EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

ÇARPIK DAĞILIMLARDA PARAMETRE TAHMİN YÖNTEMLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

Hülya YILMAZ

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Hakan Savaş SAZAK

İstatistik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu : 406.02.01
Sunuş Tarihi : 16.08.2011

Bornova-İZMİR

2011

Hülya Yılmaz tarafından Yüksek Lisans tezi olarak sunulan "ÇARPIK DAĞILIMLARDA PARAMETRE TAHMİN YÖNTEMLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI" başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 16.08.2011 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:		**İmza**
Jüri Başkanı	**:**	....
Raportör Üye	**:**	....
Üye	**:**	....

ÖZET

ÇARPIK DAĞILIMLARDA PARAMETRE TAHMİN YÖNTEMLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

YILMAZ, Hülya

Yüksek Lisans Tezi, İstatistik Bölümü
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Hakan Savaş SAZAK
Ağustos 2011, 43 sayfa

Bu tez çalışmasında, literatürde çok kullanılan çarpık dağılımlardan biri olan genelleştirilmiş gamma dağılımının (GGD) parametrelerinin tahmini için yeni bir yöntem geliştirilmesi amaçlanmıştır.

En Çok Olabilirlik (ML; Maximum Likelihood) yöntemi, Uyarlanmış En Çok olabilirlik (MML; Modified Maximum Likelihood) yöntemi ve Ki-Kare Uyum İyiliği testi kullanılarak yeni tahmin ediciler elde edilmiştir. Bunun yanında çift döngülü ML yöntemi önerilmiştir. Yöntemlerin etkinliklerini karşılaştırmak amacıyla GGD' nin farklı durumlarına yönelik simülasyonlar yapılmıştır. Simülasyon sonuçları çift döngülü ML yönteminin üstünlüğünü göstermektedir.

Anahtar sözcükler: Genelleştirilmiş gamma dağılımı, parametre tahmini, en çok olabilirlik (ML) yöntemi, uyarlanmış en çok olabilirlik (MML) yöntemi, ki-kare uyum iyiliği testi.

ABSTRACT

COMPARISON OF THE PARAMETER ESTIMATION METHODS AT THE SKEWED DISTRIBUTIONS

YILMAZ, Hülya

MSc in Statistics
Supervisor: Asst. Prof. Dr. Hakan Savaş SAZAK
August 2011, 43 pages

In this thesis, a new estimation method has been proposed to develop for the parameters of generalized gamma distribution (GGD) that is one of the most used skewed distributions in literature.

New estimators were found by using Maximum Likelihood (ML) method, Modified Maximum Likelihood (MML) method and Chi-Square Goodness Of Fit test. Furthermore, double-looped ML method is proposed. In order to compare the efficiencies of the methods, simulations for various cases of GGD is conducted. Simulation results show the superiority of double-looped ML method.

Keywords: Generalized gamma distribution, parameter estimation, maximum likelihood (ML) method, modified maximum likelihood (MML) method, chi-square goodness of fit test.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması süresince değerli görüşlerinden ve bilgisinden yararlandığım Yrd. Doç. Dr. Hakan Savaş Sazak'a katkılarından ötürü teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca, çalışma sürecinde manevi desteğini hiç eksik etmeyen aileme de çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET ... V
ABSTRACT ... VII
TEŞEKKÜR ... IX
ÇİZELGELER DİZİNİ ... XIII

1. GİRİŞ ... 1

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ GAMMA DAĞILIMI ... 2

3. LİTERATÜR ÖZETİ ... 5

4. YÖNTEM ... 7
 4.1. En Çok Olabilirlik (ML; Maximum Likelihood) Yöntemi ... 7
  4.1.1. Gamma dağılımı için ML tahmincilerinin hesaplanması ... 8
  4.1.2. Genelleştirilmiş gamma dağılımı için ML tahmincilerinin hesaplanması ... 10
 4.2. Uyarlanmış En Çok Olabilirlik (MML; Modified Maximum Likelihood) Yöntemi ... 11
  4.2.1. Gamma dağılımı için MML tahmincilerinin hesaplanması ... 12
 4.3. Ki-Kare Uyum İyiliği Testi ... 15
 4.4 Tahmincilerin Elde Edilmesi
  4.4.1. Çift döngülü ML tahmincileri ... 16
  4.4.2. ML tahmincileri ... 16
  4.4.3. MML tahmincileri ... 17
  4.4.4. MM tahmincileri ... 17

5. SİMÜLASYONLAR ... 18

6. SONUÇ ... 40

KAYNAKLAR DİZİNİ ... 41

ÖZGEÇMİŞ ... 43

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge Sayfa

2.1: GGD ‘nin diğer çarpık dağılımlarla ilişkisi 4
5.1: GGD(0.5,0.5,-1) dağılımından, n=100 nn=1000 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması 19
5.2: GGD(0.5, $\sqrt{2}$,2) dağılımından, n=100 nn=1000 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması 20
5.3: GGD(1,0.5,2) dağılımından. n=100 nn=1000 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması 21
5.4: GGD(1,1,1) dağılımından, n=100 nn=1000 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması 22
5.5: GGD(1,3,2) dağılımından, n=100 nn=1000 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması 23
5.6: GGD(3,1,1) dağılımından, n=100 nn=1000 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması 24
5.7: GGD(10,2,1) dağılımından. n=100 nn=1000 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması 25
5.8: GGD(0.5,0.5,-1) dağılımından, n=300 nn=333 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması 26
5.9: GGD(0.5, $\sqrt{2}$,2) dağılımından, n=300 nn=333 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması 27
5.10: GGD(1,0.5,2) dağılımından, n=300 nn=333 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması 28
5.11: GGD(1,1,1) dağılımından, n=300 nn=333 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması 29
5.12: GGD(1,3,2) dağılımından, n=300 nn=333 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması 30
5.13: GGD(3,1,1) dağılımından, n=300 nn=333 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması 31
5.14: GGD(10,2,1) dağılımından. n=300 nn=333 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması 32

ÇİZELGELER DİZİNİ (devamı)

Çizelge Sayfa

5.15: GGD(0.5,0.5,-1) dağılımından, n=1000 nn=100 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması 33
5.16: GGD(0.5, $\sqrt{2}$,2) dağılımından, n=1000 nn=100 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması 34
5.17: GGD(1,0.5,2) dağılımından, n=1000 nn=100 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması.......................35
5.18: GGD(1,1,1) dağılımından, n=1000 nn=100 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması.......................36
5.19: GGD(1,3,2) dağılımından, n=1000 nn=100 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması.......................37
5.20: GGD(3,1,1) dağılımından, n=1000 nn=100 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması.......................38
5.21: GGD(10,2,1) dağılımından, n=1000 nn=100 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması.......................39

1.GİRİŞ

Genelleştirilmiş gamma dağılımı (GGD); normal dağılımdan çok daha sonra tanımlanmıştır ve günümüzde çok bilinen ve kullanılan bir dağılım olmuştur. Üstel, ki-kare, weibull, gamma gibi bilinen dağılımların özel durumlarını kapsadığı için de oldukça kullanışlı ve esnek bir dağılımdır.

Literatürde çok kullanılan bu çarpık dağılım için farklı yöntemler kullanılarak parametre tahmini yapılmıştır. Bu yöntemlerin birbirinden farklı sonuçlar ortaya koyması, bu konunun halen araştırmaya açık olduğunu göstermektedir.

Bu tez çalışmasında; GGD parametrelerinin, en çok olabilirlik ve uyarlanmış en çok olabilirlik yöntemleri kullanılarak daha dayanıklı, etkin ve tutarlı bir şekilde tahmin edilmesi amaçlanmıştır. Kullanılan bu yöntemler birbiriyle karşılaştırılarak çıkan sonuçlar ile yeni bir yöntem önerilmiştir.

Çalışmanın 2. bölümünde genelleştirilmiş gamma dağılımı tanıtılmış, diğer dağılımlar ile ilişkilerinden bahsedilmiştir. Ayrıca dağılımın momentlerine ve çeşitli özelliklerine değinilmiştir. 3. bölümde, literatürdeki bazı çalışmalar hakkında bilgi verilmektedir. Kullanılan yöntemler 4. bölümde açıklanmıştır. Bilgisayar simülasyonları ile elde edilen sonuçlar tablolar halinde 5. bölümde yorumlanmıştır. 6. bölümde ise çalışmaya dair genel bir değerlendirme yapılarak öneride bulunulmuştur.

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ GAMMA DAĞILIMI

Genelleştirilmiş Gamma Dağılımı (GGD), gamma ve weibull dağılımlarının gücünü birleştirmek amacıyla tanımlanmıştır. Aslında İtalyan ekonomist Luigi Amoroso, 1924 yılında ekonomik maliyet dağılımı analizi için tanımladığı fonksiyon ile bu dağılıma bir yaklaşımda bulunmuştur ama GGD ilk olarak 1962 yılında Stacy tarafından tanımlanmıştır (Stacy, 1962).

Günümüzde GGD; ses faaliyet saptamalarında (Almpanidis and Constantine), konuşma sinyallerinin istatistiksel olarak modellenmesinde (Chang et al., 2005), ekonomide (Kleiber and Kotz, 2003), firma yaşam sürelerinin belirlenmesinde (Kanivoski and Peneder, 2008) ve bunlar gibi pek çok alanda kullanılmaktadır.

X bir rasgele değişken olsun. Eğer X rasgele değişkeni a, ℓ ve c parametreli GGD ‘ye uyuyorsa, olasılık fonksiyonu şu şekilde ifade edilir:

$$f(x;\ell,a,c)=\begin{cases}\dfrac{|c|e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^{c}}x^{\ell c-1}}{\Gamma(\ell)a^{\ell c}} & , \quad x>0\\ 0 & , \quad x\le 0\end{cases} \tag{2.1}$$

- $c\in R$ ve ℓ>0 şekil parametreleridir.
- $a>0$ ölçek parametresidir.
- $\Gamma(.)$ gamma fonksiyonunu gösterir.

GGD’nin beklenen değeri;

$$E(X)=\frac{a\Gamma\left(\ell+\frac{1}{c}\right)}{\Gamma(\ell)} \tag{2.2}$$

varyansı ise;

$$V(X)=\frac{a^{2}\Gamma\left(\ell+\frac{2}{c}\right)}{\Gamma(\ell)}-\left(\frac{a\Gamma\left(\ell+\frac{1}{c}\right)}{\Gamma(\ell)}\right)^{2} \tag{2.3}$$

değerine eşittir (Gomes et al., 2008).

GGD'nin üs ve logaritmik momentleri istatistiksel çıkarsamada önemli rol oynar.

X ~ GGD(ℓ ,a.c) olsun.

$$E\left(X^r\right)=\begin{cases} \dfrac{a^r\Gamma\left(\dfrac{r}{c}+\ell\right)}{\Gamma(\ell)} & ; \quad r/c>-1 \\ \infty & ; \quad digerdurumda \end{cases} \tag{2.4}$$

$$E\left(\log\left(X^r\right)\right)=r\log(a)+\frac{r}{c}\Psi(\ell) \tag{2.5}$$

Burada $\Psi(\ell)=\dfrac{d\log(\ell)}{d\ell}$ digamma fonksiyonudur.

