EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

EĞİK KOORDİNAT SİSTEMİNDE KİNEMATİK ve EULER SAVARY FORMÜLÜ

Firuze ÇAKIR

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Emin ÖZYILMAZ

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu : 403.02.01

Sunuş Tarihi : 24.08.2012

Firuze ÇAKIR tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak sunulan **"……."** başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve ./../2012 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:		**İmza**
Jüri başkanı	**: …………………………….**	**……………………….**
Raportör Üye	**: …………………………….**	**……………………….**
Üye	**: …………………………….**	**……………………….**

ÖZET

EĞİK KOORDİNAT SİSTEMİNDE KİNEMATİK ve EULER SAVARY FORMÜLÜ

ÇAKIR, Firuze

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Yöneticisi: Doç. Dr. Emin ÖZYILMAZ

Ağustos 2012, **44** sayfa

Kinematik, hareketi, sebep ve tesirlerini göz önüne almadan inceleyen mekaniğin bir alt dalıdır. Hareketin, zamansal-uzaysal özellikleri ile uğraşır. Kinematik; uzaklık, hız ve ivmelemeyi doğrusal ve açısal olarak inceler. Kinematik, hareketin ve ondan doğan hız ve ivmenin anlaşılmasıyla kavranabilir.

Daha önce H.R.Müller tarafından kinematiğin bazı formülleri ele alınmıştır. Bu formüller sabit ve hareketli koordinat sistemlerinin birim vektörlerinin birbirine dik alınmasıyla elde edilmiştir.

Bu çalışmada ise sabit ve hareketli koordinat sistemlerinin birim vektörlerinin dik kesişmemeleri durumunda formüllerin nasıl bir forma dönüşeceğinin incelenmesi amaçlanmıştır.

Anahtar sözcükler: Kinematik, bağıl hız, mutlak hız, sürüklenme hızı, pol noktası, pol eğrisi, PFAFF formları, Euler – Savary formülü

ABSTRACT

KİNEMATİCS in OBLİQUE COORDİNATE SYSTEM and EULER-SAVARY FORMULA

ÇAKIR, Firuze

M. Sc. Thesis, in Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Emin ÖZYILMAZ

June 2012, **44** Pages

Kinematics is the branch of classical mechanics that describes the motion of points, objects and systems of groups of objects without consideration of the causes of motion. Kinematics also studies the motion in absolute time and space. It examines distance, velocity and acceleration in terms of linear and angular form.

In this thesis various well-known fomulas of kinematics are considered (Müller,1963). These formulas are obtained through constant and moving coordinate systems of unit vectors which are perpendicular to each other.

The aim of this study is to investigate how these formulas would take on a form if the unit vectors are not intersecting perpendicular each other.

Keywords: Kinematics, Relative velocity, Absolute motion, Pole point, Pole curve, PFAFF forms, Euler – Savary Formulas.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması boyunca danışmanlığımı yapan, yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Doç. Dr. Emin Özyılmaz’a ve her zaman bana destek olan sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER(devam)

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
E^n	Öklid Uzayı
$\overrightarrow{V_r}$	Bağıl Hız
$\overrightarrow{V_a}$	Mutlak Hız
$\overrightarrow{V_f}$	Sürüklenme Hızı
E	Hareketli Düzlem
E'	Sabit Düzlem
B	E nin E' ne göre bir parametreli hareketi
P	E nin hareketli pol eğrisi
P'	E' nün sabit pol eğrisi
(A/E)	A düzleminin E düzlemine göre hareketi
(A/E')	A düzleminin E' düzlemine göre hareketi

LİTERATÜR ÖZETİ

Bir parametreli düzlemsel hareketler ilk defa W.Blaschke ve H.R.Müller tarafından tanımlanmıştır. Muller (1956), bu çalışmasında bağıl hız, mutlak hız ve sürüklenme hızını tanımlamıştır.

Blaschke ve Müller (1956) hızın ve ivmenin bir parametreli karmaşık düzlemdeki etkileşimini açıklamıştır.

Ergin (1991), Öklid düzlemi yerine Lorentzian düzlemini kullanarak 1 parametreli hareketi incelemiş, Lorentzian düzlemi üzerinde hız ve ivme etkileşimini yayınlamıştır.

Kandemir (2008) "Küçük boyutta bir parametreli hareketler ve uygulamaları" tezinde ani dönme merkezi kavramını incelemiştir. Mekanizmalarda bulunması gösterilmiş, ani dönme merkezlerini kullanarak hız analizi yapılmış, ayrıca hareket pol eğrileri cinsinde ifade edilmiştir. Dört uzuvlu mekanizmalar işlenmiş, 5-kol mekanizmasının birinci ve ikinci dereceden kinematik katsayıları kullanılarak, eğrilik yarıçapı bulunarak, büküm çemberinin çizimine ulaşılmıştır.

Özakgül (2009), bir parametreli düzlemsel hareketin hareket denklemleri ve bunların türev denklemlerini zaman skalasında vermiştir. Hareket denklemlerinin, T zaman skalasının değişiminden nasıl etkilendiği örneklerle gösterilmiştir.

1. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım1.1 (Afin Uzay) A $\neq\emptyset$ bir cümle ve V de F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir

$$\varphi : AxA \rightarrow V$$
$$(P,\theta) \rightarrow \varphi(P,\theta) = \overrightarrow{PQ}$$

şeklindeki dönüşüm aşağıdaki şartları sağlıyor ise A cümlesine V vektör uzayı ile birleştirilmiş afin uzay denir.

1) $\forall$ P,Q,R$\in$ A için

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$

2) $\forall$ P$\in$ A ve $\forall\alpha \in$ V için $\overrightarrow{PQ}= \alpha$ olacak şekilde bir tek Q $\in$ A noktası vardır. Bu şartlara afin aksiyomları da denir.

Teorem1.1 Bir V vektör uzayı ile birleştirilmiş afin uzay A olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar doğrudur.

1) $\overrightarrow{PP} = \vec{0}, \quad \forall P \in A$

2) $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}, \quad \forall P, Q \in A$

3) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$ ise $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$

Tanım1.2 (Afin çatı): Bir V vektör uzayı ile birleşen afin uzay A olsun. $P_0, P_1, \dots, P_n \in A$ noktaları için $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n} \in V$ vektörleri V nin bir bazı ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta(n+1) lisine A afin uzayının bir afin çatısı denir. P_0 noktasına çatının başlangıç noktası, P_i lere de birim noktalar denir.

Tanım1.3 (Afin dönüşüm) Bir F cismi üzerinde tanımlı iki vektör uzayı V_1 ve V_2 ile birleşen afin uzaylar A_1 ve A_2 olmak üzere;

$$f: A_1 \rightarrow A_2$$

$$p \rightarrow f(p)$$

$$Q \rightarrow f(Q)$$

dönüşümü tanımlansın. Herhangi bir $P \in A_1$ noktası için

$$\varphi_p : V_1 \to V_2$$
$$\overrightarrow{PQ} \to \varphi_p\left(\overrightarrow{PQ}\right) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$$

şeklinde tanımlı φ_p ,lineer ise f ye afin dönüşüm denir.

Tanım1.4 (Afin koordinat sistemi) n-boyutlu bir V vektör uzayı ile birleşen afin uzay A olsun. A afin uzayının afin çatılarından biri $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ olsun. $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n} \in V$ sistemi V nin bir bazı olduğundan, bu uzaydaki her vektör bu baz vektörleri cinsinden tek türlü ifade edilir. $\forall P \in A$ için $\overrightarrow{P_0P} \in V$ vektörü bu baza göre tek türlü olarak,

$$\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{P_0P_i}$$

şeklinde gösterilir. $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ e P noktasının afin koordinatları denir.

$$x_i : A \to IR$$
$$P \to x_i(P) = a_i \ , 1 \le i \le n$$

şeklinde tanımlı fonksiyonların oluşturduğu $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sistemine de afin koordinat sistemi denir.

Tanım1.5 (Afin izomorfizm) A_1 ve A_2 afin uzaylar olmak üzere bir $f: A_1 \to A_2$ afin dönüşümü bire-bir ve örten ise f ye afin izomorfizm denir.

Tanım1.6 (Öklid uzayı) A n- boyutlu bir reel afin uzay ve A ile birleşen n-boyutlu vektör uzayı V olsun. V de;

$$\langle\, , \rangle : V \times V \to R$$

Bir iç çarpım tanımlanabiliyorsa A ya n-boyutlu Öklid uzayı denir. $A=E^n$ ile gösterilir.

