

**EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**(YÜKSEK LİSANS TEZİ)**

**ÇOĞUL DEĞERLİ FONKSİYONLARDA**

**BAZI SÜREKLİLİKLER ÜZERİNE**

**Merve TAVASLIOĞLU**

**Tez Danışmanı : Doç. Dr. Oya BEDRE ÖZBAKIR**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Bilim Dalı Kodu : 403.04.01**

**Sunuş Tarihi : 02.09.2013**

**Bornova-İZMİR**

**2013**



**Merve TAVASLIOĞLU** tarafından **Yüksek Lisans** tezi olarak sunulan “**Çoğul Değerli Fonksiyonlarda Bazı Süreklilikler Üzerine**” başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 02.09.2013 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

**Jüri Üyeleri:**

**İmza**

<b>Jüri Başkanı</b>	<b>: Doç. Dr. Oya BEDRE ÖZBAKIR</b>	.....
<b>Raportör Üye</b>	<b>: Yrd. Doç. Dr. Ayşegül ÇAKSU GÜLER</b>	.....
<b>Üye</b>	<b>: Yrd. Doç. Dr. Ash GÜLDÜRDEK</b>	.....



**ÖZET****ÇOĞUL DEĞERLİ FONKSİYONLARDA****BAZI SÜREKLİLİKLER ÜZERİNE**

TAVASLIOĞLU, Merve

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı  
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Oya BEDRE ÖZBAKIR  
Eylül 2013, 56 sayfa

Bu tez esas olarak dört bölümden oluşur.

Birinci bölümde tez konusu tanıtılmış, ikinci bölümde ise tezin daha kolay anlaşılması için bazı temel tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde na-süreklili, ön güçlü na-süreklili, yarı güçlü na-süreklili ve zayıf na-süreklili çoğul değerli fonksiyonların tanımları, karakterizasyonları, temel özellikleri ve bunların birbirleriyle ilişkileri incelenmiştir. Bu ilişkiler şema ile gösterilmiş ve karşıt örneklerle çalışma desteklenmiştir.

Dördüncü bölümde güçlü süreklili, mükemmel süreklili, hemen hemen mükemmel süreklili ve hemen hemen  $cl$ -süpersüreklili çoğul değerli fonksiyonlar çalışılmış, çeşitli karakterizasyonlar ve teoremler elde edilmiştir. Ayrıca bunlar arasındaki ilişkiler incelenerek şema ile gösterilmiş ve bu ilişkilere karşıt örnekler verilerek konuya açıklık getirilmiştir.

**Anahtar sözcükler:** çoğul değerli fonksiyon, na-süreklili çoğul değerli fonksiyon, güçlü süreklili çoğul değerli fonksiyon, mükemmel süreklili çoğul değerli fonksiyon, hemen hemen  $cl$ -süpersüreklili çoğul değerli fonksiyon.



**ABSTRACT**  
**ON SOME CONTINUITIES IN**  
**MULTIFUNCTIONS**

TAVASLIOĞLU, Merve

MSc. in Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Oya BEDRE ÖZBAKIR

September 2013, 56 pages

This thesis essentially consists of four chapters.

In the first chapter, the subject of the thesis is introduced, in the second chapter, in order to make the understanding easy, some basic definitions and theorems are given.

In the third chapter, definitions, characterizations and fundamental properties of na-continuous, pre strong na-continuous, semi strong na-continuous and weakly na-continuous multifunctions are given and their relations with each other are examined. These relations are given with a diagram and this work is supported by counter examples.

In the fourth chapter, strongly continuous, perfectly continuous, almost perfectly continuous and almost cl-supercontinuous multifunctions are studied and several characterizations and theorems are obtained. Also, the relations between these are investigated, these relations are given with a diagram and this subject is clarified by giving counter examples.

**Keywords:** multifunction, na-continuous multifunction, strongly continuous multifunction, perfectly continuous multifunction, almost cl-supercontinuous multifunction.





## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez konumu veren ve çalıőmalarım boyunca bana yol gösterip her türlü konuda destek veren çok sevdiğim değerli hocam Sayın Doç. Dr. Oya BEDRE ÖZBAKIR' a en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca yüksek lisans öğrenimim boyunca burs aldığım TÜBİTAK' a desteklerinden dolayı teşekkür ederim. Öğrenim hayatım boyunca hiçbir zaman sevgisini ve desteğini esirgemeyen en değerli varlığım aileme ve yardımlarından dolayı çok değerli arkadaşım İzzettin DEMİR'e teşekkürü borç bilirim.



**İÇİNDEKİLER**

	<u>Sayfa</u>
ÖZET .....	v
ABSTRACT .....	vii
TEŞEKKÜR .....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	xiii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ .....	xv
1. GİRİŞ .....	1
2. ÖNBİLGİLER .....	2
2.1. Temel Kavram ve Özellikler .....	2
2.2. Çoğul Değerli Fonksiyonlar .....	8
3. NA-SÜREKLİ ÇOĞUL DEĞERLİ FONKSİYONLAR.....	14
3.1. Na-Süreklili Çoğul Değerli Fonksiyonlar .....	14
3.2. Ön Güçlü Na-Süreklili Çoğul Değerli Fonksiyonlar .....	21
3.3. Yarı Güçlü Na-Süreklili Çoğul Değerli Fonksiyonlar .....	25
3.4. Zayıf Na-Süreklili Çoğul Değerli Fonksiyonlar .....	30

## İÇİNDEKİLER ( devam )

### Sayfa

4. GÜÇLÜ SÜREKLİ, MÜKEMMEL SÜREKLİ, HEMEN HEMEN MÜKEMMEL SÜREKLİ VE HEMEN HEMEN CL-SÜPERSÜREKLİ ÇOĞUL DEĞERLİ FONKSİYONLAR.....	37
4.1. Güçlü Sürekli Çoğul Değerli Fonksiyonlar .....	37
4.2. Mükemmel Sürekli ve Hemen Hemen Mükemmel Sürekli Çoğul Değerli Fonksiyonlar .....	38
4.3. Hemen Hemen Cl-süpersürekli Çoğul Değerli Fonksiyonlar .....	45
5. SONUÇ.....	55
KAYNAKLAR DİZİNİ .....	57
ÖZGEÇMİŞ .....	61

**ŞEKİLLER DİZİNİ**

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
3.4.1. Üçüncü bölümdeki süreklilikler arasındaki ilişkiler.....	34
4.3.1.Dördüncü bölümdeki süreklilikler arasındaki ilişkiler.....	51



## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$\Rightarrow$	Gerek koşul.
$\Leftarrow$	Yeter koşul.
$\Leftrightarrow$	Gerek ve yeter koşul.
$(X, \tau)$	Topolojik uzay.
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
<u>Kısaltmalar</u>	
$\text{cl}(A)$	A kümesinin kapanışı.
$\text{int}(A)$	A kümesinin içi.
$A^c$	A kümesinin tümleyeni.
$P(Y)$	Y kümesinin alt kümelerinin kümesi.
$F _A$	$F$ çoğul değerli fonksiyonun A kümesine kısıtlanması.
$F^+(A)$	A kümesinin üst ters görüntüsü.
$F^-(A)$	A kümesinin alt ters görüntüsü.
$G_F$	$F$ çoğul değerli fonksiyonun grafiği
$\mathcal{N}(x)$	x noktasının komşuluğu





## 1.GİRİŞ

20. yüzyılın ilk yarısından itibaren çoğul değerli fonksiyonlarla ilgili çalışmalara başlanmış ve günümüze kadar bu tür fonksiyonların birçok özellikleri farklı araştırmacılar tarafından verilmiştir. Bu özelliklerden bazıları çoğul değerli fonksiyonların süreklilikleri ( Hola, 1988 ), integrallenebilirlikleri ( Bridland, 1970 ) ve ölçülebilirlikleri ( Jacobs, 1968 ) üzerinedir. Ayrıca çoğul değerli fonksiyonların matematik programlaması, olasılık, istatistik, sabit nokta teoremleri ve ekonomi gibi pek çok alanda da uygulamaları bulunmaktadır.

Topolojinin çok çalışılan konularından biri de fonksiyonların sürekliliğidir. Literatürde sürekli fonksiyonların çeşitli türleri üzerine pek çok çalışma bulunmaktadır. Bunlardan bazıları da çoğul değerli fonksiyonlara genişletilerek ele alınmaktadır. Bunlara örnek olarak tezde ele aldığımız Yüksel, Şimşekler ve Kut' un üstten ve alttan na-süreklili çoğul değerli fonksiyonlar adlı çalışması, Kohli ve Arya' nın üstten ve alttan hemen hemen  $c_1$ -süpersüreklili çoğul değerli fonksiyonlar adlı çalışması verilebilir.

Bu tezde ilk olarak, na-süreklili, ön güçlü na-süreklili, yarı güçlü na-süreklili, zayıf na-süreklili çoğul değerli fonksiyonlar ele alınmıştır. Bu sürekliliklerin tanımları ve karakterizasyonları verilmiş, özellikleri incelenmiş, süreklilik türlerinin birbiriyle ilişkileri araştırılmıştır. Daha sonra ise güçlü sürekli, mükemmel sürekli, hemen hemen mükemmel sürekli ve hemen hemen  $c_1$ -süper sürekli çoğul değerli fonksiyonlar incelenmiştir. Bu sürekliliklerin karakterizasyonları araştırılmış ve çeşitli teoremler elde edilmiştir. Ayrıca süreklilik türleri arasındaki ilişkiler incelenerek terslerine ait örneklerle konuya açıklık getirilmiştir.

## 2.ÖNBİLGİLER

### 2.1. Temel Kavram ve Özellikler

Bu bölümde, tezin daha kolay anlaşılabilmesi için bazı temel tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir.

**Tanım 2.1.1.**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $A \subseteq X$  olsun.  $A$  kümesi,

(a) ( **Mashhour et al., 1982** ) ön-açık ( pre-open ) kümedir :  $\Leftrightarrow A \subseteq \text{int}(cl(A))$ .

(b) ( **Levine, 1963** ) yarı-açık ( semi-open ) kümedir :  $\Leftrightarrow A \subseteq cl(\text{int}(A))$ .

(c) ( **Stone, 1937** ) regüler açık ( regular open ) kümedir :  $\Leftrightarrow A = \text{int}(cl(A))$ .

(d) ( **Nijastad, 1965** )  $\alpha$ -açık kümedir (  $\alpha$ -open ) :  $\Leftrightarrow A \subseteq \text{int}(cl(\text{int}(A)))$ .

(e) ( **Abd El-Monsef et al., 1983** )  $\beta$ -açık kümedir (  $\beta$ -open ) :  $\Leftrightarrow A \subseteq cl(\text{int}(cl(A)))$ .

Sırasıyla, bir ön-açık, yarı-açık, regüler açık,  $\alpha$ -açık,  $\beta$ -açık kümenin tümleyeni ön-kapalı, yarı-kapalı, regüler kapalı,  $\alpha$ -kapalı,  $\beta$ -kapalı kümedir.

**Tanım 2.1.2.**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $A \subseteq X$  olsun.

(a) ( **Singh, 2007** )  $A$ , hem açık hem de kapalı olan kapaçık ( clopen ) kümelerin birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa  $A$  kümesine kap-açık ( cl-open ) kümedir denir.

(b) ( **Velicko, 1968** )  $A$ , regüler açık kümelerin keyfi birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa  $A$  kümesine  $\delta$ -açık kümedir denir.

Sırasıyla, bir kap-açık,  $\delta$ -açık kümenin tümleyeni, kap-kapalı,  $\delta$ -kapalı bir kümedir.

**Tanım 2.1.3.**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $A \subseteq X$  olsun.

(a) ( **Crossley and Hildebrand, 1971** )  $A$  kümesinin tüm yarı-kapalı üst kümelerinin kesişimine  $A$  kümesinin yarı-kapanışı denir ve  $sclA$  ile gösterilir.

(b) ( **El-Deeb et al., 1983** ) A kümesinin tüm ön-kapalı üst kümelerinin kesişimine A kümesinin ön-kapanışı denir ve  $pclA$  ile gösterilir.

(c) ( **Mashhour et al., 1983** ) A kümesinin tüm  $\alpha$ -kapalı üst kümelerinin kesişimine A kümesinin  $\alpha$ -kapanışı denir ve  $aclA$  ile gösterilir.

(d) ( **Velicko, 1968** ) A kümesinin tüm  $\delta$ -kapalı üst kümelerinin kesişimine A kümesinin  $\delta$ -kapanışı denir ve  $\delta clA$  ile gösterilir.

**Tanım 2.1.4.** ( **Staum, 1974** )  $( X, \tau )$  bir topolojik uzay,  $A \subseteq X$  ve  $x \in X$  olsun.  $x$  noktasını içeren her  $V \subseteq X$  kapaçık kümesi için  $V \cap A \neq \emptyset$  oluyorsa  $x$  noktasına A kümesinin cl-değme noktası ( cl-adherent point ) denir. A kümesinin tüm cl-değme noktalarının kümesi  $[A]_{cl}$  ile gösterilir.

A kümesinin kap-kapalı bir küme olması için gerek ve yeter koşul  $A = [A]_{cl}$  olmasıdır.

**Tanım 2.1.5.** ( **Kohli and Arya, 2011** )  $( X, \tau )$  bir topolojik uzay,  $A \subseteq X$  ve  $x \in X$  olsun.  $x$  noktasını içeren ve A kümesinde kapsanan bir kapaçık küme var ise  $x$  noktasına A kümesinin cl-iç noktası ( cl-interior point ) denir. A kümesinin tüm cl-iç noktalarının kümesi  $int_{cl}A$  ile gösterilir.

A kümesinin kap-açık bir küme olması için gerek ve yeter koşul  $A = int_{cl}A$  olmasıdır.

**Tanım 2.1.6.**  $( X, \tau )$  bir topolojik uzay olsun.

(a) ( **Maheswari et al., 1985** ) X uzayının her  $\alpha$ -açık örtüsü sonlu bir altörtüye sahipse X uzayına  $\alpha$ -kompakttır denir.

(b) ( **Singal and Mathur, 1969** ) X uzayının her regüler açık örtüsü sonlu bir altörtüye sahipse X uzayına yakın kompakttır ( nearly compact ) denir.

(c) ( **Mashour et al., 1984** ) X uzayının her ön-açık örtüsü sonlu bir altörtüye sahipse X uzayına güçlü kompakttır ( strongly compact ) denir.

(d) ( **Dorsett, 1981** ) X uzayının her yarı-açık örtüsü sonlu bir altörtüye sahipse X uzayına yarı kompakttır ( semi compact ) denir.

(e) ( **Staum, 1974** ) X uzayının her kapaçık örtüsü sonlu bir altörtüye sahipse X uzayına hafifçe kompakttır ( mildly compact ) denir.

**Tanım 2.1.7.**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay olsun.

(a) ( **Navalagi, 2009** )  $X$  uzayının her farklı  $x, y$  nokta çifti için  $x \in U$  ve  $y \in V$  olacak şekilde  $X$  uzayında ayrık  $U$  ve  $V$   $\alpha$ -açık kümeleri bulunuyorsa  $X$  uzayına  $\alpha$ -Hausdorf denir.

(b) ( **Yuksel vd., 2011a** )  $X$  uzayının her farklı  $x, y$  nokta çifti için  $x \in U$  ve  $y \in V$  olacak şekilde  $X$  uzayında ayrık  $U$  ve  $V$   $\delta$ -açık kümeleri bulunuyorsa  $X$  uzayına  $\delta$ -Hausdorf denir.

(c) ( **Staum, 1974** )  $X$  uzayının her farklı  $x, y$  nokta çifti için  $x \in U$  ve  $y \in V$  olacak şekilde  $X$  uzayında ayrık  $U$  ve  $V$  kapaçık kümeleri bulunuyorsa  $X$  uzayına ultra Hausdorf denir.

**Tanım 2.1.8.**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay olsun.

(a) ( **Willard, 1970** )  $X$  uzayının her ayrık  $K$  ve  $F$  kapalı alt kümeleri için  $K \subseteq U$ ,  $F \subseteq V$  olacak şekilde  $X$  uzayında ayrık  $U$  ve  $V$  açık kümeleri varsa  $X$  uzayına normal uzay denir.

(b) ( **Yuksel vd., 2011a** )  $X$  uzayının her ayrık  $K$  ve  $F$  kapalı alt kümeleri için  $K \subseteq U$ ,  $F \subseteq V$  olacak şekilde  $X$  uzayında ayrık  $U$  ve  $V$   $\alpha$ -açık kümeleri varsa  $X$  uzayına  $\alpha$ -normal uzay denir.

(c) ( **Yuksel vd., 2011b** )  $X$  uzayının her ayrık  $K$  ve  $F$  kapalı alt kümeleri için  $K \subseteq U$ ,  $F \subseteq V$  olacak şekilde  $X$  uzayında ayrık  $U$  ve  $V$  ön-açık kümeleri varsa  $X$  uzayına ön-normal uzay denir.

(d) ( **Ganster et.al., 2002** )  $X$  uzayının her ayrık  $K$  ve  $F$  yarı-kapalı alt kümeleri için  $K \subseteq U$ ,  $F \subseteq V$  olacak şekilde  $X$  uzayında ayrık  $U$  ve  $V$  yarı-açık kümeleri varsa  $X$  uzayına yarı-normal uzay denir.

**Tanım 2.1.9.**  $(X, \tau)$  bir topolojik uzay olsun.

(a) ( **Willard, 1970** )  $X$  uzayı boş olmayan ayrık açık iki kümenin birleşimi olarak yazılamıyorsa  $X$  uzayına bağlantılıdır aksi taktirde bağlantısızdır denir. Buradan sembolik olarak,

$$X \text{ uzayı bağlantısızdır} : \Leftrightarrow ( \exists A, B \in \tau, A \cap B = \emptyset ) : ( X = A \cup B )$$

olarak yazılabilir. Burada  $A$  ve  $B$  çifti,  $X$  uzayının bir ayrışımıdır.

(b) ( **Yuksel vd., 2011a** )  $X$  uzayı boş olmayan ayrık  $\delta$ -açık iki kümenin birleşimi olarak yazılamıyorsa  $X$  uzayına  $\delta$ -bağlantılıdır denir.

(c) ( **Ajmal and Kohli, 1992; Steen and Seebach, 1978** ) Boştan farklı her  $V \subseteq X$  açık kümesi için  $c/V = X$  ise veya denk olarak bu  $V \subseteq X$  kümesi boştan farklı iki açık kümenin kesişimi şeklinde yazılabiliyorsa  $X$  uzayına aşırı bağlantılıdır ( hyperconnected ) denir.

**Teorem 2.1.10.** (  $X, \tau$  ) bir topolojik uzay olsun.

(a) ( **Willard, 1970** )  $X$  uzayının bağlantılı olması için gerek ve yeter koşul  $X$  uzayının boştan ve  $X$  kümesinden farklı hem açık hem de kapalı bir alt kümesinin olmamasıdır.

(b) ( **Munkres, 1975** )  $U$  ve  $V$  kümeleri,  $X$  uzayının bir ayrışımı ve  $A$  da  $X$  uzayının bağlantılı bir alt kümesi olsun. Bu taktirde ya  $A \subseteq U$  ya da  $A \subseteq V$  dir.

**Tanım 2.1.11.** ( **Willard, 1970** ) (  $X, \tau$  ) bir topolojik uzay olsun.  $X$  uzayının her  $A$  kapalı alt kümesi ve  $x \notin A$  koşulunu sağlayan  $x \in X$  noktası için  $A \subseteq U$  ve  $x \in V$  olacak şekilde  $X$  uzayı içinde ayrık  $U$  ve  $V$  açık kümeleri varsa (  $X, \tau$  ) uzayı regüler uzay olarak adlandırılır.

**Lemma 2.1.12.** ( **Chae and Noiri, 1986** ) (  $X, \tau$  ) bir topolojik uzay ve  $A \subseteq X$  olsun.  $A$ ,  $X$  uzayında yoğun veya açık bir alt küme ve  $U \subseteq X$  regüler açık ise  $U \cap A$  kümesi  $A$  da regüler açıktır.

**Lemma 2.1.13.**  $\{ X_\lambda : \lambda \in D \}$  topolojik uzaylar ailesi ve  $U_{\lambda_i} \subseteq X_{\lambda_i}$  (  $i = 1, 2, \dots, n$  ) olsun.

(a) ( **Chae et al., 1986** )  $U = \prod_{i=1}^n U_{\lambda_i} \times \prod_{\lambda \neq \lambda_i} X_\lambda$  kümesinin  $\prod_{\lambda \in D} X_\lambda$  da  $\delta$ -açık olması için gerek ve yeter koşul her  $i=1, 2, \dots, n$  için  $U_{\lambda_i} \subseteq X_{\lambda_i}$  kümelerinin  $\delta$ -açık olmasıdır.

(b) ( **Chae et al., 1986** )  $U = \prod_{i=1}^n U_{\lambda_i} \times \prod_{\lambda \neq \lambda_i} X_\lambda$  kümesinin  $\prod_{\lambda \in D} X_\lambda$  da  $\alpha$ -açık olması için gerek ve yeter koşul her  $i=1, 2, \dots, n$  için  $U_{\lambda_i} \subseteq X_{\lambda_i}$  kümelerinin  $\alpha$ -açık olmasıdır.

(c) ( **El-Deeb et al., 1983** )  $U = \prod_{i=1}^n U_{\lambda_i} \times \prod_{\lambda \neq \lambda_i} X_\lambda$  kümesinin  $\prod_{\lambda \in D} X_\lambda$  da ön-açık olması için gerek ve yeter koşul her  $i=1, 2, \dots, n$  için  $U_{\lambda_i} \subseteq X_{\lambda_i}$  kümelerinin ön-açık olmasıdır.

(d) ( Noiri, 1973 )  $U = \prod_{i=1}^n U_{\lambda_i} \times \prod_{\lambda \neq \lambda_i} X_{\lambda}$  kümesinin  $\prod_{\lambda \in D} X_{\lambda}$  da yarı-açık olması için gerek ve yeter koşul her  $i=1,2,\dots,n$  için  $U_{\lambda_i} \subseteq X_{\lambda_i}$  kümelerinin yarı-açık olmasıdır.

**Tanım 2.1.14.** ( Kohli and Singh, 2009a )  $( X, \tau )$  bir topolojik uzay ve  $S$ ,  $X$  uzayının bir alt uzayı olsun.  $S$  uzayındaki her regüler açık küme,  $X$  uzayındaki bir regüler açık küme ile  $S$  in kesişimi şeklinde yazılabiliyorsa  $S$  alt uzayına  $X$  içinde  $\delta$ -gömme (  $\delta$ -embedded ) denir.

**Tanım 2.1.15.** ( Kohli, ... )  $( X, \tau )$  bir topolojik uzay olsun. Her  $x \in X$  ve  $x$  noktasını içeren her  $G \subseteq X$  regüler açık kümesi için  $U \subseteq G$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U$  kapaçık kümesi varsa  $X$  uzayına hemen hemen sıfır boyutlu ( almost zero dimensional ) uzay denir.

**Tanım 2.1.16.**  $( X, \tau )$  bir topolojik uzay olsun.

(a) ( Steen and Seebach, 1978 )  $X$  uzayındaki her açık küme kapalı ise  $X$  uzayı ayrışım topolojisine ( partition topology ) sahiptir denir.

(b) ( Singh, 2010 )  $X$  uzayındaki her regüler açık küme kapalı ise  $X$  uzayına hemen hemen ayrışım topolojisine ( almost partition topology ) sahiptir denir.

(c) ( Kohli and Singh, 2009b )  $X$  uzayındaki her  $\delta$ -açık küme kapalı ise  $X$  uzayı  $\delta$ -ayrışım topolojisiyle (  $\delta$ -partition topology ) donatılmıştır denir.

(d) ( Gillman and Jerison, 1960 )  $X$  uzayındaki her açık kümenin kapanışı açık ise  $X$  uzayına aşırı bağlantısız ( extremally disconnected ) denir.

**Tanım 2.1.17.** (a) ( Bourbaki, 1966 ) Bir  $( X, \tau )$  topolojik uzayının her yoğun alt kümesi açık ise bu uzaya altmaksimal ( submaximal ) denir.

(b) ( Ganster, 1987 ) Bir  $( X, \tau )$  topolojik uzayı iki ayrık yoğun alt kümeye sahip ise bu uzaya çözülebilir ( resolvable ) denir. Bir topolojik uzay çözülebilir değilse bu uzaya çözülemez ( irresolvable ) denir.

