EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

İKİ DEĞİŞKENLİ FARLIE-GUMBEL-MORGENSTERN DAĞILIMLARI İÇİN PARAMETRE SINIRLARI

Günsu GÖKTAŞ

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Muhammet BEKÇİ

İstatistik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu : 406.02.01
Sunuş Tarihi : 27.08.2012

Bornova-İZMİR

2012

Günsu Göktaş tarafından Yüksek Lisans tezi olarak sunulan "İki Değişkenli Farlie-Gumbel-Morgenstern Dağılımları İçin Parametre Sınırları" başlıklı bu çalışma E. Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 27.08.2012 tarihinde yapılan tez savunmasında aday oybirliği / oy çokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:		**İmza**
Jüri Başkanı	**: ……………………….……………**	**…………**
Raportör Üye	**: ……………………….……………**	**…………**
Üye	**: ……………………….……………**	**…………**

ÖZET

İKİ DEĞİŞKENLİ FARLIE-GUMBEL-MORGENSTERN DAĞILIMLARI İÇİN PARAMETRE SINIRLARI

GÖKTAŞ, Günsu

Yüksek Lisans Tezi, İstatistik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Muhammet Bekçi
Ağustos 2012, 34 sayfa

Bu tezde, rasgele değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını modellemek amacı ile kullanılan Kopula fonksiyonları çalışılmıştır. Kopula fonksiyonları yardımı ile elde edilen iki değişkenli Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) dağılımları için parametre sınırları araştırılmıştır.

Bağımlı iki rasgele değişkenin ortak dağılımının belirlenmesi istatistik teorisi açısından oldukça önemlidir. Bu yüzden literatürde önemli bir yer tutan FGM dağılımlar ailesi yardımı ile kurulan modeller incelenmiştir. FGM dağılımları için parametrelerin sınırları ve rasgele değişkenler arasındaki korelasyonlar sunulmuştur.

Son olarak, iki değişkenli FGM modifikasyonu için teorik bir çalışmaya ve uygulamalara yer verilmiştir. Uygulama kısmında, Çevre ve Orman Bakanlığı Devlet Meteoroloji İşleri Genel Müdürlüğünün yayınladığı “Asit Yağmurları ve Hava Kirliliği Değerlendirme Raporu”ndan alınan veriler kullanılarak üzerinde çalışılan FGM modifikasyonları ile modellemeler yapılmıştır.

Anahtar sözcükler: Kopula Fonksiyonları, Farlie-Gumbel-Morgenstern Dağılımları, Bağımlılık Yapısı, Parametre Sınırları, Pozitif Kadran Bağımlılık.

ABSTRACT

PARAMETER BOUNDS FOR BIVARIATE FARLIE-GUMBEL-MORGENSTERN DISTRIBUTIONS

GÖKTAŞ, Günsu

MSc in Statistics
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Muhammet BEKÇİ
August 2012, 34 pages

In this thesis, copula functions that are used with the aim of modeling the dependence structure between random variables are studied. Parameter bounds are investigated for bivariate Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) distributions obtained by the help of copula functions.

Determination of the joint distribution of two dependent random variables is quite important for theory of statistics. Models founded by the help of FGM distributions family that is very important for the literature are examined. Parameters' bounds and correlations between random variables for FGM distributions are presented.

Finally, a theorical study for bivariate FGM modification and applications are given. In the application part, modelings are made with FGM modifications that are studied on by using data taken from "Acid Rains and Air Pollution Assessment Report" published by Environment and Forest Ministry Government Meteorology Works General Management.

Keywords: Copula Functions, Farlie-Gumbel-Morgenstern Distributions, Dependence Structure, Parameter Bounds, Positive Quadrant Dependence.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince bana yol gösteren, bilgi ve deneyimleri ile destek olan danışmanım Doç. Dr. Muhammet Bekçi' ye, her zaman yanımda olan sevgili anne ve babama teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil Sayfa

1. GİRİŞ

Uzun bir süre istatistikçiler çok değişkenli dağılım fonksiyonları ve onların tek boyutlu marjinalleri arasındaki ilişki ile ilgilenmişlerdir. M. Frechet ve G. Dall’Aglio 1950’lerde bu konu ile ilgili olarak iki ve üç boyutlu dağılım fonksiyonları ve onların tek boyutlu marjinalleri üzerine çalışmışlardır.

Ancak tek boyutlu marjinallerin bulunması problemine 1959 yılında Abe Sklar çözüm bulmuştur. Kopula kavramından ilk kez burada tek boyutlu marjinalleri bulduran yeni bir fonksiyon sınıfı olarak bahsedilmiştir. Başlarda kopulalar olasılıksal metrik uzayı teorisinin geliştirilmesi için kullanılmış, kopulalar ile ilgili bir çok sonuç 1959 ve 1976 yılları arasında olasılıksal metrik uzayı teorisinin geliştirilmesi sırasında elde edilmiştir. 1981 yılında ilk kez kopulaların rasgele değişken çiftleri arasında parametrik olmayan bağımlılık ölçülerini tanımlayabildiğine Schweizer ve öğrencisi Wolf’un makalesinde yer verilmiştir.

Sonrasında ise kopula, rasgele değişkenler arasındaki bağımlılığın parametrik olmayan ölçümlerini tanımlamak için kullanılmaya başlanmıştır. O zamandan bu yana kopula kavramının olasılık ve istatistikte bağımlılık ile ilgili problemlerin çözümünde, sabit marjinaller ve monoton dönüştürmeler altında değişmez kalan rastgele değişkenlerin fonksiyonlarını içeren problemlerin çözümünde oynadığı rol bir çok kez yeniden keşfedilmiştir. 1990 yılında kopula fonksiyonları ile ilgili ilk sempozyum gerçekleştirilmiş, bu sempozyumda sunulan makaleler “Advances in Probability Distributions with Given Marginals, Beyond the Copulas, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht” adıyla 1991 yılında kitap olarak yayınlanmıştır.

Kopulalar rasgele değişkenlerin bağımlılık yapılarını formüle etmenin bir yoludur. Zaten kelime olarak bakıldığında da kopulanın “bağ, ilişki” anlamına geldiği görülür. Kopula fonksiyonları çok değişkenli dağılım fonksiyonlarını kendi tek değişkenli marjinal dağılım fonksiyonları ile ilişkilendirir. Bu şekilde tek değişkenli yöntemlerin kullanılabilmesinin yanında parametrik olmayan bağımlılık ölçüleriyle de doğrudan bir bağlantı kurabilmektedir.

Kopula fonksiyonlarının finans, tıp bilimleri, doğa bilimleri, fen bilimleri alanlarında, daha açık ifade ile bağımlılık yapılarının yer aldığı birçok alanda kullanıldığı görülmektedir.

Bu tezde, iki değişkenli Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) dağılımlarının modifikasyonu için parametre sınırları çalışılmıştır. Uygulama kısmında, meteoroloji verileri kullanılarak modellemeler yapılmıştır.

2. KOPULALAR TEORİSİ İLE İLGİLİ TEMEL BİLGİLER

Tek değişkenli marjinal dağılım fonksiyonları [0,1] aralığında düzgün dağılım fonksiyonu olan çok değişkenli dağılım fonksiyonları kopula olarak adlandırılır.

2.1. Kopulaların Temel Özellikleri

1. Rasgele değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını ortaya koyarlar.
2. Tek değişkenli marjinal rasgele değişkenlerin azalmayan dönüştürmeleri altında sabit kalırlar.
3. Değişkenlerin aynı yönde değişimini yansıtırlar. (comonotonicity)

2.2. Kopulaların Matematiksel Özellikleri

Tanım 2.1. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $C:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ şeklinde tanımlanmış $C(u,v)$ fonksiyonu *iki boyutlu kopula* adını alır:

1. Her $u,v\in[0,1]$ için

$$C(u,0)=C(0,v)=0 \tag{2.1a}$$

$$C(u,1)=u \quad \text{ve} \quad C(1,v)=v \tag{2.1b}$$

2. Her $u_1,u_2,v_1,v_2\in[0,1]$ için $u_1\le u_2$ ve $v_1\le v_2$ iken

$$C(u_2,v_2)-C(u_2,v_1)-C(u_1,v_2)+C(u_1,v_1)\ge 0 \tag{2.2}$$

Teorem 2.1. Her C kopulası $(u,v)\in I^2=[0,1]\times[0,1]$ için

$$\max(u+v-1,0)\le C(u,v)\le \min(u,v) \tag{2.3}$$

eşitsizliğini sağlar. Burada $W(u,v)=\max(u+v-1,0)$ ve $M(u,v)=\min(u,v)$ ile ifade edilirse,

$$W(u,v)\le C(u,v)\le M(u,v) \tag{2.4}$$

dir.