Tanım1.7 (Öklid iç çarpım) R^n standart reel afin uzay olmak üzere

$$\forall X = (x_1, \dots, x_n) \text{ ve } \forall Y = (y_1, \dots, y_n) \in R^n \text{ için}$$

$$\langle\, , \rangle : R^n x R^n \to R$$
$$(X, Y) \to (X, Y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

şeklinde tanımlanan iç çarpıma standart iç çarpım veya Öklid iç çarpımı denir,(Hacısalihoğlu,1980).

2.GİRİŞ

2.1. Düzlemde Koordinat Dönüşümleri

Düzlem kinematiği, esas itibariyle bir düzlem parçasının düzlemsel bir taban üzerindeki hareketini inceler. Bu iki düzlemden hangisinin sabit hangisinin hareketli kabul edileceği, geometrik kinematik açısından fark etmez. Burada asıl önemli olan düzlemlerin karşılıklı hareketidir.Düzlemsel kinematik; nokta veya nokta sisteminin yani cismin zamana bağlı olarak meydana getirdiği yer değiştirmeleri inceler.

2.1.1 Öteleme

Eğik ya da onun özel hali olarak dik koordinat sisteminde P(x,y) noktası vektörel olarak,koordinat eksenleri doğrultusundaki birim vektörler e_i (i=1,2) olmak üzere OP yer vektörü ile

$$OP= x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} \qquad \textbf{(1)}$$

şeklinde ifade edilebilir. Eksenlerin birbirine paralel olduğu iki eğik sistem göz önüne alalım. İkinci sistemin başlangıç noktası O' (a,b) olsun. P noktasının birinci sistemdeki x,y koordinatlarıyla ikinci sistemdeki x', y' koordinatları arasında bağıntı kurulursa

$$OP=OO'+O'P \qquad \textbf{(2)}$$

elde edilir.Vektörel formlarına geçilerek

$$x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}= (a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2})+(x'\overrightarrow{e_1} + y'\overrightarrow{e_2}) \qquad \textbf{(3)}$$

Buradan da koordinatlara geçilirse

$$\begin{cases} x= x' +a \\ y= y'+b \end{cases} \qquad \textbf{(4)}$$

öteleme formülleri elde edilir. Tersine olarak $O'x'y'$ sistemindeki koordinatların bulunabilmesi için **(4)** den

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases} \qquad \textbf{(5)}$$

yazılabilir.

(4) ve **(5)** bağıntıları dik koordinat sistemi için de geçerlidir.

Teorem2.1.1 Bir ötelenme hareketinde

i) uzunluklar
ii) açılar
iii) alanlar değişmez kalırlar.

Tanım2.1.1 İki ötelenmenin arka arkaya iki kere uygulanmasına, bu ötelemelerin bileşimi denir.

Teorem2.1.2 İki ötelemenin bileşimi yine bir ötelemedir.

2.1.2 Dönme

Ötelemenin koordinat sisteminin başlangıç noktasının farklı seçilişinden ötürü meydana çıktığını biliyoruz.Şimdide başlangıç noktaları aynı,fakat koordinat eksenlerinin doğrultuları bir dönmeye tabi tutulmuş iki sistem arasındaki bağıntıları araştıralım.

Eksenleri arasındaki açı α $(\alpha \neq 0)$ olan bir eğik sistemi,başlangıç noktası etrafında θ kadar döndürelim. İlk sistemde (x,y) koordinatlı nokta; ikinci sistemde (x', y') koordinatlı nokta, ve eksenler doğrultusunda birim vektörler $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}; \overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}$ olmak üzere OP vektörü

$$\overrightarrow{OP} = x\,\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} = x'\overrightarrow{e_1'} + y'\overrightarrow{e_2'} \qquad \textbf{(6)}$$

yazılabilir.**(6)** eşitliği sırasıyla e_1 ve e_2 ile skaler çarpılırsa

$$\begin{cases} x + y\cos\alpha = x'\cos\theta + y'\cos(\alpha+\theta) \\ x\cos\alpha + y = x'\cos(\alpha-\theta) + y'\cos\theta \end{cases} \qquad \textbf{(7)}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{vmatrix} = 1-\cos^2\alpha \neq 0$$

olduğundan **(7)** sistemi x ve y ye göre çözülürse

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sin^2\alpha}[(\cos\theta-\cos\alpha\cos(\alpha-\theta))x'+(\cos(\alpha+\theta)-\cos\alpha\cos\theta)y'] \\ \\ y=\frac{1}{\sin^2\alpha}\ [(\cos(\alpha-\theta)-\cos\alpha\cos\theta)x'+(\cos\theta-\cos\alpha\cos(\alpha+\theta))y'] \end{cases} \quad \textbf{(8)}$$

formülleri bulunur.

(7) formüllerinden denklemler x', y' ye göre çözülerek

$$\begin{cases} x'=\frac{1}{\sin^2\alpha}\ [(\cos\theta-\cos\alpha\cos(\alpha+\theta))x+(\cos\alpha\cos\theta-\cos(\alpha+\theta))y] \\ \\ y'=\frac{1}{\sin^2\alpha}\ [(\cos\theta\cos\alpha-\cos(\alpha-\theta))x+(\cos\theta-\cos\alpha\cos(\alpha-\theta))y] \end{cases} \quad \textbf{(9)}$$

elde edilir.Bu da ters dönmeye karşılık gelir.

Özel Hal : Dik koordinat sisteminin θ kadar,dönmeleri için **(8)** ve **(9)** da $\alpha=\frac{\pi}{2}$ alarak

$$\begin{cases} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta \\ \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta \end{cases} \quad \textbf{(10)}$$

ve

$$\begin{cases} x'=x\cos\theta+y\sin\theta \\ \\ y'=-x\sin\theta+y\cos\theta \end{cases} \quad \textbf{(11)}$$

formülleri elde edilir.

$OP = OP'$ uzunluğu r olsun. P=(x,y) noktasına $P' = (x', y')$ noktasını karşılık tutalım.

$$x' = r\cos\beta$$

ve

$$y' = r\sin\beta$$

yazılabilir.Ayrıca

$$x = r\cos(\beta+\theta)$$

ve

$$y = r\ \sin(\beta+\theta)$$

dir.Bu iki ifadeden

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$

$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

elde edilebilir.Bundan faydalanarak,ötelenmede olduğu gibi burada da eksen sisteminin θ kadar dönmesiyle bir noktanın koordinatlarının değişmesi şu şekilde de ifade edilebilir.Dönme, düzlemin kendi kendisine öyle bir dönüşümüdür ki (x,y) noktasının koordinatlarıyla (x', y') nün arasında **(8)** ve **(9)** formülleri özel olarak dik koordinat sistemi içinde **(10)** ve **(11)** formülleri geçerlidir.

Teorem2.1.2 Bir dönmede

i) uzunluklar
ii) açılar
iii) alanlar değişmez kalır,

(Kaya,1982).

2.1.3 Bir dik koordinat sisteminden,bir eğik koordinat sistemine geçişler

Aynı başlangıç noktasına sahip biri dik, diğeri eğik iki koordinat sistemi alalım;

Ox,Oy dik eksenleri;Ox', Oy' de eksen açısı α olan eğik eksenler olsunlar. Ox'

İle Ox arasındaki dönme açısı θ ve $\alpha + \theta \leq \frac{\pi}{2}$ olsun.

İlk sistemde (x,y),ikinci sistemde (x', y') koordinatlara sahip P noktasının yer vektörü ;$\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ ve $\overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}$ eksenler doğrultusundaki birim vektörler olmak üzere

$$\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} = x'\overrightarrow{e_1'} + y'\overrightarrow{e_2'}$$

şeklinde yazılabilir.Burada

$$xe_1 + ye_2 = x'e_1' + y'e_2' \tag{12}$$

ifadesi e_1 ve e_2 ile skaler olarak çarpılırsa

$$e_1.e_1' = \cos\theta$$

$$e_1.e_2' = \cos(\alpha + \theta)$$

$$e_2.e_1' = \cos(90 - \theta) = \sin\theta$$

$$e_2.e_2' = \cos(90 - \alpha - \theta) = \sin(\alpha + \theta)$$

olduğu göz önüne alınarak,

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta + y'\cos(\alpha + \theta) \\ y = x'\sin\theta + y'\sin(\alpha + \theta) \end{cases} \tag{13}$$

formülleri elde edilir. Bu formül ile eğik sistemde (x', y') noktasının, dik sistemde (x,y) olacağını gösterir.**(12)** ifadesi e_1' ve e_2' ile skaler çağrılarak ya da **(13)** ifadesi (x', y') ye göre çözülerek, ters geçişi mümkün kılan

$$\begin{cases} y'\cos\alpha + x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ x'\cos\alpha + y' = x\cos(\alpha + \theta) + y\sin(\alpha + \theta) \end{cases}$$

yada bir başka deyişle

$$\begin{cases} x' = x\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin\alpha} - y\frac{\cos(\alpha+\theta)}{\sin\alpha} \\ y' = -x\frac{\sin\theta}{\sin\alpha} + y\frac{\cos\theta}{\sin\alpha} \end{cases} \tag{14}$$

elde edilir.