(c) ( Foran and Liebnitz, 1991 ) Bir  $( X, \tau )$  topolojik uzayının her açık alt uzayı çözülemez ise bu uzaya kuvvetli çözülemez denir.

**Teorem 2.1.18.** ( Dontchev, 1998 ) Bir  $( X, \tau )$  topolojik uzayı için aşağıdaki durumlar denktir:

(a)  $X$  aşırı bağlantısız bir uzaydır,

(b)  $X$  uzayının her yarı-açık alt kümesi ön-açıktır.

**Teorem 2.1.19.** ( Dontchev, 1998 ) Bir  $( X, \tau )$  topolojik uzayı için aşağıdaki durumlar denktir:

(a)  $X$  altmaksimal bir uzaydır,

(b)  $X$  uzayının her ön-açık alt kümesi açıktır.

**Teorem 2.1.20.** ( Dontchev, 1998 ) Bir  $( X, \tau )$  topolojik uzayı için aşağıdaki durumlar denktir:

(a)  $X$  kuvvetli çözülemez bir uzaydır,

(b)  $X$  uzayının her ön-açık alt kümesi yarı-açıktır.

**Tanım 2.1.21.** ( Willard, 1970 ) Bir  $\Lambda$  kümesi üzerinde aşağıdaki özelliklere sahip  $\leq$  ile gösterilen bir bağıntı varsa,  $\Lambda$  kümesine  $\leq$  bağıntısı ile yönlendirilmiş küme denir.  $\leq$  bağıntısına da  $\Lambda$  kümesini yönlendiriyor denir.

(a) Her  $\lambda \in \Lambda$  için  $\lambda \leq \lambda$ ,

(b) Her  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Lambda$  ve  $\lambda_1 \leq \lambda_2$  ve  $\lambda_2 \leq \lambda_3$  için  $\lambda_1 \leq \lambda_3$  dir,

(c) Her  $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$  için  $\lambda_1 \leq \lambda_3$  ve  $\lambda_2 \leq \lambda_3$  olacak şekilde öyle bir  $\lambda_3 \in \Lambda$  vardır.

**Tanım 2.1.22.** ( Willard, 1970 )  $X$  herhangi bir küme ve  $\Lambda$  da yönlendirilmiş bir küme olsun.  $\lambda \in \Lambda$  için  $P(\lambda) = x_\lambda$  olmak üzere  $P : \Lambda \rightarrow X$  şeklindeki fonksiyona  $X$  üzerinde bir ağ denir ve  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  veya  $(x_\lambda)$  şeklinde gösterilir.

**Tanım 2.1.23.** ( Willard, 1970 )  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ,  $X$  kümesi içinde bir ağ ve  $A \subseteq X$  olsun.  $\lambda_0 \leq \lambda$  olduğunda  $x_\lambda \in A$  olacak şekilde bir  $\lambda_0 \in \Lambda$  var ise  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  ağına sonunda  $A$  kümesi içindedir denir.

**Tanım 2.1.24.** ( Willard, 1970 )  $( X, \tau )$  topolojik uzayı içinde bir ağ  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  olsun.  $(x_\lambda)$  ağı sonunda  $x$  noktasının her  $U$  komşuluğu içinde ise,  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  ağı  $x$  noktasına yakınsar denir ve  $(x_\lambda) \rightarrow x$  ile gösterilir. Bu tanım sembolik olarak kısaca,

$(x_\lambda) \rightarrow x : \Leftrightarrow ( \forall U \in \mathcal{N}(x) ) ( \exists \lambda_0 \in I ) ( \forall \lambda, \lambda_0 \leq \lambda ) : ( x_\lambda \in U )$  şeklinde gösterilir.

**Tanım 2.1.25.**  $( X, \tau )$  bir topolojik uzay,  $(x_\lambda)_{\lambda \in D}$  bu uzayda bir ağ ve  $x \in X$  olsun.

(a) ( **Chae et al., 1986** )  $(x_\lambda)_{\lambda \in D}$  ağı sonunda  $x$  noktasının her regüler açık kümesi içinde ise  $(x_\lambda)_{\lambda \in D}$  ağı  $x$  noktasına  $\delta$ -yakınsaktır denir.

(b) ( **Chae et al., 1986** )  $(x_\lambda)_{\lambda \in D}$  ağı sonunda  $x$  noktasının her  $\alpha$ -açık kümesi içinde ise  $(x_\lambda)_{\lambda \in D}$  ağı  $x$  noktasına sf-yakınsaktır denir.

(c) ( **Navalagi, 2010** )  $(x_\lambda)_{\lambda \in D}$  ağı sonunda  $x$  noktasının her ön-açık kümesi içinde ise  $(x_\lambda)_{\lambda \in D}$  ağı  $x$  noktasına p-yakınsaktır denir.

## 2.2 Çoğul Değerli Fonksiyonlar

Bu bölümde, literatürde sıkça rastlanan aşağıdaki temel kavram ve özellikler verilmiştir. Bunlardan ilki Tanım 2.2.1 de ifade edilmiştir.

**Tanım 2.2.1.**  $( X, \tau )$  ve  $( Y, \nu )$  topolojik uzaylar olsun.

$F : X \rightarrow P(Y) - \{\emptyset\}$  fonksiyonuna çoğul değerli fonksiyon ya da küme değerli fonksiyon denir.

Bundan sonra  $( X, \tau )$  topolojik uzayından  $( Y, \nu )$  topolojik uzayına olan  $F$  çoğul değerli fonksiyonu  $F : X \rightarrow Y$  ile gösterilir.

**Uyarı 2.2.2.**  $f : X \rightarrow Y$  tek değerli fonksiyonu her  $x \in X$  noktası için  $\{ f(x) \}$  değerini alan bir çoğul değerli fonksiyon olarak düşünülebilir.

**Tanım 2.2.3.** ( **Berge, 1959** )  $F : X \rightarrow Y$  bir çoğul değerli fonksiyon olsun.  $B \subseteq Y$  için

$$F^+(B) = \{ x \in X : F(x) \subseteq B \}$$

ve

$$F^-(B) = \{ x \in X : F(x) \cap B \neq \emptyset \}$$



şeklinde tanımlanan kümelere sırasıyla,  $B$  kümesinin  $F$  altındaki üst ters görüntüsü ve  $B$  kümesinin  $F$  altındaki alt ters görüntüsü denir.

$F : X \rightarrow Y$  fonksiyonunun tek değerli olması durumunda  $F^+(B) = F^-(B) = F^{-1}(B)$  elde edilir. O halde  $F^{-1}(B)$  ile  $F^+(B)$  ve  $F^-(B)$  kümeleri çakışır.

Ayrıca  $A \subseteq X$  için,

$$F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x)$$

olarak gösterilir.

Aşağıda yer alan Önerme 2.2.4., Tanım 2.2.5., Önerme 2.2.6., Tanım 2.2.7. ve Tanım 2.2.8. literatürde sıkça rastlanan temel tanım ve önermelerdir.

**Önerme 2.2.4.**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyon,  $B \subseteq Y$  olsun. Bu durumda aşağıdakiler vardır:

$$(a) F^+(B) = X - F^-(Y-B)$$

$$(b) F^-(B) = X - F^+(Y-B)$$

**İspat (a)**  $x \in F^+(B)$  olsun. O halde  $F(x) \subseteq B$  olur. Dolayısıyla  $F(x) \cap (Y-B) = \emptyset$  elde edilir. Buradan  $x \in X - F^-(Y-B)$  bulunur. Tersine  $x \in X - F^-(Y-B)$  olsun. O halde  $F(x) \cap (Y-B) = \emptyset$  elde edilir. Buradan  $F(x) \cap B \neq \emptyset$  olur. Bu ise  $x \in F^+(B)$  demektir.

**(b)** (a) da  $B$  yerine  $Y-B$  yazarsak ispatlanmış olur.

**Tanım 2.2.5.**  $F : X \rightarrow Y$  ve  $G : Y \rightarrow Z$  çoğul değerli fonksiyonlar olsun.  $GoF : X \rightarrow Z$  çoğul değerli fonksiyonu her  $x \in X$  noktası için  $(GoF)(x) = G(F(x))$  şeklinde gösterilir.

**Önerme 2.2.6.**  $F : X \rightarrow Y$ ,  $G : Y \rightarrow Z$  çoğul değerli fonksiyonlar ve  $U, V \subseteq Z$  olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

$$(a) (GoF)^+(U) = F^+(G^+(U))$$

$$(b) (GoF)^-(V) = F^-(G^-(V))$$

**İspat. (a)**  $x \in (GoF)^+(U)$  alalım. Buradan  $(GoF)(x) \subseteq U$  olur. O halde  $G(F(x)) \subseteq U$  elde edilir. Dolayısıyla  $F(x) \subseteq G^+(U)$  bulunur. Bu ise  $x \in F^+(G^+(U))$  demektir. Tersine  $x \in F^+(G^+(U))$  ise  $F(x) \subseteq G^+(U)$  elde edilir. Buradan  $G(F(x)) \subseteq U$  olur. Dolayısıyla  $(GoF)(x) \subseteq U$  bulunur. O halde  $x \in (GoF)^+(U)$  elde edilir.

**(b)** Önerme 2.2.4 ve (a) dan  $(GoF)^-(V) = X - (GoF)^+(Z - V) = X - F^+(G^+(Z - V)) = X - F^+(Y - G^-(V)) = X - (X - F^-(G^-(V))) = F^-(G^-(V))$  elde edilir.

**Tanım 2.2.7.**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyon olsun. Her  $x \in X$  noktası için  $F(x) \subseteq Y$  kapalı ( bağlantılı ) ise,  $F$  ye nokta kapalı ( bağlantılı ) çoğul değerli fonksiyon denir.

**Tanım 2.2.8.**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonunun grafiği

$$G_F : X \rightarrow X \times Y$$

$$x \mapsto G_F(x) = \{ (x,y) : x \in X \text{ ve } y \in F(x) \}$$

şeklinde tanımlanır.

**Önerme 2.2.9. ( Noiri and Popa, 1993 )**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyon olsun. Her  $A \subseteq X$  ve  $B \subseteq Y$  kümeleri için aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

$$(a) G_F^+(A \times B) = A \cap F^+(B)$$

$$(b) G_F^-(A \times B) = A \cap F^-(B)$$

**İspat (a)**  $x \in G_F^+(A \times B)$  olsun. O halde  $G_F(x) \subseteq A \times B$  olup  $\{x\} \times F(x) \subseteq A \times B$  elde edilir. Buradan  $x \in \{x\} \subseteq A$  ve  $F(x) \subseteq B$  olur. Bu durumda  $x \in A \cap F^+(B)$  sağlanır. Tersine  $x \in A \cap F^+(B)$  alalım.  $x \in A$  ve  $F(x) \subseteq B$  olur. Buradan  $\{x\} \times F(x) \subseteq A \times B$  sağlanır. O halde  $G_F(x) \subseteq A \times B$  bulunur. Dolayısıyla  $x \in G_F^+(A \times B)$  elde edilir.

(b)  $x \in G_F^-(A \times B)$  alalım. Bu durumda  $\emptyset \neq G_F(x) \cap (A \times B) = (\{x\} \times F(x)) \cap (A \times B) = (\{x\} \cap A) \times (F(x) \cap B)$  olur. Buradan  $x \in A$  ve  $F(x) \cap B \neq \emptyset$  elde edilir. O halde  $x \in A \cap F^-(B)$  olur. Tersine  $x \in A \cap F^-(B)$  alalım. Bu durumda  $x \in A$  ve  $F(x) \cap B \neq \emptyset$  olur. Buradan  $G_F(x) \cap (A \times B) \neq \emptyset$  elde edilir. O halde  $x \in G_F^-(A \times B)$  bulunur.

**Tanım 2.2.10.**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyon ve  $G_F = \{ (x,y) : x \in X, y \in F(x) \} \subseteq X \times Y$  çoğul değerli grafik fonksiyonu olsun.

(a) ( **Yuksel vd., 2011a** ) Her  $(x,y) \in (X \times Y) \setminus G_F$  için  $(U \times V) \cap G_F = \emptyset$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U \subseteq X$   $\delta$ -açık kümesi ve  $y$  noktasını içeren bir  $V \subseteq Y$   $\alpha$ -açık kümesi var ise  $G_F$  çoğul değerli grafik fonksiyonuna  $\delta$ - $\alpha$ -kapalıdır denir.

(b) ( **Yuksel vd., 2011b** ) Her  $(x,y) \in (X \times Y) \setminus G_F$  için  $(U \times V) \cap G_F = \emptyset$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U \subseteq X$   $\delta$ -açık kümesi ve  $y$  noktasını içeren bir  $V \subseteq Y$   $\delta$ -açık kümesi var ise  $G_F$  çoğul değerli grafik fonksiyonuna güçlü  $\delta$ -kapalıdır denir.

(c) ( **Singh, 2007** ) Her  $(x,y) \in (X \times Y) \setminus G_F$  için  $(U \times V) \cap G_F = \emptyset$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U \subseteq X$  kapaçık kümesi ve  $y$  noktasını içeren bir  $V \subseteq Y$  açık kümesi var ise  $G_F$  çoğul değerli grafik fonksiyonuna  $X$  uzayına göre kap-kapalıdır denir.

(d) ( **Kohli and Arya, 2011** ) Her  $(x,y) \in (X \times Y) \setminus G_F$  için  $(U \times V) \cap G_F = \emptyset$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U \subseteq X$  kapaçık kümesi ve  $y$  noktasını içeren bir  $V \subseteq Y$  regüler açık kümesi var ise  $G_F$  çoğul değerli grafik fonksiyonuna güçlü kap-kapalıdır denir.

**Lemma 2.2.11.** (a) ( **Yuksel vd., 2011a** )  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonun  $\delta$ - $\alpha$ -kapalı çoğul değerli grafik fonksiyonuna sahip olması için gerek ve yeter koşul her  $(x,y) \in (X \times Y) \setminus G_F$  için  $F(U) \cap V = \emptyset$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U \subseteq X$   $\delta$ -açık kümesi ve  $y$  noktasını içeren bir  $V \subseteq Y$   $\alpha$ -açık kümesinin var olmasıdır.

(b) ( **Yuksel vd., 2011b** )  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonun güçlü  $\delta$ -kapalı çoğul değerli grafik fonksiyonuna sahip olması için gerek ve yeter koşul her  $(x,y) \in (X \times Y) \setminus G_F$  için  $F(U) \cap V = \emptyset$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U \subseteq X$   $\delta$ -açık kümesi ve  $y$  noktasını içeren bir  $V \subseteq Y$   $\delta$ -açık kümesinin var olmasıdır.

Aşağıda verilen Tanım 2.2.12., Teorem 2.2.14. ve Tanım 2.2.15.(c) literatürde sıkça karşılaşılan tanım ve teoremlerdir.

**Tanım 2.2.12.**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyon ve  $x \in X$  olsun.

(a)  $x \in F^+(V)$  koşulunu sağlayan her  $V \subseteq Y$  açık kümesi için  $U \subseteq F^+(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasının bir  $U \subseteq X$  açık komşuluğu varsa,  $F$  çoğul değerli fonksiyonuna  $x \in X$  noktasında üstten yarı süreklidir ( upper semi continuous ) denir ve kısaca ü.y.süreklili olarak gösterilir.

(b)  $x \in F^-(V)$  koşulunu sağlayan her  $V \subseteq Y$  açık kümesi için  $U \subseteq F^-(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasının bir  $U \subseteq X$  açık komşuluğu varsa,  $F$  çoğul değerli fonksiyonuna  $x \in X$  noktasında alttan yarı süreklidir ( lower semi continuous ) denir ve kısaca a.y.süreklili olarak gösterilir.

(c)  $F$  çoğul değerli fonksiyonu  $x \in X$  noktasında ü.y.süreklili ve a.y.süreklili ise,  $F$  çoğul değerli fonksiyonu  $x$  noktasında süreklidir denir.

**Örnek 2.2.13.** ( Saylam, 2007 )  $Y$  üzerindeki topoloji  $\tau = \{ \emptyset, Y \}$  olmak üzere  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonu her  $x \in X$  için  $F(x) = Y$  şeklinde tanımlansın. Bu durumda  $F$  hem üstten yarı süreklili hem de alttan yarı süreklili çoğul değerli fonksiyondur.

**Teorem 2.2.14.**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonu için aşağıdakiler denktir:

(a)  $F$  ü.y.süreklili ( a.y.süreklili ) dir.

(b) Her  $A \subseteq Y$  açık kümesi için  $F^+(A)$  (  $F^-(A)$  ) açıktır.

(c) Her  $B \subseteq Y$  kapalı kümesi için  $F^-(B)$  (  $F^+(B)$  ) kapalıdır.

**İspat.** (a)  $\Rightarrow$  (b)  $F$  ü.y.süreklili olsun.  $x \in F^+(A)$  koşulunu sağlayan  $A \subseteq Y$  açık kümesini alalım.  $F$  ü.y.süreklili olduğundan  $U \subseteq F^+(A)$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U$  açık kümesi vardır. O halde  $x \in U \subseteq F^+(A)$  olur. Buradan  $F^+(A)$  nın açık olduğu elde edilir.

(b)  $\Rightarrow$  (c)  $B \subseteq Y$  kapalı kümesini alalım. Hipotezden  $F^+(Y-B)$  kümesi açıktır. Önerme 2.2.4 ile  $F^+(Y-B) = X - F^-(B)$  elde edilir. O halde  $X - F^-(B)$  kümesi açık olur. Bu ise  $F^-(B)$  kümesinin kapalı olmasını gerektirir.

(c)  $\Rightarrow$  (a)  $x \in X$  ve  $x \in F^+(V)$  koşulunu sağlayan  $V$  açık kümesini ele alalım. Hipotezden  $F^-(Y - V)$  kapalıdır. Önerme 2.2.4 gereğince  $F^+(V)$  açıktır.

$U = F^+(V)$  alalım. Buradan  $U \subseteq F^+(V)$  dir ve  $U$  kümesi  $x$  noktasını içerir. Dolayısıyla  $F$  ü.y.sürekli dir.

Altan yarı süreklilik için de benzer şekilde ispat yapılır.

**Tanım 2.2.15.**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyon olsun.

(a) ( **Kohli and Arya, ...** ) Her  $U \subseteq Y$  açık kümesi için  $F^+(U) \subseteq X$  regüler açık ise  $F$  çoğul değerli fonksiyonuna üstten tamamen sürekli ( upper completely continuous ) denir ve kısaca ü.t.sürekli olarak gösterilir.

( **Kohli and Arya, ...** ) Her  $U \subseteq Y$  açık kümesi için  $F^-(U) \subseteq X$  regüler açık ise  $F$  çoğul değerli fonksiyonuna alttan tamamen sürekli ( lower completely continuous ) denir ve kısaca a.t.sürekli olarak gösterilir.

(b) ( **Kohli and Arya, ...** ) Her  $U \subseteq Y$  regüler açık kümesi için  $F^+(U) \subseteq X$  regüler açık ise  $F$  çoğul değerli fonksiyonuna üstten hemen hemen tamamen sürekli ( upper almost completely continuous ) denir ve kısaca ü.h.h.t.sürekli olarak gösterilir.

( **Kohli and Arya, ...** ) Her  $U \subseteq Y$  regüler açık kümesi için  $F^-(U) \subseteq X$  regüler açık ise  $F$  çoğul değerli fonksiyonuna alttan hemen hemen tamamen sürekli ( lower almost completely continuous ) denir ve kısaca a.h.h.t.sürekli olarak gösterilir.

(c) Her  $U \subseteq Y$  regüler açık kümesi için  $F^+(U) \subseteq X$  açık ise  $F$  çoğul değerli fonksiyonuna üstten hemen hemen sürekli ( upper almost continuous ) denir ve kısaca ü.h.h.sürekli olarak gösterilir.

Her  $U \subseteq Y$  regüler açık kümesi için  $F^-(U) \subseteq X$  açık ise  $F$  çoğul değerli fonksiyonuna alttan hemen hemen sürekli ( lower almost continuous ) denir ve kısaca a.h.h.sürekli olarak gösterilir.

### 3.NA-SÜREKLİ ÇOĞUL DEĞERLİ FONKSİYONLAR

#### 3.1 Na-Süreklili Çoğul Değerli Fonksiyonlar

Na-süreklili fonksiyonlar ilk defa Chae, Noiri ve Lee tarafından 1986 yılında çalışılmıştır.  $(X, \tau)$  ve  $(Y, \sigma)$  topolojik uzaylar olmak üzere,  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  bir fonksiyon olsun. Her  $x \in X$  ve  $f(x)$  i içeren her  $V \subseteq Y$   $\alpha$ -açık kümesi için  $f(U) \subseteq V$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U \subseteq X$   $\delta$ -açık kümesi varsa  $f$  fonksiyonuna na-süreklili denir.

Bu fonksiyonlar Yüksel, Şimşekler ve Kut tarafından aşağıdaki şekilde çoğul değerli fonksiyonlara genişletilmiştir.

**Tanım 3.1.1. ( Yüksel vd., 2011a )**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyon ve  $x \in X$  olsun.

(a)  $x \in F^+(V)$  koşulunu sağlayan her  $V \subseteq Y$   $\alpha$ -açık kümesi için  $U \subseteq F^+(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasının bir  $U \subseteq X$   $\delta$ -açık kümesi varsa,  $F$  çoğul değerli fonksiyonuna  $x$  noktasında üstten na-süreklili ( upper na-continuous ) denir ve kısaca ü.na-süreklili olarak gösterilir.

(b)  $x \in F^-(V)$  koşulunu sağlayan her  $V \subseteq Y$   $\alpha$ -açık kümesi için  $U \subseteq F^-(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasının bir  $U \subseteq X$   $\delta$ -açık kümesi varsa,  $F$  çoğul değerli fonksiyonuna  $x$  noktasında alttan na-süreklili ( lower na-continuous ) denir ve kısaca a.na-süreklili olarak gösterilir.

(c)  $F$ , her  $x \in X$  noktası için ü.na-süreklili ( a.na-süreklili ) ise  $F$  çoğul değerli fonksiyonuna,  $X$  üzerinde ü.na-süreklili ( a.na-süreklili ) denir.

(d)  $F$ , ü.na-süreklili ve a.na-süreklili ise  $F$  çoğul değerli fonksiyonuna, na-süreklili ( na-continuous ) denir.

**Uyarı 3.1.2.** Her tek değerli fonksiyon bir çoğul değerli fonksiyon olarak düşünülebildiğinden  $f : X \rightarrow Y$  tek değerli fonksiyonu na-süreklili ise, ü.na-süreklili ( a.na-süreklili ) dir.

Her üstten ( alttan ) na-süreklili çoğul değerli fonksiyon üstten ( alttan ) yarı süreklili çoğul değerli fonksiyondur. Fakat her üstten ( alttan ) yarı süreklili çoğul değerli fonksiyon üstten ( alttan ) na-süreklili çoğul değerli fonksiyon olmak zorunda değildir. Bunun için aşağıdaki örnek verilebilir.

**Örnek 3.1.3.**  $X = \{ 1,2,3 \}$  ve  $X$  üzerindeki topoloji  $\tau = \{ \emptyset, \{1\}, X \}$  olsun.  $F : X \rightarrow X$  çoğul değerli fonksiyonu, her  $x \in X$  noktası için  $F(x) = \{x\}$  şeklinde tanımlansın.  $F$  çoğul değerli fonksiyonu ü.y.sürekli ( a.y.sürekli ) dir. Fakat  $x = 1$  noktasında ü.na.sürekli ( a.na.sürekli ) değildir.

**Teorem 3.1.4. ( Yuksel vd., 2011a )**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonu için aşağıdakiler denktir:

(a)  $F$  ü.na-sürekli dir,

(b) Her  $x \in X$  ve  $x \in F^+(V)$  koşulunu sağlayan her  $V \subseteq Y$   $\alpha$ -açık kümesi için  $U \subseteq F^+(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U \subseteq X$  regüler açık kümesi vardır,

(c) Her  $V \subseteq Y$   $\alpha$ -açık kümesi için  $F^+(V) \subseteq X$   $\delta$ -açıktır,

(d) Her  $K \subseteq Y$   $\alpha$ -kapalı kümesi için  $F^-(K) \subseteq X$   $\delta$ -kapalıdır.

**İspat.(a)  $\Rightarrow$  (b):**  $x \in X$  ve  $x \in F^+(V)$  koşulunu sağlayan  $V \subseteq Y$   $\alpha$ -açık küme olsun.  $F$  ü.na-sürekli olduğundan  $U' \subseteq F^+(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U' \subseteq X$   $\delta$ -açık kümesi vardır.  $\delta$ -açık küme tanımından  $U \subseteq U'$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U \subseteq X$  regüler açık küme vardır.