(2.4) eşitsizliği *Frechet-Hoeffding Sınırları* eşitsizliğinin kopula şeklidir. $M(u,v)$ *Frechet–Hoeffding Üst Sınırı;* $W(u,v)$ *Frechet-Hoeffding Alt Sınırı*dır.

Tanım 2.2. X ve Y sürekli rasgele değişkenlerinin marjinalleri $F(x)$ ve $G(y)$, ortak dağılım fonksiyonu $H(x,y)$ olmak üzere X ve Y ’ nin bağımsız olması için gerek ve yeter koşul, her $(x,y) \in R^2$ için

$$H(x,y) = F(x)G(y) \tag{2.5}$$

dir.

Yani, X ve Y sürekli rasgele değişkenleri ancak ve ancak bu değişkenlerin ortak dağılım fonksiyonuna karşılık gelen kopula

$$C_{XY}(u,v) = uv \tag{2.6}$$

iken bağımsızdır. Dolayısıyla, iki değişkenli bir dağılım fonksiyonuna karşılık gelen kopula

$$C(u,v) = uv \tag{2.7}$$

bağımsızlığı ifade eder ve $\Pi(u,v)$ ile gösterilir.

Teorem 2.2. X ve Y, C_{XY} kopulasına sahip sürekli rasgele değişkenler olsun. α ve β sırasıyla X ve Y rasgele değişkenlerinin değer kümesi üzerinde kesin monoton dönüşümler iken aşağıdaki özellikler geçerlidir:

1. α ve β kesin artansa

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u,v) = C_{XY}(u,v) \tag{2.8a}$$

2. α kesin artan ve β kesin azalansa

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u,v) = u - C_{XY}(u,1-v) \tag{2.8b}$$

3. α kesin azalan ve β kesin artansa

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u,v) = v - C(1-u,v) \tag{2.8c}$$

4. α ve β kesin azalansa

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u,v) = u + v - 1 + C_{XY}(1-u,1-v) \tag{2.8d}$$

(Nelsen, 1999)

Tanım 2.3. C bir kopula olmak üzere $I = [0,1]$ 'da herhangi bir v için $\frac{\partial C}{\partial u}$ kısmi türevi hemen hemen her u için vardır. Bu şekilde her u ve v için,

$$0 \le \frac{\partial}{\partial u} C(u,v) \le 1 \tag{2.9}$$

dir. Benzer olarak I 'da herhangi bir u için $\frac{\partial C}{\partial v}$ kısmi türevi hemen hemen her v için vardır. Bu şekilde her u ve v için,

$$0 \le \frac{\partial}{\partial v} C(u,v) \le 1 \tag{2.10}$$

dir.

Ayrıca $u \mapsto \frac{\partial}{\partial v} C(u,v)$ ve $v \mapsto \frac{\partial}{\partial u} C(u,v)$ fonksiyonları I 'da hemen hemen her yerde azalmayandır ve tanımlıdır.

2.3. Sklar Teoremi

Sklar teoremi, çok değişkenli dağılım fonksiyonları ve bu fonksiyonların tek değişkenli marjinalleri arasındaki ilişkilerde kopulaların oynadığı rolü ortaya koyar.

Teorem 2.3. (Sklar Teoremi)

$H(x, y)$, marjinalleri $F(x)$ ve $G(y)$ olan iki değişkenli dağılım fonksiyonu olmak üzere her $x, y \in R$ için

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)) \tag{2.11}$$

şeklinde tanımlı bir C kopulası vardır.

Bunun aksi de geçerlidir. Yani; eğer C bir kopula ve $F(x)$ ve $G(y)$ dağılım fonksiyonları ise

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)) \tag{2.12}$$

şeklinde tanımlı bir ortak dağılım fonksiyonudur.

(2.12) eşitliği, bir ortak dağılım fonksiyonunun, iki tek boyutlu dağılım fonksiyonu ve kopula tanımlarını kullanılarak nasıl ifade edildiğini göstermektedir.

2.4. Çok Değişkenli Kopulalar

Herhangi bir n pozitif tamsayısı için R^n ile genişletilmiş n-boyutlu uzay $R \times R \times \ldots \times R$ gösterilecektir. R^n'deki noktalar için $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ve $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ vektörleri kullanılacaktır. Her k için $a_k \le b_k$ olduğunda bu $a \le b$ ile, her k için $a_k < b_k$ olduğunda ise bu $a < b$ ile gösterilecektir. $a \le b$ iken, $[a,b]$, $B = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \ldots \times [a_n,b_n]$ n-kapalı aralığın kartezyen çarpımını ifade etsin. Bir B, n-kartezyen çarpımının köşeleri, her biri a_k veya b_k'ya eşit olan c_k 'lardan oluşan $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ noktalarıdır. Birim n-küp I^n, $I \times I \times \ldots \times I$ çarpımıdır. Dağılım fonksiyonu H için tanım kümesi R^n'nin bir alt kümesi olan $DomH$ ve değer kümesi $RanH$, R'nin bir alt kümesidir.

Tanım 2.4. $C(u,v)$, $C : [0,1]^n \to [0,1]$ ($C : I^n \to I$) fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlarsa n *boyutlu kopula* adını alır:

1. Her $u \in [0,1]^n$ için

$C(u) = 0$, u'nun en az bir koordinatı 0 ise, (2.13)

ve

$C(u) = u_k$, u_k hariç u'nun bütün koordinatları 1 ise, (2.14)

dir.

2. $a \le b$ olan her $a,b \in [0,1]^n$ için

$$V_C([a,b]) \ge 0 \tag{2.15}$$

dir. Burada

$$V_C([a,b]) = V_C(B) = \sum \operatorname{sgn}(c) H(c) \tag{2.16}$$

ve

$$\text{sgn} := \begin{cases} 1, & k \text{ çift ve } c_k = a_k \\ -1, & k \text{ tek ve } c_k = a_k \end{cases} \tag{2.17}$$

dir (Nelsen, 1999).

Teorem 2.4. (n boyutlu Sklar Teoremi)

H marjinalleri $F_1, F_2, \ldots, F_n$ olan n boyutlu dağılım fonksiyonu olsun. O zaman her $x \in R^n$ için

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_n(x_n)) \tag{2.18}$$

olacak şekilde bir C, n-kopulası vardır. Eğer $F_1, F_2, \ldots, F_n$ 'lerin hepsi sürekliyse, o zaman C tektir, aksi halde C, $DomF_1 \times DomF_2 \times \ldots \times DomF_n$ üzerinde tek türlü belirlenmiştir. Tersine, C bir n kopula ve $F_1, F_2, \ldots, F_n$ dağılım fonksiyonları ise, o zaman eşitlik (2.18)'de tanımlanan H fonksiyonu marjinalleri $F_1, F_2, \ldots, F_n$ olan n boyutlu bir dağılım fonksiyonudur.

Sonuç 2.1.

Öncelikle yarı ters kavramından bahsetmek gerekmektedir.

$F(x)$ bir dağılım fonksiyonu olsun. $F(x)$'in yarı tersi tanım kümesi I olan ve aşağıdaki özellikleri sağlayan $F^{(-1)}(t)$ şeklinde tanımlı bir fonksiyondur:

1. Eğer t, F'in değer kümesinin elemanı ise, $F(x) = t$ olacak şekilde R'deki herhangi bir x değerine eşittir. Örneğin, F'in değer kümesindeki her t değeri için

   $$F(F^{(-1)}(t)) = t \tag{2.19}$$

   olur.

