmayabilir. Bu örnekte bu genellemenin çalışmadığını göstereceğiz.

$\mathbb{Z}$ tam sayılar halkası üzerinde μ bulanık ideali $x \in \mathbb{Z}$ için

$$\mu(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \in 8\mathbb{Z} \\ 0, & \text{diğer} \end{array} \right\} \tag{3.18}$$

olarak tanımlansın. Teorem 3.18'den μ nün 2-yutan asalımsı bulanık ideal olduğu açıkça görülür. Fakat $2_1 2_1 2_1 \in \mu$ iken $2_1 2_1(4) = 1 > \mu(4) = 0$ ve böylece $2_1 2_1 \notin \mu$ olduğundan μ 2-yutan bulanık ideal olmaz.

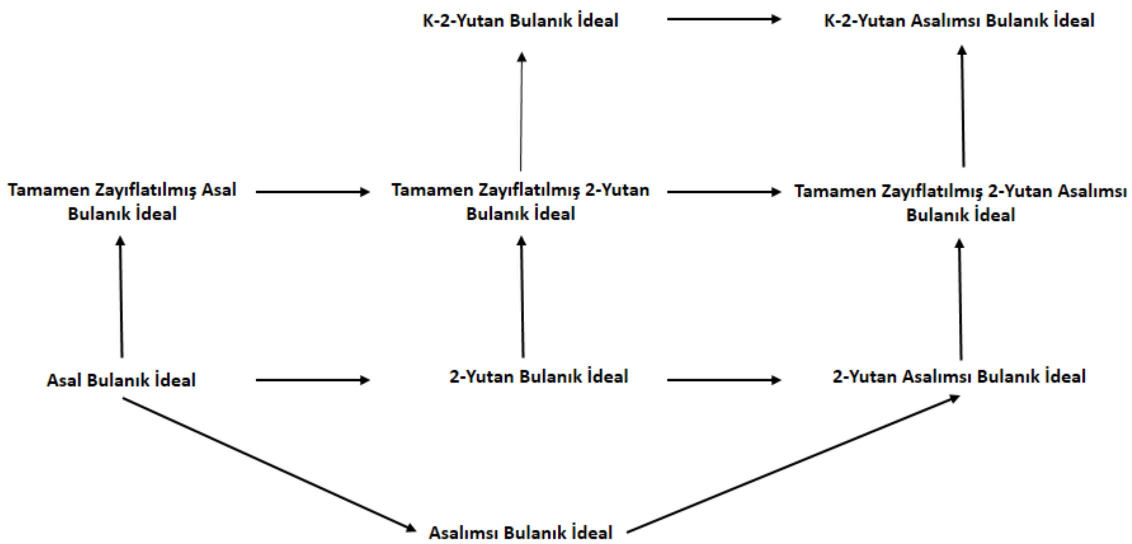
Lemma 3.4. *μ , R'nin bir bulanık ideali ve $t \in [0, \mu(0)]$ olsun. O halde μ, R'nin 2-yutan asalımsı bulanık ideali ise μ_t de R'nin 2-yutan asalımsı idealdir.*

İspat. μ bir 2-yutan asalımsı bulanık ideal ve $t \in [0, \mu(0)]$ olsun. $x, y, z \in R$ için $xyz \in \mu_t$ olduğunu kabul edelim. O halde $\mu(xyz) \geq t$'dir. Buradan $(xyz)_t(xyz) = t \leq \mu(xyz)$ ve $(xyz)_t = x_t y_t z_t \in \mu$ elde edilir. μ bir 2-yutan asalımsı bulanık ideal olduğundan $x_t y_t = (xy)_t \in \mu$ ya da $x_t z_t = (xz)_t \in \sqrt{\mu}$ ya da $y_t z_t = (yz)_t \in \sqrt{\mu}$ sağlanır. Böylece $xy \in \mu_t$ ya da $xz \in \sqrt{\mu}_t = \sqrt{\mu_t}$ ya da $yz \in \sqrt{\mu}_t = \sqrt{\mu_t}$ olur ve μ_t de bir 2-yutan asalımsı ideal bulunur. ■

Teorem 3.20. *R bir halka ve μ bir bulanık ideal olsun. Eğer μ bir 2-yutan asalımsı bulanık ideal ise ayrıca tamamen zayıflatılmış 2-yutan asalımsı idealdir.*

İspat. μ'nün 2-yutan asalımsı bulanık ideal ve $x, y, z \in R$ için $\mu(xyz) > \mu(xy)$ olduğunu kabul edelim. O halde $\mu(xyz) = t$ olacak şekilde bir $t \in [0, \mu(0)]$ vardır. Böylece $xyz \in \mu_t$ ve $xy \notin \mu_t$ olur. Lemma 3.4'den μ 2-yutan asalımsı bulanık ideal iken μ_t de bir 2-yutan asalımsı ideal olduğundan $xz \in \sqrt{\mu_t} = \sqrt{\mu}_t$ ya da $yz \in \sqrt{\mu_t} = \sqrt{\mu}_t$ elde edilir. Buradan da $\sqrt{\mu}(xz) \geq t = \mu(xyz)$ ya da $\sqrt{\mu}(yz) \geq t = \mu(xyz)$ bulunur ve bu ise μ'nün tamamen zayıflatılmış 2-yutan asalımsı bulanık ideal olduğunu gösterir. ■

Şimdi vereceğimiz şekilde bu kısıma kadar tanımladığımız bazı özel bulanık idealler arasındaki geçişleri inceleyeceğiz.



Şekil 3.1 Özel Bulanık İdealler Arasındaki İlişki

Teorem 3.21. *R bir halka ve μ bir bulanık ideal olsun. Eğer μ bir 2-yutan asalımsı bulanık ideal ise $\sqrt{\mu}$ de bir 2-yutan bulanık idealdir.*

İspat. μ bir 2-yutan asalımsı bulanık ideal ve x_r, y_s, z_t bulanık noktaları için $x_r y_s z_t \in \sqrt{\mu}$ ve $x_r y_s \notin \sqrt{\mu}$ olsun. $x_r y_s z_t \in \sqrt{\mu}$ olduğundan $r \wedge s \wedge t = x_r y_s z_t(xyz) \leq \sqrt{\mu}(xyz)$ elde edilir. $\sqrt{\mu}$ tanımından, $\sqrt{\mu}(xyz) = \bigvee_{n\geq 1} \mu(x^n y^n z^n) \geq r \wedge s \wedge t$'dir. O halde $r \wedge s \wedge t \leq \mu(x^k y^k z^k) = \mu((xyz)^k)$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Bu ise $(x_r y_s z_t)^k \in \mu$ olmasını gerektirir. Ayrıca $x_r y_s \notin \sqrt{\mu}$ olduğundan her $k \in \mathbb{Z}^+$ için, $(x_r y_s)^k = x_r^k y_s^k \notin \mu$'dür. μ de bir 2-yutan asalımsı bulanık ideal olduğundan $x_r z_t \in \sqrt{\mu}$ ya da $y_s z_t \in \sqrt{\mu}$ olur. Bu ise $\sqrt{\mu}$'nün 2-yutan bulanık ideal olduğunu gösterir. ■

Tanım 3.13. μ, R'nin bir 2-yutan asalımsı bulanık ideali olsun. Teorem 3.21 gereği $\gamma = \sqrt{\mu}$ bulanık ideali de bir 2-yutan bulanık idealdir ve buradaki μ bulanık idealine γ-2-yutan asalımsı bulanık ideal denir.

Teorem 3.22. *$\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$, R'nin γ-2-yutan asalımsı bulanık idealleri olsun. O halde*

$$\mu = \bigcap_{i=1}^{n} \mu_i \tag{3.19}$$

bulanık ideali de γ-2-yutan asalımsı bulanık idealdir.

İspat. $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ bulanık idealleri birer γ-2-yutan asalımsı bulanık ideal ve $\mu = \bigcap_{i=1}^{n} \mu_i$ olsun. R'nin x_r, y_s, z_t bulanık noktaları için $x_r y_s z_t \in \mu$ ve $x_r y_s \notin \mu$ kabul edelim. O halde bazı $n \geq j \geq 1$ için $x_r y_s \notin \mu_j$ ve her $n \geq j \geq 1$ için $x_r y_s z_t \in \mu_j$'dir. μ_j de bir γ-2-yutan asalımsı bulanık ideal olduğundan $y_s z_t \in \sqrt{\mu_j} = \gamma = \bigcap_{i=1}^{n} \sqrt{\mu_i} = \sqrt{\bigcap_{i=1}^{n} \mu_i} = \sqrt{\mu}$ ya da $x_r z_t \in \sqrt{\mu_j} = \gamma = \bigcap_{i=1}^{n} \sqrt{\mu_i} = \sqrt{\bigcap_{i=1}^{n} \mu_i} = \sqrt{\mu}$ elde edilir. Böylece μ de bir γ-2-yutan asalımsı bulanık ideal olur. ■

Bir sonraki örnek, herhangi iki 2-yutan asalımsı bulanık idealin kesişiminin 2-yutan asalımsı bulanık ideal olmak zorunda olmadığını göstermektedir.