GGD oldukça esnek ve kullanışlı bir dağılımdır. Bilinen bazı dağılımları içerisinde barındırmaktadır. Bunlar üstel, gamma, weibull, half-normal, ki kare, Rayleigh, Maxwell Boltzmann ve genelleştirilmiş normal dağılımlarıdır.

Çizelge 2.1: GGD ‘nin diğer çarpık dağılımlarla ilişkisi

Dağılımlar/parametreler	ℓ	c	a	Ortalama	varyans
Üstel	1	1	a	A	a^2
Gamma	ℓ	1	a	ℓ	$\ell\ a^2$
Weibull	1	c	a	$a\Gamma\left(1+\frac{1}{c}\right)$	$a^2\ \Gamma\left(1+\frac{2}{c}\right)-(ort.)^2$
Genelleştirilmiş Normal	ℓ	2	a	$\frac{a\Gamma\left(\ell+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\ell)}$	$a^2\ \ell\text{-}(ort.)^2$
Yarı Normal	0,5	2	$\sqrt{2\sigma^2}$	$\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$	$\sigma^2\left(1-\frac{2}{\pi}\right)$
Rayleigh	1	2	$\sqrt{2\sigma^2}$	$\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$\sigma^2\left(2-\frac{\pi}{2}\right)$
Maxwell Boltzmann	$\frac{3}{2}$	2	a	$\frac{2a}{\sqrt{\pi}}$	$a^2\left(1-\frac{4}{\pi}\right)$
Ki kare (k)	$\frac{k}{2}$	1	2	$\frac{2\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$	$\frac{2^2\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}-ort.^2$

GGD’nin bir başka önemli özelliği de üs dönüşümü yapıldığında, yine GGD ye uyan sonuçlar vermesidir. $X\sim$ GGD(ℓ,a,c) olsun. Bu durumda ;

$$Y = X^s \sim \text{GGD}(\ell,\ a^s,\frac{c}{s})\text{ , s>0 olur.} \tag{2.6}$$

$$Y = X^c \sim \text{Gamma}(\ell, a^c) \tag{2.7}$$

durumu da kullanılmaktadır. Ayrıca;

$$Z = \eta X \sim \text{GGD}(\eta\ell\text{,a,c}) \tag{2.8}$$

özelliği de vardır (Ahmadabi and Khodabin, 2010).

3. LİTERATÜR ÖZETİ

GGD için parametre tahmininin yapılmaya başlandığı ilk zamanlar, dağılımın çıkarsama kurallarını geliştirmede önemli problemler vardı. Temel sorun ise şekil parametresi c'den kaynaklanıyordu. Eğer c biliniyorsa; X^c dönüşümü ile gamma dağılımına uygun yöntemler kullanılıyordu.

Parametre tahminindeki zorlukların en büyüğü; farklı parametre setlerinin benzer dağılımlar gösterdiği durumlardır. Bu nedenle bu tür dağılımları sadece moment yöntemi ile tahmin etmek mümkün değildir (Kleiber and Kotz, 2003).

Huang ve Hwang dağılımın karakterizasyonunu kullanarak moment tahmin yöntemi ile parametre tahmininde bulunmuştur. Bulduğu sonuçları Greenwood ve Durand tarafından geliştirilen ML yöntemi ile kıyaslamıştır (Huang and Hwang, 2006).

En çok olabilirlik (ML) yöntemi ile çok sayıda çalışma yapılmıştır. ML denkleminin üstünde çalışılması zordur ve çözümü basit değildir. Bu yöntem için temelde 2 yaklaşım vardır. İlki; olabilirliği doğrudan en yüksek kılmaktır. Burada en yüksek değer bir parametre kümesi üzerinden belirlenmektedir. Diğer yaklaşım ise skaler, doğrusal olmayan olabilirlik denklemlerinin çözümüdür.

Hager ve Bain (1970), olabilirlik fonksiyonundan elde edilen parametrelere ait denklemlerdeki devamlı sapmaları, Newton-Raphson yöntemini kullanarak belirlemiştir. Örneklem ölçümü, n>400 olduğu durumlar için ML tahmincilerinin iyi olabileceğini öne sürmüşlerdir (Hager and Bain, 1970).

Wingo (1987); kök ayrımı (root isolation) yöntemini kullanmıştır. Wingo'ya göre yakınsama problemleri ve diğer sayısal zorluklar; sıfır bulan algoritmaların hızlı yerel yakınsamalar yapmasından kaynaklanmaktadır. Kök ayrımı yöntemi ile sıfır olan olabilirlik denklemlerinin yeri belirlenebilir ya da hiç var olmadıkları saptanabilir. Wingo; genel, sürekli, skaler, ve doğrusal olmayan denklemlerin kök ayrımı için sayısal bir yöntem geliştirmiştir. Bu yöntem sadece doğrunun pozitif olan bölümünde (c>0) kullanılmaktadır (Wingo, 1987).

Gomes vd. (2008) farklı bir algoritma kurarak parametre tahmininde bulunmuşlardır. Yaptıkları çalışmada bir c aralığı için döngü kurulmuştur. Bu döngü içerisinde;

- Y= X^c dönüşümü ile gamma dağılımına geçiş yapılmıştır. Y rasgele değişkeni gamma(ℓ ,A) teorik dağılımına uyar. A parametresi (2.7) de görüldüğü gibi a^c ’ ye eşittir.

- ℓ ve A parametreleri şu şekilde tahmin edilmiştir:

$$\ell = \frac{E(Y)^2}{V(Y)} \; , \; A = \frac{V(Y)}{E(Y)} \tag{3.1}$$

- Ki kare uyum iyiliği testi ile Y örneklemi ve gamma(ℓ ,A) teorik dağılımı arasındaki ilişki test edilmiş ve p değeri hesaplanmıştır.

Döngü sonunda en yüksek p değeri seçilmiş ve bu p değerine ait ℓ ,c,A değerleri belirlenmiştir. $a = \sqrt[c]{A}$ dönüşümü ile a parametresine geri dönülmüştür. Elde edilen ℓ ,c,a değerleri; GGD’nin parametreleri olarak tahmin edilmiştir. Uygulama safhasında ise örneklem ölçümü n; 10,000 seçilmiştir. Yazılan bilgisayar programı ile simülasyon yapılmamış, bunun yerine 5 farklı örneklem için program ayrı ayrı çalıştırılıp sonuçlar değerlendirilmiştir. (Gomes et al., 2008). Bu tez çalışmasında geliştirilen tahmin yöntemleri, bu çalışmada kullanılan yöntem ile karşılaştırılmıştır.

4. YÖNTEM

4.1. En Çok Olabilirlik (ML; Maximum Likelihood) Yöntemi

En çok olabilirlik (ML) yöntemi 1920'li yıllarda R. A. Fisher tarafından tanımlanmıştır. Bu yöntem en genel ve kabul edilen parametre tahmin yöntemidir.

En çok olabilirlik yönteminin uygulanabilmesi için dağılımın bilinmesi gerekir. Olabilirlik fonksiyonunun hesaplanmasında dağılım fonksiyonu kullanılır. $f(y;\theta_1,\theta_2,....\theta_k)$; y'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu, $\theta_1,\theta_2,....,\theta_k$ de bu fonksiyonun bilinmeyen parametreleri ve $y_1,y_2,......y_n$; $f(y;\theta_1,\theta_2,....\theta_k)$'den seçilen n birimlik rasgele örneklem olsun. Olabilirlik fonksiyonu L ; $y_1,y_2,......y_n$' nin birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonudur ve şu şekilde hesaplanır:

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(y_i,\theta_1,\theta_2,...\theta_k) \tag{4.1}$$

$y_1,y_2,......y_n$ değişkenleri aynı $f(y;\theta_1,\theta_2,....\theta_k)$ dağılımından ve bağımsız olmalarından ötürü aşağıdaki gibi yazılabilirler:

$$g(y_1,y_2,...y_n;\theta_1,\theta_2,...\theta_k) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i;\theta_1,\theta_2,...\theta_n) \tag{4.2}$$

ML yöntemi kullanılarak tahminciler hesaplanmak istendiğinde $g(y_1,y_2,..,y_n;\theta_1,\theta_2,...,\theta_n)$ fonksiyonunu maksimum yapan $\theta_1,\theta_2,....,\theta_k$ değerlerinin hesaplanması gerekir. Bu nedenle aşağıdaki denklemler eş zamanlı çözülerek istenilen sonuçlar elde edilir :

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\theta_1}L(\theta_1,...,\theta_k)=0\\ .\\ .\\ .\\ \frac{d}{d\theta_k}L(\theta_1,...,\theta_k)=0\end{gathered} \tag{4.3}$$

Olabilirlik denklemleri çözümlendikten sonra $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k$ parametreleri elde edilebilir. Matematiksel işlemlerin çözümünde kolaylık sağlanması için $L(\theta_1, ..., \theta_k)$ yerine $\ln L(\theta_1, ..., \theta_k)$ logaritmik dönüşümü yapılabilir. Olabilirlik denklemleri aşağıdaki gibi eş zamanlı çözülerek $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k$ parametreleri elde edilir.

$$\ln L(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_k) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i; \theta_1, \theta_2 ..., \theta_k) \tag{4.4}$$

$$\begin{gathered} \frac{d}{d\theta_1} \ln L(\theta_1, ..., \theta_k) = 0 \\ . \\ . \\ . \\ \frac{d}{d\theta_k} \ln L(\theta_1, ..., \theta_k) = 0 \end{gathered} \tag{4.5}$$

Eğer (4.5) de bulunan denklemler doğrusal ise, tek ve kesin bir çözüm vardır. Ama doğrusal değilse, genellikle kesin bir çözümü olmaz ve iterasyon metotlarıyla çözülmek zorundadır. Bu durumda da çoklu kök olması, iterasyonların yakınsamaması ya da yanlış değere yakınsamasından dolayı sonuç sorunlu olabilir. Eğer veri seti sapan değerler içeriyorsa, olabilirlik denklemlerinin iterasyonları gerçek değere hiç yakınsamayabilir. Hatta elde edilen sonuçlar son derece tutarsız olabilmektedir (Akkaya and Tiku, 2004).

