EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

REGÜLER YÜZEYLERDEKİ DARBOUX ÇATILARI ÜZERİNE

Emrah TUNÇ

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Emin ÖZYILMAZ

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu : 403.02.01

Sunuş Tarihi : 28.06.2012

Bornova-İZMİR

2012

Emrah TUNÇ tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak sunulan **“Regüler Yüzeylerdeki Darboux Çatıları Üzerine”** başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 28/06/2012 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:		**İmza**
Jüri başkanı	**: Doç. Dr.Emin ÖZYILMAZ**	**...…….…..……………**
Raportör Üye	**: Prof. Dr. Ali ÇALIŞKAN**	**.....……………………**
Üye	**: Yrd. Doç. Dr. İlhan KARAKILIÇ**	**..………...……………**

ÖZET

REGÜLER YÜZEYLERDEKİ DARBOUX ÇATILARI ÜZERİNE

TUNÇ, Emrah

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Emin ÖZYILMAZ
Haziran 2012, 60 sayfa

Daha önce Dr. Fahrettin Akbulut tarafından, Darboux vektörü olarak isimlendirilen vektör kullanılarak diferansiyel geometrinin bilinen bazı formülleri elde edilmiştir. Bu formüller, yüzeyin bir M noktasından geçen parametre eğrilerinin birbirine dik alınmasıyla çıkarılmış olup, bu çalışmada dik kesişmemeleri durumunda Darboux vektörünün ve dolayısıyla formüllerin nasıl bir forma dönüşeceği, bir anlamda yüzeyin diferansiyel geometrisinin birbirine dik olmayan parametre eğrileriyle incelenmesi amaçlanmıştır.

Anahtar sözcükler: Darboux Vektörü, Darboux Üç Yüzlüsü, Frenet Üç Yüzlüsü, parametre eğrileri, normal eğrilik, jeodezik eğrilik, jeodezik burulma, Gauss Eğriliği.

ABSTRACT

ABOUT DARBOUX FRAMES ON REGULAR SURFACES

TUNÇ, Emrah

M. Sc. Thesis, in Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Emin ÖZYILMAZ

June 2012, 60 Pages

By using the Darboux Vector, various well-known formulas of differential geometry had been produced by Doctor Fahrettin Akbulut. These formulas were obtained through formulating parametric curves which pass through a point M on a surface which are perpendicular each other. The aim of this study is to investigate the Darboux Vector and the related formulas if the parametric curves do not intersect at an angle different from $\pi/2$. In this way, the study aims to analyze differential geometry of surfaces using parametric curves which are not intersecting perpendicularly.

Keywords: Darboux Vector, Darboux Frame, Frenet Frame, parametric curves, normal curvature, geodesic curvature, geodesic torsion, Gaussian Curvature.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması boyunca danışmanlığımı yapan, destek ve yardımlarını benden esirgemeyen sayın hocam Doç. Dr. Emin Özyılmaz'a ve her zaman yanımda olan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

1.GİRİŞ

Regüler bir eğrinin, belirli bir noktasındaki teğet, asal normal ve binormal birim vektörlerinden meydana gelen üç yüzlü Frenet üç yüzlüsü olarak adlandırılır. Bir regüler yüzey üzerinde alınan regüler bir eğrinin, herhangi bir noktasında tanımlanan Frenet üç yüzlüsüne ilaveten, o noktada, eğrinin teğeti, yüzeyin normali ve jeodezik normal birim vektörlerinden oluşan Darboux üç yüzlüsü tanımlıdır. Teğetleri ortak olan bu iki üç yüzlünün diğer ayrıtları aynı düzlemdedir. Bu iki üç yüzlünün ayrıtlarını teşkil eden birim vektörler, eğrinin o noktadaki teğeti ve türevlerinden meydana gelse de, diğer taraftan her bir ayrıtın türevi, bu ayrıtın Darboux vektörü denilen vektörle vektörel çarpımına eşittir.

Tezin ikinci bölümü, yukarıda kısaca bahsedilen Frenet ve Darboux üç yüzlüsü, bunların arasındaki ilişki, ayrıca Darboux vektörünün, özel hallerde yüzey üzerinde bazı özel eğriler teşkil etmesinden söz etmektedir.

Üçüncü bölüm, yüzeyin belirli bir noktasındaki parametre eğrilerinin teğetleri arasındaki açının 90^0 den farklı bir θ açısı olması durumunda, yüzeyin bu noktasından geçen herhangi bir eğrinin, o noktadaki Darboux üç yüzlüsünün ayrıtlarının, parametre eğrilerinin Darboux üç yüzlülerinin ayrıtları cinsinden ifadelerini içermektedir. Ayrıca bu eğrinin Darboux vektörünün, parametre eğrilerinin Darboux vektörleri cinsinden ifadesini ve bazı diferansiyel geometri formüllerinin Darboux vektörleriyle elde edilmesini içermektedir.

Dr. Fahrettin Akbulut tarafından "Bir Yüzey Üzerindeki Eğrilerin Darboux Vektörleri" ismiyle doktora tezi olarak ortaya konan çalışmada, yüzeyin bir noktasındaki parametre eğrileri arasındaki açı 90^0 alınmıştır. Bu tezin amacı sözü geçen doktora tezindeki yapının 90^0 den farklı olması durumunun yeniden incelenmeye çalışılmasıdır. Diğer bir deyişle, o noktadan geçen herhangi iki parametre eğrisi kullanılarak formüllerde genellemeye gidilmesi ve 90^0 lik açının özel bir hal olarak kalması amaçlanmıştır.

2. DARBOUX VE FRENET ÜÇ YÜZLÜLERİ

2.1 Katı Bir Dik Üç Yüzlünün Darboux Vektörü

Teorem 2.1.1: Bir t parametresine bağlı olarak değişen katı dik bir üç yüzlünün ayrıtlarının birim vektörleri bu parametrenin vektörel fonksiyonları olduğuna göre, bu ayrıtların verilen parametreye göre türevleri $\vec{\omega}$ gibi bir vektörle, türevi alınan birim vektörün vektörel çarpımına eşittir. (t parametresinin fonksiyonu olan bu $\vec{\omega}$ vektörüne verilen üç yüzlünün *Darboux vektörü* denir.)

İspat: Verilen üç yüzlünün ayrıtlarının birim vektörleri sırasıyla $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ olsun. Bu üç yüzlünün bir sağ sistem teşkil ettiği varsayılırsa hipoteze göre aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

a) $$\overrightarrow{e_1}^2 = \overrightarrow{e_2}^2 = \overrightarrow{e_3}^2 = 1$$

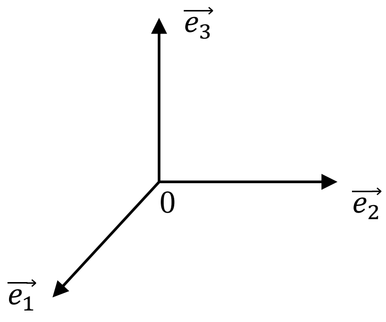
b) $$\overrightarrow{e_1}.\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_2}.\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_3}.\overrightarrow{e_1} = 0$$

c) $$\overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_1}, \ \ \overrightarrow{e_3} \wedge \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_2}, \ \ \overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3}$$

Öte yandan $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_1}(t)$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_2}(t)$, $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_3}(t)$ olup, parametrenin belirli bir $t = t_0$ değeri için

$$\frac{d\overrightarrow{e_1}}{dt}, \frac{d\overrightarrow{e_2}}{dt}, \frac{d\overrightarrow{e_3}}{dt}$$

türevlerinin gösterdiği bu vektörlerin $t = t_0$ değerine karşılık gelen yukarıdaki üç yüzlüye göre a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ bileşenleri düşünülürse,



Şekil 2.1.1: Ortonormal Üç Yüzlü

d)
$$\frac{d\overrightarrow{e_1}}{dt} = a_{11}\overrightarrow{e_1} + a_{12}\overrightarrow{e_2} + a_{13}\overrightarrow{e_3}$$
$$\frac{d\overrightarrow{e_2}}{dt} = a_{21}\overrightarrow{e_1} + a_{22}\overrightarrow{e_2} + a_{23}\overrightarrow{e_3}$$
$$\frac{d\overrightarrow{e_3}}{dt} = a_{31}\overrightarrow{e_1} + a_{32}\overrightarrow{e_2} + a_{33}\overrightarrow{e_3}$$

yazılabilir. Oysa **a)** ve **b)** eşitliklerinde her iki tarafın türevi alınırsa,

e)
$$\overrightarrow{e_1}.\frac{d\overrightarrow{e_1}}{dt} + \overrightarrow{e_1}.\frac{d\overrightarrow{e_1}}{dt} = \overrightarrow{e_2}.\frac{d\overrightarrow{e_2}}{dt} + \overrightarrow{e_2}.\frac{d\overrightarrow{e_2}}{dt} = \overrightarrow{e_3}.\frac{d\overrightarrow{e_3}}{dt} + \overrightarrow{e_3}.\frac{d\overrightarrow{e_3}}{dt} = 0$$
$$\frac{d\overrightarrow{e_1}}{dt}.\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_1}.\frac{d\overrightarrow{e_2}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{e_2}}{dt}.\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_2}.\frac{d\overrightarrow{e_3}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{e_3}}{dt}.\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}.\frac{d\overrightarrow{e_1}}{dt} = 0$$

d) de verilen türevler **e)** de yerine yazılırsa,

f)
$$a_{ji} + a_{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3)$$
$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$$

g)
$$a_{23} = -a_{32} = a$$
$$a_{31} = -a_{13} = b$$
$$a_{12} = -a_{21} = c$$

şeklinde a, b, c gibi birbirinden farklı üç bileşen elde edilir. **d)** formülleri,

h)
$$\frac{d\overrightarrow{e_1}}{dt} = c\overrightarrow{e_2} - b\overrightarrow{e_3} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ b & c \end{vmatrix}$$
$$\frac{d\overrightarrow{e_2}}{dt} = a\overrightarrow{e_3} - c\overrightarrow{e_1} = -\begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_3} \\ a & c \end{vmatrix} \qquad (2.1.1)$$
$$\frac{d\overrightarrow{e_3}}{dt} = b\overrightarrow{e_1} - a\overrightarrow{e_2} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} \\ a & b \end{vmatrix}$$

şeklini alır. Bu eşitliklerin elde edilmesi için aşağıdaki matrisin ilk satırında her elemanı kendi minörüne eşitlemek yeterlidir.

i)
$$\begin{bmatrix} \frac{d\overrightarrow{e_1}}{dt} & \frac{d\overrightarrow{e_2}}{dt} & \frac{d\overrightarrow{e_3}}{dt} \\ \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ a & b & c \end{bmatrix} \tag{2.1.2}$$

j)
$$\vec{\omega} = a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}$$

eşitliğiyle verilen $\vec{\omega}$ vektörü, Darboux vektörüdür. Böylece,

$$\frac{d\overrightarrow{e_1}}{dt} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{e_1}$$

olduğu görülür. Diğer türevler için de benzer şekilde aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$\frac{d\overrightarrow{e_1}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{e_1}$$

$$\frac{d\overrightarrow{e_2}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{e_2} \quad , \quad \vec{\omega} = a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3} \tag{2.1.3}$$

$$\frac{d\overrightarrow{e_3}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{e_3}$$

Sonuç olarak teorem ispatlanmış olur (Akbulut, 1970).

(2.1.1) formülleri aşağıdaki gibi tek formülle gösterilebilir.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{bmatrix} \tag{2.1.4}$$

(2.1.1) formülünü sembolik olarak şu şekilde gösterilebilir.

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{bmatrix} = [E] \quad , \quad \vec{\omega} = a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}$$

olduğundan,

$$\frac{d}{dt}[E] = \vec{\omega} \wedge [E] \tag{2.1.5}$$

olur.

Sonuç 2.1.1: $\frac{d\vec{e_1}}{dt}, \frac{d\vec{e_2}}{dt}, \frac{d\vec{e_3}}{dt}$ vektörleri aynı düzlemdedirler. Çünkü (2.1.3) formülleri gereğince her üçü de $\vec{\omega}$ vektörüne diktir (Akbulut, 1970).

Sonuç 2.1.2: t parametresi olarak zaman seçilirse $\vec{\omega}$ Darboux vektörünün kinematik yorumunu yapmak mümkündür. $\vec{\omega}$ vektörünü içeren bu doğru, bu üç yüzlünün bağlı olduğu katı cismin *ani dönme ekseni*ni, $\vec{\omega}$ ise ani dönmedeki *açısal hız vektörü*nü verir (Akbulut, 1970).

2.2 Frenet Üç Yüzlüsü

$r = r(s)$ vektörel denklemiyle verilen bir eğri düşünülürse, burada s, eğri üzerinde seçilen bir başlangıç noktasından itibaren belirli bir yönde ölçülen eğri yay uzunluğunu gösterir. Bu eğrinin belirli bir s parametresine karşılık gelen noktadaki teğet, asal normal ve binormal birim vektörlerinden meydana gelen $\vec{\mathrm{t}}, \vec{\mathrm{n}}, \vec{\mathrm{b}}$ üç yüzlüsüne *Frenet üç yüzlüsü* denir. Bu üç yüzlüye herhangi bir dik üç yüzlünün ayrıtlarının birim vektörlerine uygulanan türev formülleri uygulanırsa (2.1.1) formülleri gereğince,

$$\frac{d\vec{\mathrm{t}}}{ds} = c\vec{\mathrm{n}} - b\vec{\mathrm{b}}$$

$$\frac{d\vec{\mathrm{n}}}{ds} = a\vec{\mathrm{b}} - c\vec{\mathrm{t}} \tag{2.2.1}$$

$$\frac{d\vec{\mathrm{b}}}{ds} = b\vec{\mathrm{t}} - a\vec{\mathrm{n}}$$

olur. Halbuki eğrinin verilen M noktasındaki eğrilik yarıçapı R burulma yarıçapı T ise Frenet formülleri gereğince,

$$\frac{d\vec{\mathrm{t}}}{ds} = \frac{\vec{\mathrm{n}}}{R}$$

$$\frac{d\vec{\mathrm{n}}}{ds} = \frac{\vec{\mathrm{b}}}{T} - \frac{\vec{\mathrm{t}}}{R} \tag{2.2.2}$$

$$\frac{d\vec{\mathrm{b}}}{ds} = -\frac{\vec{\mathrm{n}}}{T}$$

dir. (2.2.1) ve (2.2.2) formülleri karşılaştırılırsa şu eşitlikler elde edilir.

$$c\vec{\mathrm{n}} - b\vec{\mathrm{b}} = \frac{\vec{\mathrm{n}}}{R} \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{1}{R} \ \ , \ \ b = 0,$$

$$a\vec{\mathrm{b}} - c\vec{\mathrm{t}} = \frac{\vec{\mathrm{b}}}{T} - \frac{\vec{\mathrm{t}}}{R} \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{1}{T} \ \ , \ \ c = \frac{1}{R},$$

$$b\vec{\mathrm{t}} - a\vec{\mathrm{n}} = -\frac{\vec{\mathrm{n}}}{T} \quad \Longrightarrow \quad b = 0 \ \ , \ \ a = \frac{1}{T}$$

elde edilir. Şu halde herhangi bir dik üç yüzlüdeki $\vec{\omega} = a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2} + c\overrightarrow{e_3}$ Darboux vektörü Frenet üçyüzlüsünde,

$$\vec{f} = \frac{\vec{\mathrm{t}}}{T} + \frac{\vec{\mathrm{b}}}{R} \tag{2.2.3}$$

şeklini alır. Bu takdirde genel bir dik üç yüzlü için elde edilen (2.1.2), (2.1.3), (2.1.4) ve (2.1.5) formülleri, Frenet üç yüzlüsüne uygulanırsa, şu formüller yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \dfrac{d\vec{\mathrm{t}}}{ds} & \dfrac{d\vec{\mathrm{n}}}{ds} & \dfrac{d\vec{\mathrm{b}}}{ds} \\ \vec{\mathrm{t}} & \vec{\mathrm{n}} & \vec{\mathrm{b}} \\ \dfrac{1}{T} & 0 & \dfrac{1}{R} \end{bmatrix} \tag{2.2.4}$$

Bu matriste, birinci satırdaki her elemanın minörü kendisine eşit kılınacaktır.

$$\frac{d\vec{\mathrm{t}}}{ds} = \vec{f} \wedge \vec{\mathrm{t}}$$

$$\frac{d\vec{\mathrm{n}}}{ds} = \vec{f} \wedge \vec{\mathrm{n}} \tag{2.2.5}$$

$$\frac{d\vec{\mathrm{b}}}{ds} = \vec{f} \wedge \vec{\mathrm{b}}$$

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix}\vec{\mathrm{t}}\\ \vec{\mathrm{n}}\\ \vec{\mathrm{b}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{R} & 0\\ -\frac{1}{R} & 0 & \frac{1}{T}\\ 0 & -\frac{1}{T} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{\mathrm{t}}\\ \vec{\mathrm{n}}\\ \vec{\mathrm{b}}\end{bmatrix} \tag{2.2.6}$$

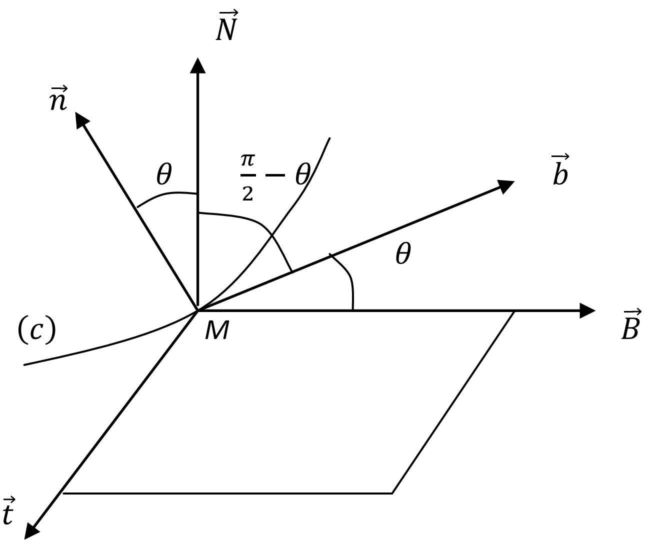
(Akbulut, 1970).