$R = \mathbb{Z}$ olmak üzere R'nin iki bulanık ideali μ_1 ve μ_2

$$\mu_1(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \in 50\mathbb{Z} \\ 0, & x \notin 50\mathbb{Z} \end{array} \right\} \tag{3.20}$$

ve

$$\mu_2(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \in 75\mathbb{Z} \\ 0, & x \notin 75\mathbb{Z} \end{array} \right\} \tag{3.21}$$

ile tanımlansın. Teorem 3.18'den μ_1 ve μ_2 birer 2-yutan asalımsı bulanık ideal olur. Bulanık ideallerin kesişimi tanımı ile $\mu_1 \cap \mu_2$ bulanık ideali

$$(\mu_1 \cap \mu_2)(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \in 150\mathbb{Z} \\ 0, & x \notin 150\mathbb{Z} \end{array} \right\} \tag{3.22}$$

olur. $x = 25, y = 3, z = 2 \in \mathbb{Z}$ için

$$\mu_1 \cap \mu_2(25.3.2) = 1 > \mu_1 \cap \mu_2(25.3) = \mu_1 \cap \mu_2(25.2) = \mu_1 \cap \mu_2(3.2) = 0 \tag{3.23}$$

olur. Bulanık ideallerin radikali tanımından ise

$$\sqrt{\mu_1 \cap \mu_2} = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \in 30\mathbb{Z} \\ 0, & x \notin 30\mathbb{Z} \end{array} \right\} \tag{3.24}$$

elde edilir. Böylece

$$\mu_1 \cap \mu_2(25.3.2) = 1 > \sqrt{\mu_1 \cap \mu_2}(25.2) = \sqrt{\mu_1 \cap \mu_2}(25.3) = \sqrt{\mu_1 \cap \mu_2}(3.2) = 0 \tag{3.25}$$

bulunur. Sonuç olarak, $\mu_1 \cap \mu_2$ bir tamamen zayıflatılmış 2-yutan asalımsı bulanık ideal olmadığından 2-yutan asalımsı bulanık ideal de olmamaktadır.

Teorem 3.23. *R bir halka ve μ bir bulanık ideal olsun. Eğer $\sqrt{\mu}$ bulanık ideali asal bulanık ideal ise μ de bir 2-yutan asalımsı bulanık idealdir.*

İspat. $\sqrt{\mu}$ asal bulanık ideal ve x_r, y_s, z_t R'nin bulanık noktaları olsun. $x_r y_s z_t \in \mu$ ve $x_r y_s \notin \mu$ kabul edelim. R bir değişmeli halka ve $x_r y_s z_t \in \mu$ olduğundan $x_r y_s z_t z_t = (x_r z_t)(y_s z_t) \in \mu \subseteq \sqrt{\mu}$ olur. Burada $\sqrt{\mu}$ asal bulanık ideal olduğundan $x_r z_t \in \sqrt{\mu}$ ya da $y_s z_t \in \sqrt{\mu}$ elde edilir ve μ'nün 2-yutan asalımsı bulanık ideal olduğu sonucuna varılır. ■

Sonuç μ, R'nin bir asal bulanık ideali ise μ^n de bir 2-yutan asalımsı bulanık idealdir.

İspat. μ bir asal bulanık ideal olsun. Teorem 2.26'den $\sqrt{\mu}$ de bir asal bulanık ideal olur. Ayrıca yine Teorem 2.26'den bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\sqrt{\mu} = \sqrt{\mu^n}$ olduğundan μ^n bulanık idealinin radikali de asal bulunmuş olur. Böylece Teorem 3.23'den de μ^n bir 2-yutan asalımsı bulanık ideal bulunur.

■

Teorem 3.24. *$\{\mu_i : i \in I\}$ kümesi R'nin 2-yutan asalımsı bulanık ideallerinin bir zinciri olsun. O halde $\mu = \bigcup_{i \in I} \mu_i$ bulanık ideali de R'nin bir 2-yutan asalımsı bulanık idealdir.*

İspat. $\{\mu_i : i \in I\}$ kümesi R'nin 2-yutan asalımsı bulanık ideallerinin bir zinciri olsun. R'nin x_r, y_s, z_t bulanık noktaları için $x_r y_s z_t \in \mu$ ve $x_r y_s \notin \mu$ olduğunu kabul edelim. O halde en az bir $j \in I$ için $x_r y_s z_t \in \mu_j$ ve her $i \in I$ için $x_r y_s \notin \mu_i$'dir. μ_j de 2-yutan asalımsı bulanık ideal olduğundan $y_s z_t \in \sqrt{\mu_j}$ ya da $x_r z_t \in \sqrt{\mu_j}$ bulunur. Böylece $y_s z_t \in \sqrt{\mu_j} \subseteq \bigcup_{i \in I} \sqrt{\mu_i} = \sqrt{\bigcup_{i \in I} \mu_i} = \mu$ ya da $x_r z_t \in \sqrt{\mu_j} \subseteq \bigcup_{i \in I} \sqrt{\mu_i} = \sqrt{\bigcup_{i \in I} \mu_i} = \mu$ elde edilir. ■

Teorem 3.25. *$f : R \to S$ bir halka homomorfizması olsun. Eğer ξ bulanık ideali S'nin 2-yutan asalımsı bulanık ideali ise $f^{-1}(\xi)$ de R'nin 2-yutan asalımsı bulanık idealidir.*

İspat. $f : R \to S$ halka homomorfizması ve ξ, S'nin bir 2-yutan asalımsı bulanık ideali olsun. R'nin x_r, y_s, z_t bulanık noktaları için $x_r y_s z_t \in f^{-1}(\xi)$ olduğunu kabul edelim. O halde $r \wedge s \wedge t \le f^{-1}(\xi)(xyz) = \xi(f(xyz)) = \xi(f(x)f(y)f(z))$ olur. Buradan $f(x) = a$, $f(y) = b, f(z) = c \in S$ olsun. Böylece $r \wedge s \wedge t \le \xi(abc)$ ve $a_r b_s c_t \in \xi$ elde edilir. ξ de bir 2-yutan asalımsı bulanık ideal olduğundan $a_r b_s \in \xi$ ya da $a_r c_t \in \sqrt{\xi}$ ya da $b_s c_t \in \sqrt{\xi}$ bulunur. Eğer $a_r b_s \in \xi$ ise $r \wedge s \le \xi(ab) = \xi(f(x)f(y)) = \xi(f(xy)) = f^{-1}(\xi)(xy)$ olur ve $x_r, y_s \in f^{-1}(\xi)$ elde edilir.

$a_r c_t \in \sqrt{\xi}$ ise bazı $n \in \mathbb{Z}^+$ için $r \wedge t \le \xi(a^n c^n) = \xi(f(x)^n f(z)^n) \le \bigvee_{n \ge 1} \xi(f(x)^n f(z)^n) = \sqrt{\xi}(f(x)f(z)) = \sqrt{\xi}(f(xz)) = f^{-1}(\sqrt{\xi})(xz) = \sqrt{f^{-1}(\xi)}(xz)$ bulunur ve $x_r z_t \in \sqrt{f^{-1}(\xi)}$ olduğu görülür. Benzer şekilde $b_s c_t \in \sqrt{\xi}$ ise de $y_s z_t \in \sqrt{f^{-1}(\xi)}$ olduğu gösterilir. ■

Teorem 3.26. *Let $f : R \to S$ örten halka homomorfizması ve μ, R'nin Çek$f$ üzerinde sabit olacak şekilde bir 2-yutan asalımsı bulanık ideali ise $f(\mu)$ de S'nin bir 2-yutan asalımsı bulanık idealidir.*