4.1.1. Gamma dağılımı için ML tahmincilerinin hesaplanması

α bir şekil parametresi , β da ölçek parametresi olsun. Bu durumda iki parametreli gamma dağılımı şu şekilde ifade edilir :

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} e^{-\frac{x}{\beta}} x^{\alpha-1} \quad x>0 \ , \ \alpha>0 \ , \ \beta>0 \tag{4.6}$$

Bu dağılımın olabilirlik fonksiyonu ise şu şekilde hesaplanır :

$$L = \prod_{i=1}^{n} f\left(x;\alpha,\beta\right) \tag{4.7}$$

$$L = \frac{1}{\Gamma(\alpha)^{n}\beta^{n\alpha}} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha-1} e^{-\frac{x_i}{\beta}} \tag{4.8}$$

İşlemlerde kolaylık sağlaması için L fonksiyonunun doğal logaritması alınır

$$\ln L = -n\ln\Gamma(\alpha) - n\alpha\ln\beta - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\beta} + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) \tag{4.9}$$

lnL fonksiyonunun sırasıyla α ve β ya göre türevleri alınırsa;

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = -n\Psi(\alpha) - n\ln\beta + \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = -\frac{n\alpha}{\beta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\beta^2} \tag{4.11}$$

elde edilir. Elde edilen bu denklemler sıfıra eşitlenir ise α ve β'nın ML tahmincilerine ilişkin denklemler sırasıyla şu şekilde elde edilir :

$$\ln(\beta) + \psi(\alpha) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) = 0 \tag{4.12}$$

(4.12) nolu denklemde $\Psi(\alpha) = \dfrac{d\ln\Gamma(\alpha)}{d\alpha}$ dir. (4.13)

$$\frac{\overline{x}}{\alpha} - \beta = 0 \tag{4.14}$$

(4.14) nolu eşitlikten $\beta = \dfrac{\overline{x}}{\alpha}$ (4.15)

elde edilir. Bu sonuç (4.12) de yerleştirilerek ortak çözüme gidilir.

$$\ln\alpha - \Psi(\alpha) = \ln\overline{x} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) \tag{4.16}$$

$\Psi(\alpha)$ fonksiyonundan α değeri çekilemediği için, bu değerin hesaplanmasında farklı iterasyon yöntemleri denenmiştir.

Bu tez çalışmasında α ve β; bir döngü kurularak tahmin edilmektir. Belli bir sayı aralığında α 'ya değerler verilek her α değeri için bir β (4.15) deki gibi hesaplandı. Daha sonra bu (α , β) ikilileri olabilirlik fonksiyonu (4.9)'a yerleştirilip bir sonuç bulundu. Döngü boyunca aynı işlem tekrarlandı ve en büyük lnL değerini veren (α , β) ikilisi ML tahmincisi; $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ olarak tahmin edildi.

4.1.2. Genelleştirilmiş gamma dağılımı için ML tahmincilerinin hesaplanması

a ; ölçek, ℓ ve c ise şekil parametresi olsun. Genelleştirilmiş Gamma Dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu :

$$f(x;\ell,a,c)=\frac{|c|e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^{c}}x^{\ell c-1}}{\Gamma(\ell)a^{\ell c}} \quad c\in R\ ,\ \ell>0,a>0 \tag{4.17}$$

Bu fonksiyona ait ML fonksiyonu şu şekilde hesaplanır :

$$L=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\ell,c,a) \tag{4.18}$$

$$L=\frac{|c|^{n}\prod_{i=1}^{n} x_i^{\ell c-1} e^{-\left(\frac{x_i}{a}\right)^{c}}}{\Gamma(\ell)^{n} a^{n\ell c}} \tag{4.19}$$

İşlemlerde kolaylık sağlaması için L fonksiyonunun doğal logaritması alınır.

$$\ln L = n\ln|c| + (\ell c-1)\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{a}\right)^{c} - n\ln(\Gamma(\ell)) - n\ell c\ln(a) \tag{4.20}$$

ℓ , c ve a parametrelerine ait olabilirlik denklemleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \ell} = c\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) - n\psi(\ell) - nc\ln(a) \tag{4.21}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial c} = \frac{n}{c} + \ell \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{a} \right)^c \ln\left(\frac{x_i}{a} \right) - n\ell \ln(a) \tag{4.22}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = \frac{c}{a} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{a} \right)^c - n\ell \right) \tag{4.23}$$

4.2. Uyarlanmış En Çok Olabilirlik (MML; Modified Maximum Likelihood) Yöntemi

ML yöntemi kadar iyi ve onun hesaplamasındaki zorlukları hafifleten yöntemlerden biri ve en tutarlı olanı, Tiku tarafından bulunan Uyarlanmış En Çok Olabilirlik (MML) Yöntemidir. Bu yöntemin çarpıcı bir özelliği, oldukça etkin ve gerçek dağılımdan bağımsız olarak aynı biçime sahip olan tahminciler sunmasıdır.

Parametrelere ait olabilirlik denklemleri hesaplanırken doğrusal olmayan durumlarla karşılaşıldığında, MML yöntemi tercih edilebilir. Doğrusallığı bozan bileşenin yaklaşık doğrusal değeri hesaplanır. Bu hesaplama işleminde Taylor açılımından faydalanılır.

Doğrusal olmayan bileşeni g fonksiyonu ile gösterelim. $t_{(i)} = E(z_{(i)})$; i'nci standardize sıra istatistiği z_i'nin beklenen değerini göstersin. $g(z_i)$, Taylor serisi olarak $t_{(i)}$ etrafında açılır. $g(z)$ fonksiyonu a<z<b gibi çok küçük bir aralıkta neredeyse doğrusal olması ve z_i'nin herhengi bir örneklem ölçümü n için $t_{(i)}$ etrafına yerleşmiş olması sebebiyle, Taylor serisinin ilk iki teriminden doğrusal bir yaklaşım gözlemleriz. Bu aşağıdaki gibi gösterilebir:

$$g(z_{(i)}) \cong g(t_{(i)}) + (z_{(i)} - t_{(i)}) \left\{ \frac{d}{dz} g(z) \right\}_{z=t_{(i)}} \tag{4.24}$$

$$= a_i + b_i z_{(i)} \; , \; (1 \le i \le n) \; , \tag{4.25}$$

$$b_i = \left\{ \frac{d}{dz} g(z) \right\}_{z=t_{(i)}} \quad \text{ve} \quad a_i = g(t_{(i)}) - b_i t_{(i)} \tag{4.26}$$

(4.25) de bulunan doğrusal fonksiyon olabilirlik denkleminde yerleştirilerek sonuca gidilir.

Eğer dağılım simetrik ise, $t_{(i)} = -t_{(n-i+1)}$ ve bunun sonucunda da

$$a_i = -a_{n-i+1} \ , \ \sum_{i=1}^{n} a_i = 0 \ \text{ve} \ b_i = b_{n-i+1} \ \ (1 \le i \le n) \tag{4.27}$$

bulunur.

L; ML yöntemine ait olabilirlik fonksiyonunu, L^* da MML yöntemine ait olabilirlik fonksiyonunu olsun. θ da bu fonksiyonlarda yer alan bir parametre ise; bazı genel ve çok düzenli koşullar altında şu eşitlik elde edilebilir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left\{ \frac{d \ln L^*}{d\theta} - \frac{d \ln L}{d\theta} \right\} = 0$$

n örneklem ölçümü sonsuza yaklaştıkça ML ve MML yöntemleri birbirine yakınsar (Akkaya and Tiku, 2004).

4.2.1. Gamma dağılımı için MML tahmincilerinin hesaplanması

α bir şekil parametresi , β da ölçek parametresi olsun. Bu durumda gamma dağılımı (4.6) daki gibi tanımlansın. Bu dağılımın MML yöntemi ile α 'nın bilindiği durumlarda olabilirlik fonksiyonunu elde edilmek istendiğinde, önce aşağıdaki dönüşüm yapılır:

$$z = \frac{x}{\beta} \Rightarrow x = z\beta \tag{4.27}$$

(4.27) dönüşümü , (4.6) nolu eşitlikte yerleştirilirse

$$f(z;\alpha;\beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} e^{-z} (z\beta)^{\alpha-1} \tag{4.28}$$

$$f(z;\alpha,\beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta} e^{-z} z^{\alpha-1} \tag{4.29}$$

sonucu elde edilir.Bu fonksiyonun MML yöntemine göre olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilir:

$$L = \prod_{i=1}^{n} f\left(z_i ; \alpha, \beta\right) \tag{4.30}$$

$$L = \frac{1}{\Gamma(\alpha)^n \beta^n} \prod_{i=1}^{n} e^{-z_i} z_i^{\alpha-1} \tag{4.31}$$

İşlemlerde kolaylık sağlaması için L fonksiyonunun doğal logaritması alınır:

$$\ln L = -n\ln(\Gamma(\alpha)) - n\ln(\beta) - \sum_{i=1}^{n} z_i + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\ln(z_i) \tag{4.32}$$

α 'nın bilindiği durumlarda β 'nın MML tahmincisini elde etmek için öncelikle lnL ‘nin β 'ya göre kısmi türevi bulunur:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \beta} &= -n\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} z_i + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{-\frac{z_i}{\beta}}{z_i} \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \beta} &= -\frac{n}{\beta} + \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} z_i - \frac{(\alpha-1)}{\beta}\sum_{i=1}^{n} z_i z_i^{-1} \end{aligned} \tag{4.33}$$

z^{-1} fonksiyonu doğrusal olmadığı için $\frac{\partial \ln L}{\partial \beta}$ fonksiyonu sıfıra eşitlenip sonuca ulaşılamaz. Bu nedenle z^{-1}' i doğrusallaştırıcak dönüşümlere ihtiyaç duyulur.

$g(z) = z^{-1}$ olsun. Bu fonksiyonu doğrusal yapıcak dönüşüm için Taylor açılımından faydalanılır. Bunun için (4.24) deki eşitlik kullanılır. $g'(z) = -z^{-2}$ olduğuna göre bu sonuç (4.24) ‘e yerleştirildiğinde aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$g\left(z_{(i)}\right) \cong t_{(i)}^{-1} + \left(z_{(i)} - t_{(i)}\right)\left(-t_{(i)}^{-2}\right) \tag{4.34}$$

$$g\left(z_{(i)}\right) \cong 2t_{(i)}^{-1} - t_{(i)}^{-2} z_{(i)} \tag{4.35}$$

$$g\left(z_{(i)}\right) = a_i - b_i z_{(i)} \Rightarrow a_i = 2t_{(i)}^{-1} \text{ ve } b_i = t_{(i)}^{-2} \tag{4.36}$$

sonuçları elde edilir.

g(z) fonksiyonunun doğrusal yaklaşık değeri bulunduktan sonra olabilirlik fonksiyonuna yerleştirilir ve z yerine tekrardan $\frac{x}{\beta}$ yazılarak $\frac{\partial \ln L^*}{\partial \beta}$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \beta} = -\frac{n}{\beta} + \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{(i)}}{\beta} - \frac{(\alpha-1)}{\beta}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{(i)}}{\beta}\left(a_i - b_i\frac{x_{(i)}}{\beta}\right) \tag{4.37}$$

$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \beta} = 0$ eşitliği ile β'nın MML tahmincisi elde edilir:

$$-\frac{n}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}\sum_{i=1}^{n}x_{(i)} - \frac{(\alpha-1)}{\beta^2}\sum_{i=1}^{n}a_i x_{(i)} + \frac{(\alpha-1)}{\beta^3}\sum_{i=1}^{n}b_i x_{(i)}^2 = 0 \tag{4.38}$$

$$-n\beta^2 + \beta\sum_{i=1}^{n}x_{(i)} - (\alpha-1)\beta\sum_{i=1}^{n}a_i x_{(i)} + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}b_i x_{(i)}^2 = 0 \tag{4.39}$$

$$n\beta^2 + (\alpha-1)\left[\sum_{i=1}^{n}\left(a_i - \frac{1}{\alpha-1}\right)x_{(i)}\right]\beta - (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}b_i x_{(i)}{}^2 = 0 \tag{4.40}$$

$$\Delta_i = a_i - (\alpha-1)^{-1} \text{ olsun .} \tag{4.41}$$

(4.41) eşitliği (4.40)'a yerleştirildiğinde 2. dereceden bir bilinmeyenli bir denklem elde edilir.

$$n\beta^2 + \left[(k-1)\sum_{i=1}^{n}\Delta_i x_{(i)}\right]\beta - (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}b_i x_{(i)}^2 = 0 \tag{4.42}$$

$$\text{A=n} \tag{4.43}$$

$$B = (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\Delta_i x_{(i)} \tag{4.44}$$

$$C = (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}b_i x_{(i)}^2 \tag{4.45}$$

ise (4.42)'nin çözümü $$\hat{\beta} = \frac{-B + \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A} \tag{4.46}$$

ile elde edilir ve β 'nın MML tahmincisi bulunur.

