EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

ZAMAN SKALASINDA BİR BOYUTLU p-LAPLACIAN SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİ

Fatma TOKMAK

Tez Danışmanı: Doç. Dr. İlkay KARACA

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu: 403.03.01
Sunuş Tarihi: 10.06.2011

Bornova-İZMİR

Fatma TOKMAK tarafından YÜKSEK LİSANS tezi olarak sunulan “Zaman Skalasında Bir Boyutlu p-Laplacian Sınır Değer Problemlerinin Pozitif Çözümleri” başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 10.06.2011 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:		**İmza**
Jüri Başkanı	**: Doç. Dr. İlkay KARACA**	**................................**
Raportör Üye	**: Yrd. Doç. Dr. Ahmet YILDIRIM**	**................................**
Üye	**: Doç. Dr. Adem ÇELİK**	**.................................**

ÖZET

ZAMAN SKALASINDA BİR BOYUTLU p-LAPLACIAN SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİ

TOKMAK, Fatma

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü
Tez Danışmanı: Doç. Dr. İlkay KARACA
Haziran 2011, 64 sayfa

Bu tezde, diferansiyel denklemlerle ilgili birçok sonucun fark denklemleri ile eş değer sonuçlara taşınabildiği zaman skalası üzerinde bazı temel özellikler verilmiştir. Zaman skalasında delta ve nabla türevi içeren ikinci mertebeden bir boyutlu p-Laplacian sınır değer problemi ele alınmış ve sonsuz aralıktaki zaman skalası üzerinde pozitif çözümlerinin varlığı incelenmiştir. Bunun için öncelikle koni, Banach uzayı, tamamen sürekli operatör ve fonksiyonel tanımları verilmiştir. Ayrıca, sınır değer probleminin pozitif çözümlerinin varlığı için gerekli teoremler verilmiştir. Sırasıyla Leggett-Williams sabit nokta teoremi, Beş fonksiyonelli sabit nokta teoremi ve Bai ve Ge'nin ispatlamış olduğu Leggett-Williams sabit nokta teoreminin bir genelleştirilmişi ile en az üç pozitif çözümün varlığı gösterilmiş ve örneklendirilmiştir.

Anahtar sözcükler: Zaman skalası, pozitif çözümler, m-nokta sınır değer problemleri, sabit nokta teoremleri, sonsuz aralık.

ABSTRACT

POSITIVE SOLUTIONS FOR ONE DIMENSIONAL p-LAPLACIAN BOUNDARY VALUE PROBLEMS ON TIME SCALES

TOKMAK, Fatma

MSc in Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. İlkay KARACA
June 2011, 64 pages

In this thesis, some basic properties about time scales where many results concerning differential equations carry over to corresponding results for difference equations are given. The time scale of a second-order derivative of the delta and nabla one-dimensional p-Laplacian boundary value problem has been studied and the existence of positive solutions on infinite intervals on time scales has been investigated. Firstly, the cone, Banach space, completely continuous operator and the functional definitions are given. In addition, the necessary theorems for the existence of positive solutions for the boundary value problem are given. By using the Leggett-Williams fixed point theorem, five functionals fixed point theorem and a generalization of Leggett-Williams fixed point theorem which is proved by Bai and Ge, respectively, existence of at least three positive solutions for the boundary value problem is shown and sampled.

Keywords: Time scale, positive solutions, m-point boundary value problems, fixed point theorems, infinite intervals.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmam boyunca, bu tezi hazırlamam için bana yardımcı olan, vaktini, emeğini ve sabrını esirgemeyen danışmanım Doç. Dr. İlkay KARACA' ya ve tüm hocalarıma, maddi yönden destek veren Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na (2210-TÜBİTAK Yurtiçi Yüksek Lisans Bursu), canım annem Dudu TOKMAK, babam Sami TOKMAK ve kardeşlerim Gülsüm ve Selinay'a teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca tez yazım süresince beni yalnız bırakmayan Zeynep ÇELİK ve arkadaşlarıma gönülden teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (devam)

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{R}$	Reel sayılar.
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar.
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar.
$\mathbb{N}_0$	Negatif olmayan tamsayılar.
$\mathbb{T}$	Zaman skalası.
σ	İleri atlama operatörü.
ρ	Geri atlama operatörü.
μ	İleriye graininess fonksiyonu.
ν	Geriye graininess fonksiyonu.
f^{Δ}	f fonksiyonunun Δ- türevi.
f^{∇}	f fonksiyonunun ∇- türevi.
f'	f fonksiyonunun türevi.
Δf	f fonksiyonunun ileri fark operatörü.

1.GİRİŞ

Son yıllarda matematikçilerin büyük bir ilgi odağı olan zaman skalası kavramı ilk olarak 1988 yılında Stephan Hilger'in doktora tezinde, sürekli ve diskret analizi birleştiren ve genelleyen bir teori olarak ortaya atıldı. Diferansiyel denklemler ile ilgili birçok sonuç, fark denklemleri için benzer sonuçlara kolayca taşınabilir. Bu sonuçlar, doğal olarak diferansiyel denklemler için verilen sonuçlardan biraz farklıdır. Zaman skalası üzerinde dinamik sistemler çalışması, bu tür farklılıkları açıklayarak, sonuçları diferansiyel denklemler ve fark denklemleri için ayrı ayrı ispatlamaktan kurtarmaktadır.

Zaman skalasında sonlu aralık üzerindeki dinamik denklemler ile ilgili birçok çalışma vardır (Atıcı ve Guseinov, 2002; He, 2005; He and Li, 2007; Su and Li, 2008; Li and Yuan, 2009; Liang et al., 2009; Han and Liu, 2009; Hamal ve Yörük, 2010). Fakat zaman skalasında sonsuz aralık üzerindeki çalışmalar oldukça azdır (Lian et al., 2007; Zhao and Ge, 2009, 2010; Guo et al., 2009).

Bu tez çalışmasındaki sınır değer problemi için esas olarak iki çalışma ele alınmıştır.

Guo, Yu ve Wang (2009),

$$\begin{cases} \left(\varphi_p\left(x'(t)\right)\right)' + \phi(t) f\left(t, x(t), x'(t)\right) = 0,\ 0 < t < +\infty, \\ x(0) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i x'(\eta_i),\ \lim_{t\to+\infty} x'(t) = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

sonsuz aralık üzerindeki m-nokta sınır değer problemini ele almışlardır. Avery-Peterson sabit nokta teoremini kullanarak yeterli koşullar altında en az üç pozitif çözümün varlığını göstermişlerdir.

Zhao ve Ge (2009),

$$\begin{cases} \left(\phi_p\left(u^\Delta(t)\right)\right)^\nabla + q(t) f\left(u(t), u^\Delta(t)\right) = 0,\ \ t \in (0,\infty)_{\mathbb{T}}, \\ u(0) = \beta u^\Delta(\eta),\ \ \lim_{t\in\mathbb{T}, t\to\infty} u^\Delta(t) = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

ikinci mertebe p-Laplacian sınır değer problemi için en az üç pozitif çözümün varlığını Leggett-Williams sabit nokta teoremini kullanarak göstermişlerdir.

Bu tez çalışmasında,

$$\begin{cases} \left(\varphi_p\left(x^{\Delta}(t)\right)\right)^{\nabla} + \phi(t) f\left(t, x(t), x^{\Delta}(t)\right) = 0, t \in (0,\infty)_{\mathbb{T}}, \\ x(0) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i x^{\Delta}(\eta_i), \quad \lim_{t\in\mathbb{T}, t\to\infty} x^{\Delta}(t) = 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

m-nokta sınır değer problemi ele alınmıştır. Leggett-Williams sabit nokta teoremi (Leggett and Williams, 1979), Beş Fonksiyonelli sabit nokta teoremi (Avery, 1998) ve Leggett-Williams sabit nokta teoreminin bir genelleştirilmişi (Bai and Ge, 2004) kullanılarak en az üç pozitif çözümünün olması için gerekli kriterler araştırılmıştır. İkinci bölümde, zaman skalası ile ilgili temel kavramlar ve bazı teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, koni, Banach uzayı, operatör, tamamen süreklilik kavramları verilmiş ve problemimiz için gerekli önermeler ispatlanmıştır. Dördüncü bölümde, (1.3) m-nokta p-Laplacian sınır değer problemine sabit nokta teoremleri uygulanarak pozitif çözümlerin varlığı gösterilmiş ve örneklendirilmiştir. Beşinci bölümde, sonuçlara yer verilmiştir.

2. ZAMAN SKALASI İLE İLGİLİ TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde zaman skalası ile ilgili temel bilgiler verilmiştir. Keyfi bir zaman skalasından reel sayılara tanımlı herhangi bir fonksiyon için delta ve nabla türev kavramları açıklanarak bu türevler ile ilgili temel tanımlar ve örnekler ele alınmıştır. Ayrıca $\boldsymbol{f}: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için Δ ve $\boldsymbol{\nabla}$ integral kavramı, Δ ve $\boldsymbol{\nabla}$ integralin özellikleri yine bu bölümde yer verdiğimiz temel kavramlardır. Burada yer verdiğimiz temel kavramlar detaylı olarak Bohner ve Peterson'ın (2001, 2003) kitaplarında, Kaymakçalan ve ark. (1996) kitabında ve zaman skalası ile ilgili bir çok makalede (Atıcı ve Guseinov, 2002) bulunabilir.

Tanım 2.1 Reel sayıların boştan farklı kapalı her alt kümesine zaman skalası adı verilir ve $\mathbb{T}$ ile gösterilir. Örneğin, reel sayılar, tamsayılar, doğal sayılar, Cantor kümesi, $[1,3] \cup [4,7]$ birer zaman skalasıdır. Fakat, rasyonel sayılar, irrasyonel sayılar, kompleks sayılar ve (0, 1) aralığı birer zaman skalası değildir.

Tanım 2.2 $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun.

Her $t \in \mathbb{T},\ t < max\mathbb{T}$ için $\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T}: s > t\}$ ile tanımlanan $\sigma: \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ operatörüne ileriye atlama (forward jump) operatörü adı verilir.

Her $t \in \mathbb{T},\ t > min\mathbb{T}$ için $\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T}: s < t\}$ olarak tanımlanan $\rho: \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ operatörüne geriye atlama (backward jump) operatörü denir.

$\sigma(t) = t$ ise $t \in \mathbb{T}$ ye sağ yoğun (right dense) nokta ve $\sigma(t) > t$ ise $t \in \mathbb{T}$ ye sağ yayılmış (right scattered) nokta adı verilir.

$\rho(t) = t$ ise $t \in \mathbb{T}$ ye sol yoğun (left dense) nokta ve $\rho(t) < t$ ise sol yayılmış (left scattered) nokta adı verilir.

$\rho(t) < t < \sigma(t)$ ise $t \in \mathbb{T}$ ye ayrık (isolated) nokta adı verilir.

Her $t \in \mathbb{T}$ için $\mu(t) = \sigma(t) - t$ ile tanımlanan $\mu: \mathbb{T} \to [0, \infty)$ fonksiyonuna ileriye (forward) graininess fonksiyonu adı verilir.

Her $t \in \mathbb{T}$ için $\nu(t) = t - \rho(t)$ ile tanımlanan $\nu: \mathbb{T} \to [0, \infty)$ fonksiyonuna geriye (backward) graininess fonksiyonu adı verilir.

Ayrıca, $\sigma(\max \mathbb{T}) = \max \mathbb{T}$ ve $\rho(\min \mathbb{T}) = \min \mathbb{T}$ ile tanımlanır. $\mathbb{T}$ reel sayıların kapalı bir alt kümesi olduğundan her $t \in \mathbb{T}$ için $\sigma(t) \in \mathbb{T}$ ve $\rho(t) \in \mathbb{T}$ olur.

Örnek 2.1 Eğer $\mathbb{T}$=$\mathbb{R}$ ise $\sigma(t) = t, \rho(t) = t$ bulunur. Böylece her $t \in \mathbb{R}$ yoğun noktadır. Ayrıca bu durumda her $t \in \mathbb{R}$ için $\mu(t) = \nu(t) = 0$ olur.

Eğer $\mathbb{T}$=$\mathbb{Z}$ ise, $\sigma(t) = t + 1, \rho(t) = t - 1$ elde edilir. O halde, her $t \in \mathbb{Z}$ için $\mu(t) = \nu(t) = 1$ dir.

Örnek 2.2 $\mathbb{T}$ zaman skalasını

$$\mathbb{T} := \{0\} \cup \left\{\frac{1}{\mathrm{n}^2} : \mathrm{n} \in \mathbb{N}\right\} \cup [3,5]$$

olarak alalım. Bu durumda;

- $0, 5$ ve her $t \in (3,5)$ noktaları sağ yoğun ve sol yoğun noktadır.
- 3 noktası sağ yoğun ve sol yayılmış noktadır.
- Her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{n^2}$ noktası sağ yayılmış ve sol yayılmış noktalardır.

Bir $\mathbb{T}$ zaman skalasına ait $[a, b]$ aralığı, $a, b \in \mathbb{T}$ olmak üzere

$$[a, b] = \{t \in \mathbb{T}: a \leq t \leq b\}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.1 (Tümevarım Prensibi) $t, t_0 \in \mathbb{T}$ olmak üzere,

$$\{ S(t): t \in [t_0, \infty) \}$$

önermeler ailesi verilsin. Aşağıdaki i)-iv) koşulları sağlanıyorsa, $S(t)$ her $t \in [t_0, \infty)$ için doğrudur.

i) $S(t_0)$ doğrudur.

ii) $t \in [t_0, \infty)$ sağ yayılmış nokta ve $S(t)$ doğru olduğunda, $S(\sigma(t))$ de doğrudur.

iii) $t \in [t_0, \infty)$ sağ yoğun nokta ve $S(t)$ doğru olduğunda, t nin öyle bir U komşuluğu vardır ki $s \in U \cap (t, \infty)$ için $S(s)$ doğrudur.

iv) $t \in (t_0, \infty)$ sol yoğun nokta ve her $s \in [t_0, t)$ için $S(s)$ doğru olduğunda $S(t)$ doğrudur.

Zaman skalasında süreklilik ve türevi incelerken diferansiyellenebilirlik bölgesi ve komşuluk kavramlarını bilmemiz gerekmektedir. Bu nedenle aşağıdaki tanımları verelim.

Tanım 2.3 Diferansiyellenebilirlik bölgesi, eğer $\mathbb{T}$ sol yayılmış maksimum M ye sahip ise $\mathbb{T}^{\mathrm{k}} = \mathbb{T} - \{\max \mathbb{T}\}$ ile tanımlanır, aksi halde $\mathbb{T}^{\mathrm{k}} = \mathbb{T}$ olur.

Tanım 2.4 Diferansiyellenebilirlik bölgesi, eğer $\mathbb{T}$ sağ yayılmış minimum m ye sahip ise $\mathbb{T}_{\mathrm{k}} = \mathbb{T} - \{\min \mathbb{T}\}$ ile tanımlanır, aksi halde $\mathbb{T}_{\mathrm{k}} = \mathbb{T}$ olur.

Tanım 2.5 $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere, $f^{\sigma}: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}$ için

$$f^{\sigma}(t) = f(\sigma(t)) = (f o \sigma)(t)$$

ve $f^{\rho}: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}$ için

$$f^{\rho}(t) = f(\rho(t)) = (f o \rho)(t)$$

olarak tanımlanır. Yani $f^{\sigma} = f o \sigma$ ve $f^{\rho} = f o \rho$ olur.

Tanım 2.6 Her $\delta > 0$ için $U \subset \mathbb{T}$ olmak üzere, $U_\delta(t) = \{\, s \in \mathbb{T} : \ |\mathrm{s} - \mathrm{t}| < \delta \,\}$ kümesine t nin δ komşuluğu denir. t nin sol ve sağ komşulukları sırasıyla

$U_\delta^-(t) = \{\, s \in \mathbb{T} : \ \mathrm{t} - \delta < s < t \,\}$ ve $U_\delta^+(t) = \{\, s \in \mathbb{T} : \ \mathrm{t} < s < t + \delta \,\}$

ile tanımlanır.

Eğer her $\delta > 0$ için $U_\delta^-(t) \neq \emptyset$ ise, bu halde t ye U için sol limit noktası ve $U_\delta^+(t) \neq \emptyset$ ise, t ye U için sağ limit noktası denir.

Eğer her $\delta > 0$ için $U_\delta^-(t) = \emptyset$ ise, t ye U için soldan ayrılmış nokta ve $U_\delta^+(t) = \emptyset$ ise, t ye U için sağdan ayrılmış nokta denir.

Tanım 2.7 $t_0 \in \mathbb{T}$ olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ ve her $t \in U(t_0)$ için,

$$|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $U(t_0)$ komşuluğu var ise, bu halde $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $t = t_0$ noktasında süreklidir denir.