Eğer koordinat sistemlerinin başlangıç noktaları çakışık değilse,OXY yardımcı sistemi sayesinde önce

$$\begin{cases} x = X+a \\ y = Y+b \end{cases}$$

ötelemesi ve sonra

$$\begin{cases} X = x' \cos\theta + y' \cos(\alpha+\theta) \\ Y = x' \sin\theta + y' \sin(\alpha+\theta) \end{cases}$$

eğikleştirilme olacağından **(13)** ün karşılığı, ama öteleme-eğikleşme için

$$\begin{cases} x = x' \cos\theta + y' \cos(\alpha+\theta) + a \\ y = x' \sin\theta + y' \sin(\alpha+\theta) + b \end{cases} \qquad \textbf{(15)}$$

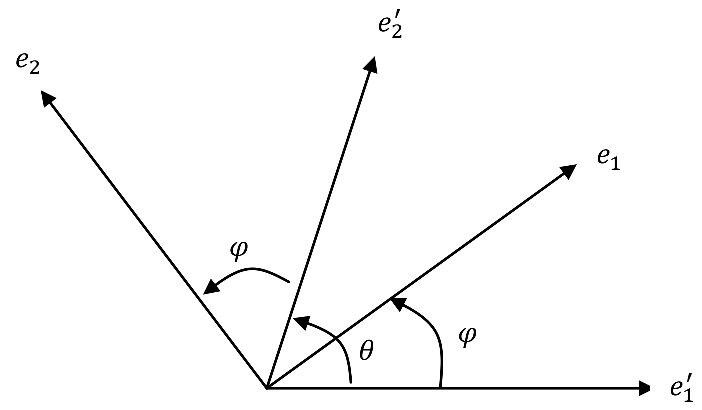
veya,tersi olan **(14)** ün karşılığı için

$$\begin{cases} x' = (x-a)\dfrac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin\alpha} - (y-b)\dfrac{\cos(\alpha+\theta)}{\sin\alpha} \\ y' = -(x-a)\dfrac{\sin\theta}{\sin\alpha} + (y-b)\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} \end{cases} \qquad (\mathbf{15})'$$

geçerli olur. Burada (a,b), O' nün ilk sistemdeki koordinatlarıdır.

3. DÜZLEMİN HAREKET GEOMETRİSİ

Her iki düzlemde, iki birim vektörden oluşan θ açılı birer eksen takımı alalım. E düzleminde alınan $\{O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\}$ koordinat sistemine hareketli koordinat sistemi denir. Burada $\overrightarrow{e_1}$ ve $\overrightarrow{e_2}$ birim vektörleri birbirlerini O başlangıç noktasında θ açısı ile keserler. Aynı şekilde E' düzleminde de $\overrightarrow{e_1'},\overrightarrow{e_2'}$ birim vektörleri birbirlerini O' başlangıç noktasında θ açısı ile keserler. E' düzleminde alınan $\{O',\overrightarrow{e_1'},\overrightarrow{e_2'}\}$ koordinat sistemine sabit koordinat sistemi denir.



şekil.1

3.1 Genel Düzlem Hareketi

E ve E′ iki Öklid düzlemi olsun.Bu Öklid düzlemlerinde $\{0;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\}$ ve $\left\{0';\overrightarrow{e_1'},\overrightarrow{e_2'}\right\}$ gibi iki eğik koordinat sistemlerini alalım. Eğer;

$$\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{e_1}(t)$$

$$\overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{e_2}(t)$$

$t\in I\subset IR$ parametresinin sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonları ise $\{0;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2}\}$ eğik çatısının $\left\{0';\overrightarrow{e_1'},\overrightarrow{e_2'}\right\}$ eğik çatısına göre hareket ettiği kabul edilir. $\overrightarrow{OO'}=\vec{u}$ hareketin öteleme vektörü olmak üzere

$$\overrightarrow{OO'}=\vec{u}=u_1\overrightarrow{e_1}+u_2\overrightarrow{e_2} \qquad \textbf{(16)}$$

yazılabilir.

$t = 0$ anında $\{O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ ve $\left\{O'; \overrightarrow{e_1'}, \overrightarrow{e_2'}\right\}$ çatılarının başlangıç noktalarının aynı olduğu kabul edilir. $\overrightarrow{e_1}$ ve $\overrightarrow{e_2}$ birim vektörleri arasında

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_1} = \dfrac{\sin(\theta-\varphi)}{\sin\theta}\,\overrightarrow{e_1'} + \dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta}\,\overrightarrow{e_2'} \\[2em] \overrightarrow{e_2} = -\dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta}\,\overrightarrow{e_1'} + \dfrac{\sin(\theta+\varphi)}{\sin\theta}\,e_2' \end{cases} \tag{17}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada φ açısı t parametresine bağlıdır.

Tanım 3.1. $\vec{x}$ ve $\overrightarrow{x'}$ sırası ile hareketli (E) ve sabit (E') koordinat sistemine göre aynı bir X noktasının yer vektörleri olmak üzere

$$\overrightarrow{x'} = -\vec{u} + \vec{x} = (-u_1 + x_1)\overrightarrow{e_1} + (-u_2 + x_2)\overrightarrow{e_2} \tag{18}$$

şeklinde ifade edilir.

3.2 Türev Denklemleri

Bir X noktasının her iki (E) ve (E′) düzlemine göre hızlarını araştırmak için ilk önce hareketin türev denklemlerini elde edelim. Bunun için **(17)** denklemlerinin $\overrightarrow{e_1'}$ ve $\overrightarrow{e_2'}$ vektörlerini sabit alarak t zamanına göre türevleri hesaplanırsa;

$$\begin{cases} \dot{\overrightarrow{e_1}} = -\dfrac{\cos(\theta-\varphi)}{\sin\theta}\,\dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_1'} + \dfrac{\cos\varphi}{\sin\theta}\,\dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_2'} \\[2em] \dot{\overrightarrow{e_2}} = -\dfrac{\cos\varphi}{\sin\theta}\,\dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_1'} + \dfrac{\cos(\theta+\varphi)}{\sin\theta}\,\dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_2'} \end{cases} \tag{19}$$

formülleri elde edilir.

(**17**)formülünden yola çıkarak e_1' ve e_2' ifadelerini e_1 ve e_2 cinsinden yazılırsa;

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_1'} = \dfrac{\sin(\theta+\varphi)}{\sin\theta}\overrightarrow{e_1} - \dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta}\overrightarrow{e_2} \\[2em] \overrightarrow{e_2'} = \dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta}\overrightarrow{e_1} + \dfrac{\sin(\theta-\varphi)}{\sin\theta}\overrightarrow{e_2} \end{cases} \tag{20}$$

bulunur.

$(\mathbf{19})$eşitliklerinde $\overrightarrow{e_1'}$ ve $\overrightarrow{e_2'}$ değerleri yerine yazılırsa;

$$\begin{cases} \dot{\overrightarrow{e_1}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,\dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_1} + \frac{1}{\sin\theta}\,\dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_2} \\ \\ \dot{\overrightarrow{e_2}} = \frac{-1}{\sin\theta}\,\dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_1} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,\dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_2} \end{cases} \quad \mathbf{(21)}$$

formülleri elde edilir.

$$\vec{u} = u_1\overrightarrow{e_1} + u_2\overrightarrow{e_2}$$

denkleminin türevi alınırsa

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \dot{\vec{u}} = \dot{\overrightarrow{e_1}}u_1 + \overrightarrow{e_1}\dot{u_1} + \dot{\overrightarrow{e_2}}u_2 + \overrightarrow{e_2}\dot{u_2} \quad \mathbf{(22)}$$

bulunur. $\dot{\overrightarrow{e_1}}$ ve $\dot{\overrightarrow{e_2}}$ nin $(\mathbf{19})$ deki değerleri **(22)** de yerine yazılırsa

$$\dot{\vec{u}} = \left(\dot{\overrightarrow{u_1}} + \frac{u_1\cos\theta}{\sin\theta}\dot{\varphi} - \frac{u_2}{\sin\theta}\dot{\varphi}\right)\overrightarrow{e_1} + \left(\frac{u_1}{\sin\theta}\dot{\varphi} + \dot{\overrightarrow{u_2}} + \frac{u_2\cos\theta}{\sin\theta}\dot{\varphi}\right)\overrightarrow{e_2} \quad \mathbf{(23)}$$

formülü elde edilir.