2. Eğer t, F ’in değer kümesinde değilse,

$$F^{(-1)}(t) = \inf\{x | F(x) \geq t\} = \sup\{x | F(x) \leq t\} \quad (2.20)$$

olur.

Bu durumda $H(x,y)$, $F(x)$, $G(y)$ ve C Teorem 2.3.’teki gibi ve $F^{(-1)}$ ve $G^{(-1)}$, sırasıyla F ve G ’nin yarı tersleri olsun. C ’nin tanım kümesindeki her (u,v) için,

$$C(u,v) = H(F^{(-1)}(u), G^{-1}(v)) \quad (2.21)$$

dir.

Sonuç olarak $F_1^{(-1)}, F_2^{(-1)}, \ldots, F_n^{(-1)}$’ ler sırasıyla $F_1, F_2, \ldots, F_n$’ lerin yarı tersleri olsun. O zaman herhangi bir $u \in I^n$ için

$$C(u_1, u_2, \ldots, u_n) = H(F_1^{(-1)}(u_1), F_2^{(-1)}(u_2), \ldots, F_n^{(-1)}(u_n)) \quad (2.22)$$

olur.

2.5. Bağımlılık Yapıları

Kopulalar rasgele değişkenler arasındaki bağımlılık yapılarını ortaya koyduğundan, bağımlılık ölçüleri kopula fonksiyonları yardımı ile ifade edilebilir. Bu durumda kopulanın çok değişkenli bir dağılımın bağımlılık yapısını ve doğru seçilmişse verilerin bağımlılık yapısını gösterdiği söylenebilir.

Bağımlılık yapısının çeşitli şekilleri vardır ve bağımlılığa ilişkin bazı varsayımlar sağlanmadığında istatistiksel model kurulamayabilir. Uygulamada bağımlılık iki şekilde sınıflandırılabilir: Birincisi zamana göre bağımlılık denilen gözlemlerin bir süreç sonunda ortaya çıktığı durum, ikincisi ise kategorik bağımlılık denilen bir dereceye kadar simetrik olan rasgele değişkenlerin davranışlarını ele alan durumdur.

En çok bilinen bağımlılık özelliği gerçekte "bağımlılık eksikliği" olarak da sözü edilen bağımsızlıktır. Eğer X ve Y, H ortak dağılım fonksiyonuna sahip sürekli rasgele değişkenlerse, o zaman X ile Y' nin bağımsızlığı H ortak dağılımının bir özelliği yani, bu dağılım fonksiyonunun marjinallerinin çarpımına ayrıştırılması özelliğidir. Buna göre, H bütün ortak dağılım fonksiyonlarının oluşturduğu kümenin Π kopulasıyla karakterize edilen özel altkümesine dahil olduğunda, X ile Y kesin olarak bağımsızdır. Ortak dağılım fonksiyonu Frechet-Hoeffding sınırlarından birine eşit olduğu herhangi bir durumda, yani kopula M ya da W olursa, iki rasgele değişkenden birinin diğerinin hemen hemen her yerde monoton bir fonksiyonu olduğu görülür. Dolayısıyla rasgele değişken çiftleri için bağımlılık özelliği bütün ortak dağılım fonksiyonları kümesinin özel bir altkümesi olarak düşünülebilir.

Bu kısımda rasgele değişkenler arasındaki bağımlılık yapılarına değinilmiş ve bu yapıların kopula fonksiyonları ile nasıl ifade edildikleri incelenmiştir.

2.5.1. Kadran (bölge/quadrant) bağımlılık

Tanım 2.5. Lehmann (1966). X ve Y rasgele değişkenler olsun. Eğer, R^2'deki her (x, y) için,

$$P\{X \le x, Y \le y\} \ge P\{X \le x\}P\{Y \le y\} \tag{2.23}$$

veya

$$P\{X > x, Y > y\} \ge P\{X > x\}P\{Y > y\} \tag{2.24}$$

ise, X ve Y pozitif kadran bağımlı (PQD)' dır.

Eğer marjinal fonksiyonları sırasıyla F ve G, ortak dağılım fonksiyonu H ve kapulası C olan X ve Y rasgele değişkenlerinin pozitif kadran bağımlılığı, I^2'deki her (u,v) için

$$C(u,v) \geq uv \tag{2.25}$$

şeklinde de ifade edilir.

Benzer şekilde,

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} \leq P\{X \leq x\}P\{Y \leq y\} \tag{2.26}$$

veya

$$P\{X > x, Y > y\} \leq P\{X > x\}P\{Y > y\} \tag{2.27}$$

ise, X ve Y negatif kadran bağımlı (NQD)' dır.

2.5.2. Uyumluluk ve eşmonotonluk (concordance ve comonotonicity)

Tanım 2.6. a) $x_i < x_j$ ve $y_i < y_j$ ya da $x_i > x_j$ ve $y_i > y_j$ ise (x_i, y_i) ve (x_j, y_j) gözlemleri uyumludur (concordant) denir. Paralel olarak $x_i < x_j$ ve $y_i > y_j$ ya da $x_i > x_j$ ve $y_i < y_j$ ise (x_i, y_i) ve (x_j, y_j) gözlemleri uyumsuzdur (discordant) denir.

Tanım 2.6. b) X ve Y nin pozitif bağımlı olduğu durum üst sınırı gösterdiğinde yani bağımlılık ölçüsü ρ alabileceği en büyük değerine ulaştığında (X,Y) eşmonoton (comonotonic) olur. X ve Y'nin tam negatif bağımlı olduğu durum alt sınırı gösterdiğinde, (X,Y) ters monoton (countermonotonic) olur.

2.6. Kopulalarda Sıralama

Frechet-Hoeffding sınırları olarak bilinen, her C kopulası için sağlanan

$$W(u,v) \leq C(u,v) \leq M(u,v)$$

eşitsizliği kopulalar üzerinde kısmi bir sıralama verir. Yani Frechet-Hoeffding alt sınır kopulası her kopuladan küçüktür ve Frechet-Hoeffding üst sınır kopulası her kopuladan büyüktür.

C_1 ve C_2 iki kopula olmak üzere her $(u,v)\in I$ için $C_1(u,v)\leq C_2(u,v)$ oluyorsa, C_1, C_2 den küçüktür (veya C_2, C_1 den büyüktür) denir ve $C_1 \prec C_2$ (veya $C_2 \succ C_1$) ile gösterilir. Kopulalara ilişkin bu kısmi sıralamaya uyum sıralaması denir. Her kopula çifti karşılaştırılabilir olmadığı için bu sıralama kısmi bir sıralamadır. Aynı zamanda tamamen sıralı kopula aileleri de vardır.

3. FARLIE-GUMBEL-MORGENSTERN KOPULALARI

3.1. Farlie-Gumbel-Morgenstern Dağılımının Kopulası

Rasgele değişkenler arasındaki bağımlılık incelendiğinde Lai ve Xie (2000) pozitif kadran bağımlı iki değişkenli dağılımların yeni bir türünü ele almıştır. Kabul edelim ki X ve Y pozitif kadran bağımlı değişkenler, yani, $\forall x, y$ için $\mathrm{P}\{\mathrm{X} \leq x, \mathrm{Y} \leq y\} \geq \mathrm{P}\{\mathrm{X} \leq x\}\mathrm{P}\{\mathrm{Y} \leq y\}$ olsun. $F(x, y)$, X ve Y 'nin ortak dağılım fonksiyonu, $F_X(x)$ ve $F_Y(y)$ sürekli marjinal dağılımları olsun. Böylelikle X ve Y 'ye ait ortak dağılım fonksiyonu şu şekilde yazılabilir:

$$F(x, y) = F_X(x)\, F_Y(y) + w(x, y) \tag{3.1}$$

$\forall x, y$ için negatif olmayan $w(x, y)$ fonksiyonu için $F(x, y)$ bir dağılım fonksiyonudur. Böylelikle dağılımların iki değişkenli FGM sınıfı 1956'da Morgenstern tarafından, Cauchy marjinalleri ile verilen çoklu dağılımlarının uygulamalarında önemli ve yararlı olduğu için tanıtılmıştır. Bu model, üstel marjinaller için 1960'da Gumbel tarafından bulunmuş ve daha sonra 1960'da Farlie tarafından genelleştirilmiştir.