2.1 Zaman Skalasında Türev

Tanım 2.1.1 $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^{\mathrm{k}}$ noktası olsun. Her $\varepsilon > 0$ için t noktasının

$$\left|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - s)\right| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|, \ \forall s \in U$$

olacak şekilde bir U komşuluğu varsa, (yani $\exists\delta > 0$ için $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ ise) f fonksiyonuna t noktasında Δ-türevlenebilir denir ve bu eşitsizlikteki $f^{\Delta}(t)$ reel sayısına f fonksiyonun t noktasındaki Δ-türevi denir. Diğer bir deyişle

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}$$

dir.

Tanım 2.1.2 $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}_k$ noktası olsun. Her $\varepsilon > 0$ için t noktasının

$$\left|f(\rho(t)) - f(s) - f^{\nabla}(t)(\rho(t) - s)\right| \leq \varepsilon|\rho(t) - s|, \ \forall s \in U$$

olacak şekilde bir U komşuluğu varsa, (yani $\exists\delta > 0$ için $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ ise) f fonksiyonuna t noktasında ∇-türevlenebilir denir ve bu eşitsizlikteki $f^{\nabla}(t)$ reel sayısına f fonksiyonun t noktasındaki ∇-türevi denir. Diğer bir deyişle

$$f^{\nabla}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(\rho(t)) - f(s)}{\rho(t) - s}$$

dir.

Önerme 2.1.1 $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{T}^k$ noktasında Δ- türevlenebilir ise $a = f^{\Delta}(t)$ değeri tektir.

Önerme 2.1.2 $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{T}_k$ noktasında ∇- türevlenebilir ise $b = f^{\nabla}(t)$ değeri tektir.

Örnek 2.1.1 $\mathbb{T}$ herhangi bir zaman skalası olsun. $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\alpha \in \mathbb{R}$ sabit olmak üzere her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = \alpha$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda herhangi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\left|f(\sigma(t)) - f(s) - 0(\sigma(t) - s)\right| = |\alpha - \alpha| = 0 \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|, \ \forall s \in \mathbb{T}$$

sağlandığından $f^{\Delta}(t) = 0$ olur. Benzer şekilde $f^{\nabla}(t) = 0$ dır.

Örnek 2.1.2 $\mathbb{T}$ herhangi bir zaman skalası olsun. $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = t$ alalım.

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \to t} \frac{\sigma(t) - s}{\sigma(t) - s} = 1$$

olduğu görülür. Benzer şekilde $f^{\nabla}(t) = 1$ dir.

Örnek 2.1.3 $\mathbb{T}$ herhangi bir zaman skalası olsun. $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = \frac{1}{t}$ alalım;

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \to t} \frac{\frac{1}{\sigma(t)} - \frac{1}{s}}{\sigma(t) - s} = -\lim_{s \to t} \frac{1}{s\sigma(t)} = -\frac{1}{t\sigma(t)}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde $f^{\nabla}(t) = -\frac{1}{t\rho(t)}$ dir.

Örnek 2.1.4 $\mathbb{T}$ herhangi bir zaman skalası olsun. $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = t^3$ ile tanımlansın.

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \to t} \frac{(\sigma(t))^3 - s^3}{\sigma(t) - s} = (\sigma(t))^2 + \sigma(t)t + t^2$$

$$= \begin{cases} 3t^2, & \mathbb{T} = \mathbb{R} \\ 3t^2 + 3t + 1, & \mathbb{T} = \mathbb{Z} \\ 2t^2 + t\sqrt{t^2 + 1} + 1, & \mathbb{T} = \{\sqrt{\mathrm{n}} : \mathrm{n} \in \mathbb{N}_0\} \end{cases}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$f^{\nabla}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(\rho(t)) - f(t)}{\rho(t) - s} = \lim_{s \to t} \frac{(\rho(t))^3 - s^3}{\rho(t) - s} = (\rho(t))^2 + \rho(t)t + t^2$$

$$= \begin{cases} 3t^2, & \mathbb{T} = \mathbb{R} \\ 3t^2 - 3t + 1, & \mathbb{T} = \mathbb{Z} \\ 2t^2 + t\sqrt{t^2 - 1} - 1, & \mathbb{T} = \{\sqrt{\mathrm{n}}: \mathrm{n} \in \mathbb{N}_0\} \end{cases}$$

bulunur.

Örnek 2.1.5 $\sigma: \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ fonksiyonu her $\mathbb{T}$ zaman skalasında Δ- türevlenemez.

$\mathbb{T}$ herhangi bir zaman skalası ve $t_0 \in \mathbb{T}^k, \sigma(t_0) > t_0$ ve $\rho(t_0) = t_0$ olsun. Kabul edelimki $\sigma(t)$ fonksiyonu t_0 da türevlenebilir olsun. O halde $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ vardır ki $\forall s \in U_\delta(t_0)$ için

$$\left|\sigma(\sigma(t_0)) - \sigma(s) - \sigma^\Delta(t_0)(\sigma(t_0) - s)\right| \leq \varepsilon|\sigma(t_0) - s|$$

elde edilir. Özel olarak $s = t_o$ alalım.

$\varepsilon \to 0$ için $\sigma(\sigma(t_0)) - \sigma(s) - \sigma^\Delta(t_0)(\sigma(t_0) - s) = 0$ elde edilir. O halde

$$\sigma^\Delta(t_0) = \frac{\sigma(\sigma(t_0)) - \sigma(t_0)}{\sigma(t_0) - t_0}$$

bulunur. $s \in (t_0 - \delta, t_0)$ için

$$\left|\sigma(\sigma(t_0)) - \sigma(s) - \sigma^\Delta(t_0)(\sigma(t_0) - s)\right| \leq \varepsilon|\sigma(t_0) - s|$$
$$\left|\sigma(\sigma(t_0)) - s - \sigma^\Delta(t_0)(\sigma(t_0) - s)\right| \leq \varepsilon|\sigma(t_0) - s|.$$

$s \to t_0$ için

$$\sigma(\sigma(t_0)) - t_0 - \sigma^\Delta(t_0)(\sigma(t_0) - t_0) = 0,$$

$$\sigma^\Delta(t_0) = \frac{\sigma(\sigma(t_0)) - t_0}{\sigma(t_0) - t_0}$$

olur. Bu durumda Önerme 2.1.1 den $\sigma(t_0) = t_0$ olmalıdır. Bu ise $\sigma(t_0) > t_0$ kabulümüzle çelişir. O halde $\sigma(t)$ fonksiyonu her $\mathbb{T}$ zaman skalasında Δ-türevlenemezdir.

Teorem 2.1.1 $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $t \in \mathbb{T}^k$ noktası verilsin.

i) f fonksiyonu t de Δ- türevlenebilir ise, f fonksiyonu t de süreklidir.

ii) Eğer f fonksiyonu t de sürekli ve t sağ yayılmış ise, f fonksiyonu t de Δ- türevlenebilirdir ve

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f\big(\sigma(t)\big) - f(t)}{\sigma(t) - t}$$

şeklindedir.

iii) Eğer t sağ yoğun nokta ise, bu halde f fonksiyonunun t de Δ-türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

değerinin sonlu olmasıdır ve bu durumda

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

dir.

iv) f fonksiyonu t de Δ- türevlenebilir ise, bu halde

$$f\big(\sigma(t)\big) = f(t) + f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - t)$$

eşitliği doğrudur.

Teorem 2.1.2 $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $t \in \mathbb{T}_k$ noktası verilsin.

i) f fonksiyonu t de ∇- türevlenebilir ise, f fonksiyonu t de süreklidir.

ii) Eğer f fonksiyonu t de sürekli ve t sol yayılmış ise, f fonksiyonu t de ∇- türevlenebilirdir ve

$$f^{\nabla}(t) = \frac{f(\rho(t)) - f(t)}{\rho(t) - t}$$

şeklindedir.

iii) Eğer t sol yoğun nokta ise, bu halde f fonksiyonunun t de ∇- türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

değerinin sonlu olmasıdır ve bu durumda

$$f^{\nabla}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

şeklindedir.

iv) f fonksiyonu t de ∇- türevlenebilir ise, bu halde

$$f(\rho(t)) = f(t) + f^{\nabla}(t)(\rho(t) - t)$$

eşitliği doğrudur.

Örnek 2.1.5 $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu olmak üzere $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ için $f^{\Delta}(t)$ ve $f^{\nabla}(t)$ yi inceleyelim.

i) Eğer $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ ise $\forall t \in \mathbb{R}$ sağ yoğun olduğundan Teorem 2.1.1 iii) den $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{R}$ de Δ- türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$f'(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

var olmasıdır.

Eğer $f'(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s}$ var ise f fonksiyonu t de türevlenebilirdir. O halde Teorem 2.1.1 iii) den

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t)-f(s)}{t-s} = f'(t)$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $\forall t \in \mathbb{R}$ sol yoğun olduğundan Teorem 2.1.2 iii) den $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{R}$ de ∇- türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$f'(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

var olmasıdır.

O halde Teorem 2.1.1 iii) den

$$f^{\nabla}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

bulunur.

ii) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise $\forall t \in \mathbb{Z}$ sağ yayılmış olduğundan Teorem 2.1.1 ii) den $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{Z}$ de Δ- türevlenebilirdir ve

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f(t+1) - f(t)}{1} = f(t+1) - f(t) = \Delta f(t)$$

elde edilir. Buradaki Δ ileri fark operatörüdür.

Benzer şekilde $\forall t \in \mathbb{Z}$ sol yayılmış olduğundan Teorem 2.1.2 ii) den $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{Z}$ de ∇- türevlenebilirdir ve

$$f^{\nabla}(t) = \frac{f(t) - f(\rho(t))}{t - \rho(t)} = \frac{f(t) - f(t-1)}{1} = f(t) - f(t-1) = \nabla f(t)$$

elde edilir. Buradaki ∇ geri fark operatörüdür.

Teorem 2.1.3 $f, g: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}^{\mathrm{k}}$ noktasında Δ-türevlenebilir ise,

i) $f + g$ fonksiyonu da $t \in \mathbb{T}^{\mathrm{k}}$ noktasında Δ- türevlenebilirdir ve

$$(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t).$$

ii) Her k sabiti için $k\, f$ fonksiyonu da $t \in \mathbb{T}^{\mathrm{k}}$ noktasında Δ-türevlenebilirdir ve

$$(k\, f)^{\Delta}(t) = k f^{\Delta}(t).$$

iii) fg fonksiyonu da $t \in \mathbb{T}^{\mathrm{k}}$ noktasında Δ - türevlenebilirdir ve

$$\begin{aligned}(fg)^{\Delta}(t) &= f^{\Delta}(t)g(t) + f(\sigma(t))g^{\Delta}(t) \\ &= f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g(\sigma(t)).\end{aligned}$$

iv) $g(t)g\big(\sigma(t)\big) \neq 0$ ise, bu halde $\frac{f}{g}$ fonksiyonu da $t \in \mathbb{T}^{\mathrm{k}}$ noktasında Δ-türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t)g(t) - f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g\big(\sigma(t)\big)}.$$

Teorem 2.1.4 $f, g: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}_{\mathrm{k}}$ noktasında ∇-türevlenebilir ise,

i) $f + g$ fonksiyonu da $t \in \mathbb{T}_{\mathrm{k}}$ noktasında ∇- türevlenebilirdir ve

$$(f + g)^{\nabla}(t) = f^{\nabla}(t) + g^{\nabla}(t).$$

ii) Her k sabiti için $k\,f$ fonksiyonu da $t \in \mathbb{T}_{\mathrm{k}}$ noktasında ∇-türevlenebilirdir ve

$$(k\,f)^{\nabla}(t) = kf^{\nabla}(t).$$

iii) fg fonksiyonu da $t \in \mathbb{T}_{\mathrm{k}}$ noktasında ∇ - türevlenebilirdir ve

$$\begin{aligned}(fg)^{\nabla}(t) &= f^{\nabla}(t)g(t) + f\big(\rho(t)\big)g^{\nabla}(t)\\ &= f(t)g^{\nabla}(t) + f^{\nabla}(t)g\big(\rho(t)\big).\end{aligned}$$

iv) $g(t)g\big(\rho(t)\big) \neq 0$ ise, bu halde $\frac{f}{g}$ fonksiyonu da $t \in \mathbb{T}_{\mathrm{k}}$ noktasında ∇-türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\nabla}(t) = \frac{f^{\nabla}(t)g(t) - f(t)g^{\nabla}(t)}{g(t)g\big(\rho(t)\big)}.$$

Örnek 2.1.6 Zaman skalası olarak $h > 0$ için $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hz: z \in \mathbb{Z}\}$ alalım. $\forall t \in \mathbb{T}$ için

$$\sigma(t) = inf\{s \in \mathbb{T}: s > t\} = inf\{t + nh: n \in \mathbb{N}\} = t + h,$$
$$\rho(t) = sup\{s \in \mathbb{T}: s < t\} = sup\{t - nh: n \in \mathbb{N}\} = t - h,$$
$$\mu(t) = \sigma(t) - t = h \text{ ve } \nu(t) = t - \rho(t) = h$$

elde edilir. $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall t \in \mathbb{T}$ için

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h},$$

$$f^{\nabla}(t) = \frac{f(t) - f(\rho(t))}{\nu(t)} = \frac{f(t) - f(t-h)}{h}$$

türevlerine sahiptir.

2.2 Zaman Skalasında Yüksek Mertebeden Türev

Tanım 2.2.1 $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $f^{\Delta}: \mathbb{T}^{\mathrm{k}} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}^{\mathrm{k}^2} = \left(\mathbb{T}^{k}\right)^{k}$ da Δ-türevlenebilir ise f fonksiyonu ikinci mertebeden Δ- türevlenebilirdir denir ve

$$f^{\Delta\Delta} = (f^{\Delta})^{\Delta} : \mathbb{T}^{\mathrm{k}^2} \to \mathbb{R}$$

dir. Benzer şekilde, f nin n. mertebeden Δ- türevleri $f^{\Delta^n}: \mathbb{T}^{\mathrm{k}^{\mathrm{n}}} \to \mathbb{R}$ ile tanımlanır. Her $t \in \mathbb{T}$ için

$$\sigma^2(t) = \sigma(\sigma(t))$$

ve buna göre $n \in \mathbb{N}$ için $\sigma^n(t)$ benzer şekilde tanımlanır. Ayrıca,

$$\sigma^0(t) = t, f^{\Delta^0} = f \text{ ve } \mathbb{T}^{k^0} = \mathbb{T}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.2 $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $f^{\nabla}: \mathbb{T}_k \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}_{\mathrm{k}^2} = (\mathbb{T}_k)_k$ da ∇-türevlenebilir ise f fonksiyonu ikinci mertebeden ∇- türevlenebilirdir denir ve

$$f^{\nabla\nabla} = (f^{\nabla})^{\nabla} : \ \mathbb{T}_{\mathrm{k}^2} \to \mathbb{R}$$

dir. Benzer şekilde, f nin n. mertebeden ∇- türevleri $f^{\nabla^n}: \mathbb{T}_{\mathrm{k}^{\mathrm{n}}} \to \mathbb{R}$ ile tanımlanır. Her $t \in \mathbb{T}$ için

$$\rho^2(t) = \rho\big(\rho(t)\big)$$

ve buna göre $n \in \mathbb{N}$ için $\rho^n(t)$ benzer şekilde tanımlanır. Ayrıca,

$$\rho^0(t) = t, f^{\nabla^0} = f \text{ ve } \ \mathbb{T}_{k^0} = \mathbb{T}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.3 $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $f^{\Delta}: \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}_k^k = \left(\mathbb{T}^k\right)_k$ da ∇-türevlenebilir ise f fonksiyonu $\Delta\nabla$- türevlenebilirdir denir ve

$$f^{\Delta\nabla} = (f^{\Delta})^{\nabla} : \mathbb{T}_k^k \ \to \mathbb{R}$$

dir.

Örnek 2.2.1 $\mathbb{T}$ herhangi bir zaman skalası olsun. $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = t$ alalım. Örnek 2.1.2 den $\forall t \in \mathbb{T}^{\mathrm{k}}$ için $f^{\Delta}(t) = 1$ olduğunu biliyoruz. O halde, $\forall t \in \mathbb{T}^{\mathrm{k}^2}$ için,

$$f^{\Delta\Delta}(t) = (f^{\Delta})^{\Delta}\ (t) = \lim_{s \to t} \frac{f^{\Delta}(\sigma(t)) - f^{\Delta}(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s \to t} \frac{1-1}{\sigma(t)-s} = 0$$

olduğu görülür.

Benzer şekilde, Örnek 2.1.2 den $\forall t \in \mathbb{T}_{\mathrm{k}}$ için $f^{\nabla}(t) = 1$ olduğundan $f^{\nabla\nabla}(t) = 0$ elde edilir.

Örnek 2.2.2 $\mathbb{T}$ herhangi bir zaman skalası olsun. $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) = t^2$ alalım.