2.3 Darboux Üç Yüzlüsü

$\vec{\mathrm{r}}=\vec{\mathrm{r}}(u,v)$ vektörel denklemiyle verilen bir regüler yüzey göz önüne alınsın. Bu yüzey üzerinde (c) gibi bir eğri verilmiş olsun. Bu (c) eğrisinin her noktasına Frenet üçyüzlüsü denilen bir üç yüzlü karşılık gelir. Frenet üç yüzlüsüyle ilgili formüller eğrinin özüyle ilgilidir. Şimdi de eğrinin üzerinde bulunduğu yüzeyle ilgili formülleri kapsayacak olan diğer bir üç yüzlü tanımlanacaktır.

Eğrinin M noktasındaki teğetin birim vektörü $\vec{\mathrm{t}}$ olsun. Yüzeyin M noktasında teğet düzlemine çizilen dikme ise bu yüzeyin söz konusu noktadaki normalini belirtir. Bu dikme üzerinde, yönü, yüzeyin belirlenmiş bir tarafına doğru seçilen $\vec{\mathrm{N}}$ birim vektörüne de yüzeyin M deki *normal birim vektörü* denir. $\vec{\mathrm{t}}$ ve $\vec{\mathrm{N}}$ verilince $\vec{\mathrm{t}}\wedge\vec{\mathrm{N}}=\vec{\mathrm{B}}$ ile tanımlanan $\vec{\mathrm{B}}$ vektörü alınırsa böylece $\vec{\mathrm{t}},\vec{\mathrm{N}},\vec{\mathrm{B}}$ gibi yeni bir üç yüzlü elde edilir. Buna *Darboux üç yüzlüsü* denir. Demek oluyor ki yüzey üzerinde bir (c) eğrisi ve M noktası verilince $\vec{\mathrm{t}},\vec{\mathrm{n}},\vec{\mathrm{b}}$ den oluşan Frenet ve $\vec{\mathrm{t}},\vec{\mathrm{N}},\vec{\mathrm{B}}$ den oluşan Darboux üçyüzlüsü karşılık gelmektedir. $\vec{\mathrm{t}}$ ayrıtları aynı olan bu iki dik üç yüzlü birbirine sıkı sıkıya bağlıdır. Herhangi bir üç yüzlü için Teorem (2.1.1) de verilen bütün formüller Darboux üç yüzlüsü için de geçerlidir. Darboux üç yüzlüsünün Darboux vektörü aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\vec{\omega}=a\vec{\mathrm{t}}+b\vec{\mathrm{N}}+c\vec{\mathrm{B}}$$



Şekil 2.3.1: Darboux ve Frenet Üç Yüzlüsü

Burada $\vec{\mathrm{t}}, \vec{\mathrm{N}}, \vec{\mathrm{B}}$ vektörleri de (c) eğrisinin s yay uzunluğunun fonksiyonları olup, buradaki a, b, c gelişigüzel sayılar olmayıp her birisi yüzey ve üzerindeki eğrinin verilmesiyle belirlenecek, bir anlamı olan özel sayılardır. Bunların geometrik yorumu yapılmadan her birine ayrı bir isim verilecektir.

$a = \frac{1}{T_g}$ jeodezik burulma , T_g jeodezik burulma yarıçapı

$b = \frac{1}{R_g}$ jeodezik eğrilik , R_g jeodezik eğrilik yarıçapı

$c = \frac{1}{R_n}$ normal eğrilik , R_n normal eğrilik yarıçapı

Şimdi T_g, R_g, R_n nin bulunuşu gösterilip, geometrik yorumu yapılacaktır.

Teorem (2.1.1) gereğince Darboux üç yüzlüsü için aşağıdaki formüller yazılır.

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{\mathrm{t}}}{T_g} + \frac{\vec{\mathrm{N}}}{R_g} + \frac{\vec{\mathrm{B}}}{R_n}$$

Darboux vektörü olmak üzere,

$$\frac{d\vec{\mathrm{t}}}{ds} = \vec{\omega} \wedge \vec{\mathrm{t}} \quad , \quad \frac{d\vec{\mathrm{N}}}{ds} = \vec{\omega} \wedge \vec{\mathrm{N}} \quad , \quad \frac{d\vec{\mathrm{B}}}{ds} = \vec{\omega} \wedge \vec{\mathrm{B}} \qquad (2.3.1)$$

dir. (2.3.1) ifadeleri,

$$\begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} = [D] \quad , \quad \frac{d}{ds}[D] = \vec{\omega} \wedge [D] \tag{2.3.2}$$

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_n} & -\frac{1}{R_g} \\ -\frac{1}{R_n} & 0 & \frac{1}{T_g} \\ \frac{1}{R_g} & -\frac{1}{T_g} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{t} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{bmatrix} \tag{2.3.3}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d\vec{t}}{ds} & \frac{d\vec{N}}{ds} & \frac{d\vec{B}}{ds} \\ \vec{t} & \vec{N} & \vec{B} \\ \frac{1}{T_g} & \frac{1}{R_g} & \frac{1}{R_n} \end{bmatrix} \tag{2.3.4}$$

matrisel formlar şeklinde de ifade edilir.

Darboux matrisi diye adlandırılan (2.3.4) matrisinde birinci satırdaki her eleman kendi minörüne eşitlenirse Darboux üç yüzlüsünün birim vektörlerinin türevlerini veren,

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \begin{vmatrix} \vec{N} & \vec{B} \\ \frac{1}{R_g} & \frac{1}{R_n} \end{vmatrix} = \frac{\vec{N}}{R_n} - \frac{\vec{B}}{R_g}$$

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = -\begin{vmatrix} \vec{t} & \vec{B} \\ \frac{1}{T_g} & \frac{1}{R_n} \end{vmatrix} = \frac{\vec{B}}{T_g} - \frac{\vec{t}}{R_n} \tag{2.3.5}$$

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = \begin{vmatrix} \vec{t} & \vec{N} \\ \frac{1}{T_g} & \frac{1}{R_g} \end{vmatrix} = \frac{\vec{t}}{R_g} - \frac{\vec{N}}{T_g}$$

formülleri elde edilir.

Teorem 2.3.1: Bir yüzey üzerindeki (c) eğrisinin M noktasındaki burulma yarıçapı T ve eğrinin M deki $\vec{n}$ asal normali ile M deki $\vec{N}$ yüzey normali arasındaki açı θ ise M deki jeodezik burulma yarıçapı T_g için,

$$\frac{1}{T_g} = \frac{1}{T} + \frac{d\theta}{ds} \quad (s \text{ eğri yayı}) \qquad (2.3.6)$$

dir.

İspat: $\vec{\mathrm{n}}.\vec{\mathrm{N}} = \cos\theta$

Her iki tarafın s ye göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\vec{\mathrm{n}}}{ds}.\vec{\mathrm{N}} + \vec{\mathrm{n}}.\frac{d\vec{\mathrm{N}}}{ds} = -\sin\theta\frac{d\theta}{ds}$$

ve $\frac{d\vec{\mathrm{n}}}{ds}$ ve $\frac{d\vec{\mathrm{N}}}{ds}$ in değerleri yerine yazılırsa,

$$\left(\frac{\vec{\mathrm{b}}}{T} - \frac{\vec{\mathrm{t}}}{R}\right).\vec{\mathrm{N}} + \vec{\mathrm{n}}.\left(\frac{\vec{\mathrm{B}}}{T_g} - \frac{\vec{\mathrm{t}}}{R_n}\right) = -\sin\theta\frac{d\theta}{ds}$$

elde edilir.

$\vec{\mathrm{t}}.\vec{\mathrm{N}} = 0,\ \ \vec{\mathrm{n}}.\vec{\mathrm{t}} = 0,\ \ \vec{\mathrm{b}}.\vec{\mathrm{N}} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta,\ \ \vec{\mathrm{n}}.\vec{\mathrm{B}} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$
olduğundan,

$$\frac{\sin\theta}{T} - \frac{\sin\theta}{T_g} = -\sin\theta\frac{d\theta}{ds} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{T} - \frac{1}{T_g} = -\frac{d\theta}{ds}$$

bulunur. Buradan da,

$$\frac{1}{T_g} = \frac{1}{T} + \frac{d\theta}{ds}$$

elde edilir (Akbulut, 1970).

Teorem 2.3.2: (c) eğrisinin M deki eğrilik yarıçapı R ve (c) nin M deki $\vec{\mathrm{n}}$ asal normali ile yüzeyin $\vec{\mathrm{N}}$ normali arasındaki açı θ ise M deki R_n ve R_g sırasıyla normal ve jeodezik eğrilik yarıçapları göstermek üzere,

$$\frac{1}{R_n} = \frac{\cos\theta}{R} \quad , \quad \frac{1}{R_g} = \frac{\sin\theta}{R} \qquad (2.3.7)$$

bağıntıları vardır.

İspat: Frenet ve Darboux üç yüzlülerinin Darboux vektörleri sırasıyla $\vec{f}$ ve $\vec{\omega}$ olduğuna göre,

$$\frac{d\vec{\mathrm{t}}}{ds} = \vec{f} \wedge \vec{\mathrm{t}} \quad , \quad \frac{d\vec{\mathrm{t}}}{ds} = \vec{\omega} \wedge \vec{\mathrm{t}}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\vec{f} \wedge \vec{\mathrm{t}} - \vec{\omega} \wedge \vec{\mathrm{t}} = \left(\vec{f} - \vec{\omega}\right) \wedge \vec{\mathrm{t}} = 0$$

olup, $\vec{f}$ ve $\vec{\omega}$ nın değerleri yazılırsa,

$$\left(\frac{\vec{\mathrm{t}}}{T} + \frac{\vec{\mathrm{b}}}{R} - \frac{\vec{\mathrm{t}}}{T_g} - \frac{\vec{\mathrm{N}}}{R_g} - \frac{\vec{\mathrm{B}}}{R_n}\right) \wedge \vec{\mathrm{t}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\vec{\mathrm{b}} \wedge \vec{\mathrm{t}}}{R} = \frac{\vec{\mathrm{N}} \wedge \vec{\mathrm{t}}}{R_g} + \frac{\vec{\mathrm{B}} \wedge \vec{\mathrm{t}}}{R_n}$$

$\vec{\mathrm{b}} \wedge \vec{\mathrm{t}} = \vec{\mathrm{n}}$, $\vec{\mathrm{N}} \wedge \vec{\mathrm{t}} = -\vec{\mathrm{B}}$, $\vec{\mathrm{B}} \wedge \vec{\mathrm{t}} = \vec{\mathrm{N}}$ olduğundan,

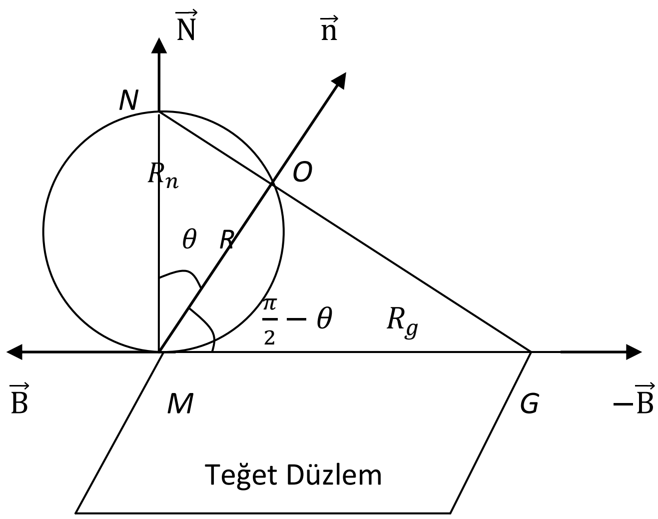
$$\frac{\vec{\mathrm{n}}}{R} = \frac{\vec{\mathrm{N}}}{R_n} - \frac{\vec{\mathrm{B}}}{R_g} \tag{2.3.8}$$

elde edilir. Bu vektörel eşitliğin her iki tarafı bir defa $\vec{\mathrm{N}}$ ile bir defa da $-\vec{\mathrm{B}}$ ile skaler olarak çarpılırsa,

$$\frac{1}{R_n} = \frac{\vec{\mathrm{n}}.\vec{\mathrm{N}}}{R} = \frac{\cos\theta}{R} \quad , \quad \frac{1}{R_g} = -\frac{\vec{\mathrm{n}}.\vec{\mathrm{B}}}{R} = -\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{R} = \frac{\sin\theta}{R}$$

bulunarak teorem ispatlanmış olur (Akbulut, 1970).

Sonuç 2.3.1 (Geometrik Yorum): (c) eğrisinin sırasıyla $\left(\vec{\mathrm{t}}, \vec{\mathrm{N}}\right)$ düzlemi yani normal düzlem üzerindeki izdüşümü (c_1) ve $\left(\vec{\mathrm{t}}, \vec{\mathrm{B}}\right)$ düzlemi yani teğet düzlemi üzerindeki izdüşümü (c_2) olduğuna göre $\frac{1}{R_n}$ ve $\frac{1}{R_g}$ cebirsel sayılarının yani normal ve jeodezik eğriliklerinin mutlak değeri sırasıyla (c_1) ve (c_2) eğrilerinin M deki eğriliklerine eşittir. Bu geometrik yorum şekil 2.3.2 de daha iyi görülmektedir. (c) eğrisinin, 0 eğrilik merkezinden $\vec{\mathrm{n}}$ asal normaline çizilen dikmenin yüzeyin normal doğrusunu kestiği nokta N ve $\vec{\mathrm{B}}$ vektörü veya uzantısını kestiği nokta G ise, burada $MO = R,\ MN = R_n,\ MG = R_g$ olup, N, normal eğrilik merkezi, G ise jeodezik eğrilik merkezidir. O da verilen (c) eğrisinin eğrilik merkezidir.



Şekil 2.3.2: Bir Yüzey Eğrisinin Eğrilikleri

Sonuç 2.3.2: Frenet ve Darboux vektörleri arasındaki bağıntı,

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{\omega} \wedge \vec{t} \quad , \quad \frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{f} \wedge \vec{t}$$

Bağıntılarından,

$\vec{\omega} \wedge \vec{t} = \vec{f} \wedge \vec{t} \;\; \Rightarrow \;\; \left(\vec{\omega} - \vec{f}\right) \wedge \vec{t} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \vec{\omega} - \vec{f} = \lambda\vec{t}$ (λ herhangi bir sabit)

elde edilir. Buna göre,

$$\vec{\omega} = \vec{f} + \lambda\vec{t}$$

Yani,

$$\frac{\vec{t}}{T_g} + \frac{\vec{N}}{R_g} + \frac{\vec{B}}{R_n} = \frac{\vec{t}}{T} + \frac{\vec{b}}{R} + \lambda\vec{t}$$

olup, her iki taraf $\vec{t}$ ile skaler olarak çarpılırsa,

$$\frac{1}{T_g} = \frac{1}{T} + \lambda$$

elde edilir. (2.3.6) gereğince $\lambda = \frac{d\theta}{ds}$ dir. O halde,

$$\vec{\omega} = \vec{f} + \vec{\mathrm{t}}\frac{d\theta}{ds} \tag{2.3.9}$$

sonucuna ulaşılır (Akbulut, 1970).