Teorem 3.1. X ve Y rasgele değişkenleri sırasıyla sürekli $F_X(x)$ ve $F_Y(y)$ marjinal dağılım fonksiyonlarına sahip olmak üzere,

$$C_\alpha(x, y) = F(x)G(y)\{1 + \alpha \mathrm{A}(F(x))\mathrm{B}(G(y))\}, \tag{3.2}$$

fonksiyonu, $x \to 1$ iken A ve B fonksiyonları $\mathrm{A}(x) \to 0$, $\mathrm{B}(x) \to 0$ 'dır.

Bu C ortak dağılım fonksiyonunda α 'nın kabul edilebilir aralığı A ve B fonksiyonlarına bağlıdır.

Eğer $\mathrm{A}(x) = \mathrm{B}(x) = 1 - x$, $0 \leq x \leq 1$ ise, o zaman klasik tek parametreli FGM ailesi için $-1 \leq \alpha \leq 1$ aralığı elde edilir.

Teorem 3.2. Eğer X ve Y rasgele değişkenleri marjinalleri sürekli düzgün(0,1) dağılıma sahipse o zaman, Huang&Kotz (1999) tarafından bulunan:

$$\mathrm{A}(x) = (1-x)^p \,,\ \mathrm{B}(x) = (1-x)^p \,,\ p > 1$$

iken,

$$\mathrm{H}_\alpha^{\prime}(x, y) = xy\left[1 + \alpha(1-x)^p (1-y)^p\right] \tag{3.3}$$

dağılımı elde edilir. Eğer

$$\mathrm{A}(x) = \left(1 - x^p\right),\ \mathrm{B}(x) = \left(1 - x^p\right),\quad p > 1$$

olduğunda ise,

$$\mathrm{H}_\alpha(x, y) = xy\left[1 + \alpha\left(1 - x^p\right)\left(1 - y^p\right)\right] \tag{3.4}$$

dağılımı elde edilir. Bunun için maksimum korelasyon katsayısı $\rho_{\max} = 0.434$ olarak bulunur.

Huang&Kotz (1999) marjinalleri düzgün(0,1) dağılıma sahip FGM dağılımının tek parametreli polinom tipi $\mathrm{H}_\alpha(x, y)$ dağılımı için α 'nın uygun aralığı:

$$-\{\max\{1, p\}\}^{-2} \le \alpha \le p^{-1} \tag{3.5}$$

ve korelasyon katsayısının aralığını;

$$-3(p+2)^{-2} \min\{1, p^2\} \le \rho \le \frac{3p}{(p+2)^2} \tag{3.6}$$

olarak bulmuştur. $\mathrm{H}_\alpha^{\prime}(x, y)$ dağılımı için ise α 'nın uygun aralığı:

$$-1 \leq \alpha \leq \left(\frac{p+1}{p-1} \right)^{p-1} \tag{3.7}$$

olarak elde etmiştir.

Teorem 3.3. (Bairamov ve Kotz (2003)) X ve Y rasgele değişkenlerinin ortak dağılım fonksiyonu,

$$F_{n,p,\alpha}(x,y) = xy\left\{1+\alpha(1-x^n)^p(1-y^n)^p\right\},\ \ 0 \leq x, y \leq 1\ ,\ n \geq 1\ ,\ \text{p>1} \tag{3.8}$$

şeklindeki kopula modelinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f_{n,p,\alpha}(x,y) = 1+\alpha(1-x^n)^{p-1}(1-y^n)^{p-1}\left[1-x^n(1+np)\right]\left[1-y^n(1+np)\right] \tag{3.9}$$

$$0 \leq x, y \leq 1\ ,\ n \geq 1\ ,\ \text{p>1}$$

dir. Burada α için uygun aralığın;

$$-\min\left\{ \frac{1}{n^2}\left(\frac{1+np}{n(p-1)} \right)^{2(p-1)}, 1 \right\} \leq \alpha \leq \frac{1}{n}\left(\frac{1+np}{n(p-1)} \right)^{p-1} \tag{3.10}$$

olduğunu göstermişlerdir. $F_{n,p,\alpha}(x,y)$ dağılımı için $t(x,y) \equiv \dfrac{\Gamma(x+1)\Gamma(2/y)}{y\Gamma(x+1+2/y)}$ olmak üzere, X ve Y rasgele değişkenleri arasındaki korelasyon katsayısı,

$$\rho \equiv \rho(x,y) = 12\alpha t^2(p,n) \tag{3.11}$$

olarak bulunmuştur.

Korelasyon katsayısı aşağıdaki eşitlikten;

$$\rho(x,y)=12\iint_{I^2}\left|F(x,y)-xy\right|dxdy \tag{3.12}$$

$$-12t^2(p,n)\min\left\{\frac{1}{n^2}\left(\frac{1+np}{n(p-1)}\right)^{2(p-1)},1\right\}\leq\rho\leq 12t^2(p,n)\frac{1}{n}\left(\frac{1+np}{n(p-1)}\right)^{p-1} \tag{3.13}$$

aralığında yer aldığını göstermişlerdir.

İki değişkenli kopula $C(u,v)$ düzgün(0,1) marjinal dağılıma sahip iki değişkenli ortak dağılım fonksiyonudur. Lai and Xie (2000) kopulanın marjinal rasgele değişkenlerini U ve V ile ifade etmektedir. Bu kopula modeline ilişkin ortak dağılım fonksiyonu $F(x,y)$ için

$$F^{-1}(u)=\inf\{x:F(x)\geq u\}$$

(Nelsen 1999) olmak üzere;

$$C(u,v)=F(F^{(-1)}{}_x(u),F_y{}^{(-1)}(v)) \tag{3.14}$$

olur. FGM kopula modifikasyonunun aşağıdaki şekli Lai and Xie (2000) tarafından ele alınmıştır.

$$C_\alpha(u,v)=uv\{1+\alpha(1-u)^p(1-v)^p\},\ p\geq 1,0\leq\alpha\leq 1 \tag{3.15}$$

Burada aynı zamanda;

$$w(u,v)=\alpha uv(1-u)^p(1-v)^p$$

olmak üzere;

$$w(u,v)\geq 0,\ 0\leq\alpha\leq 1$$

olduğu yerlerde

$$C(u,v) = uv + w(u,v) \tag{3.16}$$

şeklinde de yazılabilir. Eğer (3.7)’deki aralıkta α’nın aralığı,

$$0 \le \alpha \le \left(\frac{p+1}{p-1}\right)^{p-1}, \ p > 1$$

ise o zaman (3.16)’daki eşitlik için

$$w(u,v) \ge 0$$

olur.

(3.10)’daki eşitlikten yararlanarak α aralığı

$$0 \le \alpha \le \frac{1}{n}\left(\frac{1+np}{n(p-1)}\right)^{p-1} \tag{3.17}$$

şeklinde ise pozitif kadran bağımlı kopula elde edilir. Yani,

$$C(u,v) = uv\left\{1 + \alpha(1-u^n)^p(1-v^n)^p\right\}, \quad p > 1 \ n \ge 1$$

pozitif kadran bağımlı kopuladır. (Bairamov and Kotz 2003)

Lai and Xie (2000) tarafından

$$C(u,v) = uv + w(u,v) = uv + \alpha u^b v^b (1-u)^a (1-v)^a, \ a,b \ge 1 \tag{3.18}$$

iki değişkenli fonksiyon dikkate alınarak; $\alpha \ge 0$ için (3.18)’in iki değişkenli pozitif kadran bağımlı kopula olduğu görülür. (3.18)’deki iki değişkenli dağılım fonksiyonu için,

$$\mathrm{B}^{+}(a,b)=\left[\frac{b(a+b-1)+\sqrt{ab(a+b-1)}}{(a+b)(a+b-1)}\right]^{b-1}\times\left[1-\frac{b(a+b-1)+\sqrt{ab(a+b-1)}}{(a+b)(a+b-1)}\right]^{a-1}\times$$

$$\left[\frac{b(a+b-1)+\sqrt{ab(a+b-1)}}{(a+b-1)}-b\right]$$

(3.19)

ve

$$\mathrm{B}^{-}(a,b)=\left[\frac{b(a+b-1)-\sqrt{ab(a+b-1)}}{(a+b)(a+b-1)}\right]^{b-1}\times\left[1-\frac{b(a+b-1)-\sqrt{ab(a+b-1)}}{(a+b)(a+b-1)}\right]^{a-1}\times$$

$$\left[\frac{b(a+b-1)-\sqrt{ab(a+b-1)}}{(a+b-1)}-b\right]$$

(3.20)

olmak üzere; pozitif kadran bağımlı özelliğini sağlayan α aralığı

$$0\le\alpha\le\frac{1}{\mathrm{B}^{+}(a,b)\mathrm{B}^{-}(a,b)} \qquad (3.21)$$

olacaktır.