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s\to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \lim_{s\to t} \frac{\sigma^2(t) - s^2}{\sigma(t) - s} = \lim_{s\to t} \sigma(t) + s = \sigma(t) + t,$$

$$f^{\nabla}(t) = \lim_{s\to t} \frac{f(\rho(t)) - f(s)}{\rho(t) - s} = \lim_{s\to t} \frac{\rho^2(t) - s^2}{\rho(t) - s} = \lim_{s\to t} \rho(t) + s = \rho(t) + t$$

olduğu görülür. O halde,

$$\forall t \in \mathbb{T}^{k^2} \text{ için } f^{\Delta\Delta}(t) = (f^{\Delta})^{\Delta}(t) = (\sigma(t) + t)^{\Delta} = \sigma^{\Delta}(t) + t^{\Delta},$$

$$\forall t \in \mathbb{T}_{k^2} \text{ için } f^{\nabla\nabla}(t) = (f^{\nabla})^{\nabla}(t) = (\rho(t) + t)^{\nabla} = \rho^{\nabla}(t) + t^{\nabla},$$

$$\forall t \in \mathbb{T}_k^k \text{ için } f^{\Delta\nabla}(t) = (f^{\Delta})^{\nabla}(t) = (\sigma(t) + t)^{\nabla} = \sigma^{\nabla}(t) + t^{\nabla}$$

elde edilir. $\sigma(t)$ fonksiyonunun her $\mathbb{T}$ zaman skalası için Δ-türevlenemez olduğunu Örnek 2.1.5 de göstermiştik. Öyleyse f nin herhangi bir $\mathbb{T}$ zaman skalası için ikinci mertebeden Δ-türevini bulamayız. Benzer şekilde, $\rho(t)$ fonksiyonunun her $\mathbb{T}$ zaman skalası için ∇-türevlenemez olduğu gösterilebilir. Böylece f nin herhangi bir $\mathbb{T}$ zaman skalası için ikinci mertebeden ∇-türevini bulamayız. Özel zaman skalaları için $f^{\Delta\Delta}(t)$, $f^{\nabla\nabla}(t)$ ve $f^{\Delta\nabla}(t)$ yi inceleyelim.

$\mathbb{T}=\mathbb{R}$ ise $\sigma(t) = t$, $\rho(t) = t$ olduğundan

$$f^{\Delta\Delta}(t) = t^{\Delta} + t^{\Delta} = 2,$$
$$f^{\nabla\nabla}(t) = t^{\nabla} + t^{\nabla} = 2,$$
$$f^{\Delta\nabla}(t) = t^{\nabla} + t^{\nabla} = 2$$

bulunur.

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise $\sigma(t) = t + 1$ ve $\rho(t) = t - 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} f^{\Delta\Delta}(t) &= (t+1)^{\Delta} + t^{\Delta} = 2, \\ f^{\nabla\nabla}(t) &= (t-1)^{\nabla} + t^{\nabla} = 2, \\ f^{\Delta\nabla}(t) &= (t+1)^{\nabla} + t^{\nabla} = 2 \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 2.2.3 Eğer f ve g ikinci mertebeden Δ-türevlenebilir ve f^{σ} Δ-türevlenebilir ise fg ikinci mertebeden Δ- türevlenebilirdir ve

$$(fg)^{\Delta} = f^{\Delta}g + f^{\sigma}g^{\Delta}$$

olduğundan $f^{\Delta^{\sigma}} \coloneqq f^{\Delta\sigma}$ ve $f^{\sigma^{\Delta}} \coloneqq f^{\sigma\Delta}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (fg)^{\Delta\Delta} &= (f^{\Delta}g + f^{\sigma}g^{\Delta})^{\Delta} \\ &= f^{\Delta\Delta}g + f^{\Delta^{\sigma}}g^{\Delta} + f^{\sigma^{\Delta}}g^{\Delta} + f^{\sigma^{\sigma}}g^{\Delta\Delta} \\ &= f^{\Delta\Delta}g + f^{\Delta\sigma}g^{\Delta} + f^{\sigma\Delta}g^{\Delta} + f^{\sigma\sigma}g^{\Delta\Delta} \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 2.2.4 Eğer f ve g ikinci mertebeden ∇-türevlenebilir ve f^{ρ} ∇-türevlenebilir ise fg ikinci mertebeden ∇- türevlenebilirdir ve

$$(fg)^{\nabla} = f^{\nabla}g + f^{\rho}g^{\nabla}$$

olduğuna göre $f^{\nabla^{\rho}} \coloneqq f^{\nabla\rho}$ ve $f^{\rho^{\nabla}} \coloneqq f^{\rho\nabla}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (fg)^{\nabla\nabla} &= (f^{\nabla}g + f^{\rho}g^{\nabla})^{\nabla} \\ &= f^{\nabla\nabla}g + f^{\nabla^{\rho}}g^{\nabla} + f^{\rho^{\nabla}}g^{\nabla} + f^{\rho^{\rho}}g^{\nabla\nabla} \\ &= f^{\nabla\nabla}g + f^{\nabla\rho}g^{\nabla} + f^{\rho\nabla}g^{\nabla} + f^{\rho\rho}g^{\nabla\nabla} \end{aligned}$$

elde edilir.

2.3 Zaman Skalasında İntegral

Tanım 2.3.1 Eğer $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathbb{T}$ deki sağ yoğun noktalarda sağdan limiti var ve sol yoğun noktalarda soldan limiti varsa bu fonksiyona düzenli (regulated) fonksiyon denir.

Tanım 2.3.2 Eğer $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}$ deki sağ yoğun noktalarda sürekli ve sol yoğun noktalarda soldan limite sahipse bu fonksiyona sağ yoğun sürekli veya rd-sürekli denir. $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ rd-sürekli fonksiyonların kümesi

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

ile gösterilir.

Tanım 2.3.3 Eğer $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}$ deki sol yoğun noktalarda sürekli ve sağ yoğun noktalarda sağdan limite sahipse bu fonksiyona sol yoğun sürekli veya ld-sürekli denir. $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ld-sürekli fonksiyonların kümesi

$$C_{ld} = C_{ld}(\mathbb{T}) = C_{ld}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

ile gösterilir.

Tanım 2.3.4 $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $F: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}^k$ üzerinde Δ- türevlenebilir ve her $t \in \mathbb{T}^{\mathrm{k}}$ için $F^{\Delta}(t) = f(t)$ ise, F fonksiyonuna f nin Δ- anti türevi veya ilkeli denir.

Tanım 2.3.5 $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $F: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}_k$ üzerinde ∇- türevlenebilir ve her $t \in \mathbb{T}_{\mathrm{k}}$ için $F^{\nabla}(t) = f(t)$ ise, F fonksiyonuna f nin ∇- anti türevi veya ilkeli denir.

Tanım 2.3.6 Eğer $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun Δ- anti türevi varsa, f ye Δ-integrallenebilir fonksiyon denir. Bu durumda a ve b, $\mathbb{T}$ içinde herhangi noktalar olmak üzere f nin a dan b ye Δ integrali

$$\int_a^b f(t)\Delta t = F(b) - F(a)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.3.7 Eğer $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun ∇- anti türevi varsa, f ye ∇-integrallenebilir fonksiyon denir. Bu durumda a ve b, $\mathbb{T}$ içinde herhangi noktalar olmak üzere f nin a dan b ye ∇ integrali

$$\int_a^b f(t)\nabla t = F(b) - F(a)$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.3.1 Her rd sürekli fonksiyonun bir anti türevi vardır.

Teorem 2.3.2 $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ- integrallenebilir olsun. Bu durumda $t \in \mathbb{T}^k$ için

$$\int_t^{\sigma(t)} f(s)\Delta s = [\sigma(t) - t]f(t) = \mu(t)f(t)$$

eşitliği doğrudur.

İspat $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu Δ- integrallenebilir ise $f(t)=F^{\Delta}(t)$ olacak şekilde öyle $F:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ Δ- anti türevi vardır ve

$$\int_{t}^{\sigma(t)} f(s)\Delta s = F\big(\sigma(t)\big)-F(t)$$

$$=[\sigma(t)-t]F^{\Delta}(t)$$

$$=[\sigma(t)-t]f(t)$$

elde edilir.

Teorem 2.3.3 Her ld sürekli fonksiyonun bir anti türevi vardır.

Teorem 2.3.4 $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu ∇- integrallenebilir olsun. Bu durumda $t\in\mathbb{T}_{\mathrm{k}}$ için

$$\int_{\rho(t)}^{t} f(s)\nabla s=[t-\rho(t)]f(t)=\nu(t)f(t)$$

eşitliği doğrudur.

İspat Teorem 2.2.2 nin ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 2.3.5 $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ ve $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonları Δ- integrallenebilir olsunlar, yani Δ-anti türevleri var olsun. Bu durumda her $a,b,c\in\mathbb{T}$ için aşağıdaki formüller doğrudur.

i) $\int_a^b[f(t)+g(t)]\Delta t=\int_a^b f(t)\Delta t+\int_a^b g(t)\,\Delta t,$

ii) Her k sabiti için $\int_a^b k\,f(t)\Delta t=k\int_a^b f(t)\Delta t\,,$

iii) $\int_a^a f(t)\Delta t=0,$

iv) $\int_a^b f(t)\Delta t=-\int_b^a f(t)\Delta t,$

v) $\int_a^b f(t)\Delta t=\int_a^c f(t)\Delta t+\int_c^b f(t)\,\Delta t,$

vi) $\int_a^b f(\sigma(t))g^\Delta(t)\Delta t = f(t)g(t)|_a^b - \int_a^b f^\Delta(t)g(t)\Delta t,$

vii) $\int_a^b f(t)g^\Delta(t)\Delta t = f(t)g(t)|_a^b - \int_a^b f^\Delta(t)g(\sigma(t))\Delta t,$

viii) Eğer $[a,b)$ aralığında $|f(t)| \leq g(t)$ ise $\left|\int_a^b f(t)\Delta t\right| \leq \int_a^b g(t)\Delta t$ olur.

ix) Eğer her $t \in [a,b)$ için $f(t) \geq 0$ ise $\int_a^b f(t)\Delta t \geq 0$.

Bu teoremde vi ve vii formüllerine kısmi integrasyon formülleri denir.

Teorem 2.3.6 $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ve $g: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları ∇- integrallenebilir olsunlar, yani ∇-anti türevleri var olsun. Bu durumda her $a,b,c \in \mathbb{T}$ için aşağıdaki formüller doğrudur.

i) $\int_a^b [f(t) + g(t)]\nabla t = \int_a^b f(t)\nabla t + \int_a^b g(t)\,\nabla t,$

ii) Her k sabiti için $\int_a^b k\, f(t)\nabla t = k\int_a^b f(t)\nabla t$,

iii) $\int_a^a f(t)\nabla t = 0,$

iv) $\int_a^b f(t)\nabla t = -\int_b^a f(t)\nabla t,$

v) $\int_a^b f(t)\nabla t = \int_a^c f(t)\nabla t + \int_c^b f(t)\,\nabla t,$

vi) $\int_a^b f(\rho(t))g^\nabla(t)\nabla t = f(t)g(t)|_a^b - \int_a^b f^\nabla(t)g(t)\nabla t,$

vii) $\int_a^b f(t)g^\nabla(t)\nabla t = f(t)g(t)|_a^b - \int_a^b f^\nabla(t)g(\rho(t))\nabla t,$

viii) Eğer $[a,b)$ aralığında $|f(t)| \leq g(t)$ ise $\left|\int_a^b f(t)\nabla t\right| \leq \int_a^b g(t)\nabla t$ olur.

ix) Eğer her $t \in [a,b)$ için $f(t) \geq 0$ ise $\int_a^b f(t)\nabla t \geq 0$.

Teorem 2.3.7 $a,b \in \mathbb{T}$ ve $a < b$ olsun. Eğer $f(t)$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli ise aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

i) $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^{\rho(b)} f(t)\Delta t + [b - \rho(b)]f(\rho(b)),$

ii) $\int_a^b f(t)\Delta t = [\sigma(a) - a]f(a) + \int_{\sigma(a)}^b f(t)\Delta t,$

iii) $\int_a^b f(t)\nabla t = \int_a^{\rho(b)} f(t)\nabla t + [b - \rho(b)]f(b),$

iv) $\int_a^b f(t)\nabla t = [\sigma(a) - a]f(\sigma(a)) + \int_{\sigma(a)}^b f(t)\nabla t.$

Teorem 2.3.8 Eğer f, f^{Δ} ve f^{∇} iki değişkenli fonksiyonları sürekli ise, bu durumda aşağıdaki formüller doğrudur. Burada $f^{\Delta}(t,s)$ ve $f^{\nabla}(t,s)$ ile s değişkeni sabit tutularak $f(t,s)$ fonksiyonunun t ye göre sırasıyla Δ ve ∇ türevleri belirtilmiştir.

i) $\left(\int_a^t f(t,s)\Delta s\right)^{\Delta} = f(\sigma(t),t) + \int_a^t f^{\Delta}(t,s)\Delta s,$

ii) $\left(\int_a^t f(t,s)\Delta s\right)^{\nabla} = f\big(\rho(t),\rho(t)\big) + \int_a^t f^{\nabla}(t,s)\Delta s,$

iii) $\left(\int_a^t f(t,s)\nabla s\right)^{\Delta} = f\big(\sigma(t),\sigma(t)\big) + \int_a^t f^{\Delta}(t,s)\nabla s,$

iv) $\left(\int_a^t f(t,s)\nabla s\right)^{\nabla} = f(\rho(t),t) + \int_a^t f^{\nabla}(t,s)\nabla s.$

Örnek 2.3.1 $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ- integrallenebilir olsun. Bu durumda $a, b \in \mathbb{T}$ için

i) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b f(t)dt,$

ii) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{t=a}^{b-1} f(t), & a < b \\ 0, & a = b \\ -\sum_{t=b}^{a-1} f(t), & a > b \end{cases}$$

sağlanır.

iii) Eğer $[a,b]$ aralığı sadece ayrık noktaları içeriyor ise

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{t\in[a,b)} \mu(t)f(t), & a < b \\ 0, & a = b \\ -\sum_{t\in[b,a)} \mu(t)f(t), & a > b \end{cases}$$

elde edilir.

Örnek 2.3.2 $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ için $a \neq 1$ olmak üzere $\int a^t \Delta t$ belirsiz integralini inceleyelim.

$$\left(\frac{a^t}{a-1}\right)^{\Delta} = \Delta\left(\frac{a^t}{a-1}\right) = \frac{a^{t+1} - a^t}{a-1} = a^t$$

olduğundan

$$\int a^t \Delta t = \frac{a^t}{a-1} + c$$

elde edilir. (c sabit)

Örnek 2.3.4 $\mathbb{T} = [0,1] \cup [3,4]$ olsun. $f(t) = t^2$ için $\int_0^t f(s)\Delta s$ integralinin değerini bulalım.

$t \leq 1$ ise

$$\int_0^t s^2 \Delta s = \int_0^t s^2 ds = \frac{t^3}{3}.$$

$t = 3$ ise

$$\int_0^t s^2 \Delta s = \int_0^1 s^2 ds + \int_1^3 s^2 \Delta s = \frac{1}{3} + (\sigma(1) - 1) f(1) = \frac{7}{3}.$$

$t > 3$ ise

$$\int_0^t s^2 \Delta s = \int_0^3 s^2 \Delta s + \int_3^t s^2 \Delta s = \frac{7}{3} + \frac{s^3}{3} |_3^t$$

$$= \frac{7}{3} + \frac{t^3}{3} - \frac{3^3}{3} = \frac{t^3}{3} - \frac{20}{3}.$$

.

Örnek 2.3.5 $\mathbb{T} = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ olsun. $f(t) = \frac{8}{7}s(1-s)$ için $\int_0^1 f(s)\nabla s$ integralinin değerini bulalım.

$$\int_0^1 f(s)\nabla s = \int_0^{1/3} f(s)\nabla s + \int_{1/3}^{1/2} f(s)\nabla s + \int_{1/2}^{1} f(s)\nabla s$$

olduğundan integralleri ayrı ayrı hesaplayalım.

$$\int_0^{1/3} f(s)\nabla s = \int_0^{1/3} f(s)ds = \frac{8}{7}\int_0^{1/3} s(1-s)\,ds = \frac{8}{162},$$

$$\int_{1/3}^{1/2} f(s)\nabla s = f\left(\frac{1}{2}\right)\nu\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{21},$$

$$\int_{1/2}^{1} f(s)\nabla s = \int_{1/2}^{1} f(s)\mathrm{d}s = \frac{8}{7}\int_{1/2}^{1} s(1-s)\,ds = \frac{2}{21}$$

elde edilir. Böylece

$$\int_0^1 f(s)\nabla s = \int_0^{1/3} f(s)\nabla s + \int_{1/3}^{1/2} f(s)\nabla s + \int_{1/2}^{1} f(s)\nabla s = \frac{109}{567}$$

dir.

3. ZAMAN SKALASINDA BİR BOYUTLU p-LAPLACIAN SINIR DEĞER PROBLEMİ

Bu bölümde bir boyutlu p-Laplacian sınır değer probleminin pozitif çözümlerinin varlığı için gerekli koşullar verilmiştir. Bu amaçla p-Laplacian operatörün özellikleri ve sınır koşulları kullanılarak m-nokta p-Laplacian sınır değer problemi operatör denkleme indirgenmiş ve operatörün tamamen sürekli olduğu gösterilmiştir.