(b)  $\Rightarrow$  (c):  $V \subseteq Y$   $\alpha$ -açık küme ve  $x \in F^+(V)$  olsun. Hipotezden  $U_x \subseteq F^+(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U_x \subseteq X$  regüler açık kümesi vardır.  $F^+(V) = \cup \{ U_x : x \in F^+(V) \}$  olduğundan  $F^+(V) \subseteq X$   $\delta$ -açıktır.

(c)  $\Rightarrow$  (d):  $K \subseteq Y$   $\alpha$ -kapalı küme olsun.  $K^c \subseteq Y$   $\alpha$ -açık kümedir. Hipotezden  $F^+(K^c) \subseteq X$  kümesi  $\delta$ -açıktır. Önerme 2.2.4 gereğince  $F^-(K) \subseteq X$  kümesi  $\delta$ -kapalıdır.

(d)  $\Rightarrow$  (a):  $x \in X$  ve  $x \in F^+(V)$  koşulunu sağlayan  $V \subseteq Y$   $\alpha$ -açık küme olsun.  $V^c \subseteq Y$   $\alpha$ -kapalıdır. Hipotezden,  $F^-(V^c) \subseteq X$  kümesi  $\delta$ -kapalıdır. Önerme 2.2.4 gereğince  $F^+(V) \subseteq X$   $\delta$ -açık kümedir ve  $x$  noktasını içerir.  $F^+(V) = U$  olsun. O halde,  $U \subseteq F^+(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U \subseteq X$   $\delta$ -açık kümesi vardır. Bu durumda,  $F$  çoğul değerli fonksiyonunun ü.na-sürekli olduğu elde edilir.

**Teorem 3.1.5. ( Yuksel vd., 2011a )**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonu için aşağıdakiler denktir:

(a)  $F$  a.na-sürekli dir,

(b) Her  $x \in X$  ve  $x \in F^-(V)$  koşulunu sağlayan her  $V \subseteq Y$   $\alpha$ -açık kümesi için  $U \subseteq F^-(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U \subseteq X$  regüler açık kümesi vardır,

(c) Her  $V \subseteq Y$   $\alpha$ -açık kümesi için  $F^-(V) \subseteq X$   $\delta$ -açıktır,

(d) Her  $K \subseteq Y$   $\alpha$ -kapalı kümesi için  $F^+(K) \subseteq X$   $\delta$ -kapalıdır,

(e) Her  $A \subseteq X$  için  $F(\delta cl A) \subseteq \alpha cl(F(A))$  dir,

(f) Her  $B \subseteq Y$  için  $\delta cl(F^+(B)) \subseteq F^+(\alpha cl(B))$  dir.

**İspat.**(a)  $\Rightarrow$  (b):  $x \in X$  ve  $x \in F^-(V)$  koşulunu sağlayan  $V \subseteq Y$   $\alpha$ -açık küme olsun.  $F$ , a.na-sürekli olduğundan  $U' \subseteq F^-(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U' \subseteq X$   $\delta$ -açık kümesi vardır.  $\delta$ -açık küme tanımından,  $U \subseteq U'$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U \subseteq X$  regüler açık kümesi vardır.

(b)  $\Rightarrow$  (c):  $V \subseteq Y$   $\alpha$ -açık küme ve  $x \in F^-(V)$  olsun. Hipotezden  $U_x \subseteq F^-(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U_x$  regüler açık kümesi vardır.  $F^-(V) = \cup \{ U_x : x \in F^-(V) \}$  olduğundan  $F^-(V) \subseteq X$  kümesi  $\delta$ -açıktır.

(c)  $\Rightarrow$  (d):  $K \subseteq Y$   $\alpha$ -kapalı küme olsun.  $K^c \subseteq Y$   $\alpha$ -açık kümedir. Hipotezden  $F^-(K^c) \subseteq X$  kümesi  $\delta$ -açıktır. Önerme 2.2.4 gereğince  $F^+(K) \subseteq X$  kümesi  $\delta$ -kapalıdır.

(d)  $\Rightarrow$  (e):  $A \subseteq X$  olsun.  $\alpha cl(F(A)) \subseteq Y$   $\alpha$ -kapalı kümedir. Hipotezden  $F^+(\alpha cl(F(A))) \subseteq X$  kümesi  $\delta$ -kapalıdır.  $A \subseteq F^+(F(A)) \subseteq F^+(\alpha cl(F(A)))$  olduğundan  $A \subseteq F^+(\alpha cl(F(A)))$  elde edilir. Buradan,  $\delta$ -kapanışa geçerse  $\delta cl(A) \subseteq F^+(\alpha cl(F(A)))$  bulunur. O halde  $F(\delta cl(A)) \subseteq F(F^+(\alpha cl(F(A)))) \subseteq \alpha cl(F(A))$  elde edilir.

(e)  $\Rightarrow$  (f):  $B \subseteq Y$  olsun.  $F^+(B) \subseteq X$  olur. Hipotezden  $F(\delta cl(F^+(B))) \subseteq \alpha cl(F(F^+(B))) \subseteq \alpha cl(B)$  bulunur. Buradan  $\delta cl(F^+(B)) \subseteq F^+(\alpha cl(B))$  elde edilir.

(f)  $\Rightarrow$  (a)  $x \in X$  ve  $x \in F^-(V)$  koşulunu sağlayan  $V \subseteq Y$   $\alpha$ -açık küme olsun.  $Y-V \subseteq Y$   $\alpha$ -kapalı kümedir. Hipotezden  $\delta cl(F^+(Y-V)) \subseteq F^+(\alpha cl(Y-V)) = F^+(Y-V)$  olur. O halde  $F^+(Y-V) \subseteq X$  kümesi  $\delta$ -kapalıdır. Önerme 2.2.4 gereğince  $F^-(V) \subseteq X$  kümesi  $\delta$ -açıktır.  $F^-(V) = U$  olsun. O halde  $U \subseteq F^-(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U \subseteq X$   $\delta$ -açık kümesi vardır. Bu durumda  $F$  a.na-sürekli dir.



**Teorem 3.1.6.** ( **Yuksel vd., 2011a** )  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonunun  $\delta$ -yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her  $x \in X$  ve  $x$  noktasına  $\delta$ -yakınsayan her  $(x_\lambda)$  ağı için  $F(x_\lambda)$  ağının  $F(x)$  e sf-yakınsak olmasıdır.

**İspat.** ( $\Rightarrow$ )  $x \in X$ ,  $(x_\lambda)$  ağı  $x$  noktasına  $\delta$ -yakınsak ve  $F(x) \subseteq V$  koşulunu sağlayan  $V \subseteq Y$  kümesi  $\alpha$ -açık olsun.  $F$ ,  $\delta$ -yakınsak çoğul değerli fonksiyon olduğundan  $U \subseteq F^+(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren regüler açık  $U \subseteq X$  kümesi vardır.  $(x_\lambda)$  ağı,  $x$  noktasına  $\delta$ -yakınsak olduğundan  $(x_\lambda)$  sonunda  $U$  içindedir, yani her  $\lambda \geq \lambda_0$  için  $x_\lambda \in U$  olacak şekilde öyle bir  $\lambda_0 \in \Lambda$  vardır.  $x_\lambda \in U \subseteq F^+(V)$  olduğundan  $F(x_\lambda) \subseteq V$  olur. O halde her  $\lambda \geq \lambda_0$  için  $F(x_\lambda) \subseteq V$  olacak şekilde bir  $\lambda_0 \in \Lambda$  vardır. Bu durumda  $F(x_\lambda)$  ağı sonunda  $V$  içindedir. Dolayısıyla  $F(x_\lambda)$  ağı  $F(x)$  e sf-yakınsaktır.

( $\Leftarrow$ )  $x \in X$  ve  $x$  noktasına  $\delta$ -yakınsayan her  $(x_\lambda)$  ağı için  $F(x_\lambda)$  ağı  $F(x)$  e sf-yakınsak olsun fakat  $F$   $\delta$ -yakınsak olmasın. Bu durumda,  $x \in F^+(V)$  koşulunu sağlayan bir  $V \subseteq Y$   $\alpha$ -açık kümesi ve  $x$  noktasını içeren her  $U \subseteq X$  regüler açık kümesi için  $U \not\subseteq F^+(V)$  olacak şekilde bir  $x \in X$  vardır.  $x_u \in U$  ve  $x_u \notin F^+(V)$  alalım. Burada  $(x_u)$  ağı  $x$  noktasına  $\delta$ -yakınsaktır fakat  $F(x_u)$  ağı,  $F(x)$  e sf-yakınsak değildir. Çünkü  $x_u \notin F^+(V)$  olduğu için  $F(x_u) \not\subseteq V$  olur. Bu ise çelişkidir. O halde,  $F$   $\delta$ -yakınsaktır.

**Teorem 3.1.7.** ( **Yuksel vd., 2011a** )  $F : X \rightarrow Y$   $\delta$ -yakınsak (  $\delta$ -yakınsak ) çoğul değerli fonksiyon ve  $A \subseteq X$  açık ise  $F|_A : A \rightarrow Y$   $\delta$ -yakınsak (  $\delta$ -yakınsak ) çoğul değerli fonksiyondur.

**İspat.**  $A \subseteq X$  açık,  $x \in A$  ve  $x \in F|_A^+(V)$  koşulunu sağlayan  $V \subseteq Y$   $\alpha$ -açık küme olsun.  $x \in F|_A^+(V)$  ise  $x \in F^+(V) \cap A$  olur. Dolayısıyla  $x \in F^+(V)$  bulunur.  $F$   $\delta$ -yakınsak olduğundan,  $U \subseteq F^+(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren  $U \subseteq X$  regüler açık kümesi vardır. Lemma 2.1.12 gereğince  $U \cap A \subseteq A$  regüler açıktır ve  $x$  noktasını içerir. Ayrıca  $U \cap A \subseteq F^+(V) \cap A = F|_A^+(V)$  elde edilir. Böylece  $F|_A$   $\delta$ -yakınsaktır.

Benzer şekilde  $\delta$ -yakınsak için de ispat yapılır.

**Teorem 3.1.8.** ( **Yuksel vd., 2011a** )  $F : X \rightarrow Y$   $\delta$ -yakınsak (  $\delta$ -yakınsak ) çoğul değerli fonksiyon ve  $G : Y \rightarrow Z$   $\delta$ -yakınsak (  $\delta$ -yakınsak ) çoğul değerli fonksiyon ise  $G \circ F$   $\delta$ -yakınsak (  $\delta$ -yakınsak ) çoğul değerli fonksiyondur.

**İspat.**  $V \subseteq Z$   $\alpha$ -açık küme olsun.  $G$   $\delta$ -yakınsak olduğundan  $G^+(V) \subseteq Y$   $\delta$ -açık kümedir.  $G^+(V) \subseteq Y$   $\delta$ -açık küme ise  $\alpha$ -açıktır.  $F$   $\delta$ -yakınsak olduğundan

$F^+(G^+(V)) \subseteq X$   $\delta$ -açık kümedir. Önerme 2.2.6 gereğince  $(GoF)^+(V) \subseteq X$   $\delta$ -açıktır. O halde  $GoF$  ü.na-sürekli çoğul değerli fonksiyondur.

Benzer şekilde a.na-süreklilik için de ispat yapılır.

**Teorem 3.1.9. ( Yuksel vd., 2011a )**  $D$  bir indeks kümesi olsun. Her  $\lambda \in D$  için  $F_\lambda : X_\lambda \rightarrow Y_\lambda$ ,  $F : \prod X_\lambda \rightarrow \prod Y_\lambda$  çoğul değerli fonksiyonlar olsun ve  $x = (x_1, x_2, \dots, x_\lambda, \dots) \in \prod X_\lambda$  için  $F(x) = \prod F_\lambda(x_\lambda)$  şeklinde tanımlansın.  $F$  çoğul değerli fonksiyonu ü.na-sürekli ( a.na-sürekli ) ise her  $\lambda \in D$  için  $F_\lambda$  ü.na-sürekli ( a.na-sürekli ) dir.

**İspat.**  $V_\lambda \subseteq Y_\lambda$   $\alpha$ -açık küme olsun. Lemma 2.1.13 gereğince  $V = V_\lambda \times \prod_{\lambda \neq \beta} Y_\beta \subseteq \prod Y_\lambda$   $\alpha$ -açık kümedir.  $F$  ü.na-sürekli olduğundan,  $F^+(V) = F^+(V_\lambda \times \prod_{\lambda \neq \beta} Y_\beta) = F_\lambda^+(V_\lambda) \times \prod_{\lambda \neq \beta} F_\beta^+(Y_\beta) = F_\lambda^+(V_\lambda) \times \prod_{\lambda \neq \beta} X_\beta \subseteq \prod X_\lambda$   $\delta$ -açık kümedir. Lemma 2.1.13 gereğince  $F_\lambda^+(V_\lambda) \subseteq X_\lambda$  kümesi  $\delta$ -açıktır. O halde,  $F_\lambda$  ü.na-sürekli dir.

a.na-süreklilik için ispat benzer şekilde yapılır.

**Teorem 3.1.10. ( Yuksel vd., 2011a )**  $F : X \rightarrow Y$  bir çoğul değerli fonksiyon olsun.  $G_F$  çoğul değerli grafik fonksiyonu ü.na-sürekli ise  $F$  ü.na-sürekli dir.

**İspat.**  $x \in X$  ve  $x \in F^+(V)$  koşulunu sağlayan  $V \subseteq Y$   $\alpha$ -açık küme olsun. Lemma 2.1.13 gereğince  $X \times V \subseteq X \times Y$  kümesi  $\alpha$ -açıktır.  $\{x\} \times F(x) \subseteq X \times V$  olduğundan,  $G_F(x) \subseteq X \times V$  dir.  $G_F$ , ü.na-sürekli olduğundan  $U \subseteq G_F^+(X \times V)$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren  $U \subseteq X$   $\delta$ -açık kümesi vardır. Önerme 2.2.9 yardımıyla  $U \subseteq X \cap F^+(V) = F^+(V)$  olur. O halde,  $F$  ü.na-sürekli dir.

**Teorem 3.1.11. ( Yuksel vd., 2011a )**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyon olsun.  $G_F$  çoğul değerli grafik fonksiyonu a.na-sürekli ise  $F$  a.na-sürekli dir.

**İspat.**  $x \in F^-(V)$  koşulunu sağlayan  $V \subseteq Y$   $\alpha$ -açık kümesini alalım. Lemma 2.1.13 ile  $X \times V \subseteq X \times Y$   $\alpha$ -açıktır.  $G_F(x) \cap (X \times V) = (\{x\} \times F(x)) \cap (X \times V) = \{x\} \times (F(x) \cap V) \neq \emptyset$  olduğundan  $x \in G_F^-(X \times V)$  olur.  $G_F$ , a.na-sürekli olduğundan  $U \subseteq G_F^-(X \times V)$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren  $U \subseteq X$   $\delta$ -açık kümesi vardır. Önerme 2.2.9 yardımıyla  $U \subseteq X \cap F^-(V) = F^-(V)$  elde edilir. O halde  $F$  a.na-sürekli dir.

**Teorem 3.1.12. ( Yuksel vd., 2011a )** Her  $x \in X$  noktası için  $F(x)$   $\alpha$ -kompakt olacak şekilde  $F : X \rightarrow Y$  ü.na-sürekli çoğul değerli fonksiyon ve  $Y$   $\alpha$ -Hausdorff uzay ise  $G_F$ ,  $\delta$ - $\alpha$ -kapalıdır.

**İspat.**  $(x,y) \in (X \times Y) \setminus G_F$  olsun. Bu durumda  $y \in Y \setminus F(x)$  elde edilir.  $Y$   $\alpha$ -Hausdorf uzay olduğundan, her  $p \in F(x)$  için  $p \in U_p$  ve  $y \in V_p$  olacak şekilde ayrık  $\alpha$ -açık  $U_p$  ve  $V_p$  kümeleri vardır. O halde  $\{ U_p : p \in F(x) \}$  ailesi  $F(x)$  in  $\alpha$ -açık örtüsü olur. Her  $x \in X$  noktası için  $F(x)$   $\alpha$ -kompakt olduğundan  $F(x) \subseteq \cup \{ U_{p_i} , i = 1,2,\dots,n \}$  olacak şekilde  $F(x)$  de sonlu sayıda  $p_1, p_2 \dots p_n$  noktaları vardır.

$$U = \cup \{ U_{p_i} , i = 1,2,\dots,n \} \text{ ve } V = \cap \{ V_{p_i} : i = 1,2,\dots,n \}$$

olsun.  $F(x) \subseteq U$  ve  $y \in V$  olacak şekilde  $U, V \subseteq Y$  ayrık  $\alpha$ -açık kümelerdir.  $F(F^+(U)) \cap V \subseteq U \cap V = \emptyset$  olduğundan  $F(F^+(U)) \cap V = \emptyset$  elde edilir.  $F$  ü.na-sürekli çoğul değerli fonksiyon olduğundan  $F^+(U) \subseteq X$   $\delta$ -açık kümedir ve  $x$  noktasını içerir. Böylece,  $G_F$  çoğul değerli grafik fonksiyonu  $\delta$ - $\alpha$ -kapalıdır.

**Teorem 3.1.13.** ( Yuksel vd., 2011a ) Her  $x \in X$  noktası için  $F(x)$   $\alpha$ -kompakt olacak şekilde  $F : X \rightarrow Y$  ü.na-sürekli örten çoğul değerli fonksiyon olsun.  $X$  yakın kompakt uzay ise  $Y$   $\alpha$ -kompakttır.

**İspat.**  $\{ V_\lambda : \lambda \in \Lambda \}$  ailesi  $Y$  uzayının  $\alpha$ -açık örtüsü olsun. Bu aile aynı zamanda her  $x \in X$  noktası için  $F(x)$  kümesinin  $\alpha$ -açık örtüsüdür.  $F(x)$   $\alpha$ -kompakt olduğundan  $F(x) \subseteq \cup \{ V_\lambda : \lambda \in \Lambda_x \}$  olacak şekilde  $\Lambda_x \subseteq \Lambda$  sonlu alt kümesi vardır.

$$\cup_{\lambda \in \Lambda_x} V_\lambda = V_x$$

olsun.  $F$ , ü.na-sürekli çoğul değerli fonksiyon olduğundan  $F(U_x) \subseteq V_x$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U_x \subseteq X$  regüler açık kümesi vardır. O halde,  $\{ U_x : x \in X \}$  ailesi  $X$  uzayının regüler açık örtüsü olur.  $X$  yakın kompakt uzay olduğundan  $X = \cup_{i=1}^n U_{x_i}$  olacak şekilde  $X$  uzayında sonlu sayıda  $x_1, x_2 \dots x_n$  noktaları vardır. Böylece,

$$Y = F(X) = F(\cup_{i=1}^n U_{x_i}) = \cup_{i=1}^n F(U_{x_i}) \subseteq \cup_{i=1}^n V_{x_i} = \cup_{i=1}^n \cup_{\lambda \in \Lambda_{x_i}} V_\lambda$$

bulunur. O halde,  $Y$   $\alpha$ -kompakttır.

**Teorem 3.1.14.** ( Yuksel vd., 2011a )  $Y$   $\alpha$ -normal uzay ve  $F, G : X \rightarrow Y$  ü.na-sürekli ve nokta kapalı çoğul değerli fonksiyonlar ise,

$$K = \{ x \in X : F(x) \cap G(x) \neq \emptyset \} \subseteq X$$

kümesi kapalıdır.

**İspat.**  $x \in X \setminus K$  olsun. O halde  $F(x) \cap G(x) = \emptyset$  olur.  $F$  ve  $G$  nokta kapalı çoğul değerli fonksiyonlar olduğundan  $F(x)$  ve  $G(x)$  kümeleri  $Y$  içinde kapalıdır.  $Y$  uzayı  $\alpha$ -normal olduğundan,  $F(x) \subseteq U$  ve  $G(x) \subseteq V$  olacak şekilde  $Y$  içinde ayrık  $\alpha$ -açık  $U$  ve  $V$  kümeleri vardır.  $F$  ve  $G$  ü.na-sürekli olduğundan,  $F^+(U)$  ve  $G^+(V)$   $X$  içinde  $\delta$ -açık kümelerdir. O halde,  $F^+(U)$  ve  $G^+(V)$   $x$  noktasını içeren açık kümelerdir.

$$H = F^+(U) \cap G^+(V)$$

alınırsa  $H$   $x$  noktasını içeren bir açık kümedir ve  $H \cap K = \emptyset$ ,  $H \cup K = X$  olur. Böylece  $K = H^c$  elde edilir. O halde  $K \subseteq X$  kapalıdır.

**Teorem 3.1.15. ( Yuksel vd., 2011a )**  $Y$   $\alpha$ -normal uzay,  $F : X \rightarrow Y$  ü.na-sürekli, nokta kapalı çoğul değerli fonksiyon ve her  $x, y$  farklı nokta çifti için  $F(x) \cap F(y) = \emptyset$  olsun. Bu durumda  $X$  uzayı  $\delta$ -Hausdorfdur.

**İspat.**  $x, y \in X$  ve  $x \neq y$  olsun. O halde  $F(x) \cap F(y) = \emptyset$  olur.  $F$  çoğul değerli fonksiyonu nokta kapalı olduğundan  $F(x)$  ve  $F(y)$  kapalı kümelerdir.  $Y$ ,  $\alpha$ -normal uzay olduğundan  $F(x) \subseteq U$  ve  $F(y) \subseteq V$  olacak şekilde  $X$  içinde ayrık  $\alpha$ -açık  $U$  ve  $V$  kümeleri vardır. Hipotezden  $F^+(U)$  ve  $F^+(V)$  sırasıyla  $x$  ve  $y$  noktalarını içeren ayrık  $\delta$ -açık kümelerdir. O halde,  $X$  uzayı  $\delta$ -Hausdorfdur.

**Teorem 3.1.16. ( Yuksel vd., 2011a )**  $F : X \rightarrow Y$  ü.na-sürekli örten çoğul değerli fonksiyon olsun.  $X$  uzayı  $\delta$ -bağlantılı ve  $F$  çoğul değerli fonksiyonu nokta bağlantılı ise  $Y$  bağlantılıdır.

**İspat.**  $Y$  uzayı bağlantılı olmasın. O halde,  $Y = U \cup V$  ve  $U \cap V = \emptyset$  olacak şekilde boştan farklı  $U, V \subseteq Y$  açık kümeleri vardır.  $F$ , nokta bağlantılı olduğundan her  $x \in X$  noktası için  $F(x)$  bağlantılıdır.  $F(x)$  bağlantılı ve  $U, V$  çifti  $Y$  uzayının bir ayrışımı olduğundan Teorem 2.1.10 dan ya  $F(x) \subseteq U$  ya da  $F(x) \subseteq V$  olur. Bu durumda  $x \in F^+(U) \cup F^+(V)$  elde edilir. Her  $x \in X$  noktası için bu sağlandığından  $F^+(U) \cup F^+(V) = X$  olur.

$U \neq \emptyset$  olduğundan bir  $u \in U$  seçebiliriz.  $F$ , örten olduğundan  $u \in F(x)$  olacak şekilde  $x \in X$  vardır. Buradan  $F(x) \subseteq U$  olur. O halde  $x \in F^+(U) \neq \emptyset$  bulunur.  $V \neq \emptyset$  olduğundan bir  $v \in V$  seçebiliriz.  $F$ , örten olduğundan  $v \in F(x)$  olacak şekilde  $x \in X$  vardır. Buradan  $F(x) \subseteq V$  olur. O halde,  $x \in F^+(V) \neq \emptyset$  bulunur.

$U \cap V = \emptyset$  idi. Buradan  $F^+(U) \cap F^+(V) = \emptyset$  elde edilir.  $F$ , ü.na-sürekli olduğundan,  $F^+(U)$  ve  $F^+(V)$  kümeleri  $Y$  içinde  $\delta$ -açıktır. O halde  $X$  uzayı  $\delta$ -bağlantılı değildir. Bu ise hipotezle çelişir. O halde  $Y$  bağlantılıdır.

### 3.2 Ön Güçlü Na-Süreklili Çoğul Değerli Fonksiyonlar

Güçlü na-önsüreklili fonksiyonlar ilk defa Nasef tarafından 2001 yılında çalışılmıştır.  $(X, \tau)$  ve  $(Y, \sigma)$  topolojik uzaylar olmak üzere  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  bir fonksiyon olsun. Her  $x \in X$  ve  $f(x)$  noktasını içeren  $Y$  uzayındaki her  $V$  ön-açık kümesi için  $f(U) \subseteq V$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren  $U \subseteq X$   $\delta$ -açık kümesi varsa  $f$  fonksiyonuna güçlü na-önsüreklili denir.