İspat. μ, R'nin Çek$f$ üzerinde sabit olan bir 2-yutan asalımsı bulanık ideali ve a_r, b_s, c_t de S'nin bulanık noktaları olsun. Burada $a_r b_s c_t \in f(\mu)$ olduğunu kabul edelim. f bir örten halka homomorfizması olduğundan $f(x) = a, f(y) = b, f(z) = c$ olacak şekilde $x, y, z \in R$ vardır. μ bulanık ideali Çek$f$ üzerinde sabit olduğundan $a_r b_s c_t(abc) = r \wedge s \wedge t \leq f(\mu)(abc) = f(\mu)(f(x)f(y)f(z)) = f(\mu)(f(xyz)) = \mu(xyz)$ olur ve $x_r y_s z_t \in \mu$ sonucuna varılır. Ayrıca μ bir 2-yutan asalımsı bulanık ideal olduğundan $x_r y_s \in \mu$ ya da $x_r z_t \in \sqrt{\mu}$ ya da $y_s z_t \in \sqrt{\mu}$ elde edilir. Böylece $r \wedge s \leq \mu(xy) = f(\mu)(f(xy)) = f(\mu)(f(x)f(y)) = f(\mu)(ab)$ yani $a_r b_s \in f(\mu)$ ya da $r \wedge t \leq \sqrt{\mu}(xz) = \bigvee_{n\geq 1} \mu(x^n z^n) = \bigvee_{n\geq 1} f(\mu)(f(x^n)f(z^n)) = \bigvee_{n\geq 1} f(\mu)(a^n c^n) = \sqrt{f(\mu)}(ac)$ yani $a_r c_t \in \sqrt{f(\mu)}$ ya da $s \wedge t \leq \sqrt{\mu}(yz) = \bigvee_{n\geq 1} \mu(y^n z^n) = \bigvee_{n\geq 1} f(\mu)(f(y^n)f(z^n)) = \bigvee_{n\geq 1} f(\mu)(b^n c^n) = \sqrt{f(\mu)}(bc)$ yani $b_s c_t \in \sqrt{f(\mu)}$ bulunur. ■

3.4 2-Yutan δ-Asalımsı Bulanık İdealler

Tezin bu kısmında tanımlamış olduğumuz 2-yutan asalımsı bulanık ideallerin "δ" bulanık ideal genişlemesi yardımı ile genişletilmiş hallerini tanımlayıp analiz edeceğiz.

Tanım 3.14. R bir halka, μ bir bulanık ideal ve δ bir bulanık ideal genişlemesi olsun. R'nin x_r, y_s, z_t bulanık noktaları için $x_r y_s z_t \in \mu$ iken $x_r y_s \in \mu$ ya da $x_r z_t \in \delta(\mu)$ ya da $y_s z_t \in \delta(\mu)$ şartlarından biri sağlanıyorsa μ'ye 2-yutan δ-asalımsı bulanık ideal denir.

δ_0, μ bulanık ideali için $\delta_0(\mu) = \mu$ olacak şekilde bir birim fonksiyon olsun. O halde μ'nün bir 2-yutan δ_0-asalımsı bulanık ideal olması için gerek ve yeter koşul 2-yutan bulanık ideal olmasıdır.

μ bir 2-yutan δ_0-asalımsı bulanık ideal olsun. R'nin x_r, y_s, z_t bulanık noktaları için $x_r y_s z_t \in \mu$ iken $x_r y_s \in \mu$ ya da $x_r z_t \in \delta_0(\mu) = \mu$ ya da $y_s z_t \in \delta_0(\mu) = \mu$ olur ve μ'nün 2-yutan bulanık ideal olduğu görülür. Tersine, μ bir 2-yutan bulanık ideal olsun. R'nin x_r, y_s, z_t bulanık noktaları için $x_r y_s z_t \in \mu$ iken $x_r y_s \in \mu$ ya da $x_r z_t \in \mu = \delta_0(\mu)$ ya da $y_s z_t \in \mu = \delta_0(\mu)$ olduğundan μ bir 2-yutan δ_0-asalımsı bulanık ideal olur.

R bir halka, μ bir bulanık ideal ve δ_1 fonksiyonu $\delta_1(\mu) = \sqrt{\mu}$ ile tanımlı bir bulanık ideal genişlemesi olsun. O halde μ'nün bir 2-yutan δ_1-asalımsı bulanık ideal olması için gerek ve yeter koşul 2-yutan asalımsı bulanık ideal olmasıdır.

μ bir 2-yutan δ_1-asalımsı bulanık ideal olsun. R'nin x_r, y_s, z_t bulanık noktaları için $x_r y_s z_t \in \mu$ iken $x_r y_s \in \mu$ ya da $x_r z_t \in \delta_1(\mu) = \sqrt{\mu}$ ya da $y_s z_t \in \delta_1(\mu) = \sqrt{\mu}$ olur ve μ'nün 2-yutan asalımsı bulanık ideal olduğu görülür. Tersine, μ bir 2-yutan asalımsı bulanık ideal olsun. R'nin x_r, y_s, z_t bulanık noktaları için $x_r y_s z_t \in \mu$ iken $x_r y_s \in \mu$ ya da $x_r z_t \in \sqrt{\mu} = \delta_1(\mu)$ ya da $y_s z_t \in \sqrt{\mu} = \delta_1(\mu)$ olduğundan μ bir 2-yutan δ_1-asalımsı bulanık ideal olur.

Teorem 3.27. *R bir halka, μ bir bulanık ideal ve δ bulanık ideal genişlemesi olsun. $\delta(\mu)$ bir asal bulanık ideal ise μ bir 2-yutan δ-asalımsı bulanık idealdir.*

İspat. x_r, y_s, z_t bulanık noktaları için $x_r y_s z_t \in \mu$ ve $x_r y_s \notin \mu$ olduğunu kabul edelim. Burada $x_r y_s \in \delta(\mu)$ ise $\delta(\mu)$ bir asal bulanık ideal olduğu için $x_r \in \delta(\mu)$ ya da $y_s \in \delta(\mu)$ bulunur. Böylece $x_r z_t \in \delta(\mu)$ ya da $y_s z_t \in \delta(\mu)$ olur ve μ bir 2-yutan δ-asalımsı bulanık ideal bulunur.

Eğer $x_r y_s \notin \delta(\mu)$ ise $\mu \subseteq \delta(\mu)$ olduğundan $x_r y_s z_t \in \delta(\mu)$ olur. $\delta(\mu)$ de bir asal bulanık ideal olduğu için $z_t \in \delta(\mu)$ elde edilir. Böylece $x_r z_t \in \delta(\mu)$ ya da $y_s z_t \in \delta(\mu)$ sonucuna varılır ve μ bir 2-yutan δ-asalımsı bulanık ideal olur. ∎

Teorem 3.28. *R bir halka, μ bir bulanık ideal olsun. δ fonksiyonu ise her $t \in [0, \mu(0)]$ için $\delta(\mu_t) = \delta(\mu)_t$ olacak şekilde hem ideal genişlemesi hem de bulanık ideal genişlemesi olsun. Eğer μ bir 2-yutan δ-asalımsı bulanık ideal ise μ_t seviye ideali de $t \in [0, \mu(0)]$ için bir 2-yutan δ-asalımsı idealdir.*

İspat. δ fonksiyonu $t \in [0, \mu(0)]$ için $\delta(\mu_t) = \delta(\mu)_t$ olacak şekilde bir ideal genişlemesi ve bulanık ideal genişlemesi olsun. μ'nün bir 2-yutan δ-asalımsı bulanık ideal olduğunu kabul edelim. $x, y, z \in R$ için $xyz \in \mu_t$ olsun. O halde $x_t y_t z_t \in \mu$'dür. μ bir 2-yutan δ-asalımsı bulanık ideal olduğundan $x_t y_t \in \mu$ ya da $x_t z_t \in \delta(\mu)$ ya da $y_t z_t \in \delta(\mu)$ elde edilir. Böylece $xy \in \mu_t$ ya da $xz \in \delta(\mu)_t = \delta(\mu_t)$ ya da $yz \in \delta(\mu)_t = \delta(\mu_t)$ bulunur ve μ_t'nin de 2-yutan δ-asalımsı ideal olduğu sonucuna varılır.

∎

Teorem 3.29. *γ ve δ iki bulanık ideal genişlemesi olsun. Herhangi μ bulanık ideali için $\delta(\mu) \subseteq \gamma(\mu)$ ise her 2-yutan δ-asalımsı ideal bir 2-yutan γ-asalımsı bulanık idealdir. Ayrıca, her δ bulanık ideal genişlemesi için , herhangi bir 2-yutan bulanık ideal bir 2-yutan δ-asalımsı bulanık idealdir.*

İspat. μ bir 2-yutan δ-asalımsı bulanık ideal olsun. μ'nün bir 2-yutan γ-asalımsı bulanık ideal olduğunu gösterelim. R'nin x_r, y_s, z_t bulanık noktaları için $x_r y_s z_t \in \mu$

olsun. μ bir 2-yutan δ-asalımsı bulanık ideal ve $\delta(\mu) \subseteq \gamma(\mu)$ olduğundan $x_r y_s \in \mu$ ya da $x_r z_t \in \delta(\mu) \subseteq \gamma(\mu)$ ya da $y_s z_t \in \delta(\mu) \subseteq \gamma(\mu)$ elde edilir. Böylece μ 2-yutan γ-asalımsı bulanık ideal bulunur.