3.1 Operatörler ve Koni Kavramı

Tanım 3.1.1 E ve E_1 herhangi iki küme olsun. Eğer belirli bir A kuralı üzerine $D \subset E$ nin her x elemanına tek bir $y \in E_1$ karşılık getirilmiş ise E den E_1 e A operatörü (dönüşümü) verilmiştir denir. D ye A nın tanım bölgesi denir ve $A: D \subset E \to E_1$ ve $A: x \to y$ veya $y = Ax$ yazılarak gösterilir. Özel olarak $E_1 = E$ ise A ya E içinde bir operatör denir**.**

Tanım 3.1.2 Eğer bir kümenin elemanlarının her dizisinden yakınsak bir alt dizi seçilebiliyorsa bu kümeye prekompakt küme denir. Yakınsadığı değer, küme içinde ise bu kümeye kompakt küme denir.

Tanım 3.1.3 Eğer bir dönüşüm her sınırlı kümeyi prekompakt bir kümeye dönüştürüyorsa bu dönüşüme kompakt dönüşüm denir.

Tanım 3.1.4 (E, ρ) ve (E_1, ρ_1) iki metrik uzay olsun ve $A: D \subset E \to E_1$ operatörü verilsin.

Eğer $x_0 \in D$ için $\varepsilon > 0$ verildiğinde,

$$\forall x \in D, \rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_1(Ax, Ax_0) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa A ya x_0 noktasında sürekli operatör denir.

Eğer A operatörü D nin her noktasında sürekli ise A ya D üzerinde sürekli operatör denir.

Teorem 3.1.1 (Arzela-Ascoli Teoremi) Bir $M \subset C[a, b]$ kümesinin sürekli fonksiyonlar ailesinin prekompakt olması için gerek ve yeter koşul M ye ait fonksiyonların aynı dereceden sınırlı (equibounded) ve aynı dereceden sürekli (equicontinuous) olmasıdır.

Tanım 3.1.5 $M, C[a, b]$ içinde bir küme olsun.

i) $\forall x \in M, \forall t \in [a, b]$ için $|x(t)| \leq c$ olacak şekilde c sayısı varsa M kümesine ait fonksiyonlara aynı dereceden sınırlı (equibounded) fonksiyonlar denir.

ii) $\varepsilon > 0$ verilsin, $\forall t_1, t_2 \in [a,b]$ ve $\forall x \in M$ için $|t_1 - t_2| < \delta$ eşitsizliği sağlandığında $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa M kümesine ait fonksiyonlara aynı dereceden sürekli (equicontinuous) fonksiyonlar denir.

Tanım 3.1.6 Eğer bir dönüşüm sürekli ve kompakt ise bu dönüşüme tamamen sürekli denir.

Tanım 3.1.7 $V = \{x \in X: \|x\| < l\}\ (l > 0)$ olsun. $V_1 := \left\{\frac{x(t)}{1+t}, x \in V\right\} \cup \{x^{\Delta}(t), x \in V\}$ in sonsuzda aynı dereceden yakınsak (equiconvergent) olarak adlandırılması için gerek ve yeter koşul $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in V_1$ için,

$$\left|\frac{x(t_1)}{1+t_1} - \frac{x(t_2)}{1+t_2}\right| < \varepsilon, \qquad \left|x^{\Delta}(t_1) - x^{\Delta}(t_2)\right| < \varepsilon, \qquad \forall t_1, t_2 \geq T$$

olacak şekilde $\exists T = T(\varepsilon) > 0$ değerinin var olmasıdır.

Önerme 3.1.1 $\left\{\frac{x(t)}{1+t}, x \in V\right\}$ ve $\{x^{\Delta}(t), x \in V\}$, $[0, \infty)$ un herhangi bir kompakt aralığı üzerinde aynı dereceden sürekli (equicontinuous) ve sonsuzda aynı dereceden yakınsak (equiconvergent) ise bu durumda V, X üzerinde relatively kompakttır.

Tanım 3.1.8 $\mathbb{B}$ reel Banach uzayındaki P kümesi aşağıdaki koşulları sağladığında koni olarak adlandırılır.

i) P, $\mathbb{B}$ içinde kapalı ve konveks bir kümedir.

ii) $x \in P \Rightarrow \lambda x \in P$, her $\lambda \geq 0$.

iii) $x \in P, x \neq 0 \Rightarrow -x \notin P$.

Örnek 3.1.1

1) $\mathbb{B}=\mathbb{R}$ için,

$$P_1 = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\} \text{ ve } P_2 = \mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 0\}$$

kümeleri konidir.

2) $\mathbb{B} = \mathbb{R}^2$ için,

$$P = \mathbb{R}_+^2 = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2: x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\right\}$$

kümesi konidir.

3) $\mathbb{B} = \mathbb{R}^3$ için,

$$P = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq x_3\right\}$$

kümesi konidir.

Tanım 3.1.9 $\alpha: P \to [0, \infty)$ sürekli bir dönüşüm ve α dönüşümü her $u, v \in P, 0 \leq t \leq 1$ için

$$\alpha(tu + (1-t)v) \geq t\alpha(u) + (1-t)\alpha(v),$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, α dönüşüme $\mathbb{B}$ reel Banach uzayının P konisi üzerinde negatif olmayan sürekli konkav fonksiyonel denir.

Tanım 3.1.10 $\alpha: P \to [0, \infty)$ sürekli bir dönüşüm ve α dönüşümü her $u, v \in P, 0 \leq t \leq 1$ için

$$\alpha(tu + (1-t)v) \leq t\alpha(u) + (1-t)\alpha(v),$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, α dönüşümüne $\mathbb{B}$ reel Banach uzayının P konisi üzerinde negatif olmayan sürekli konveks fonksiyonel denir.

Tanım 3.1.11 $\varphi_p: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{T}$ ve $p > 1$ için $\varphi_p(s) = |s|^{p-2}s$ ile tanımlanan operatöre p-Laplacian operatör denir. Bu operatör

$$\varphi_p(0) = 0,$$

$$\varphi_p(xy) = \varphi_p(x)\varphi_p(y),$$

$$\varphi_p(-x) = -\varphi_p(x),$$

$$\varphi_p(x+y) \leq \varphi_p(x) + \varphi_p(y)$$

özelliklerini sağlar.

3.2 p- Laplacian Sınır Değer Problemi ve T operatörü

$$\begin{cases} \left(\varphi_p\left(x^{\Delta}(t)\right)\right)^{\nabla} + \phi(t)f\left(t, x(t), x^{\Delta}(t)\right) = 0, t \in (0,\infty)_{\mathbb{T}}, \\ x(0) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i x^{\Delta}(\eta_i), \ \ \lim_{t\in\mathbb{T}, t\to\infty} x^{\Delta}(t) = 0. \end{cases} \qquad (3.2.1)$$

Burada $\varphi_p(s) = |s|^{p-2}s, p > 1, \left(\varphi_p\right)^{-1} = \varphi_q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \eta_i \in \mathbb{T}, 0 < \eta_1 < \cdots < \eta_{m-2} < \infty$ ve $\alpha_i \geq 0$ $(i = 1,2,\ldots,m-2)$ dır.

Aşağıdaki koşulların sağlandığını kabul edelim:

(H1) $\phi \in C([0,\infty)_{\mathbb{T}},[0,\infty))$, $\int_0^\infty \phi(s)\nabla s < \infty$, $\int_0^\infty \varphi_q\left(\int_\tau^\infty \phi(s)\nabla s\right)\Delta\tau < \infty$;

(H2) $\omega \in C([0,\infty),[0,\infty))$ azalmayan ve $f(t,(1+t)u,v) \le \omega(max\{|u|,|v|\})$;

(H3) $(0,\infty)_{\mathbb{T}}$ un herhangi bir alt aralığı üzerinde $f(t,0,0) \neq 0$ ve $f(t,(1+t)u,v) \in C([0,\infty)_{\mathbb{T}} \times [0,\infty) \times [0,\infty),[0,\infty))$.

Banach uzayımız $\|x\|_1 = sup_{t\in[0,\infty)_{\mathbb{T}}} \frac{|x(t)|}{1+t}$, $\|x^\Delta\|_\infty = sup_{t\in[0,\infty)_{\mathbb{T}}}|x^\Delta(t)|$ olmak üzere $\|x\| = \max\left\{\|x\|_1, \|x^\Delta\|_\infty\right\}$ normuyla tanımlı

$$\mathbb{B} = \left\{x \in C^\Delta[0,\infty): sup_{t\in[0,\infty)_{\mathbb{T}}} \frac{|x(t)|}{1+t} < \infty, \lim_{t\in\mathbb{T},t\to\infty} x^\Delta(t) < \infty\right\} \quad (3.2.2)$$

olsun ve konimiz

$$P = \{x \in \mathbb{B}: x(0) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i x^\Delta(\eta_i), x, [0,\infty) \text{ üzerinde negatif olmayan,}$$

$$\text{konkav ve azalmayan}\} \quad (3.2.3)$$

şeklinde tanımlansın.

Önerme 3.2.1 $y \in C([0,\infty)_{\mathbb{T}},[0,\infty))$ ve $\int_0^\infty y(t)\nabla t < \infty$ olsun. Bu durumda

$$\begin{cases} \left(\varphi_p\left(x^\Delta(t)\right)\right)^\nabla + y(t) = 0, t \in (0,\infty)_{\mathbb{T}}, \\ x(0) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i x^\Delta(\eta_i), \quad \lim_{t\in\mathbb{T},t\to\infty} x^\Delta(t) = 0, \end{cases} \quad (3.2.4)$$

sınır değer probleminin tek çözümü

$$x(t) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \varphi_q\left(\int_{\eta_i}^\infty y(\tau)\nabla\tau\right) + \int_0^t \varphi_q\left(\int_s^\infty y(\tau)\nabla\tau\right)\Delta s$$

dir.

İspat

$$\left(\varphi_p\left(x^\Delta(t)\right)\right)^\nabla = -y(t), \quad t \in (0,\infty)_{\mathbb{T}}.$$

İlk olarak yukarıdaki ifadenin her iki tarafının t den ∞ a ∇- integralini alalım.

$$\int_t^\infty \left(\varphi_p\left(x^\Delta(\tau)\right)\right)^\nabla \nabla\tau = -\int_t^\infty y(\tau)\nabla\tau$$

den,

$$\varphi_p\left(x^{\Delta}(\infty)\right)-\varphi_p\left(x^{\Delta}(t)\right)=-\int_t^{\infty}y(\tau)\nabla\tau.$$

Sınır koşullarından $\lim_{t\in\mathbb{T},t\to\infty}x^{\Delta}(t)=0$ ve $\varphi_p(0)=0$ olduğundan $\varphi_p\left(x^{\Delta}(\infty)\right)=0$ elde edilir. Her iki tarafa $\left(\varphi_p\right)^{-1}=\varphi_q$ uygulanırsa

$$x^{\Delta}(t)=\varphi_q\left(\int_t^{\infty}y(\tau)\nabla\tau\right)$$

elde edilir. Her iki tarafının 0 dan t ye Δ- integrali alınarak

$$\int_0^t x^{\Delta}(s)\,\Delta s=\int_0^t\varphi_q\left(\int_s^{\infty}y(\tau)\nabla\tau\right)\Delta s$$

$$x(t)-x(0)=\int_0^t\varphi_q\left(\int_s^{\infty}y(\tau)\nabla\tau\right)\Delta s$$

elde edilir. Sınır koşullarından

$$x(0)=\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i x^{\Delta}(\eta_i)=\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\,\varphi_q\left(\int_{\eta_i}^{\infty}y(\tau)\nabla\tau\right)$$

olduğunu biliniyor. Yukarıdaki denklemde $x(0)$ yerine eşitini yazarak (3.2.4) sınır değer probleminin tek çözümü

$$x(t)=\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\,\varphi_q\left(\int_{\eta_i}^{\infty}y(\tau)\nabla\tau\right)+\int_0^t\varphi_q\left(\int_s^{\infty}y(\tau)\nabla\tau\right)\Delta s$$

olarak bulunur.

(3.2.1) sınır değer probleminin çözümünün bulunması $t\in[0,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $\mathbb{B}$ uzayı içinde

$$\begin{aligned}(Tx)(t)=&\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\varphi_q\left(\int_{\eta_i}^{\infty}\phi(\tau)f\left(\tau,x(\tau),x^{\Delta}(\tau)\right)\nabla\tau\right)\\&+\int_0^t\varphi_q\left(\int_s^{\infty}\phi(\tau)f\left(\tau,x(\tau),x^{\Delta}(\tau)\right)\nabla\tau\right)\Delta s\end{aligned}\tag{3.2.5}$$

ile tanımlı $T:P\to\mathbb{B}$ operatörünün sabit noktasının bulunmasına denktir.

Önerme 3.2.2 $M = max\,\{\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i, 1\}$ iken $x \in P$ için $\|x\|_1 \le M\|x^\Delta\|_\infty$ dır.

İspat $x \in P$ olduğundan,

$$\frac{x(t)}{1+t} = \frac{1}{1+t}\left(\int_0^t x^\Delta(s)\Delta s + \sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i x^\Delta(\eta_i)\right) \le \frac{t+\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i}{1+t}\|x^\Delta\|_\infty \le \mathrm{M}\|x^\Delta\|_\infty$$

dir. Böylece,

$$sup_{t\in[0,\infty)_{\mathbb{T}}}\frac{|x(t)|}{1+t} \le \mathrm{M}\|x^\Delta\|_\infty$$

olduğundan

$$\|x\|_1 \le M\|x^\Delta\|_\infty$$

elde edilir.

Önerme 3.2.3 (H1), (H2) ve (H3) koşulları sağlandığında $T: P \to P$ operatörü tamamen süreklidir.

İspat İspatı dört adımda yapalım.

Adım 1: $TP \subset P$ olduğunu gösterelim. $x \in P$ için ,

$$(Tx)^\Delta(\infty) = 0,$$

$$\left(\varphi_p\left((Tx)^\Delta(t)\right)\right)^\nabla = -\phi(t)f\left(t, x(t), x^\Delta(t)\right) \le 0,$$

$$(Tx)^\Delta(t) = \varphi_q\left(\int_t^\infty \phi(\tau)f\left(\tau, x(\tau), x^\Delta(\tau)\right)\nabla\tau\right) \ge 0,$$

$$(Tx)(0) = \sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\varphi_q\left(\int_{\eta_i}^\infty \phi(\tau)f\left(\tau, x(\tau), x^\Delta(\tau)\right)\nabla\tau\right) = \sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i(Tx)^\Delta(\eta_i) \ge 0$$

dır. Böylece $\left(\varphi_p\left((Tx)^\Delta(t)\right)\right)^\nabla \le 0$, $\varphi_p\left((Tx)^\Delta(t)\right)$ azalandır. O halde $(Tx)^\Delta(t)$ azalandır. Tx konkavdır. Böylece $[0,\infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde Tx, negatif olmayan, konkav ve azalmayandır. Yani $TP \subset P$ dir.

Adım 2: $T: P \to P$ sürekli olduğunu gösterelim. P de $n \to +\infty$ iken $x_n \to x$ dizisi var olsun. O zaman $sup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}\|x_n\| < r_0$ olacak şekilde r_0 reel sayısı mevcuttur (Yakınsak diziler sınırlıdır). (H2) den $f(t,(1+t)u, v) \le \omega(r_0)$ elde edilir ve böylece

$$\int_0^\infty \phi(\tau)\left|f(\tau, x_n, x_n^\Delta) - f(\tau, x, x^\Delta)\right|\nabla\tau \le 2\omega(r_0)\int_0^\infty \phi(\tau)\nabla\tau.$$

Lebesque baskın yakınsaklık teoreminden,

$$\left|\varphi_p\left((Tx_n)^\Delta(t)\right) - \varphi_p\left((Tx)^\Delta(t)\right)\right| = \left|\int_t^\infty \phi(\tau)\, f(\tau, x_n, x_n^\Delta) - f(\tau, x, x^\Delta)\nabla\tau\right|$$

$$\le \int_0^\infty \phi(\tau)\left|f(\tau, x_n, x_n^\Delta) - f(\tau, x, x^\Delta)\right|\nabla\tau$$

$$\to 0,\ n \to +\infty.$$

Böylece, φ_q nun sürekliliğinden $\|Tx_n - Tx\| \le M\left\|(Tx_n)^\Delta - (Tx)^\Delta\right\|_\infty \to 0$, $n \to +\infty$ dır. Dolayısıyla T süreklidir.