Bu fonksiyonlar Yüksel, Şimşekler ve Bilik tarafından aşağıdaki şekilde çoğul değerli fonksiyonlara genişletilmiştir.

**Tanım 3.2.1. ( Yüksel vd., 2011b )**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyon olsun.

(a) Her  $x \in X$  ve  $x \in F^+(V)$  koşulunu sağlayan her  $V \subseteq Y$  ön-açık kümesi için  $U \subseteq F^+(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasının bir  $U \subseteq X$  regüler açık kümesi varsa,  $F$  çoğul değerli fonksiyonuna üstten ön güçlü na-süreklili ( upper pre strong na-continuous ) denir ve kısaca ü.ön.g.na-süreklili olarak gösterilir.

(b) Her  $x \in X$  ve  $x \in F^-(V)$  koşulunu sağlayan her  $V \subseteq Y$  ön-açık kümesi için  $U \subseteq F^-(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasının bir  $U \subseteq X$  regüler açık kümesi varsa,  $F$  çoğul değerli fonksiyonuna alttan ön güçlü na-süreklili ( lower pre strong na-continuous ) denir. Bu durum kısaca a.ön.g.na-süreklili olarak gösterilir.

(c)  $F$ , hem ü.ön.g.na-süreklili hem de a.ön.g.na-süreklili ise  $F$  çoğul değerli fonksiyonuna ön güçlü na-süreklili ( pre strong na-continuous ) denir ve kısaca ön.g.na-süreklili olarak gösterilir.

**Teorem 3.2.2. ( Yüksel vd., 2011b )**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonu için aşağıdakiler denktir:

(a)  $F$  ü.ön.g.na-süreklilidir,

(b) Her  $x \in X$  ve  $x \in F^+(V)$  koşulunu sağlayan her  $V \subseteq Y$  ön-açık kümesi için  $U \subseteq F^+(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U \subseteq X$   $\delta$ -açık kümesi vardır,

(c) Her  $V \subseteq Y$  ön-açık kümesi için  $F^+(V) \subseteq X$   $\delta$ -açıktır,

(d) Her  $K \subseteq Y$  ön-kapalı kümesi için  $F^-(K) \subseteq X$   $\delta$ -kapalıdır.

**İspat.** Teorem 3.1.4 ün ispatına benzer olarak yapılır.

**Teorem 3.2.3. ( Yuksel vd., 2011b )**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonu için aşağıdakiler denktir:

(a)  $F$  a.ön.g.na-süreklidir,

(b) Her  $x \in X$  ve  $x \in F^-(V)$  koşulunu sağlayan her  $V \subseteq Y$  ön-açık kümesi için  $U \subseteq F^-(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U \subseteq X$   $\delta$ -açık kümesi vardır,

(c) Her  $V \subseteq Y$  ön-açık kümesi için  $F^-(V) \subseteq X$   $\delta$ -açıktır,

(d) Her  $K \subseteq Y$  ön-kapalı kümesi için  $F^+(K) \subseteq X$   $\delta$ -kapalıdır,

(e) Her  $A \subseteq X$  için  $F(\delta cl A) \subseteq pcl(F(A))$  dir,

(f) Her  $B \subseteq Y$  için  $\delta cl(F^+(B)) \subseteq F^+(pcl(B))$  dir.

**İspat.** Teorem 3.1.5 in ispatına benzer olarak yapılır.

**Teorem 3.2.4. ( Yuksel vd., 2011b )**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonunun ü.ön.g.na-sürekliliği için gerek ve yeter koşul her  $x \in X$  ve  $x$  noktasına  $\delta$ -yakınsayan her  $(x_\lambda)$  ağı için  $F(x_\lambda)$  ağının  $F(x)$ 'e p-yakınsak olmasıdır.

**İspat.** ( $\Rightarrow$ )  $x \in X$  ve  $(x_\lambda)$  ağı  $x$  noktasına  $\delta$ -yakınsak olsun.  $F(x) \subseteq V$  koşulunu sağlayan  $V \subseteq Y$  ön-açık kümesini alalım.  $F$ , ü.ön.g.na-sürekliliği çoğul değerli fonksiyon olduğundan  $U \subseteq F^+(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren regüler açık  $U \subseteq X$  kümesi vardır.  $(x_\lambda)$  ağı  $x$  noktasına  $\delta$ -yakınsak olduğundan  $(x_\lambda)$  ağı sonunda  $U$  içindedir yani, her  $\lambda \geq \lambda_0$  için  $x_\lambda \in U$  olacak şekilde bir  $\lambda_0 \in \Lambda$  vardır.  $x_\lambda \in U \subseteq F^+(V)$  olduğundan  $F(x_\lambda) \subseteq V$  elde edilir. Bu durumda her  $\lambda \geq \lambda_0$  için  $F(x_\lambda) \subseteq V$  olacak şekilde bir  $\lambda_0 \in \Lambda$  var ise  $F(x_\lambda)$  ağı sonunda  $V$  içindedir. O halde  $F(x_\lambda)$  ağı,  $F(x)$  'e p-yakınsaktır.

( $\Leftarrow$ )  $x \in X$  ve  $x$  noktasına  $\delta$ -yakınsayan her  $(x_\lambda)$  ağı için  $F(x_\lambda)$  ağı  $F(x)$  kümesine p-yakınsak olsun fakat  $F$  ü.ön.g.na-sürekliliği olmasın. O halde  $x \in F^+(V)$  koşulunu sağlayan bir  $V \subseteq Y$  ön-açık ve  $x$  noktasını içeren her  $U \subseteq X$  regüler açık kümesi için  $U \not\subseteq F^+(V)$  olacak şekilde bir  $x \in X$  vardır.  $x_u \in U$  ve  $x_u \notin F^+(V)$  alalım. Burada  $(x_u)$  ağı  $x$  noktasına  $\delta$ -yakınsaktır fakat  $F(x_u)$  ağı  $F(x)$  e p-yakınsak değildir. Çünkü  $x_u \notin F^+(V)$  olduğundan  $F(x_u) \not\subseteq V$  elde edilir. Bu ise hipotezle çelişir. O halde  $F$  ü.ön.g.na-süreklidir.

**Teorem 3.2.5. ( Yuksel vd., 2011b )**  $F : X \rightarrow Y$  ü.ön.g.na-sürekliliği ( a.ön.g.na-sürekliliği ) çoğul değerli fonksiyon ve  $A \subseteq X$  açık ise  $F|_A : A \rightarrow Y$  ü.ön.g.na-sürekliliği ( a.ön.g.na-sürekliliği ) çoğul değerli fonksiyondur.

**İspat.**  $A \subseteq X$  açık,  $x \in A$  ve  $x \in F|_A^-(V)$  koşulunu sağlayan  $V \subseteq Y$  ön-açık küme olsun.  $F|_A^-(V) = A \cap F^-(V)$  olduğundan  $x \in F^-(V)$  olur.  $F$ , a.ön.g.na-sürekli olduğundan  $U \subseteq F^-(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren  $U \subseteq X$  regüler açık kümesi vardır. Lemma 2.1.12 yardımıyla  $U \cap A \subseteq A$  regüler açıktır ve  $x$  noktasını içerir. Ayrıca,  $U \cap A \subseteq F^-(V) \cap A = F|_A^-(V)$  olur. Böylece  $F|_A$  a.ön.g.na-sürekli dir.

ü.ön.g.na-süreklilik için ispat benzer şekilde yapılır.

**Teorem 3.2.6. ( Yuksel vd., 2011b )**  $F : X \rightarrow Y$  ü.ön.g.na-sürekli ( a.ön.g.na-sürekli ) çoğul değerli fonksiyon ve  $G : Y \rightarrow Z$  ü.ön.g.na-sürekli ( a.ön.g.na-sürekli ) çoğul değerli fonksiyon ise  $G \circ F$  ü.ön.g.na-sürekli ( a.ön.g.na-sürekli ) çoğul değerli fonksiyondur.

**İspat.** Teorem 3.1.8 in ispatına benzer olarak yapılır.

**Teorem 2.2.7. ( Yuksel vd., 2011b )**  $F : X \rightarrow Y$  bir çoğul değerli fonksiyon olsun.  $G_F$  çoğul değerli grafik fonksiyonu ü.ön.g.na-sürekli ( a.ön.g.na-sürekli ) ise  $F$  ü.ön.g.na-sürekli ( a.ön.g.na-sürekli ) dir.

**İspat.** Teorem 3.1.10 ve Teorem 3.1.11 in ispatına benzer olarak yapılır.

**Teorem 3.2.8. ( Yuksel vd., 2011b )** Her  $x \in X$  noktası için  $F(x)$  güçlü kompakt olacak şekilde  $F : X \rightarrow Y$  ü.ön.g.na-sürekli çoğul değerli fonksiyon olsun. Bu durumda  $Y$  uzayı  $\delta$ -Hausdorff ise  $G_F \subseteq X \times Y$  güçlü  $\delta$ -kapalıdır.

**İspat.**  $(x,y) \in (X \times Y) \setminus G_F$  olsun. O halde  $y \in Y \setminus F(x)$  olur.  $Y$   $\delta$ -Hausdorff uzay olduğundan her  $s \in F(x)$  için  $U_s \cap V_s = \emptyset$  olacak şekilde  $s \in U_s$  ve  $y \in V_s$   $\delta$ -açık kümeleri vardır. Her  $\delta$ -açık küme ön-açık olduğundan  $\{ U_s : s \in F(x) \}$  ailesi  $F(x)$  in ön-açık örtüsü olur. Her  $x \in X$  noktası için  $F(x)$  güçlü kompakt olduğundan  $F(x) \subseteq \cup \{ U_{s_i}, i = 1,2 \dots n \}$  olacak şekilde  $F(x)$  içinde sonlu sayıda  $s_1, s_2 \dots s_n$  noktaları vardır.

$$U = \cup \{ U_{s_i}, i = 1,2 \dots n \} \text{ ve } V = \cap \{ V_{s_i} : i = 1,2 \dots n \}$$

olsun. O halde  $F(x) \subseteq U$  ve  $y \in V$  olacak şekilde  $Y$  içinde ayrık ön-açık  $U$  ve  $\delta$ -açık  $V$  kümeleri vardır. Böylece,  $F(F^+(U)) \cap V \subseteq U \cap V = \emptyset$  olduğundan  $F(F^+(U)) \cap V = \emptyset$  elde edilir.  $F$  ü.ön.g.na-sürekli çoğul değerli fonksiyon olduğundan  $F^+(U) \subseteq X$  kümesi  $\delta$ -açıktır ve  $x$  noktasını içerir. Böylece,  $G_F$  çoğul değerli grafik fonksiyonu güçlü  $\delta$ -kapalıdır.

**Teorem 3.2.9. ( Yuksel vd., 2011b )** Her  $x \in X$  noktası için  $F(x)$  güçlü kompakt olacak şekilde  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonu örten, ü.ön.g.na-sürekli olsun.  $X$  yakın kompakt uzay ise  $Y$  güçlü kompakttır.

**İspat.**  $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  ailesi  $Y$  uzayının ön-açık örtüsü olsun.  $F(x)$ , her  $x \in X$  noktası için güçlü kompakt olduğundan  $F(x) \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda_x} V_\lambda$  olacak şekilde  $\Lambda_x \subseteq \Lambda$  sonlu alt kümesi vardır.

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda_x} V_\lambda = V_x$$

olsun.  $F$  ü.ön.g.na-sürekli çoğul değerli fonksiyon olduğundan  $F(U_x) \subseteq V_x$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren regüler açık  $U_x \subseteq X$  kümesi vardır. Bu durumda,  $\{U_x\}_{x \in X}$  ailesi  $X$  uzayının regüler açık örtüsüdür.  $X$  yakın kompakt uzay olduğundan  $X = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$  olacak şekilde  $X$  uzayında sonlu sayıda  $x_1, x_2, \dots, x_n$  noktaları vardır.  $F$  çoğul değerli fonksiyonu örten olduğundan,

$$Y = F(X) = F(\bigcup_{i=1}^n U_{x_i}) = \bigcup_{i=1}^n F(U_{x_i}) \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{x_i} = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{\lambda \in \Lambda_{x_i}} V_{\lambda_i}$$

elde edilir. O halde  $Y$  güçlü kompakttır.

**Teorem 3.2.10. ( Yuksel vd., 2011b )**  $Y$  ön-normal uzay,  $F$  ve  $G : X \rightarrow Y$  ü.ön.g.na-sürekli, nokta kapalı çoğul değerli fonksiyonlar ise,

$$K = \{ x \in X : F(x) \cap G(x) \neq \emptyset \}$$

kümesi  $X$  uzayında  $\delta$ -kapalıdır.

**İspat.**  $x \in X \setminus K$  olsun. Bu durumda  $F(x) \cap G(x) = \emptyset$  olur.  $F$  ve  $G$  nokta kapalı çoğul değerli fonksiyonlar olduğundan  $F(x)$  ve  $G(x)$  kapalı kümelerdir.  $Y$  ön-normal uzay olduğundan  $F(x) \subseteq U$  ve  $G(x) \subseteq V$  olacak şekilde  $Y$  içinde ayrık ön-açık  $U$  ve  $V$  kümeleri vardır.  $F$  ve  $G$  ü.ön.g.na-sürekli olduğundan  $F^+(U)$  ve  $G^+(V)$  kümeleri  $X$  içinde  $\delta$ -açıktır. O halde  $F^+(U)$  ve  $G^+(V)$   $x$  noktasını içeren  $\delta$ -açık kümelerdir.

$$H = F^+(U) \cap G^+(V)$$

olsun. Bu durumda  $H$  kümesi  $x$  noktasını içeren  $\delta$ -açık kümedir ve  $H \cap K = \emptyset$  olur. Buradan  $K \subseteq X$  kümesi  $\delta$ -kapalıdır.



**Teorem 3.2.11. ( Yuksel vd., 2011b )**  $Y$  ön-normal uzay,  $F : X_1 \rightarrow Y$  ve  $G : X_2 \rightarrow Y$  nokta kapalı ü.ön.g.na-sürekli çoğul değerli fonksiyonlar olsun. O halde,

$$A = \{ (x_1, x_2) : F(x_1) \cap G(x_2) \neq \emptyset \}$$

kümesi  $X_1 \times X_2$  de  $\delta$ -kapalıdır.

**İspat.**  $x = (x_1, x_2) \in (X_1 \times X_2) \setminus A$  olsun. Bu ise  $F(x_1) \cap G(x_2) = \emptyset$  demektir.  $F$  ve  $G$  nokta kapalı çoğul değerli fonksiyonlar olduğundan  $F(x_1)$  ve  $G(x_2)$  kapalı kümelerdir.  $Y$  ön-normal uzay olduğundan  $F(x_1) \subseteq U$  ve  $G(x_2) \subseteq V$  olacak şekilde  $Y$  içinde ayrık ön-açık  $U$  ve  $V$  kümeleri vardır.  $F$  ve  $G$  ü.ön.g.na-sürekli olduğundan  $F^+(U)$  ve  $G^+(V)$  kümeleri sırasıyla  $X_1$  ve  $X_2$  uzayları içinde  $\delta$ -açıktır. O halde  $F^+(U)$  ve  $G^+(V)$  sırasıyla  $x_1$  ve  $x_2$  noktalarını içeren  $\delta$ -açık kümelerdir.

$$H = F^+(U) \times G^+(V)$$

alalım. Bu durumda  $H$  kümesi  $x$  noktasını içeren  $\delta$ -açık kümedir ve  $H \cap A = \emptyset$ ,  $H \cup A = X_1 \times X_2$  olur. Buradan  $A = H^c$  elde edilir. O halde  $A \subseteq X_1 \times X_2$  kümesi  $\delta$ -kapalıdır.

**Teorem 3.2.12. ( Yuksel vd., 2011b )**  $Y$  ön-normal uzay,  $F : X \rightarrow Y$  ü.ön.g.na-sürekli, nokta kapalı çoğul değerli fonksiyon ve her  $x, y$  farklı nokta çifti için  $F(x) \cap F(y) = \emptyset$  olsun. Bu durumda  $X$  uzayı  $\delta$ -Hausdorfdur.

**İspat.**  $x, y \in X$  ve  $x \neq y$  olsun. O halde,  $F(x) \cap F(y) = \emptyset$  olur.  $F$  nokta kapalı olduğundan  $F(x)$  ve  $F(y)$  kapalı kümelerdir.  $Y$  ön-normal uzay olduğundan  $F(x) \subseteq U$  ve  $F(y) \subseteq V$  olacak şekilde  $Y$  içinde ayrık ön-açık  $U$  ve  $V$  kümeleri vardır.  $F$  ü.ön.g.na-sürekli olduğundan  $F^+(U)$  ve  $F^+(V)$  sırasıyla  $x$  ve  $y$  noktalarını içeren  $X$  içinde ayrık  $\delta$ -açık kümelerdir. O halde  $X$  uzayı  $\delta$ -Hausdorfdur.

### 3.3 Yarı Güçlü Na-Sürekli Çoğul Değerli Fonksiyonlar

Güçlü na-sürekli fonksiyonlar ilk defa Mahmoud, Abd El-Monsef ve Nasef tarafından 1989 yılında çalışılmıştır.  $(X, \tau)$  ve  $(Y, \sigma)$  topolojik uzaylar olmak üzere  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  bir fonksiyon olsun. Her  $x \in X$  ve  $f(x)$  i içeren  $Y$  uzayındaki her  $V$  yarı-açık kümesi için  $f(U) \subseteq V$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren  $U \subseteq X$   $\delta$ -açık kümesi varsa  $f$  fonksiyonuna güçlü na-sürekli denir.

Bu kavram aşağıdaki şekilde çoğul değerli fonksiyonlara genişletilmiştir.

**Tanım 3.3.1 ( Yuksel vd., 2011b )**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyon olsun.

(a) Her  $x \in X$  ve  $x \in F^+(V)$  koşulunu sağlayan her  $V \subseteq Y$  yarı-açık kümesi için  $U \subseteq F^+(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasının bir  $U \subseteq X$   $\delta$ -açık kümesi varsa,  $F$  çoğul değerli fonksiyonuna üstten yarı güçlü na-sürekli ( upper semi strong na-continuous ) denir ve kısaca ü.y.g.na-sürekli olarak gösterilir.

(b) Her  $x \in X$  ve  $x \in F^-(V)$  koşulunu sağlayan her  $V \subseteq Y$  yarı-açık kümesi için  $U \subseteq F^-(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasının bir  $U \subseteq X$   $\delta$ -açık kümesi varsa,  $F$  çoğul değerli fonksiyonuna alttan yarı güçlü na-sürekli ( lower semi strong na-continuous ) denir ve kısaca a.y.g.na-sürekli olarak gösterilir.

(c)  $F$ , ü.y.g.na-sürekli ve a.y.g.na-sürekli ise yarı güçlü na-sürekli ( semi strong na-continuous ) denir ve kısaca y.g.na-sürekli olarak gösterilir.

**Teorem 3.3.2.**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonu için aşağıdakiler denktir.

(a)  $F$  ü.y.g.na-sürekli dir.

(b) Her  $x \in X$  ve  $x \in F^+(V)$  koşulunu sağlayan her  $V \subseteq Y$  yarı-açık kümesi için  $U \subseteq F^+(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U \subseteq X$  regüler açık kümesi vardır.

(c) Her  $V \subseteq Y$  yarı-açık kümesi için  $F^+(V) \subseteq X$   $\delta$ -açıktır.

(d) Her  $K \subseteq Y$  yarı-kapalı kümesi için  $F^-(K) \subseteq X$   $\delta$ -kapalıdır.

**İspat.** (a)  $\Rightarrow$  (b):  $x \in X$  ve  $x \in F^+(V)$  koşulunu sağlayan  $V \subseteq Y$  bir yarı-açık küme olsun.  $F$ , ü.y.g.na-sürekli olduğundan  $U' \subseteq F^+(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U' \subseteq X$   $\delta$ -açık kümesi vardır.  $\delta$ -açık küme tanımından,  $U \subseteq U'$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U \subseteq X$  regüler açık kümesi vardır.

(b)  $\Rightarrow$  (c):  $V \subseteq Y$  yarı-açık küme ve  $x \in F^+(V)$  olsun. Hipotezden  $U_x \subseteq F^+(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U_x \subseteq X$  regüler açık kümesi vardır.  $F^+(V) = \cup \{ U_x : x \in F^+(V) \}$  olduğundan  $F^+(V) \subseteq X$  kümesi  $\delta$ -açıktır.

(c)  $\Rightarrow$  (d):  $K \subseteq Y$  yarı-kapalı küme olsun.  $K^c \subseteq Y$  yarı-açıktır. Hipotezden  $F^+(K^c) \subseteq X$  kümesi  $\delta$ -açıktır. Önerme 2.2.4 gereğince  $F^-(K) \subseteq X$  kümesi  $\delta$ -kapalıdır.

**(d)  $\Rightarrow$  (a):**  $x \in X$  ve  $x \in F^+(V)$  koşulunu sağlayan  $V \subseteq Y$  yarı-açık küme olsun.  $V^c \subseteq Y$  yarı-kapalıdır. Hipotezden  $F^-(V^c) \subseteq X$  kümesi  $\delta$ -kapalıdır. Önerme 2.2.4 gereğince  $F^+(V) \subseteq X$  kümesi  $\delta$ -açıktır.  $F^+(V) = U$  alalım. O halde  $U \subseteq F^+(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U \subseteq X$   $\delta$ -açık kümesi vardır. O halde,  $F$  ü.y.g.na-süreklidir.

**Teorem 3.3.3.**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonu için aşağıdakiler denktir:

**(a)**  $F$ , a.y.g.na-süreklidir,

**(b)** Her  $x \in X$  ve  $x \in F^-(V)$  koşulunu sağlayan her  $V \subseteq Y$  yarı-açık kümesi için  $U \subseteq F^-(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U \subseteq X$  regüler açık kümesi vardır,

**(c)** Her  $V \subseteq Y$  yarı-açık kümesi için  $F^-(V) \subseteq X$   $\delta$ -açıktır,

**(d)** Her  $K \subseteq Y$  yarı-kapalı kümesi için  $F^+(K) \subseteq X$   $\delta$ -kapalıdır,

**(e)** Her  $A \subseteq X$  için  $F(\delta cl A) \subseteq scl(F(A))$  dir,

**(f)** Her  $B \subseteq Y$  için  $\delta cl(F^+(B)) \subseteq F^+(scl(B))$  dir.

**İspat. (a)  $\Rightarrow$  (b):**  $x \in X$  ve  $x \in F^-(V)$  koşulunu sağlayan  $V \subseteq Y$  yarı-açık küme olsun.  $F$  a.y.g.na-sürekliliğinden  $U' \subseteq F^-(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U' \subseteq X$   $\delta$ -açık kümesi vardır.  $\delta$ -açık küme tanımından  $U \subseteq U'$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U \subseteq X$  regüler açık kümesi vardır.

**(b)  $\Rightarrow$  (c):**  $V \subseteq Y$  yarı-açık küme ve  $x \in F^-(V)$  olsun. Hipotezden  $U_x \subseteq F^-(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U_x$  regüler açık kümesi vardır. Böylece  $F^-(V) = \bigcup \{ U_x : x \in F^-(V) \}$  olduğundan  $F^-(V)$  kümesi  $\delta$ -açıktır.

**(c)  $\Rightarrow$  (d):**  $K \subseteq Y$  yarı-kapalı küme olsun.  $K^c \subseteq Y$  yarı-açıktır. Hipotezden  $F^-(K^c) \subseteq X$  kümesi  $\delta$ -açıktır. Önerme 2.2.4 gereğince  $F^+(K) \subseteq X$   $\delta$ -kapalıdır.

**(d)  $\Rightarrow$  (e):**  $A \subseteq X$  olsun.  $scl(F(A)) \subseteq Y$  yarı-kapalı kümedir. Hipotezden  $F^+(scl(F(A))) \subseteq X$  kümesi  $\delta$ -kapalıdır.  $A \subseteq F^+(F(A)) \subseteq F^+(scl(F(A)))$  olduğundan  $A \subseteq F^+(scl(F(A)))$  elde edilir. Buradan  $\delta$ -kapanışa geçerse  $\delta cl(A) \subseteq F^+(scl(F(A)))$  olur. Bu durumda  $F(\delta cl(A)) \subseteq F(F^+(scl(F(A)))) \subseteq scl(F(A))$  elde edilir.