Sonuç 2.3.3: Darboux üç yüzlüsünün ani dönme hız vektörü iki bileşenden ibaret olup, biri Frenet üç yüzlüsünün ani dönme hız vektörüne çakışık olup diğeri, büyüklüğü $\frac{d\theta}{ds}$ e eşit olan ve teğet doğrultusunda olan bileşendir. Bu nedenle yüzey üzerindeki (c) eğrisinin bir M noktası bu eğri üzerinde hareket edince Darboux üç yüzlüsü, Frenet üç yüzlüsüne göre ayrıca her anda teğet etrafında $\frac{d\theta}{ds}$ açısal hızıyla dönecektir (Akbulut, 1970).

Sonuç 2.3.4: Yüzey üzerindeki bir eğrinin asal normaliyle yüzeyin aynı noktadaki normali arasındaki açı daima sabit kalıyorsa, $\frac{d\theta}{ds} = 0$ edeceğinden (2.3.9) gereğince $\vec{\omega} = \vec{f}$ olduğu gibi, (2.3.6) gereğince de $\frac{1}{T_g} = \frac{1}{T}$ olur. Yani eğrinin her noktasındaki burulması, yüzeyin o noktasındaki burulmasına eşit olur (Akbulut, 1970).

2.4 Darboux Vektörünün Özel Halleri, Yüzey Üzerinde Dikkate Değer Eğriler

Darboux vektörü,

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{\mathrm{t}}}{T_g} + \frac{\vec{\mathrm{N}}}{R_g} + \frac{\vec{\mathrm{B}}}{R_n}$$

den ibaret olup yüzey üzerinde öyle eğriler düşünülebilir ki, bu eğri üzerindeki her noktada Darboux vektörünün bazı bileşenleri devamlı olarak sıfır olur. Böylece,

$\frac{1}{T_g} = 0$ ise *Eğrilik Çizgileri*

$\frac{1}{R_g} = 0$ ise *Jeodezik Çizgiler*

$\frac{1}{R_n} = 0$ ise *Asimptotik Çizgiler*

adını alır.

Teorem 2.4.1: $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ vektörel denklemiyle verilen bir yüzey göz önüne alınsın. Genel olarak yüzeyin bir noktasından iki tane eğrilik çizgisi geçer ve bu yüzey üzerine,

$$d\vec{r}^2 = ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

$$-d\vec{r}.d\vec{N} = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

eşitlikleriyle verilmiş olan 1. ve 2. esas formlarda, E, F, G ve L, M, N nin verilmesiyle eğrilik çizgilerinin diferansiyel denklemi bulunabilir.

İspat: (2.3.5) gereğince,

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{\vec{B}}{T_g} - \frac{\vec{t}}{R_n}$$

olup, eğer verilen eğri eğrilik çizgisi ise $\frac{1}{T_g} = 0$ olacağından,

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = -\frac{\vec{t}}{R_n} \quad \Longrightarrow \quad d\vec{N} = -\frac{1}{R_n}\vec{t}ds \tag{2.4.1}$$

elde edilir. Buradan,

$$d\vec{N} = -\frac{1}{R_n}d\vec{r} \quad \Longrightarrow \quad \vec{N}_u du + \vec{N}_v dv = -\frac{1}{R_n}(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafı bir defa $\vec{r}_u$ ile bir defa da $\vec{r}_v$ ile skaler olarak çarpılırsa,

$$-Ldu - Mdv = -\frac{1}{R_n}(Edu + Fdv)$$

$$-Mdu - Ndv = -\frac{1}{R_n}(Edu + Gdv)$$

denklemlerine ulaşılır. Bu iki denklem arasında $\frac{1}{R_n}$ yok edilirse, eğrilik çizgilerinin diferansiyel denklemi olan,

$$(EM - LF)du^2 + (EN - LG)dudv + (FN - MG)dv^2 = 0$$

denklemi elde edilir. Bu diferansiyel denklem, determinant halinde de yazılabilir.

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0 \tag{2.4.2}$$

$\frac{du}{dv} = m$ denirse, m sayısına, yüzey üzerinde eğrinin bir teğet doğrultusu karşılık gelir. (2.4.2) denkleminde $\frac{du}{dv} = m$ alınırsa,

$$Am^2 + Bm + C = 0$$

gibi bir denklem elde edilir. Bir ikinci derece denklemin genel olarak m_1 ve m_2 gibi iki kökü vardır ve m_1, m_2 den herbiri bir eğrilik çizgisine karşılık geldiği düşünülürse, yüzeyin her noktasından genel olarak iki eğrilik çizgisi geçtiği anlaşılır. Böylece istenen ispatlanmış olur (Akbulut, 1970).

Tanım 2.4.1: Bir noktadaki eğrilik çizgilerinin teğet doğrultularına bu noktadaki *asal doğrultular* denir. Asal doğrultulardaki normal eğrilikler, diğer doğrultulardaki normal eğriliklerden ayırt etmek için $\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.4.2: $K = \frac{1}{R_1 R_2}$ değerine de yüzeyin verilen noktadaki G*auss Eğriliği* denir.

Teorem 2.4.2: Eğrilik çizgileri yüzeyin parametre eğrileri olarak seçilirse yani $v = sbt$ ve $u = sbt$ eğrilik çizgileri ise bu takdirde *Olinde-Rodridue* formülleri denen

$$\vec{\mathrm{N}}_u = -\frac{1}{R_1}\vec{\mathrm{r}}_u$$

(2.4.3)

$$\vec{\mathrm{N}}_v = -\frac{1}{R_2}\vec{\mathrm{r}}_v$$

bağıntıları vardır.

İspat: Eğrilik çizgileri için verilen (2.4.1) bağıntısından

$$\vec{\mathrm{N}}_u du + \vec{\mathrm{N}}_v dv = -\frac{1}{R_n}(\vec{\mathrm{r}}_u du + \vec{\mathrm{r}}_v dv)$$

yazılır. Buradan,

$$v = \text{sbt} \implies dv = 0 \text{ ve } \frac{1}{R_n} = \frac{1}{R_1}$$

$$u = \text{sbt} \implies du = 0 \text{ ve } \frac{1}{R_n} = \frac{1}{R_2}$$

olacağından (2.4.3) elde edilir (Akbulut, 1970).

Teorem 2.4.3: Eğrilik çizgileri birbirine diktir.

İspat: $\vec{\mathrm{r}} = \vec{\mathrm{r}}(u, v)$ yüzey denkleminde parametre eğrileri yani $v = sbt,\ u = sbt$ eğrileri *eğrilik çizgileri* olarak seçilsin. Bu takdirde bunların kesim noktasındaki teğet doğrultuları $\vec{\mathrm{r}}_\mathrm{u}$ ve $\vec{\mathrm{r}}_\mathrm{v}$ den ibaret olup teoremin doğruluğunun gösterilmesi için $\vec{\mathrm{r}}_\mathrm{u}.\vec{\mathrm{r}}_\mathrm{v}$ =0 bağıntısının gösterilmesi yeterlidir.

$$\vec{\mathrm{N}}.\vec{\mathrm{r}}_u = 0 \quad , \quad \vec{\mathrm{N}}.\vec{\mathrm{r}}_v = 0$$

denklemlerinin birincisinin v'ye, ikincisinin u'ya göre türevleri alınıp taraf tarafa çıkarıldıktan sonra $\vec{\mathrm{N}}_u$ ve $\vec{\mathrm{N}}_v$ yerine de (2.4.3)deki değerler yazılırsa,

$$0 = \vec{\mathrm{N}}_v.\vec{\mathrm{r}}_u - \vec{\mathrm{N}}_u.\vec{\mathrm{r}}_v = \left(-\frac{1}{R_2}\vec{\mathrm{r}}_v\right).\vec{\mathrm{r}}_u - \left(-\frac{1}{R_1}\vec{\mathrm{r}}_u\right).\vec{\mathrm{r}}_v$$

$$= \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\vec{\mathrm{r}}_u.\vec{\mathrm{r}}_v$$

elde edilir.

$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = 0$ olması hali bir kenara bırakılırsa, genel olarak $\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \neq 0$ olduğu göz önünde tutulduğunda,

$$\vec{\mathrm{r}}_u.\vec{\mathrm{r}}_v = 0$$

elde edilir. Bu da iddianın doğruluğunu gösterir (Akbulut, 1970).

Teorem 2.4.4: $\frac{1}{T_g}$ jeodezik burulması aşağıdaki ifade ile verilebilir. *E, F, G* birinci esas formdaki katsayılar, *L, M, N* ikinci esas formdaki katsayılar, $w = |\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v| = \sqrt{EG - F^2}$ ve ds ise eğrinin yay elemanı olduğuna göre,

$$\frac{1}{T_g} = \frac{1}{wds^2}\begin{vmatrix} Edu + Fdv & Fdu + Gdv \\ Ldu + Mdv & Mdu + Ndv \end{vmatrix} \qquad (2.4.4)$$

dir.

İspat: (2.3.5) formülleri gereğince,

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{\vec{B}}{T_g} - \frac{\vec{t}}{R_n} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{T_g} = \frac{d\vec{N}}{ds}.\vec{B} = \frac{d\vec{N}}{ds}(\vec{t} \wedge \vec{N})$$

veya

$$\frac{1}{T_g} = \vec{N}\left(\frac{d\vec{N}}{ds} \wedge \vec{t}\right) = \frac{(\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v)}{w}\left(\frac{d\vec{N}}{ds} \wedge \frac{d\vec{r}}{ds}\right) = -\frac{1}{wds^2}(d\vec{r} \wedge d\vec{N})(\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v)$$

$$= -\frac{1}{wds^2}\begin{vmatrix} \vec{r}_u.d\vec{r} & \vec{r}_v.d\vec{r} \\ \vec{r}_u.d\vec{N} & \vec{r}_v.d\vec{N} \end{vmatrix}$$

dir. Öte yandan,

$$\vec{r}_u.d\vec{r} = \vec{r}_u(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) = Edu + Fdv$$

$$\vec{r}_v.d\vec{r} = \vec{r}_v(\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) = Fdu + Gdv$$

$$\vec{r}_u.d\vec{N} = \vec{r}_u(\vec{N}_u du + \vec{N}_v dv) = -Ldu - Mdv$$

$$\vec{r}_v.d\vec{N} = \vec{r}_v(\vec{N}_u du + \vec{N}_v dv) = -Mdu - Ndv$$

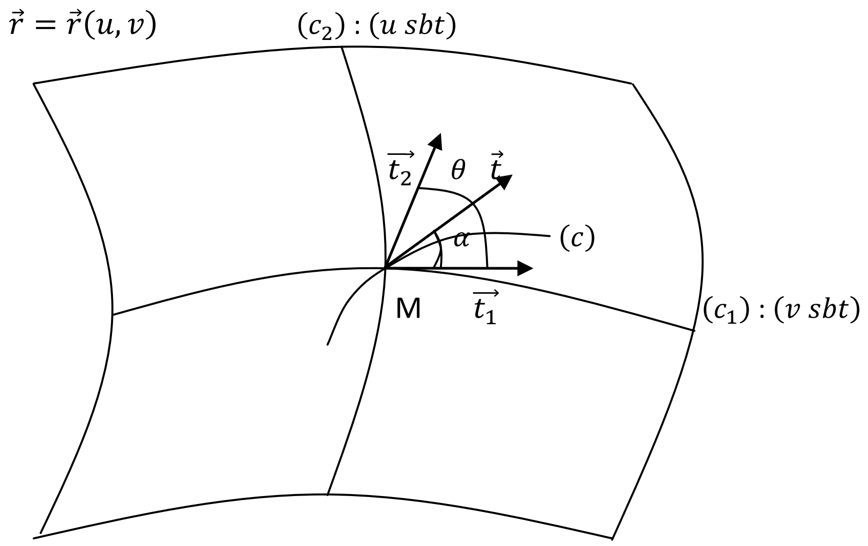
olduğu dikkate alındığında, (2.4.4) elde edilir.

Not : $\begin{vmatrix} Edu + Fdv & Fdu + Gdv \\ Ldu + Mdv & Mdu + Ndv \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{T_g} = 0$

olacağından bu denklem yeniden eğrilik çizgilerinin diferansiyel denklemini verir (Akbulut, 1970).

3. BİR REGÜLER YÜZEYİN EĞRİ TAKIMININ DARBOUX VEKTÖRLERİ

3.1 Bazı Tanımlar ve Temel Bağıntılar



Şekil 3.1.1: Yüzeyin Bir Noktasındaki Parametre Eğrileri

Tanım 3.1.1: $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ vektörel denklemiyle verilmiş olan bir yüzey için $v = sbt$ ve $u = sbt$ değerleri yüzey üzerinde birer eğri gösterirler ki buna *yüzeyin parametre eğrileri* denir.

Burada parametre eğrilerinin arasında θ gibi bir açının bulunması göz önüne alınacaktır. Yüzey üzerinde bir M noktasından bir (c) eğrisi geçsin. Aynı M noktasından geçen $v= sbt$ parametre eğrisi (c_1) ve $u= sbt$ parametre eğrisi (c_2) ile gösterilsin. (c) , (c_1) ve (c_2) nin M deki birim teğet vektörleri sırasıyla $\vec{t}$, $\overrightarrow{t_1}$ ve $\overrightarrow{t_2}$ olsun. M deki yüzeyin normal birim vektörü de $\overrightarrow{N}$ ile gösterilsin.

$$\vec{t} \wedge \overrightarrow{N} = \overrightarrow{B} \quad , \quad \overrightarrow{t_1} \wedge \overrightarrow{N} = \overrightarrow{B_1} \quad , \quad \overrightarrow{t_2} \wedge \overrightarrow{N} = \overrightarrow{B_2}$$

olduğu biliniyor. Bu durumda,

$$\left[\vec{t}, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{B}\right] \quad , \quad \left[\overrightarrow{t_1}, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{B_1}\right] \quad , \quad \left[\overrightarrow{t_2}, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{B_2}\right]$$

gibi üç Darboux üç yüzlüsü elde edilir. Bunların her birine karşılık gelen Darboux vektörleri sırasıyla,

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{\mathrm{t}}}{T_g} + \frac{\vec{\mathrm{N}}}{R_g} + \frac{\vec{\mathrm{B}}}{R_n}$$

$$\overrightarrow{\omega_1} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{t}_1}}{\left(T_g\right)_1} + \frac{\vec{\mathrm{N}}}{\left(R_g\right)_1} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{B}_1}}{(R_n)_1} \qquad (3.1.1)$$

$$\overrightarrow{\omega_2} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{t}_2}}{\left(T_g\right)_2} + \frac{\vec{\mathrm{N}}}{\left(R_g\right)_2} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{B}_2}}{(R_n)_2}$$

şeklinde elde edilir.