Tanım3.2.$(\mathbf{19})$ve $(\mathbf{23})$ denklemlerine hareketin **türev denklemleri** denir.

Bir parametreli düzlem hareketlerin bütün kinematiği bu denklemlerde bulunur. Parametre sayısı belirtilmezse t parametresine göre türevler yerine $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ ve $\vec{u}$ vektörlerinin sabit E' düzlemine göre değişimleri dikkate alınmıştır.

Bu durumda **(19)** yerine;

$$\begin{cases} d\overrightarrow{e_1} = \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{e_1} + \frac{1}{\sin\theta}\overrightarrow{e_2}\right)d\varphi \\ \\ d\overrightarrow{e_2} = \left(-\frac{1}{\sin\theta}\overrightarrow{e_1} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{e_2}\right)d\varphi \end{cases} \quad \mathbf{(24)}$$

formülleri ve **(23)** yerine de

$$d\vec{u} = \left(\dot{\overrightarrow{u_1}} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}u_1 d\varphi + \frac{1}{\sin\theta}u_1 d\varphi\right)\overrightarrow{e_1} + \left(\dot{\overrightarrow{u_2}} + \frac{1}{\sin\theta}\overrightarrow{u_1}d\varphi + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{u_2}d\varphi\right)\overrightarrow{e_2} \quad \mathbf{(25)}$$

denklemi elde edilir.

3.3 Hızlar Ve Hızların Birleşimi

E düzlemi E' düzlemine göre bir parametreli hareket ederken bir X noktası da hareketli E düzlemindeki yerini t zamanı ile değiştirsin. X noktasının E ye göre hız vektörüne X noktasının $\overrightarrow{v_r}$ relatif hızı denir.Bu hız için

$$\vec{X} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2}$$

denkleminden, $\overrightarrow{e_1}$ ve $\overrightarrow{e_2}$ yi sabit tutup türev alarak

$$\overrightarrow{v_r} = \dot{\vec{X}} = \dot{x}_1\overrightarrow{e_1} + \dot{x}_2\overrightarrow{e_2} \qquad \textbf{(26)}$$

denklemini elde ederiz. X noktasının E' ne göre hız vektörüne X noktasının $\overrightarrow{v_a}$ mutlak hızı denir.

(18) denkleminin t ye göre türevi alınıp **(23)** eşitliği bu denklemde yerine yazılırsa

$$\dot{\vec{X'}} = (-\dot{u}_1 + \dot{x}_1)\overrightarrow{e_1} + (-u_1 + x_1)\dot{\overrightarrow{e_1}} + (-\dot{u}_2 + \dot{x}_2)\overrightarrow{e_2} + (-u_2 + x_2)\dot{\overrightarrow{e_2}} \qquad \textbf{(27)}$$

elde edilir. $\dot{\overrightarrow{e_1}}$ ve $\dot{\overrightarrow{e_2}}$ nin $(\mathbf{21})$deki değerleri **(27)** de yazılırsa;

$$\dot{\vec{X'}} = \left(-\dot{u}_1 + \dot{x}_1 - u_1\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\dot{\varphi} + x_1\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\dot{\varphi} + u_2\frac{1}{\sin\theta}\dot{\varphi} - x_2\frac{1}{\sin\theta}\dot{\varphi}\right)\overrightarrow{e_1} +$$
$$\left(-u_1\frac{1}{\sin\theta}\dot{\varphi} + x_1\frac{1}{\sin\theta}\dot{\varphi} - \dot{u}_2 + \dot{x}_2 - u_2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\dot{\varphi} + x_2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\dot{\varphi}\right)\overrightarrow{e_2} \qquad \textbf{(28)}$$

bulunur. X, E de sabit iken X in E' ne göre hızı

$$\overrightarrow{v_f} = \left(-\dot{u}_1 - u_1\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\dot{\varphi} + x_1\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\dot{\varphi} + u_2\frac{1}{\sin\theta}\dot{\varphi} - x_2\frac{1}{\sin\theta}\dot{\varphi}\right)\overrightarrow{e_1}$$
$$+\left(-u_1\frac{1}{\sin\theta}\dot{\varphi} + x_1\frac{1}{\sin\theta}\dot{\varphi} - \dot{u}_2 - u_2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\dot{\varphi} + x_2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\dot{\varphi}\right)\overrightarrow{e_2}$$

dir.Elde edilen $\overrightarrow{v_f}$ vektörüne X noktasının sürüklenme hız vektörü denir. Buna bağlı olarak, X noktası E düzleminde sabit ise yani $\overrightarrow{v_r}$=0 ise mutlak hız sürüklenme hızına eşit olur.Yani,

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_f}$$

Teorem3.1 İki hareketin birleştirilmesinde; bir noktanın mutlak hız vektörü sürüklenme hız vektörü ile bağıl hız vektörünün toplamına eşittir.Yani;

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_f} + \overrightarrow{v_r} \qquad \text{(Müller,1963).}$$

Burada $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$ türevine hareketin açısal hızı denir.Bundan sonra $\dot{\varphi} \neq 0$ olduğunu kabul edeceğiz.

3.4. Dönme Polü, Pol Yörüngeleri

E/E' hareketinin her t anında $\overrightarrow{v_f} = 0$ ise, E düzlemi E' düzlemine göre hareketsizdir denir.Böylece

$$\overrightarrow{v_f} = \left(-\dot{u_1} - u_1 \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\dot{\varphi} + x_1 \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\dot{\varphi} + u_2 \frac{1}{\sin\theta}\dot{\varphi} - x_2 \frac{1}{\sin\theta}\dot{\varphi}\right)\overrightarrow{e_1}$$

$$+\left(-u_1 \frac{1}{\sin\theta}\dot{\varphi} + x_1 \frac{1}{\sin\theta}\dot{\varphi} - \dot{u_2} - u_2 \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\dot{\varphi} + x_2 \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\dot{\varphi}\right)\overrightarrow{e_2} = 0$$

denkleminin çözümünde $\dot{\varphi} \neq 0$ olduğuna göre

$$\begin{cases} p_1 = x_1 = u_1 + \dot{u_1} \frac{\cos\theta\ \sin\theta}{1+\cos^2\theta} \frac{1}{\dot{\varphi}} + \dot{u_2} \frac{\sin\theta}{1+\cos^2\theta} \frac{1}{\dot{\varphi}} \\ \\ p_2 = x_2 = u_2 - \dot{u_1} \frac{\sin\theta}{1+\cos^2\theta} \frac{1}{\dot{\varphi}} + \dot{u_2} \frac{\cos\theta \sin\theta}{1+\cos^2\theta} \end{cases} \quad \textbf{(29)}$$

elde edilir.

$X(x_1, x_2) = P(p_1, p_2)$ noktasına hareketin t anındaki polü veya dönme polü denir.Pol noktasında parametre sayısı belirtilmezse

$$\begin{cases} p_1 = u_1 + du_1 \frac{\cos\theta \sin\theta}{1+\cos^2\theta} \frac{1}{d\varphi} + du_2 \frac{\sin\theta}{1+\cos^2\theta} \frac{1}{d\varphi} \\ p_2 = u_2 - du_1 \frac{\sin\theta}{1+\cos^2\theta} \frac{1}{d\varphi} + du_2 \frac{\cos\theta \sin\theta}{1+\cos^2\theta} \frac{1}{d\varphi} \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 3.2. Açısal hızı 0 olmayan bir harekette her t anında sürüklenme hızı 0 olan yani her iki düzlemde de sabit(hareketsiz) kalan bir tek pol noktası vardır.(Müller,1963**)**

Sonuç 3.2.1.Sürüklenme hızı $\overrightarrow{v_f}$ pol noktalarından yararlanarak;

$$\overrightarrow{v_f} = \left\{\frac{(-x_2+p_2)}{\sin\theta}\dot{\varphi} + \frac{(x_1-p_1)\cos\theta}{\sin\theta}\dot{\varphi}\right\}\overrightarrow{e_1} + \left\{\frac{(x_1-p_1)\dot{\varphi}}{\sin\theta} + \frac{(x_2-p_2)\cos\theta}{\sin\theta}\dot{\varphi}\right\}\overrightarrow{e_2} \quad \textbf{(30)}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Sonuç3.2.2. P pol noktasından X noktasına giden pol ışını