(e)  $\Rightarrow$  (f):  $B \subseteq Y$  olsun. Hipotezden  $F(\delta cl(F^+(B))) \subseteq scl(F(F^+(B))) \subseteq scl(B)$  elde edilir. Buradan  $\delta cl(F^+(B)) \subseteq F^+(scl(B))$  olur.

(f)  $\Rightarrow$  (a):  $x \in X$  ve  $x \in F^-(V)$  koşulunu sağlayan  $V \subseteq Y$  yarı-açık küme olsun. O halde  $Y - V \subseteq Y$  yarı-kapalıdır. Hipotezden  $\delta cl(F^+(Y - V)) \subseteq F^+(scl(Y - V)) = F^+(Y - V)$  olur. Bu durumda  $F^+(Y - V) \subseteq X$  kümesi  $\delta$ -kapalıdır. Önerme 2.2.4 gereğince  $F^-(V) \subseteq X$   $\delta$ -açıktır.  $F^-(V) = U$  alalım. Öyleyse  $U \subseteq F^-(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U \subseteq X$   $\delta$ -açık kümesi vardır. O halde  $F$  a.y.g.na-sürekli.

**Teorem 3.3.4.**  $F : X \rightarrow Y$  ü.y.g.na-sürekli ( a.y.g.na-sürekli ) çoğul değerli fonksiyon ve  $G : Y \rightarrow Z$  ü.y.g.na-sürekli ( a.y.g.na-sürekli ) çoğul değerli fonksiyon ise  $GoF$  ü.y.g.na-sürekli ( a.y.g.na-sürekli ) çoğul değerli fonksiyondur.

**İspat.**  $V \subseteq Z$  yarı-açık küme olsun.  $G$  ü.y.g.na-sürekli olduğundan  $G^+(V) \subseteq Y$  kümesi  $\delta$ -açıktır. O halde  $G^+(V) \subseteq Y$  yarı-açık kümedir.  $F$  ü.y.g.na-sürekli olduğundan  $F^+(G^+(V)) \subseteq X$  kümesi  $\delta$ -açıktır. Önerme 2.2.6 gereğince  $(GoF)^+(V) \subseteq X$  kümesi  $\delta$ -açıktır. O halde  $GoF$  ü.y.g.na-sürekli çoğul değerli fonksiyondur.

a.y.g.na-süreklilik için de ispat benzer şekilde yapılır.

**Teorem 3.3.5.**  $F : X \rightarrow Y$  ü.y.g.na-sürekli ( a.y.g.na-sürekli ) çoğul değerli fonksiyon ve  $A \subseteq X$  açık ise  $F|_A : A \rightarrow Y$  ü.y.g.na-sürekli ( a.y.g.na-sürekli ) çoğul değerli fonksiyondur.

**İspat.**  $A \subseteq X$  açık,  $x \in A$  ve  $x \in F|_A^+(V)$  koşulunu sağlayan  $V \subseteq Y$  yarı-açık olsun.  $F|_A^+(V) = F^+(V) \cap A$  olduğundan  $x \in F^+(V)$  olur.  $F$  ü.y.g.na-sürekli olduğundan  $U \subseteq F^+(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren  $U \subseteq X$  regüler açık kümesi vardır. Lemma 2.1.12 ile  $U \cap A \subseteq A$  regüler açıktır ve  $x$  noktasını içerir. Ayrıca  $U \cap A \subseteq F^+(V) \cap A = F|_A^+(V)$  dir. Böylece  $F|_A$  ü.y.g.na-sürekli.

a.y.g.na-süreklilik için de ispat benzer şekilde yapılır.

**Teorem 3.3.6.**  $D$  bir indeks kümesi ve her  $\lambda \in D$  için  $F_\lambda : X_\lambda \rightarrow Y_\lambda$  ve  $F : \prod X_\lambda \rightarrow \prod Y_\lambda$  çoğul değerli fonksiyonlar olsun ve  $x = (x_1, x_2, \dots, x_\lambda, \dots) \in \prod X_\lambda$  için  $F(x) = \prod F_\lambda(x_\lambda)$  şeklinde tanımlansın.  $F$  çoğul değerli fonksiyonu ü.y.g.na-sürekli ( a.y.g.na-sürekli ) ise her  $\lambda \in D$  için  $F_\lambda$  ü.y.g.na-sürekli ( a.y.g.na-sürekli ) dir.

**İspat.**  $V_\lambda \subseteq Y_\lambda$  yarı-açık olsun. Lemma 2.1.13 ile  $V = V_\lambda \times \prod_{\lambda \neq \beta} Y_\beta \subseteq \prod Y_\lambda$  yarı-açıktır.  $F$  ü.y.g.na-sürekli olduğundan  $F^+(V) = F^+(V_\lambda \times \prod_{\lambda \neq \beta} Y_\beta) = F_\lambda^+(V_\lambda) \times \prod_{\lambda \neq \beta} F_\beta^+(Y_\beta) = F_\lambda^+(V_\lambda) \times \prod_{\lambda \neq \beta} X_\beta \subseteq \prod X_\lambda$   $\delta$ -açıktır. Lemma 2.1.13 ile  $F^+(V_\lambda) \subseteq X_\lambda$   $\delta$ -açıktır. O halde  $F_\lambda$  ü.y.g.na-sürekli dir.

a.y.g.na-süreklilik için ispat benzer şekilde yapılır.

**Teorem 3.3.7.** Her  $x \in X$  noktası için  $F(x)$  yarı kompakt olmak üzere  $F : X \rightarrow Y$  örten, ü.y.g.na-sürekli çoğul değerli fonksiyon olsun.  $X$  yakın kompakt uzay ise  $Y$  yarı kompakttır.

**İspat.**  $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  ailesi  $Y$  uzayının yarı-açık örtüsü olsun. Her  $x \in X$  noktası için  $F(x)$  yarı kompakt olduğundan  $F(x) \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda_x} V_\lambda$  olacak şekilde  $\Lambda_x \subseteq \Lambda$  sonlu alt kümesi vardır.

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda_x} V_\lambda = V_x$$

olsun.  $F$  ü.y.g.na-sürekli çoğul değerli fonksiyon olduğundan  $F(U_x) \subseteq V_x$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren regüler açık  $U_x \subseteq X$  vardır. Bu durumda  $\{U_x : x \in X\}$  ailesi  $X$  uzayının regüler açık örtüsü olur.  $X$  yakın kompakt uzay olduğundan  $X = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$  olacak şekilde  $X$  uzayında sonlu sayıda  $x_1, x_2, \dots, x_n$  noktaları vardır.  $F$  çoğul değerli fonksiyonu örten olduğundan

$$Y = F(X) = F(\bigcup_{i=1}^n U_{x_i}) = \bigcup_{i=1}^n F(U_{x_i}) \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{x_i} = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{\lambda \in \Lambda_x} V_{\lambda_i}$$

elde edilir. O halde  $Y$  yarı kompakttır.

**Teorem 3.3.8.**  $Y$  yarı-normal uzay,  $F, G : X \rightarrow Y$  ü.y.g.na-sürekli ve nokta kapalı çoğul değerli fonksiyonlar ise

$$K = \{x \in X : F(x) \cap G(x) \neq \emptyset\} \subseteq X$$

kümesi  $\delta$ -kapalıdır.

**İspat.**  $x \in X \setminus K$  olsun. Bu durumda  $F(x) \cap G(x) = \emptyset$  olur.  $F$  ve  $G$  nokta kapalı çoğul değerli fonksiyonlar olduğundan  $F(x)$  ve  $G(x)$  kapalı kümelerdir.  $F(x)$  ve  $G(x)$  kapalı ise yarı-kapalıdır.  $Y$  yarı-normal uzay olduğundan  $F(x) \subseteq U$  ve  $G(x) \subseteq V$  olacak şekilde  $Y$  içinde ayrık yarı-açık  $U$  ve  $V$  kümeleri vardır.  $F$  ve  $G$  ü.y.g.na-sürekli olduğundan  $F^+(U)$  ve  $G^+(V)$  kümeleri  $X$  içinde  $\delta$ -açıktır. O halde  $F^+(U)$  ve  $G^+(V)$   $x$  noktasını içeren  $\delta$ -açık kümelerdir.

$$H = F^+(U) \cap G^+(V)$$

olsun.  $H$  kümesi  $x$  noktasını içeren  $\delta$ -açık kümedir ve  $H \cap K = \emptyset$ ,  $H \cup K = X$  olur. Böylece  $K = H^c \subseteq X$  kümesi  $\delta$ -kapalıdır.

**Teorem 3.3.9.**  $Y$  yarı-normal uzay olsun.  $F : X \rightarrow Y$  ü.y.g.na-sürekli, nokta kapalı çoğul değerli fonksiyon ve her  $x, y$  farklı nokta çifti için  $F(x) \cap F(y) = \emptyset$  olsun. Bu durumda  $X$  uzayı  $\delta$ -Hausdorfdur.

**İspat.**  $x, y \in X$  ve  $x \neq y$  olsun. Bu ise  $F(x) \cap F(y) = \emptyset$  olmasını gerektirir.  $F$  nokta kapalı olduğundan  $F(x)$  ve  $F(y)$  kapalı kümelerdir.  $F(x)$  ve  $F(y)$  kapalı kümeler ise yarı-kapalıdır.  $Y$  yarı-normal uzay olduğundan  $F(x) \subseteq U$  ve  $F(y) \subseteq V$  olacak şekilde  $Y$  içinde ayrık yarı-açık  $U$  ve  $V$  kümeleri vardır.  $F$  ü.y.g.na-sürekli olduğundan  $F^+(U)$  ve  $F^+(V)$  sırasıyla  $x$  ve  $y$  noktalarını içeren  $X$  içinde ayrık  $\delta$ -açık kümelerdir. O halde  $X$  uzayı  $\delta$ -Hausdorfdur.

### 3.4 Zayıf Na-Sürekli Çoğul Değerli Fonksiyonlar

Zayıf na-sürekli fonksiyonlar ilk defa Mahmoud, Abd El-Monsef ve Nasef tarafından 1989 yılında çalışılmıştır.  $(X, \tau)$  ve  $(Y, \sigma)$  topolojik uzaylar olmak üzere  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  bir fonksiyon olsun. Her  $x \in X$  ve  $f(x)$  noktasını içeren her  $V \subseteq Y$   $\delta$ -açık kümesi için  $f(U) \subseteq V$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren  $U \subseteq X$   $\alpha$ -açık kümesi varsa fonksiyonuna zayıf na-sürekli denir.

Bu kavram aşağıdaki şekilde çoğul değerli fonksiyonlara genişletilmiştir.

**Tanım 3.4.1.**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyon olsun.  $x \in X$  alalım.

(a)  $x \in F^+(V)$  koşulunu sağlayan her  $V \subseteq Y$   $\delta$ -açık kümesi için  $U \subseteq F^+(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasının bir  $U \subseteq X$   $\alpha$ -açık kümesi varsa,  $F$  çoğul değerli fonksiyonuna  $x$  noktasında üstten zayıf na-sürekli ( upper weakly na-continuous ) denir ve kısaca ü.z.na-sürekli olarak gösterilir.

(b)  $x \in F^-(V)$  koşulunu sağlayan her  $V \subseteq Y$   $\delta$ -açık kümesi için  $U \subseteq F^-(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasının bir  $U \subseteq X$   $\alpha$ -açık kümesi varsa,  $F$  çoğul değerli fonksiyonuna  $x$  noktasında alttan zayıf na-sürekli ( lower weakly na-continuous ) denir ve kısaca a.z.na-sürekli olarak gösterilir.

(c)  $F, x \in X$  noktasında ü.z.na-sürekli ve a.z.na-sürekli ise  $F$  çoğul değerli fonksiyonuna  $x \in X$  noktasında zayıf na-sürekli ( weakly na-continuous ) denir ve kısaca z.na-sürekli olarak gösterilir.

(d)  $F$ , her  $x \in X$  noktası için z.na-sürekli ( sırasıyla ü.z.na-sürekli, a.z.na-sürekli ) ise  $F$  çoğul değerli fonksiyonuna,  $X$  üzerinde z.na-sürekli ( sırasıyla ü.z.na-sürekli, a.z.na-sürekli ) denir.

**Teorem 3.4.2.**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonu için aşağıdakiler denktir:

(a)  $F$  ü.z.na-sürekli,dir,

(b) Her  $V \subseteq Y$   $\delta$ -açık kümesi için  $F^+(V) \subseteq X$   $\alpha$ -açıktır,

(c) Her  $K \subseteq Y$   $\delta$ -kapalı kümesi için  $F^-(K) \subseteq X$   $\alpha$ -kapalıdır.

**İspat.** (a)  $\Rightarrow$  (b):  $V \subseteq Y$   $\delta$ -açık küme ve  $x \in F^+(V)$  olsun. Hipotezden  $U_x \subseteq F^+(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U_x \subseteq X$   $\alpha$ -açık kümesi vardır.  $F^+(V) = \cup \{ U_x : x \in F^+(V) \}$  olduğundan  $F^+(V) \subseteq X$   $\alpha$ -açıktır.

(b)  $\Rightarrow$  (c):  $K \subseteq Y$   $\delta$ -kapalı küme olsun.  $K^c \subseteq Y$  kümesi  $\delta$ -açıktır. Hipotezden  $F^+(K^c) \subseteq X$   $\alpha$ -açıktır. Önerme 2.2.4 gereğince  $F^-(K) \subseteq X$   $\alpha$ -kapalıdır.

(c)  $\Rightarrow$  (a):  $x \in X$  ve  $x \in F^+(V)$  koşulunu sağlayan  $V \subseteq Y$  kümesi  $\delta$ -açık olsun.  $V^c \subseteq Y$  kümesi  $\delta$ -kapalıdır. Hipotezden  $F^-(V^c) \subseteq X$   $\alpha$ -kapalıdır. Önerme 2.2.4 gereğince  $F^+(V) \subseteq X$   $\alpha$ -açıktır ve  $x$  noktasını içerir.  $F^+(V) = U$  alalım. O halde  $U \subseteq F^+(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U \subseteq X$   $\alpha$ -açık kümesi vardır. Bu durumda  $F$  ü.z.na-sürekli,dir.

**Teorem 3.4.3.**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonu için aşağıdakiler denktir.

(a)  $F$  a.z.na-sürekli,dir.

(b) Her  $V \subseteq Y$   $\delta$ -açık kümesi için  $F^-(V) \subseteq X$   $\alpha$ -açıktır.

(c) Her  $K \subseteq Y$   $\delta$ -kapalı kümesi için  $F^+(K) \subseteq X$   $\alpha$ -kapalıdır.

(d) Her  $A \subseteq X$  için  $F(\alpha cl A) \subseteq \delta cl(F(A))$  dir.

(e) Her  $B \subseteq Y$  için  $\alpha cl(F^+(B)) \subseteq F^+(\delta cl(B))$  dir.

**İspat. (a)  $\Rightarrow$  (b):**  $V \subseteq Y$   $\delta$ -açık küme ve  $x \in F^-(V)$  olsun. Hipotezden  $U_x \subseteq F^-(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U_x \subseteq X$   $\alpha$ -açık kümesi vardır. Böylece  $F^-(V) = \bigcup \{ U_x : x \in F^-(V) \}$  olduğundan  $F^-(V) \subseteq X$  kümesi  $\alpha$ -açıktır.

**(b)  $\Rightarrow$  (c):**  $K \subseteq Y$  kümesi  $\delta$ -kapalı olsun.  $K^c \subseteq Y$  kümesi  $\delta$ -açıktır. Hipotezden  $F^-(K^c) \subseteq X$   $\alpha$ -açıktır. Önerme 2.2.4 gereğince  $F^+(K) \subseteq X$   $\alpha$ -kapalıdır.

**(c)  $\Rightarrow$  (d):**  $A \subseteq X$  olsun.  $\delta cl(F(A)) \subseteq Y$  kümesi  $\delta$ -kapalıdır. Hipotezden  $F^+(\delta cl(F(A))) \subseteq X$   $\alpha$ -kapalıdır.  $A \subseteq F^+(F(A)) \subseteq F^+(\delta cl(F(A)))$  olduğundan  $A \subseteq F^+(\delta cl(F(A)))$  elde edilir. Buradan  $\alpha$ -kapanışa geçerse  $acl(A) \subseteq F^+(\delta cl(F(A)))$  olur.  $F(acl(A)) \subseteq F(F^+(\delta cl(F(A)))) \subseteq \delta cl(F(A))$  elde edilir. O halde  $F(acl(A)) \subseteq \delta cl(F(A))$  olur.

**(d)  $\Rightarrow$  (e):**  $B \subseteq Y$  olsun. Hipotezden  $F(acl(F^+(B))) \subseteq \delta cl(F(F^+(B))) \subseteq \delta cl(B)$  olur. Buradan  $acl(F^+(B)) \subseteq F^+(\delta cl(B))$  elde edilir.

**(e)  $\Rightarrow$  (a):**  $x \in X$  ve  $x \in F^-(V)$  koşulunu sağlayan  $V \subseteq Y$   $\delta$ -açık küme olsun.  $Y-V \subseteq Y$   $\delta$ -kapalıdır. Hipotezden  $acl(F^+(Y-V)) \subseteq F^+(\delta cl(Y-V)) = F^+(Y-V)$  olur. Bu durumda  $F^+(Y-V) \subseteq X$  kümesi  $\alpha$ -kapalıdır. Önerme 2.2.4 gereğince  $F^-(V) \subseteq X$   $\alpha$ -açıktır.  $F^-(V) = U$  olsun. O halde  $U \subseteq F^-(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U \subseteq X$   $\alpha$ -açık kümesi vardır yani,  $F$  a.z.na-sürekli.

**Teorem 3.4.4.**  $F : X \rightarrow Y$  ü.z.na-sürekli ( a.z.na-sürekli ) çoğul değerli fonksiyon ve  $A \subseteq X$  kümesi  $\beta$ -açık ise  $F|_A : A \rightarrow Y$  ü.z.na-sürekli ( a.z.na-sürekli ) çoğul değerli fonksiyondur.

**İspat.**  $A \subseteq X$  kümesi  $\beta$ -açık,  $x \in A$  ve  $x \in F|_A^-(V)$  koşulunu sağlayan  $V \subseteq Y$  kümesi  $\delta$ -açık olsun.  $F$  a.z.g.na.sürekli olduğundan  $U \subseteq F^-(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren  $U \subseteq X$   $\alpha$ -açık kümesi vardır.  $U \cap A \subseteq F^-(V) \cap A = F|_A^-(V)$  olur ve  $U \cap A \subseteq A$  kümesi  $x$  noktasını içeren  $\alpha$ -açıktır. Böylece  $F|_A$  a.z.na-sürekli.

Benzer şekilde ü.z.g.na.sürekli için de ispat yapılır.

**Teorem 3.4.5.**  $F : X \rightarrow Y$  bir çoğul değerli fonksiyon olsun.  $G_F$  çoğul değerli grafik fonksiyonu ü.z.na-sürekli ise  $F$  ü.z.na-sürekli.

**İspat.** Teorem 3.1.10 a benzer olarak ispat yapılır.

**Teorem 3.4.6.**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyon olsun.  $G_F$  çoğul değerli grafik fonksiyonu a.z.na-sürekli ise  $F$  a.z.na-sürekli.



**İspat.** Teorem 3.1.11 a benzer olarak ispat yapılır.

**Teorem 3.4.7.** Her  $x \in X$  noktası için  $F(x)$  yakın kompakt olmak üzere  $F : X \rightarrow Y$  ü.z.na-sürekli örten çoğul değerli fonksiyon olsun.  $X$  uzayı  $\alpha$ -kompakt ise  $Y$  uzayı yakın kompakttır.

**İspat.**  $\{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  ailesi  $Y$  uzayının regüler açık örtüsü olsun. Her  $x \in X$  noktası için  $F(x)$  yakın kompakt olduğundan  $F(x) \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda_x} V_\lambda$  olacak şekilde  $\Lambda_x \subseteq \Lambda$  sonlu alt kümesi vardır.

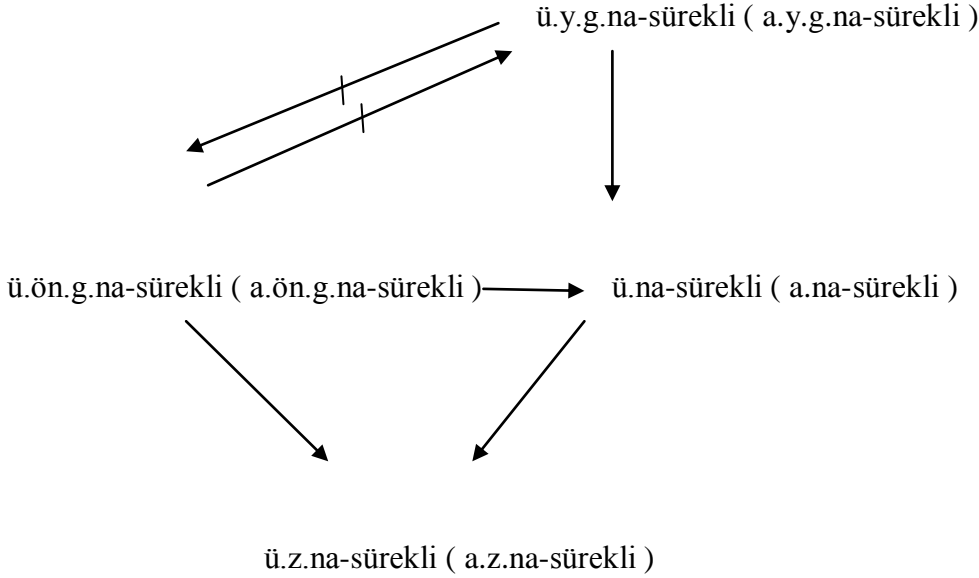
$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda_x} V_\lambda = V_x$$

olsun.  $F$  ü.z.na-sürekli çoğul değerli fonksiyon olduğundan  $F(U_x) \subseteq V_x$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren  $U_x \subseteq X$   $\alpha$ -açık kümesi vardır. O halde  $\{U_x : x \in X\}$  ailesi  $X$  uzayının  $\alpha$ -açık örtüsü olur.  $X$   $\alpha$ -kompakt uzay olduğundan  $X = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$  olacak şekilde  $X$  içinde sonlu sayıda  $x_1, x_2, \dots, x_n$  noktaları vardır.  $F$  çoğul değerli fonksiyonu örten olduğundan,

$$Y = F(X) = F\left(\bigcup_{i=1}^n U_{x_i}\right) = \bigcup_{i=1}^n F(U_{x_i}) \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{x_i} = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{\lambda \in \Lambda_{x_i}} V_{\lambda_i}$$

bulunur. O halde  $Y$  uzayı yakın kompakttır.

Na-sürekli çoğul değerli fonksiyonlar arasındaki geçişler aşağıdaki şekil ile gösterilmiştir.



( Şekil 3.4.1. Üçüncü bölümdeki süreklilikler arasındaki ilişkiler )

Aşağıdaki örnekler şekil 3.4.1. deki gerektirmelerin tersinin her zaman için doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 3.4.8., Mahmoud, Abd El-Monsef ve Nasef 'in 'Functions Near of Na-Continuity' makalesindeki örnek 4.1 in çoğul değerli fonksiyonlara uyarlanmış halidir.

**Örnek 3.4.8. ( Mahmoud et al., 1989 )**  $X = \{ a,b,c \}$  ve  $X$  üzerindeki topoloji  $\tau = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X \}$  olsun.  $F : X \rightarrow X$  çoğul değerli fonksiyonu  $F(a) = F(b) = \{a\}$ ,  $F(c) = \{c\}$  şeklinde tanımlansın.

$F$ , ü.na-sürekli ( a.na-sürekli ) dir. Çünkü,  $X$  uzayındaki  $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}$   $\alpha$ -açık kümeleri için  $F^+(\emptyset) = \emptyset$ ,  $F^+(\{a\}) = \{a,b\}$ ,  $F^+(\{b\}) = \emptyset$ ,  $F^+(\{a,b\}) = \{a,b\}$ ,  $F^+(\{a,c\}) = \{a,b,c\}$ ,  $F^+(\{a,b,c\}) = \{a,b,c\}$  kümeleri  $X$  uzayında  $\delta$ -açıktır. Benzer şekilde a.na-süreklilik için de sağlanır.

Fakat  $F$ , ü.y.g.na-sürekli ( a.y.g.na-sürekli ) değildir. Çünkü,  $\{b,c\} \subseteq Y$  yarı-açık için  $F^+(\{b,c\}) = \{c\}$   $\delta$ -açık küme değildir. Benzer şekilde a.y.g.na-süreklilik de sağlanmaz.