(c) eğrisinin M den itibaren belirli yönde ölçülen yay uzunluğu s,

(c_1) eğrisinin M den itibaren belirli yönde ölçülen yay uzunluğu s_1,

(c_2) eğrisinin M den itibaren belirli yönde ölçülen yay uzunluğu s_2,

ile gösterilecektir.

$$\overrightarrow{\mathrm{t}_1} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{r_u}}}{\|\overrightarrow{\mathrm{r_u}}\|} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{r_u}}}{\sqrt{E}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{t}_2} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{r_v}}}{\|\overrightarrow{\mathrm{r_v}}\|} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{r_v}}}{\sqrt{G}} \qquad (3.1.2)$$

$$\vec{\mathrm{t}} = \overrightarrow{\mathrm{r_u}}.\frac{du}{ds} + \overrightarrow{\mathrm{r_v}}.\frac{dv}{ds}$$

dir. Ayrıca, hipotezden,

$$\overrightarrow{\mathrm{t}_1}.\overrightarrow{\mathrm{t}_2} = cos\,\theta$$

$$(3.1.3)$$

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{t}_1} \wedge \overrightarrow{\mathrm{t}_2}}{\left\|\overrightarrow{\mathrm{t}_1} \wedge \overrightarrow{\mathrm{t}_2}\right\|} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{t}_1} \wedge \overrightarrow{\mathrm{t}_2}}{\sin\theta} = \vec{\mathrm{N}}$$

yazılır. (3.1.2) nin ilk iki formülü göz önüne alınırsa,

$$\overrightarrow{\mathrm{r_u}} = \overrightarrow{\mathrm{t}_1}\sqrt{E} \quad , \quad \overrightarrow{\mathrm{r_v}} = \overrightarrow{\mathrm{t}_2}\sqrt{G}$$

yazılır. Bu eşitlikler (3.1.2) nin son formülünde yerine yerleştirilirse,

$$\vec{t} = \overrightarrow{r_u}.\frac{du}{ds} + \overrightarrow{r_v}.\frac{dv}{ds} = \overrightarrow{t_1}\sqrt{E}\frac{du}{ds} + \overrightarrow{t_2}\sqrt{G}\frac{dv}{ds} \tag{3.1.4}$$

elde edilir. $\overrightarrow{t_1}$ ile $\overrightarrow{t_2}$ nin arasındaki açının θ olduğu biliniyor. $\vec{t}$ ile $\overrightarrow{t_1}$ arasındaki açı α ile gösterilirse, $\vec{t}$ ile $\overrightarrow{t_2}$ arasındaki açı $\theta - \alpha$ dır. (3.1.4) ün her iki tarafı sırasıyla önce $\overrightarrow{t_1}$ ve sonra $\overrightarrow{t_2}$ ile çarpılırsa,

$$\vec{t}.\overrightarrow{t_1} = cos\,\alpha = \sqrt{E}\frac{du}{ds} + cos\,\theta\,\sqrt{G}\frac{dv}{ds}$$

$$(3.1.5)$$

$$\vec{t}.\overrightarrow{t_2} = cos(\theta - \alpha) = cos\,\theta\,\sqrt{E}\frac{du}{ds} + \sqrt{G}\frac{dv}{ds}$$

elde edilir. (3.1.5) deki iki eşitlik, trigonometrik açılımlar kullanılarak ortak çözülürse,

$$\frac{sin(\theta - \alpha)}{sin\,\theta} = \sqrt{E}\frac{du}{ds}$$

$$(3.1.6)$$

$$\frac{sin\,\alpha}{sin\,\theta} = \sqrt{G}\frac{dv}{ds}$$

olarak bulunur. (3.1.6) daki eşitlikler (3.1.4) de yerine yazıldığında,

$$\vec{t} = \overrightarrow{t_1}\frac{sin(\theta - \alpha)}{sin\,\theta} + \overrightarrow{t_2}\frac{sin\,\alpha}{sin\,\theta} \tag{3.1.7}$$

elde edilir. ds, ds_1 ve ds_2 yayları için,

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

$$ds_1{}^2 = Edu^2 \tag{3.1.8}$$

$$ds_2{}^2 = Gdv^2$$

yazılır. (3.1.6) ve (3.1.8) dikkate alınırsa,

$$\frac{sin(\theta-\alpha)}{sin\,\theta}=\sqrt{E}\frac{du}{ds}=\frac{ds_1}{ds}$$

(3.1.9)

$$\frac{sin\,\alpha}{sin\,\theta}=\sqrt{G}\frac{dv}{ds}=\frac{ds_2}{ds}$$

elde edilir. $\vec{t}$ ve $\vec{N}$, $\overrightarrow{t_1}$ ve $\overrightarrow{t_2}$ cinsinden ifade edildikten sonra $\vec{B}$ de, $\overrightarrow{B_1}$ ve $\overrightarrow{B_2}$ cinsinden ifade edilebilir.

$$\vec{B}=\vec{t}\wedge\vec{N}=\left[\overrightarrow{t_1}\frac{sin(\theta-\alpha)}{sin\,\theta}+\overrightarrow{t_2}\frac{sin\,\alpha}{sin\,\theta}\right]\wedge\vec{N}$$

$$=\left(\overrightarrow{t_1}\wedge\vec{N}\right)\frac{sin(\theta-\alpha)}{sin\,\theta}+\left(\overrightarrow{t_2}\wedge\vec{N}\right)\frac{sin\,\alpha}{sin\,\theta}$$

$$=\overrightarrow{B_1}\frac{sin(\theta-\alpha)}{sin\,\theta}+\overrightarrow{B_2}\frac{sin\,\alpha}{sin\,\theta}$$

dir. Buradan da,

$$\vec{B}=\overrightarrow{B_1}\frac{sin(\theta-\alpha)}{sin\,\theta}+\overrightarrow{B_2}\frac{sin\,\alpha}{sin\,\theta} \tag{3.1.10}$$

elde edilir.

Özel Hal: $\theta=90^0$ seçilmesi durumunda (3.1.7) ve (3.1.10)

$$\vec{t}=\overrightarrow{t_1}\,cos\,\alpha+\overrightarrow{t_2}\,sin\,\alpha$$

$$\vec{B}=\overrightarrow{B_1}\,cos\,\alpha+\overrightarrow{B_2}\,sin\,\alpha$$

şeklini alır (Akbulut, 1970).

3.2 Eğri Takımının Darboux Üç yüzlüleri Arasındaki İlişkiler

Teorem 3.2.1: Parametre eğrilerinin Darboux üç yüzlülerinden biri (c_1) üzerinde hareket ederse sadece s_1 değişeceğinden ayırtlar s_1 in fonksiyonu, (c_2) üzerinde hareket ederse s_2 nin fonksiyonu olduğundan, bu tek üç yüzlünün ayırtları hem s_1 in hem de s_2 nin fonksiyonudur. Ayırtların s_1 e göre türevleri alınırsa bu ayırtların $\overrightarrow{\omega_1}$ ile, s_2 ye göre türevleri alınırsa alınırsa $\overrightarrow{\omega_2}$ ile vektörel çarpılır.

İspat: $[\overrightarrow{t_1}, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{B_1}]$, $[\overrightarrow{t_2}, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{B_2}]$ üç yüzlülerinin her ikisinde de $\overrightarrow{N}$ çakışıktır ve $\overrightarrow{N} = \frac{\overrightarrow{t_1} \wedge \overrightarrow{t_2}}{\sin\theta}$ dir.

$$\overrightarrow{B_1} = \overrightarrow{t_1} \wedge \overrightarrow{N} = \overrightarrow{t_1} \wedge \left(\frac{\overrightarrow{t_1} \wedge \overrightarrow{t_2}}{\sin\theta}\right) = \left[\frac{\overrightarrow{t_1}(\overrightarrow{t_1}.\overrightarrow{t_2}) - \overrightarrow{t_2}(\overrightarrow{t_1}.\overrightarrow{t_1})}{\sin\theta}\right] = \frac{1}{\sin\theta}\left(\overrightarrow{t_1}\cos\theta - \overrightarrow{t_2}\right)$$

$$\overrightarrow{B_2} = \overrightarrow{t_2} \wedge \overrightarrow{N} = \overrightarrow{t_2} \wedge \left(\frac{\overrightarrow{t_1} \wedge \overrightarrow{t_2}}{\sin\theta}\right) = \left[\frac{\overrightarrow{t_1}(\overrightarrow{t_2}.\overrightarrow{t_2}) - \overrightarrow{t_2}(\overrightarrow{t_1}.\overrightarrow{t_2})}{\sin\theta}\right] = \frac{1}{\sin\theta}\left(\overrightarrow{t_1} - \overrightarrow{t_2}\cos\theta\right)$$

dir. Böylece,

$$\overrightarrow{B_1} = \frac{1}{\sin\theta}\left(\overrightarrow{t_1}\cos\theta - \overrightarrow{t_2}\right)$$

$$\overrightarrow{B_2} = \frac{1}{\sin\theta}\left(\overrightarrow{t_1} - \overrightarrow{t_2}\cos\theta\right) \tag{3.2.1}$$

elde edilir.

Özel Hal: $\theta = 90^0$ seçilirse (3.2.1) $\overrightarrow{B_1} = -\overrightarrow{t_2}$ ve $\overrightarrow{B_2} = \overrightarrow{t_1}$ olacağından, Darboux üç yüzlüleri, hepsinin sıra ve yönü aynı olmamak şartıyla birbirine çakışıktır.

$$\frac{\partial\overrightarrow{t_1}}{\partial s_1} = \overrightarrow{\omega_1} \wedge \overrightarrow{t_1} \quad , \quad \frac{\partial\overrightarrow{N}}{\partial s_1} = \overrightarrow{\omega_1} \wedge \overrightarrow{N} \quad , \quad \frac{\partial\overrightarrow{B_1}}{\partial s_1} = \overrightarrow{\omega_1} \wedge \overrightarrow{B_1}$$

$$\frac{\partial\overrightarrow{t_2}}{\partial s_2} = \overrightarrow{\omega_2} \wedge \overrightarrow{t_2} \quad , \quad \frac{\partial\overrightarrow{N}}{\partial s_2} = \overrightarrow{\omega_2} \wedge \overrightarrow{N} \quad , \quad \frac{\partial\overrightarrow{B_2}}{\partial s_2} = \overrightarrow{\omega_2} \wedge \overrightarrow{B_2} \tag{3.2.2}$$

(2.1.3) den oldukları biliniyor. (3.2.1) eşitliklerinden ilki (3.2.2) de yerine yazılırsa,

$$\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{B}_1}}{\partial s_1}=\frac{\partial\left[\frac{1}{sin\,\theta}\left(\overrightarrow{\mathrm{t}_1}\,cos\,\theta-\overrightarrow{\mathrm{t}_2}\right)\right]}{\partial s_1}=\frac{1}{sin\,\theta}\left(\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{t}_1}}{\partial s_1}cos\,\theta-\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{t}_2}}{\partial s_1}\right)$$

$$=\frac{1}{sin\,\theta}\left[\left(\overrightarrow{\omega_1}\wedge\overrightarrow{\mathrm{t}_1}\right)cos\,\theta-\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{t}_2}}{\partial s_1}\right]$$

$$\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{B}_1}}{\partial s_1}=\overrightarrow{\omega_1}\wedge\overrightarrow{\mathrm{B}_1}=\overrightarrow{\omega_1}\wedge\left[\frac{1}{sin\,\theta}\left(\overrightarrow{\mathrm{t}_1}\,cos\,\theta-\overrightarrow{\mathrm{t}_2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{sin\,\theta}\left[\left(\overrightarrow{\omega_1}\wedge\overrightarrow{\mathrm{t}_1}\right)cos\,\theta-\left(\overrightarrow{\omega_1}\wedge\overrightarrow{\mathrm{t}_2}\right)\right]$$

bulunur. İki ifade birbirine eşitlenirse,

$$\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{t}_2}}{\partial s_1}=\overrightarrow{\omega_1}\wedge\overrightarrow{\mathrm{t}_2}$$

elde edilir. Bunun sonucunda $\overrightarrow{\mathrm{t}_1}$ in s_1 e göre türevi alındığında $\overrightarrow{\mathrm{t}_1}$ in $\overrightarrow{\omega_1}$ ile, $\overrightarrow{\mathrm{t}_1}$ in s_2 ye göre türevi alındığında $\overrightarrow{\mathrm{t}_1}$ in $\overrightarrow{\omega_2}$ ile vektörel olarak çarpıldığı anlaşılmaktadır. Diğerleri için de aynı şeylerin söylenebileceği açıktır. Böylece,

$$\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{t}_\imath}}{\partial s_j}=\overrightarrow{\omega_\jmath}\wedge\overrightarrow{\mathrm{t}_\imath}\quad,\quad\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{B}_\imath}}{\partial s_j}=\overrightarrow{\omega_\jmath}\wedge\overrightarrow{\mathrm{B}_\imath}\quad,\quad\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{N}}}{\partial s_j}=\overrightarrow{\omega_\jmath}\wedge\overrightarrow{\mathrm{N}}\quad(\mathrm{i},\mathrm{j}=1,2)\qquad(3.2.3)$$

sonucuna varılır.

Sonuç 3.2.1: $\overrightarrow{\omega},\overrightarrow{\omega_1}$ ve $\overrightarrow{\omega_2}$ Darboux vektörleri sadece $\overrightarrow{\mathrm{t}_1},\overrightarrow{\mathrm{t}_2}$ ve $\overrightarrow{\mathrm{N}}$ nin bileşenleri olarak ifade edilebilir. (c) eğrisinin Darboux vektörü,

$$\vec{\omega}=\frac{\vec{\mathrm{t}}}{T_g}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{N}}}{R_g}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{B}}}{R_n}$$

dir. Ayrıca,

$$\overrightarrow{\mathrm{B}}=\overrightarrow{\mathrm{B}_1}\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta}+\overrightarrow{\mathrm{B}_2}\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}$$

olduğu biliniyor. (3.2.1) eşitlikleri $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ de yerine yazılıp gerekli trigonometrik açılım da yapılınca,

$$\vec{B} = \overrightarrow{B_1}\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta} + \overrightarrow{B_2}\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta}\left(\overrightarrow{t_1}\cos\theta - \overrightarrow{t_2}\right)\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\left(\overrightarrow{t_1} - \overrightarrow{t_2}\cos\theta\right)\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}$$

$$= \overrightarrow{t_1}\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\sin\theta} - \overrightarrow{t_2}\frac{\cos\alpha}{\sin\theta}$$

Buradan,

$$\vec{B} = \overrightarrow{t_1}\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\sin\theta} - \overrightarrow{t_2}\frac{\cos\alpha}{\sin\theta}$$

bulunur. O halde,

$$\vec{t} = \overrightarrow{t_1}\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta} + \overrightarrow{t_2}\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{t_1}\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\sin\theta} - \overrightarrow{t_2}\frac{\cos\alpha}{\sin\theta} \qquad (3.2.4)$$

dikkate alınarak, $\vec{\omega}, \overrightarrow{\omega_1}$ ve $\overrightarrow{\omega_2}$ ani dönme vektörleri $\overrightarrow{t_1}, \overrightarrow{t_2}$ ve $\vec{N}$ bileşenleri ile

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{t}}{T_g} + \frac{\vec{N}}{R_g} + \frac{\vec{B}}{R_n} = \frac{\overrightarrow{t_1}\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta} + \overrightarrow{t_2}\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}}{T_g} + \frac{\vec{N}}{R_g} + \frac{\overrightarrow{t_1}\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\sin\theta} - \overrightarrow{t_2}\frac{\cos\alpha}{\sin\theta}}{R_n}$$

$$= \frac{\overrightarrow{t_1}}{\sin\theta}\left[\frac{\sin(\theta-\alpha)}{T_g} + \frac{\cos(\theta-\alpha)}{R_n}\right] + \frac{\vec{N}}{R_g} + \frac{\overrightarrow{t_2}}{\sin\theta}\left[\frac{\sin\alpha}{T_g} - \frac{\cos\alpha}{R_n}\right]$$

$$\overrightarrow{\omega_1} = \frac{\overrightarrow{t_1}}{\left(T_g\right)_1} + \frac{\vec{N}}{\left(R_g\right)_1} + \frac{\overrightarrow{B_1}}{(R_n)_1} = \frac{\overrightarrow{t_1}}{\left(T_g\right)_1} + \frac{\vec{N}}{\left(R_g\right)_1} + \frac{\frac{1}{\sin\theta}\left(\overrightarrow{t_1}\cos\theta - \overrightarrow{t_2}\right)}{(R_n)_1}$$

$$= \overrightarrow{t_1}\left(\frac{1}{\left(T_g\right)_1} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta\,(R_n)_1}\right) + \frac{\vec{N}}{\left(R_g\right)_1} - \frac{\overrightarrow{t_2}}{\sin\theta\,(R_n)_1}$$

$$\overrightarrow{\omega_2}=\frac{\overrightarrow{t_2}}{\left(T_g\right)_2}+\frac{\overrightarrow{N}}{\left(R_g\right)_2}+\frac{\overrightarrow{B_2}}{(R_n)_2}=\frac{\overrightarrow{t_2}}{\left(T_g\right)_2}+\frac{\overrightarrow{N}}{\left(R_g\right)_2}+\frac{\frac{1}{\sin\theta}\left(\overrightarrow{t_1}-\overrightarrow{t_2}\cos\theta\right)}{(R_n)_2}$$

$$=\frac{\overrightarrow{t_1}}{\sin\theta\,(R_n)_2}+\frac{\overrightarrow{N}}{\left(R_g\right)_2}+\overrightarrow{t_2}\left(\frac{1}{\left(T_g\right)_2}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta\,(R_n)_2}\right)$$

veya

$$\vec{\omega}=\frac{\overrightarrow{t_1}}{\sin\theta}\left[\frac{\sin(\theta-\alpha)}{T_g}+\frac{\cos(\theta-\alpha)}{R_n}\right]+\frac{\overrightarrow{N}}{R_g}+\frac{\overrightarrow{t_2}}{\sin\theta}\left[\frac{\sin\alpha}{T_g}-\frac{\cos\alpha}{R_n}\right]$$

$$\overrightarrow{\omega_1}=\overrightarrow{t_1}.\left(\frac{1}{\left(T_g\right)_1}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta\,(R_n)_1}\right)+\frac{\overrightarrow{N}}{\left(R_g\right)_1}-\frac{\overrightarrow{t_2}}{\sin\theta\,(R_n)_1} \tag{3.2.5}$$

$$\overrightarrow{\omega_2}=\frac{\overrightarrow{t_1}}{\sin\theta\,(R_n)_2}+\frac{\overrightarrow{N}}{\left(R_g\right)_2}+\overrightarrow{t_2}.\left(\frac{1}{\left(T_g\right)_2}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta\,(R_n)_2}\right)$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 3.2.2: Aşağıdaki bağıntıları ispatlayınız.