Her δ bulanık ideal genişlemesi için eğer μ bir 2-yutan bulanık ideal ise 2-yutan bulanık ideal tanımından μ bir 2-yutan δ-asalımsı bulanık ideal bulunur. ■

Teorem 3.30. *δ kesişim koruyan bir bulanık ideal genişlemesi ve $\mu_1, ..., \mu_n$ de R'nin 2-yutan δ-asalımsı bulanık idealleri olsun. Her $i \in \{1, 2, ..., n\}$ için $\xi = \delta(\mu_i)$ ise $\mu = \bigcap_{i=1}^{n} \mu_i$ de bir 2-yutan δ-asalımsı bulanık idealdir.*

İspat. x_r, y_s, z_t bulanık noktaları için $x_r y_s z_t \in \mu = \bigcap_{i=1}^{n} \mu_i$ iken $x_r y_s \notin \mu = \bigcap_{i=1}^{n} \mu_i$ olduğunu kabul edelim. O halde her $i \in \{1, 2, ..., n\}$ için $x_r y_s z_t \in \mu_i$ ve en az bir $j \in \{1, 2, ..., n\}$ için $x_r y_s \notin \mu_j$'dir. μ_j de bir 2-yutan δ-asalımsı bulanık ideal olduğundan $y_s z_t \in \delta(\mu_j) = \xi$ ya da $x_r z_t \in \delta(\mu_j) = \xi$ elde edilir. δ kesişim koruyan bir bulanık ideal genişlemesi olduğundan da

$$\delta(\mu) = \delta(\bigcap_{i=1}^{n} \mu_i) = \bigcap_{i=1}^{n} \delta(\mu_i) = \bigcap_{i=1}^{n} \xi = \xi = \delta(\mu_j) \tag{3.26}$$

olduğu görülür. Böylece $y_s z_t \in \delta(\mu) = \xi$ ya da $x_r z_t \in \delta(\mu) = \xi$ olur ve buradan da μ'nün de bir 2-yutan δ-asalımsı bulanık ideal olduğu sonucuna varılır.

■

Teorem 3.31. *δ bir global bulanık ideal genişlemesi ve $f : R \to S$ bir halka homomorfizması olsun. Eğer ξ bulanık ideali S'nin 2-yutan δ-asalımsı bulanık ideali ise $f^{-1}(\xi)$ de R'nin 2-yutan δ-asalımsı bulanık idealidir.*

İspat. $f : R \to S$ halka homomorfizması ve ξ, S'nin bir 2-yutan δ-asalımsı bulanık ideali olsun. R'nin x_r, y_s, z_t bulanık noktaları için $x_r y_s z_t \in f^{-1}(\xi)$ olduğunu kabul edelim. O halde $r \wedge s \wedge t \leq f^{-1}(\xi)(xyz) = \xi(f(xyz)) = \xi(f(x)f(y)f(z))$ olur. Buradan $f(x) = a$, $f(y) = b, f(z) = c \in S$ olsun. Böylece $r \wedge s \wedge t \leq \xi(abc)$ ve $a_r b_s c_t \in \xi$ elde edilir. ξ de bir 2-yutan δ-asalımsı bulanık ideal olduğundan $a_r b_s \in \xi$ ya da $a_r c_t \in \delta(\xi)$ ya da $b_s c_t \in \delta(\xi)$ bulunur. Eğer $a_r b_s \in \xi$ ise $r \wedge s \leq \xi(ab) = \xi(f(x)f(y)) = \xi(f(xy)) = f^{-1}(\xi)(xy)$ olur ve $x_r, y_s \in f^{-1}(\xi)$ elde edilir.

$a_r c_t \in \delta(\xi)$ ise $r \wedge t \leq \delta(\xi)(ac) = \delta(\xi)(f(x)f(z)) = \delta(\xi)(f(xz)) = f^{-1}(\delta(\xi))(xz)$ bulunur. δ da global olduğundan $r \wedge t \leq f^{-1}(\delta(\xi))(xz) = \delta(f^{-1}(\xi))(xz)$ bulunur ve $x_r z_t \in \delta(f^{-1}(\xi))$ olduğu görülür. Benzer şekilde $b_s c_t \in \delta(\xi)$ ise de $y_s z_t \in \delta(f^{-1}(\xi))$ olduğu gösterilir. ■

Teorem 3.32. *δ global bulanık ideal genişlemesi, $f : R \to S$ örten halka homomorfizması, ve μ, R'nin Çek$f$ üzerinde sabit olacak şekilde bir 2-yutan δ-asalımsı bulanık ideali ise $f(\mu)$ de S'nin bir 2-yutan δ-asalımsı bulanık idealidir.*

İspat. μ, R'nin Çek$f$ üzerinde sabit olan bir 2-yutan δ-asalımsı bulanık ideali ve a_r, b_s, c_t de S'nin bulanık noktaları olsun. Burada $a_r b_s c_t \in f(\mu)$ olduğunu kabul edelim. f bir örten halka homomorfizması olduğundan $f(x) = a, f(y) = b, f(z) = c$ olacak şekilde $x, y, z \in R$ vardır. μ bulanık ideali Çek$f$ üzerinde sabit olduğundan $a_r b_s c_t(abc) = r \wedge s \wedge t \leq f(\mu)(abc) = f(\mu)(f(x)f(y)f(z)) = f(\mu)(f(xyz)) = \mu(xyz)$ olur ve $x_r y_s z_t \in \mu$ sonucuna varılır. Ayrıca μ bir 2-yutan δ-asalımsı bulanık ideal olduğundan $x_r y_s \in \mu$ ya da $x_r z_t \in \delta(\mu)$ ya da $y_s z_t \in \delta(\mu)$ elde edilir. Böylece $r \wedge s \leq \mu(xy) = f(\mu)(f(xy)) = f(\mu)(f(x)f(y)) = f(\mu)(ab)$ yani $a_r b_s \in f(\mu)$ ya da $r \wedge t \leq \delta(\mu)(xz) \leq f(\delta(\mu))(f(xz)) = f(\delta(\mu))(f(x)f(z))$ ve buradan da $f(x)_r f(z)_t = a_r c_t \in f(\delta(\mu))$ ya da $s \wedge t \leq \delta(\mu)(yz) \leq f(\delta(\mu))(f(yz)) = f(\delta(\mu))(f(y)f(z))$ böylece $f(y)_s f(z)_t = b_s c_t \in f(\delta(\mu))$ elde edilir.

μ bulanık ideali Çek$f$ üzerinde sabit ve δ da global olduğundan $\delta(\mu) = \delta(f^{-1}(f(\mu))) = f^{-1}(\delta(f(\mu)))$ elde edilir. f homomorfizmasının da örten olmasından $\delta(f(\mu)) = f(\delta(\mu))$ bulunur. Sonuç olarak ise $a_r b_s c_t \in f(\mu)$ iken $a_r b_s \in f(\mu)$ ya da $a_r c_t \in f(\delta(\mu)) = \delta(f(\mu))$ ya da $b_s c_t \in f(\delta(\mu)) = \delta(f(\mu))$ elde edilir. ■

Sonuç [2-yutan δ-Asalımsı Bulanık İdealler için Eşleme Teoremi]

$f : R \to S$ bir örten homorfizma ve δ bir global bulanık ideal genişlemesi olsun. R'nin Çek$f$ üzerinde sabit olan 2-yutan δ-asalımsı bulanık idealleri ile S'nin 2-yutan δ-asalımsı bulanık idealleri arasında bire bir eşleme vardır.

4
BAZI ÖZEL BULANIK ALT MODÜLLER

Tezin bu bölümünde modül teorisindeki kavramlar bulanık modül teorisinde incelenecek ve yapısı araştıralacaktır.

4.1 δ-Asalımsı Bulanık Alt Modüller

Tanım 4.1. R bir halka, M bir R-modül ve δ bir bulanık ideal genişlemesi olsun. R'nin x_r, M'nin m_t bulanık noktası ve M'nin sabitten farklı bir μ bulanık alt modülü için $x_r m_t \in \mu$ iken $m_t \in \mu$ ya da $x_r \in \delta([\mu : \lambda_M])$ şartlarından birini sağlanıyorsa μ'ye M'nin δ-asalımsı bulanık alt modülü denir.

R üzerinde tanımlı bir μ bulanık alt kümesinin $\mu(0) = 1$ olacak şekilde δ_0-asalımsı bulanık ideal olması için gerek ve yeter koşul δ_0-asalımsı bulanık alt modül olmasıdır.

x_r ve y_s iki bulanık nokta ve μ bulanık alt kümesi $\mu(0) = 1$ olacak şekilde bir δ_0-asalımsı bulanık ideal olsun. $x_r y_s \in \mu$ ise μ bir δ_0-asalımsı bulanık ideal olduğundan $y_s \in \mu$ ya da $x_r \in \delta_0(\mu) = \mu$'dür. $y_s \in \mu$ ise ispat biter. O halde $x_r \in \delta_0(\mu) = \mu$ olduğunu kabul edelim. Buradan $x_r \lambda_R \subseteq \mu$ elde edildiğinden $x_r \in [\mu : \lambda_R] = \delta_0([\mu : \lambda_R])$ bulunur.