**Örnek 3.4.9. ( Yuksel vd., 2011b )**  $X = \{a,b,c\}$  ve  $X$  üzerindeki topoloji  $\tau = \{ \emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\} \}$ ,  $Y = \{1,2,3\}$  ve  $Y$  üzerindeki topoloji  $\sigma = \{ \emptyset, Y, \{1\}, \{2,3\} \}$  olsun.  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonu,  $F(a) = \{1,2\}$ ,  $F(b) = \{2,3\}$ ,  $F(c) = \{1,3\}$  şeklinde tanımlansın.

$F$ , ü.y.g.na-sürekli dolayısıyla ü.na-sürekli ve ü.z.na-sürekli. Çünkü,  $Y$  uzayındaki  $\emptyset$ ,  $\{1\}$ ,  $\{2,3\}$ ,  $\{1,2,3\}$  yarı-açık kümeleri için  $F^+(\emptyset) = \emptyset$ ,  $F^+(\{1\}) = \emptyset$ ,  $F^+(\{2,3\}) = \{b\}$ ,  $F^+(\{1,2,3\}) = \{a,b,c\}$  kümeleri  $X$  uzayında  $\delta$ -açıktır.

Fakat ü.ön.g.na-sürekli değildir. Çünkü  $\{1,3\} \subseteq Y$  ön-açık kümedir fakat  $F^+(\{1,3\}) = \{c\}$   $\delta$ -açık küme değildir.

**Örnek 3.4.10.**  $X = \{a,b,c\}$  ve  $X$  üzerindeki topoloji  $\tau = \{ \emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\} \}$ ,  $Y = \{1,2,3\}$  ve  $Y$  üzerindeki topoloji  $\sigma = \{ \emptyset, Y, \{1\}, \{2\}, \{1,2\} \}$  olsun.  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonu,  $F(a) = \{1\}$ ,  $F(b) = \{2\}$ ,  $F(c) = \{1,3\}$  şeklinde tanımlansın.

$F$  ü.ön.g.na-sürekli. Çünkü,  $Y$  uzayındaki  $\emptyset$ ,  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{1,2\}$ ,  $\{1,2,3\}$  ön-açık kümeleri için  $F^+(\emptyset) = \emptyset$ ,  $F^+(\{1\}) = \{a\}$ ,  $F^+(\{2\}) = \{b\}$ ,  $F^+(\{1,2\}) = \{a,b\}$ ,  $F^+(\{1,2,3\}) = \{a,b,c\}$  kümeleri  $X$  uzayında  $\delta$ -açıktır.

Fakat ü.y.g.na-sürekli değildir. Çünkü  $\{1,3\} \subseteq Y$  yarı-açık kümedir fakat  $F^+(\{1,3\}) = \{a,c\}$   $\delta$ -açık küme değildir.

**Örnek 3.4.11.**  $X = \{a,b,c\}$  ve  $X$  üzerindeki topoloji  $\tau = \{ \emptyset, X, \{a\} \}$ ,  $Y = \{1,2\}$  ve  $Y$  üzerindeki topoloji  $\sigma = \{ \emptyset, Y, \{1\} \}$  olsun.  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonu,  $F(a) = \{1\}$ ,  $F(b) = F(c) = \{1,2\}$  şeklinde tanımlansın.

$F$  ü.z.na-sürekli. Çünkü,  $Y$  uzayındaki  $\emptyset$  ve  $Y$   $\delta$ -açık kümeleri için  $F^+(\emptyset) = \emptyset$  ve  $F^+(Y) = X$  kümeleri  $X$  uzayında  $\alpha$ -açıktır.

Fakat ü.na-sürekli değildir. Çünkü  $\{1\} \subseteq Y$   $\alpha$ -açık kümedir fakat  $F^+(\{1\}) = \{a\}$   $\delta$ -açık küme değildir.

Üstten ( alttan ) ön-güçlü na süreklilik ile üstten ( alttan ) yarı-güçlü na süreklilik kavramları birbirinden bağımsızdır fakat, aşağıdaki gibi ek koşullar konularak ilişki bulunabilir.

**Teorem 3.4.12.**  $F : X \rightarrow Y$  ü.y.g.na-sürekli ( a.y.g.na-sürekli ) çoğul değerli fonksiyon ve  $Y$  kuvvetli çözülemesiz uzay ise  $F$  ü.ön.g.na-sürekli ( a.ön.g.na-sürekli ) dir.

**İspat.**  $V \subseteq Y$  ön-açık küme olsun.  $Y$  kuvvetli çözülemez uzay olduğundan  $V \subseteq Y$  yarı-açıktır. Hipotezden  $F^+(V) ( F^-(V) ) \subseteq X$  kümesi  $\delta$ -açıktır.

**Teorem 3.4.13.**  $F : X \rightarrow Y$  ü.ön.g.na-sürekli ( a.ön.g.na-sürekli ) çoğul değerli fonksiyon ve  $Y$  aşırı bağlantısız uzay ise  $F$  ü.y.g.na-sürekli ( a.y.g.na-sürekli ) dir.

**İspat.**  $V \subseteq Y$  yarı-açık küme olsun.  $Y$  aşırı bağlantısız uzay olduğundan  $V \subseteq Y$  ön-açıktır. Hipotezden  $F^+(V) ( F^-(V) ) \subseteq X$  kümesi  $\delta$ -açıktır.

Her ü.y.g.na-sürekli ( a.y.g.na-sürekli ) çoğul değerli fonksiyon ü.na-sürekli ( a.na-sürekli ) dir fakat, tersi her zaman doğru değildir. Aşağıdaki teoremden tersinin doğru olabilmesi için gereken ek koşul verilmiştir.

**Teorem 3.4.14.**  $F : X \rightarrow Y$  ü.na-sürekli ( a.na-sürekli ) çoğul değerli fonksiyon,  $Y$  aşırı bağlantısız ve altmaksimal uzay ise  $F$  ü.y.g.na-sürekli ( a.y.g.na-sürekli ) dir.

**İspat.**  $V \subseteq Y$  yarı-açık küme olsun.  $Y$  aşırı bağlantısız uzay ise  $V \subseteq Y$  ön-açıktır.  $Y$  altmaksimal uzay olduğundan  $V \subseteq Y$  kümesi açıktır. Dolayısıyla  $\alpha$ -açıktır. Hipotezden  $F^+(V) \subseteq X ( F^-(V) )$  kümesi  $\delta$ -açıktır.

## 4. GÜÇLÜ SÜREKLİ, MÜKEMMEL SÜREKLİ, HEMEN HEMEN MÜKEMMEL SÜREKLİ VE HEMEN HEMEN CL-SÜPERSÜREKLİ ÇOĞUL DEĞERLİ FONKSİYONLAR

### 4.1 Güçlü Sürekli Çoğul Değerli Fonksiyonlar

Tek değerli fonksiyonlar için güçlü süreklilik 1960 yılında Levine tarafından çalışılmıştır ve daha sonra Akdağ tarafından aşağıdaki şekilde çoğul değerli fonksiyonlara genişletilmiştir.

**Tanım 4.1.1. ( Akdağ, 2007 )**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyon olsun.

(a) Her  $B \subseteq Y$  için  $F^+(B) \subseteq X$  kapaçık ise  $F$  çoğul değerli fonksiyonuna üstten güçlü sürekli ( upper strongly continuous ) denir ve kısaca ü.g.sürekli olarak gösterilir.

(b) Her  $B \subseteq Y$  için  $F^-(B) \subseteq X$  kapaçık ise  $F$  çoğul değerli fonksiyonuna alttan güçlü sürekli ( lower strongly continuous ) denir ve kısaca a.g.sürekli olarak gösterilir.

(c)  $F$  çoğul değerli fonksiyonu hem ü.g.sürekli hem de a.g.sürekli ise  $F$  çoğul değerli fonksiyonuna, güçlü sürekli ( strongly continuous ) denir ve g.sürekli olarak gösterilir.

Bu tanımdaki (a) ve (b) koşulları birbirine denktir. Bu durumda, tanım Kohli ve Arya tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir.

**Tanım 4.1.2. ( Kohli and Arya, 2010 )**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonu aşağıdaki koşullardan birini sağlıyorsa  $F$  ye güçlü sürekli çoğul değerli fonksiyon denir.

(i) Her  $B \subseteq Y$  için  $F^+(B) \subseteq X$  kapaçık

(ii) Her  $B \subseteq Y$  için  $F^-(B) \subseteq X$  kapaçık

Bu kavram kısaca g.sürekli olarak gösterilir.

**Teorem 4.1.3. ( Akdağ, 2007 )**  $F : X \rightarrow Y$  g.sürekli ve  $F(X)$  alt uzay topolojisine sahipse  $F : X \rightarrow F(X)$  g.süreklidir.

**İspat.** Her  $V \subseteq Y$  için  $F^+(V) = F^+(V \cap F(X))$  olduğundan ispat açıktır.

**Teorem 4.1.4.** ( Kohli and Arya, 2010 )  $F : X \rightarrow Y$  g.sürekli çoğul değerli fonksiyon ve  $G : Y \rightarrow Z$  herhangi bir çoğul değerli fonksiyon olsun. O halde  $GoF$  g.sürekli çoğul değerli fonksiyondur.

**İspat.** Açıktır.

**Teorem 4.1.5.** ( Akdağ, 2007 )  $F : X \rightarrow Y$  g.sürekli çoğul değerli fonksiyon ve  $A \subseteq X$  olsun. O halde  $F|_A : A \rightarrow Y$  g.sürekli çoğul değerli fonksiyondur.

**İspat.** Açıktır.

**Teorem 4.1.6.** ( Kohli and Arya, 2010 )  $F, G : X \rightarrow Y$  g.sürekli çoğul değerli fonksiyon olsun. Her  $x \in X$  noktası için  $(F \cup G)(x) = F(x) \cup G(x)$  şeklinde tanımlanan  $F \cup G : X \rightarrow Y$  g.sürekli çoğul değerli fonksiyondur.

**İspat.**  $B \subseteq Y$  olsun.  $F$  ve  $G$  g.sürekli olduğundan  $F^+(B)$  ve  $G^+(B)$  kümeleri  $X$  de kapaçiktır.  $(F \cup G)^+(B) = F^+(B) \cap G^+(B)$  ve kapaçık kümelerin sonlu kesişimi kapaçık olduğundan  $(F \cup G)^+(B) \subseteq X$  kümesi kapaçiktır.

**Teorem 4.1.7.** ( Kohli and Arya, 2011 )  $X$  discrete uzay ise her  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonu güçlü süreklidir.

**İspat.** Açıktır.

**Teorem 4.1.8.** ( Akdağ, 2007 )  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyon olsun.  $G_F$  güçlü sürekli ise  $F$  güçlü süreklidir.

**İspat.**  $V \subseteq Y$  olsun.  $X \times V \subseteq X \times Y$  olur.  $G_F$  güçlü sürekli olduğundan

$$G_F^+(X \times V) = \{ x \in X : \{x\} \times F(x) \subseteq X \times V \} = \{ x \in X : F(x) \subseteq V \} = F^+(V) \subseteq X$$

kümesi kapaçiktır. O halde  $F$  güçlü süreklidir.

## 4.2. Mükemmel Sürekli ve Hemen Hemen Mükemmel Sürekli Çoğul Değerli Fonksiyonlar

Tek değerli fonksiyonlar için mükemmel süreklilik 1984 de Noiri tarafından, hemen hemen mükemmel süreklilik (= regüler küme bağlantılılık) ise 1999 yılında Dontchev, Ganster ve Reilly tarafından çalışılmıştır. Bu kavramlar çoğul değerli fonksiyonlara aşağıdaki şekilde genişletilmiştir.

**Tanım 4.2.1. ( Akdağ, 2007 )**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyon olsun.

(a) Her  $B \subseteq Y$  açık için  $F^+(B) \subseteq X$  kapaçık ise  $F$  ye üstten mükemmel süreklili ( upper perfectly continuous ) denir ve kısaca ü.m.süreklili ile gösterilir.

(b) Her  $B \subseteq Y$  açık için  $F^-(B) \subseteq X$  kapaçık ise  $F$  ye alttan mükemmel süreklili ( lower perfectly continuous ) denir ve kısaca a.m.süreklili ile gösterilir.

(c)  $F$  çoğul değerli fonksiyonu ü.m.süreklili ve a.m.süreklili ise mükemmel süreklili ( perfectly continuous ) denir ve kısaca m.süreklili olarak gösterilir.

**Tanım 4.2.2. ( Kohli and Arya, 2010 )**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyon olsun.

(a) Her  $B \subseteq Y$  regüler açık kümesi için  $F^+(B) \subseteq X$  kapaçık ise  $F$  ye üstten hemen hemen mükemmel süreklili ( upper almost perfectly continuous ) denir. Bu durum kısaca ü.h.h.m.süreklili ile gösterilir.

(b) Her  $B \subseteq Y$  regüler açık kümesi için  $F^-(B) \subseteq X$  kapaçık ise  $F$  ye alttan hemen hemen mükemmel süreklili ( lower almost perfectly continuous ) denir. Bu durum kısaca a.h.h.m.süreklili ile gösterilir.

**Teorem 4.2.3. ( Kohli and Arya, 2010 )**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonun ü.m.süreklili ( ü.h.h.m.süreklili ) olması için gerek ve yeter koşul her  $B \subseteq Y$  kapalı ( regüler kapalı ) kümesi için  $F^-(B) \subseteq X$  kümesinin kapaçık olmasıdır.

**İspat. (⇒)**  $B \subseteq Y$  kapalı ( regüler kapalı ) küme olsun. O halde  $Y-B \subseteq Y$  açık ( regüler açık ) tır.  $F$  ü.m.süreklili ( ü.h.h.m.süreklili ) olduğundan  $F^+(Y-B)$  kümesi kapaçıktır. Önerme 2.2.4 gereğince  $F^-(B) \subseteq X$  kapaçık kümedir.

**(⇐)**  $B \subseteq Y$  açık ( regüler açık ) küme olsun. O halde  $Y-B \subseteq Y$  kapalı ( regüler kapalı ) dır. Hipotezden  $F^-(Y-B) \subseteq X$  kümesi kapaçıktır. Önerme 2.2.4 gereğince  $F^+(B) \subseteq X$  kapaçık kümedir. Böylece  $F$  , ü.m.süreklili ( ü.h.h.m.süreklili ) çoğul değerli fonksiyondur.

**Teorem 4.2.4. ( Kohli and Arya, 2010 )**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonun a.m.süreklili ( a.h.h.m.süreklili ) olması için gerek ve yeter koşul her  $B \subseteq Y$  kapalı ( regüler kapalı ) kümesi için  $F^+(B) \subseteq X$  kümesinin kapaçık olmasıdır.

**İspat.** Teorem 4.2.3. e benzer şekilde ispat yapılır.

**Teorem 4.2.5. ( Kohli and Arya, 2010 )**  $F : X \rightarrow Y$  ve  $G : Y \rightarrow Z$  çoğul değerli fonksiyonlar olsun. O halde aşağıdakiler vardır.

(a)  $F$  ü.m.sürekli ( a.m.sürekli ) ve  $G$  ü.y.sürekli ( a.y.sürekli ) ise  $GoF$  ü.m.sürekli ( a.m.sürekli ) dir.

(b)  $F$  ü.h.h.m.sürekli ( a.h.h.m.sürekli ) ve  $G$  ü.h.h.t.sürekli ( a.h.h.t.sürekli ) ise  $GoF$  ü.h.h.m.sürekli ( a.h.h.m.sürekli ) dir.

(c)  $F$  ü.m.sürekli ( a.m.sürekli ) ve  $G$  ü.h.h.sürekli ( a.h.h.sürekli ) ise  $GoF$  ü.h.h.m.sürekli ( a.h.h.m.sürekli ) dir.

(d)  $F$  ü.h.h.m.sürekli ( a.h.h.m.sürekli ) ve  $G$  ü.t.sürekli ( a.t.sürekli ) ise  $GoF$  ü.m.sürekli ( a.m.sürekli ) dir.

**İspat.** Açıktır.

**Sonuç 4.2.6. ( Kohli and Arya, 2010 )**  $F : X \rightarrow Y$  ü.m.sürekli çoğul değerli fonksiyon ve  $Y \subseteq Z$  olsun. O halde her  $x \in X$  noktası için  $G(x) = F(x)$  şeklinde tanımlı  $G : X \rightarrow Z$  çoğul değerli fonksiyonu ü.m.sürekli dir.

**İspat.** Teorem 4.2.5 de  $G$  çoğul değerli fonksiyonu yerine üstten yarı sürekli olan  $i$  kapsama dönüşümünü alırsak ispat biter.

**Teorem 4.2.7. ( Kohli and Arya, 2010 )**  $F : X \rightarrow Y$  ü.h.h.m.sürekli çoğul değerli fonksiyon ve  $Y$  uzayı ile  $Z$  uzayındaki her regüler açık kümenin kesişimi  $Y$  uzayında regüler açık küme olacak şekilde  $Y \subseteq Z$  olsun. Her  $x \in X$  noktası için  $G(x) = F(x)$  şeklinde tanımlanan  $G : X \rightarrow Z$  çoğul değerli fonksiyonu ü.h.h.m.sürekli dir.

**İspat.**  $W \subseteq Z$  regüler açık küme olsun. Hipotezden  $W \cap Y \subseteq Y$  kümesi regüler açıktır.  $F$ , ü.h.h.m.sürekli olduğundan  $F^+(W \cap Y)$  kapaçlıktır.  $G^+(W) = F^+(W \cap Y)$  olduğundan  $G^+(W) \subseteq X$  kümesi kapaçlıktır. O halde  $G$  ü.h.h.m.sürekli dir.

**Teorem 4.2.8. ( Kohli and Arya, 2010 )**  $F : X \rightarrow Y$  ü.m.sürekli çoğul değerli fonksiyon olsun.  $F(X)$  alt uzay topolojisine sahip ise  $F : X \rightarrow F(X)$  ü.m.sürekli dir.

**İspat.** Her  $V \subseteq Y$  açık kümesi için  $F^+(V) = F^+(V \cap F(X))$  olduğundan ispat açıktır.



**Teorem 4.2.9. ( Kohli and Arya, 2010 )**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonu ü.h.h.m.sürekli ( a.h.h.m.sürekli ) ve  $F(X)$ ,  $Y$  uzayında  $\delta$ -gömmeye ise  $F : X \rightarrow F(X)$  çoğul değerli fonksiyonu ü.h.h.m.sürekli ( a.h.h.m.sürekli ) dir.

**İspat.**  $V \subseteq F(X)$  regüler açık küme olsun.  $F(X)$ ,  $Y$  uzayında  $\delta$ -gömmeye olduğundan  $V = W \cap F(X)$  olacak şekilde  $W \subseteq Y$  regüler açık kümesi vardır.  $F$  ü.h.h.m.sürekli olduğundan  $F^+(W)$  kümesi kapaçıktır.  $F^+(V) = F^+(W \cap F(X)) = F^+(W) \subseteq X$  kümesi kapaçık olduğundan  $F$  ü.h.h.m.sürekli dir.

a.h.h.m.sürekli için benzer şekilde ispat yapılır.

**Teorem 4.2.10. ( Kohli and Arya, 2010 )**  $F : X \rightarrow Y$  ü.m.sürekli ( ü.h.h.m.sürekli ) çoğul değerli fonksiyon ve  $A \subseteq X$  olsun. O halde  $F|_A : A \rightarrow Y$  ü.m.sürekli ( ü.h.h.m.sürekli ) çoğul değerli fonksiyondur.

**İspat.**  $U \subseteq Y$  açık ( regüler açık ) küme olsun.  $F$  ü.m.sürekli ( ü.h.h.m.sürekli ) olduğundan  $F^+(U) \subseteq X$  kapaçıktır.  $F|_A^+(U) = A \cap F^+(U)$  olduğundan  $F|_A^+(U) \subseteq A$  kümesi kapaçıktır.

**Teorem 4.2.11. ( Kohli and Arya, 2010 )**  $F : X \rightarrow Y$  a.m.sürekli ( a.h.h.m.sürekli ) çoğul değerli fonksiyon ve  $A \subseteq X$  olsun. O halde  $F|_A : A \rightarrow Y$  a.m.sürekli ( a.h.h.m.sürekli ) çoğul değerli fonksiyondur.

**İspat.** Teorem 4.2.10 a benzer şekilde yapılır.

**Teorem 4.2.12. ( Kohli and Arya, 2010 )**  $F, G : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonları ü.m.sürekli ( ü.h.h.m.sürekli ) olsun. Her  $x \in X$  noktası için  $(F \cup G)(x) = F(x) \cup G(x)$  şeklinde tanımlanan  $F \cup G : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonu ü.m.sürekli ( ü.h.h.m.sürekli ) dir.

**İspat.**  $B \subseteq Y$  açık ( regüler açık ) küme olsun.  $F$  ve  $G$  ü.m.sürekli ( ü.h.h.m.sürekli ) olduğundan  $F^+(B)$  ve  $G^+(B)$  kümeleri  $X$  uzayında kapaçıktır.  $(F \cup G)^+(B) = F^+(B) \cap G^+(B)$  ve kapaçık kümelerin sonlu kesişimi kapaçık olduğundan  $(F \cup G)^+(B) \subseteq X$  kümesi kapaçıktır.

**Teorem 4.2.13. ( Kohli and Arya, 2010 )**  $F, G : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonları a.m.sürekli ( a.h.h.m.sürekli ) olsun. Her  $x \in X$  noktası için  $(F \cup G)(x) = F(x) \cup G(x)$  şeklinde tanımlanan  $F \cup G : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonu a.m.sürekli ( a.h.h.m.sürekli ) dir.

**İspat.**  $B \subseteq Y$  açık ( regüler açık ) küme olsun.  $F$  ve  $G$  a.m.sürekli ( a.h.h.m.sürekli ) olduğundan  $F^{-}(B)$  ve  $G^{-}(B)$  kümeleri  $X$  uzayında kapaçiktır.  $(F \cup G)^{-}(B) = F^{-}(B) \cup G^{-}(B)$  ve kapaçık kümelerin sonlu birleşimi kapaçık olduğundan  $(F \cup G)^{-}(B) \subseteq X$  kümesi kapaçiktır.

**Teorem 4.2.14. ( Kohli and Arya, 2010 )**  $F : X \rightarrow Y$  ü.m.sürekli çoğul değerli fonksiyon olsun. Her  $B \subseteq Y$  için  $[F^{-}(B)]_{cl} \subseteq F^{-}(clB)$  dir.

**İspat.**  $B \subseteq Y$  olsun.  $F$  ü.m.sürekli olduğundan  $F^{-}(clB) \subseteq X$  kapaçiktır.  $F^{-}(B) \subseteq F^{-}(clB)$  olduğundan  $[F^{-}(B)]_{cl} \subseteq F^{-}(clB)$  elde edilir.

**Teorem 4.2.15. ( Kohli and Arya, 2010 )**  $F : X \rightarrow Y$  bir çoğul değerli fonksiyon olsun.  $G_F$  çoğul değerli grafik fonksiyonu ü.m.sürekli ( ü.h.h.m.sürekli ) ise  $F$  ü.m.sürekli ( ü.h.h.m.sürekli ) dir ve  $X$  ayrışım topolojisi ( hemen hemen ayrışım topolojisi ) ile donatılmıştır.

**İspat.**  $G_F$  çoğul değerli grafik fonksiyonu ü.m.sürekli ( ü.h.h.m.sürekli ) olsun.  $P_y : X \times Y \rightarrow Y$  ü.y.sürekli ( ü.h.h.t.sürekli ) izdüşüm fonksiyonu olduğundan Teorem 4.2.5 den  $F = P_y \circ G_F$  ü.m.sürekli ( ü.h.h.m.sürekli ) dir.

$X$  uzayının ayrışım topolojisi ( hemen hemen ayrışım topolojisi ) ile donatıldığını gösterelim:

$U \subseteq X$  açık ( regüler açık ) küme olsun.  $U \times Y \subseteq X \times Y$  açık ( regüler açık ) tır.  $G_F$  ü.m.sürekli ( ü.h.h.m.sürekli ) olduğundan  $G_F^+(U \times Y) \subseteq X$  kümesi kapaçiktır.  $G_F^+(U \times Y) = U$  olduğundan  $U \subseteq X$  kapaçiktır. Bu durumda  $U \subseteq X$  kapalı kümedir.