$\overrightarrow{PX} = (x_1 - p_1, x_2 - p_2) = \overrightarrow{e_1}(x_1 - p_1) + \overrightarrow{e_2}(x_2 - p_2)$

vektörü ile $\overrightarrow{v_f}$ arasında θ derecelik bir açı vardır. Buradan yola çıkarak $\langle \overrightarrow{v_f}, \overrightarrow{PX} \rangle \neq 0$ elde edilir.

$$\langle \overrightarrow{v_f}, \overrightarrow{PX} \rangle = \langle \left(\dot{\varphi} \left[\frac{p_2 - x_2}{\sin\theta} + \frac{(x_1 - p_1)\cos\theta}{\sin\theta} \right], \dot{\varphi} \left[\frac{(x_1 - p_1)}{\sin\theta} + \frac{(x_2 - p_2)\cos\theta}{\sin\theta} \right] \right),$$
$$[(x_1 - p_1), (x_2 - p_2)] \rangle \neq 0$$

Özel Hal: Sonuç3.2.2 de $\theta = 90^\circ$ alınırsa $\langle \overrightarrow{v_f}, \overrightarrow{PX} \rangle = 0$ olur.Yani $\overrightarrow{PX}$ vektörü $\overrightarrow{v_f}$ ye dik olur.

Sonuç3.2.3. $\overrightarrow{v_f}$ vektörünün normu

$$\|\overrightarrow{v_f}\| = \sqrt{\langle v_f, v_f \rangle} = \sqrt{\dot{\varphi}^2 \left[\frac{p_2 - x_2}{\sin\theta} + \frac{(x_1 - p_1)\cos\theta}{\sin\theta} \right]^2 + \dot{\varphi}^2 \left[\frac{x_1 - p_1}{\sin\theta} + \frac{(x_2 - p_2)\cos\theta}{\sin\theta} \right]^2}$$

ifadesi dikkate alınarak

$$\|\overrightarrow{v_f}\| = \dot{\varphi} \, \|\overrightarrow{PX}\| \sqrt{\frac{1 + \cos^2\theta}{\sin^2\theta}}$$

şeklinde elde edilir.

Özel Hal: Sonuç3.2.3'de $\theta = 90^\circ$ alınırsa $\|\overrightarrow{v_f}\| = \dot{\varphi} \, \|\overrightarrow{PX}\|$ olur.

Teorem3.3. Hareketli E düzleminin her X noktası t anında P merkezli ve $\dot{\varphi}$ açısal hızlı bir ani dönme hareketi yapar,(Müller,1963).

X noktası E düzleminde herhangi (keyfi)bir nokta olduğundan Teorem3.3 şu şekilde de ifade edilebilir:

Teorem3.3.1 Bir parametreli bir hareket t anında, hareketli E düzleminin P pol noktası etrafında $\dot{\varphi}$ açısal hızıyla dönmesinden ibarettir**,** (Müller,1963).

Sonuç3.2.2 den yola çıkarak aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem3.4. B hareketinde hareketli E düzleminin X noktaları, $E^{'}$ sabit düzleminde normalleri P dönme polünden geçen yörüngeler çizerler,(Müller,1963).

B hareketinde her t anında bir dönme polü vardır.

Tanım3.3.(P) ∈ E olsun. P noktasının hareketli E düzlemindeki geometrik yerine B nin hareketli pol eğrisi denir ve (P) şeklinde gösterilir.

Tanım3.4.(P) ∈ $E^{'}$ olsun. P noktasının sabit $E^{'}$ düzlemindeki geometrik yerine B nin sabit pol eğrisi denir ve $(P^{'})$ şeklinde gösterilir.

Sürüklenme hızı $\overrightarrow{v_f} = 0$ olunca X=P için

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} = \dot{p}_1\overrightarrow{e_1} + \dot{p}_2\overrightarrow{e_2}$$

olur. Böylece şu teorem verilebilir:

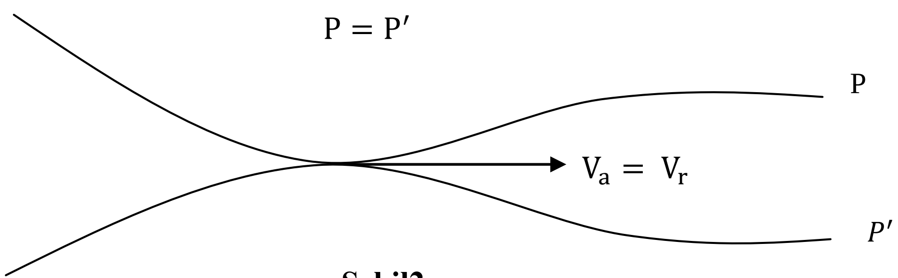
Teorem3.5. Sabit ve hareketli düzlemlerdeki pol eğrilerini çizen P dönme polünün her t anındaki hızları birbirinin aynıdır,(Müller,1963).

s yay uzunluğu ve ds yay elemanı olmak üzere; $\frac{ds}{dt} = v$ ve $ds = v\,dt$ olduğu dikkate alınırsa

(P) için $ds = \|\overrightarrow{v_r}\|dt$ elde edilir. $\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_a}$ olduğundan (P') için ds=$\|\overrightarrow{v_a}\|dt = ds'$ bulunur. Böylece şu teoreme varılır.

Teorem3.6. Bir parametreli B hareketinde E düzleminin (P) hareketli pol eğrisi $E^{'}$ düzleminin $(P^{'})$ sabit pol eğrisi üzerinde kaymadan yuvarlanır,(Müller,1963).

Sonuç3.3: E düzleminin $E^{'}$ düzlemine göre hareketi (P) eğrisinin $(P^{'})$ eğrisi üzerinde kaymadan yuvarlanmasından ibarettir.



Şekil2.

4. HAREKETLİ KOORDİNAT SİSTEMİ

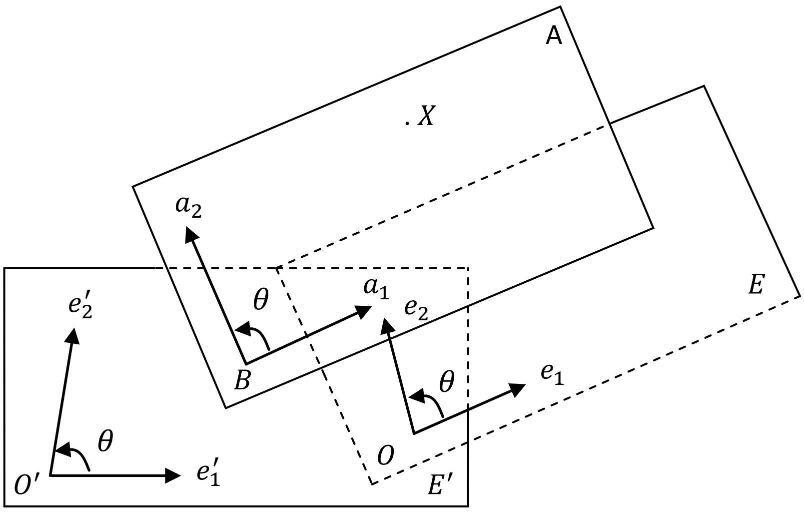
Bu bölüme kadar bir parametreli harekette

$$\mathrm{E} = \{\mathrm{O}; \overrightarrow{\mathrm{e}_1}, \overrightarrow{\mathrm{e}_2}\}$$

ve

$$\mathrm{E}' = \left\{\mathrm{O}'; \overrightarrow{\mathrm{e}_1'}, \overrightarrow{\mathrm{e}_2'}\right\}$$

koordinat sistemlerinin birbirlerine göre hareketlerini inceledik.Burada ise E ve E' düzlemlerini,E ve E' düzlemlerine göre hareketli olan başka bir A=$\{\mathrm{B}; \overrightarrow{\mathrm{a}_1}, \overrightarrow{\mathrm{a}_2}\}$ koordinat sistemine göre inceleyeceğiz.



Şekil3.

Formüllerimizde bir noktanın E düzlemine göre değişimini d ile E' düzlemine göre değişimini d' ile göstereceğiz.