Burada, α için genel sınırlar,

$$-\min\left\{\frac{1}{\left[\mathrm{B}^{+}(a,b)\right]^{2}},\frac{1}{\left[\mathrm{B}^{-}(a,b)\right]^{2}}\right\}\le\alpha\le\frac{1}{\mathrm{B}^{+}(a,b)\mathrm{B}^{-}(a,b)} \qquad (3.22)$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 3.4. (Bairamov ve Kotz 2003) U ve V rasgele değişkenleri için;

$$C(u,v)=uv+w(u,v)=uv+\alpha u^{b}v^{b}(1-u)^{a}(1-v)^{a}$$

şeklindeki dağılım fonksiyonu, (3.22) eşitliğindeki α sınırlarını sağlayan iki değişkenli düzgün dağılımlı bir dağılım fonksiyonudur denir. Böylelikle, (3.21)'deki α için $C(u,v)$ pozitif kadran bağımlılık özelliğini sağlar.

Bu dağılım fonksiyonu için ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$c(u,v) = 1 + \alpha u^{b-1}(1-u)^{a-1}\left[b-(a+b)u\right]v^{b-1}(1-v)^{a-1}\left[b-(a+b)v\right]$$

dir.

Teorem 3.5. (Bairamov, Kotz and Bekçi (2001)) X ve Y sürekli rasgele değişkenleri için ortak dağılım fonksiyonu

$$F(x,y) = xy\left\{1+\alpha\left(1-x^{p_1}\right)^{q_1}\left(1-y^{p_2}\right)^{q_2}\right\} \tag{3.23}$$

$$p_1, p_2 \geq 1\,;\, q_1, q_2 > 1\,;\, 0 \leq x, y \leq 1$$

şeklinde olsun. Öyleyse bu dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 1+\alpha\left(1-x^{p_1}\right)^{q_1-1}\left[1-\left(1+p_1q_1\right)x^{p_1}\right] \\ &\times\left(1-y^{p_2}\right)^{q_2-1}\left[1-\left(1+p_2q_2\right)y^{p_2}\right] \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$0 \leq x, y \leq 1$$

olmaktadır. $f(x,y) \geq 0$ özelliğinden;

$$\alpha\left(1-x^{p_1}\right)^{q_1-1}\left[1-\left(1+p_1q_1\right)x^{p_1}\right]\left(1-y^{p_2}\right)^{q_2-1}\left[1-\left(1+p_2q_2\right)y^{p_2}\right] \geq -1$$

olduğu görülür. Böylelikle x ve y için;

$$\tilde{x} = \left(\frac{1}{1+p_1q_1}\right)^{1/p_1} \quad \tilde{y} = \left(\frac{1}{1+p_2q_2}\right)^{1/p_2}$$

eşitliği olduğu noktalarda, α 'nın her değeri için $f(x,y)=1$ elde edilir.

Bu dağılım için α 'nın sınırları;

$$-\min\left\{1, \frac{1}{p_1 p_2}\left(\frac{1+p_1 q_1}{p_1(q_1-1)}\right)^{q_1-1}\left(\frac{1+p_2 q_2}{p_2(q_2-1)}\right)^{q_2-1}\right\} \le \alpha \le$$
$$\le \min\left\{\frac{1}{p_1}\left(\frac{1+p_1 q_1}{p_1(q_1-1)}\right)^{q_1-1}, \frac{1}{p_2}\left(\frac{1+p_2 q_2}{p_2(q_2-1)}\right)^{q_2-1}\right\} \tag{3.25}$$

olarak bulunur. Eğer, α 'nın sınırları

$$0 \le \alpha \le \min\left\{\frac{1}{p_1}\left(\frac{1+p_1 q_1}{p_1(q_1-1)}\right)^{q_1-1}, \frac{1}{p_2}\left(\frac{1+p_2 q_2}{p_2(q_2-1)}\right)^{q_2-1}\right\} \tag{3.26}$$

ise X ve Y rasgele değişkenleri pozitif kadran bağımlılık özelliği gösterir.

3.2. İki Değişkenli Farlie-Gumbel-Morgenstern Modifikasyonu İçin Teorik Bir Çalışma

Burada, iki değişkenli FGM modifikasyonu için parametre sınırları çalışılmıştır. Bu modelin özel hallerinde ise, daha önce sunulan bazı iki değişkenli FGM modellerine ulaşmak mümkündür.

Teorem 3.6. X ve Y rasgele değişkenlerinin ortak dağılım fonksiyonu FGM modifikasyonlarından

$$F(x,y) = xy[1+\alpha x^{r_1} y^{r_2}(1-x^{p_1})^{q_1}(1-y^{p_2})^{q_2}] \tag{3.27}$$

$$p_1, p_2 \ge 1, \;\; q_1 = q_2 = 1, \;\; 0 \le x, y \le 1$$

olmak üzere

$$F(x,y) = xy[1+\alpha x^{r_1} y^{r_2}(1-x^{p_1})(1-x^{p_2})] \tag{3.28}$$

için olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f(x,y) = 1 + \alpha[(r_1+1)x^{r_1} - (r_1+p_1+1)x^{r_1+p_1}][(r_2+p_2+1)y^{r_2+p_2}] \tag{3.29}$$

şeklindedir.

$$f(x,y) \geq 0$$

özelliğinden;

$$\alpha \geq \frac{-1}{[(r_1+1)x^{r_1} - (r_1+p_1+1)x^{r_1+p_1}][(r_2+1)y^{r_2} - (r_2+p_2+1)y^{r_2+p_2}]} \tag{3.30}$$

$$r(x) = (r_1+1)x^{r_1} - (r_1+p_1+1)x^{r_1+p_1} \tag{3.31}$$

ve

$$r(y) = (r_2+1)y^{r_2} - (r_2+p_2+1)y^{r_2+p_2} \tag{3.32}$$

olmak üzere;