**Teorem 4.2.16. ( Kohli and Arya, 2010 )**  $F : X \rightarrow Y$  ü.m.sürekli ( ü.h.h.m.s ) çoğul değerli fonksiyon,  $Y$  regüler uzay ve her  $x \in X$  noktası için  $F(x)$  kapalı olsun. O halde  $F$  in  $G_F$  çoğul değerli grafik fonksiyonu  $X$  uzayına göre  $X \times Y$  uzayının kap-kapalı alt kümesidir.

**İspat.**  $(x,y) \in (X \times Y) \setminus G_F$  alalım. O halde  $y \notin F(x)$  olur.  $F(x)$  kapalı ve  $Y$  regüler uzay olduğundan  $y \in V_y$  ve  $F(x) \subseteq V_{F(x)}$  olacak şekilde  $Y$  içinde ayrık açık  $V_y$  ve  $V_{F(x)}$  alt kümeleri vardır.  $V_y$  ve  $V_{F(x)}$  kümelerinin regüler açık kümeler olarak seçilebileceği kolaylıkla kanıtlanabilir.  $F$  ü.m.sürekli ( ü.h.h.m.sürekli ) olduğundan  $U_x = F^+(V_{F(x)}) \subseteq X$  kümesi kapaçiktır ve  $x$  noktasını içerir.

$$(U_x \times V_y) \cap G_F = \emptyset$$

olduğunu ileri sürelim. Kabul edelim ki  $(U_x \times V_y) \cap G_F \neq \emptyset$  olsun. O halde  $(h,k) \in (U_x \times V_y) \cap G_F$  olacak şekilde  $(h,k) \in (X \times Y)$  vardır.  $h \in F^+(V_{F(x)})$ ,  $k \in V_y$  ve  $k \in F(h)$  olur. Böylece  $k \in V_{F(x)}$  ve  $k \in V_y$  elde edilir. Bu ise çelişkidir. Çünkü  $V_{F(x)}$  ve  $V_y$  ayrık kümelerdi. O halde  $G_F$  çoğul değerli grafik fonksiyonu  $X$  uzayına göre  $X \times Y$  uzayının kap-kapalı alt kümesidir.

**Teorem 4.2.17. ( Kohli and Arya, 2010 )** Her  $x \in X$  noktası için  $F(x)$  kompakt olmak üzere  $F : X \rightarrow Y$  ü.m.sürekli çoğul değerli fonksiyon olsun.  $A \subseteq X$  hafifçe kompakt küme ise  $F(A) \subseteq Y$  kümesi kompakttır.

**İspat.**  $\Lambda$ ,  $F(A)$  ın açık örtüsü olsun. O halde,  $\Lambda$ , her  $a \in A$  için  $F(a)$  nın açık örtüsüdür. Her  $F(a)$  kompakt olduğundan

$$F(a) \subseteq \cup \{ B : B \in \beta_a \} = V_a$$

olacak şekilde  $\beta_a \subseteq \Lambda$  sonlu alt kümesi vardır.  $F$ , ü.m.sürekli olduğundan  $U_a = F^+(V_a) \subseteq X$  kümesi kapaçiktır ve  $a$  noktasını içerir.  $\{ U_a : a \in A \}$  ailesi  $A$  kümesinin kapaçık örtüsüdür.  $A$  hafifçe kompakt olduğundan  $A \subseteq \cup_{i=1}^n U_{a_i} \subseteq \cup_{i=1}^n F^+(V_{a_i})$  olacak şekilde  $A$  kümesinin sonlu sayıda  $a_1, a_2, \dots, a_n$  noktaları vardır. Böylece

$$F(A) \subseteq F(\cup_{i=1}^n F^+(V_{a_i})) = \cup_{i=1}^n F(F^+(V_{a_i})) \subseteq \cup_{i=1}^n V_{a_i}$$

dir. Burada her  $\beta_{a_i}$  sonludur ve  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $V_{a_i} = \cup \{ B : B \in \beta_{a_i} \}$  olur. Böylece  $F(A) \subseteq Y$  kümesi kompakttır.

**Teorem 4.2.18. ( Kohli and Arya, 2010 )**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonu  $X$  uzayındaki her farklı  $x, y$  nokta çifti için  $F(x) \cap F(y) = \emptyset$  olacak şekilde ü.m.sürekli ( ü.h.h.m.sürekli ) ve nokta kapalı olsun.  $Y$  normal uzay ise  $X$  ultra Hausdorff uzaydır.

**İspat.**  $x, y \in X$  ve  $x \neq y$  olsun. O halde  $F(x)$  ve  $F(y)$ ,  $F(x) \cap F(y) = \emptyset$  olacak şekilde kapalı kümelerdir.  $Y$  normal uzay olduğundan  $F(x) \subseteq U_1$  ve  $F(y) \subseteq V_1$  olacak şekilde  $U_1$  ve  $V_1$  ayrık açık kümeleri vardır.  $U = \text{int}(\text{cl}(U_1))$   $V = \text{int}(\text{cl}(V_1))$  sırasıyla  $F(x)$  ve  $F(y)$  i kapsayan ayrık regüler açık kümelerdir.  $F$  ü.m.sürekli ( ü.h.h.m.sürekli ) olduğundan  $F^+(U)$  ve  $F^+(V)$  sırasıyla  $x$  ve  $y$  noktalarını içeren ayrık kapaçık kümelerdir. O halde  $X$  uzayı ultra Hausdorffdur.

**Teorem 4.2.19. ( Kohli and Arya, 2010 )**  $Y$  normal uzay olmak üzere  $F, G : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonları ü.m.sürekli ( ü.h.h.m.sürekli ) ve her  $x \in X$  noktası için  $F(x)$  ve  $G(x)$  kapalı olsun. O halde

$$E = \{ x \in X : F(x) \cap G(x) \neq \emptyset \}$$

kümesi  $X$  uzayının kap-kapalı alt kümesidir.

**İspat.**  $E$  kümesinin kap-kapalı olduğunu göstermek için  $X \setminus E$  in kap-açık olduğunu göstermeliyiz.

$x \in X \setminus E$  alalım. O halde  $F(x) \cap G(x) = \emptyset$  olur ve ayrıca hipotezden  $F(x)$  ve  $G(x)$  kümeleri kapalıdır.  $Y$  normal uzay olduğundan  $F(x) \subseteq U_1$  ve  $G(x) \subseteq V_1$  olacak şekilde  $Y$  içinde  $U_1$  ve  $V_1$  ayrık açık kümeleri vardır.  $U = \text{int}(\text{cl}(U_1))$  ve  $V = \text{int}(\text{cl}(V_1))$  sırasıyla  $F(x)$  ve  $G(x)$  i kapsayan ayrık regüler açık kümelerdir.  $F$  ve  $G$  ü.m.sürekli ( ü.h.h.m.sürekli ) olduğundan  $F^+(U)$  ve  $G^+(V)$  kümeleri kapaçiktır ve  $x$  noktasını içerir.  $G_1 = F^+(U)$  ve  $G_2 = G^+(V)$  olsun.  $G = G_1 \cap G_2$  kümesi,  $x$  noktasını içeren kapaçık kümedir.

$$G \cap E = \emptyset$$

olduğunu iddia ediyoruz. Kabul edelim ki  $G \cap E \neq \emptyset$  olsun. O halde  $y \in G$  ve  $y \in E$  olacak şekilde bir  $y \in X$  vardır.  $y \in G$  ise  $F(y) \subseteq U$  ve  $G(y) \subseteq V$  olur. Burada  $F(y) \cap G(y) \subseteq U \cap V = \emptyset$  olduğundan  $F(y) \cap G(y) = \emptyset$  elde edilir. Bu ise  $y \in E$  olması ile çelişir. O halde  $G \subseteq X \setminus E$  olur. Bu durumda  $X \setminus E$  kap-açıktır.

**Teorem 4.2.20. ( Kohli and Arya, 2010 )**  $Y$  normal uzay olacak şekilde  $F : X \rightarrow Y$  ü.m.sürekli ( ü.h.h.m.sürekli ) çoğul değerli fonksiyon ve her  $x \in X$  noktası için  $F(x)$  kapalı olsun. O halde,

$$A = \{ (x,y) \in X \times X : F(x) \cap F(y) \neq \emptyset \}$$

kümesi,  $X \times X$  uzayının kap-kapalı alt kümesidir.

**İspat.**  $A$  kümesinin kap-kapalı olduğunu göstermek için  $(X \times X) \setminus A$  in kap-açık olduğunu göstermeliyiz.

$(x,y) \in (X \times X) \setminus A$  alalım. O halde  $F(x) \cap F(y) = \emptyset$  olur. Ayrıca hipotezden  $F(x)$  ve  $F(y)$  kümeleri kapalıdır.  $Y$  normal uzay olduğundan  $F(x) \subseteq U_1$  ve  $F(y) \subseteq V_1$  olacak şekilde  $Y$  içinde  $U_1$  ve  $V_1$  ayrık açık kümeleri vardır. Teorem 4.2.19 un ispatındaki gibi  $U = \text{int}(\text{cl}(U_1))$  ve  $V = \text{int}(\text{cl}(V_1))$  alınabilir.  $F$  ü.m.sürekli ( ü.h.h.m.sürekli ) olduğundan  $F^+(U)$  ve  $F^+(V)$  kümeleri kapaçiktır ve sırasıyla  $x$  ve  $y$  noktalarını içerir.  $G_1 = F^+(U)$  ve  $G_2 = F^+(V)$  olsun.  $G_1 \times G_2$ ,  $(x,y)$  noktasını içeren kapaçık kümedir.

$$(G_1 \times G_2) \cap A = \emptyset$$

olduğunu iddia ediyoruz. Kabul edelim ki  $(G_1 \times G_2) \cap A \neq \emptyset$  olsun. O halde  $(a,b) \in G_1 \times G_2$  ve  $(a,b) \in A$  olacak şekilde bir  $(a,b) \in X \times X$  vardır.  $(a,b) \in G_1 \times G_2$  ise  $F(a) \subseteq U$  ve  $F(b) \subseteq V$  olur. Burada  $F(a) \cap F(b) \subseteq U \cap V = \emptyset$  olduğundan  $F(a) \cap F(b) = \emptyset$  elde edilir. Bu ise  $(a,b) \in A$  olması ile çelişir. O halde  $G_1 \times G_2 \subseteq (X \times X) \setminus A$  olur. Bu durumda  $(X \times X) \setminus A$  kap-açık kümedir. Böylece  $A \subseteq X \times X$  kümesinin kap-kapalı olduğu elde edilir.

### 4.3. Hemen Hemen Cl-süpersüreklili Çoğul Değerli Fonksiyonlar

Tek değerli fonksiyonlar için hemen hemen kapaçık ( almost clopen ) dönüşümler, ilk olarak Ekici tarafından 2005 yılında tanımlanmış ve çalışılmıştır.  $(X, \tau)$  ve  $(Y, \sigma)$  topolojik uzaylar olmak üzere her  $x \in X$  ve  $f(x)$  i içeren her  $V \subseteq Y$  açık kümesi için  $f(U) \subseteq \text{int}(\text{cl}(V))$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren  $U \subseteq X$  kapaçık kümesi varsa  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  fonksiyonuna hemen hemen kapaçık denir.

Kohli ve Singh ise buna denk olarak şu tanımlı vermiştir:

$(X, \tau)$  ve  $(Y, \sigma)$  topolojik uzaylar olmak üzere  $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$  bir fonksiyon olsun. Her  $x \in X$  ve  $f(x)$  i içeren her  $V \subseteq Y$  regüler açık kümesi için  $f(U) \subseteq V$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U \subseteq X$  kapaçık kümesi varsa  $f$  fonksiyonuna hemen hemen cl-süpersüreklili ( almost cl-supercontinuous ) fonksiyon denir.

Bu kavram çoğul değerli fonksiyonlar için Kohli ve Arya tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

**Tanım 4.3.1.** ( Kohli and Arya, 2011 )  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyon olsun.

(a) Her  $x \in X$  ve  $x \in F^+(V)$  koşulunu sağlayan  $Y$  uzayının her  $V$  regüler açık kümesi için  $U \subseteq F^+(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasının bir  $U \subseteq X$  kapaçık kümesi varsa,  $F$  çoğul değerli fonksiyonuna üstten hemen hemen cl-süpersüreklili ( upper almost cl-supercontinuous ) denir. Bu durum kısaca ü.h.h.cl-s.süreklili olarak gösterilir.

(b) Her  $x \in X$ ,  $x \in F^-(V)$  koşulunu sağlayan  $Y$  uzayının her  $V$  regüler açık kümesi ve her  $z \in U$  için  $F(z) \cap V \neq \emptyset$  olacak şekilde  $x$  noktasının bir  $U \subseteq X$  kapaçık kümesi varsa,  $F$  çoğul değerli fonksiyonuna  $x$  noktasında alttan hemen hemen cl-süpersüreklilidir ( lower almost cl-supercontinuous ) denir. Bu durum kısaca a.h.h.cl-s.süreklili olarak gösterilir.

**Teorem 4.3.2.** ( Kohli and Arya, 2011 )  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonu için aşağıdakiler denktir:

- (a)  $F$  ü.h.h.cl-s.sürekli dir,
- (b) Her  $V \subseteq Y$  regüler açık kümesi için  $F^+(V) \subseteq X$  kap-açıktır,
- (c) Her  $B \subseteq Y$  regüler kapalı kümesi için  $F^-(B) \subseteq X$  kap-kapalıdır.
- (d) Her  $G \subseteq Y$  regüler açık kümesi için  $F^+(G) \subseteq \text{int}_{cl} F^+(G)$  dir.
- (e) Her  $K \subseteq Y$  regüler kapalı kümesi için  $[F^-(K)]_{cl} \subseteq F^-(K)$  dir.

**İspat.** (a)  $\Rightarrow$  (b):  $V \subseteq Y$  regüler açık küme ve  $x \in F^+(V)$  olsun. Hipotezden  $U_x \subseteq F^+(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U_x \subseteq X$  kapaçık kümesi vardır. Böylece  $x \in U_x \subseteq F^+(V)$  olur. Burada  $F^+(V) = \bigcup \{ U_x : x \in U_x \subseteq X \text{ kapaçık} \}$  olduğundan  $F^+(V) \subseteq X$  kümesi kap-açıktır.

(b)  $\Rightarrow$  (c):  $B \subseteq Y$  regüler kapalı küme olsun.  $B^c \subseteq Y$  kümesi regüler açıktır. Hipotezden  $F^+(B^c) \subseteq X$  kap-açıktır. Önerme 2.2.4 gereğince  $F^-(B) \subseteq X$  kap-kapalı kümedir.

(c)  $\Rightarrow$  (d):  $G \subseteq Y$  regüler açık küme olsun.(c) den  $F^-(Y-G) = X-F^+(G)$  kap-kapalıdır. O halde  $F^+(G) \subseteq X$  kap-açıktır. Buradan  $F^+(G) \subseteq \text{int}_{cl} F^+(G)$  elde edilir.

(d)  $\Rightarrow$  (e):  $K \subseteq Y$  regüler kapalı küme olsun. (d) den  $F^+(Y-K) \subseteq \text{int}_{cl} F^+(Y-K)$  olur. O halde  $X-F^-(K) \subseteq \text{int}_{cl}(X-F^-(K))$  elde edilir. Buradan  $[F^-(K)]_{cl} \subseteq F^-(K)$  sağlanır.

(e)  $\Rightarrow$  (a):  $x \in X$  ve  $x \in F^+(V)$  olacak şekilde  $V \subseteq Y$  regüler açık küme olsun. O halde  $Y-V \subseteq Y$  kümesi regüler kapalıdır. (e) den  $[F^-(Y-V)]_{cl} \subseteq F^-(Y-V)$  olur. Buradan  $F^-(Y-V) = X-F^+(V) \subseteq X$  kap-kapalı kümedir. Bu durumda  $F^+(V)$  kümesi  $x$  noktasını içeren kap-açıktır. Böylece  $U \subseteq F^+(V)$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren  $U$  kapaçık kümesi vardır. O halde  $F$  ü.h.h.cl-s.sürekli dir.

**Teorem 4.3.3.** ( Kohli and Arya, 2011 )  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonu için aşağıdakiler denktir:

(a)  $F$  a.h.h.cl-s.sürekli dir,

(b) Her  $V \subseteq Y$  regüler açık kümesi için  $F^-(V) \subseteq X$  kap-açıktır,

(c) Her  $K \subseteq Y$  regüler kapalı kümesi için  $F^+(K) \subseteq X$  kap-kapalıdır.

(d) Her  $x \in X$  ve  $x \in F^-(V)$  koşulunu sağlayan her  $V \subseteq Y$  regüler açık kümesi ve her  $z \in U$  için  $F(z) \cap V \neq \emptyset$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren  $U$  kap-açık kümesi vardır.

**İspat.** (a)  $\Rightarrow$  (b):  $V \subseteq Y$  regüler açık küme ve  $x \in F^-(V)$  olsun. Hipotezden her  $z \in U_x$  için  $F(z) \cap V \neq \emptyset$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren bir  $U_x$  kapaçık kümesi vardır. O halde  $x \in U_x \subseteq F^-(V)$  olur. Burada  $F^-(V) = \bigcup \{ U_x : x \in U_x \subseteq X \text{ kapaçık} \}$  olduğundan  $F^-(V) \subseteq X$  kümesi kap-açıktır.

(b)  $\Rightarrow$  (c):  $K \subseteq Y$  regüler kapalı küme olsun.  $K^c \subseteq Y$  regüler açık kümedir. Hipotezden  $F^-(K^c) \subseteq X$  kümesi kap-açıktır. Önerme 2.2.4 gereğince  $F^+(K) \subseteq X$  kap-kapalıdır.

(c)  $\Rightarrow$  (d):  $x \in X$  ve  $x \in F^-(V)$  koşulunu sağlayan  $V \subseteq Y$  kümesi regüler açık olsun. (c) den  $F^+(Y-V) = X - F^-(V)$  kap-kapalıdır. Buradan  $F^-(V) \subseteq X$  kap-açık kümedir ve  $x$  noktasını içerir.  $U = F^-(V)$  olsun. O halde her  $z \in U$  için  $F(z) \cap V \neq \emptyset$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren  $U$  kap-açık kümesi vardır.

(d)  $\Rightarrow$  (a): Her kap-açık küme kapaçık kümelerin birleşimi şeklinde olduğundan ispat açıktır.

Aşağıdaki teoremden görüntü kümesinin daralması ve genişlemesi altında çoğul değerli fonksiyonlarda ü.h.h.cl-s.sürekliğin korunması için gerekli koşullar sunulur.

**Teorem 4.3.4.** ( Kohli and Arya, 2011 )  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonu ü.h.h.cl-s.sürekli olsun. O halde,

(a)  $F(X)$ ,  $Y$  uzayında  $\delta$ -gömme ise  $F : X \rightarrow F(X)$  ü.h.h.cl-s.sürekli dir.

(b)  $Z$  uzayındaki her regüler açık kümenin  $Y$  ile kesişimi  $Y$  uzayında bir regüler açık küme olacak şekilde  $Y \subseteq Z$  olsun. Bu durumda her  $x \in X$  noktası için  $G(x) = F(x)$  şeklinde tanımlanan  $G : X \rightarrow Z$  çoğul değerli fonksiyonu ü.h.h.cl-s.sürekli dir.

(c)  $A \subseteq X$  olsun.  $F|_A : A \rightarrow Y$  ü.h.h.cl-s.sürekli dir.

**İspat. (a)**  $G \subseteq F(X)$  regüler açık küme olsun.  $F(X)$ ,  $Y$  uzayında  $\delta$ -gömme olduğundan  $G = G_1 \cap F(X)$  olacak şekilde  $G_1 \subseteq Y$  regüler açık kümesi vardır.  $F$  ü.h.h.cl-s.sürekli olduğundan

$$F^+(G) = F^+(G_1 \cap F(X)) = F^+(G_1) \cap X = F^+(G_1) \subseteq X$$

kümesi kap-açıktır. O halde  $F : X \rightarrow F(X)$  ü.h.h.cl-s.sürekli.

**(b)**  $W \subseteq Z$  regüler açık küme olsun. Hipotezden  $W \cap Y \subseteq Y$  kümesi regüler açıktır.  $F$  ü.h.h.cl-s.sürekli olduğundan  $F^+(W \cap Y) \subseteq X$  kap-açık kümedir.  $G^+(W) = F^+(W \cap Y)$  olduğundan  $G$ , ü.h.h.cl-s.sürekli.

**(c)**  $V \subseteq Y$  regüler açık küme olsun.  $F$  ü.h.h.cl-s.sürekli olduğundan  $F^+(V) \subseteq X$  kümesi kap-açıktır.  $(F|_A)^+(V) = A \cap F^+(V) \subseteq A$  kap-açık kümedir. O halde  $F|_A$  ü.h.h.cl-s.sürekli.

Aşağıdaki teoremden görüntü kümesinin daralması ve genişlemesi altında çoğul değerli fonksiyonlarda a.h.h.cl-s.sürekliğin korunması için gerekli koşullar sunulur.

**Teorem 4.3.5. ( Kohli and Arya, 2011 )**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonu a.h.h.cl-s.sürekli olsun. O halde,

**(a)**  $F(X)$ ,  $Y$  uzayında  $\delta$ -gömme ise  $F : X \rightarrow F(X)$  a.h.h.cl-s.sürekli.

**(b)**  $Z$  uzayındaki her regüler açık kümenin  $Y$  ile kesişimi  $Y$  uzayında bir regüler açık küme olacak şekilde  $Y \subseteq Z$  olsun. Her  $x \in X$  noktası için  $G(x) = F(x)$  şeklinde tanımlanan  $G : X \rightarrow Z$  çoğul değerli fonksiyonu a.h.h.cl-s.sürekli.

**İspat.** Teorem 4.3.4 e benzer şekilde yapılır.

**Teorem 4.3.6. ( Kohli and Arya, 2011 )**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyon ve  $\Lambda = \{ U_\alpha : \alpha \in I \}$  ailesi  $X$  uzayının kap-açık örtüsü olsun. Her  $\alpha \in I$  için  $F|_{U_\alpha}$  ü.h.h.cl-s.sürekli ise  $F$  ü.h.h.cl-s.sürekli.

**İspat.**  $V \subseteq Y$  regüler açık küme olsun.  $F|_{U_\alpha} : U_\alpha \rightarrow Y$  ü.h.h.cl-s.sürekli olduğundan  $(F|_{U_\alpha})^+(V) = U_\alpha \cap F^+(V) \subseteq U_\alpha$  kümesi kap-açıktır.  $U_\alpha \subseteq X$  kap-açık olduğundan  $(F|_{U_\alpha})^+(V) \subseteq X$  kap-açıktır.  $F^+(V) = \bigcup_{\alpha \in I} (U_\alpha \cap F^+(V))$  ve her kap-açık kümenin birleşimi kap-açık olduğundan  $F^+(V) \subseteq X$  kümesi kap-açıktır. O halde  $F$  ü.h.h.cl-s.sürekli.



**Teorem 4.3.7. ( Kohli and Arya, 2011 )**  $X$  bağlantılı uzay ve  $F : X \rightarrow Y$  örten ü.h.h.cl-s.sürekli çoğul değerli fonksiyon olsun. O halde  $Y$  aşırı bağlantılıdır.

**İspat.**  $Y$  uzayının aşırı bağlantılı olmadığını kabul edelim. O halde  $clV \neq Y$  olacak şekilde boştan farklı bir  $V \subseteq Y$  açık kümesi vardır.  $W = int(cl(V)) \subseteq Y$  regüler açıktır ve ayrıca  $W \neq \emptyset$ ,  $W \neq Y$  dir.  $F$  ü.h.h.cl-s.sürekli olduğundan  $F^+(W) \subseteq X$  kümesi kap-açıktır ve  $F^+(W) \neq \emptyset$ ,  $F^+(W) \neq X$  elde edilir.  $F^+(W) = \cup \{G_i : G_i \subseteq X \text{ kapaçık} \}$  olduğundan öyle bir  $G_i \subseteq X$  için  $G_i \neq \emptyset$  ve  $G_i \neq X$  dir. Bu ise Teorem 2.1.10 gereğince  $X$  uzayının bağlantılı olması ile çelişir.

**Teorem 4.3.8. ( Kohli and Arya, 2011 )**  $F, G : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonları ü.h.h.cl-s.sürekli olsun. Her  $x \in X$  noktası için  $(F \cup G)(x) = F(x) \cup G(x)$  şeklinde tanımlanan  $F \cup G : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonu ü.h.h.cl-s.sürekli dir.