i) $\overrightarrow{t_1}.\dfrac{\partial\overrightarrow{t_2}}{\partial s_1}=-\overrightarrow{t_2}.\dfrac{\partial\overrightarrow{t_1}}{\partial s_1}=\dfrac{\left(\sqrt{E}\right)_v-\cos\theta\left(\sqrt{G}\right)_u}{\sqrt{EG}}$

ii) $\overrightarrow{t_2}.\dfrac{\partial\overrightarrow{t_1}}{\partial s_2}=-\overrightarrow{t_1}.\dfrac{\partial\overrightarrow{t_2}}{\partial s_2}=\dfrac{\left(\sqrt{G}\right)_u-\cos\theta\left(\sqrt{E}\right)_v}{\sqrt{EG}}$ (3.2.6)

iii) $\overrightarrow{t_1}.\,d\overrightarrow{t_2}=-\overrightarrow{t_2}.\,d\overrightarrow{t_1}=\dfrac{\left(\sqrt{E}\right)_v-\cos\theta\left(\sqrt{G}\right)_u}{\sqrt{G}}du$

$$+\frac{\cos\theta\left[\sqrt{G}\left(\sqrt{EG}\right)_v-\sqrt{EG}\left(\sqrt{G}\right)_v\right]-G\left(\sqrt{G}\right)_u}{\sqrt{E}G}dv$$

İspat:

$$\overrightarrow{t_1}=\frac{\overrightarrow{r_u}}{\sqrt{E}}\quad,\quad\overrightarrow{t_2}=\frac{\overrightarrow{r_v}}{\sqrt{G}}$$

$$\overrightarrow{t_1}.\overrightarrow{t_2} = \cos\theta \quad , \quad \overrightarrow{r_u}.\overrightarrow{r_v} = \cos\theta\,\sqrt{E}\sqrt{G}$$

$$E = \left(\sqrt{E}\right)^2 = \overrightarrow{r_u}^2 \quad , \quad \sqrt{E}\left(\sqrt{E}\right)_v = \overrightarrow{r_{uv}}.\overrightarrow{r_u}$$

$$G = \left(\sqrt{G}\right)^2 = \overrightarrow{r_v}^2 \quad , \quad \sqrt{G}\left(\sqrt{G}\right)_u = \overrightarrow{r_{vu}}.\overrightarrow{r_v}$$

bulunur.

$$\frac{\partial\overrightarrow{t_1}}{\partial v} = \frac{\vec{r}_{uv}\sqrt{E} - \left(\sqrt{E}\right)_v\overrightarrow{r_u}}{E} \quad , \quad \frac{\partial\overrightarrow{t_2}}{\partial u} = \frac{\vec{r}_{uv}\sqrt{G} - \left(\sqrt{G}\right)_u\overrightarrow{r_v}}{G}$$

dir. Bir üstteki eşitliklerden birincisi $\overrightarrow{t_2}$, ikincisi $\overrightarrow{t_1}$ ile çarpılırsa,

$$\overrightarrow{t_2}.\frac{\partial\overrightarrow{t_1}}{\partial v} = \frac{\overrightarrow{r_v}}{\sqrt{G}}.\left(\frac{\vec{r}_{uv}\sqrt{E} - \left(\sqrt{E}\right)_v\overrightarrow{r_u}}{E}\right) = \frac{\left(\sqrt{G}\right)_u - \cos\theta\left(\sqrt{E}\right)_v}{\sqrt{E}}$$

(3.2.7)

$$\overrightarrow{t_1}.\frac{\partial\overrightarrow{t_2}}{\partial u} = \frac{\overrightarrow{r_u}}{\sqrt{E}}.\left(\frac{\vec{r}_{uv}\sqrt{G} - \left(\sqrt{G}\right)_u\overrightarrow{r_v}}{G}\right) = \frac{\left(\sqrt{E}\right)_v - \cos\theta\left(\sqrt{G}\right)_u}{\sqrt{G}}$$

olur. Diğer taraftan,

$$\frac{\partial\overrightarrow{t_1}}{\partial s_2} = \frac{\partial\overrightarrow{t_1}}{\partial v}.\frac{dv}{ds_2} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\overrightarrow{t_1}}{\partial v} \quad \left(ds_2 = \sqrt{G}dv \;\Rightarrow\; \frac{dv}{ds_2} = \frac{1}{\sqrt{G}}\right)$$

(3.2.8)

$$\frac{\partial\overrightarrow{t_2}}{\partial s_1} = \frac{\partial\overrightarrow{t_2}}{\partial u}.\frac{du}{ds_1} = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\overrightarrow{t_2}}{\partial u} \quad \left(ds_1 = \sqrt{E}du \;\Rightarrow\; \frac{du}{ds_1} = \frac{1}{\sqrt{E}}\right)$$

(3.2.8) bağıntılarından ilki $\overrightarrow{t_2}$ ile, ikincisi $\overrightarrow{t_1}$ ile çarpılırsa ve (3.2.7) bağıntıları göz önüne alınırsa,

$$\overrightarrow{t_2}.\frac{\partial\overrightarrow{t_1}}{\partial s_2}=\frac{1}{\sqrt{G}}\overrightarrow{t_2}.\frac{\partial\overrightarrow{t_1}}{\partial v}=\frac{\left(\sqrt{G}\right)_u-\cos\theta\left(\sqrt{E}\right)_v}{\sqrt{EG}}$$

$$\overrightarrow{t_1}.\frac{\partial\overrightarrow{t_2}}{\partial s_1}=\frac{1}{\sqrt{E}}\overrightarrow{t_1}.\frac{\partial\overrightarrow{t_2}}{\partial u}=\frac{\left(\sqrt{E}\right)_v-\cos\theta\left(\sqrt{G}\right)_u}{\sqrt{EG}} \tag{3.2.9}$$

bulunur. Öte yandan $\overrightarrow{t_1}.\overrightarrow{t_2}=\cos\theta$ nın s_1 ve s_2 ye göre türevleri dikkate alındığında,

$$\frac{\partial\overrightarrow{t_1}}{\partial s_1}.\overrightarrow{t_2}+\overrightarrow{t_1}.\frac{\partial\overrightarrow{t_2}}{\partial s_1}=0 \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{t_1}.\frac{\partial\overrightarrow{t_2}}{\partial s_1}=-\overrightarrow{t_2}.\frac{\partial\overrightarrow{t_1}}{\partial s_1}$$

$$\frac{\partial\overrightarrow{t_1}}{\partial s_2}.\overrightarrow{t_2}+\overrightarrow{t_1}.\frac{\partial\overrightarrow{t_2}}{\partial s_2}=0 \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{t_2}.\frac{\partial\overrightarrow{t_1}}{\partial s_2}=-\overrightarrow{t_1}.\frac{\partial\overrightarrow{t_2}}{\partial s_2}$$

elde edilir. Böylece (3.2.6) nın **i)** ve **ii)** formülleri ispatlanmış olur. Ayrıca,

$\overrightarrow{r_u}.\overrightarrow{r_v}=\cos\theta\sqrt{E}\sqrt{G}$ nin v ye göre türevi alınırsa,

$$\vec{r}_{uv}.\overrightarrow{r_v}+\overrightarrow{r_u}.\vec{r}_{vv}=\cos\theta\left(\sqrt{EG}\right)_v \tag{3.2.10}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\frac{\partial\overrightarrow{t_2}}{\partial s_2}=\frac{\partial\overrightarrow{t_2}}{\partial v}.\frac{dv}{ds_2}=\frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{\vec{r}_{vv}\sqrt{G}-\left(\sqrt{G}\right)_v\overrightarrow{r_v}}{G}\right)$$

ifadeleri $\overrightarrow{t_1}$ ile çarpılırsa ve (3.2.10) dan $\overrightarrow{r_u}.\vec{r}_{vv}$ çekilip bu ifadede yerine yazılırsa,

$$\overrightarrow{t_1}.\frac{\partial\overrightarrow{t_2}}{\partial s_2}=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\overrightarrow{r_u}}{\sqrt{E}}.\left(\frac{\vec{r}_{vv}\sqrt{G}-\left(\sqrt{G}\right)_v\overrightarrow{r_v}}{G}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{EG}}\left(\frac{\cos\theta\sqrt{G}\left(\sqrt{EG}\right)_v-G\left(\sqrt{G}\right)_u-\cos\theta\sqrt{EG}\left(\sqrt{G}\right)_v}{G}\right) \tag{3.2.11}$$

elde edilir. (3.2.6) nın **iii)** formülü de, (3.2.6) nın **i)** formülü ve (3.2.11) in göz önüne alınmasıyla,

$$\overrightarrow{\mathrm{t}_1}.d\overrightarrow{\mathrm{t}_2}=\overrightarrow{\mathrm{t}_1}.\left(\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{t}_2}}{\partial s_1}ds_1+\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{t}_2}}{\partial s_2}ds_2\right)=\overrightarrow{\mathrm{t}_1}.\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{t}_2}}{\partial s_1}\sqrt{E}du+\overrightarrow{\mathrm{t}_1}.\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{t}_2}}{\partial s_2}\sqrt{G}dv$$

$$=\frac{\left(\sqrt{E}\right)_{\mathrm{v}}-\cos\theta\left(\sqrt{G}\right)_{\mathrm{u}}}{\sqrt{G}}du$$

$$+\frac{\cos\theta\left(\sqrt{G}\left(\sqrt{EG}\right)_{\mathrm{v}}-\sqrt{EG}\left(\sqrt{G}\right)_{\mathrm{v}}\right)-G\left(\sqrt{G}\right)_{\mathrm{u}}}{\mathrm{G}\sqrt{E}}dv$$

ve $\overrightarrow{\mathrm{t}_1}.\overrightarrow{\mathrm{t}_2}=\cos\theta$ nın türevi alınmasıyla,

$$d\overrightarrow{\mathrm{t}_1}.\overrightarrow{\mathrm{t}_2}+\overrightarrow{\mathrm{t}_1}.d\overrightarrow{\mathrm{t}_2}=0 \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{\mathrm{t}_1}.d\overrightarrow{\mathrm{t}_2}=-\overrightarrow{\mathrm{t}_2}.d\overrightarrow{\mathrm{t}_1}$$

bulunmuş olur.

Sonuç 3.2.2: $\overrightarrow{\mathrm{t}_1}.\overrightarrow{\mathrm{t}_2}=\cos\theta$ nın u ya ve v ye göre türevleri alınıp, (3.2.7) formülleri dikkate alınırsa,

$$\overrightarrow{\mathrm{t}_1}.\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{t}_2}}{\partial v}=-\overrightarrow{\mathrm{t}_2}.\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{t}_1}}{\partial v}=-\left(\frac{\left(\sqrt{G}\right)_{\mathrm{u}}-\cos\theta\left(\sqrt{E}\right)_{\mathrm{v}}}{\sqrt{E}}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{t}_1}.\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{t}_2}}{\partial u}=\frac{\left(\sqrt{E}\right)_{\mathrm{v}}-\cos\theta\left(\sqrt{G}\right)_{\mathrm{u}}}{\sqrt{G}}$$

bulunur ve

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\overrightarrow{\mathrm{t}_1}.\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{t}_2}}{\partial u}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\overrightarrow{\mathrm{t}_1}.\frac{\partial\overrightarrow{\mathrm{t}_2}}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\left(\sqrt{E}\right)_{\mathrm{v}}-\cos\theta\left(\sqrt{G}\right)_{\mathrm{u}}}{\sqrt{G}}\right)$$

$$-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\left(\sqrt{G}\right)_{\mathrm{u}}-\cos\theta\left(\sqrt{E}\right)_{\mathrm{v}}}{\sqrt{E}}\right) \qquad (3.2.12)$$

sonucuna varılır.

Teorem 3.2.3: (c_1) ve (c_2) parametre eğrilerine ait jeodezik eğriliklerle ilgili aşağıdaki bağıntıları ispatlayınız.

i) $$\frac{1}{\left(R_g\right)_1}=\frac{1}{\sin\theta\sqrt{EG}}\left(\cos\theta\left(\sqrt{G}\right)_{\mathrm{u}}-\left(\sqrt{E}\right)_{\mathrm{v}}\right)$$

(3.2.13)

ii) $$\frac{1}{\left(R_g\right)_2}=\frac{1}{\sin\theta\sqrt{EG}}\left(\left(\sqrt{G}\right)_{\mathrm{u}}-\cos\theta\left(\sqrt{E}\right)_{\mathrm{v}}\right)$$

İspat: (3.2.6) ve (3.2.3) den,

$$\vec{\mathrm{t}_1}.\frac{\partial\vec{\mathrm{t}_2}}{\partial s_1}=\frac{\left(\sqrt{E}\right)_{\mathrm{v}}-\cos\theta\left(\sqrt{G}\right)_{\mathrm{u}}}{\sqrt{EG}} \quad , \quad \frac{\partial\vec{\mathrm{t}_2}}{\partial s_1}=\vec{\omega_1}\wedge\vec{\mathrm{t}_2}$$

oldukları biliniyor. Buradan,

$$\frac{\left(\sqrt{E}\right)_{\mathrm{v}}-\cos\theta\left(\sqrt{G}\right)_{\mathrm{u}}}{\sqrt{EG}}=\vec{\mathrm{t}_1}.\frac{\partial\vec{\mathrm{t}_2}}{\partial s_1}=\vec{\mathrm{t}_1}.\left(\vec{\omega_1}\wedge\vec{\mathrm{t}_2}\right)=\vec{\omega_1}.\left(\vec{\mathrm{t}_2}\wedge\vec{\mathrm{t}_1}\right)=-\sin\theta\,\vec{\mathrm{N}}.\vec{\omega_1}$$

olur. (3.1.1) den $\vec{\omega_1}$, $-\sin\theta\,\vec{\mathrm{N}}$ ile çarpılırsa,

$$-\sin\theta\,\vec{\mathrm{N}}.\vec{\omega_1}=-\frac{\sin\theta\,\vec{\mathrm{N}}^2}{\left(R_g\right)_1} \quad\Longrightarrow\quad \vec{\mathrm{N}}.\vec{\omega_1}=\frac{1}{\left(R_g\right)_1}$$

bulunur. Buradan da,

$$\frac{1}{\left(R_g\right)_1}=\frac{1}{\sin\theta\sqrt{EG}}\left(\cos\theta\left(\sqrt{G}\right)_{\mathrm{u}}-\left(\sqrt{E}\right)_{\mathrm{v}}\right)$$

dir. Yine benzer şekilde,

$$\frac{1}{\left(R_g\right)_2}=\frac{1}{\sin\theta\sqrt{EG}}\left(\left(\sqrt{G}\right)_{\mathrm{u}}-\cos\theta\left(\sqrt{E}\right)_{\mathrm{v}}\right)$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.2.4: Yüzey üzerinde (c) eğrisiyle (c_1) , (c_2) parametre eğrilerinin yay elemanları sırasıyla s, s_1, s_2; (c_1) ve (c_2) ye ait Darboux vektörleri $\vec{\omega_1}$, $\vec{\omega_2}$; (c) nin $\vec{\mathrm{t}}$ teğetinin $\vec{\mathrm{t}_1}$ ile yaptığı açı a ve $\vec{\mathrm{t}_1}$ ile $\vec{\mathrm{t}_2}$ arasındaki açı da θ ise, ve

$$\vec{A} = \overrightarrow{\omega_1}\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta} + \overrightarrow{\omega_2}\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}$$

olmak üzere,

$$\frac{d\overrightarrow{t_1}}{ds} = \vec{A}\wedge\overrightarrow{t_1} \quad , \quad \frac{d\overrightarrow{t_2}}{ds} = \vec{A}\wedge\overrightarrow{t_2} \quad , \quad \frac{d\vec{N}}{ds} = \vec{A}\wedge\vec{N} \qquad (3.2.14)$$

bağıntıları sağlanır.