Bu tez çalışmasında $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$; ML yönteminde olduğu gibi bir döngü kurularak tahmin edilmiştir. Belli bir sayı aralığında α 'ya değerler verilek her α değeri (4.41) ve (4.42)'de yerleştirilerek (4.46) sonucunda bir β değeri hesaplandı. Aynı şekilde (α, β) ikilileri olabilirlik fonksiyonu (4.32)'ye yerleştirilip bir sonuç bulundu. Döngü boyunca aynı işlem tekrarlandı ve en büyük lnL değerini veren (α, β) ikilisi MML tahmincisi; $\hat{\alpha}$ ve $\hat{\beta}$ olarak tahmin edildi.

4.3. Ki-Kare Uyum İyiliği Testi

Uyum iyiliği testi (GOFT); $X_1, X_2, ..., X_n$ bağımsız örnekleminin, belli bir F dağılımından gözlemler olup olmadığını araştırmak için kullanılan bir istatistiksel hipotez testidir. Uyum iyiliği testi aşağıdaki gibi bir boş hipotez altında kullanılır.

H_0: X_i'ler F teorik dağılımına ait birbirinden bağımsız rasgele değişkenlerdir.

Bu testler, veri seti ve teorik dağılım arasındaki çelişkili durumlarda hassas değildirler. Bunun yerine, farklılıkları bütünüyle saptayacak sistematik bir yaklaşım olarak bilinirler. Bu yüzden örneklem ölçümü n'in küçük olduğu durumlarda pek iyi değildirler. Diğer yönden, eğer n örneklem ölçümü çok büyükse, bu testler neredeyse her zaman H_0'ı reddedecektir, çünkü H_0 gerçekte hiç bir zaman tam olarak doğru olmayacağından, büyük örneklem ölçümlerinde sıfır hipotezinden en ufak bir sapma saptanacaktır. Bu durum, bu tür testlerin en talihsiz özelliğidir çünkü dağılımın sıfır hipotezinde ifade edilen dağılıma yakın olması bile yeterli bulunmaktadır.

En eski ve en çok kullanılan uyum iyiliği testi ki kare testidir. Ki kare testi, histogram ya da doğru grafiğinin teorik dağılım ile kıyaslanması üzerine kuruludur. Veri analizinde geniş bir kullanım alanına sahiptir, çünkü uygulanması kolaydır ve de kesikli ve sürekli durumların her ikisi için de kullanılabilir (Özmen, 1993).

Teorik dağılımın tüm alanı k aralığa bölünsün. N_j ; j'nci aralıktaki X_i'lerin sayısı ve p_j; X_i'nin j'nci aralığa düşmesinin beklenen oranı ise test istatistiği aşağıdaki gibidir:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(N_j - np_j\right)}{np_j} \tag{4.47}$$

Eğer uyum iyi ise, χ^2 test istatistiğinin küçük olması beklenir. Bu tez çalışmasında test istatistiğinin yanı sıra, bu istatistiğe bağlı olarak p değeri de aşağıdaki gibi hesaplanmıştır ve p değeri göz önünde bulundurularak teorik dağılıma uygunluk araştırılmıştır.

$$p = P(X \geq \chi^2) \tag{4.48}$$

En yüksek p değerinde, en iyi uyumun elde edilebileceği gözlemlenmiştir.

4.4 Tahmincilerin Elde Edilmesi

4.4.1. Çift döngülü ML tahmincileri

ℓ, c şekil parametreleri ile iç içe döngü oluşturuldu. Bu döngü içerisine a ölçek parametresinin (4.23) denkleminden çekilen aşağıdaki değeri yerleştirildi.

$$a = \sqrt[c]{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,c}}{n\ell}} \tag{4.49}$$

Hesaplanan a değeri ve a değerinin hesaplanmasında kullanılan ℓ, c parametreleri (4.20) de yerleştirilerek lnL değeri hesaplandı. Çift döngü sona erdiğinde en büyük lnL değerini veren ℓ, c ve a değerleri , GGD’ nin tahmin edilen parametreleri olarak belirtilmiştir.

4.4.2. ML tahmincileri

Bu tahminciler elde edilirken ML yöntemi ve ki kare uyum iyiliği testi kullanılmıştır. Aşağıdaki aşamalar uygulanarak tahmin ediciler elde edilmiştir:

- Belirli bir c aralığı tanımlandı ve bu aralıkta bir döngü kuruldu.

- Y= X^c dönüşümü ile gamma dağılımına geçiş yapıldı. Bu durumda Y rasgele değişkeni gamma(ℓ ,A) teorik dağılımına uyar.

- ℓ ve A parametreleri 4.1.1. başlığında anlatılan yöntem ile tahmin edildi.

- Ki kare uyum iyiliği testi ile Y örneklemi ve gamma(ℓ,A) teorik dağılımı arasındaki ilişki test edildi ve p değeri hesaplandı.

- Döngü bitiminde en yüksek p değerini veren ℓ, c ve A değerleri belirlendi. $a = \sqrt[c]{A}$ işlemi ile a parametresi bulundu.

- Elde edilen ℓ, c ve a değerleri GGD'nin ML tahmincileri olarak belirlendi.

4.4.3. MML tahmincileri

Bu tahminciler elde edilirken MML yöntemi ve ki kare uyum iyiliği testi kullanılmıştır.Tahmin ediciler şu aşamalar sonrasında elde edilmiştir:

- Belirli bir c aralığı tanımlandı ve bu aralıkta bir döngü kuruldu.

- Y=X^c dönüşümü ile gamma dağılımına geçiş yapıldı. Bu durumda Y rasgele değişkeni gamma(ℓ,A) teorik dağılımına uyar.

- ℓ ve A parametreleri 4.2.1. başlığında anlatılan yöntem ile tahmin edildi.

- Ki kare uyum iyiliği testi ile Y örneklemi ve gamma(ℓ,A) teorik dağılımı arasındaki ilişki test edildi ve p değeri hesaplandı.

- Döngü bitiminde en yüksek p değerini veren ℓ, c ve A değerleri belirlendi. $a = \sqrt[c]{A}$ işlemi ile a parametresi bulundu.

- Elde edilen ℓ, c ve a değerleri GGD'nin MML tahmincileri olarak belirlendi.

4.4.4. MM tahmincileri

Bu tahminciler, literatür özeti başlığında belirtilen Gomes vd. (2008) tarafından oluşturulan tahmincilerdir. Çift döngü ML, ML ve MML tahmincilerinin etkinlikleri araştırılırken, MM tahmincileri baz alınmıştır.

5. SİMÜLASYONLAR

Bu tez çalışmasında çift döngülü ML, ML ve MML tahmincileri çeşitli örneklem ölçümleri ve genelleştirilmiş gamma dağılımının farklı durumları için incelenmiştir. Bu inceleme işlemleri sürecinde MATLAB paket programı kullanılarak simülasyon çalışmaları yapılmıştır. Simülasyonlar oluşturulurken [100,000/n] Monte Carlo simülasyon tekniği kullanılmıştır. Tadikamalla' nın (1979) GGD' den rasgele sayı üretme tekniği ile örneklermler oluşturulmuştur. c parametresi için -20 den 20 ye 0.1 artış miktarı olan bir aralık tanımlanmıştır. Öncelikle parametrelerin ortalama, yanlılık, (n x varyans) ve (n x mse) değerleri birbirleriyle karşılaştırılmıştır. MM tahmincilerine göre diğer tahmincilerin etkinlikleri aşağıdaki gibi araştırılmıştır:

i parametresi için etkinlik denklemi;

$$eff\left(\hat{\theta}_{i,i\lg iiyöntem}\middle|\hat{\theta}_{i,MM}\right)=100\times\left(n\times MSE\left(\hat{\theta}_{i,MM}\right)\right)/\left(n\times MSE\left(\hat{\theta}_{i,i\lg iliyöntem}\right)\right) \quad (5.1)$$

$$\theta_1=\ell\,,\ \theta_2=a\,,\ \theta_3=c \quad (5.2)$$

Son olarak da her yöntem için birleşik (joint) etkinlik aşağıda verildiği şekilde hesaplanmıştır. Birleşik etkinliklere göre sonuçlar değerlendirilmiştir.

$$jeff\left(i\lg iliyöntem\middle|MM\right)=eff\left(\hat{\theta}_{1,i\lg iliyöntem}\middle|\hat{\theta}_{1,MM}\right)+eff\left(\hat{\theta}_{2,i\lg iliyöntem}\middle|\hat{\theta}_{2,MM}\right)+$$

$$eff\left(\hat{\theta}_{3,i\lg iliyöntem}\middle|\hat{\theta}_{3,MM}\right) \quad (5.3)$$

n; örneklem ölçümünü ve nn; simülasyon sayısını göstersin. Gomes vd.'nin (2008) çalışmasında yer alan GGD' nin farklı durumları için aşağıdaki sonuçlar gözlemlenmiştir:

Çizelge 5.1: GGD(0.5,0.5,-1) dağılımından, n=100 nn=1000 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması

parameter / *yöntem*	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
Ortalama ℓ	0.5658	1.0192	0.9861	1.6641
ℓ 'nin yanlılık miktarı	0.0658	0.5192	0.4861	1.1641
n x varyans(ℓ)	12.8123	1002.9134	938.6484	2021.9627
n x MSE(ℓ)	13.2458	1029.8692	962.2806	2157.4860
Ortalama a	0.8772	3.26917×10^{13}	3.40083×10^{13}	1.02594×10^{14}
a'nın yanlılık miktarı	0.3772	3.26917×10^{13}	3.40083×10^{13}	1.02594×10^{14}
n x varyans(a)	327.7123	3.43×10^{31}	3.64×10^{31}	2.05×10^{32}
n x MSE(a)	341.9378	3.44×10^{31}	3.65×10^{31}	2.06×10^{32}
Ortalama c	-1.1650	-1.2404	-1.2373	-1.1601
c'nin yanlılık miktarı	-0.1650	-0.2404	-0.2373	-0.1601
n x varyans(c)	41.2968	63.0398	60.2141	74.3301
n x MSE(c)	44.0193	68.8190	65.8452	76.8933
parametre / *yöntem*	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
ℓ için göreceli etkinlik	16288.09	209.49	224.21	100
a için göreceli etkinlik	6.03×10^{31}	599.31	564.46	100
c için göreceli etkinlik	174.68	111.73	116.78	100
Birleşik etkinlik	6.03×10^{31}	920.53	905.44	300

GGD (0.5,0.5,-1) dağılımı, Levy dağılımı karakterindedir (Gomes et al., 2008). Bu simülasyon sonucuna göre en etkin tahmin yöntem çift döngülü ML dir. Daha sonra bu sırayı ML, MML ve MM yöntemleri takip etmektedir. n örneklem ölçümünün küçük omasından ötürü ML, MML ve MM yöntemleri a ölçek parametresini tahmin ederken, istenen değerden çok uzak sonuçlar sunmaktadırlar.