**İspat.**  $B \subseteq Y$  regüler açık küme olsun.  $F$  ve  $G$  ü.h.h.cl-s.sürekli olduğundan  $F^+(B)$  ve  $G^+(B)$  kümeleri  $X$  uzayında kap-açıktır.  $(F \cup G)^+(B) = F^+(B) \cap G^+(B)$  ve kap-açık kümelerin sonlu kesişimi kap-açık olduğundan  $(F \cup G)^+(B) \subseteq X$  kümesi kap-açıktır. O halde  $F \cup G$  çoğul değerli fonksiyonu ü.h.h.cl-s.sürekli dir.

**Teorem 4.3.9. ( Kohli and Arya, 2011 )**  $F : X \rightarrow Y$  ü.h.h.cl-s.sürekli çoğul değerli fonksiyon,  $Y$  regüler uzay ve her  $x \in X$  noktası için  $F(x)$  kapalı olsun. O halde  $F$  in  $G_F$  çoğul değerli grafik fonksiyonu  $X$  uzayına göre güçlü kap-kapalıdır.

**İspat.**  $(x, y) \in (X \times Y) \setminus G_F$  alalım. O halde  $y \notin F(x)$  olur.  $F(x)$  kapalı ve  $Y$  regüler uzay olduğundan  $y \in V_y$  ve  $F(x) \subseteq V_{F(x)}$  olacak şekilde  $Y$  içinde ayrık açık  $V_y, V_{F(x)}$  kümeleri vardır.  $V_y$  ve  $V_{F(x)}$  regüler açık küme olarak seçilebilir.  $F$ , ü.h.h.cl-s.sürekli olduğundan  $F(U_x) \subseteq V_{F(x)}$  olacak şekilde  $U_x \subseteq X$  kapaçık kümesi vardır ve  $x$  noktasını içerir.

$$(U_x \times V_y) \cap G_F = \emptyset$$

olduğunu ileri sürelim.  $(U_x \times V_y) \cap G_F \neq \emptyset$  olsun. O halde  $(h, k) \in (U_x \times V_y) \cap G_F$  olacak şekilde bir  $(h, k) \in X \times Y$  vardır.  $h \in F^+(V_{F(x)})$ ,  $k \in V_y$  ve  $k \in F(h)$  olur. Bu durumda  $k \in V_{F(x)}$  ve  $k \in V_y$  elde edilir. Bu ise çelişkidir. Çünkü  $V_{F(x)}$  ve  $V_y$  ayrık kümelerdi. O halde  $G_F$  çoğul değerli grafik fonksiyonu  $X$  uzayına göre güçlü kap-kapalıdır.

**Teorem 4.3.10. ( Kohli and Arya, 2011 )** Her  $x \in X$  noktası için  $F(x)$  hafifçe kompakt olacak şekilde  $F : X \rightarrow Y$  ü.h.h.cl-s.sürekli çoğul değerli fonksiyon olsun.  $A \subseteq X$  hafifçe kompakt küme ise  $F(A)$  hafifçe kompakttır.

**İspat.**  $\Lambda$ ,  $F(A)$  kümesinin kapaçık örtüsü olsun.  $\Lambda$ , her  $a \in A$  için  $F(a)$  kümesinin kapaçık örtüsüdür. Her  $F(a)$  hafifçe kompakt olduğundan

$$F(a) \subseteq \bigcup \{ B : B \in \beta_a \} = V_a$$

olacak şekilde  $\beta_a \subseteq \Lambda$  sonlu vardır. Her kapaçık küme regüler açık olduğundan  $V_a \subseteq Y$  kümesi regüler açıktır.  $F$ , ü.h.h.cl-s.sürekli olduğundan  $F(U_a) \subseteq V_a$  olacak şekilde  $U_a \subseteq X$  kümesi kapaçıktır ve  $a$  noktasını içerir.  $\{ U_a : a \in A \}$  ailesi  $A$  kümesinin kapaçık örtüsüdür.  $A$  hafifçe kompakt olduğundan  $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{a_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^n F^+(V_{a_i})$  olacak şekilde  $A$  kümesinin sonlu sayıda  $a_1, a_2, \dots, a_n$  noktaları vardır. O halde

$$F(A) \subseteq F(\bigcup_{i=1}^n F^+(V_{a_i})) = \bigcup_{i=1}^n F(F^+(V_{a_i})) \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{a_i}$$

olur. Burada her  $\beta_{a_i}$  sonlu ve  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $V_{a_i} = \bigcup \{ B : B \in \beta_{a_i} \}$  olduğundan  $F(A)$  hafifçe kompakttır.

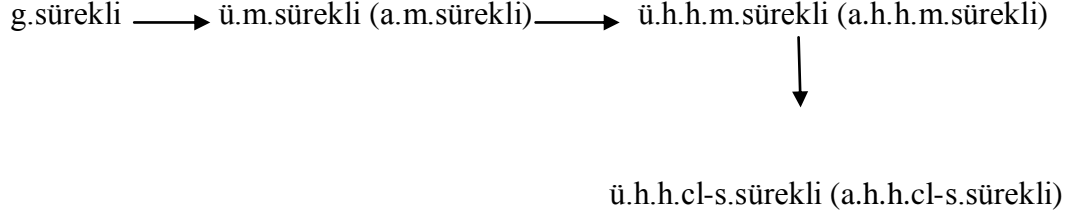
**Teorem 4.3.11. ( Kohli and Arya, 2011 )**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyon olsun.  $F$  in çoğul değerli grafik fonksiyonu  $G_F$  ü.h.h.cl-s.sürekli ise  $F$  ü.h.h.cl-s.sürekli ve  $X$  uzayı hemen hemen sıfır boyutlu uzaydır.

**İspat.**  $V \subseteq Y$  regüler açık küme olsun.  $X \times V \subseteq X \times Y$  regüler açıktır.  $G_F$  ü.h.h.cl-s.sürekli olduğundan  $G_F^+(X \times V) = \{ x \in X : \{x\} \times F(x) \subseteq X \times V \} = \{ x \in X : F(x) \subseteq V \} = F^+(V)$  kümesi kap-açıktır. O halde  $F$  ü.h.h.cl-s.sürekli.

$X$  uzayının hemen hemen sıfır boyutlu olduğunu gösterelim:

$x \in X$  ve  $x$  noktasını içeren  $U \subseteq X$  kümesi regüler açık olsun.  $U \times Y \subseteq X \times Y$  regüler açıktır ve  $G_F(x)$  i içerir.  $G_F$  ü.h.h.cl-s.sürekli olduğundan  $G_F(W) \subseteq U \times Y$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren  $W \subseteq X$  kapaçık kümesi vardır.  $W \subseteq U$  olacak şekilde  $x$  noktasını içeren  $W$  kapaçık kümesi var ise  $X$  hemen hemen sıfır boyutlu uzaydır.

Güçlü sürekli, mükemmel sürekli, hemen hemen mükemmel sürekli ve hemen hemen cl-süpersürekli çoğul değerli fonksiyonlar arasındaki geçişler aşağıdaki şekil ile gösterilmiştir.



( Şekil 4.3.1 Dördüncü bölümdeki süreklilikler arasındaki ilişkiler )

Aşağıdaki örnekler şekil 4.3.1 deki gerektirmelerin tersinin her zaman doğru olmadığını göstermektedir.

**Örnek 4.3.12.** ( Akdağ, 2007 )  $X = \{a,b,c\}$  ve  $X$  üzerindeki topoloji  $\tau = \{ \emptyset, X, \{a\}, \{b,c\} \}$  olsun.  $F : X \rightarrow X$  çoğul değerli fonksiyonu, her  $x \in X$  noktası için  $F(x) = \{x\}$  şeklinde tanımlansın.

$F$  ü.m.sürekli ( a.m.sürekli ) dir. Çünkü,  $X$  uzayındaki  $\emptyset, X, \{a\}, \{b,c\}$  açık kümeleri için  $F^+(\emptyset) = \emptyset, F^+(X) = X, F^+(\{a\}) = \{a\}, F^+(\{b,c\}) = \{b,c\}$  kümeleri  $X$  uzayında kapaçiktir. Benzer şekilde a.m.süreklilik için de sağlanır.

Fakat g.sürekli değildir. Çünkü  $\{b\} \subseteq Y$  için  $F^+(\{b\}) = \{b\}$  kapaçık küme değildir.

**Örnek 4.3.13.** ( Kohli and Arya, 2010 )  $X = \{a,b,c\}$  ve  $X$  üzerindeki topoloji  $\tau = \{ \emptyset, X, \{a\} \}$ ,  $Y = \{1,2,3\}$  ve  $Y$  üzerindeki topoloji  $\sigma = \{ \emptyset, Y, \{1\} \}$  olsun.  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonu,  $F(a) = \{1,2\}, F(b) = \{1\}, F(c) = \{2,3\}$  şeklinde tanımlansın.

$F$  ü.h.h.m.sürekli ( a.h.h.m.sürekli ) dir. Çünkü,  $Y$  uzayındaki  $\emptyset$  ve  $Y$  regüler açık kümeleri için  $F^+(\emptyset) = \emptyset$  ve  $F^+(Y) = X$  kümeleri kapaçiktir. Benzer şekilde a.h.h.m.süreklilik için de sağlanır.

Fakat  $F$  ü.m.sürekli ( a.m.sürekli ) değildir. Çünkü  $\{1\} \subseteq Y$  açık kümesi için  $F^+(\{1\}) = \{b\}$  kapaçık küme değildir (  $F^-(\{1\}) = \{a,b\}$  kapaçık değildir. )

**Örnek 4.3.14.**  $X = \mathbb{R}$  ve  $X$  üzerinde alt limit topolojisi tanımlansın.  $Y = \{a,b,c\}$  ve  $Y$  üzerindeki topoloji  $\sigma = \{ \emptyset, Y, \{a\}, \{b\}, \{a,b\} \}$  olsun.  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonu,

$$F(x) = \begin{cases} \{a\}, & x \in (1,2) \\ \{b\}, & x \in [2,3) \\ \{a,c\}, & x \in \mathbb{R} - (1,3) \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$F$  ü.h.h.cl-s.sürekli. Çünkü,  $Y$  uzayındaki  $\emptyset, Y, \{a\}, \{b\}$  regüler açık kümeleri için  $F^+(\emptyset) = \emptyset, F^+(Y) = X, F^+(\{a\}) = (1,2)$  ve  $F^+(\{b\}) = [2,3)$  kap-açıktır.

Fakat  $F$  ü.h.h.m.sürekli değildir. Çünkü,  $Y$  uzayındaki  $\{a\} \subseteq Y$  regüler açık kümesi için  $F^+(\{a\}) = (1,2)$  kapaçık değildir.

Her g.sürekli çoğul değerli fonksiyon ü.m.sürekli ( a.m.sürekli ) çoğul değerli fonksiyondur. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Aşağıdaki teoremden ek koşul konularak tersinin de doğru olabileceği gösterilmiştir.

**Teorem 4.3.15.**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyon olsun ve  $Y$  üzerinde discrete topoloji tanımlansın.  $F$  ü.m.sürekli ( a.m.sürekli ) ise  $F$  g.sürekli.

**İspat.**  $V \subseteq Y$  olsun.  $Y$  üzerindeki topoloji discrete topoloji olduğundan  $V \subseteq Y$  kümesi açıktır.  $F$  ü.m.sürekli ( a.m.sürekli ) olduğundan  $F^+(V) \subseteq X$  (  $F^-(V) \subseteq X$  ) kapaçık kümedir.

Her ü.m.sürekli ( a.m.sürekli ) çoğul değerli fonksiyon ü.h.h.m.sürekli ( a.h.h.m.sürekli ) çoğul değerli fonksiyondur. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Aşağıdaki teoremden ek koşul konularak tersinin de doğru olabileceği gösterilmiştir.

**Teorem 4.3.16.**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonu ü.h.h.m.sürekli ( a.h.h.m.sürekli ) olsun.  $Y$  uzayı ayrışım topolojisine sahip ise  $F$  ü.m.sürekli ( a.m.sürekli ) dir.

**İspat.**  $V \subseteq Y$  açık olsun.  $Y$  ayrışım topolojisine sahip olduğundan  $V \subseteq Y$  regüler açıktır.  $F$  ü.h.h.m.sürekli ( a.h.h.m.sürekli ) ise  $F^+(V) \subseteq X$  (  $F^-(V) \subseteq X$  ) kapaçık.

Aşağıdaki teoremler şekil 3.4.1 ile şekil 4.3.1 deki süreklilikler arasındaki ilişkileri göstermektedir.

**Teorem 4.3.17.** Her  $g$  sürekliliği çoğul değerli fonksiyon  $u$ .na-sürekliliği (  $a$ .na-sürekliliği ) dir.

**İspat.** Açıktır.

Aşağıdaki örnek Teorem 4.3.17 nin tersinin doğru olmadığını göstermektedir.

**Örnek 4.3.18.** ( Yuksel vd., 2011b )  $X = \{0,1\}$  ve  $X$  üzerindeki topoloji  $\tau = \{ \emptyset, X \}$  olsun.  $Y = (0,1]$  ve  $Y$  üzerinde doğal topoloji tanımlansın.  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonu,

$$F(x) = \begin{cases} Y, & x = 0 \\ \{1\}, & x = 1 \end{cases}$$

olarak tanımlansın.  $F$   $u$ .na-sürekliliği fakat  $g$ .sürekliliği değildir. Çünkü  $\{1\} \subseteq Y$  için  $F^+(\{1\}) = \{1\}$  kapaçık küme değildir.

**Teorem 4.3.19.** Her  $g$ .sürekliliği çoğul değerli fonksiyon  $u$ .y.g.na-sürekliliği (  $a$ .y.g.na-sürekliliği ) çoğul değerli fonksiyondur.

**İspat.**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonu  $g$ .sürekliliği ve  $V \subseteq Y$  kümesi yarı-açık olsun.  $F$   $g$ .sürekliliği olduğundan  $F^+(V) \subseteq X$  (  $F^-(V) \subseteq X$  ) kapaçık kümedir. O halde  $F^+(V) \subseteq X$  (  $F^-(V) \subseteq X$  ) kümesi  $\delta$ -açıktır.

**Teorem 4.3.20.** Her  $g$ .sürekliliği çoğul değerli fonksiyon  $u$ .ön.g.na-sürekliliği (  $a$ .ön.g.na-sürekliliği ) çoğul değerli fonksiyondur.

**İspat.** Teorem 4.3.19 a benzer şekilde ispatlanır.

**Teorem 4.3.21.** Her  $u$ .m.sürekliliği (  $a$ .m.sürekliliği ) çoğul değerli fonksiyon  $u$ .z.na-sürekliliği (  $a$ .z.na-sürekliliği ) çoğul değerli fonksiyondur.

**İspat.**  $F : X \rightarrow Y$  çoğul değerli fonksiyonu  $u$ .m.sürekliliği (  $a$ .m.sürekliliği ) ve  $V \subseteq Y$  kümesi  $\delta$ -açık olsun. O halde  $V \subseteq Y$  kümesi açıktır.  $F$   $u$ .m.sürekliliği (  $a$ .m.sürekliliği ) olduğundan  $F^+(V) \subseteq X$  (  $F^-(V) \subseteq X$  ) kapaçıktır. Bu durumda  $F^+(V) \subseteq X$  (  $F^-(V) \subseteq X$  )  $\alpha$ -açıktır.



## 5.SONUÇ

Çoğul değerli fonksiyonlarla ilgili çalışmalara 20. yüzyılın ilk yarısında başlanmış ve daha sonra da çeşitli süreklilik türleri incelenmiştir.

Biz de bu tezdeki çalışmalarımızı, Şaziye Yüksel, Tuğba Han Şimşekler ve B.Kut un 2011 yılında yayınlanan “ Upper and Lower Na-continuous Multifunctions ” adlı makalesi ile J.K.Kohli ve C.P.Arya nın 2011 yılında yayınlanan “ Upper and Lower Almost CI-supercontinuous Multifunctions ” adlı makalesini baz alarak yaptık. Çoğul değerli fonksiyonlarda çeşitli süreklilik türlerini tanıtip, sağladıkları özellikleri gösterdik. Ayrıca bu süreklilik türleri arasındaki ilişkileri inceledik ve konunun daha iyi anlaşılması için karşıt örneklere yer verdik.





## KAYNAKLAR DİZİNİ

- Abd El-Monsef, M.E., El-Deeb, S.N. and Mahmoud, R.A.**, 1983,  $\beta$ -open sets and  $\beta$ -continuous mappings, Bull Fac. Sci. Assuit Univ., 12(1):77-90 p.
- Ajmal, N. and Kohli, J.K.**, 1992, Properties of hyperconnected spaces, their mappings into hausdorff spaces and embeddings into hyperconnected spaces, Acta Math. Hungar., 60(1-2):41-49 p.
- Akdağ, M.**, 2007, Weak and strong forms of continuity of multifunctions, Chaos Solitons Fractals, 32:1337-1344 p.
- Berge, C.**, 1959, Escapes topologiques fonctions multivoques, Paris, Dunod.
- Bourbaki, N.**, 1966, Elements of Mathematics. General Topology. Part 1, Hermann, Paris, France.
- Bridland, T.F.**, 1970, Trajectory integrals of set valued functions, Pasific. J. Math., 33:43-67 p.
- Chae, G.U. and Noiri, T.**, 1986, Weakly completely continuous functions, Univ. Ulsan Rep., 17:121-125 p.
- Chae, G.U., Noiri, T. and Lee, D.W.**, 1986, On na-continuous functions, Kyungpook Math. J., 26(1):73-79 p.
- Crossley, S.G. and Hildebrand, S.K.**, 1971, Semi-closure, Texas J Sci., 22:99-112 p.
- Dontchev, J.**, 1998, Survey on preopen sets, in Proceedings of the Yatsushiro Topological Conference, Yatsushiro, Japan, 1-18 p.
- Dontchev, J., Ganster M. and Reilly, I.**, 1999, More on almost s-continuity, Indian J. Math., 41:139-146 p.
- Dorsett, C.**, 1981, Semi converge and semi compactness, Indian J. Math. Mech., 19:11-17 p.
- Ekici, E.**, 2005, Generalizations of perfectly continuous, regular set connected and clopen functions, Acta Math. Hungar., 107(3):193-205 p.
- El-Deeb, S.N., Hasanein, I.A., Mashhour, A.S. and Noiri, T.**, 1983, On p-regular spaces, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumania, 27(75):311-315 p.
- Foran, J. and Liebnitz, P.**, 1991, A characterization of almost resolvable spaces, Rend. Circ. Mat. Palermo, (2), 40(1):136-141 p.

**KAYNAKLAR DİZİNİ ( devam )**

- Ganster, M.**, 1987, Preopen sets and resolvable spaces, Kyungpook Mathematical Journal, 27(2):135-143 p.
- Ganster, M., Jafari, S. and Navalagi, G.B.**, 2002, On semi-g-regular and semi-g-normal spaces, Demonstratio Math., 35(2):415-421 p.
- Gillman, L. and Jerison, M.**, 1960, Rings of continuous function, D. Van Nostrand Company, New York.
- Hola, L.**, 1988, Remarks on almost continuous multifunctions, Math. Slovaca, 38:325-331 p.
- Jacobs, M.Q.**, 1968, Measurable multi-valued mappings and Lusin's theo, Trans. Amer. Math. Soc., 143:471-481 p.
- Kohli, J.K.**, Localization of topological properties and certain generalizations of zero dimensionality, preprint.
- Kohli, J.K. and Arya, C.P.**, 2010, Strongly and perfectly continuous multifunctions, Sci Stud. Res. Ser. Math. Inform., 20(1):103-117 p.
- Kohli, J.K. and Arya, C.P.**, 2011, Upper and lower almost cl-supercontinuous multifunctions, Demonstratio Mathematica, (44)2:407-421 p.
- Kohli, J.K. and Arya, C.P.**, Upper and lower ( almost ) completely continuous multifunctions, ( preprint ).
- Kohli, J.K. and Singh, D.**, 2009a, Almost cl-supercontinuous functions, Applied General Topology, 10(1):1-12 p.
- Kohli, J.K. and Singh, D.**, 2009b,  $\delta$  -perfectly continuous functions, Demonstratio Math., 42:221-231 p.
- Levine, N.**, 1960, Strong continuity in topological spaces, Amer Math. Monthly, 67:269.
- Levine, N.**, 1963, Semi-open sets and semi continuity in topological spaces, Amer. Monthly, 70:36-41 p.
- Maheswari, S.N. and Thakur, SS.**, 1985, On  $\alpha$ -compact spaces, Bull. Inst. Sinica, 13:341-347 p.
- Mahmoud, R.A., Abd El Monsef, M.E. and Nasef, A.A.**, 1989, Functions near of na-continuity, Quatar Univ. Sci. Bull., 9:17-25 p.

**KAYNAKLAR DİZİNİ ( devam )**

- Mashhour, A.S., Abd El-Monsef, M.E. and El-Deeb, S.N.**, 1982, On precontinuous and weak precontinuous mappings, Proc. Math. Phys. Soc., Egypt, 53:47-53 p.
- Mashhour, A.S., Hasanein I.A. and El Deeb S.N.**, 1983,  $\alpha$ -continuous and  $\alpha$ -open mappings, Acta Mathematica Hungarica, 41:213-218
- Mashhour, A.S., Abd El Monsef, M.E., Hasanein, I.A. and Noiri, T.**, 1984, Strongly compact spaces, Delta J. Sci., 8(1):30-46 p.
- Munkres, J.P.**, 1975, Topology a First Course Prentice Hall.
- Nasef, A.A.**, 2001, Strongly na-precontinuous functions, Indian J. Pure. Appl. Math., 32(10):1495-1500 p.
- Navalagi, G.B.**, 2009,  $\alpha$ -neighbourhoods, Pacific-Asian Journal of Mathematics.
- Navalagi, G.B.**, 2010, Pre-US spaces in topology, 3(1-2):91-97 p.
- Nijastad, O.**, 1965, On some classes of nearly open sets, Pacific J. Math., 15:961-970 p.
- Noiri, T.**, 1973, Remarks on semi-open mappings, Bull. Gal. Math Soc., 4(65):197-201 p.
- Noiri, T.**, 1984, Supercontinuity and some strong forms of continuity, Indian J. Pure. Appl. Math., 15(3):241-250 p.
- Noiri, T. and Popa, V.**, 1993, Almost weakly continuous multifunctions, Demonstratio Math., 26(2):363-380 p.
- Saylam, N.**, 2007, Bazı Küme Değerli Fonksiyonlar, Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi, 64 s.
- Singal, M.K. and Mathur, A.**, 1969, On nearly compact spaces, Boll. Unione Mat. Ital., 2(4):702-710 p.
- Singh, D.**, 2007, Cl-supercontinuous functions, Appl. Gen. Topol., 8(2):293-300 p.
- Singh, D.**, 2010, Almost perfectly continuous functions, Quastiones Math., 33:211-221 p.
- Staum, R.**, 1974, The algebra of bounded continuous functions into non archimedean field, Pacific J. Math., 50(1):169-185 p.
- Steen, L.A. and Seebach, J.A.**, 1978, Counter Examples in Topology, Springer, New York.

**KAYNAKLAR DİZİNİ ( devam )**

- Stone, M.H.**, 1937, Applications of the theory of Boolean rings to general topology, T.A.M.S., 41:375-381 p.
- Velicko, N.V.**, 1968, H-closed topological spaces, Amer. Math. Soc. Trans., 78:103-118 p.
- Willard, S.**, 1970, General Topology, Addison-Wesley, London.
- Yuksel, S., Simsekler, T.H. and Kut B.**, 2011a, Upper and lower na continuous multifunctions, Hacet. J. Math. Stat., 40(2):341-348 p.
- Yuksel, S., Simsekler T.H. and Bilik B.**, 2011b, Upper and lower pre-strong na continuous multifunctions, Applied Mathematics and Computation, 218:1142-1146 p.

## ÖZGEÇMİŞ

20.07.1989 yılında Aydın' da doğdu. İlk ve orta öğrenimlerini 1995-2003 yılları arasında Aliğa İlköğretim Okulu' nda okudu. Lise öğrenimine 2003 yılında Alpoğuz Anadolu Lisesi' nde devam eden Merve TAVASLIOĞLU, buradan 2007 yılında mezun oldu. Yine 2007 yılında Öğrenci Seçme Sınavı' nda Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü' nü kazandı ve 2011 yılında mezun oldu. Aynı yıl Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı' nın Topoloji Bilim Dalı' nda yüksek lisansa başladı. Halen öğrenimini burada sürdürmeye devam etmektedir.