İspat: (3.1.6) ve (3.2.2) göz önünde bulundurularak,

$$\frac{d\overrightarrow{t_1}}{ds} = \frac{\partial\overrightarrow{t_1}}{\partial s_1}.\frac{ds_1}{ds} + \frac{\partial\overrightarrow{t_1}}{\partial s_2}.\frac{ds_2}{ds} = \left(\overrightarrow{\omega_1}\wedge\overrightarrow{t_1}\right)\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta} + \left(\overrightarrow{\omega_2}\wedge\overrightarrow{t_1}\right)\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}$$

$$= \left(\overrightarrow{\omega_1}\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta} + \overrightarrow{\omega_2}\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\right)\wedge\overrightarrow{t_1} = \vec{A}\wedge\overrightarrow{t_1}$$

bulunur. Yine benzer şekilde,

$$\frac{d\overrightarrow{t_2}}{ds} = \vec{A}\wedge\overrightarrow{t_2}$$

elde edilir.

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\overrightarrow{t_1}\wedge\overrightarrow{t_2}}{\sin\theta}\right) = \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{d\overrightarrow{t_1}}{ds}\wedge\overrightarrow{t_2} + \overrightarrow{t_1}\wedge\frac{d\overrightarrow{t_2}}{ds}\right)$$

$$= \frac{1}{\sin\theta}\left[\left(\vec{A}\wedge\overrightarrow{t_1}\right)\wedge\overrightarrow{t_2} + \overrightarrow{t_1}\wedge\left(\vec{A}\wedge\overrightarrow{t_2}\right)\right] = \frac{1}{\sin\theta}\left[\vec{A}\wedge\left(\overrightarrow{t_1}\wedge\overrightarrow{t_2}\right)\right]$$

$$= \left[\vec{A}\wedge\left(\frac{\overrightarrow{t_1}\wedge\overrightarrow{t_2}}{\sin\theta}\right)\right] = \vec{A}\wedge\vec{N}$$

bulunarak ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.2.3: (3.2.14) un ilk eşitliği $\overrightarrow{t_2}$ ile çarpılırsa,

$$\overrightarrow{t_2}.\frac{d\overrightarrow{t_1}}{ds}=\overrightarrow{t_2}.\left(\vec{A}\wedge\overrightarrow{t_1}\right)=\vec{A}.\left(\overrightarrow{t_1}\wedge\overrightarrow{t_2}\right)=\sin\theta\,\vec{A}.\vec{N}$$

olur. Diğer taraftan $\overrightarrow{t_1}.\overrightarrow{t_2}=\cos\theta$ nın s e göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\overrightarrow{t_1}}{ds}.\overrightarrow{t_2}+\overrightarrow{t_1}.\frac{d\overrightarrow{t_2}}{ds}=0\quad\Rightarrow\quad\overrightarrow{t_2}.\frac{d\overrightarrow{t_1}}{ds}=-\overrightarrow{t_1}.\frac{d\overrightarrow{t_2}}{ds}$$

elde edilir. O halde,

$$\overrightarrow{t_2}.\frac{d\overrightarrow{t_1}}{ds}=-\overrightarrow{t_1}.\frac{d\overrightarrow{t_2}}{ds}=\sin\theta\,\vec{A}.\vec{N}\tag{3.2.15}$$

olur.

Teorem 3.2.5: Parametre eğrilerinin arasında θ açısı olan bir yüzeyin M noktasından geçen herhangi bir (c) eğrisi ve bu noktadan geçen $v=sbt,\ u=sbt$ parametre eğrileri (c_1), (c_2) ve bunlara M noktasında karşılık gelen Darboux vektörleri sırasıyla $\vec{\omega}$, $\overrightarrow{\omega_1}$ ve $\overrightarrow{\omega_2}$ olsunlar. (c) ile (c_1) in M deki $\vec{t}$, $\overrightarrow{t_1}$ teğetleri arasındaki açı α, (c) nin yay elemanı ds ve yüzeyin M deki birim normal vektörü $\vec{N}$ olduğuna göre $\vec{\omega}$, $\overrightarrow{\omega_1}$ve $\overrightarrow{\omega_2}$ Darboux vektörleri arasında aşağıdaki bağıntı vardır.

$$\vec{\omega}=\overrightarrow{\omega_1}\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta}+\overrightarrow{\omega_2}\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}+\vec{N}\frac{d\alpha}{ds}\tag{3.2.16}$$

İspat: $\left[\vec{t},\vec{N},\vec{B}\right]$ Darboux üçyüzlüsü için,

$$\frac{d\vec{t}}{ds}=\vec{\omega}\wedge\vec{t}$$

olduğu bilinmektedir. (3.1.7) den de,

$$\vec{t}=\overrightarrow{t_1}\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta}+\overrightarrow{t_2}\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}$$

yazılır. (3.1.7) nin her iki tarafının s ye göre türevi alınırsa,

$$\frac{d\vec{t}}{ds}=\frac{d\overrightarrow{t_1}}{ds}\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta}+\frac{d\overrightarrow{t_2}}{ds}\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}+\left[-\overrightarrow{t_1}\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\sin\theta}\frac{d\alpha}{ds}+\overrightarrow{t_2}\frac{\cos\alpha}{\sin\theta}\frac{d\alpha}{ds}\right]\tag{3.2.17}$$

olur. Öte yandan $[\overrightarrow{t_1}, \vec{N}, \overrightarrow{B_1}]$ ve $[\overrightarrow{t_2}, \vec{N}, \overrightarrow{B_2}]$ Darboux üç yüzlülerinde $\overrightarrow{t_1} = \vec{N} \wedge \overrightarrow{B_1}$ ve $\overrightarrow{t_2} = \vec{N} \wedge \overrightarrow{B_2}$ dir. Bu iki eşitlikte $\overrightarrow{B_1}$ ve $\overrightarrow{B_2}$ yerine (3.2.1) deki karşılıkları yazılırsa $\overrightarrow{t_1}$ ve $\overrightarrow{t_2}$,

$$\overrightarrow{t_1} = \vec{N} \wedge \frac{1}{\sin\theta}\left(\overrightarrow{t_1}\cos\theta - \overrightarrow{t_2}\right) \quad , \quad \overrightarrow{t_2} = \vec{N} \wedge \frac{1}{\sin\theta}\left(\overrightarrow{t_1} - \overrightarrow{t_2}\cos\theta\right)$$

şeklini alır. Bu iki eşitlik de (3.2.17) de yerine yazılırsa,

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d\overrightarrow{t_1}}{ds}\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta} + \frac{d\overrightarrow{t_2}}{ds}\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}$$

$$+\left[-\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\sin\theta}\vec{N} \wedge \frac{1}{\sin\theta}\left(\overrightarrow{t_1}\cos\theta - \overrightarrow{t_2}\right) + \frac{\cos\alpha}{\sin\theta}\vec{N} \wedge \frac{1}{\sin\theta}\left(\overrightarrow{t_1} - \overrightarrow{t_2}\cos\theta\right)\right]\frac{d\alpha}{ds}$$

bulunur. Teorem (3.2.4) den,

$$\frac{d\overrightarrow{t_1}}{ds} = \vec{A} \wedge \overrightarrow{t_1} \quad , \quad \frac{d\overrightarrow{t_2}}{ds} = \vec{A} \wedge \overrightarrow{t_2} \quad , \quad \vec{A} = \overrightarrow{\omega_1}\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta} + \overrightarrow{\omega_2}\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}$$

eşitlikleri ve trigonometrik açılımların da kullanılmasıyla,

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{A} \wedge \overrightarrow{t_1}\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta} + \vec{A} \wedge \overrightarrow{t_2}\frac{\sin\alpha}{\sin\theta} + \vec{N} \wedge \left[\overrightarrow{t_1}\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta} + \overrightarrow{t_2}\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\right]\frac{d\alpha}{ds}$$

$$= \vec{A} \wedge \left(\overrightarrow{t_1}\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta} + \overrightarrow{t_2}\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\right) + \vec{N} \wedge \left[\overrightarrow{t_1}\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta} + \overrightarrow{t_2}\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\right]\frac{d\alpha}{ds}$$

$$= \vec{A} \wedge \vec{t} + \left(\vec{N} \wedge \vec{t}\right)\frac{d\alpha}{ds}$$

$$= \left(\vec{A} + \vec{N}\frac{d\alpha}{ds}\right) \wedge \vec{t}$$

elde edilir. Sonra,

$$\vec{b} = \vec{A} + \vec{N}\frac{d\alpha}{ds}$$

olsun. Bu durumda,

$$\frac{d\vec{\mathrm{t}}}{ds} = \vec{\mathrm{b}} \wedge \vec{\mathrm{t}} \tag{3.2.18}$$

elde edilir. Öte yandan,

$$\vec{\mathrm{A}} = \vec{\mathrm{b}} - \vec{\mathrm{N}}\frac{da}{ds} \tag{3.2.19}$$

yazılabilir. Teorem (3.2.4) de, (3.2.19) yerine yazılırsa,

$$\frac{d\vec{\mathrm{N}}}{ds} = \vec{\mathrm{A}} \wedge \vec{\mathrm{N}} = \left(\vec{\mathrm{b}} - \vec{\mathrm{N}}\frac{da}{ds}\right) \wedge \vec{\mathrm{N}} = \vec{\mathrm{b}} \wedge \vec{\mathrm{N}} \tag{3.2.20}$$

bulunur. Diğer taraftan $\vec{\omega}$ Darboux vektörü olduğundan,

$$\frac{d\vec{\mathrm{t}}}{ds} = \vec{\omega} \wedge \vec{\mathrm{t}} \quad , \quad \frac{d\vec{\mathrm{N}}}{ds} = \vec{\omega} \wedge \vec{\mathrm{N}} \tag{3.2.21}$$

yazılır. (3.2.18) ve (3.2.20), (3.2.21) e eşitlenirse,

$$\frac{d\vec{\mathrm{t}}}{ds} = \vec{\omega} \wedge \vec{\mathrm{t}} = \vec{\mathrm{b}} \wedge \vec{\mathrm{t}} \quad \Longrightarrow \quad 0 = \vec{\mathrm{b}} \wedge \vec{\mathrm{t}} - \vec{\omega} \wedge \vec{\mathrm{t}} = \left(\vec{\mathrm{b}} - \vec{\omega}\right) \wedge \vec{\mathrm{t}}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{\mathrm{b}} - \vec{\omega} = \lambda\vec{\mathrm{t}} \tag{3.2.22}$$

$$\frac{d\vec{\mathrm{N}}}{ds} = \vec{\omega} \wedge \vec{\mathrm{N}} = \vec{\mathrm{b}} \wedge \vec{\mathrm{N}} \quad \Longrightarrow \quad 0 = \vec{\mathrm{b}} \wedge \vec{\mathrm{N}} - \vec{\omega} \wedge \vec{\mathrm{N}} = \left(\vec{\mathrm{b}} - \vec{\omega}\right) \wedge \vec{\mathrm{N}}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{\mathrm{b}} - \vec{\omega} = \mu\vec{\mathrm{N}} \tag{3.2.23}$$

elde edilir. Daha sonra, (3.2.22) ve (3.2.23) eşitlenirse,

$$\vec{\mathrm{b}} - \vec{\omega} = \lambda\vec{\mathrm{t}} = \mu\vec{\mathrm{N}} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \mu = 0$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\vec{\mathrm{b}} - \vec{\omega} = 0$$

olur. Buradan da,

$$\vec{\omega} = \vec{\mathrm{b}} = \vec{\mathrm{A}} + \vec{\mathrm{N}}\frac{da}{ds} = \overrightarrow{\omega_1}\frac{sin(\theta - \alpha)}{sin\,\theta} + \overrightarrow{\omega_2}\frac{sin\,\alpha}{sin\,\theta} + \vec{\mathrm{N}}\frac{da}{ds}$$

dır. Yani,

$$\vec{\omega} = \overrightarrow{\omega_1}\frac{sin(\theta - \alpha)}{sin\,\theta} + \overrightarrow{\omega_2}\frac{sin\,\alpha}{sin\,\theta} + \vec{\mathrm{N}}\frac{da}{ds}$$

elde edilir ki, bu teoremin kendisidir.

Sonuç 3.2.4: Euler, O. Bonnet formüllerinin daha genişletilmiş şekilleri ile Liouville formülü teorem (3.2.5) in bir sonucudur.

$$\vec{\omega} = \overrightarrow{\omega_1}\frac{sin(\theta - \alpha)}{sin\,\theta} + \overrightarrow{\omega_2}\frac{sin\,\alpha}{sin\,\theta} + \vec{\mathrm{N}}\frac{da}{ds}$$

formülünde

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{\mathrm{t}}}{T_g} + \frac{\vec{\mathrm{N}}}{R_g} + \frac{\vec{\mathrm{B}}}{R_n}$$

$$\overrightarrow{\omega_1} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{t}_1}}{\left(T_g\right)_1} + \frac{\vec{\mathrm{N}}}{\left(R_g\right)_1} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{B}_1}}{(R_n)_1} = \overrightarrow{\mathrm{t}_1}\left(\frac{1}{\left(T_g\right)_1} + \frac{cos\,\theta}{sin\,\theta\,(R_n)_1}\right) + \frac{\vec{\mathrm{N}}}{\left(R_g\right)_1} - \frac{\overrightarrow{\mathrm{t}_2}}{sin\,\theta\,(R_n)_1}$$

$$\overrightarrow{\omega_2} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{t}_2}}{\left(T_g\right)_2} + \frac{\vec{\mathrm{N}}}{\left(R_g\right)_2} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{B}_2}}{(R_n)_2}$$

$$= \frac{\overrightarrow{\mathrm{t}_1}}{sin\,\theta\,(R_n)_2} + \frac{\vec{\mathrm{N}}}{\left(R_g\right)_2} + \overrightarrow{\mathrm{t}_2}\left(\frac{1}{\left(T_g\right)_2} - \frac{cos\,\theta}{sin\,\theta\,(R_n)_2}\right)$$

değerleri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{\vec{\mathrm{t}}}{T_g} + \frac{\vec{\mathrm{N}}}{R_g} + \frac{\vec{\mathrm{B}}}{R_n} = &\left[\overrightarrow{\mathrm{t}_1}\left(\frac{1}{\left(T_g\right)_1} + \frac{cos\,\theta}{sin\,\theta\,(R_n)_1}\right) + \frac{\vec{\mathrm{N}}}{\left(R_g\right)_1} - \frac{\overrightarrow{\mathrm{t}_2}}{sin\,\theta\,(R_n)_1}\right]\frac{sin(\theta - \alpha)}{sin\,\theta} \\ &+ \left[\frac{\overrightarrow{\mathrm{t}_1}}{sin\,\theta\,(R_n)_2} + \frac{\vec{\mathrm{N}}}{\left(R_g\right)_2} + \overrightarrow{\mathrm{t}_2}\left(\frac{1}{\left(T_g\right)_2} - \frac{cos\,\theta}{sin\,\theta\,(R_n)_2}\right)\right]\frac{sin\,\alpha}{sin\,\theta} \\ &+ \vec{\mathrm{N}}\frac{da}{ds}\end{aligned}$$

elde edilir. Her iki taraf sırasıyla $\vec{B}$, $\vec{t}$, $\vec{N}$ ile çarpılır ve

$$\vec{t}.\overrightarrow{t_1} = cos\,a \quad , \quad \vec{t}.\overrightarrow{t_2} = cos(\theta - \alpha)$$

$$\vec{B}.\overrightarrow{t_1} = \frac{1}{sin\,\theta}\left[\overrightarrow{t_1}\cos(\theta - \alpha) - \overrightarrow{t_2}\cos\alpha\right].\overrightarrow{t_1} = sin\,\alpha$$

$$\vec{B}.\overrightarrow{t_2} = \frac{1}{sin\,\theta}\left[\overrightarrow{t_1}\cos(\theta - \alpha) - \overrightarrow{t_2}\cos\alpha\right].\overrightarrow{t_2} = -\,sin(\theta - \alpha)$$

ifadeleri göz önünde bulundurulup trigonometrik açılımların da yardımıyla,

$$\frac{1}{R_n} = \frac{1}{sin\,\theta}\left[\frac{cos\,a\,sin(\theta - \alpha)}{(R_n)_1} + \frac{sin\,\alpha\,cos(\theta - \alpha)}{(R_n)_2}\right]$$

$$+\frac{sin\,\alpha\,sin(\theta - \alpha)}{sin\,\theta}\left[\frac{1}{(T_g)_1} - \frac{1}{(T_g)_2}\right] \tag{3.2.24}$$

$$\frac{1}{T_g} = \frac{1}{sin\,\theta}\left[\frac{cos\,a\,sin(\theta - \alpha)}{(T_g)_1} + \frac{sin\,\alpha\,cos(\theta - \alpha)}{(T_g)_2}\right]$$

$$+\frac{sin\,\alpha\,sin(\theta - \alpha)}{sin\,\theta}\left[\frac{1}{(R_n)_2} - \frac{1}{(R_n)_1}\right] \tag{3.2.25}$$

$$\frac{1}{R_g} = \frac{1}{(R_g)_1}\frac{sin(\theta - \alpha)}{sin\,\theta} + \frac{1}{(R_g)_2}\frac{sin\,\alpha}{sin\,\theta} + \frac{da}{ds} \tag{3.2.26}$$

formülleri bulunur.