Adım 3: $T: P \to P$ relatively kompakt olduğunu gösterelim. Ω, P' nin sınırlı alt kümesi olsun. O zaman $x \in \Omega$ için $\|x\| \le K$ olacak şekilde öyle bir $K > 0$ reel sayısı vardır. (H1) ile $\forall x \in \Omega$ için,

$$\left\|(Tx)^\Delta\right\|_\infty = \varphi_q\left(\int_0^\infty \phi(\tau) f\left(\tau, x(\tau), x^\Delta(\tau)\right)\nabla\tau\right)$$

$$\le \omega(K)\varphi_q\left(\int_0^\infty \phi(\tau)\nabla\tau\right) < \infty.$$

Dolayısıyla, $\|T\Omega\| \le M\left\|(T\Omega)^\Delta\right\|_\infty < \infty$ ve $T\Omega$ düzgün (uniformly) sınırlıdır.

Şimdi, $T\Omega$ nın $[0,\infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde aynı dereceden sürekli (equicontinuous) olduğunu gösterelim. $R > 0,\ t_1, t_2 \in [0, R],\ t_2 > t_1$ ve $\forall x \in \Omega$ için,

$$\left|\frac{(Tx)(t_1)}{1+t_1} - \frac{(Tx)(t_2)}{1+t_2}\right| = \kappa$$

olmak üzere

$$\kappa \leq \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \varphi_q \left(\int_{\eta_i}^{\infty} \phi(\tau) f\left(\tau, x(\tau), x^{\Delta}(\tau)\right) \nabla\tau \right) \left| \frac{1}{1+t_1} - \frac{1}{1+t_2} \right|$$

$$+ \int_0^{t_1} \varphi_q \left(\int_s^{\infty} \phi(\tau) f\left(\tau, x(\tau), x^{\Delta}(\tau)\right) \nabla\tau \right) \Delta s \left| \frac{1}{1+t_1} - \frac{1}{1+t_2} \right|$$

$$+ \frac{1}{1+t_2} \int_{t_1}^{t_2} \varphi_q \left(\int_s^{\infty} \phi(\tau) f\left(\tau, x(\tau), x^{\Delta}(\tau)\right) \nabla\tau \right) \Delta s$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \varphi_q\left(\omega(K)\right) \varphi_q \left(\int_0^{\infty} \phi(\tau) \nabla\tau \right) \left| \frac{1}{1+t_1} - \frac{1}{1+t_2} \right|$$

$$+ \varphi_q\left(\omega(K)\right) \int_0^{t_1} \varphi_q \left(\int_s^{\infty} \phi(\tau) \nabla\tau \right) \left| \frac{1}{1+t_1} - \frac{1}{1+t_2} \right|$$

$$+ \frac{1}{1+t_2} \varphi_q\left(\omega(K)\right) \int_{t_1}^{t_2} \varphi_q \left(\int_s^{\infty} \phi(\tau) \nabla\tau \right) \Delta s$$

$$\to 0, \quad (t_1 \to t_2)$$

$$\left| \varphi\left((Tx)^{\Delta}(t_1)\right) - \varphi\left((Tx)^{\Delta}(t_2)\right) \right| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \phi(\tau) f\left(\tau, x(\tau), x^{\Delta}(\tau)\right) \nabla\tau \right|$$

$$\leq \omega(K) \left| \int_{t_1}^{t_2} \phi(\tau) \nabla\tau \right|$$

$$\to 0. \quad (t_1 \to t_2)$$

Böylece $T\Omega$, $[0,\infty)_{\mathbb{T}}$ nin herhangi kompakt aralığında aynı dereceden süreklidir.

Adım 4: $T: P \to P$ nin ∞ da aynı dereceden yakınsak (equiconvergent) olduğunu gösterelim. Herhangi bir $x \in \Omega$ için,

$$\lim_{t\to\infty} \left| \frac{(Tx)(t)}{1+t} \right| = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1+t} \int_0^{t} \varphi_q \left(\int_s^{\infty} \phi(\tau) f\left(\tau, x(\tau), x^{\Delta}(\tau)\right) \nabla\tau \right) \Delta s$$

$$\leq M \varphi_q\left(\omega(K)\right) \lim_{t\to\infty} \left(\int_t^{\infty} \phi(\tau) \nabla\tau \right) = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty}\left|(Tx)^{\Delta}(t)\right| = \lim_{t\to\infty}\varphi_q\left(\int_t^{\infty}\phi(\tau)f\left(\tau,x(\tau),x^{\Delta}(\tau)\right)\nabla\tau\right)$$

$$\leq \varphi_q\big(\omega(K)\big)\lim_{t\to\infty}\left(\int_t^{\infty}\phi(\tau)\nabla\tau\right) = 0.$$

Böylece, $T\Omega$ sonsuzda aynı dereceden yakınsaktır. Sonuç olarak Adım 1-4 den, $T: P \to P$ operatörü tamamen süreklidir. İspat tamamlanır. □

4. ZAMAN SKALASINDA m-NOKTA p-LAPLACIAN SINIR DEĞER PROBLEMİNİN POZİTİF ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, (3.2.1) m-nokta p $-$Laplacian sınır değer problemine, Leggett-Williams sabit nokta teoremi, Beş fonksiyonelli sabit nokta teoremi ve Leggett-Williams sabit nokta teoreminin bir genelleştirilmişi uygulanarak en az üç pozitif çözümün varlığı araştırılmıştır. Ayrıca her bir teorem için örnek verilmiştir.

4.1 Leggett-Williams Sabit Nokta Teoremi ve Uygulanışı

Bu bölümde,

(H4) $0 < \theta_1 < \theta_2$ için

$$0 < \gamma(\theta_1, \theta_2) = \min_{(t,u,v)\in\left[\frac{1}{k},k\right]_{\mathbb{T}}\times\left[\frac{\theta_1}{Mk},\theta_2\right]\times[0,\theta_2]} f(t,(1+t)u,v)$$

koşulu sağlansın.

Teorem 4.1.1 (Leggett-Williams Sabit Nokta Teoremi, Leggett and Williams, 1979**)** $\mathbb{B}$ Banach uzayı, P de $\mathbb{B}$ uzayında bir koni olsun.

$$P_c := \{x \in P: \|x\| < c\},$$

$$P(\alpha, a, b) := \{x \in P: a \leq \alpha(x), \|x\| \leq b\}$$

şeklinde tanımlansın. $T: \overline{P_c} \to \overline{P_c}$ tamamen sürekli operatör ve α, P üzerinde negatif olmayan sürekli konkav fonksiyonel olmak üzere

$$\forall x \in \overline{P_c} \text{ için } \alpha(x) \leq \|x\|$$

olsun. Eğer,

(i) $\{x \in P(\alpha, b, d): \alpha(x) > b\} \neq \emptyset$ ve $\forall$x $\in P(\alpha, b, d)$ için $\alpha(Tx) > b$;

(ii) $\forall x \in \overline{P_a}$ için $\|Tx\| < a$;

(iii) x $\in P(\alpha, b, c)$ ve $\|Tx\| > d$ iken $\alpha(Tx) > b$

koşullarını sağlayan $0 < a < b < d \leq c$ sayıları var ise T operatörünün

$$\|x_1\| < a,\ \alpha(x_2) > b,\ \|x_3\| > a \text{ ve } \alpha(x_3) < b$$

eşitsizliklerini sağlayan en az üç pozitif x_1, x_2, x_3 çözümü vardır.

Uygunluk için,

$$\theta = \varphi_q\left(\int_0^\infty \phi(\tau)\nabla\tau\right),$$

$$\lambda = \frac{1}{k+1}\varphi_q\left(\gamma(b,c)\int_{\frac{1}{k}}^{k} \phi(\tau)\nabla\tau\right),$$

$$\iota = \frac{1}{k+1}\varphi_q\left(\int_{\frac{1}{k}}^{k} \phi(\tau)\nabla\tau\right),$$

$$\mu = \sup_{t\in[0,\infty)_{\mathbb{T}}}\frac{1}{1+\mathrm{t}}\left(\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\varphi_q\left(\int_{\eta_i}^{\infty}\phi(\tau)\nabla\tau\right)+\int_0^t\varphi_q\left(\int_s^\infty\phi(\tau)\nabla\tau\right)\Delta s\right)$$

şeklinde tanımlansın.

Teorem 4.1.2 (H1)-(H4) koşullarının sağlandığını kabul edelim. $0 < a < \frac{b}{M} \leq \frac{\lambda}{\mu\omega(c)}d < d \leq c$ ve $\frac{d}{k+1} > b$ olsun ve

(a) $\forall\ (t,u,v) \in [0,\infty)_{\mathbb{T}} \times [0,a] \times [0,a]$ için $f(t,(1+t)u,v) < \varphi_p\left(\frac{a}{M\mu}\right)$,

(b) $\forall\ (t,u,v) \in [0,\infty)_{\mathbb{T}} \times [0,c] \times [0,c]$ için $f(t,(1+t)u,v) \leq \varphi_p\left(\frac{c}{M\mu}\right)$,

(c) $\forall\ (t,u,v) \in \left[\frac{1}{k},k\right]_{\mathbb{T}} \times \left[\frac{b}{Mk},d\right] \times [0,d]$ için $f(t,(1+t)u,v) > \varphi_p\left(\frac{b}{M\iota}\right)$,

(d) $\theta \leq \mu$

koşulları sağlansın. O zaman (3.2.1) sınır değer probleminin

$$\|u_1\| < a, \qquad \alpha(u_2) > \frac{b}{M}, \quad \|u_3\| > a \quad \text{ve} \quad \alpha(u_3) < \frac{b}{M}$$

olacak şekilde en az üç pozitif u_1, u_2 ve u_3 çözümü vardır.

İspat $\alpha\colon P \to [0,\infty)$ negatif olmayan sürekli konkav fonksiyonelini $0 < k < \infty$, $\frac{1}{k} \in \mathbb{T}$ sabit iken

$$\alpha(u) = \frac{k}{k+1} \min_{t\in\left[\frac{1}{k},\infty\right)_{\mathbb{T}}} u(t)$$

şeklinde tanımlayalım. Burada

$$\alpha(u) = \frac{k}{k+1} u\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{u\left(\frac{1}{k}\right)}{1+\frac{1}{k}} \le sup_{t\in[0,\infty)_{\mathbb{T}}} \frac{u(t)}{1+t} = \|u\|_1$$

ve $\|u\| = max\left\{\|u\|_1, \left\|u^{\Delta}\right\|_{\infty}\right\}$ tanımından $\alpha(u) \le \|u\|$ olduğu açıkça görülür.

İlk olarak $T\colon \overline{P_c} \to \overline{P_c}$ olduğunu gösterelim. Önerme 3.2.3 den $T\overline{P_c} \subset P$ dir. Üstelik $\forall\, u \in \overline{P_c}$ için $0 \le u \le c, 0 \le v \le c$ dir. Böylece (b) den $f(t,(1+t)u,v) \le \varphi_p\left(\frac{c}{M\mu}\right)$ dir. Önerme 3.2.2, (b) ve (d) ile

$$\begin{aligned}
\|Tu\| &= \max\left\{\|Tu\|_1, \left\|Tu^{\Delta}\right\|_{\infty}\right\} \\
&\le M\left\|Tu^{\Delta}\right\|_{\infty} = M\varphi_q\left(\int_0^{\infty} \phi(\tau) f\left(\tau, u(\tau), u^{\Delta}(\tau)\right) \nabla\tau\right) \\
&\le M\frac{c}{M\mu}\varphi_q\left(\int_0^{\infty} \phi(\tau)\nabla\tau\right) = \frac{c}{\mu}\theta \le \frac{c}{\mu}\mu = c.
\end{aligned}$$

Yani $\|Tu\| \le c$ dir. Dolayısıyla $T\overline{P_c} \subset \overline{P_c}$ dır. Benzer şekilde, $\forall\, u \in \overline{P_a}$ için $0 \le u \le a, 0 \le v \le a$ dır. Böylece Önerme 3.2.2, (a) ve (d) ile $T\overline{P_a} \subset P_a$ olduğunu gösterebiliriz. O halde $\forall u \in \overline{P_a}$ için $\|Tu\| < a$ dır ve böylece Teorem 4.1.1' in (ii) koşulu sağlanır.

Şimdi,

$$\left\{u \in P\left(\alpha, \frac{b}{M}, d\right) : \alpha(u) > \frac{b}{M}\right\} \neq \emptyset \text{ ve } \forall\, \mathrm{u} \in P\left(\alpha, \frac{b}{M}, d\right) \text{ için } \alpha(Tu) > \frac{b}{M}$$

olduğunu gösterelim. Bu koşulu sağlatmak için

$$u(t) = \frac{b(k+1)+d}{2M} t + \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \frac{b(k+1)+d}{2M}, \qquad t \in [0,\infty)_{\mathbb{T}}$$

seçelim. $u(0) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \frac{b(k+1)+d}{2M} = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i u^{\Delta}(\eta_i)$ ve $u \in P$ olduğu açıktır.

$$\alpha(u)=\frac{k}{k+1}u\left(\frac{1}{k}\right)=\frac{k}{k+1}\left(\frac{b(k+1)+d}{2M}\frac{1}{k}+\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\frac{b(k+1)+d}{2M}\right)$$

$$\geq\frac{k}{k+1}\frac{b(k+1)+d}{2M}\frac{1}{k}=\frac{b}{2M}+\frac{d}{2M(k+1)}>\frac{b}{M},$$

ve

$$\left\|u^{\Delta}\right\|_{\infty}=sup_{t\in[0,\infty)_{\mathbb{T}}}\left|u^{\Delta}(t)\right|=\frac{b(k+1)+d}{2M}<\frac{d}{M},$$

$$\|u\|\leq M\left\|u^{\Delta}\right\|_{\infty}<d.$$

Yani $\|u\|<d$ bulunur. Bu durumda $u\in P\left(\alpha,\frac{b}{M},d\right)$ ve $\alpha(u)>\frac{b}{M}$ dir. Dolayısıyla $\left\{u\in P\left(\alpha,\frac{b}{M},d\right):\alpha(u)>\frac{b}{M}\right\}\neq\emptyset$ olur.

$u\in P\left(\alpha,\frac{b}{M},d\right)$ alalım. $t\in\left[\frac{1}{k},k\right]_{\mathbb{T}}$ için $\frac{b}{Mk}\leq\frac{u(t)}{1+t}\leq d$ ve $\|u\|\leq d$ dir. (c) yi kullanarak,

$$\alpha(Tu)=\frac{k}{k+1}\min_{t\in\left[\frac{1}{k},\infty\right)_{\mathbb{T}}}(Tu)(t)=\frac{k}{k+1}(Tu)\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$=\frac{k}{k+1}\left(\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\varphi_q\left(\int_{\eta_i}^{\infty}\phi(\tau)f\left(\tau,u(\tau),u^{\Delta}(\tau)\right)\nabla\tau\right)\right.$$
$$\left.+\int_{0}^{\frac{1}{k}}\varphi_q\left(\int_{s}^{\infty}\phi(\tau)f\left(\tau,u(\tau),u^{\Delta}(\tau)\right)\nabla\tau\right)\Delta s\right)$$

$$\geq\frac{k}{k+1}\left(\frac{1}{k}\varphi_q\left(\int_{\frac{1}{k}}^{k}\phi(\tau)f\left(\tau,u(\tau),u^{\Delta}(\tau)\right)\nabla\tau\right)\right)$$

$$>\frac{b}{M\imath}\frac{1}{k+1}\varphi_q\left(\int_{\frac{1}{k}}^{k}\phi(\tau)\nabla\tau\right)=\frac{b}{M}.$$

Yani $\alpha(Tu)>\frac{b}{M}$ dir ve Teorem 4.1.1 in (i) koşulu sağlanır.

Son olarak, Teorem 4.1.1 in (iii) koşulunun sağlandığını gösterelim.