Diğer taraftan, x_r ve y_s iki bulanık nokta ve μ bir δ_0-asalımsı bulanık alt modül olsun. $x_r y_s \in \mu$ iken μ bir δ_0-asalımsı bulanık alt modül olduğundan $y_s \in \mu$ yada $x_r \in \delta([\mu : \lambda_R]) = [\mu : \lambda_R]$ elde edilir. $y_s \in \mu$ ise ispat biter. O halde $x_r \in \delta([\mu : \lambda_R]) = [\mu : \lambda_R]$ olduğunu kabul edelim. Burada

$$x_r \lambda_R(\alpha) = \left\{ \begin{array}{ll} r, & \alpha = xm \text{ bazı } m \in R \\ 0, & \text{diğer} \end{array} \right\} \tag{4.1}$$

ile tanımlı $x_r \lambda_R \subseteq \mu$ için R birimli bir halka olduğundan $x_r \in \mu = \delta_0(\mu)$ elde edilir. Böylece μ bir δ_0-asalımsı bulanık ideal olur.

Teorem 4.1. *γ ve δ iki bulanık ideal genişlemesi olsun. Her η bulanık ideali için*

$\delta(\eta) \subseteq \gamma(\eta)$ ise, her δ-asalımsı bulanık alt modülü bir γ-asalımsı bulanık alt modüldür. Ayrıca, her δ ideal genişlemesi için her asal bulanık alt modül bir δ-asalımsı bulanık alt modüldür.

İspat. δ bir bulanık ideal genişlemesi ve μ bir δ-asalımsı bulanık alt modül olsun. R'nin x_r ve M'nin m_t bulanık noktaları için $x_r m_t \in \mu$ ve $m_t \notin \mu$ iken kabulümüz gereği $x_r \in \delta([\mu : \lambda_M])$ bulunur. Her η bulanık ideali için $\delta(\eta) \subseteq \gamma(\eta)$ olduğundan $x_r \in \delta([\mu : \lambda_M]) \subseteq \gamma([\mu : \lambda_M])$ elde edilir bu da μ'nün γ-asalımsı bulanık ideal olduğunu gösterir.

ζ bir asal bulanık alt modül olsun . Her δ bulanık ideal genişlemesi için ζ'nın bir δ-asalımsı bulanık alt modül olduğunu gösterelim. x_r ve m_t bulanık noktaları için $x_r m_t \in \zeta$ ve $m_t \notin \zeta$ olsun. ζ bir asal bulanık alt modül olduğundan $x_r \in [\zeta : \lambda_M]$ olur. δ bulanık ideal genişlemesi olduğundan da $x_r \in [\zeta : \lambda_M] \subseteq \delta([\zeta : \lambda_M])$ elde edilir. Böylece ζ bir δ-asalımsı bulanık alt modül bulunur.

∎

Teorem 4.2. *R bir halka, M bir R-modül ve δ bir bulanık ideal genişlemesi olsun. Eğer μ bir δ-asalımsı bulanık alt modül ise $[\mu : \lambda_M]$ de bir δ-asalımsı bulanık ideal olur.*

İspat. x_r ve y_s R'nin iki bulanık noktası olmak üzere $x_r y_s \in [\mu : \lambda_M]$ ve $y_s \notin [\mu : \lambda_M]$ olsun. O halde $y_s \lambda_M \nsubseteq \mu$ ve en az bir $\alpha \in M$ için $y_s \lambda_M(\alpha) > \mu(\alpha)$ olur. Burada $y_s \lambda_M(\alpha) = 0$ olamayacağından $y_s \lambda_M(\alpha) = s$ bulunur. Bir $m \in M$ için $\alpha = ym$'dir ve $x_r y_s m_s = x_r (ym)_s \in \mu$ iken $y_s m_s = (ym)_s \notin \mu$ olur. μ bir δ-asalımsı bulanık alt modül olduğundan da $x_r \in \delta([\mu : \lambda_M])$ bulunur.

∎

Tanım 4.2. R bir halka, M bir R-modül ve μ bir bulanık alt modül olsun. M'nin m_t bulanık noktası için

$$< m_t > (\tilde{m}) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \tilde{m} = 0 \\ t, & \tilde{m} = mb, \text{ en az bir } b \in R \text{ için} \\ 0, & \text{diğer} \end{array} \right\} \tag{4.2}$$

ile tanımlı bulanık alt modülüne m_t bulanık noktası ile üretilmiş bir bulanık alt modül denir.

Teorem 4.3. *R bir halka, M bir R-modül ve δ bir bulanık ideal genişlemesi olsun. O halde μ'nün bir δ-asalımsı bulanık alt modül olması için gerek ve yeter koşul herhangi*

ξ bulanık ideali ve η bulanık alt modülü için $\xi\eta \subseteq \mu$ iken $\eta \subseteq \mu$ ya da $\xi \subseteq \delta([\mu : \lambda_M])$ olmasıdır.

İspat. μ bir δ-asalımsı bulanık alt modül ve herhangi ξ bulanık ideali ve η bulanık alt modülü için $\xi\eta \subseteq \mu$ ve $\eta \nsubseteq \mu$ olsun. O halde bir $m \in M$ için $\eta(m) > \mu(m)$ olur. Burada $\eta(m) = t$ ise $m_t \notin \mu$ olduğu görülür. Herhangi bir $x \in R$ için $\xi\eta \subseteq \mu$ olduğundan da $\xi\eta(xm) \leq \mu(xm)$ bulunur. $\xi(x) = r$ için $x_r m_t(xm) = \xi(x) \wedge \eta(m) \leq \xi\eta(xm) \leq \mu(xm)$ elde edilir. Böylece $x_r m_t \in \mu$ ve $m_t \notin \mu$ sonucuna varılır. μ bir δ-asalımsı bulanık alt modül olduğundan da $x_r \in \delta([\mu : \lambda_M])$ yani $x_r(x) = r = \xi(x) \leq \delta([\mu : \lambda_M])(x)$ böylece $\xi \subseteq \delta([\mu : \lambda_M])$ bulunur.

Tersine, herhangi ξ bulanık ideali ve η bulanık alt modülü için $\xi\eta \subseteq \mu$ olduğunda $\eta \subseteq \mu$ veya $\xi \subseteq \delta([\mu : \lambda_M])$ sağlansın. R'nin x_r ve M'nin m_t bulanık noktaları için $x_r m_t \in \mu$ olduğunu kabul edelim. O halde Tanım 4.2'den $< x_r >< m_t > \subseteq \mu$ olduğu görülür. Hipotezden $m_t \in < m_t > \subseteq \mu$ ya da $x_r \in < x_r > \subseteq \delta([\mu : \lambda_M])$ sağlandığı görülür. Böylece μ bir δ-asalımsı bulanık alt modül olur. ■

Teorem 4.4. *R bir halka, M bir R-modül ve δ bir bulanık ideal genişlemesi olsun. Eğer μ bir δ-asalımsı bulanık alt modül ve ξ, $\xi \nsubseteq \delta([\mu : \lambda_M])$ olacak şekilde bir bulanık ideal ise $[\mu : \xi] = \{m_t : m_t\xi \subseteq \mu\}$ ile tanımlı bulanık alt modülü için $[\mu : \xi] = \mu$'dür.*

İspat. Teorem 2.31'den $\mu \subseteq [\mu : \xi]$ olduğu açıktır. Diğer taraftan, $[\mu : \xi]$'nin tanımı gereği $\xi[\mu : \xi] \subseteq \mu$ olduğu görülür. μ bir δ-asalımsı bulanık alt modül ve $\xi \nsubseteq \delta([\mu : \lambda_M])$ olduğundan, Teorem 4.3 gereği $[\mu : \xi] \subseteq \mu$ elde edilir ve $[\mu : \xi] = \mu$ bulunur. ■

Teorem 4.5. *R bir halka, M bir R-modül ve δ bir bulanık ideal genişlemesi olsun. η , M'nin bir bulanık kümesi ve μ bir δ-asalımsı bulanık alt modül ise $[\mu : \eta]$ da δ-asalımsı bulanık idealdir.*

İspat. x_r ve y_s R'nin iki bulanık noktası olmak üzere $x_r y_s \in [\mu : \eta]$ ve $y_s \notin [\mu : \eta]$ olsun. O halde $x_r y_s \eta \subseteq \mu$ ve $y_s \eta \nsubseteq \mu$ bulunur. μ bir δ-asalımsı bulanık alt modül olduğundan da $x_r \in \delta([\mu : \lambda_M])$ elde edilir. $[\mu : \lambda_M] \subseteq [\mu : \eta]$ olduğundan ve δ bulanık ideal genişlemesi tanımı gereği de $x_r \in \delta([\mu : \lambda_M]) \subseteq \delta([\mu : \eta])$ elde edilir.