Çizelge 5.2: GGD(0.5, $\sqrt{2}$,2) dağılımından, n=100 nn=1000 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması

parametre / *yöntem*	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
Ortalama ℓ	0.5643	0.9484	0.8582	2.5717
ℓ ’nin yanlılık miktarı	0.0643	0.4484	0.3582	2.0717
n x varyans(ℓ)	12.0961	611.1034	398.3582	12390.9504
n x MSE(ℓ)	12.5101	631.2097	411.1890	12820.1550
Ortalama a	1.3810	25835.3293	25607.5379	2.79×10^{17}
a’nın yanlılık miktarı	-0.0332	25833.9151	25606.1237	2.79×10^{17}
n x varyans(a)	13.4618	6.67395×10^{13}	6.55678×10^{13}	7.77×10^{39}
n x MSE(a)	13.5719	6.68063×10^{13}	6.56333×10^{13}	7.78×10^{39}
Ortalama c	2.3217	2.3593	2.3581	2.2647
c’nin yanlılık miktarı	0.3217	0.3593	0.3581	0.2647
n x varyans(c)	163.9939	185.9213	181.7652	287.1575
n x MSE(c)	174.3430	198.8309	194.5888	294.1642
parametre / *yöntem*	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
ℓ için göreceli etkinlik	102478.63	2031.05	3117.83	100
a için göreceli etkinlik	5.73×10^{40}	1.16×10^{28}	1.19×10^{28}	100
c için göreceli etkinlik	168.73	147.95	151.17	100
Birleşik etkinlik	5.73×10^{40}	1.16×10^{28}	1.19×10^{28}	300

GGD(0.5, $\sqrt{2}$,2) dağılımı, yarı normal(0,1) dağılımının karakteristiğini taşımaktadır. Bu dağılımın simülasyonunda en etkin tahminci çift döngülü ML dir. Bu yöntemi MML ve ML takip eder. MM yöntemi diğer yöntemler kadar başarılı olamamıştır. Örneklem ölçümü küçük olduğu için MML, ML ve MM yöntemleri a ölçek parametresinin gerçek değerine yakınsayamamaktadır.

Çizelge 5.3: GGD(1,0.5,2) dağılımından. n=100 nn=1000 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması

parametre / *yöntem*	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
Ortalama ℓ	1.2937	2.3562	2.3215	10.2656
ℓ 'nin yanlılık miktarı	0.2937	1.3562	1.3215	9.2656
n x varyans(ℓ)	381.4184	2678.3185	2303.5503	175505.8576
n x MSE(ℓ)	390.0444	2862.2463	2478.1866	184091.0314
Ortalama a	0.4913	135.8075	206.0894	2.09×10^{22}
a'nın yanlılık miktarı	-0.0087	135.3075	205.5894	2.09×10^{22}
n x varyans(a)	2.8845	451976076.8547	895743627.6329	1.68×10^{49}
n x MSE(a)	2.8921	453806888.1926	899970327.2246	1.68×10^{49}
Ortalama c	2.2179	2.3341	2.3406	1.9376
c'nin yanlılık miktarı	0.2179	0.3341	0.3406	-0.0624
n x varyans(c)	79.4744	175.5262	175.5207	201.0016
n x MSE(c)	84.2225	186.6885	187.1215	201.3910
parametre / *yöntem*	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
ℓ için göreceli etkinlik	47197.45	6431.70	7428.46	100
a için göreceli etkinlik	5.82×10^{50}	3.71×10^{42}	1.87×10^{42}	100
c için göreceli etkinlik	239.12	107.88	107.63	100
Birleşik etkinlik	5.82×10^{50}	3.71×10^{42}	1.87×10^{42}	300

GGD(1,0.5,2) dağılımı, Rayleigh(1) dağılımıdır. Örneklem ölçümünün küçük olması sebebiyle, çift döngülü ML dışındaki yöntemler a parametresinin gerçek değerine yakınsayamamaktadır. Sonuçlara bakıldığında yine en etkin tahmin yönteminin çift döngülü ML olduğu görülmektedir. Bu yöntemi sırasıyla ML, MML ve MM takip eder. MM yönteminin etkinliği oldukça düşüktür.

Çizelge 5.4: GGD(1,1,1) dağılımından, n=100 nn=1000 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması

parametre / yöntem	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
Ortalama ℓ	1.2821	2.1001	2.1298	5.3108
ℓ ’nin yanlılık miktarı	0.2821	1.1001	1.1298	4.3108
n x varyans(ℓ)	227.8088	1646.2372	1499.7489	17337.9956
n x MSE(ℓ)	235.7668	1767.2592	1627.3937	19196.2689
Ortalama a	1.0769	4.52233×10^{13}	1493.485735	4.91×10^{16}
a’nın yanlılık miktarı	0.0769	4.52233×10^{13}	1492.485735	4.91×10^{16}
n x varyans(a)	38.3890	2.05×10^{32}	1.51071×10^{11}	1.93×10^{38}
n x MSE(a)	38.9799	2.05×10^{32}	1.51294×10^{11}	1.93×10^{38}
Ortalama c	1.1088	1.1547	1.1572	0.9825
c’nin yanlılık miktarı	0.1088	0.1547	0.1572	-0.0175
n x varyans(c)	20.5648	44.0118	44.6014	49.5559
n x MSE(c)	21.7486	46.4050	47.0726	49.5866
parametre / yöntem	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
ℓ için göreceli etkinlik	8142.06	1086.22	1179.57	100
a için göreceli etkinlik	4.96×10^{38}	94368504.11	1.28×10^{29}	100
c için göreceli etkinlik	228.00	106.86	105.34	100
Birleşik etkinlik	4.96×10^{38}	94369697.19	1.28×10^{29}	300

GGD(1,1,1) dağılımı, üstel(1) dağılımıdır. Bu simülasyonda da en etkin tahmin yöntemi Çift döngülü ML dir. Örneklem ölçümünün küçük olması sebebiyle diğer yöntemler a ölçek parametresi için gerçek değere yakınsayamamışlardır. Çift döngülü ML den sonra en etkin yöntem MML, daha sonra ise ML dir.

Çizelge 5.5: GGD(1,3,2) dağılımından, n=100 nn=1000 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması

parametre / yöntem	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
Ortalama ℓ	1.2937	2.3562	2.3215	10.2656
ℓ 'nin yanlılık miktarı	0.2937	1.3562	1.3215	9.2656
n x varyans(ℓ)	381.4184	2678.3185	2303.5503	175505.8576
n x MSE(ℓ)	390.0444	2862.2463	2478.1866	184091.0314
Ortalama a	2.9478	814.8449	1236.5363	1.26×10^{23}
a'nın yanlılık miktarı	-0.0522	811.8449	1233.5363	1.26×10^{23}
n x varyans(a)	103.8430	16271138767	32246770595	6.04×10^{50}
n x MSE(a)	104.1158	16337047975	32398931780	6.04×10^{50}
Ortalama c	2.2179	2.3341	2.3406	1.9376
c'nin yanlılık miktarı	0.2179	0.3341	0.3406	-0.0624
n x varyans(c)	79.4744	175.5262	175.5207	201.0016
n x MSE(c)	84.2225	186.6885	187.1215	201.3910
parametre / yöntem	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
ℓ için göreceli etkinlik	47197.45	6431.70	7428.46	100
a için göreceli etkinlik	5.82×10^{50}	3.71×10^{42}	1.87×10^{42}	100
c için göreceli etkinlik	239.12	107.88	107.63	100
Birleşik etkinlik	5.82×10^{50}	3.71×10^{42}	1.87×10^{42}	300

GGD(1,3,2) dağılımı, weibull(2,3) dağılımıdır. Sonuçlara göre en etkin tahmin yöntemi Çift döngülü ML dir. Bu simülasyonda da örneklem ölçümünün küçük olması sebebiyle diğer yöntemler a ölçek parametresi için gerçek değere yakınsayamamışlardır. Çift döngülü ML den sonra en etkin yöntem ML, daha sonra ise MML dir. MM yöntemi sadece c parametresi tahmininde tutarlı bir sonuç sunmuştur.

Çizelge 5.6: GGD(3,1,1) dağılımından, n=100 nn=1000 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması

parametre / yöntem	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
Ortalama ℓ	5.9517	8.4058	8.5822	38.4815
ℓ 'nin yanlılık miktarı	2.9517	5.4058	5.5822	35.4815
n x varyans(ℓ)	6509.2009	13390.47311	13923.75207	652034.7431
n x MSE(ℓ)	7380.4542	16312.74047	17039.84775	777928.1374
Ortalama a	3574.1983	4730189.8777	4441640.4910	5.01×10^{23}
a'nın yanlılık miktarı	3573.1983	4730188.8777	4441639.4910	5.01×10^{23}
n x varyans(a)	1.35371×10^{11}	3.29×10^{17}	3.28×10^{17}	3.68×10^{51}
n x MSE(a)	1.36648×10^{11}	3.31×10^{17}	3.30×10^{17}	3.71×10^{51}
Ortalama c	1.0652	1.1314	1.1382	0.8397
c'nin yanlılık miktarı	0.0652	0.1314	0.1382	-0.1603
n x varyans(c)	28.6415	100.2857	105.3594	60.9543
n x MSE(c)	29.0666	102.0123	107.2694	63.5240
parametre / yöntem	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
ℓ için göreceli etkinlik	10540.38	4768.84	4565.35	100
a için göreceli etkinlik	2.71×10^{42}	1.12×10^{36}	1.12×10^{36}	100
c için göreceli etkinlik	218.55	62.27	59.22	100
Birleşik etkinlik	2.71×10^{42}	1.12×10^{36}	1.12×10^{36}	300

GGD(3,1,1) dağılımı, gamma(3,1) dağılımına uymaktadır. Çift döngülü ML en etkin yöntemdir. Tüm yöntemlerde örneklem ölçümünün küçük olması nedeniyle a ölçek parametresi tahmininde sorun yaşanmaktadır. Tüm yöntemler en iyi sonuçlarını c parametresinde sunmaktadır. En etkin yöntem çift döngülü ML' dir. Bunu sırasıyla ML ve MML takip eder. Burada da en düşük etkinlik MM yönteminde gözlemlenmektedir.