$u \in P\left(\alpha, \frac{b}{M}, c\right)$ iken $t \in \left[\frac{1}{k}, k\right]_{\mathbb{T}}$ için $\frac{b}{Mk} \leq \frac{u(t)}{1+t} \leq c$ ve $\|u\| \leq c$ dir ve $\|Tu\| > d$ iken (H4) ve (d) ile,

$$\alpha(Tu) = \frac{k}{k+1} \min_{t \in \left[\frac{1}{k}, \infty\right)_{\mathbb{T}}} (Tu)(t) = \frac{k}{k+1}(Tu)\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$= \frac{k}{k+1}\left(\sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \varphi_q\left(\int_{\eta_i}^{\infty} \phi(\tau) f\big(\tau, u(\tau), u(\tau)\big) \nabla\tau\right)\right.$$

$$\left. + \int_0^{\frac{1}{k}} \varphi_q\left(\int_s^{\infty} \phi(\tau) f\left(\tau, u(\tau), u^{\Delta}(\tau)\right) \nabla\tau\right) \Delta s\right)$$

$$\geq \frac{k}{k+1}\left(\frac{1}{k} \varphi_q\left(\int_{\frac{1}{k}}^{k} \phi(\tau) f\left(\tau, u(\tau), u^{\Delta}(\tau)\right) \nabla\tau\right)\right)$$

$$\geq \frac{1}{k+1} \varphi_q\left(\gamma(b,c) \int_{\frac{1}{k}}^{k} \phi(\tau) \nabla\tau\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{k+1} \varphi_q\left(\gamma(b,c) \int_{\frac{1}{k}}^{k} \phi(\tau) \nabla\tau\right)}{\omega(c) \sup_{t \in [0,\infty)_{\mathbb{T}}} \frac{1}{1+\mathrm{t}}\left(\sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \varphi_q\left(\int_{\eta_i}^{\infty} \phi(\tau) \nabla\tau\right) + \int_0^t \varphi_q\left(\int_s^{\infty} \phi(\tau) \nabla\tau\right) \Delta s\right)} \omega(c)$$

$$\times \sup_{t \in [0,\infty)_{\mathbb{T}}} \frac{1}{1+\mathrm{t}}\left(\sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \varphi_q\left(\int_{\eta_i}^{\infty} \phi(\tau) \nabla\tau\right) + \int_0^t \varphi_q\left(\int_s^{\infty} \phi(\tau) \nabla\tau\right) \Delta s\right)$$

$$\geq \frac{\lambda}{\mu\omega(c)} \sup_{t \in [0,\infty)_{\mathbb{T}}} \frac{1}{1+\mathrm{t}}\left(\sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \varphi_q\left(\int_{\eta_i}^{\infty} \phi(\tau) f\left(\tau, u(\tau), u^{\Delta}(\tau)\right) \nabla\tau\right)\right.$$

$$\left. + \int_0^t \varphi_q\left(\int_s^{\infty} \phi(\tau) f\left(\tau, u(\tau), u^{\Delta}(\tau)\right) \nabla\tau\right) \Delta s\right)$$

$$= \frac{\lambda}{\mu\omega(c)} \|Tu\| > \frac{\lambda}{\mu\omega(c)} d \geq \frac{b}{M}$$

bulunur. Böylece Teorem 4.1.1 in (iii) koşulu sağlanmış olur. Leggett- Williams sabit nokta teoreminin tüm koşulları gerçeklendiğinden (3.2.1) sınır değer probleminin en az üç pozitif çözümü vardır. □

Örnek 4.1.1 (3.2.1) sınır değer probleminde $\mathbb{T} = \left\{\frac{n}{2} : n \in \mathbb{N}_o\right\} \cup [2,\infty)$ zaman skalamız, $p = 3, m = 4, \alpha_1 = \alpha_2 = 1, \eta_1 = \frac{1}{2}, \eta_2 = \frac{3}{2}, M = 2$ olsun.

$\phi(t) = e^{-t}$,

$$f(t,(1+t)u,v) = \begin{cases} \frac{t}{1+t^2}\left(6\times 10^2 u^{16} + \frac{v}{2\times 10^3}\right) & ,u \le 1, 0 \le v, t \in \mathbb{T}, \\ \frac{t}{1+t^2}\left(6\times 10^2 + \frac{v}{2\times 10^3}\right) & ,u > 1, 0 \le v, t \in \mathbb{T}, \end{cases} \tag{4.1.1}$$

iken

$$\begin{cases} \left(|u^\Delta| u^\Delta\right)^\nabla(t) + e^{-t} f\left(t, u(t), u^\Delta(t)\right) = 0, \ t \in (0,\infty)_{\mathbb{T}}, \\ \quad u(0) = u^\Delta\left(\frac{1}{2}\right) + u^\Delta\left(\frac{3}{2}\right), \ \lim_{t\in\mathbb{T}, t\to\infty} u^\Delta(t) = 0 \end{cases} \tag{4.1.2}$$

sınır değer problemini ele alalım ve $a = \frac{1}{2}, b = 4, c = 2\times 10^3, d = 1000, k = 2$ seçelim. Basit hesaplamalar ile $\gamma(b,c) = \gamma(3{,}2\times 10^3) = 240, \theta = 0.895, \lambda = 3.112, \iota = 0.2, \mu = 1.156, \omega(c) = \omega(2\times 10^3) \ge 300.5$ elde edilir.

$$\frac{1000}{3} > 4, 0 < \frac{1}{2} < 2 < 8.953 < 1000 < 2000.$$

Şimdi, Teorem 4.1.2 nin koşullarının sağlanıp sağlanmadığını kontrol edelim.

$(t,u,v) \in [0,\infty)_{\mathbb{T}} \times \left[0,\frac{1}{2}\right] \times \left[0,\frac{1}{2}\right]$ için

$$f(t,(1+t)u,v) \le 0.0047 < \varphi_p\left(\frac{a}{M\mu}\right) = \left(\frac{0.5}{2.312}\right)^2 = 0.0467$$

bulunur. Böylece Teorem 4.1.2 nin (a) şartı gerçeklenmiş olur.

$(t,u,v) \in [0,\infty)_{\mathbb{T}} \times [0{,}2\times 10^3] \times [0{,}2\times 10^3]$ için

$$f(t,(1+t)u,v) \le 300.5 \le \varphi_p\left(\frac{c}{M\mu}\right) = \left(\frac{2\times 10^3}{2.312}\right)^2 = 748314.79$$

elde edilir. Böylece Teorem 4.1.2 nin (b) şartı da gerçeklenmiş olur.

$(t,u,v) \in \left[\frac{1}{2},2\right]_{\mathbb{T}} \times [1{,}1000] \times [0{,}1000]$ için

$$f(t,(1+t)u,v) \geq 240 > \varphi_p\left(\frac{b}{M\iota}\right) = \left(\frac{4}{0.4}\right)^2 = 100$$

olduğundan Teorem 4.1.2 nin (c) şartı gerçeklenmiş olur.

Son olarak, $0.895 < 1.156$ olduğundan Teorem 4.1.2 nin (d) şartı gerçeklenmiş olur. Yani Teorem 4.1.2 nin tüm koşullarını sağlayan $a = \frac{1}{2}, b = 4, c = 2 \times 10^3$ ve $d = 1000$ sayıları vardır öyle ki $0 < a < b \leq \frac{\lambda}{\mu\omega(c)} d < d \leq c, \frac{d}{k+1} > b$ eşitsizliği sağlanır. O halde, (4.1.2) sınır değer probleminin üç pozitif u_1, u_2 ve u_3 çözümü için

$$\|u_1\| < \frac{1}{2},\ \ 2 < \alpha(u_2) = \frac{2}{3}u_2\left(\frac{1}{2}\right),\ \ \|u_3\| > \frac{1}{2},\ \ \alpha(u_3) = \frac{2}{3}u_3\left(\frac{1}{2}\right) < 2$$

eşitsizlikleri sağlanır.

4.2 Beş Fonksiyonelli Sabit Nokta Teoremi ve Uygulanışı

Bu bölümde (3.2.1) sınır değer probleminin en az üç pozitif çözümünün varlığı Leggett-Williams sabit nokta teoreminin bir genelleştirilmişi olan ve Avery (1998), tarafından ispatlanan Beş fonksiyonelli sabit nokta teoremi yardımıyla incelenecektir. Beş fonksiyonelli sabit nokta teoremi ile ilgili bir çok çalışma mevcuttur (Li and Yuan, 2009; Zhang and Sun, 2006; Hamal ve Yörük, 2010; Su and Li, 2008).

γ, β ve θ, P konisi üzerinde negatif olmayan sürekli konveks fonksiyoneller ve α, ψ P konisi üzerinde negatif olmayan sürekli konkav fonksiyoneller olsun. Negatif olmayan l, a, b, d ve c reel sayıları için

$$P(\gamma,c) = \{u \in P : \gamma(u) < c\},$$
$$P(\gamma,\alpha,a,c) = \{u \in P : a \leq \alpha(u), \gamma(u) \leq c\},$$
$$Q(\gamma,\beta,d,c) = \{u \in P : \beta(u) \leq d, \gamma(u) \leq c\},$$
$$P(\gamma,\theta,\alpha,a,b,c) = \{u \in P : a \leq \alpha(u), \theta(u) \leq b, \gamma(u) \leq c\},$$
$$Q(\gamma,\beta,\psi,l,d,c) = \{u \in P : l \leq \psi(u), \beta(u) \leq d, \gamma(u) \leq c\}$$

konveks kümeleri tanımlayalım.

Teorem 4.2.1 (**Beş fonksiyonelli sabit nokta teoremi**, Avery, 1998) $\forall\, u \in \overline{P(\gamma,c)}$ için $\alpha(u) \le \beta(u)$ ve $\|u\| \le r\gamma(u)$ olacak şekilde $c > 0$ ve $r > 0$ sayıları mevcut olsun. Ayrıca $T: \overline{P(\gamma,c)} \to \overline{P(\gamma,c)}$ tamamen sürekli operatör olsun. Eğer

(i) $\{u \in P(\gamma,\theta,\alpha,a,b,c): \alpha(u) > a\} \neq \emptyset$ ve $\forall u \in P(\gamma,\theta,\alpha,a,b,c)$ için $\alpha(Tu) > a$;

(ii) $\{u \in Q(\gamma,\beta,\psi,l,d,c): \beta(u) < d\} \neq \emptyset$ ve $\forall u \in Q(\gamma,\beta,\psi,l,d,c)$ için $\beta(Tu) < d$;

(iii) u $\in P(\gamma,\alpha,a,c)$ ve $\theta(Tu) > b$ iken $\alpha(Tu) > a$;

(iv) u $\in Q(\gamma,\beta,d,c)$ ve $\psi(Tu) < l$ iken $\beta(Tu) < d$

koşullarını sağlayan $0 < d < a$ olacak şekilde a, b, d ve l negatif olmayan reel sayıları var ise T operatörünün

$$\beta(u_1) < d,\ \alpha(u_2) > a,\ \alpha(u_3) < a \text{ iken } d < \beta(u_3)$$

eşitsizliklerini sağlayan en az üç pozitif u_1, u_2, u_3 çözümü vardır.

Uygunluk için, $0 < k < \infty$, $\frac{1}{k} \in \mathbb{T}$ sabit, $l = 0, r = 1$ alalım. P üzerinde α, ψ negatif olmayan, sürekli, konkav fonksiyonellerini ve γ, β, θ negatif olmayan, sürekli, konveks fonksiyonellerini

$$\alpha(u) = \frac{k}{k+1} \min_{t \in \left[\frac{1}{k},\infty\right)_{\mathbb{T}}} u(t),\ \gamma(u) = \beta(u) = \theta(u) = \|u\|,\ \psi(u) = 0 \qquad (4.2.1)$$

ile tanımlayalım. Bu durumda, $u \in P$ için

$$\|u\| \le r\gamma(u)$$

olduğu açıktır.

$$h = \varphi_q\left(\int_{\frac{1}{k}}^{k} \phi(\tau)\nabla\tau\right),\ N = \left[\varphi_q\left(\int_0^{\infty} \phi(\tau)\nabla\tau\right)\right]^{-1} \qquad (4.2.2)$$

alalım.

Teorem 4.2.2 $0 < \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i = \xi < 1$ olsun. (H1), (H2) ve (H3) koşullarının sağlandığını kabul edelim. $0 < d < (k+1)a < c$ olsun ve

(a) $\forall\ (t,u,v) \in \left[\frac{1}{k}, k\right]_{\mathbb{T}} \times \left[\frac{a}{k}, c\right] \times [0,c]$ için $f(t,(1+t)u,v) > \varphi_p\left(\frac{(k+1)a}{h}\right)$,

(b) $\forall\ (t,u,v) \in [0,\infty)_{\mathbb{T}} \times [0,d] \times [0,d]$ için $f(t,(1+t)u,v) < \varphi_p\left(\frac{dN}{M}\right)$,

(c) $\forall\ (t,u,v) \in [0,\infty)_{\mathbb{T}} \times [0,c] \times [0,c]$ için $f(t,(1+t)u,v) \leq \varphi_p\left(\frac{cN}{M}\right)$

koşulları sağlansın. O zaman (3.2.1) sınır değer probleminin

$$\|u_1\| < d, \quad \alpha(u_2) > a, \quad \alpha(u_3) < a \text{ iken } d < \|u_3\|$$

olacak şekilde en az üç pozitif u_1, u_2 ve u_3 çözümü vardır.

İspat Beş fonksiyonelli sabit nokta teoreminin (Teorem 4.2.1) koşullarının sağlandığını göstereceğiz. $\mathbb{B}, P$ ve T sırasıyla (3.2.2), (3.2.3) ve (3.2.5) deki gibi tanımlansın.

$$\alpha(u) = \frac{k}{k+1} u\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{u\left(\frac{1}{k}\right)}{1+\frac{1}{k}} \leq sup_{t\in[0,\infty)_{\mathbb{T}}} \frac{u(t)}{1+t} = \|u\|_1.$$

Ayrıca önerme 3.2.2 den ve M=1 olduğundan $\|u\|_1 \leq \|u^\Delta\|_\infty$dır. Böylece $\alpha(u) \leq \beta(u)$ olduğu görülür. Önerme 3.2.3 den $T: P \to P$ dir. $u \in \overline{P(\gamma, c)}$ olsun. O zaman $\gamma(u) \leq c$ dir, yani $t \in [0,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $0 \leq \frac{u(t)}{1+t} \leq c, 0 \leq u^\Delta(t) \leq c$ dir. Önerme 3.2.2 ve (c) den,

$$\gamma(Tu) = \|Tu\| = \max\left\{\|Tu\|_1, \|Tu^\Delta\|_\infty\right\} \leq M\|Tu^\Delta\|_\infty$$

$$= M\varphi_q\left(\int_0^\infty \phi(\tau) f\left(\tau, u(\tau), u^\Delta(\tau)\right) \nabla\tau\right) \leq M\frac{cN}{M}\varphi_q\left(\int_0^\infty \phi(\tau)\nabla\tau\right) = c$$

elde ederiz. Böylece $T: \overline{P(\gamma,c)} \to \overline{P(\gamma,c)}$ dır. Teorem 4.2.1 in koşullarının $b = c$ iken sağlandığını göstereceğiz.

$t \in [0,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $u(t) = \frac{a(k+1)+c}{2} t + \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \frac{a(k+1)+c}{2}$ alalım. $u(0) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \frac{a(k+1)+c}{2}$ ve $u \in P$ olduğu görülür.

$$\alpha(u) = \frac{k}{k+1} u\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{k}{k+1}\left(\frac{a(k+1)+c}{2}\frac{1}{k} + \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \frac{a(k+1)+c}{2}\right)$$

$$\geq \frac{k}{k+1}\frac{a(k+1)+c}{2k} = \frac{a}{2} + \frac{c}{2(k+1)} > a,$$

$$\|u\| = \|u^{\Delta}\|_{\infty} = \frac{a(k+1)+c}{2} < c,$$

olduğu kolayca görülür. Yani, $\{u \in P(\gamma,\theta,\alpha,a,b,c) : \alpha(u) > a\} \neq \emptyset$.

$u \in P(\gamma,\theta,\alpha,a,b,c)$ için $\alpha(u) \geq a, \theta(u) = \gamma(u) = \|u\| \leq c$ olduğundan, $t \in \left[\frac{1}{k}, k\right]_{\mathbb{T}}$ için $\frac{a}{k} \leq \frac{1}{k+1} u\left(\frac{1}{k}\right) \leq \frac{u(t)}{1+k} \leq \frac{u(t)}{1+t} \leq c,\ 0 \leq u^{\Delta}(t) \leq c$ dir. Böylece, (a) koşulu ile

$$\alpha(Tu) = \frac{k}{k+1} \min_{t\in\left[\frac{1}{k},\infty\right)_{\mathbb{T}}} (Tu)(t) = \frac{k}{k+1}(Tu)\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$= \frac{k}{k+1}\left(\sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \varphi_q\left(\int_{\eta_i}^{\infty} \phi(\tau) f\big(\tau, u(\tau), u(\tau)\big)\nabla\tau\right) + \int_0^{\frac{1}{k}} \varphi_q\left(\int_s^{\infty} \phi(\tau) f\left(\tau, u(\tau), u^{\Delta}(\tau)\right)\nabla\tau\right)\Delta s\right)$$

$$\geq \frac{k}{k+1}\left(\frac{1}{k}\varphi_q\left(\int_{\frac{1}{k}}^{k} \phi(\tau) f\left(\tau, u(\tau), u^{\Delta}(\tau)\right)\nabla\tau\right)\right)$$

$$> \frac{1}{k+1}\frac{(k+1)a}{h}\varphi_q\left(\int_{\frac{1}{k}}^{k} \phi(\tau)\nabla\tau\right) = a. \qquad (4.2.3)$$

Yani, $\alpha(Tu) > a$ dır. Böylece Teorem 4.2.1 in (i) koşulu sağlanır.

$u(t) = \frac{d}{2}t + \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \frac{d}{2}$ alalım. $u(0) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \frac{d}{2}$ ve $u \in P$ olduğu görülür. $0 = \psi(u),\ \|u\| = \frac{d}{2} < d$ olduğunu görmek kolaydır. Böylece,

$$\{u \in Q(\gamma,\beta,\psi,l,d,c) \colon \beta(u) < d\} = \{u \in P \colon \|u\| < d\} \neq \emptyset$$

olduğu elde edilir.