$$\alpha = \frac{-1}{r(x)r(y)} \tag{3.33}$$

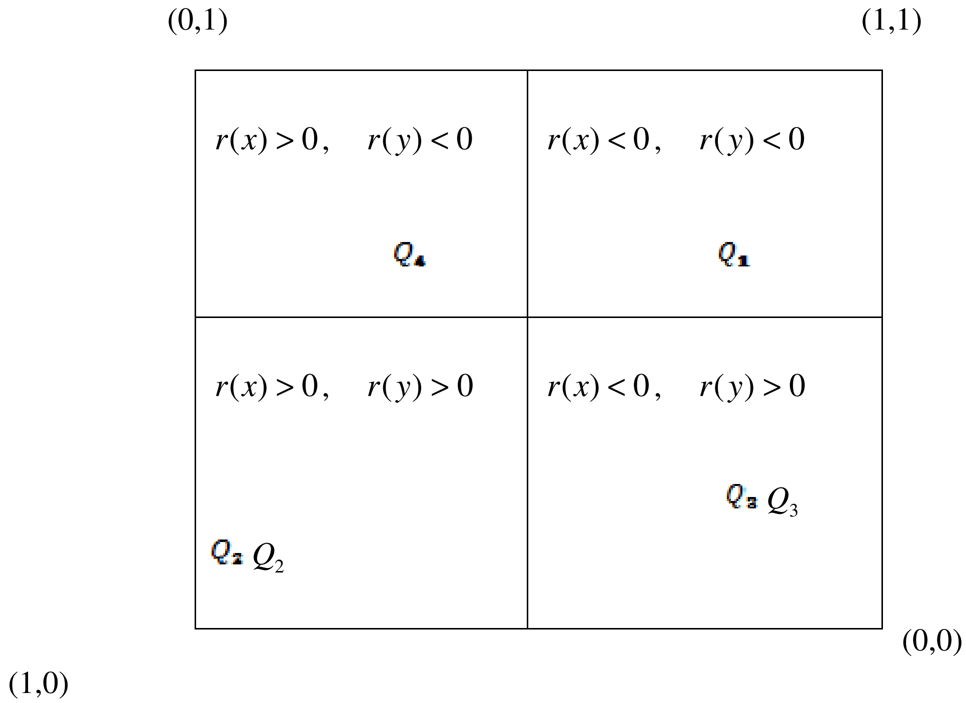
$$r'(x) = 0, \quad r'(y) = 0$$

ve buradan elde edilen kritik noktalar

$$x_* = \sqrt[p_1]{\frac{(r_1+1)}{(r_1+p_1+1)(r_1+p_1)}} \tag{3.34}$$

$$y_* = \sqrt[p_2]{\frac{(r_2+1)}{(r_2+p_2+1)(r_2+p_2)}} \tag{3.35}$$

Buna bağlı olarak kritik noktalarla Q_1, Q_2, Q_3 ve Q_4 kadranları aşağıdaki gibi gösterilebilir:



Şekil 3.1. Kritik noktaların kadranda gösterimi

$$Q_1\text{'de : } \sqrt[p_1]{\frac{(r_1+1)r_1}{(r_1+p_1+1)(r_1+p_1)}} \le x \le 1, \sqrt[p_2]{\frac{(r_2+1)}{(r_2+p_2+1)(r_2+p_2)}} \le y \le 1 \tag{3.36}$$

$$\alpha \ge \frac{-1}{\left(\frac{r_1}{r_1+p_1+1}\right)^{\frac{r_1}{p_1}} p_1 \left(\frac{r_2}{r_2+p_2+1}\right)^{\frac{r_2}{p_2}} p_2} \tag{3.37}$$

Q_2'de: $0 \le x \le \sqrt[p_1]{\dfrac{(r_1+1)r_1}{(r_1+p_1+1)(r_1+p_1)}}$ (3.38)

$$0 \le y \le \sqrt[p_2]{\frac{(r_2+1)r_2}{(r_2+p_2+1)(r_2+p_2)}} \tag{3.39}$$

$$\alpha \ge \frac{-1}{\left(\dfrac{r_1}{r_1+p_1+1}\right)^{\frac{r_1}{p_1}} p_1 \left(\dfrac{r_2}{r_2+p_2+1}\right)^{\frac{r_2}{p_2}} p_2} \tag{3.40}$$

Q_3'de : $\sqrt[p_1]{\dfrac{(r_1+1)r_1}{(r_1+p_1+1)(r_1+p_1)}} \le x \le 1$ (3.41)

$$0 \le y \le \sqrt[p_2]{\frac{(r_2+1)r_2}{(r_2+p_2+1)(r_2+p_2)}} \tag{3.42}$$

$$\alpha \le \frac{1}{\left(\dfrac{r_2}{r_2+p_2+1}\right)^{\frac{r_2}{p_2}} p_2} \tag{3.43}$$

Q_4'de: $0 \le x \le \sqrt[p_1]{\dfrac{(r_1+1)r_1}{(r_1+p_1+1)(r_1+p_1)}}$ (3.44)

$$\sqrt[p_2]{\frac{(r_2+1)r_2}{(r_2+p_2+1)(r_2+p_2)}} \le y \le 1 \tag{3.45}$$

$$\alpha \le \frac{1}{\left(\dfrac{r_1}{r_1+p_1+1}\right)^{\frac{r_1}{p_1}} p_1} \tag{3.46}$$

Dolayısı ile α için sınırlar:

$$\frac{-1}{\left(\frac{r_1}{r_1+p_1+1}\right)^{\frac{r_1}{p_1}} p_1 \left(\frac{r_2}{r_2+p_2+1}\right)^{\frac{r_2}{p_2}} p_2} \leq \alpha \leq \min\left\{\frac{1}{\left(\frac{r_1}{r_1+p_1+1}\right)^{\frac{r_1}{p_1}}}, \frac{1}{\left(\frac{r_2}{r_2+p_2+1}\right)^{\frac{r_2}{p_2}}}\right\} \tag{3.47}$$

olarak elde edilir.

Korelasyon katsayısını veren eşitlik ise;

$$\rho = \frac{12\alpha q_1 q_2}{(p_1 q_1 + r_1 + 2)(p_2 + q_2 + 2)} B\left(\frac{r_1+2}{p_1}, q_1\right) B\left(\frac{r_2+2}{p_2}, q_2\right) \tag{3.48}$$

dir.

4. UYGULAMALAR

Bu kısımda Çevre ve Orman Bakanlığı Devlet Meteoroloji Genel Müdürlüğü'nün yayınladığı Asit Yağmurları ve Hava Kirliliği Değerlendirme Raporu'ndan alınan Çatalca'ya ait yağış örneklerindeki anyon konsantrasyonlarından ve birikimlerinden elde edilen pH ile klor (Cl), sülfat (SO_4) ve nitrat (NO_3) değerleri arasındaki ilişki FGM dağılımları ile aşağıda olduğu gibi modellenmeye çalışılmıştır. Bu çalışma sırasında kullanılan veriler öncelikle düzgün dağılıma sahip verilere dönüştürülmüş, sonrasında da dönüştürülmüş bu veriler kullanılarak 3. Bölüm'de üzerinde durulan çeşitli FGM dağılımları ile modellemeler yapılmaya çalışılmıştır.

4.1. Uygulama 1

Yukarıda bahsedilen pH ve Cl değişkenleri için düzgün dağılıma dönüştürülmüş veriler sırasıyla X ve Y ile ifade edilsin. Bu değişkenler arasındaki ilişki iki değişkenli FGM modifikasyonlarından Bairamov ve Kotz (2003) ile aşağıda modellenmeye çalışılmıştır.

$$F_{n,p,\alpha}(x,y) = xy\left\{1+\alpha\left(1-x^n\right)^p\left(1-y^n\right)^p\right\}$$

$$f_{n,p,\alpha}(x,y) = 1+\alpha\left(1-x^n\right)^{p-1}\left(1-y^n\right)^{p-1}\left[1-x^n(1+np)\right]\left[1-y^n(1+np)\right]$$

$$0 \le x, y \le 1,\ n \ge 1,\ \text{p>1}$$

$$-\min\left\{\frac{1}{n^2}\left(\frac{1+np}{n(p-1)}\right)^{2(p-1)},1\right\} \le \alpha \le \frac{1}{n}\left(\frac{1+np}{n(p-1)}\right)^{p-1}$$

$$t(x,y) \equiv \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(2/y)}{y\Gamma(x+1+2/y)}$$

$$\rho \equiv \rho(x,y) = 12\alpha t^2(p,n)$$

$$-12t^2(p,n)\min\left\{\frac{1}{n^2}\left(\frac{1+np}{n(p-1)}\right)^{2(p-1)},1\right\} \le \rho \le 12t^2(p,n)\frac{1}{n}\left(\frac{1+np}{n(p-1)}\right)^{p-1}$$

X ve Y arasındaki korelasyon değeri;

$\rho = -0.24964$ olmak üzere,

$p = 3,\ \ n = 4$

alındığında

$$t(x, y) \equiv \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(2/y)}{y\Gamma(x+1+2/y)}$$

$$t(3,4) = \frac{\Gamma(4)\Gamma(2/4)}{4\Gamma(9/2)}$$

$$= \frac{8}{35}$$

$$\rho = 12\alpha t^2(p, n)$$

$$= 12\alpha\left(\frac{8}{35}\right)^2 = -0.24964$$

eşitlikteki α çekildiğinde elde edilen değer

$$\alpha = -0.39818$$

dir. α için elde edilecek aralık

$$-\min\left\{\frac{1}{n^2}\left(\frac{1+np}{n(p-1)}\right)^{2(p-1)}, 1\right\} \leq \alpha \leq \frac{1}{n}\left(\frac{1+np}{n(p-1)}\right)^{p-1}$$

eşitsizliğinden

$$-0.43581 \leq \alpha \leq 0.66016$$

elde edilir. Hesaplanan $\alpha = -0.39818$ aralık içine düştüğü görülmektedir.