Çizelge 5.7: GGD(10,2,1) dağılımından. n=100 nn=1000 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması

parametre / yöntem	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
Ortalama ℓ	16.2216	13.1023	13.6508	104.6818
ℓ 'nin yanlılık miktarı	6.2216	3.1023	3.6508	94.6818
n x varyans(ℓ)	23355.4808	22903.9464	24494.5285	6262572.7148
n x MSE(ℓ)	27226.3115	23866.3729	25827.3625	7159037.1793
Ortalama a	4033.4669	7397.7616	7129.6252	6.50×10^{29}
a'nın yanlılık miktarı	4031.4669	7395.7616	7127.6252	6.50×10^{29}
n x varyans(a)	63048859685	1.99666×10^{11}	1.95195×10^{11}	4.45×10^{63}
n x MSE(a)	64674132208	2.05136×10^{11}	2.00275×10^{11}	4.49×10^{63}
Ortalama c	1.0898	1.1217	1.1060	0.7572
c'nin yanlılık miktarı	0.0898	0.1217	0.1060	-0.2428
n x varyans(c)	87.1087	318.1501	310.4088	154.4132
n x MSE(c)	87.9151	319.6312	311.5324	160.3084
parametre / yöntem	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
ℓ için göreceli etkinlik	26294.55	29996.33	27718.81	100
a için göreceli etkinlik	6.95×10^{54}	2.19×10^{54}	2.24×10^{54}	100
c için göreceli etkinlik	182.34	50.15	51.46	100
Birleşik etkinlik	6.95×10^{54}	2.19×10^{54}	2.24×10^{54}	300

GGD(10,2,1) dağılımı, $\chi^2(20)$ dağılımına uymaktadır. Çift döngülü ML en etkin yöntemdir. Bu simülasyonda da, tüm yöntemlerde örneklem ölçümünün küçük olması nedeniyle a ölçek parametresi tahmininde sorun yaşanmaktadır. Ayrıca ℓ parametresi için de yanlılık miktarları oldukça fazladır. Tüm yöntemler en iyi sonuçlarını c parametresinde sunmaktadır.

Çizelge 5.8: GGD(0.5,0.5,-1) dağılımından, n=300 nn=333 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması

parametre / *yöntem*	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
Ortalama ℓ	0.5189	0.5547	0.5474	0.5452
ℓ'nin yanlılık miktarı	0.0189	0.0547	0.0474	0.0452
n x varyans(ℓ)	7.8351	19.4686	18.2804	20.0108
n x MSE(ℓ)	7.9424	20.3648	18.9558	20.6227
Ortalama a	0.5539	0.6826	0.6685	0.6948
a'nın yanlılık miktarı	0.0539	0.1826	0.1685	0.1948
n x varyans(a)	14.7175	237.3961	216.3023	587.4119
n x MSE(a)	15.5883	247.4004	224.8224	598.7947
Ortalama c	-1.0342	-1.0459	-1.0511	-1.0411
c'nin yanlılık miktarı	-0.0342	-0.0459	-0.0511	-0.0411
n x varyans(c)	13.0208	29.5003	28.8905	18.2949
n x MSE(c)	13.3724	30.1336	29.6723	18.8027
parametre / *yöntem*	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
ℓ için göreceli etkinlik	259.65	101.27	108.79	100
a için göreceli etkinlik	3841.31	242.03	266.34	100
C için göreceli etkinlik	140.61	62.40	63.37	100
Birleşik etkinlik	4241.57	405.70	438.50	300

GGD (0.5,0.5,-1) dağılımı, Levy dağılımı karakterindedir (Gomes et al., 2008). Bu simülasyon sonucuna göre en etkin tahminci çift döngülü ML dir. Daha sonra bu sırayı MML ve ML takip etmektedir. Çift döngülü ML yöntemi 3 parametre açısından tüm yöntemlerden iyidir. En düşük yanlılık ve (n x mse) değeri çift döngülü ML'e aittir.

Çizelge 5.9: GGD(0.5, $\sqrt{2}$,2) dağılımından, n=300 nn=333 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması

parametre / *yöntem*	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
Ortalama ℓ	0.5171	0.5357	0.5420	0.5368
ℓ 'nin yanlılık miktarı	0.0171	0.0357	0.0420	0.0368
n x varyans(ℓ)	6.9329	15.1669	18.8416	17.0088
n x MSE(ℓ)	7.0208	15.5501	19.3719	17.4143
Ortalama a	1.4038	1.3973	1.3938	1.3976
a'nın yanlılık miktarı	-0.0104	-0.0169	-0.0204	-0.0166
n x varyans(a)	12.6233	24.2960	25.7138	21.6963
n x MSE(a)	12.6557	24.3815	25.8384	21.7788
Ortalama c	2.0706	2.1288	2.1258	2.0940
c'nin yanlılık miktarı	0.0706	0.1288	0.1258	0.0940
n x varyans(c)	49.5466	116.7861	118.5885	73.9590
n x MSE(c)	51.0407	121.7651	123.3381	76.6095
parametre / *yöntem*	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
ℓ için göreceli etkinlik	248,04	111.99	89.89	100
a için göreceli etkinlik	172.09	89.33	84.29	100
C için göreceli etkinlik	150.09	62.92	62.11	100
Birleşik etkinlik	570.22	264.23	236.30	300

GGD(0.5, $\sqrt{2}$,2) dağılımı, yarı normal(0,1) dağılımının karakteristiğini taşımaktadır. Bu dağılımın simülasyonunda en etkin tahminci çift döngülü ML dir. En düşük yanlılık ve (n x mse) değeri çift döngülü ML'e aittir. Daha sonra bu sıralamayı MM, ML ve MML yöntemleri takip eder.

Çizelge 5.10: GGD(1,0.5,2) dağılımından, n=300 nn=333 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması

parametre / *yöntem*	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
Ortalama ℓ	1.0345	1.0706	1.0625	1.3737
ℓ 'nin yanlılık miktarı	0.0345	0.0706	0.0625	0.3737
n x varyans(ℓ)	37.0056	91.2213	105.9405	669.0098
n x MSE(ℓ)	37.3634	92.7154	107.1109	710.8947
Ortalama a	0.5028	0.5067	0.5113	0.4673
a'nın yanlılık miktarı	0.0028	0.0067	0.0113	-0.0327
n x varyans(a)	2.8187	5.7233	5.6466	7.4512
n x MSE(a)	2.8210	5.7367	5.6850	7.7718
Ortalama c	2.0820	2.1796	2.1961	2.0015
c'nin yanlılık miktarı	0.0820	0.1796	0.1961	0.0015
n x varyans(c)	49.5650	129.7781	128.1551	100.5806
N x MSE(c)	51.5813	139.4528	139.6912	100.5813
parametre / *yöntem*	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
ℓ için göreceli etkinlik	1902.65	766.75	663.70	100
a için göreceli etkinlik	275.50	135.48	136.71	100
c için göreceli etkinlik	195.00	72.13	72.00	100
Birleşik etkinlik	2373.15	974.35	872.41	300

GGD(1,0.5,2) dağılımı, Rayleigh(1) dağılımıdır. Bu simülasyon sonucuna göre en etkin tahmin yöntemi çift döngülü ML dir. Onu sırasıyla ML, MML ve MM yöntemleri izlemektedir.

Çizelge 5.11: GGD(1,1,1) dağılımından, n=300 nn=333 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması

parametre / *yöntem*	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
Ortalama ℓ	1.0429	1.1066	1.1180	1.3723
ℓ 'nin yanlılık miktarı	0.0429	0.1066	0.1180	0.3723
n x varyans(ℓ)	36.8457	147.1495	171.9144	728.7205
n x MSE(ℓ)	37.3989	150.5590	176.0928	770.2956
Ortalama a	1.0406	1.0948	1.1019	0.9738
a'nın yanlılık miktarı	0.0406	0.0948	0.1019	-0.0262
n x varyans(a)	44.5202	91.7185	91.3204	82.6003
n x MSE(a)	45.0151	94.4130	94.4385	82.8055
Ortalama c	1.0375	1.0856	1.0880	1.0015
c'nin yanlılık miktarı	0.0375	0.0856	0.0880	0.0015
n x varyans(c)	13.1573	33.3712	33.5710	24.3337
n x MSE(c)	13.5801	35.5687	35.8936	24.3343
parametre / *yöntem*	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
ℓ için göreceli etkinlik	2059.6726	511.6237	437.4372	100
a için göreceli etkinlik	183.9503	87.7056	87.6819	100
c için göreceli etkinlik	179.1918	68.4151	67.7957	100
Birleşik etkinlik	2422.8146	667.7444	592.9149	300

GGD(1,1,1) dağılımı, üstel(1) dağılımıdır. Bu dağılıma ait simülasyon çalışmasında en etkin yöntemin çift döngülü ML olduğu gözlemlenmektedir. Çift döngülü ML' in birleşik etkinliğinin büyük olmasının sebebi, ℓ tahminindeki başarısıdır. Daha sonra ise sırayla; ML, MML ve MM yöntemleri en etkin yöntemlerdir.

Çizelge 5.12: GGD(1,3,2) dağılımından, n=300 nn=333 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması

parametre / *yöntem*	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
Ortalama ℓ	1.0345	1.0706	1.0625	1.3737
ℓ 'nin yanlılık miktarı	0.0345	0.0706	0.0625	0.3737
n x varyans(ℓ)	37.0056	91.2213	105.9405	669.0098
n x MSE(ℓ)	37.3634	92.7154	107.1109	710.8947
Ortalama a	3.0165	3.0401	3.0679	2.8038
a'nın yanlılık miktarı	0.0165	0.0401	0.0679	-0.1962
n x varyans(a)	101.4741	206.0371	203.2779	268.2437
n x MSE(a)	101.5562	206.5206	204.6599	279.7861
Ortalama c	2.0820	2.1796	2.1961	2.0015
c'nin yanlılık miktarı	0.0820	0.1796	0.1961	0.0015
n x varyans(c)	49.5650	129.7781	128.1551	100.5806
N x MSE(c)	51.5813	139.4528	139.6912	100.5813
parametre / *yöntem*	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
ℓ için göreceli etkinlik	1902.65	766.75	663.70	100
a için göreceli etkinlik	275.50	135.48	136.71	100
c için göreceli etkinlik	195.00	72.13	72.00	100
Birleşik etkinlik	2373.15	974.35	872.41	300

GGD(1,3,2) dağılımı, weibull(2,3) dağılımını göstermektedir. Bu simülasyon sonucunda büyük bir farkla çift döngülü ML en etkin yöntemdir. Bu yöntemi ML, MML ve MM yöntemleri takip etmektedir.