Önerme 3.2.2 ve (b) koşulundan, $u \in Q(\gamma,\beta,\psi,l,d,c)$ için,

$$\beta(Tu) = \|Tu\| = \max\left\{\|Tu\|_1, \left\|Tu^{\Delta}\right\|_{\infty}\right\} \leq M\left\|Tu^{\Delta}\right\|_{\infty} = MTu^{\Delta}(0)$$

$$= M\varphi_q\left(\int_0^{\infty} \phi(\tau) f\left(\tau, u(\tau), u^{\Delta}(\tau)\right) \nabla\tau\right) < M\frac{dN}{M}\varphi_q\left(\int_0^{\infty} \phi(\tau)\nabla\tau\right) = d.$$

Dolayısıyla Teorem 4.2.1 in (ii) koşulu gerçeklenir.

$$P(\gamma,\alpha,a,c) = \left\{u \in P \colon \frac{k}{k+1}\min_{t\in\left[\frac{1}{k},\infty\right)_{\mathbb{T}}} u(t) \geq a, \|u\| \leq c\right\}$$

olduğundan $u \in P(\gamma,\alpha,a,c)$ için (4.2.3) e göre $\alpha(Tu) > a$ elde ederiz. Böylece Teorem 4.2.1 in (iii) koşulu sağlanmış olur.

Son olarak $\psi(Tu) < l = 0$ imkansız olduğundan (iv) koşulunu ihmal ederiz. Böylece Teorem 4.2.1 in tüm koşulları gerçeklenmiş olur, (3.2.1) sınır değer probleminin

$$\|u_1\| < d, \frac{k}{k+1}\min_{t\in\left[\frac{1}{k},\infty\right)_{\mathbb{T}}} u_2(t) > a, d < \|u_3\|, \frac{k}{k+1}\min_{t\in\left[\frac{1}{k},\infty\right)_{\mathbb{T}}} u_3(t) < a$$

olacak şekilde en az üç u_1, u_2ve u_3 pozitif çözümü vardır.

Örnek 4.2.1 (3.2.1) sınır değer probleminde zaman skalamız $\mathbb{T} = [0,5] \cup \{6,7,8,9\} \cup [10,\infty)$, $p = 3, m = 4, r = 1, l = 0, \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{3}, \eta_1 = \frac{1}{3}, \eta_2 = \frac{2}{3}$, $M = 1$ olsun.

$\phi(t) = e^{-t}$

$$f(t,(1+t)u,v) = \begin{cases} \frac{t}{1+t^2}\left(3 \times 10^3 u^6 + \frac{v}{2\times 10^3}\right) & ,u \leq 1, 0 \leq v, t \in \mathbb{T}, \\ \frac{t}{1+t^2}\left(3 \times 10^3 + \frac{v}{2\times 10^3}\right) & ,u > 1, 0 \leq v, t \in \mathbb{T}, \end{cases} \quad (4.2.4)$$

iken

$$\begin{cases} \left(|u^\Delta|u^\Delta\right)^\nabla(t) + e^{-t} f\left(t, u(t), u^\Delta(t)\right) = 0, \ t \in (0,\infty)_{\mathbb{T}}, \\ u(0) = \frac{1}{3} u^\Delta\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} u^\Delta\left(\frac{2}{3}\right), \ \lim_{t\in\mathbb{T}, t\to\infty} u^\Delta(t) = 0 \end{cases} \quad (4.2.5)$$

sınır değer problemini ele alalım ve $a = 5, c = 2 \times 10^3, d = \frac{1}{10}, k = 3$ seçelim. Basit hesaplamalar ile $h = 0.816, N = 1$ elde edilir.

$$0 < \frac{1}{10} < 20 < 2 \times 10^3.$$

Şimdi, Teorem 4.2.2 nin koşullarının sağlanıp sağlanmadığını kontrol edelim.

$(t,u,v) \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]_{\mathbb{T}} \times \left[\frac{5}{3}, 2 \times 10^3\right] \times [0, 2 \times 10^3]$ için

$$f(t,(1+t)u,v) \geq 900 > \varphi_p\left(\frac{(k+1)a}{h}\right) = \left(\frac{20}{0.816}\right)^2 = 600$$

bulunur. Böylece Teorem 4.2.2 nin (a) şartı gerçeklenmiş olur.

$(t,u,v) \in [0,\infty)_{\mathbb{T}} \times \left[0, \frac{1}{10}\right] \times \left[0, \frac{1}{10}\right]$ için

$$f(t,(1+t)u,v) \leq 0.015 < \varphi_p\left(\frac{dN}{M}\right) = \left(\frac{1}{10}\right)^2 = 0.01$$

elde edilir. Böylece Teorem 4.2.2 nin (b) şartı da gerçeklenmiş olur

$(t,u,v) \in [0,\infty)_{\mathbb{T}} \times [0, 2 \times 10^3] \times [0, 2 \times 10^3]$ için

$$f(t,(1+t)u,v) \leq 1500.5 \leq \varphi_p\left(\frac{cN}{M}\right) = (2 \times 10^3)^2 = 4 \times 10^6$$

olduğundan Teorem 4.2.2 nin (c) şartı gerçeklenmiş olur. Böylece Teorem 4.2.2 nin tüm koşulları sağlandı. O halde, (4.2.5) sınır değer probleminin en az üç pozitif u_1, u_2 ve u_3 çözümü vardır ve

$$\|u_1\| < \frac{1}{10}, \ \frac{3}{4} \min_{t\in\left[\frac{1}{3},\infty\right)_{\mathbb{T}}} u_2(t) > 5, \quad \frac{3}{4} \min_{t\in\left[\frac{1}{3},\infty\right)_{\mathbb{T}}} u_3(t) < 5 \text{ iken } \|u_3\| > \frac{1}{10}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

4.3 Leggett-Williams Sabit Nokta Teoreminin Bir Genelleştirilmişi ve Uygulanışı

Bu bölümde (3.2.1) sınır değer probleminin en az üç pozitif çözümünün varlığı Bai ve Ge'nin (2004) sabit nokta indeks teoriyi kullanarak ispatlamış olduğu Leggett-Williams sabit nokta teoreminin bir genelleştirilmişi ile incelenecektir. Ayrıca, bu sabit nokta teoremini Liu ve Sun (2011), zaman skalasında m- nokta sınır değer problemine uygulayarak katlı pozitif çözümlerin varlığını elde etmiştir. Teoremin ifadesine geçmeden önce gerekli ön bilgileri ve tanımlamaları verelim.

α ve β negatif olmayan, sürekli, konveks fonksiyonelleri, $L \geq 1$ pozitif bir sabit iken

$$\|x\| \leq Lmax\{\alpha(x), \beta(x)\}, \quad x \in P, \tag{4.3.1}$$

eşitsizliğini sağlasın ve

$$\Omega = \{x \in P: \alpha(x) < r, \beta(x) < l\} \neq \emptyset, \ r > 0, l > 0, \tag{4.3.2}$$

olsun. $r > a > 0, l > 0$ verilmiş olsun. α, β P üzerinde (4.3.1) ve (4.3.2) bağıntılarını sağlayan negatif olmayan, sürekli, konveks fonksiyoneller ve γ, P üzerinde negatif olmayan, sürekli, konkav fonksiyonel olsun.

$$\begin{aligned} P(\alpha, r; \beta, l) &= \{u \in P: \alpha(u) < r, \beta(u) < l\} \\ \bar{P}(\alpha, r; \beta, l) &= \{u \in P: \alpha(u) \leq r, \beta(u) \leq l\}, \\ P(\alpha, r; \beta, l;\ \gamma, a) &= \{u \in P: \alpha(u) < r, \beta(u) < l, \gamma(u) > a\}, \\ \bar{P}(\alpha, r; \beta, l;\ \gamma, a) &= \{u \in P: \alpha(u) \leq r, \beta(u) \leq l, \gamma(u) \geq a\} \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

konveks kümelerini tanımlayalım.

Teorem 4.3.1 (Bai and Ge, 2004) $\mathbb{B}$ bir Banach uzayı, $P \subset \mathbb{B}$ bir koni ve $r_2 \geq d > b > r_1 > 0,\ l_2 \geq l_1 > 0$ olsun. P üzerinde, (4.3.1) ve (4.3.2) yi sağlayan α ve β negatif olmayan, sürekli, konveks fonksiyonelleri ve $\forall u \in \bar{P}(\alpha, r_2;\ \beta, l_2)$ için $\gamma(u) \leq \alpha(u)$ olacak şekilde γ negatif olmayan, sürekli, konkav fonksiyoneli var olsun. $A: \bar{P}(\alpha, r_2; \beta, l_2) \to \bar{P}(\alpha, r_2; \beta, l_2)$ tamamen sürekli operatör olsun. Eğer,

(a) $\{u \in \bar{P}(\alpha, d; \beta, l_2;\ \gamma, b): \gamma(u) > b\} \neq \emptyset, u \in \bar{P}(\alpha, d; \beta, l_2;\ \gamma, b)$ için $\gamma(Au) > b$;

(b) $\bar{P}(\alpha, r_1; \beta, l_1)$ için $\alpha(Au) < r_1, \beta(Au) < l_1$;

(c) $\alpha(Au) > d$ iken $\bar{P}(\alpha, r_2; \beta, l_2;\ \gamma, b)$ için $\gamma(Au) > b$

koşulları sağlanıyorsa A operatörünün

$$u_1 \in P(\alpha, r_1; \beta, l_1), \qquad u_2 \in \{\bar{P}(\alpha, r_2; \beta, l_2;\ \gamma, b): \gamma(u) > b\},$$

$$u_3 \in \bar{P}(\alpha, r_2; \beta, l_2) \setminus \left(\bar{P}(\alpha, r_2; \beta, l_2;\ \gamma, b) \cup \bar{P}(\alpha, r_1; \beta, l_1)\right)$$

olacak şekilde en az üç $u_1, u_2, u_3 \in \bar{P}(\alpha, r_2; \beta, l_2)$ sabit noktası vardır.

$\mathbb{B}, P$ ve T sırasıyla (3.2.2), (3.2.3) ve (3.2.5) deki gibi tanımlansın. $\frac{1}{k} \in \mathbb{T}$, $k > 1$ sabit olsun. P üzerinde α, β negatif olmayan, sürekli, konveks fonksiyonellerini ve γ negatif olmayan, sürekli, konkav fonksiyonelini

$$\alpha(x) = sup\ _{t \in [0,\infty)_{\mathbb{T}}} \frac{x(t)}{1+t}, \qquad \beta(x) = sup_{t \in [0,\infty)_{\mathbb{T}}} x^{\Delta}(t),$$

$$\gamma(x) = \frac{k}{k+1} \min_{t \in \left[\frac{1}{k}, \infty\right)_{\mathbb{T}}} x(t)$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman $\|x\| = max\{\alpha(x), \beta(x)\}$ olduğu kolayca görülür ve (4.3.1), (4.3.2) sağlanır.

Önerme 4.3.1 $x \in P$ için $\gamma(x) \geq \frac{1}{k+1}\alpha(x) > \frac{1}{2k}\alpha(x)$ dir.

İspat $x \in P$ olduğundan x in $[0,\infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde azalmayan olduğu açıktır. Üstelik $\lim_{t\in\mathbb{T}, t\to\infty} x^{\Delta}(t) = 0$ olduğundan $\frac{x(t)}{1+t}$ fonksiyonu $\sigma \in [0,\infty)_{\mathbb{T}}$ de maksimuma ulaşır. O halde $\alpha(x) = \frac{x(\sigma)}{1+\sigma}$ dır. x in konkavlığından ve $k > 1$ sabit olduğundan,

$$\gamma(x) = \frac{k}{k+1} x\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{k}{k+1} x\left(\frac{k-1+k\sigma}{k+k\sigma}\frac{1}{k-1+k\sigma} + \frac{1}{k+k\sigma}\sigma\right)$$

$$\geq \frac{k}{k+1}\frac{1}{k(1+\sigma)}x(\sigma) = \frac{1}{k+1}\frac{x(\sigma)}{1+\sigma} = \frac{1}{k+1}\alpha(x) > \frac{1}{2k}\alpha(x)$$

Böylece $\gamma(x) > \frac{1}{2k}\alpha(x)$ elde edilir. □

Şimdi, uygunluk için bazı gösterimleri verelim:

$$\mu = \sup_{t\in[0,\infty)_{\mathbb{T}}} \frac{1}{1+\mathrm{t}}\left(\sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \varphi_q\left(\int_{\eta_i}^{\infty} \phi(\tau)\nabla\tau\right) + \int_0^t \varphi_q\left(\int_s^{\infty} \phi(\tau)\nabla\tau\right)\Delta s\right),$$

$$\theta = \varphi_q\left(\int_0^{\infty} \phi(\tau)\nabla\tau\right),$$

$$\lambda = \frac{1}{k+1}\varphi_q\left(\int_{1/k}^{k} \phi(\tau)\nabla\tau\right).$$

Teorem 4.3.2 (H1), (H2) ve (H3) koşulları sağlansın ve $0 < \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i < 1$, $t \in [0,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $f(t,0,0) \neq 0$ olsun. $\frac{b}{k\lambda} \leq min\left\{\frac{l_2}{\theta}, \frac{r_2}{\mu}\right\}$ iken $r_2 \geq 2b > \frac{b}{k} > r_1 > 0, l_2 \geq l_1 > 0, 2b \leq l_2$ pozitif sayıları var ve

(i) $(t,u,v) \in [0,\infty)_{\mathbb{T}} \times [0,r_2] \times [0,l_2]$ için

$$f(t,(1+t)u,v) \leq min\left\{\varphi_p\left(\frac{l_2}{\theta}\right), \varphi_p\left(\frac{r_2}{\mu}\right)\right\},$$

(ii) $(t,u,v) \in \left[\frac{1}{k}, k\right]_{\mathbb{T}} \times \left[\frac{b}{k^2}, 2b\right] \times [0,l_2]$ için $f(t,(1+t)u,v) > \varphi_p\left(\frac{b}{k\lambda}\right)$,

(iii)$(t,u,v) \in [0,\infty)_{\mathbb{T}} \times [0,r_1] \times [0,l_1]$ için

$$f(t,(1+t)u,v) < min\left\{\varphi_p\left(\frac{l_1}{\theta}\right), \varphi_p\left(\frac{r_1}{\mu}\right)\right\}$$

koşulları sağlanıyorsa (3.2.1) sınır değer probleminin

$$sup_{\ t\in[0,\infty)_{\mathbb{T}}} \frac{u_1(t)}{1+t} < r_1,\ sup_{t\in[0,\infty)_{\mathbb{T}}} {u_1}^{\Delta}(t) < l_1,$$

$$\frac{b}{k} < \frac{k}{k+1} \min_{t\in\left[\frac{1}{k},\infty\right)_{\mathbb{T}}} u_2(t) \leq sup_{\ t\in[0,\infty)_{\mathbb{T}}} \frac{u_2(t)}{1+t} \leq r_2,\ sup_{t\in[0,\infty)_{\mathbb{T}}} {u_2}^{\Delta}(t) \leq l_2,$$

$\frac{k}{k+1} \min_{t\in\left[\frac{1}{k},\infty\right)_{\mathbb{T}}} u_3(t) < \frac{b}{k}$ iken $sup_{\ t\in[0,\infty)_{\mathbb{T}}} \frac{u_3(t)}{1+t} < 2b,\ sup_{t\in[0,\infty)_{\mathbb{T}}} {u_3}^{\Delta}(t) \leq l_2$

eşitsizliklerini sağlayan en az üç pozitif u_1, u_2, u_3 çözümü vardır.

İspat Bu teoremi ispatlamak için Teorem 4.3.1 in tüm koşullarının gerçeklendiğini gösterelim. α, β, γ fonksiyonellerinin tanımlanışından (4.3.1) ve (4.3.2) nin sağlandığı açıkça görüldü. Ayrıca $\forall u \in \bar{P}(\alpha, r_2;\ \beta, l_2)$ için

$$\gamma(u) = \frac{k}{k+1} u\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{u(1/k)}{1+1/k} \leq sup_{t\in[0,\infty)_{\mathbb{T}}} \frac{u(t)}{1+t} = \alpha(u),$$

yani $\gamma(u) \leq \alpha(u)$ dur. Önerme 3.2.3 den $T: P \to P$ tamamen sürekli olduğu elimizde var.