■

Teorem 4.6. *R bir halka, M, R üzerinde bir çarpımsal bulanık modül, μ bulanık alt modül ve δ bir bulanık ideal genişlemesi olsun. $[\mu : \lambda_M]$ bir δ-asalımsı bulanık ideal ise μ de bir δ-asalımsı bulanık alt modül olur.*

İspat. ξ bir bulanık ideal ve η bir bulanık alt modül olmak üzere $\xi\eta \subseteq \mu$ ve $\eta \nsubseteq \mu$ olsun. O halde $\xi \subseteq \delta([\mu : \lambda_M])$ olduğu gösterilmelidir. M bir çarpımsal bulanık modül olduğundan $\gamma(0) = 1$ ve $\eta = \gamma\lambda_M$ olacak şekilde bir γ bulanık ideali vardır. Böylece $\xi\eta = \xi\gamma\lambda_M \subseteq \mu$ bulunur. Buradan $\xi\gamma \subseteq [\mu : \lambda_M]$ elde edilir. $\eta = \gamma\lambda_M \nsubseteq \mu$ olduğundan da $\gamma \nsubseteq [\mu : \lambda_M]$ olur. $[\mu : \lambda_M]$ bir δ-asalımsı bulanık ideal olduğundan $\xi \subseteq \delta([\mu : \lambda_M])$ sonucuna varılır. ■

Teorem 4.7. *δ kesişim koruyan bir bulanık ideal genişlemesi ve $\mu_1, ..., \mu_n$ de δ-asalımsı bulanık alt modüller olsun. Her $i \in \{1, 2, ..., n\}$ için $\xi = \delta(\mu_i : \lambda_M)$ ise $\mu = \bigcap_{i=1}^{n} \mu_i$ de bir δ-asalımsı bulanık alt modüldür.*

İspat. R'nin x_r ve M'nin m_t bulanık noktaları için $x_r m_t \in \mu = \bigcap_{i=1}^{n} \mu_i$ iken $m_t \notin \mu = \bigcap_{i=1}^{n} \mu_i$ olduğunu kabul edelim. O halde her $i \in \{1, 2, ..., n\}$ için $x_r m_t \in \mu_i$ ve en az bir $j \in \{1, 2, ..., n\}$ için $m_t \notin \mu_j$'dir. μ_j de bir δ-asalımsı bulanık alt modül olduğundan $m_t \in \delta([\mu_j : \lambda_M]) = \xi$ elde edilir. δ kesişim koruyan bir bulanık ideal genişlemesi olduğundan

$$\begin{aligned} \delta([\mu : \lambda_M]) &= \delta([\bigcap_{i=1}^{n} \mu_i : \lambda_M]) = \delta(\bigcap_{i=1}^{n} [\mu_i : \lambda_M]) = \bigcap_{i=1}^{n} \delta[\mu_i : \lambda_M] \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} \xi = \xi = \delta([\mu_j : \lambda_M]) \end{aligned} \tag{4.3}$$

olduğu görülür. Böylece $m_t \in \delta([\mu : \lambda_M]) = \xi$ ve μ'nün de bir δ-asalımsı bulanık alt modül olduğu sonucuna varılır.

■

4.2 2-Yutan Bulanık Alt Modüller

Tanım 4.3. R bir halka ve M bir R-modül olsun. R'nin x_r, y_s bulanık noktaları , M'nin m_t bulanık noktası ve M'nin sabitten farklı bir μ bulanık alt modülü için $x_r y_s m_t \in \mu$ iken $x_r m_t \in \mu$ ya da $y_s m_t \in \mu$ ya da $x_r y_s \in [\mu : \lambda_M]$ şartlarından biri sağlanıyorsa μ'ye M'nin 2-yutan bulanık alt modülü denir.

μ , R-modül R üzerinde tanımlı $\mu(0) = 1$ olacak şekilde bir bulanık alt kümesi için her μ 2-yutan bulanık ideal bir 2-yutan bulanık alt modülüdür.

R bir halka ve μ bir 2-yutan bulanık ideal olsun. R-modül R üzerinde tanımlı μ bulanık alt kümesi için x_r, y_s, z_t R'nin bulanık noktaları olmak üzere $x_r y_s z_t \in \mu$ ise μ bir

2-yutan bulanık ideal olduğundan $x_r z_t \in \mu$ ya da $y_s z_t \in \mu$ ya da $x_r y_s \in \mu$ olur. $x_r y_s \in \mu$ ise $x_r y_s \lambda_R \subseteq \mu$ olur ve böylece $x_r y_s \in [\mu : \lambda_R]$ elde edilir.

Teorem 4.8. *R bir halka ve M bir R-modül olsun. M'nin her asal bulanık alt modülü bir 2-yutan bulanık alt modüldür. Fakat önermenin karşıtı her zaman doğru değildir.*

İspat. R bir halka, M bir R-modül ve μ bir asal bulanık alt modül olsun. R'nin x_r, y_s, M'nin m_t bulanık noktaları için $x_r y_s m_t \in \mu$ ise $(xy)_{r\wedge s} m_t \in \mu$ olur. μ bir asal bulanık alt modül olduğundan da $(xy)_{r\wedge s} = x_r y_s \in [\mu : \lambda_M]$ ya da $m_t \in \mu$ böylece $x_r m_t \in \mu$ ya da $y_s m_t \in \mu$ sağlanır. ■

Bu örnekte Teorem 4.8'in karşıtının doğru olamayabileceği gösterilmiştir.

$\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası üzerinde $\mathbb{Z}_6$ bir modül olsun. O halde

$$\mu(x) = \begin{Bmatrix} 1, & x = \overline{0} \\ 0, & x \neq \overline{0} \end{Bmatrix} \tag{4.4}$$

ile tanımlı bulanık küme bir bulanık alt modüldür. Fakat $\mathbb{Z}$'nin 2_1 ve $\mathbb{Z}_6$'nın $\overline{3}_1$ bulanık noktaları için $2_1\overline{3}_1 = \overline{(2.3)}_1 \in \mu$'dir. Fakat $\overline{3}_1 \notin \mu$ ve $2_1 \notin [\mu : \lambda_M] = \lambda_{6\mathbb{Z}}$ olduğundan μ bir asal bulanık ideal olamaz. R'nin herhangi x_r, y_s ve M'nin m_t bulanık noktaları için $x_r y_s m_t \in \mu$ iken $xym \neq \overline{0}$ ise $r \wedge s \wedge t = 0$ ve buradan $r \wedge t = 0$ ya da $s \wedge t = 0$ ya da $r \wedge s = 0$ elde edilir. Böylece $x_r m_t \in \mu$ ya da $y_s m_t \in \mu$ ya da $x_r y_s \in [\mu : \lambda_M]$ olduğu görülür. Eğer $xym = \overline{0}$ ise de sıfır bölen tanımı gereği $xm = \overline{0}$ ya da $ym = \overline{0}$ ya da $xy = 0$ olur ve böylece $x_r m_t \in \mu$ ya da $y_s m_t \in \mu$ ya da $x_r y_s \in [\mu : \lambda_M]$ bulunur.

Teorem 4.9. *R bir halka ve M bir R-modül olsun. N , M'nin bir 2-yutan alt modülü ise λ_N bulanık alt modülü de M'nin bir 2-yutan bulanık alt modülüdür.*

İspat. R bir halka, M bir R-modül ve N , M'nin 2-yutan alt modülü olmak üzere R'nin herhangi x_r, y_s ve M'nin m_t bulanık noktaları için $x_r y_s m_t \in \lambda_N$ olsun. $x_r m_t \notin \lambda_N$ ve $y_s m_t \notin \lambda_N$ olduğunu kabul edip $x_r y_s \in [\lambda_N : \lambda_M]$ olduğunu gösterelim. $x_r m_t \notin \lambda_N$ ve $y_s m_t \notin \lambda_N$ ise $x_r m_t(xm) = r \wedge t > \lambda_N(xm)$ ve $y_s m_t(ym) = s \wedge t > \lambda_N(ym)$ bulunur ve $\lambda_N(xm) = \lambda_N(ym) = 0$ elde edilir. Bu ise $xm \notin N$ ve $ym \notin N$ olduğunu gösterir. Ayrıca $r \wedge t > \lambda_N(xm) = 0$ ve $s \wedge t > \lambda_N(ym) = 0$ olduğundan $r \wedge s \wedge t > 0$ sonucuna varılır. Böylece $0 < r \wedge s \wedge t = x_r y_s m_t(xym) \leq \lambda_N(xym)$ ve $\lambda_N(xym) = 1$ yani $xym \in N$ olur. N bir 2-yutan alt modül, $xm \notin N$ ve $ym \notin N$ olduğundan $xy \in [N : M]$ elde edilir. $x_r y_s \in [\lambda_N : \lambda_M]$ olduğunu göstermek için her $\alpha \in M$ için $x_r y_s \lambda_M(\alpha) \subseteq \lambda_N(\alpha)$ olduğu gösterilmelidir. Burada eğer $\alpha \in < xy > M$ ise $xyM \subseteq N$ olduğundan $\alpha \in N$ olur ve $x_r y_s \lambda_M(\alpha) = r \wedge s \leq \lambda_N(\alpha) = 1$ elde edilir. Eğer $\alpha \notin < xy > M$ ise de

$x_r y_s \lambda_M(\alpha) = 0 \leq \lambda_N(\alpha)$ sonucuna varılır. Böylece $x_r y_s \lambda_M \subseteq \lambda_N$ ve $x_r y_s \in [\lambda_M : \lambda_N]$ bulunur. ■

4.3 2-Yutan Asalımsı Bulanık Alt Modüller

Tanım 4.4. R bir halka ve M bir R-modül olsun. R'nin x_r, y_s bulanık noktaları , M'nin m_t bulanık noktası ve M'nin sabitten farklı bir μ bulanık alt modülü için $x_r y_s m_t \in \mu$ iken $x_r m_t \in \mu$ ya da $y_s m_t \in \mu$ ya da $(x_r y_s) \in \sqrt{[\mu : \lambda_M]}$ (ya da bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için $(x_r y_s)^n \in [\mu : \lambda_M]$) şartlarından biri sağlanıyorsa μ'ye M'nin 2-yutan asalımsı bulanık alt modülü denir.