Çizelge 5.13: GGD(3,1,1) dağılımından, n=300 nn=333 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması

parametre / *yöntem*	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
Ortalama ℓ	3.5447	4.5348	4.4321	10.4588
ℓ ’nin yanlılık miktarı	0.5447	1.5348	1.4321	7.4588
n x varyans(ℓ)	1567.3765	8927.2373	7811.8249	301835.6803
n x MSE(ℓ)	1656.4005	9633.9527	8427.1256	318525.7137
Ortalama a	1.1297	964.1384	1.3732	1.0742
a’nın yanlılık miktarı	0.1297	963.1384	0.3732	0.0742
n x varyans(a)	156.1249	92606401443.8247	364.8864	317.6045
n x MSE(a)	161.1681	92884692135.4796	406.6599	319.2552
Ortalama c	1.0303	1.0817	1.1024	0.9577
c’nin yanlılık miktarı	0.0303	0.0817	0.1024	-0.0423
n x varyans(c)	21.4732	53.0045	59.4200	55.9997
n x MSE(c)	21.7492	55.0060	62.5658	56.5375
parametre / *yöntem*	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
ℓ için göreceli etkinlik	19229.99	3306.28	3779.77	100
a için göreceli etkinlik	198.09	3.44×10^{-7}	78.51	100
c için göreceli etkinlik	259.95	102.78	90.36	100
Birleşik etkinlik	19688.03	3409.07	3948.64	300

GGD(3,1,1) dağılımı. gamma(3,1) dağılımına uymaktadır. Çok büyük bir farkla çift döngülü ML en etkin yöntemdir. Bu durum özellikle ℓ parametresine en iyi yaklaşımda bulunmasından kaynaklanmaktadır. Daha sonra bu sıralama MML, ML ve MM olarak devam eder.

Çizelge 5.14: GGD(10,2,1) dağılımından. n=300 nn=333 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması

parametre / *yöntem*	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
Ortalama ℓ	13.5661	13.7141	13.961	103.1333
ℓ 'nin yanlılık miktarı	3.5661	3.7141	3.9661	93.1333
n x varyans(ℓ)	39606.3674	51923.5334	52632.9818	17833037.2477
n x MSE(ℓ)	43421.4155	56061.9265	57351.8858	20435178.4848
Ortalama a	277.7241	1786.4309	2133.7092	3.51×10^{29}
a'nın yanlılık miktarı	275.7241	1784.4309	2131.7092	3.51×10^{29}
n x varyans(a)	2487686957.2095	1.04093×10^{11}	1.00535×10^{11}	1.82×10^{63}
n x MSE(a)	2510494097.5192	1.05048×10^{11}	1.01899×10^{11}	1.85×10^{63}
Ortalama c	1.0790	1.1847	1.1580	0.9351
c'nin yanlılık miktarı	0.0790	0.1847	0.1580	-0.0649
n x varyans(c)	58.9453	210.7517	207.0645	160.2279
n x MSE(c)	60.8167	220.9842	214.5497	161.4902
parametre / *yöntem*	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
ℓ için göreceli etkinlik	47062.44	36451.08	35631.22	100
a için göreceli etkinlik	7.38×10^{55}	1.76×10^{54}	1.82×10^{54}	100
c için göreceli etkinlik	265.54	73.08	75.27	100
Birleşik etkinlik	7.38×10^{55}	1.76×10^{54}	1.82×10^{54}	300

GGD(10,2,1) dağılımı, $\chi^2(20)$ dağılımını göstermektedir. Örneklem ölçümünün küçük ve ℓ değerinin diğer simülasyonlardaki değerlerle de kıyaslandığında oldukça büyük olmasından ötürü a ölçek parametresi değerleri olduğundan büyük bulunmuştur. Bu koşulda dahi yine en etkin yöntem çift döngülü ML dir.

Çizelge 5.15: GGD(0.5,0.5,-1) dağılımından, n=1000 nn=100 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması

parametre / *yöntem*	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
Ortalama ℓ	0.5080	0.5110	0.5110	0.4929
ℓ 'nin yanlılık miktarı	0.0080	0.0110	0.0110	-0.0071
n x varyans(ℓ)	7.2081	17.5545	17.5545	10.8055
n x MSE(ℓ)	7.2721	17.6755	17.6755	10.8558
Ortalama a	0.5169	0.5304	0.5304	0.5035
a'nın yanlılık miktarı	0.0169	0.0304	0.0304	0.0035
n x varyans(a)	10.1211	23.3593	23.3593	12.6782
n x MSE(a)	10.4080	24.2817	24.2817	12.6907
Ortalama c	-1.0080	-1.0410	-1.0410	-1.0310
c'nin yanlılık miktarı	-0.0080	-0.0410	-0.0410	-0.0310
n x varyans(c)	12.4606	42.2414	42.2414	17.5141
n x MSE(c)	12.5246	43.9224	43.9224	18.4751
parametre / *yöntem*	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
ℓ için göreceli etkinlik	149.28	61.42	61.42	100
a için göreceli etkinlik	121.93	52.26	52.26	100
c için göreceli etkinlik	147.51	42.06	42.06	100
Birleşik etkinlik	418.72	155.74	155.74	300

GGD (0.5,0.5,-1) dağılımı, Levy dağılımı karakterindedir (Gomes et al., 2008). Bu simülasyon sonucuna göre en etkin tahmin yöntemi çift döngülü ML dir. Daha sonra bu sırayı MM ve aynı sonuçlara sahip ML ve MM yöntemleri takip etmektedir. n örneklem ölçümünün büyük olduğu durumlarda ML ve MML yönteminin yakınsamasından ötürü bu simülasyonda iki yöntemin sonuçları birbiriyle aynı çıkmaktadır.

Çizelge 5.16: GGD(0.5, $\sqrt{2}$,2) dağılımından, n=1000 nn=100 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması

parametre / *yöntem*	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
Ortalama ℓ	0.5050	0.5030	0.5030	0.4975
ℓ 'nin yanlılık miktarı	0.0050	0.0030	0.0030	-0.0025
n x varyans(ℓ)	5.9343	11.6071	11.6071	10.8026
n x MSE(ℓ)	5.9593	11.6161	11.6161	10.8089
Ortalama a	1.4114	1.4191	1.4191	1.4271
a'nın yanlılık miktarı	-0.0029	0.0049	0.0049	0.0129
n x varyans(a)	13.4080	26.6233	26.6233	22.6775
n x MSE(a)	13.4161	26.6476	26.6476	22.8445
Ortalama c	2.0190	2.0610	2.0610	2.0520
c'nin yanlılık miktarı	0.0190	0.0610	0.0610	0.0520
n x varyans(c)	46.8071	112.7061	112.7061	69.3899
n x MSE(c)	47.1681	116.4271	116.4271	72.0939
parametre / *yöntem*	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
ℓ için göreceli etkinlik	181.38	93.05	93.05	100
a için göreceli etkinlik	170.28	85.73	85.73	100
c için göreceli etkinlik	152.84	61.92	61.92	100
Birleşik etkinlik	504.50	240.70	240.70	300

GGD(0.5, $\sqrt{2}$,2) dağılımı, yarı normal(0,1) dağılımının karakteristiğini taşımaktadır. Bu dağılımın simülasyonunda en etkin tahminci çift döngülü ML dir. Daha sonra bu yöntemi MM takip eder. Örneklem ölçümünün büyük olması sebebiyle ML ve MML yöntemleri birbirlerine yakınsayarak aynı sonuçları vermiştir.

Çizelge 5.17: GGD(1,0.5,2) dağılımından, n=1000 nn=100 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması

parametre / *yöntem*	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
Ortalama ℓ	0.9900	1.0360	1.0610	1.0468
ℓ 'nin yanlılık miktarı	-0.0100	0.0360	0.0610	0.0468
n x varyans(ℓ)	22.1212	95.2566	93.9182	101.9441
n x MSE(ℓ)	22.2212	96.5526	97.6392	104.1302
Ortalama a	0.5065	0.4997	0.4917	0.4979
a'nın yanlılık miktarı	0.0065	-0.0003	-0.0083	-0.0021
n x varyans(a)	2.2515	8.1389	7.9468	7.7462
n x MSE(a)	2.2939	8.1390	8.0155	7.7507
Ortalama c	2.0390	2.0530	2.0190	2.0290
c'nin yanlılık miktarı	0.0390	0.0530	0.0190	0.0290
n x varyans(c)	40.1808	143.3242	139.5343	101.6758
n x MSE(c)	41.7018	146.1332	139.8953	102.5168
parametre / *yöntem*	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
ℓ için göreceli etkinlik	468.61	107.85	106.65	100
a için göreceli etkinlik	337.88	95.23	96.70	100
c için göreceli etkinlik	245.83	70.15	73.28	100
Birleşik etkinlik	1052.32	273.23	276.63	300

GGD(1,0.5,2) dağılımı, Rayleigh(1) dağılımıdır. Bu simülasyon sonucuna göre en etkin tahmin yöntemi çift döngülü ML dir. Çift döngülü ML tahmincilerinin etkinlikleri, diğer tahmincilere göre çok daha iyidir. Onu sırasıyla MM, MML ve ML yöntemleri izlemektedir.

Çizelge 5.18: GGD(1,1,1) dağılımından, n=1000 nn=100 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması

parametre / *yöntem*	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
Ortalama ℓ	1.0090	1.0300	1.0570	1.0480
ℓ 'nin yanlılık miktarı	0.0090	0.0300	0.0570	0.0480
n x varyans(ℓ)	24.2616	116.6667	110.1525	84.5018
n x MSE(ℓ)	24.3426	117.5667	113.4015	86.8032
Ortalama a	1.0124	1.0498	1.0135	1.0106
a'nın yanlılık miktarı	0.0124	0.0498	0.0135	0.0106
n x varyans(a)	39.6287	137.1637	134.0470	104.9518
n x MSE(a)	39.7831	139.6483	134.2281	105.0650
Ortalama c	1.0110	1.0400	1.0190	1.0100
c'nin yanlılık miktarı	0.0110	0.0400	0.0190	0.0100
n x varyans(c)	12.1000	42.2222	40.5444	22.9293
n x MSE(c)	12.2210	43.8222	40.9054	23.0293
parametre / *yöntem*	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
ℓ için göreceli etkinlik	356.59	73.83	76.54	100
a için göreceli etkinlik	264.09	75.24	78.27	100
c için göreceli etkinlik	188.44	52.55	56.30	100
Birleşik etkinlik	809.12	201.62	211.12	300

GGD(1,1,1) dağılımı, üstel(1) dağılımıdır. Bu dağılıma ait simülasyon çalışmasında en etkin yöntem çift döngülü ML' dir. Bu yöntemi sırası ile MM, MML ve ML takip etmektedir. Çift döngülü ML tahmincilerinin etkinlikleri diğer tahmincilere göre çok daha iyidir.