Şimdi (i) koşulu sağlandığında $T:\bar{P}(\alpha,r_2;\ \beta,l_2)\to\bar{P}(\alpha,r_2;\ \beta,l_2)$ olduğunu gösterelim. $u\in\bar{P}(\alpha,r_2;\ \beta,l_2)$ için $\alpha(u)=sup\ _{t\in[0,\infty)_{\mathbb{T}}}\frac{u(t)}{1+t}\le r_2,\ \beta(u)=sup_{t\in[0,\infty)_{\mathbb{T}}}u^{\Delta}(t)\le l_2$ dir. Bu durumda (i) den

$$f(t,(1+t)u,v)\le min\left\{\varphi_p\left(\frac{l_2}{\theta}\right),\varphi_p\left(\frac{r_2}{\mu}\right)\right\},\qquad t\in[0,\infty)_{\mathbb{T}}$$

dir. Ayrıca $u\in P$ için $Tu\in P$ olduğundan $[0,\infty)_{\mathbb{T}}$ üzerinde $Tu(t)$ konkav ve $(Tu)^{\Delta}(t)\ge 0$ dır. Böylece,

$$\begin{aligned}\alpha(Tu)&=sup\ _{t\in[0,\infty)_{\mathbb{T}}}\frac{Tu(t)}{1+t}\\&=sup\ _{t\in[0,\infty)_{\mathbb{T}}}\frac{1}{1+t}\left(\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\varphi_q\left(\int_{\eta_i}^{\infty}\phi(\tau)f\left(\tau,u(\tau),u^{\Delta}(\tau)\right)\nabla\tau\right)\right.\\&\qquad\left.+\int_0^t\varphi_q\left(\int_s^{\infty}\phi(\tau)f\left(\tau,u(\tau),u^{\Delta}(\tau)\right)\nabla\tau\right)\Delta s\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\le\frac{r_2}{\mu}\mathrm{sup}_{t\in[0,\infty)_{\mathbb{T}}}\frac{1}{1+\mathrm{t}}\left(\sum_{i=1}^{m-2}\alpha_i\varphi_q\left(\int_{\eta_i}^{\infty}\phi(\tau)\nabla\tau\right)+\int_0^t\varphi_q\left(\int_s^{\infty}\phi(\tau)\nabla\tau\right)\Delta s\right)\\&\le\mathrm{r}_2.\end{aligned}$$

Böylece $\alpha(Tu)\le\mathrm{r}_2$ elde edilir.

$$\beta(Tu)=sup_{t\in[0,\infty)_{\mathbb{T}}}Tu^{\Delta}(t)=(Tu)^{\Delta}(0)$$

$$=\varphi_q\left(\int_0^{\infty}\phi(\tau)f\left(\tau,u(\tau),u^{\Delta}(\tau)\right)\nabla\tau\right)$$

$$\le\frac{l_2}{\theta}\varphi_q\left(\int_0^{\infty}\phi(\tau)\nabla\tau\right)=l_2.$$

Dolayısıyla $T: \bar{P}(\alpha, r_2;\ \beta, l_2) \to \bar{P}(\alpha, r_2;\ \beta, l_2)$ dır.

Benzer şekilde, $u \in \bar{P}(\alpha, r_1;\ \beta, l_1)$ iken (iii) koşulundan

$$f(t,(1+t)u,v) < min\left\{\varphi_p\left(\frac{l_1}{\theta}\right), \varphi_p\left(\frac{r_1}{\mu}\right)\right\}, \qquad t \in [0,\infty)_{\mathbb{T}}$$

dir ve kolaylıkla $T: \bar{P}(\alpha, r_1;\ \beta, l_1) \to P(\alpha, r_1;\ \beta, l_1)$ olduğu görülür. Böylece Teorem 4.3.1 in (b) koşulu gerçeklenir.

Şimdi Teorem 4.3.1 in (a) koşulunun sağlandığını gösterelim. $t \in [0,\infty)_{\mathbb{T}}$ için $\bar{u}(t) = 2bt + \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i 2b$ seçelim. $\bar{u}(0) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i 2b$ ve $u \in P$ olduğu kolayca görülür. Önerme 3.2.3 den $u \in P$ için $\|u\|_1 \le M\|u^\Delta\|_\infty$ olduğunu biliyoruz.

$$\beta(\bar{u}) = sup_{t\in[0,\infty)_{\mathbb{T}}} \bar{u}^\Delta(t) = 2b \le l_2, \qquad \alpha(\bar{u}) \le \|\bar{u}^\Delta\|_\infty = 2b,$$

$$\gamma(\bar{u}) = \frac{k}{k+1} \min_{t\in\left[\frac{1}{k}\infty\right)_{\mathbb{T}}} \bar{u}(t) = \frac{k}{k+1}\bar{u}\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$= \frac{k}{k+1}\left(2b\frac{1}{k} + \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i 2b\right) \ge \frac{2b}{k+1} > \frac{b}{k}.$$

Böylece, $\bar{u} \in \bar{P}\left(\alpha, 2b; \beta, l_2;\ \gamma, \frac{b}{k}\right)$ ve $\gamma(\bar{u}) > \frac{b}{k}$ dır. Yani,

$$\left\{u \in \bar{P}\left(\alpha, 2b; \beta, l_2;\ \gamma, \frac{b}{k}\right) : \gamma(u) > \frac{b}{k}\right\} \ne \emptyset.$$

$u \in \bar{P}\left(\alpha, 2b; \beta, l_2;\ \gamma, \frac{b}{k}\right)$ için $t \in \left[\frac{1}{k}, k\right]_{\mathbb{T}}$ iken $\frac{b}{k^2} \le \frac{u(t)}{1+t} \le 2b$, $0 \le u^\Delta(t) \le l_2$ dir. Böylece (ii) hipotezinden, $f(t,(1+t)u,v) > \varphi_p\left(\frac{b}{k\lambda}\right)$, $t \in \left[\frac{1}{k}, k\right]_{\mathbb{T}}$.

$$\gamma(Tu) = \frac{k}{k+1} Tu\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$= \frac{k}{k+1}\left(\sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i \varphi_q\left(\int_{\eta_i}^{\infty} \phi(\tau) f\left(\tau, u(\tau), u^{\Delta}(\tau)\right) \nabla\tau\right)\right.$$

$$\left. + \int_0^{1/k} \varphi_q\left(\int_s^{\infty} \phi(\tau) f\left(\tau, u(\tau), u^{\Delta}(\tau)\right) \nabla\tau\right) \Delta s\right)$$

$$\geq \frac{k}{k+1} \int_0^{1/k} \varphi_q\left(\int_{1/k}^{k} \phi(\tau) f\left(\tau, u(\tau), u^{\Delta}(\tau)\right) \nabla\tau\right) \Delta s$$

$$> \frac{b}{k\lambda} \frac{1}{k+1} \varphi_q\left(\int_{1/k}^{k} \phi(\tau) \nabla\tau\right) = \frac{b}{k}.$$

Buradan, $u \in \bar{P}\left(\alpha, 2b; \beta, l_2;\ \gamma, \frac{b}{k}\right)$ için $\gamma(Tu) > \frac{b}{k}$ olduğu elde edilir ve Teorem 4.3.1 in (a) koşulu sağlanır.

Son olarak Teorem 4.3.1 in (c) koşulunun sağlandığını gösterelim. $\alpha(Tu) > 2b$ iken $u \in \bar{P}\left(\alpha, r_2; \beta, l_2;\ \gamma, \frac{b}{k}\right)$ için Önerme 4.3.1 ile,

$$\gamma(Tu) > \frac{1}{2k} \alpha(Tu) > \frac{b}{k}.$$

Böylece Teorem 4.3.1 in tüm koşulları sağlanır. Bu durumda (3.2.1) sınır değer probleminin en az üç $u_1, u_2, u_3 \in \bar{P}(\alpha, r_2; \beta, l_2)$ pozitif çözümü vardır ve bu çözümler için

$$u_1 \in P(\alpha, r_1; \beta, l_1), \qquad u_2 \in \left\{\bar{P}\left(\alpha, r_2; \beta, l_2;\ \gamma, \frac{b}{k}\right) : \gamma(u) > \frac{b}{k}\right\},$$

$$u_3 \in \bar{P}(\alpha, r_2; \beta, l_2) \setminus \left(\bar{P}\left(\alpha, r_2; \beta, l_2;\ \gamma, \frac{b}{k}\right) \cup \bar{P}(\alpha, r_1; \beta, l_1) \right)$$

sağlanır. □

Örnek 4.3.1 (3.2.1) sınır değer probleminde zaman skalamız $\mathbb{T} = \left\{\frac{n}{4} : n \in \mathbb{N}_o\right\} \cup [1, \infty)$, $p = 3, m = 4, \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{3}, \eta_1 = \frac{1}{4}, \eta_2 = 2, M = 1$ olsun.

$\phi(t) = e^{-t}$

$$f(t, (1+t)u, v) = \begin{cases} \frac{t}{1+t^2}\left(120u^6 + \left(\frac{v}{100}\right)^2\right) & , u \le 1, 0 \le v, t \in \mathbb{T}, \\ \frac{t}{1+t^2}\left(120 + \left(\frac{v}{100}\right)^2\right) & , u > 1, 0 \le v, t \in \mathbb{T}, \end{cases} \tag{4.3.4}$$

iken

$$\begin{cases} \left(|u^\Delta| u^\Delta\right)^\nabla(t) + e^{-t} f\left(t, u(t), u^\Delta(t)\right) = 0,\ t \in (0, \infty)_{\mathbb{T}}, \\ u(0) = \frac{1}{3} u^\Delta\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3} u^\Delta(2),\ \ \lim_{t \in \mathbb{T}, t \to \infty} u^\Delta(t) = 0 \end{cases} \tag{4.3.5}$$

sınır değer problemini ele alalım ve $r_1 = \frac{1}{3}, r_2 = 10, b = 2, l_1 = 6, l_2 = 8, k = \frac{4}{3}$ seçelim. $r_2 \ge 2b > \frac{b}{k} > r_1 > 0, l_2 \ge l_1 > 0$ ve $2b \le l_2$ dir. Basit hesaplamalar ile $\mu = 0.61025, \lambda = 0.2218, \theta = 0{,}96132$ elde edilir. Ayrıca $\frac{b}{k\lambda} \le min\left\{\frac{l_2}{\theta}, \frac{r_2}{\mu}\right\}$ sağlanır.

Şimdi, Teorem 4.3.2 nin koşullarının sağlandığını gösterelim:

$(t, u, v) \in [0, \infty)_{\mathbb{T}} \times [0,10] \times [0,8]$ için

$$f(t, (1+t)u, v) \le 60.003 \le min\left\{\varphi_p\left(\frac{l_2}{\theta}\right), \varphi_p\left(\frac{r_2}{\mu}\right)\right\} = 69.239$$

bulunur. Böylece Teorem 4.3.2 nin (i) şartı gerçeklenmiş olur.

$(t, u, v) \in \left[\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right]_{\mathbb{T}} \times \left[\frac{9}{8}, 4\right] \times [0,8]$ için

$$f(t, (1+t)u, v) \ge 57.6 > \varphi_p\left(\frac{b}{k\lambda}\right) = 45.736$$

elde edilir. Böylece Teorem 4.3.2 nin (ii) şartı da gerçeklenmiş olur.

$(t, u, v) \in [0, \infty)_{\mathbb{T}} \times \left[0, \frac{1}{3}\right] \times [0,6]$ için

$$f(t, (1+t)u, v) \leq 0.0841 < min\left\{\varphi_p\left(\frac{l_1}{\theta}\right), \varphi_p\left(\frac{r_1}{\mu}\right)\right\} = 0.298$$

olduğundan Teorem 4.3.2 nin (iii) şartı gerçeklenmiş olur. Böylece Teorem 4.3.2 nin tüm koşullarını sağlandığından (4.3.5) sınır değer probleminin en az üç pozitif u_1, u_2 ve u_3 çözümü vardır ve

$$sup_{\ t\in[0,\infty)_{\mathbb{T}}} \frac{u_1(t)}{1+t} < \frac{1}{3},\ sup_{t\in[0,\infty)_{\mathbb{T}}} {u_1}^{\Delta}(t) < 6,$$

$$\frac{3}{2} < \frac{4}{7} \min_{t\in\left[\frac{3}{4},\infty\right)_{\mathbb{T}}} u_2(t) \leq sup_{\ t\in[0,\infty)_{\mathbb{T}}} \frac{u_2(t)}{1+t} \leq 10, \qquad sup_{t\in[0,\infty)_{\mathbb{T}}} {u_2}^{\Delta}(t) \leq 6,$$

$$\frac{4}{7} \min_{t\in\left[\frac{3}{4},\infty\right)_{\mathbb{T}}} u_3(t) < \frac{3}{2} \text{ iken } sup_{\ t\in[0,\infty)_{\mathbb{T}}} \frac{u_3(t)}{1+t} < 4,\ sup_{t\in[0,\infty)_{\mathbb{T}}} {u_3}^{\Delta}(t) \leq 6$$

eşitsizlikleri sağlanır.

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında zaman skalasında sonsuz aralık üzerinde m-nokta p-Laplacian sınır değer problemi ele alınmıştır. Leggett-Williams sabit nokta teoremi ve bu teoremin genelleştirilmişi olan sabit nokta teoremleri (Beş fonksiyonelli sabit nokta teoremi ve Leggett-Williams sabit nokta teoreminin bir genelleştirilmişi) ile koni üzerinde en az üç pozitif çözümün varlığı incelenmiştir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Atıcı, F.M. and Guseinov, G.Sh., 2002, On Green's functions and positive solutions for boundary value problems on time scales, *J. Comput. Appl. Math.,* 141:75-99pp.

Avery, R.I., 1998, A generalization of the Leggett-Williams fixed point theorem, *Math. Sci. Res. Hot-Line*, 2:9-14pp**.**

Bai, Z. and Ge, W., 2004, Existence of three positive solutions for some second-order boundary value problems, *Comput. Math. Appl.,* 48:699-707pp.

Bohner, M. and Peterson, A., 2001, Dynamic Equations on Time Scales, An Introduction with Applications, Birkhäuser, 358p.

Bohner, M. and Peterson, A., 2003, Advances in Dynamic Equations on Time Scales, Birkhäuser, 348p.

Guo, Y., Yu, C. and Wang, J., 2009, Existence of three positive solutions for m-point boundary value problems on infinite intervals, *Nonlinear Anal.,* 71:717-722pp.

Hamal, N.A. and Yoruk, F., 2010, Two and three positive solutions of m-point boundary value problems for functional dynamic equations on time scales, *J. Difference Equ. Appl.,* 16:55-71pp.

Han, W. and Liu, M., 2009, Existence and uniqueness of a nontrivial solution for a class of third-order nonlinear p-Laplacian m-point eigenvalue problems on time scales, *Nonlinear Analysis,* 70:1877-1889pp.

He, Z., 2005, Double positive solutions of three-point boundary value problems for p-Laplacian dynamic equations on time scales, *Journal of Comp. and Appl. Math.,* 182:304-315pp.

He, Z. and Li, L., 2007, Multiple positive solutions for the one-dimensional p-Laplacian dynamic equations on time scales, *Math. and Comp. Modelling,* 45:68-79pp.

Hilger, S., 1990, Analysis on measure chains-a unifed approach to continuous and discrete calculus, *Results Math.,* 18:18-56pp.

Kaymakçalan, B., Lakshmikantham, V. and Sivasundaram, Z., 1996, Dynamic Systems on Measure Chains, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 285p.

Leggett, R.W. and Williams, L.R., 1979, Multiple positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces, *Indiana Univ. Math. J.,* 28:673-688pp.

Li, T. and Yuan, X., 2009, Triple positive solutions of two-point BVPs for p-Laplacian dynamic equations on time scales, *Adv. Dyn. Syst. Appl.,* 4:73-86pp.

Lian, H., Pang, H. and Ge, W., 2007, Triple positive solutions for boundary value problems on infnite intervals, *Nonlinear Anal.,* 67:2199-2207pp.

Liang, S., Zhang, J. and Wang, Z., 2009, The existence of three positive solutions of m-point boundary value problems for some dynamic equations on time scales**,** *Mathematical and Computer Modelling***,** 49:1386-1393pp.

Liu, J. and Sun, H.-R., 2011, Multiple positive solutions for m-point boundary value problem on time scales, *Boundary Value Prob*., Art. ID 591219:0-11pp.

Su, Y.-H. and Li, W.-T., 2008, Triple positive solutions of m-point BVPs for p-Laplacian dynamic equations on time scales, *Nonlinear Anal.,* 69:3811-3820pp.

Zhang, G. and Sun, J., 2006, Multiple positive solutions of singular second-order m-point boundary value problems for second-order m-point boundary value problems, *J. Math. Anal. Appl.,* 317:442-447pp.

Zhao, X. and Ge, W., 2009, Multiple positive solutions for time scale boundary value problems on infnite intervals, *Acta Appl. Math.,* 106:265-273pp.

Zhao, X. and Ge, W., 2010, Unbounded positive solutions for m- point time-scale boundary value problems on infinite intervals, *J. Appl. Math. Comput.,* 33:103-123pp.

.

ÖZGEÇMİŞ:

Fatma TOKMAK, 02.08.1987 yılında Marmaris' te doğdu. İlköğrenimini İçmeler kasabasında ve lise öğrenimini Marmaris Halıcı Ahmet Urkay Anadolu Lisesinde tamamladı. 2005 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde eğitimine başlamıştır. 2008-2009 öğretim yılında Teorik Matematik Ağırlıklı Lisans Öğretim Programından bölüm ikincisi olarak mezun oldu. 2009 yılında Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün Matematik Anabilim Dalı'nın Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans eğitimine başladı.