Özel Hal: $\theta = \frac{\pi}{2}$ seçilirse, (3.2.24) ifadesi,

$$\frac{1}{R_n} = \frac{(cos\,a)^2}{(R_n)_1} + \frac{(sin\,\alpha)^2}{(R_n)_2} + \left[\frac{1}{(T_g)_1} - \frac{1}{(T_g)_2}\right] sin\,\alpha\,cos\,a \tag{3.2.27}$$

ifadesine, (3.2.25) ifadesi,

$$\frac{1}{T_g} = \frac{(cos\,a)^2}{(T_g)_1} + \frac{(sin\,\alpha)^2}{(T_g)_2} + \left[\frac{1}{(R_n)_2} - \frac{1}{(R_n)_1}\right] sin\,\alpha\,cos\,a \tag{3.2.28}$$

ifadesine, (3.2.26) ifadesi,

$$\frac{1}{R_g} = \frac{\cos\alpha}{\left(R_g\right)_1} + \frac{sin\,\alpha}{\left(R_g\right)_2} + \frac{da}{ds} \qquad \textit{Liouville Formülü} \quad (3.2.29)$$

ifadesine dönüşmektedir. (3.2.27), (3.2.28), (3.2.29) ifadeleri, (Akbulut, 1970) referansında bulunabilir.

(c) eğrisiyle (c_1) eğrisi arasındaki açının α, (c_2) eğrisiyle (c_1) eğrisi arasındaki açının $\theta = \frac{\pi}{2}$ olduğu biliniyor. Eğer (c) eğrisi yerine bu eğriye dik olan (c_0) eğrisi alınırsa, yukarıdaki formülde α yerine $\alpha + \frac{\pi}{2}$ yazılmalıdır. (c_0) eğrisi için $\frac{1}{R_n}$ yerine $\frac{1}{(R_n)_0}$ ve $\frac{1}{T_g}$ yerine de $\frac{1}{\left(T_g\right)_0}$ alınmalıdır. Böylece elde edilen $\frac{1}{R_n}$ ve $\frac{1}{(R_n)_0}$, $\frac{1}{T_g}$ ve $\frac{1}{\left(T_g\right)_0}$ eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa aşağıdaki bağıntılar bulunabilir.

$$\frac{1}{R_n} + \frac{1}{(R_n)_0} = \frac{1}{(R_n)_1} + \frac{1}{(R_n)_2} \qquad (3.2.30)$$

$$\frac{1}{T_g} + \frac{1}{\left(T_g\right)_0} = \frac{1}{\left(T_g\right)_1} + \frac{1}{\left(T_g\right)_2} \qquad (3.2.31)$$

Eğer parametre eğrileri olarak eğrilik çizgileri seçilirse bu durumda,

$$\frac{1}{\left(T_g\right)_1} = \frac{1}{\left(T_g\right)_2} = 0 \quad , \quad \frac{1}{(R_n)_1} = \frac{1}{R_1} \quad , \quad \frac{1}{(R_n)_2} = \frac{1}{R_2}$$

olacağından (3.2.27), (3.2.28), (3.2.30), (3.2.31) formülleri aşağıdaki şekilleri alır.

$$\frac{1}{R_n} = \frac{(cos\,a)^2}{R_1} + \frac{(sin\,\alpha)^2}{R_2} \qquad \textit{Euler Formülü} \quad (3.2.32)$$

$$\frac{1}{T_g} = sin\,\alpha\, cos\,a\left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right] \qquad \textit{O.Bonnet Formülü} \quad (3.2.33)$$

$$\frac{1}{R_n} + \frac{1}{(R_n)_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 2H \qquad \textit{Ortalama Eğrilik} \quad (3.2.34)$$

$$\frac{1}{T_g} + \frac{1}{\left(T_g\right)_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\left(T_g\right)_0} = -\frac{1}{T_g} \qquad (3.2.35)$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 3.2.5: $\vec{\omega}$, $\vec{\mathrm{N}}$ ile çarpılırsa,

$$\frac{1}{R_g}=\vec{\mathrm{N}}.\vec{\omega}=\vec{\mathrm{N}}.\left(\vec{\mathrm{A}}+\vec{\mathrm{N}}\frac{da}{ds}\right)=\vec{\mathrm{N}}.\vec{\mathrm{A}}+\frac{da}{ds}$$

(3.2.15) dikkate alınırsa,

$$\frac{1}{R_g}=-\frac{1}{\sin\theta}\vec{\mathrm{t}_1}.\frac{d\vec{\mathrm{t}_2}}{ds}+\frac{da}{ds} \tag{3.2.36}$$

sonucuna varılır. Öte yandan (3.2.6) nın son denklemi,

$$-\vec{\mathrm{t}_1}.\frac{d\vec{\mathrm{t}_2}}{ds}=\frac{\cos\theta\left(\sqrt{G}\right)_{\mathrm{u}}-\left(\sqrt{E}\right)_{\mathrm{v}}}{\sqrt{G}}\frac{du}{ds}$$

$$+\frac{\cos\theta\left[\sqrt{EG}\left(\sqrt{G}\right)_{\mathrm{v}}-\sqrt{G}\left(\sqrt{EG}\right)_{\mathrm{v}}\right]+G\left(\sqrt{G}\right)_{\mathrm{u}}}{\sqrt{E}G}\frac{dv}{ds}$$

olur ve (3.1.6) dan,

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}=\sqrt{G}\frac{dv}{ds} \quad , \quad \frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta}=\sqrt{E}\frac{du}{ds}$$

olup bu eşitliklerden birincisi, ikincisine bölünürse ve trigonometrik açılımdan da yararlanılırsa,

$$\tan a=\sin\theta\left(\frac{\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{dv}{du}}{1+\cos\theta\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{dv}{du}}\right) \quad \Longrightarrow \quad a=\tan^{-1}\left[\sin\theta\left(\frac{\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{dv}{du}}{1+\cos\theta\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{dv}{du}}\right)\right]$$

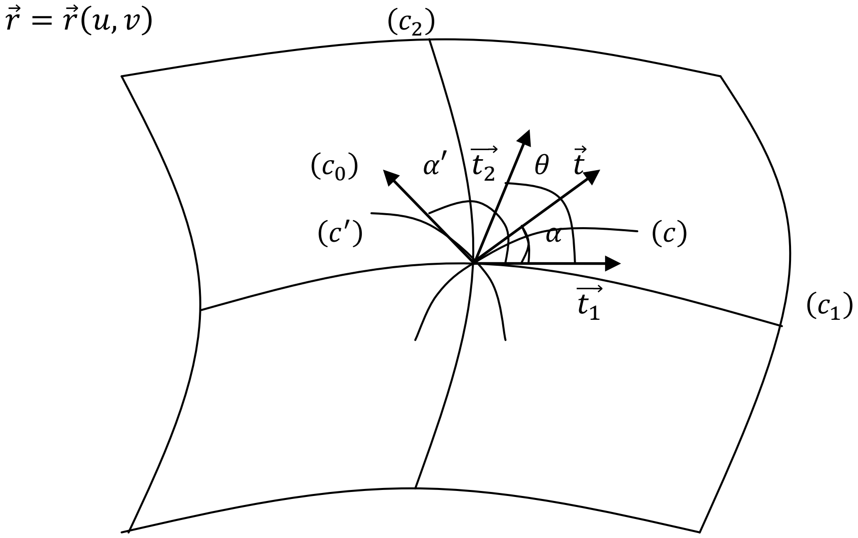
elde edilir. Bu değerler (3.2.32) de yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{R_g}=\frac{\cos\theta\left(\sqrt{G}\right)_{\mathrm{u}}-\left(\sqrt{E}\right)_{\mathrm{v}}}{\sin\theta\sqrt{G}}\frac{du}{ds}+\frac{\cos\theta\left[\sqrt{EG}\left(\sqrt{G}\right)_{\mathrm{v}}-\sqrt{G}\left(\sqrt{EG}\right)_{\mathrm{v}}\right]+G\left(\sqrt{G}\right)_{\mathrm{u}}}{\sin\theta\sqrt{E}G}\frac{dv}{ds}$$

$$+\frac{d}{ds}\left\{\tan^{-1}\left[\sin\theta\left(\frac{\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{dv}{du}}{1+\cos\theta\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{dv}{du}}\right)\right]\right\} \qquad (3.2.37)$$

elde edilir.

3.3 Bir Regüler Yüzey Üzerinde İnvaryantlar ve Gauss Eğriliğinin Değişik İfadeleri



Şekil 3.3.2 Yüzeyin Bir Noktasındaki Birbirine Dik Herhangi İki Eğri ve Parametre Eğrileri

Teorem 3.3.1: Bir yüzey üzerinde M noktasından geçen ve aralarındaki açı θ olan (c_1) ve (c_2) parametre eğrilerinden başka M den geçen ve birbirlerine dik olan (c) ve (c_0) gibi iki eğri daha alınsın. Bunların Darboux vektörleri sırasıyla $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}$ ve $\vec{\omega}_0$ ve yüzeyin M deki normal birim vektörü $\vec{\mathrm{N}}$ ise $\left(\vec{\mathrm{N}}, \vec{\omega}, \overrightarrow{\omega_0}\right)$ çarpımı, $\left(\vec{\mathrm{N}}, \overrightarrow{\omega_1}, \overrightarrow{\omega_2}\right)$ çarpımının $\frac{1}{\sin\theta}$ katına, Gauss eğriliğinin de $\sin\theta$ katına eşittir.

$$K\sin\theta = \left(\vec{\mathrm{N}}, \vec{\omega}, \overrightarrow{\omega_0}\right) = \left(\vec{\mathrm{N}}, \overrightarrow{\omega_1}, \overrightarrow{\omega_2}\right)\frac{1}{\sin\theta} \qquad (3.3.1)$$

İspat: M den geçen ve (c_1) parametre eğrisiyle sırasıyla α ve α' açısını yapan (c) ve (c') gibi iki eğri alınsın. Bunların Darboux vektörleri sırasıyla $\vec{\omega}$ ve $\overrightarrow{\omega'}$ ise (3.2.16) gereğince,

$$\vec{\omega} = \overrightarrow{\omega_1}\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta} + \overrightarrow{\omega_2}\frac{\sin\alpha}{\sin\theta} + \vec{\mathrm{N}}\frac{d\alpha}{ds} = \vec{\mathrm{A}} + \vec{\mathrm{N}}\frac{d\alpha}{ds}$$

$$\overrightarrow{\omega'} = \overrightarrow{\omega_1}\frac{\sin(\theta - a')}{\sin\theta} + \overrightarrow{\omega_2}\frac{\sin a'}{\sin\theta} + \vec{N}\frac{da'}{ds} = \overrightarrow{A'} + \vec{N}\frac{da'}{ds}$$

dir. Bu iki ifade vektörel olarak taraf tarafa çarpılırsa,

$$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\omega'} = \left(\vec{A} + \vec{N}\frac{da}{ds}\right) \wedge \left(\overrightarrow{A'} + \vec{N}\frac{da'}{ds}\right)$$

$$= \vec{A} \wedge \overrightarrow{A'} + \vec{A} \wedge \vec{N}\frac{da'}{ds} + \vec{N}\frac{da}{ds} \wedge \left(\overrightarrow{A'} + \vec{N}\frac{da'}{ds}\right)$$

Bunun da her iki tarafı $\vec{N}$ ile skaler olarak çarpılırsa,

$$\vec{N}.\left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\omega'}\right) = \vec{N}.\left(\vec{A} \wedge \overrightarrow{A'}\right)$$

elde edilir. Diğer taraftan (trigonometrik açılımlardan da faydalanılarak),

$$\vec{A} \wedge \overrightarrow{A'} = \left(\overrightarrow{\omega_1}\frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin\theta} + \overrightarrow{\omega_2}\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}\right) \wedge \left(\overrightarrow{\omega_1}\frac{\sin(\theta - a')}{\sin\theta} + \overrightarrow{\omega_2}\frac{\sin a'}{\sin\theta}\right)$$

$$= \overrightarrow{\omega_1} \wedge \overrightarrow{\omega_2}\frac{\sin(\theta - \alpha)\sin a'}{(\sin\theta)^2} + \overrightarrow{\omega_2} \wedge \overrightarrow{\omega_1}\frac{\sin\alpha\sin(\theta - a')}{(\sin\theta)^2}$$

$$= \overrightarrow{\omega_1} \wedge \overrightarrow{\omega_2}\frac{\sin(a' - \alpha)}{\sin\theta}$$

olduğundan,

$$\left(\vec{N}, \vec{\omega}, \overrightarrow{\omega'}\right) = \left(\vec{N}, \overrightarrow{\omega_1}, \overrightarrow{\omega_2}\right)\frac{\sin(a' - \alpha)}{\sin\theta}$$

olur. Burada herhangi (c') eğrisi yerine (c) eğrisine dik olan (c_0) eğrisi alınırsa,

$$\overrightarrow{\omega'} = \overrightarrow{\omega_0} \quad \text{ve} \quad a' - \alpha = \frac{\pi}{2}$$

olacağından aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\left(\vec{N}, \vec{\omega}, \overrightarrow{\omega_0}\right) = \left(\vec{N}, \overrightarrow{\omega_1}, \overrightarrow{\omega_2}\right)\frac{1}{\sin\theta}$$

Böylece (3.3.1) in sağ tarafı gösterilmiş olur. Şimdi de bu değerin Gauss eğriliğinin $\sin\theta$ katına eşit olduğunu göstermek için (Akbulut, 1970) referansındaki şu vektörel eşitlikler göz önüne alınmalıdır.

$$\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right).(\vec{x}\wedge\vec{y}) = \begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{x} & \vec{a}.\vec{y} \\ \vec{b}.\vec{x} & \vec{b}.\vec{y} \end{vmatrix} \tag{3.3.2}$$

$$\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right).(\vec{x}\wedge\vec{y}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\wedge\vec{x} & \vec{a}\wedge\vec{y} \\ \vec{b}\wedge\vec{x} & \vec{b}\wedge\vec{y} \end{vmatrix} \tag{3.3.3}$$