$\{\mathrm{B}; \overrightarrow{\mathrm{a}_1}, \overrightarrow{\mathrm{a}_2}\}$ sistemine bağlı bir A düzlemi alınırsa; A'nın E'ye göre hareketi daha önce incelediğimiz E nin E' ye göre hareketi gibi gösterilebilir. Böylece **(24)** ve **(25)** formüllerine karşılık gelen türev denklemleri bulunur;

$$\vec{\mathrm{b}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2) = \mathrm{b}_1\overrightarrow{\mathrm{a}_1} + \mathrm{b}_2\overrightarrow{\mathrm{a}_2}$$

Burada O noktası daha önceki hareketli sistemimiz olan E üzerinde bir noktadır; yani hareketli düzlemin başlangıç noktasıdır.Diferansiyel yazılıma göre şunları elde ederiz:

$$\begin{cases} d\overrightarrow{a_1} = \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{a_1} + \frac{1}{\sin\theta}\overrightarrow{a_2}\right) d\varphi \\ d\overrightarrow{a_2} = \left(-\frac{1}{\sin\theta}\overrightarrow{a_1} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{a_2}\right) d\varphi \end{cases}$$

$$\overrightarrow{db} = \left(db_1 + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} b_1 d\varphi - \frac{1}{\sin\theta} b_2 d\varphi\right)\overrightarrow{a_1} + \left(\frac{1}{\sin\theta} b_1 d\varphi + db_2 + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} b_2 d\varphi\right)\overrightarrow{a_2} \qquad \textbf{(31)}$$

Aynı şekilde A'nın E'ye göre hareketi bulunabilir;

$$\overrightarrow{b'} = \overrightarrow{O'B} = \left(b_1', b_2'\right) = b_1'\overrightarrow{a_1} + b_2'\overrightarrow{a_2}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{db'} = \left(db_1' + b_1' \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} d\varphi' - b_2 \dfrac{1}{\sin\theta} d\varphi'\right)\overrightarrow{a_1} + \left(db_2' + b_1' \dfrac{1}{\sin\theta} d\varphi' + b_2' \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} d\varphi'\right)\overrightarrow{a_2} \\ d'\overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{a_2} d\varphi' \qquad\qquad (\mathbf{31})' \\ d'\overrightarrow{a_2} = -\overrightarrow{a_1} d\varphi' \end{cases}$$

Daha sade sonuçlar elde etmek için **(31)** ve $(\mathbf{31})'$ formüllerinden yola çıkarak

$$d\varphi = \tau \quad \text{ve} \quad d\varphi' = \tau' \qquad \textbf{(32)}$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = db_1 + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} b_1 d\varphi - \frac{1}{\sin\theta} b_2 d\varphi \\ \sigma_2 = db_2 + \frac{1}{\sin\theta} b_1 d\varphi + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} b_2 d\varphi \end{cases} \qquad \textbf{(33)}$$

yazılır.Ayrıca

$$\begin{cases} \sigma_1' = db_1' + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} b_1' d\varphi' - \frac{1}{\sin\theta} b_2' d\varphi' \\ \sigma_2' = db_2' + \frac{1}{\sin\theta} b_1' d\varphi' + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} b_2' d\varphi' \end{cases} \qquad \textbf{(34)}$$

ifade edilir.

B noktasının E' ne göre hareketini de kısaca $d'\vec{b} = d\vec{b'}$ şeklinde ifade edelim. Burada, $\sigma_1, \sigma_1{}', \sigma_2, \sigma_2', \tau, \tau'$ ifadeleri bir parametreli harekete ait PFAFF formları olarak adlandırılır.

(32) formülünü kullanarak,**(33)** ve **(34)** formülleri yeniden düzenlenirse;

$$\begin{cases} \sigma_1 = db_1 + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} b_1\tau - \dfrac{1}{\sin\theta} b_2\tau \\ \\ \sigma_2 = db_2 + \frac{1}{\sin\theta} b_1\tau + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} b_2\tau \end{cases} \qquad \textbf{(35)}$$

elde edilir.Benzer şekilde

$$\begin{cases} \sigma_1{}' = db_1{}' + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} b_1{}'\tau' - \frac{1}{\sin\theta} b_2{}'\tau' \\ \\ \sigma_2{}' = db_2{}' + \frac{1}{\sin\theta} b_1{}'\tau' + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} b_2{}'\tau' \end{cases} \qquad \textbf{(36)}$$

de yazılır.

A düzleminin E düzlemine göre hareketinin (A/E)

$$\begin{cases} d\overrightarrow{a_1} = \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{a_1} + \frac{1}{\sin\theta}\overrightarrow{a_2}\right)\tau \\ d\overrightarrow{a_2} = \left(-\dfrac{1}{\sin\theta}\overrightarrow{a_1} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{a_2}\right)\tau \\ d\vec{b} = \sigma_1\overrightarrow{a_1} + \sigma_2\overrightarrow{a_2} \end{cases} \qquad (\mathbf{37})$$

ve

A düzleminin E' düzlemine göre hareketinin (A/E')

$$\begin{cases} d'\overrightarrow{a_1} = \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{a_1{}'} + \frac{1}{\sin\theta}\overrightarrow{a_2{}'}\right)\tau' \\ d'\overrightarrow{a_2} = \left(-\frac{1}{\sin\theta}\overrightarrow{a_1{}'} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{a_2{}'}\right)\tau' \\ d'\vec{b} = \sigma_1{}'\overrightarrow{a_1} + \sigma_2{}'\overrightarrow{a_2} \end{cases} \qquad \textbf{(38)}$$

ifadeleri türev denklemleri yardımıyla bulunmuş olur.

$$\vec{X} = \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BX} = \vec{b} + x_1\overrightarrow{a_1} + x_2\overrightarrow{a_2}$$

ve

$$\overrightarrow{X'} = \overrightarrow{O'X} = \overrightarrow{O'B} + \overrightarrow{BX} = \overrightarrow{b'} + x_1\overrightarrow{a_1} + x_2\overrightarrow{a_2}$$

vektörlerini oluşturalım.**(37)** türev denklemleri yardımıyla X in E ye göre değişimi için

$$d\vec{X} = d\vec{b} + d\overrightarrow{a_1}x_1 + \overrightarrow{a_1}dx_1 + d\overrightarrow{a_2}x_2 + \overrightarrow{a_2}dx_2$$

veya

$$d\vec{X} = \left(\sigma_1 + dx_1 + x_1\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,\tau - \frac{x_2}{\sin\theta}\,\tau\right)\overrightarrow{a_1} +$$

$$\left(\sigma_2 + dx_2 + x_1\frac{1}{\sin\theta}\,\tau + x_2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,\tau\right)\overrightarrow{a_2} \qquad \textbf{(39)}$$

sonucu bulunur.Buradan da X noktasının bağıl hız vektörü

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = v_r$$

elde edilir.

$\overrightarrow{v_r} = \vec{0}$ veya $d\vec{X} = 0$ alındığında, X noktası E düzleminde sabit olur.

$$\sigma_1 + dx_1 + x_1\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\tau - x_2\frac{1}{\sin\theta}\tau = 0$$

eşitliğinden

$$dx_1 = -\sigma_1 - x_1\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\tau + x_2\frac{1}{\sin\theta}\,\tau$$

bulunur.

Aynı şekilde,

$$\sigma_2 + x_1\frac{1}{\sin\theta}\tau + dx_2 + x_2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\tau = 0$$

eşitliğinden

$$dx_2 = -\sigma_2 - x_1\frac{1}{\sin\theta}\tau - x_2\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,\tau$$

elde edilir.

$$\begin{cases} dx_1 = -\sigma_1 - x_1 \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\tau + x_2 \frac{1}{\sin\theta}\tau \\ \\ dx_2 = -\sigma_2 - x_1 \frac{1}{\sin\theta}\tau - x_2 \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\tau \end{cases} \tag{40}$$

$(\mathbf{40})$da bulduğumuz eşitlikler X'in E de sabit kalma şartlarıdır.

Benzer şekilde X in E' ne göre değişimi için

$$\overrightarrow{d'X} = \left(\sigma_1{}' + d'x_1 + x_1 \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\tau' - \frac{x_2}{\sin\theta}\tau'\right)\overrightarrow{a_1} +$$

$$\left(\sigma_2{}' + x_1 \frac{1}{\sin\theta}\tau' + d'x_2 + x_2 \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\tau'\right)\overrightarrow{a_2} \tag{41}$$

eşitliği yazılır.Buradan mutlak hız vektörü

$$\overrightarrow{v_a} = \frac{\overrightarrow{d'X}}{dt}$$

ile verilir.