μ , R-modül R üzerinde tanımlı $\mu(0) = 1$ olacak şekilde bulanık alt kümesi için her μ 2-yutan asalımsı bulanık ideal bir 2-yutan asalımsı bulanık alt modülüdür.

R bir halka ve μ bir 2-yutan asalımsı bulanık ideal olsun. R-modül R üzerinde tanımlı μ bulanık alt kümesi için x_r, y_s, z_t R'nin bulanık noktaları olmak üzere $x_r y_s z_t \in \mu$ ise μ bir 2-yutan asalımsı bulanık ideal olduğundan $x_r z_t \in \mu$ ya da $y_s z_t \in \sqrt{\mu}$ ya da $x_r y_s \in \sqrt{\mu}$ olur. $x_r z_t \in \mu$ ise ispat biter. $x_r y_s \in \sqrt{\mu}$ ise bir $n \in \mathbb{Z}$ için $(x_r y_s)^n \in \mu$ ve $(x_r y_s)^n \lambda_R \subseteq \mu$ olur ve böylece $(x_r y_s)^n \in [\mu : \lambda_R]$ ve $(x_r y_s) \in \sqrt{[\mu : \lambda_R]}$ elde edilir. Benzer şekilde $y_s z_t \in \sqrt{\mu}$ ise $(y_s z_t) \in \sqrt{[\mu : \lambda_R]}$ olduğu görülebilir.

Teorem 4.10. *R bir halka ve M bir R-modül olsun. M'nin her asalımsı bulanık alt modülü bir 2-yutan asalımsı bulanık alt modülüdür.*

İspat. μ bir asalımsı bulanık alt modül olsun. R'nin x_r, y_s ve M'nin m_t bulanık noktaları için $x_r y_s m_t \in \mu$ olsun. O halde $x_r y_s m_t = (xy)_{r \wedge s} m_t \in \mu$ ve μ de bir asalımsı bulanık alt modül olduğundan bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için $((xy)_{r \wedge s})^n = (x_r y_s)^n \in [\mu : \lambda_M]$ ya da $m_t \in \mu$ elde edilir. Böylece $(x_r y_s)^n \in [\mu : \lambda_M]$ ya da $x_r m_t \in \mu$ ya da $y_s m_t \in \mu$ elde edilir. ■

Teorem 4.10'un aksine bir 2-yutan asalımsı bulanık alt modül asalımsı bulanık alt modül olmayağını bir sonraki örnekte görebiliriz.

$R = \mathbb{Z}$ tam sayılar halkası olmak üzere $\mathbb{Z}$-modül $M = \mathbb{Z}$ üzerinde tanımlı $\lambda_{6\mathbb{Z}}$ bulanık alt modülü bir 2-yutan asalımsı bulanık alt modüldür. Fakat $2_1, 3_1$ bulanık noktaları için $2_1 3_1 \in \lambda_{6\mathbb{Z}}$ iken ne $3_1 \in \lambda_{6\mathbb{Z}}$ ne de bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için $(2_1)^n \in [\lambda_{6\mathbb{Z}} : \lambda_M]$'dir. Böylece $\lambda_{6\mathbb{Z}}$ asalımsı bulanık alt modül olamaz.

Teorem 4.11. *R bir halka ve M bir R-modül olsun. M'nin her 2-yutan bulanık alt modülü bir 2-yutan asalımsı bulanık alt modülüdür.*

İspat. Tanım 4.3 ve Tanım 4.4'den kolayca görülür. ■

Teorem 4.12. *R bir halka ve M bir R-modül olsun. N , M'nin bir 2-yutan asalımsı alt modülü ise λ_N bulanık alt modülü de M'nin bir 2-yutan asalımsı bulanık alt modülüdür.*

İspat. R bir halka, M bir R-modül ve N , M'nin 2-yutan asalımsı alt modülü olmak üzere R'nin herhangi x_r, y_s ve M'nin m_t bulanık noktaları için $x_r y_s m_t \in \lambda_N$ olsun. $x_r m_t \notin \lambda_N$ ve $y_s m_t \notin \lambda_N$ olduğunu kabul edip bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için $(x_r y_s)^n \in [\lambda_N : \lambda_M]$ olduğunu gösterelim. $x_r m_t \notin \lambda_N$ ve $y_s m_t \notin \lambda_N$ ise $x_r m_t(xm) = r \wedge t > \lambda_N(xm)$ ve $y_s m_t(ym) = s \wedge t > \lambda_N(ym)$ bulunur ve $\lambda_N(xm) = \lambda_N(ym) = 0$ elde edilir. Bu ise $xm \notin N$ ve $ym \notin N$ olduğunu gösterir. Ayrıca $r \wedge t > \lambda_N(xm) = 0$ ve $s \wedge t > \lambda_N(ym) = 0$ olduğundan $r \wedge s \wedge t > 0$ sonucuna varılır. Böylece $0 < r \wedge s \wedge t = x_r y_s m_t(xym) \leq \lambda_N(xym)$ ve $\lambda_N(xym) = 1$ yani $xym \in N$ olur. N bir 2-yutan asalımsı alt modül, $xm \notin N$ ve $ym \notin N$ olduğundan $(xy)^n \in [N : M]$ elde edilir. $(x_r y_s)^n \in [\lambda_N : \lambda_M]$ olduğunu göstermek için her $\alpha \in M$ için $(x_r y_s)^n \lambda_M(\alpha) \subseteq \lambda_N(\alpha)$ olduğu gösterilmelidir. Burada eğer $\alpha \in < (xy)^n > M$ ise $(xy)^n M \subseteq N$ olduğundan $\alpha \in N$ olur ve $(x_r y_s)^n \lambda_M(\alpha) = r \wedge s \leq \lambda_N(\alpha) = 1$ elde edilir. Eğer $\alpha \notin < (xy)^n > M$ ise de $(x_r y_s)^n \lambda_M(\alpha) = 0 \leq \lambda_N(\alpha)$ sonucuna varılır. Böylece $(x_r y_s)^n \lambda_M \subseteq \lambda_N$ ve $(x_r y_s)^n \in [\lambda_M : \lambda_N]$ bulunur. ■

Teorem 4.13. *R bir halka, M bir R-modül olsun. μ bir 2-yutan asalımsı bulanık alt modül ise $[\mu : \lambda_M]$ de 2-yutan asalımsı bulanık idealdir.*

İspat. x_r,y_s ve z_t R'nin bulanık noktaları olmak üzere $x_r y_s z_t \in [\mu : \lambda_M]$ iken $y_s z_t \notin [\mu : \lambda_M]$, $x_r z_t \notin \sqrt{[\mu : \lambda_M]}$ ve $x_r y_s \notin \sqrt{[\mu : \lambda_M]}$ olsun. $x_r y_s z_t \in [\mu : \lambda_M]$ olduğundan her $m \in M$ için $x_r y_s z_t m_1 = x_r y_s (z_t m_1) \in \mu$ bulunur. μ bir 2-yutan asalımsı bulanık alt modül ve $x_r y_s \notin \sqrt{[\mu : \lambda_M]}$ olduğundan da $x_r(z_t m_1) \in \mu$ ya da $y_s(z_t m_1) \in \mu$ yani $x_r z_t \in [\mu : \lambda_M]$ ya da $y_s z_t \in [\mu : \lambda_M]$ elde edilir. Böylece $x_r z_t \in [\mu : \lambda_M] \subseteq \sqrt{[\mu : \lambda_M]}$ ya da $y_s z_t \in [\mu : \lambda_M]$ çelişkileri elde edilir. ■