Çizelge 5.19: GGD(1,3,2) dağılımından, n=1000 nn=100 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması

parametre / *yöntem*	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
Ortalama ℓ	0.9900	1.0360	1.0610	1.0468
ℓ 'nin yanlılık miktarı	-0.0100	0.0360	0.0610	0.0468
n x varyans(ℓ)	22.1212	95.2566	93.9182	101.9441
n x MSE(ℓ)	22.2212	96.5526	97.6392	104.1302
Ortalama a	3.0391	2.9979	2.9502	2.9872
a'nın yanlılık miktarı	0.0391	-0.0021	-0.0498	-0.0128
n x varyans(a)	81.0550	292.9988	286.0830	278.8620
n x MSE(a)	82.5806	293.0032	288.5588	279.0260
Ortalama c	2.0390	2.0530	2.0190	2.0290
c'nin yanlılık miktarı	0.0390	0.0530	0.0190	0.0290
n x varyans(c)	40.1808	143.3242	139.5343	101.6758
n x MSE(c)	41.7018	146.1332	139.8953	102.5168
parametre / *yöntem*	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
ℓ için göreceli etkinlik	468.61	107.85	106.65	100
a için göreceli etkinlik	337.88	95.23	96.70	100
c için göreceli etkinlik	245.83	70.15	73.28	100
Birleşik etkinlik	1052.32	273.23	276.63	300

GGD(1,3,2) dağılımı, weibull(2,3) dağılımını göstermektedir. Bu simülasyon sonucunda da, büyük bir farkla çift döngülü ML en etkin yöntemdir. Bu yöntemi MM, MML ve ML yöntemleri takip etmektedir. Çift döngülü ML tahmincilerinin etkinliği oldukça iyidir.

Çizelge 5.20: GGD(3,1,1) dağılımından, n=1000 nn=100 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması

parametre / *yöntem*	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
Ortalama ℓ	3.0470	3.4130	3.7420	3.5533
ℓ 'nin yanlılık miktarı	0.0470	0.4130	0.7420	0.5533
n x varyans(ℓ)	683.3242	6629.0212	10588.1172	3612.5867
n x MSE(ℓ)	685.5332	6799.5902	11138.6812	3918.6948
Ortalama a	1.0800	1.2266	1.0898	1.0404
a'nın yanlılık miktarı	0.0800	0.2266	0.0898	0.0404
n x varyans(a)	167.3250	564.0257	619.1293	378.9236
n x MSE(a)	173.7277	615.3585	627.1905	380.5548
Ortalama c	1.0220	1.0600	1.0170	0.9960
c'nin yanlılık miktarı	0.0220	0.0600	0.0170	-0.0040
n x varyans(c)	19.7131	76.9697	90.7182	47.2566
n x MSE(c)	20.1971	80.5697	91.0072	47.2726
parametre / *yöntem*	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
ℓ için göreceli etkinlik	571.63	57.63	35.18	100
a için göreceli etkinlik	219.05	61.84	60.68	100
c için göreceli etkinlik	234.06	58.67	51.94	100
Birleşik etkinlik	1024.74	178.15	147.80	300

GGD(3,1,1) dağılımı, gamma(3,1) dağılımına uymaktadır. Çok büyük bir farkla çift döngülü ML en etkin yöntemdir. Bu durum özellikle ℓ parametresine en iyi yaklaşımda bulunmasından kaynaklanmaktadır. Daha sonra bu sıralama MM, ML ve MML olarak devam etmektedir.

Çizelge 5.21: GGD(10,2,1) dağılımından, n=1000 nn=100 olduğu simülasyon sonuçları ve tahmincilerin etkinliklerinin karşılaştırılması

parametre / *yöntem*	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
Ortalama ℓ	10.5480	10.3930	10.1920	25.7075
ℓ 'nin yanlılık miktarı	0.5480	0.3930	0.1920	15.7075
n x varyans(ℓ)	29088.3798	76558.4354	74039.7333	8151411.0088
n x MSE(ℓ)	29388.6838	76712.8844	74076.5973	8398135.6143
Ortalama a	2.7680	4.4701	4.7280	3.3717
a'nın yanlılık miktarı	0.7680	2.4701	2.7280	1.3717
n x varyans(a)	3885.8261	14112.0323	16367.4230	10695.2991
n x MSE(a)	4475.5742	20213.5131	23809.1980	12576.8944
Ortalama c	1.0490	1.1920	1.2180	1.0480
c'nin yanlılık miktarı	0.0490	0.1920	0.2180	0.0480
n x varyans(c)	51.2111	159.1273	185.5313	159.6929
n x MSE (c)	53.6121	195.9913	233.0553	161.9969
parametre / *yöntem*	Çift döngülü ML	ML	MML	MM
ℓ için göreceli etkinlik	28576.09	10947.49	11337.10	100
a için göreceli etkinlik	281.01	62.22	52.82	100
c için göreceli etkinlik	302.16	82.66	69.51	100
Birleşik etkinlik	29159.26	11092.37	11459.43	300

GGD(10,2,1) dağılımı, $\chi^2(20)$ dağılımını göstermektedir. Örneklem ölçümünün büyük olması ile çizelge 5.14 de gözlenen durum ortadan kaybolmuştur. Bu sebeple, ℓ 'nin büyük olması yöntemlerin çalışmasını olumsuz yönde etkileyememektedir. Burda da çift döngülü ML oldukça etkin iken, MM tüm yöntemler içinde en düşük etkinliğe sahiptir.

6. SONUÇ

Bu tez çalışmasında örneklem ölçümü 100 olduğunda 1000 simülasyon çalıştırılmıştır. Örneklem ölçümü 300 olduğunda 333 ve 1000 olduğunda ise 100 simülasyon çalıştırılarak tablolar halinde sonuçlar verilmiştir. Bu sonuçlara göre, MM yöntemi baz alınarak yöntemler arasında karşılaştırmalar yapılmıştır.

Örneklem ölçümünün 100 ve daha düşük olduğu durumlarda çift döngülü ML'in diğer yöntemlere göre çok daha iyi performans sergilediği gözlemlenmiştir. Diğer yöntemler küçük örneklem ölçümlerinde a ölçek parametresi için büyük yanlılıkta değerler bulurken, çift döngülü ML genelikle gerçeğe çok daha yakın sonuçlar bulmuştur. ℓ parametresinin çok büyük ve örneklem ölçümünün küçük olması durumunun yöntemlerin çalışmasını olumsuz yönde etkilediği saptanmıştır. Böyle bir durumda özellikle MM yönteminin (n x mse) ve yanlılık miktarının oldukça büyük olduğu gözlemlenmektedir.

Örneklem ölçümünün 1000 ve üzeri olduğu durumlarda tüm yöntemler için ortalama parametre değerleri çok düşük yanlılıkta sonuçlar vermektedir. Çift döngülü ML yöntemi büyük örneklem ölçümünde de tüm yöntemler içinde en etkin olanıdır. Örneklem ölçümünün 10,000 olduğu simülasyonlarda, çift döngülü ML için (n x mse) değerlerinin sıfır olduğu durumlar gözlemlenmiştir.

Tüm simülasyon sonuçlarına bakıldığında çift döngülü ML en etkin tahmin yöntemidir. Diğer yöntemlerle karşılaştırıldığında en düşük (n x mse) değerlerine sahiptir. Hesapladığı ortalama parametre değerlerinin, gerçek parametre değerlerine yakınsaması oldukça iyidir. Ayrıca hesaplanması ve anlaşılması oldukça kolay bir yöntemdir. Bu özelliklerinden ötürü bu tez çalışması sonucunda çift döngülü ML, genelleştirilmiş gamma dağılımı için yeni bir tahmin yöntemi olarak önerilmektedir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Ahmadabadi, A. and Khodabin, M. , 2010, Some properties of generalized gamma distribution, *Mathematical Sciences*, 4: 9-28.

Akkaya, A. D. and Tiku, M. L. , 2004, Robust Estimation And Hypothesis Testing, New Age International (P) Limited Publishers, New Delhi, 22-28p.

Almpanidis, G. and Constantine, K., "Voice activity detection using generalized gammadistribution",http://poseidon.csd.auth.gr/papers/PUBLISHED/CONFERENCE/pdf/Almpanidis06a.pdf (Erişim tarihi: 1 Şubat 2011)

Chang, J. H., Shin, J. W. and Kim, N. S., 2005, Statistical modeling of speech signals based on generalized gamma distribution, *IEEE Signal Processing Letters,* 12:258-261.

Gomes, O. , Combes, C. and Dussauchoy, A. , 2008, Parameter estimation of the generalized gamma distribution, *Mathematics And Computers In Simulation*, 79:955-963.

Hager, H. W. and Bain, L. J., 1970, Inferential procedures for the generalized gamma distribution, *Journal Of The American Statistical Association*, 65:1601-1609.

Huang, P., H. and Hwang, T. Y. , 2006, On new moment estimation of parameters of the generalized gamma distribution using it's characterization, *Taiwanese Journal Of Mathematics*, 10: 1083-1093.

Kanivoski, S. and Peneder, M., 2008, "Determinants Of Firm Survival: A Duration Analysis Using The Generalized Gamma Distribution", http://ideas.repec.org/a/kap/empiri/v35y2008i1p41-58.html (Erişim tarihi: 1 Mart 2011)

Kleiber, C. and Kotz, S. , 2003, Statistical Size Distributions In Economics And Actuarial Sciences, John Wiley & Sons, New Jersey, 147-160p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devamı)

Özmen, T., 1993, "A Modified Anderson Darling Goodness-Of-Fit Test For The Gamma Distribution With Unknown Scale And Location Parameters", http://www.dtic.mil/cgi-bin/GetTRDoc?Location=U2&doc=GetTRDoc.pdf&AD=ADA262486 (Erişim tarihi: 1 Haziran 2011)

Stacy, E. W., 1962, "A generalization of the gamma distribution", *The Annals Of Mathematical Statistics*, 33:1187:1192.

Tadikamalla, P. R., 1979, Random sampling from the generalized gamma distribution, *Computing*, 23:199-203.

Wingo, D. R. , 1987, Computing maximum-likelihood parameter estimates of the generalized gamma distribution by numerical root isolation, *IEEE Transactions On Reliability*, 5:586-590.

ÖZGEÇMİŞ

Hülya Yılmaz 1987'de İzmir'de doğdu. 1993 yılında Mazagirt İlköğretim Okulunda öğrenim hayatına başladı. Daha sonra 1998 yılında 80. Yıl Bornova İlköğretim Okulunda öğrenimine devam etti. 2001 yılında başladığı Suphi Koyuncuoğlu Lisesi'nden 2005 yılında mezun oldu. Aynı yıl içersinde Ege Üniversitesi İstatistik Bölümü'nü kazandı. 2009 yılında bu bölümden ikincilik ile mezun oldu ve Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisansa başladı.

2007 yılında Ege Üniversitesi Bilim ve Araştırma Merkezi tarafından yürütülen "Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Öğrencilerinin Kültür,Sanat ve Spor Şenliği Hakkında Görüşleri" araştırmasına katıldı. 2008 yılında da, Ege Üniversitesi İstatistik Bölümü danışmanlığında yapılan "Öğrencilerin İnterneti Kullanma Amaçları ve Sitelerin Yararları ile Zararları Hakkındaki Görüşleri" araştırma projesinde görev aldı.