$\overrightarrow{d'X} = 0$ alındığında

$$\sigma_1{}' + d'x_1 + x_1 \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\tau' - \frac{x_2}{\sin\theta}\tau' = 0$$

eşitliği dikkate alınarak

$$d'x_1 = -\sigma_1{}' - x_1 \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\tau' + \frac{x_2}{\sin\theta}\tau'$$

elde edilir.Benzer şekilde

$$\sigma_2{}' + x_1 \frac{1}{\sin\theta}\tau' + d'x_2 + x_2 \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\tau' = 0$$

eşitliğinden

$$d'x_2 = -\sigma_2{}' - x_1 \frac{1}{\sin\theta}\tau' - x_2 \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\tau'$$

denklemi elde edilir.Böylece

$$\begin{cases} d'x_1 = -\sigma_1{}' - x_1 \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\tau' + \frac{x_2}{\sin\theta}\tau' \\ \\ d'x_2 = -\sigma_2{}' - x_1 \frac{1}{\sin\theta}\tau' - x_2 \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\tau' \end{cases} \tag{42}$$

yazılır.

(42)de bulduğumuz eşitlikler, X'in E' de sabit kalma şartlarıdır.

Sürüklenme hızı , $\overrightarrow{v_f}$, X in E' ne göre değişimi olduğundan,

(40) ve **(41)** deki şartlar kullanılarak

$$\overrightarrow{d'x} - \overrightarrow{dx} = \left\{(\sigma_1' - \sigma_1) + (\tau' - \tau)x_1 \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - (\tau' - \tau)x_2 \frac{1}{\sin\theta}\right\}\overrightarrow{a_1}$$

$$+\left\{(\sigma_2' - \sigma_2) + (\tau' - \tau)x_1 \frac{1}{\sin\theta} + (\tau' - \tau)x_2 \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right\}\overrightarrow{a_2} \qquad \textbf{(43)}$$

eşitliği elde edilir.

(39),**(41)** ve **(43)** formüllerinden yola çıkarak

$$d'\vec{x} = d_f\vec{x} + \overrightarrow{dx} \qquad \textbf{(44)}$$

elde edilir. $d_f\vec{x} = \overrightarrow{d'x} - \overrightarrow{dx} = 0$ eşitliği kullanılarak

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = -(\sigma_2' - \sigma_2)\frac{\sin\theta}{(\tau' - \tau)} - x_2\cos\theta \\ \\ x_2 = (\sigma_1' - \sigma_1)\frac{\sin\theta}{(\tau' - \tau)} + x_1\cos\theta \end{array}\right. \qquad \textbf{(45)}$$

eşitlikleri, pol noktalarının pfaff formu cinsinden koordinatlarını verir.

Burada $\theta = 90^\circ$ alındığında **(43)** ifadesi

$$\overrightarrow{d'x} - \overrightarrow{dx} = \{(\sigma_1' - \sigma_1) - (\tau' - \tau)\, x_2\}\,\overrightarrow{a_1} + \{(\sigma_2' - \sigma_2) + (\tau' - \tau)\, x_1\}\,\overrightarrow{a_2}$$

ve

(45) ifadesi

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \frac{-(\sigma_2' - \sigma_2)}{(\tau' - \tau)} \\ \\ x_2 = \frac{(\sigma_1' - \sigma_1)}{(\tau' - \tau)} \end{array}\right.$$

halini alır.

5. HAREKET ZİNCİRİ

Birbirine göre hareket eden birçok düzlemde $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\tau}{dt}$ açısal hız olarak tanımlanır.

X noktası A/E de bağıl hızı **(39)** olan $\overrightarrow{dX} = 0$ yani $\overrightarrow{dx_1} = 0$ ve $\overrightarrow{dx_2} = 0$ değişimine karşılık gelir. $\overrightarrow{dx_2} = 0$ ise

$$\sigma_2 + x_1 \frac{1}{\sin\theta} d\varphi + x_2 \frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\varphi = 0$$

olur.

Buradan x_1'i çekersek

$$x_1 = -x_2 \cos\theta - \sigma_2 \sin\theta \frac{1}{d\varphi} \quad \textbf{(46)}$$

(**46**) da $d\varphi = \tau$ yazarsak

$$x_1 = -x_2 \cos\theta - \sigma_2 \sin\theta \frac{1}{\tau}$$

elde edilir.

Ayrıca; $\overrightarrow{dx_1} = 0$ ise

$$\sigma_1 + x_1 \frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\varphi - x_2 \frac{1}{\sin\theta} d\varphi = 0$$

olur.

Buradan x_2'yi çekersek

$$x_2 = x_1 \cos\theta + \sigma_1 \sin\theta \frac{1}{d\varphi} \quad \textbf{(47)}$$

elde edilir.

(47) de $d\varphi = \tau$ yazarsak;

$$x_2 = x_1 \cos\theta + \sigma_1 \sin\theta \frac{1}{\tau}$$

elde edilir.Böylece pol noktası;

$Q = (q_1, q_2) = (x_1, x_2)$

$$= \left(-x_2 \cos\theta - \sigma_2 \sin\theta \frac{1}{\tau}, x_1 \cos\theta + \sigma_1 \sin\theta \frac{1}{\tau}\right) \quad \textbf{(48)}$$

şeklinde elde edilir.

Benzer şekilde $d'\vec{x} = 0$ alındığında, $d'\overrightarrow{x_2} = 0$ ise

$$\sigma_2' + x_1' \frac{1}{\sin\theta} d\varphi' + x_2' \frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\varphi' = 0$$

olur

Buradan x_1''i çekersek

$$x_1' = -\sigma_2' \frac{1}{d\varphi'} \sin\theta - x_2' \cos\theta \qquad \textbf{(49)}$$

(49) da $d\varphi' = \tau'$ yazarsak

$$x_1' = -\sigma_2' \frac{1}{\tau'} \sin\theta - x_2' \cos\theta$$

elde edilir.Ayrıca $d'\overrightarrow{x_1} = 0$ ise

$$\sigma_1' + x_1' \frac{\cos\theta}{\sin\theta} d\varphi' - x_2' \frac{1}{\sin\theta} d\varphi' = 0$$

olur.

Buradan x_2''yi çekersek

$$x_2' = x_1' \cos\theta + \sigma_1' \frac{1}{d\varphi'} \sin\theta \qquad \textbf{(50)}$$

yani;

$$x_2' = x_1' \cos\theta + \sigma_1' \frac{1}{\tau'} \sin\theta$$

elde edilir.

Böylece A/E' hareketinde pol noktası;

$Q' = (q_1', q_2')$=(x_1', x_2')

$$= \left(-\sigma_2' \frac{1}{\tau'} \sin\theta - x_2' \cos\theta \;,\; x_1' \cos\theta + \sigma_1' \frac{1}{\tau'} \sin\theta\right) \qquad \textbf{(51)}$$

şeklinde elde edilir.

6. KANONİK BAĞIL SİTEM

E nin $E^{'}$ ne göre bir parametreli B hareketini aynı şekilde gösterebilmek için önceden $\{B;\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}\}$ hareketli sistemini almıştık.Bir başka defa bu sistem E nin $E^{'}$ ne göre hareketli üçüncü bir A düzlemini göstermişti.

Şimdi $\{B;\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}\}$ bağıl sistemini özel durumda seçerek elde ettiğimiz formülleri en basit hale getireceğiz. Bunun için

1) Sistemin B başlangıcı ile P ani dönme polünü çakıştıralım.**(45)** de P dönme polünün koordinatları dikkate alınırsa $p_1 = 0 \; ve \; p_2 = 0$ olur.Buradan

$$\sigma_1 = \sigma_1' \;\; ve \;\; \sigma_2 = \sigma_2'$$

elde edilir.Buradan **(37)** ve **(38)** e göre

$$d\vec{B} = d\vec{P} = \sigma_1\overrightarrow{a_1} + \sigma_2\overrightarrow{a_2} = d'\vec{B} = d'\vec{P}$$

elde edilir.

2) $\{B;\overrightarrow{a_1}\}$ eksenini (P) ve (P') nin ortak teğeti ile çakışık alalım.