Teorem 4.14. *R bir halka, M bir R-modül olsun. μ bir 2-yutan asalımsı bulanık alt modül ise her $t \in [0, Im\mu]$ için μ_t de bir 2-yutan asalımsı idealdir.*

İspat. R'nin x, y ve M'nin herhangi bir m elemanı için $xym \in \mu_t$ iken $xm \notin \mu_t$ ve $ym \notin \mu_t$ olsun. O halde $(xym)_t = x_t y_t m_t \in \mu$ ve $y_t m_t \notin \mu$, $x_t m_t \notin \mu$ bulunur. μ bir 2-yutan asalımsı bulanık alt modül olduğundan bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için $(x_t y_t)^n \in [\mu : \lambda_M]$ elde edilir. Buradan her $m \in M$ için $x_t^n y_t^n m_1 \in \mu$ ve böylece $x^n y^n m \in \mu_t$ elde edilir. Bu ise $x^n y^n \in [\mu_t : M]$ yani $xy \in \sqrt{[\mu_t : M]}$ olduğunu gösterir. ■

Teorem 4.15. *$\{\mu_i : i \in I\}$ kümesi M'nin 2-yutan asalımsı bulanık alt modüllerinin bir zinciri olsun. O halde $\mu = \bigcup_{i \in I} \mu_i$ bulanık alt modülü de M'nin bir 2-yutan asalımsı bulanık alt modülüdür.*

İspat. $\{\mu_i : i \in I\}$ kümesi M'nin 2-yutan asalımsı alt modüllerinin bir zinciri olsun. R'nin x_r, y_s ve M'nin m_t bulanık noktaları için $x_r y_s m_t \in \mu = \bigcup\limits_{i\in I} \mu_i$ ve en az bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için $(x_r y_s)^n \notin [\mu\colon \lambda_M]$ olduğunu kabul edelim. O halde $(x_r y_s)^n \notin [\mu\colon \lambda_M] = [\bigcup\limits_{i\in I} \mu_i : \lambda_M] = \bigcup\limits_{i\in I} [\mu_i : \lambda_M]$ olur. Böylece en az bir $j \in I$ için $x_r y_s m_t \in \mu_j$ ve her $i \in I$ için $(x_r y_s)^n \notin [\mu_i : \lambda_M]$'dir. μ_j de 2-yutan asalımsı bulanık alt modül olduğundan $y_s m_t \in \mu_j$ ya da $x_r m_t \in \mu_j$ bulunur. Böylece $y_s m_t \in \mu_j \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} \mu_i = \mu$ ya da $x_r m_t \in \mu_j \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} \mu_i = \mu$ elde edilir.

■

5
SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tezde, Zadeh'in temellerini attığı bulanık küme mantığı kullanarak, klasik cebirde tanımlanmış yapılar bulanık cebir teorisine entegre edilmeye çalışılmıştır. Bu doğrultuda halkanın bazı özel idealleri, bulanık cebirde yeniden tanımlanmış ve çeşitli özellikleri incelenmiştir.

Bulanık halkalardaki bulanık idealler, δ bulanık ideal genişlemesi ile genişletilmiş, incelenecek olan özel bulanık ideallerin δ-asalımsı bulanık ideal tanımı ile genelleme yapılması için bir alt yapı oluşturulmuştur.

Bulanık halkalar için önemli bir yapı olan asal ve asalımsı bulanık ideallerin bir genellemesi olan 2-yutan ve 2-yutan asalımsı bulanık idealler tanımlanmıştır. Bu iki yapı arasındaki geçiş incelenmiş ve bu geçişin tek taraflı olduğuna dair örnek verilmiştir. Seviye küme kavramı yardımı ile de klasik cebir içinde, bu yapıların özellikleri araştırılmıştır. Tanımlanan bu yapıların özellikleri incelenip çeşitli örneklerle doğrulanmıştır. δ bulanık ideal genişlemesi yardımıyla da tanım genellendirilip litaratüre kazandırılmıştır.

Son bölümde ise, yapılan bu çalışmalar modül teorisinde de değerlendirilip, 2-yutan ve 2-yutan asalımsı bulanık alt modül tanımları verilmiş ve temel özellikleri incelenmiştir. Sonuç olarak ise, araştırmacılar için bulanık modül teorisinde bir başlangıç bilgisi oluşturulup, noetherian halka, çarpımsal halka gibi çeşitli özel halkalarda da bu yapıları uygulamanın mümkün olduğu söylenebilir.

KAYNAKÇA

[1] L. A. Zadeh, "Fuzzy sets," *Inform. and Control*, vol. 8, pp. 338–353, 1965.

[2] A. Rosenfeld, "Fuzzy groups," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 35, no. 3, pp. 512–517, 1971.

[3] P. S. Das, "Fuzzy groups and level subgroups," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 84, pp. 264–269, 1981.

[4] W. J. Liu, "Fuzzy invariant subgroups and fuzzy ideals," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 8, no. 2, pp. 133–139, 1982.

[5] T. K. Mukherjee M. K. Sen, "On fuzzy ideals of a ring," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 21, no. 1, pp. 99–104, 1987.

[6] T. K. Mukherjee M. K. Sen, "Prime fuzzy ideals in rings," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 32, no. 3, pp. 337–341, 1989.

[7] D. S. Malik J. N. Mordeson, "Fuzzy prime ideals of a ring," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 37, no. 1, pp. 93–98, 1990.

[8] T. K. Mukherjee M. K. Sen, "Primary fuzzy ideals and radical of fuzzy ideals," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 56, no. 1, pp. 97–101, 1993.

[9] F. Sidky S. Khatab, "Nil radical of fuzzy ideal," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 47, no. 1, pp. 117–120, 1992.

[10] V. Dixit, R. Kumar, N. Ajmal, "Fuzzy ideals and fuzzy prime ideals of a ring," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 47, no. 1, pp. 117–120, 1992.

[11] D. Zhao, "δ-primary ideals of commutative rings," *Kyungpook Mathematical Journal*, vol. 41, no. 1, 2001.

[12] A. Badawi, "On 2-absorbing ideals of commutative rings," *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, vol. 75, no. 3, pp. 417–429, 2007.

[13] A. Badawi, Ü. Tekir, E. Yetkin, "On 2-absorbing primary ideals in commutative rings," *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, vol. 51, no. 4, pp. 1163–1173, 2014.

[14] B. Fahid D. Zhao, "2-absorbing δ-primary ideals in commutative rings," *Kyungpook Mathematical Journal*, vol. 57, no. 02, pp. 193–198, 2017.

[15] M. M. Zahedi, "Some results on L-fuzzy modules," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 55, no. 3, pp. 355–361, 1993.

[16] M. Mashinchi M. M. Zahedi, "On L-fuzzy primary submodules," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 49, no. 2, pp. 231–236, 1992.

[17] M. Al-shamiri, "Prime fuzzy submodules and primary fuzzy submodules," vol. 6, no. 2, pp. 212–216, 2015.

[18] E. S. Atani F. E. K. Saraei, “On L-fuzzy multiplication modules,” *Discussiones Mathematicae - General Algebra and Applications*, vol. 37, p. 209, 2017.

[19] J. B. Fraleigh, *A first course in abstract algebra*, Seventh Edition, Pearson New International Edition. Harlow: Pearson, 2014.

[20] C. Faith, *Algebra rings, modules and categories I*. Berlin: Springer Berlin, 2014.

[21] T. W. Hungerford, *Abstract Algebra: an introduction*, Third edition. Boston, MA: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2014.

[22] G. Yeşilot M. Özavşar, *Soyut Cebir Çözümlü Problemleri,* First edition. Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık, 2012.

[23] R. Y. Sharp, *Steps in commutative algebra*, 2nd ed, 51. Cambridge, UK ; New York: Cambridge University Press, 2000.

[24] A. Barnard, “Multiplication modules,” *Journal of Algebra*, vol. 71, no. 1, pp. 174–178, 1981.

[25] Z. A. El-Bast P. P. Smith, “Multiplication modules,” *Communications in Algebra*, vol. 16, no. 4, pp. 755–779, 1988.

[26] F. Çallıalp Ü. Tekir, *Değişmeli Halkalar ve Modüller,* İstanbul: Birsen Yayınevi, 2009.

[27] J. N. Mordeson D. S. Malik, *Fuzzy commutative algebra*. Singapore ; River Edge, NJ: World Scientific, 1998.

[28] D. Malik J. N. Mordeson, “Fuzzy maximal, radical and primary ideals of a ring,” *Information Sciences*, vol. 53, no. 3, pp. 237–250, 1991.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

İletişim Bilgileri: dnzguel@hotmail.com

Makale

1. D. Sönmez, G. Yeşilot, S. Onar, B. A. Ersoy ve B. Davvaz, "2-Absorbing Primary Fuzzy Ideals Of Commutative Rings," Mathematical Problems in Engineering, 2017.