ρ için elde edilecek aralık;

$$-12t^2(p,n)\min\left\{\frac{1}{n^2}\left(\frac{1+np}{n(p-1)}\right)^{2(p-1)},1\right\} \leq \rho \leq 12t^2(p,n)\frac{1}{n}\left(\frac{1+np}{n(p-1)}\right)^{p-1}$$

eşitsizliğinden

$$-0.2732 \leq \rho \leq 0.4138$$

dir. Hesaplanan $\rho = -0.24964$ aralık içine düştüğü görülmektedir.

X ve Y arasındaki korelasyon katsayısı -0.24964 olarak hesaplanmış ve aralarındaki ilişki Bairamov ve Kotz (2003) dağılımı ile aşağıdaki şekilde modellenmiştir:

$$F_{4,3,(-0.3982)}(x,y) = xy\left\{1 - 0.3982(1-x^4)^3(1-y^4)^3\right\} \tag{4.1}$$

$$f_{4,3,(-0.3982)}(x,y) = 1 - 0.3982(1-x^4)^2(1-y^4)^2(1-13x^4)(1-13y^4)$$

$$0 \leq x, y \leq 1$$

4.2. Uygulama 2

Yukarıda bahsedilen pH ve SO_4 değişkenleri için düzgün dağılıma dönüştürülmüş veriler sırasıyla X ve Y ile ifade edilsin. Bu değişkenler arasındaki ilişki iki değişkenli FGM modifikasyonlarından Bairamov, Kotz ve Bekçi (2001) ile aşağıda modellenmeye çalışılmıştır.

$$F(x,y) = xy\left\{1 + \alpha\left(1 - x^{p_1}\right)^{q_1}\left(1 - y^{p_2}\right)^{q_2}\right\}$$

$$p_1, p_2 \geq 1\,;\, q_1, q_2 > 1$$

$$0 \leq x, y \leq 1$$

$$-\min\left\{1,\frac{1}{p_1p_2}\left(\frac{1+p_1q_1}{p_1(q_1-1)}\right)^{q_1-1}\left(\frac{1+p_2q_2}{p_2(q_2-1)}\right)^{q_2-1}\right\}\le\alpha\le$$

$$\le\min\left\{\frac{1}{p_1}\left(\frac{1+p_1q_1}{p_1(q_1-1)}\right)^{q_1-1},\frac{1}{p_2}\left(\frac{1+p_2q_2}{p_2(q_2-1)}\right)^{q_2-1}\right\}$$

$$\rho=12\alpha t(q_1,p_1)t(q_2,p_2)$$

$$t(a,b)=\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(2/b)}{b\Gamma(a+1+2/b)}$$

X ve Y arasındaki korelasyon değeri;

$\rho=-0.18613$ olmak üzere,

$$p_1=2,\ \ p_2=4,\ q_1=2,\ q_2=2$$

alındığında,

$$t(a,b)=\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(2/b)}{b\Gamma(a+1+2/b)}$$

$$t(q_1,p_1)=\frac{1}{6},\quad t(q_2,p_2)=\frac{4}{15}$$

$$\rho=12\alpha\frac{1}{6}\frac{4}{15}=-0.18613$$

eşitlikteki α çekildiğinde elde edilen değer

$$\alpha=-0.3489$$

dir. α için elde edilecek aralık

$$-\min\left\{1,\frac{1}{p_1p_2}\left(\frac{1+p_1q_1}{p_1\left(q_1-1\right)}\right)^{q_1-1}\left(\frac{1+p_2q_2}{p_2\left(q_2-1\right)}\right)^{q_2-1}\right\}\leq\alpha\leq$$

$$\leq\min\left\{\frac{1}{p_1}\left(\frac{1+p_1q_1}{p_1\left(q_1-1\right)}\right)^{q_1-1},\frac{1}{p_2}\left(\frac{1+p_2q_2}{p_2\left(q_2-1\right)}\right)^{q_2-1}\right\}$$

eşitsizliğinden

$$-0.703125\leq\alpha\leq 0.5625$$

elde edilir. Hesaplanan α=-0.3489 aralık içine düştüğü görülmektedir.

X ve Y arasındaki korelasyon katsayısı -0.18613 olarak hesaplanmış ve aralarındaki ilişki Bairamov, Kotz ve Bekçi (2001) dağılımı ile aşağıdaki şekilde modellenmiştir:

$$F(x,y)=xy\left\{1-0.3489(1-x^2)^2(1-y^4)^2\right\} \tag{4.2}$$

$$f(x,y)=1-0.3489(1-x^2)(1-5x^2)(1-y^4)^2(1-9y^4)$$

$$0\leq x,y\leq 1$$

4.3. Uygulama 3

Yukarıda bahsedilen pH ve NO_3 değişkenleri için düzgün dağılıma dönüştürülmüş veriler sırasıyla X ve Y ile ifade edilsin. Bu değişkenler arasındaki ilişki üzerinde çalışılan iki değişkenli FGM modifikasyonu ile aşağıda modellenmeye çalışılmıştır.

Teorem 3.6'ya göre;

$$F(x,y)=xy[1+\alpha x^{r_1}y^{r_2}(1-x^{p_1})(1-x^{p_2})]$$

$$f(x,y) = 1 + \alpha[(r_1+1)x^{r_1} - (r_1+p_1+1)x^{r_1+p_1}][(r_2+p_2+1)y^{r_2+p_2}]$$

$$0 \le x, y \le 1$$

$$\rho = \frac{12\alpha q_1 q_2}{(p_1 q_1 + r_1 + 2)(p_2 + q_2 + 2)} B\left(\frac{r_1+2}{p_1}, q_1\right) B\left(\frac{r_2+2}{p_2}, q_2\right)$$

X ve Y arasındaki korelasyon değeri;

$$\rho = 0.089972$$

olmak üzere

$$p_1 = p_2 = 2,\ r_1 = r_2 = 1$$

alındığında

$$\rho = \frac{12\alpha q_1 q_2}{(p_1 q_1 + r_1 + 2)(p_2 + q_2 + 2)} B\left(\frac{r_1+2}{p_1}, q_1\right) B\left(\frac{r_2+2}{p_2}, q_2\right)$$

$$\rho = \frac{16\alpha}{75} = 0.089972$$

eşitlikteki α çekildiğinde elde edilecek değer

$$\alpha = 0.421744$$

dir. α için elde edilecek aralık

$$\frac{-1}{\left(\frac{r_1}{r_1+p_1+1}\right)^{\frac{r_1}{p_1}} p_1 \left(\frac{r_2}{r_2+p_2+1}\right)^{\frac{r_2}{p_2}} p_2} \le \alpha \le \min\left\{\frac{1}{\left(\frac{r_1}{r_1+p_1+1}\right)^{\frac{r_1}{p_1}}}, \frac{1}{\left(\frac{r_2}{r_2+p_2+1}\right)^{\frac{r_2}{p_2}}}\right\}$$

eşitsizliğinden

$$-1 \leq \alpha \leq 1$$

elde edilir. Hesaplanan α=0.421744 aralık içine düştüğü görülmektedir.

X ve Y arasındaki korelasyon katsayısı 0.089972 olarak hesaplanmış ve aralarındaki ilişki Teorem 3.6'da sunulan iki değişkenli FGM modifikasyonu ile aşağıdaki şekilde modellenmiştir:

$$F(x, y) = xy[1 + 0.4217xy(1 - x^2)(1 - y^2)] \tag{4.3}$$

$$f(x, y) = 1 + 0.4217(2x - 3x^3)(2y - 3y^3)$$

$$0 \leq x, y \leq 1$$

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada öncelikle kopula fonksiyonları ve temel özellikleri üzerinde durulmuştur. Sonrasında ise kopula fonksiyonları ile elde edilen Farlie-Gumbel-Morgenstern dağılımları tanıtılmaya çalışılmıştır.