Pol teğetinin $\overrightarrow{a_1}$ ile çakışması için $\overrightarrow{a_2}$ nin katsayısının sıfır olması gerekir.Yani

$$\sigma_2 = \sigma_2' = 0$$

Buradan **(37)** ve **(38)** denklemleri basit bir hal alır.

$$\sigma_1 = \sigma_1' = \sigma$$

alınırsa, A nın E ye göre hareketinde

$$\begin{cases} d\overrightarrow{a_1} = \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{a_1} + \frac{1}{\sin\theta}\overrightarrow{a_2}\right)\tau \\ d\overrightarrow{a_2} = \left(-\frac{1}{\sin\theta}\overrightarrow{a_1} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{a_2}\right)\tau \\ d\vec{p} = \sigma\overrightarrow{a_1} \end{cases} \tag{52}$$

eşitlikleri elde edilir.

Benzer şekilde, A'nın $E^{'}$ ne göre hareketinde

$$\begin{cases} d^{'}\overrightarrow{a_1} = \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{a_1} + \frac{1}{\sin\theta}\overrightarrow{a_2}\right)\tau^{'} \\ d^{'}\overrightarrow{a_2} = \left(-\frac{1}{\sin\theta}\overrightarrow{a_1} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\overrightarrow{a_2}\right)\tau^{'} \\ d^{'}\vec{p} = \sigma\overrightarrow{a_1} \end{cases} \tag{53}$$

eşitlikleri elde edilir.X noktasına ait formüllerin değişimi için;

$$\sigma_1 = \sigma_1^{'} = \sigma$$

ve

$$\sigma_2 = \sigma_2^{'} = 0$$

olmak üzere **(39)** da

$$d\vec{x} = \left(dx_1 + \sigma + x_1 \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\tau - x_2 \frac{1}{\sin\theta}\tau\right)\overrightarrow{a_1} + \left(x_1 \frac{1}{\sin\theta}\tau + dx_2 + x_2 \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\tau\right)\overrightarrow{a_2} \qquad \textbf{(54)}$$

olur.$d\varphi = \tau \quad ve \quad d\varphi^{'} = \tau^{'}$ olduğundan

$$d^{'}\vec{x} = \left(\sigma + x_1 \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\tau^{'} - x_2 \frac{1}{\sin\theta}\tau^{'} + d^{'}x_1\right)\overrightarrow{a_1} + \left(x_1 \frac{1}{\sin\theta}\tau^{'} + d^{'}x_2 + x_2 \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\tau^{'}\right)\overrightarrow{a_2} \qquad \textbf{(55)}$$

elde edilir.

E düzlemindeki X noktası sabit ise **(54)** formülünden yola çıkarak

$$\begin{cases} dx_1 = x_2 \frac{1}{\sin\theta}\tau - \sigma - x_1 \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\tau \\ \\ dx_2 = -x_1 \frac{1}{\sin\theta}\tau - x_2 \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\tau \end{cases} \qquad \textbf{(56)}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $E^{'}$ düzlemindeki X noktası sabit ise

$$\begin{cases} d^{'}x_1 = x_2 \frac{1}{\sin\theta}\tau^{'} - \sigma - x_1 \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\tau^{'} \\ \\ d^{'}x_2 = -x_1 \frac{1}{\sin\theta}\tau^{'} - x_2 \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\tau^{'} \end{cases} \qquad \textbf{(57)}$$

elde edilir. Burada $d_f\vec{x} = d^{'}\vec{x} - d\vec{x}$ bulunursa

$$d_f\vec{x} = \left\{x_1 \frac{\cos\theta}{\sin\theta}(\tau^{'} - \tau) - x_2 \frac{1}{\sin\theta}(\tau^{'} - \tau)\right\}\overrightarrow{a_1}$$

$$+\left\{x_1 \frac{1}{\sin\theta}(\tau^{'} - \tau) + x_2 \frac{\cos\theta}{\sin\theta}(\tau^{'} - \tau)\right\}\overrightarrow{a_2} \qquad \textbf{(58)}$$

eşitliğini elde etmiş oluruz.

7. YÖRÜNGE EĞRİSİNİN EĞRİLİĞİ ve EULER-SAVARY FORMÜLÜ

Bu bölümde E düzlemindeki bir X noktasının çizdiği yörünge eğrisinin bir t anına karşılık gelen X' eğrilik merkezini bulacağız.

$$\overrightarrow{PX} = (x_1, x_2) = x_1\overrightarrow{a_1} + x_2\overrightarrow{a_2}$$

ve

$$\overrightarrow{PX'} = x_1' \overrightarrow{a_1} + x_2' \overrightarrow{a_2}$$

olmak üzere

$$\overrightarrow{PX} \,//\, \overrightarrow{PX'}$$

olur. Buradan;

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1'}{x_2'}$$

ve

$$x_1x_2' - x_2x_1' = 0 \qquad \textbf{(59)}$$

elde edilir.

Bu ifadenin diferansiyeli alınarak (**54**) ve (**55**) eşitlikleri kullanılırsa

$$dx_1x_2' + x_1dx_2' - dx_2x_1' - x_2dx_1' = 0$$

elde edilir. **(46)** ve **(47)** eşitlikleri dikkate alınırsa

$$\sigma\left(x_2' - x_2\right) - \left(x_1x_1' + x_2x_2'\right)\frac{1}{\sin\theta}\tau + \left(x_1x_2' - x_1'x_2\right)\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\tau$$

$$+(x_1^2 + x_2^2)\frac{1}{\sin\theta}\tau' = 0 \qquad \textbf{(60)}$$

elde edilir.Buradan,kutupsal koordinatlara geçilirse

$$x_1 = a\sin(\theta - \varphi)$$

$$x_2 = a\cos(\theta - \varphi)$$

ve

$$x_1' = a'\sin(\theta - \varphi)$$

$$x_2' = a'\cos(\theta - \varphi)$$

olmak üzere

$$\sigma\cos(\theta-\varphi)\,(a^{'}-a)+a\,a^{'}\{\sin^2(\theta-\varphi)+\cos^2(\theta-\varphi)\}\frac{1}{\sin\theta}(\tau^{'}-\tau)$$

$$+aa^{'}\{\sin(\theta-\varphi)\cos(\theta-\varphi)-\cos(\theta-\varphi)\sin(\theta-\varphi)\}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\tau^{'}=0$$

veya

$$\sigma\cos(\theta-\varphi)(a^{'}-a)+aa^{'}\frac{1}{\sin\theta}(\tau^{'}-\tau)=0$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafı da $\frac{\sin\theta}{aa^{'}}\frac{1}{\tau}$ ile çarpılırsa

$$\cos(\theta-\varphi)\sin\theta\left(\frac{1}{a^{'}}-\frac{1}{a}\right)=\frac{\tau^{'}-\tau}{\tau}$$

eşitliği elde edilir.Böylece

Buradan

$$\frac{\tau^{'}-\tau}{\tau}=\frac{1}{r^{'}}-\frac{1}{r}$$

olduğunu göz önünde bulundurarak

$$\cos(\theta-\varphi)\sin\theta\left(\frac{1}{a^{'}}-\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{r^{'}}-\frac{1}{r} \qquad \textbf{(61)}$$

eğik sistemde EULER – SAVARY formülü elde edilir.

ÖZEL HAL: $\theta=90^{\circ}$ olduğunda EULER-SAVARY formülü

$$\left(\frac{1}{a^{'}}-\frac{1}{a}\right)\sin\varphi=\frac{1}{r^{'}}-\frac{1}{r}$$

halini alır.

8.SONUÇ

Bu tez çalışmasında sabit ve hareketli koordinat sistemlerinin baz vektörlerinin dik olmaması durumunda türev denklemleri,pfaff formları,sürüklenme hızı,bağıl hız ve mutlak hız formülleri,pol yörüngeleri,kanonik bağıl sistem ve Euler-Savary formülü gibi bazı kinematik formüllerinin genel hallerine ulaşılmıştır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

HACISALİHOĞLU,H.H.,1980, Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler, İnönü Üniversitesi Temel Bilimler Fakültesi Yayınları, Malatya.

KAYA,R.1982,Analitik Geometri,Bilim Teknik Yayınevi, 226s.

MÜLLER,H.R.1963,Kinematik Dersleri,Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara, 287s.

BLASCHKE W. and MÜLLER,H.R.1956,Ebene Kinematik.München,269p.

Ergin,A.A 1991, " On The One Parameter Lorentzian Motions'', Commun Fac. Sci.Univ.Ank. Series A ,40,59-66.

KANDEMİR,F. 2008,Küçük Boyutta Bir Parametreli Hareketler ve Uygulamaları,Ege Üniversitesi,İzmir,119s.

ÖZAKGÜL,S. 2009,Time Scalada Kinematik,Ege Üniversitesi,İzmir.