$\vec{\mathrm{N}} = \frac{\vec{\mathrm{t}_1}\wedge\vec{\mathrm{t}_2}}{\sin\theta}$ olduğu düşünülürse ve

$$\left(\vec{\mathrm{N}},\overrightarrow{\omega_1},\overrightarrow{\omega_2}\right) = \left(\frac{\vec{\mathrm{t}_1}\wedge\vec{\mathrm{t}_2}}{\sin\theta}\right).\left(\overrightarrow{\omega_1}\wedge\overrightarrow{\omega_2}\right)$$

ifadesine (3.3.2) uygulanırsa,

$$\left(\vec{\mathrm{N}},\overrightarrow{\omega_1},\overrightarrow{\omega_2}\right) = \frac{1}{\sin\theta}\left(\vec{\mathrm{t}_1}\wedge\vec{\mathrm{t}_2}\right).\left(\overrightarrow{\omega_1}\wedge\overrightarrow{\omega_2}\right) = \frac{1}{\sin\theta}\begin{vmatrix} \vec{\mathrm{t}_1}.\overrightarrow{\omega_1} & \vec{\mathrm{t}_1}.\overrightarrow{\omega_2} \\ \vec{\mathrm{t}_2}.\overrightarrow{\omega_1} & \vec{\mathrm{t}_2}.\overrightarrow{\omega_2} \end{vmatrix}$$

bulunur. Burada $\overrightarrow{\omega_1}$ ve $\overrightarrow{\omega_2}$ nin (3.2.5) deki değerleri yerine yazılırsa,

$$\left(\vec{\mathrm{N}},\overrightarrow{\omega_1},\overrightarrow{\omega_2}\right) = \frac{1}{\sin\theta}\begin{vmatrix} \vec{\mathrm{t}_1}.\overrightarrow{\omega_1} & \vec{\mathrm{t}_1}.\overrightarrow{\omega_2} \\ \vec{\mathrm{t}_2}.\overrightarrow{\omega_1} & \vec{\mathrm{t}_2}.\overrightarrow{\omega_2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta}\begin{vmatrix} \frac{1}{\left(T_g\right)_1} & \frac{\sin\theta}{(R_n)_2}+\frac{\cos\theta}{\left(T_g\right)_2} \\ -\frac{\sin\theta}{(R_n)_1}+\frac{\cos\theta}{\left(T_g\right)_1} & \frac{1}{\left(T_g\right)_2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{1}{\left(T_g\right)_1}.\frac{1}{\left(T_g\right)_2} - \left(\frac{\sin\theta}{(R_n)_2}+\frac{\cos\theta}{\left(T_g\right)_2}\right)\left(-\frac{\sin\theta}{(R_n)_1}+\frac{\cos\theta}{\left(T_g\right)_1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{(\sin\theta)^2}{\left(T_g\right)_1\left(T_g\right)_2} + \sin\theta\cos\theta\left(\frac{1}{(R_n)_1\left(T_g\right)_2} - \frac{1}{\left(T_g\right)_1(R_n)_2}\right) + \frac{(\sin\theta)^2}{(R_n)_1(R_n)_2}\right]$$

ve aynı nedenlerle,

$$\left(\vec{\mathrm{N}},\vec{\omega},\overrightarrow{\omega_0}\right)=\frac{1}{sin\,\theta}\left[\frac{(sin\,\theta)^2}{T_g\left(T_g\right)_0}+sin\,\theta\,cos\,\theta\left(\frac{1}{R_n\left(T_g\right)_0}-\frac{1}{T_g(R_n)_0}\right)+\frac{(sin\,\theta)^2}{R_n(R_n)_0}\right]$$

elde edilir. Şu halde sonuç olarak $\left(\vec{\mathrm{N}},\vec{\omega},\overrightarrow{\omega_0}\right)=\left(\vec{\mathrm{N}},\overrightarrow{\omega_1},\overrightarrow{\omega_2}\right)\frac{1}{sin\,\theta}$ olduğundan,

$$\frac{1}{sin\,\theta}\left[\frac{(sin\,\theta)^2}{T_g\left(T_g\right)_0}+sin\,\theta\,cos\,\theta\left(\frac{1}{R_n\left(T_g\right)_0}-\frac{1}{T_g(R_n)_0}\right)+\frac{(sin\,\theta)^2}{R_n(R_n)_0}\right]=$$

$$\frac{1}{(sin\,\theta)^2}\left[\frac{(sin\,\theta)^2}{\left(T_g\right)_1\left(T_g\right)_2}+sin\,\theta\,cos\,\theta\left(\frac{1}{(R_n)_1\left(T_g\right)_2}-\frac{1}{\left(T_g\right)_1(R_n)_2}\right)+\frac{(sin\,\theta)^2}{(R_n)_1(R_n)_2}\right]$$

eşitliği bulunur. Eğer (c) ve (c_0) eğrileri yerine de eğrilik çizgileri alınırsa,

$$\frac{1}{T_g}=\frac{1}{\left(T_g\right)_0}=0\quad,\quad\frac{1}{R_n}=\frac{1}{R_1}\quad,\quad\frac{1}{(R_n)_0}=\frac{1}{R_2}$$

olacağından yukarıdaki eşitlik,

$$\frac{sin\,\theta}{R_1R_2}=\frac{1}{(sin\,\theta)^2}\left[\frac{(sin\,\theta)^2}{\left(T_g\right)_1\left(T_g\right)_2}+sin\,\theta\,cos\,\theta\left(\frac{1}{(R_n)_1\left(T_g\right)_2}-\frac{1}{\left(T_g\right)_1(R_n)_2}\right)+\frac{(sin\,\theta)^2}{(R_n)_1(R_n)_2}\right]$$

şeklini alır. $\frac{1}{R_1R_2}=K$, Gauss eğriliği olduğundan,

$$K\,sin\,\theta=\frac{1}{(sin\,\theta)^2}\left[\frac{(sin\,\theta)^2}{\left(T_g\right)_1\left(T_g\right)_2}+sin\,\theta\,cos\,\theta\left(\frac{1}{(R_n)_1\left(T_g\right)_2}-\frac{1}{\left(T_g\right)_1(R_n)_2}\right)+\frac{(sin\,\theta)^2}{(R_n)_1(R_n)_2}\right]=\left(\vec{\mathrm{N}},\overrightarrow{\omega_1},\overrightarrow{\omega_2}\right)\frac{1}{sin\,\theta}\qquad(3.3.4)$$

elde edilir. Böylece hem teorem ispatlanmış olur, hem de Gauss eğriliğinin diğer bir ifadesi elde edilir.

Özel Hal: $\theta=\frac{\pi}{2}$ seçilmesi durumunda, (Akbulut, 1970) referansındaki

$$K=\left(\vec{\mathrm{N}},\vec{\omega},\overrightarrow{\omega_0}\right)=\left(\vec{\mathrm{N}},\overrightarrow{\omega_1},\overrightarrow{\omega_2}\right)$$

formuna dönüşür.

Teorem 3.3.2: *K*, Gauss eğriliği, *E*, *G* ve bunların *u* ve *v* ye göre türevleri cinsinden ifade edilebilir.

$$K = \frac{D(\overrightarrow{t_1}, \overrightarrow{t_2})}{D(s_1, s_2)} = -\frac{1}{(\sin\theta)^3}\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{(\sqrt{E})_v - \cos\theta\,(\sqrt{G})_u}{\sqrt{G}}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{(\sqrt{G})_u - \cos\theta\,(\sqrt{E})_v}{\sqrt{E}}\right)\right] \tag{3.3.5}$$

İspat: (3.3.3) vektörel özdeşliği kullanılırsa,

$$K\sin\theta = \frac{1}{\sin\theta}(\overrightarrow{\omega_1} \wedge \overrightarrow{\omega_2}).\vec{N} = \frac{1}{\sin\theta}(\overrightarrow{\omega_1} \wedge \overrightarrow{\omega_2}).\left(\frac{\overrightarrow{t_1} \wedge \overrightarrow{t_2}}{\sin\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{(\sin\theta)^2}\begin{vmatrix} \overrightarrow{\omega_1} \wedge \overrightarrow{t_1} & \overrightarrow{\omega_1} \wedge \overrightarrow{t_2} \\ \overrightarrow{\omega_2} \wedge \overrightarrow{t_1} & \overrightarrow{\omega_2} \wedge \overrightarrow{t_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{(\sin\theta)^2}\begin{vmatrix} \frac{\partial\overrightarrow{t_1}}{\partial s_1} & \frac{\partial\overrightarrow{t_2}}{\partial s_1} \\ \frac{\partial\overrightarrow{t_1}}{\partial s_2} & \frac{\partial\overrightarrow{t_2}}{\partial s_2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(\sin\theta)^2}\frac{D(\overrightarrow{t_1}, \overrightarrow{t_2})}{D(s_1, s_2)}$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{(\sin\theta)^3}\frac{D(\overrightarrow{t_1}, \overrightarrow{t_2})}{D(s_1, s_2)} \tag{3.3.6}$$

bulunur. Burada (3.1.6) formülleri göz önünde tutulursa,

$$\frac{\partial\overrightarrow{t_1}}{\partial s_1} = \frac{\partial\overrightarrow{t_1}}{\partial u}\frac{du}{ds_1} = \frac{\partial\overrightarrow{t_1}}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{E}}$$

$$\frac{\partial\overrightarrow{t_2}}{\partial s_1} = \frac{\partial\overrightarrow{t_2}}{\partial u}\frac{du}{ds_1} = \frac{\partial\overrightarrow{t_2}}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{E}}$$

$$\frac{\partial\overrightarrow{t_1}}{\partial s_2} = \frac{\partial\overrightarrow{t_1}}{\partial v}\frac{dv}{ds_2} = \frac{\partial\overrightarrow{t_1}}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{G}}$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{t_2}}{\partial s_2} = \frac{\partial \overrightarrow{t_2}}{\partial v}\frac{dv}{ds_2} = \frac{\partial \overrightarrow{t_2}}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{G}}$$

elde edilir. Bu değerler (3.3.6) da yerlerine konulursa,

$$K = \frac{1}{(\sin\theta)^3}\frac{D\left(\overrightarrow{t_1},\overrightarrow{t_2}\right)}{D(s_1,s_2)} = \frac{1}{(\sin\theta)^3}\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{D\left(\overrightarrow{t_1},\overrightarrow{t_2}\right)}{D(u,v)}$$

$$= \frac{1}{(\sin\theta)^3}\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\overrightarrow{t_1}.\frac{\partial \overrightarrow{t_2}}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\overrightarrow{t_1}.\frac{\partial \overrightarrow{t_2}}{\partial u}\right)\right]$$

olur. Bu ifadede, (3.2.12) bağıntısı göz önünde tutulursa (3.3.5) hemen elde edilir.

Sonuç 3.3.1:

$$K(\sin\theta)^3\sqrt{EG} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\overrightarrow{t_1}.\frac{\partial \overrightarrow{t_2}}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\overrightarrow{t_1}.\frac{\partial \overrightarrow{t_2}}{\partial u}\right) \tag{3.3.7}$$

Sonuç 3.3.2: $\overrightarrow{\omega_1} \wedge \overrightarrow{\omega_2}$, $\vec{\omega}$ ile çarpılınca

$$\left(\vec{\omega}\,,\overrightarrow{\omega_1},\overrightarrow{\omega_2}\right) = K(\sin\theta)^2\frac{da}{ds} \tag{3.3.8}$$

sonucuna varılır. Bu da $K = 0$ olması halinde veya a nın sabit olduğu eğrilerde her üç Darboux vektörünün aynı düzlemde olduğunu gösterir.

Sonuç 3.3.3:

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial s_1} = \overrightarrow{\omega_1} \wedge \vec{N} \quad , \quad \frac{\partial \vec{N}}{\partial s_2} = \overrightarrow{\omega_2} \wedge \vec{N}$$

ifadeleri vektörel çarpılırsa,

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial s_1} \wedge \frac{\partial \vec{N}}{\partial s_2} = \left(\overrightarrow{\omega_1} \wedge \vec{N}\right) \wedge \left(\overrightarrow{\omega_2} \wedge \vec{N}\right) = \vec{N}\left(\overrightarrow{\omega_1},\overrightarrow{\omega_2},\vec{N}\right) = K(\sin\theta)^2\vec{N}$$

olduğundan aşağıdaki sonuç hemen bulunur.

$$K(\sin\theta)^2 = \left(\vec{N},\frac{\partial \vec{N}}{\partial s_1},\frac{\partial \vec{N}}{\partial s_2}\right) \tag{3.3.9}$$

elde edilir.

Teorem 3.3.4: Düzgün noktalardan meydana gelen ve denklemi $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ olan bir Σ yüzeyinin kapalı bir eğrisinin sınırladığı (A) bölgesi tek bağımlı olduğu kabul ediliyor. Bu yüzey bölgesini sınırlayan sürekli ve katlı noktası olmayan kapalı eğri (c) olsun. Bu eğri boyunca yüzeyin jeodezik eğriliği $\frac{1}{R_g}$ ve bu yüzeyin (A) bölgesindeki noktalara ait yüzeyin gauss eğriliği K, verilen (c) eğrisinin yay elemanı da ds ve (A) bölgesinin yüzey elemanı da $d\sigma$ olduğuna göre aşağıdaki formülü ispatlayınız.

$$\int_{(c)} \frac{ds}{R_g} = 2\pi - \sin\theta \iint_{(A)} K\, d\sigma \tag{3.3.10}$$

dir.

Not: Burada (c) eğrisi üzerinde pozitif yönde integral alınmıştır. (O. Bonnet integral formülü)

İspat: (3.2.36) gereğince,

$$\frac{1}{R_g} = -\frac{1}{\sin\theta}\vec{t_1}.\frac{d\vec{t_2}}{ds} + \frac{da}{ds}$$

olduğundan,

$$\int_{(c)} \frac{ds}{R_g} = \int_{(c)} da - \frac{1}{\sin\theta}\int_{(c)} \vec{t_1}.d\vec{t_2}$$

olur. (c) düzgün kapalı bir eğri olduğundan,

$$\int_{(c)} da = 2\pi$$

olup, ikinci integrale Riemann formülü uygulanırsa,

$$\int_{(c)} \vec{t_1}.d\vec{t_2} = \int_{(c)} \left(\vec{t_1}.\frac{\partial\vec{t_2}}{\partial u}\right) du + \left(\vec{t_1}.\frac{\partial\vec{t_2}}{\partial v}\right) dv$$

$$= \iint\limits_{(A)} \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\overrightarrow{\mathrm{t}_1}.\frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{t}_2}}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\overrightarrow{\mathrm{t}_1}.\frac{\partial \overrightarrow{\mathrm{t}_2}}{\partial u}\right) \right] dudv$$

elde edilir. Öte yandan,

$$d\sigma = \|\overrightarrow{\mathrm{r}_\mathrm{u}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{r}_\mathrm{v}}\| dudv = \sqrt{EG}\sin\theta\, dudv$$

ifadesi göz önünde bulundurulup integral içindeki ifadenin (3.3.7) deki değeri de yerine yazılırsa,

$$\int \overrightarrow{\mathrm{t}_1}.d\overrightarrow{\mathrm{t}_2} = \iint K\,(\sin\theta)^3\sqrt{EG}dudv = (\sin\theta)^2 \iint K\, d\sigma$$

olur. İntegrallerin eşitleri yerine yazılırsa,

$$\int\limits_{(c)} \frac{ds}{R_g} = 2\pi - \sin\theta \iint\limits_{(A)} K\, d\sigma$$

bulunmasıyla ispat tamamlanmış olur.

Özel Hal: $\theta = \frac{\pi}{2}$ seçilmesi durumunda, (Akbulut, 1970) referansındaki

$$\int\limits_{(c)} \frac{ds}{R_g} = 2\pi - \iint\limits_{(A)} K\, d\sigma$$

formuna dönüşür.

Bu tezin R_1^3 Minkowski uzayına ve ID-Modüle uygulamaları çalışması devam etmekte olup, kısa zamanda yayın hazırlığına dönüşecektir.

4. SONUÇ

Bu tez çalışmasında yüzeyin belirli bir noktasındaki parametre eğrilerinin teğetlerinin birbirine dik alınmamasıyla diferansiyel geometri formüllerinin genel hallerine ulaşılmıştır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Akbulut, F., 1970, Vektörel Analiz, Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Kitaplar Serisi, Bornova, 653s.

Akbulut, F., 1981, Cektörel Hesap, Jge Üniversitesi Matbaası, Bornova, 361s.

Kuhnel, W., 1999, Differential Geometry Curves-Surfaces-Manifolds, Wiesbaden, Braunchweig.

Hunt, K.H., 1978, Kinematic Geometry of Mechanisms, Clanderon, Oxford, 468p.

Milman, M.S. and Parker, G.D., 1977, Elements of Differential Geometry, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

Struik, D. J., 1961, Lectures in Classical Differential Geometry, Addison-Wesley, Reading, MA, 232p.

Do Carmo, M. P., 1976, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice- Hall, Englewood Cliffs.

Kreyzig, E., 1959, Differential Geometry, Univ. of Toronto Press, Toronto, 352p.

Klingenberg, W., 1978, A course in Differential Geometry, Springer-Verlag, Berlin and New York, 178p.

ÖZGEÇMİŞ

06.10.1983 tarihinde İzmir'de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini İzmir'de tamamladı. 2001 yılında başladığı Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, Uygulamalı Matematik Ağırlıklı lisans öğretim programından 2006 yılında mezun oldu. 2010 yılında Ege üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne bağlı olarak Geometri Anabilim Dalında yüksek lisansa başladı.