Farlie-Gumbel-Morgenstern dağılımlarının nasıl elde edildiği bilgisi verildikten sonra FGM dağılımlarının çeşitli modifikasyonlarından bahsedilmiştir. Bu çeşitli modifikasyonlardaki parametrelerin sınırları ve rasgele değişkenler arasındaki ilişkiyi veren korelasyon katsayısı değeri ve korelasyon katsayısının hangi değerler arasına düşebileceğine dair hesaplamalar yapılmıştır.

Uygulama kısmında ise Çevre ve Orman Bakanlığı Devlet Meteoroloji İşleri Genel Müdürlüğünün yayınladığı "Asit Yağmurları ve Hava Kirliliği Değerlendirme Raporu"ndan alınan veriler kullanılarak daha öncesinde anlatılan FGM modifikasyonları ile modellemeler yapılmıştır. Kullanılan veriler Çatalca-İstanbul analizlerinden olup belli zamanlarda alınan yağış örneklerindeki pH, klor, sülfat ve nitrat değerleridir. Ancak bu veriler öncelikle [0,1] aralığında düzgün dağılıma sahip verilere dönüştürülmüştür. Düzgün dağılıma sahip veriler üzerinden işlemler devam ettirilmiştir. Bunun sonucunda uygun veriler ile çalışıldıktan sonra çeşitli parametre değerleri ile modellemeler yapılabileceği, bu parametrelerinin sınırlarının hesaplanabileceği, değişkenler arasındaki ilişkiyi gösteren korelasyon katsayısının hangi değerler arasına düşebileceği görülmüştür.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Alhan, A., 2008, Bağımsızlık Kapulasını İçeren Kapula Aileleri, Kapula Tahmin Yöntemleri ve İstanbul Menkul Kıymetler Borsasında Sektörler Arası Bağımlılık Yapısı, Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 162s.

Bairamov, I. and Eryılmaz, S. 2004, Characterization of symmetry and exceedance models in multivariate FGM distributions, *Journal of Applied Statistical Science,* 13 (2), 87-99p.

Bairamov, I.G. and Kotz, S., 2002, Dependence structure and symmetry of Huang-Kotz FGM distributions and their extensions. *Metrika,* 56 /1, 55-72 Springer.

Bairamov, I. G. and Kotz, S., 2003, On a new family of positive quadrant dependent bivariate distributions, *Intern. Mathematical Journal.,*3 (11).

Bairamov, I., Kotz, S. and Bekçi, M., 2001, New generalized Farlie- Gumbel-Morgenstern distributions and concomitants of order statistics, *Journal of Applied Statistics,* 28 (5), 521-536p.

Dall'Aglio, G., Kotz, S. and Salinetti, G.,eds., 1991, Advanced in Probability Distribution Functions with Given Marjinals Beyond the Copulas, Kluwer, Dordrecht, The Netherlans, 1-13p.

Farlie, D. J. G., 1960, The performance of some correlation coefficients for a general bivariate distribution, *Biometrika,* (47), 307-323 pp.

Frechet, M., 1951, Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données, Ann. Univ. Lyon, Sec. A (14), 53-77p.

Frees, E. W. and Valdez, E. A., 1998, Understanding relationships using copulas, *North American Actuarial Journal,* 2 (3), 143-149p.

Gumbel, E. J., 1960. Bivariate Exponntial Distributions, *J. Amer. Statist. Assoc.,* (55), 698-707p.

Huang, J. S. and Kotz, **S**.,1984, Correlation structure in iterated Farlie- Gumbel-Morgenstern distibution, *Biometrika,* (77), 633-636p.

Huang, J. S. and Kotz, S. , 1999, Modification of the Farlie-Gumbel-Morgenstern distributions. A though hill to climb, *Metrika,* (49), 135-145p.

Joe, H., 1997, Multivariate Models and Dependence Concepts, Chapman&Hall, London.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Johnson, N. L. and Kotz, S., 1975, On some generalized Farlie-Gumbel-Morgenstern distributions,*Communications in Statistics. Theor. Meth.,* (4), 415-427p.

Lai, C. D. and Xie, M., 2000, A new family of positive quadrant dependent bivariate distributions, *Statistics and Probability Letters,* (46), 359-364p.

Lehmann, E., 1966, Some concepts of dependence, *Annals of Mathematical Statistics,* (37), 1137-1153p.

Morgenstern, D., 1956, Einfache beispiele zweidimensionaler verteilungen, *Mitteilungsblatt für Mathematische Statistik,* (8), 234-235p.

Nelsen, R. B., 1994, Characterization of the Farlie-Gumbel-Morgenstern distribution by the property of the correlation coefficient, *Sankhya A,* (56), 476-479p.

Nelsen, R. B., 1999, An introduction to Copulas, *Springer*

T.C. Çevre ve Orman Bakanlığı Devlet Meteoroloji İşleri Genel Müdürlüğü, 2006, Asit Yağmurları ve Hava Kirliliği Değerlendirme Raporu.

Schweizer, B. and Wolff, E. F., 1981, On nonparametric measures of dependence for random variables, *Ann. Statist*., (9), 870-885p.

Yapakçı, G., 2007, Kopulalar Teorisinin Finansta Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 70s.

ÖZGEÇMİŞ

Günsu GÖKTAŞ, 25 Ocak 1987 tarihinde İzmir' in Bayındır ilçesinde doğdu. İlköğrenimini Bayındır Fatih İlköğretim Okulunda, ortaöğrenimini Tire Kutsan Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 2005 yılında Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümünü birincilik ile kazanarak lisans eğitimi almaya hak kazandı ve 2010 yılında İstatistik Bölümünden mezun oldu. Eylül 2010'dan sonra, eğitim hayatını Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı'nda devam ettirmektedir.

Lisans eğitimi sırasında Türkiye İstatistik Kurumu Ankara Bölge Müdürlüğü'nde, Çevre ve Orman Bakanlığı'nda ve Türkiye Cumhuriyet Merkez Bankası'nda dönemlik stajlar yapmıştır. Bunun yanı sıra çeşitli araştırma şirketlerinde anketör olarak görev almıştır.

EKLER

Ek 1 Düzgün Dağılıma Dönüştürülmüş Veriler

Ek 1 Düzgün Dağılıma Dönüştürülmüş Veriler

pH	Klor	Sülfat	Nitrat
0,8	0,95	1	0,98
0,63	0,6	0,61	0,86
0,61	0,21	0,31	0,2
0,94	0,14	0,1	0,42
0,97	0,18	0,53	0,94
0,95	0,22	0,14	0,33
0,9	0,09	0,26	0,67
0,9	0,27	0,56	0,92
0,84	0,24	0,31	0,73
0,18	0,49	0,42	0,85
0,17	0,22	0,56	0,46
0,17	0,12	0,33	0,28
0,74	0,41	0,82	0,72
0,82	0,64	0,97	0,93
0,68	0,1	0,21	0,31
0,83	0,01	0,08	0,11
0,76	0,18	0,24	0,34
0,2	0,36	0,28	0,48
0,24	0,24	0,48	0,47
0,48	0,36	0,27	0,2
0,26	0,28	0,36	0,37
0	0,13	0,19	0,16
0,44	0,62	0,96	0,92
0,62	0,42	0,67	0,71
0,62	0,99	0,64	0,61
0,8	0,67	0,59	0,63
0,69	0,23	0,06	0,07

Ek 1 (devam)

pH	Klor	Sülfat	Nitrat
0,76	0,48	0,47	0,29
0,61	0,67	0,4	0,35
0,35	0,36	0,42	0,28
0,26	0,98	0,88	0,72
0,52	0,42	0,58	0,56
0,52	0,29	0,56	0,47
0,27	0,96	0,7	0,71
0,25	1	0,98	0,99
0,05	0,53	0,57	0,51
0,09	0,18	0,27	0,21
0,19	0,97	0,63	0,5
0,03	0,53	0,56	0,56
0,18	0,86	0,87	0,76
0,39	0,4	0,63	0,32
0,22	0,63	0,55	0,31
0,52	0,9	0,71	0,67
0,51	0,76	0,78	0,72
0,66	0,23	0,15	0,13
0,72	0,15	0,28	0,15
0,69	0,11	0,11	0,09
0,59	0,72	0,57	0,53