T.C.
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ
ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ BİLİM DALI

LİMİT ÖĞRETİMİNDE İKİ FARKLI EĞİTİM DURUMUNUN KARŞILAŞTIRILMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HAZIRLAYAN
HANDAN ÇOLAK

TEZ DANIŞMANLARI
DOÇ.DR. ZİYA ARGÜN
YRD.DOÇ.DR. NURDAN KALAYCI

ANKARA-2002

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Handan ÇOLAK tarafından yapılan "LİMİT ÖĞRETİMİNDE İKİ FARKLI EĞİTİM DURUMUNUN KARŞILAŞTIRILMASI " adlı çalışma Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Şeref MİRASYEDİOĞLU

Üye: Doç. Dr. Ziya ARGÜN

Üye: Doç. Dr. Halil İbrahim YALIN

Üye: Yrd. Doç. Dr. Nurdan KALAYCI

Üye: Yrd. Doç. Dr. Ahmet ARIKAN

Bu tez Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

ÖZET

Bu çalışmada geleneksel yöntemden farklı olarak geliştirilen eğitim durumunun öğrencilerin limit kavramını öğrenmelerine etkisi incelenmiştir. Bu amaçla 2000-2001 öğretim yılında Kanuni Lisesi öğrencilerinden 29'u kontrol, 32'si deney grubu oluşturulmuştur. Deney grubuna yıllık planda limit kavramı için ayrılan sürede geleneksel yöntemden farklı olan eğitim durumu ile limit kavramı anlatılmıştır. Kontrol grubuna ise geleneksel yöntem ile limit kavramı verilmiştir.

Deney sonrası her iki gruba erişi testi uygulanmıştır. Deney ve kontrol grupları erişi puanlarının farklılığını test etmek için çoktan seçmeli sorularda bağımsız t- testi uygulanmıştır. Araştırmada hata payı 0,05 olarak seçilmiştir. Açık uçlu sorularda öğrenciler tarafından verilen cevaplar benzerliklerine göre araştırmacı tarafından gruplandırılarak tablolar oluşturulmuş ve uzman görüşleri ile kabul edilebilen cevaplar belirlenmiştir.

Araştırma sonucunda, geleneksel yöntem ile limit kavramı verildiğinde öğrencilerin "limit" kavramı ile ilgili problemleri çözebildikleri gözlenmiştir. Ancak limitin formal tanımını ve yaptıkları işlemin ne anlama geldiğini bilmedikleri de saptanmıştır. Geleneksel yöntemden farklı olarak geliştirilen eğitim durumu ile limit kavramı verildiğinde ise öğrencilerin kavramlar ile işlemler arasında bağ kurdukları, yaptıkları işlemin ne anlama geldiğini bildikleri, bilgiyi ezbere öğrenmedikleri saptanmıştır.

ABSTRACT

In this study, the effect of a non-traditional educational method (which was developed by researcher) on student's learning of limit concept was investigated.The sample of this study composed of 51 high school students at Kanuni High Scholl in 2000-2001 academic year, that 29 of those enrolled in the experimental group, and 32 of those enrolled in the control group. During the time specified in the regular cirruculum for the limit subject, limit concept was taught via the developed educational methods to the experimental group, on the other hand the traditional limit teaching method was taught to the control group.

After the treatment an achivement test was administered to both groups. The test had both open-ended and multiple choice items. In order to detect the difference between the experimental and control groups' mean scores for multiple choice items, the t-test was conducted with the confidence level of 0,095 . In order to assess open ended questions given in the achivement test. The answers were clasified and tabulated.

The results of this study revealed that the students in the control group were able to solve limit problems and wrote the formal definition of the concept of limit. However, they had been merely aware of the meaning of the procedure that they performed. In contrast, the students in the experimental group were able to make connections between the limit concept and the required procedures. Therefore the results have shown that the experimental group attained the required knowledge without solely memorising and they developed a sense of comprehension about what they performed.

ÖN SÖZ

Matematik öğretiminde kavramların ezber yerine anlamlı bir şekilde öğrenilmesi, yorum yapılabilmesi, diğer kavramlarla ilişkilendirilmesi önemlidir. Birçok araştırmada öğrencilerin rutin problemleri çözebildikleri fakat kavramlarla, işlemleri ilişkilendiremedikleri saptanmıştır.

Bu çalışmada lise 3 müfredatında yer alan limit kavramını öğrenmede ve limit ile ilgili problemlerin çözümünde öğrencilere kavramın özünü hissettirecek, ezbere çözüm yollarının verilmediği ve karışık ifadelerin yer almadığı geleneksel yöntemden farklı bir eğitim durumunun etkililiğine bakılmaya çalışılmıştır. Araştırmanın matematik öğretmenlerine kaynak olacağı düşünülmektedir.

Araştırmanın gerçekleşmesinde yardım ve desteklerini esirgemeyen Gazi Üniversitesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü öğretim üyelerine, personeline ve Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü yöneticileri ve personeline, Cumhuriyet Üniversitesi öğretim üyeleri ve personeline teşekkürlerim sonsuzdur. Elbette benim yetişmemde kuşkusuz birçok kişinin emeği olmuştur. Öncelikle çalışmanın her aşamasında yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen, kendime örnek aldığım sayın hocalarım Doç. Dr. Ziya Argün ve Yrd. Doç. Dr. Nurdan Kalaycı' ya sonsuz teşekkürler. Araştırmanın yazım aşamasında fikirleri ve desteğiyle bana güç veren sayın Arş. Gör. Sevil Büyükalan ve Öğr. Gör. Dr. Necati Cemaloğlu'na teşekkür ederim.

Manevi desteklerinden dolayı Arş.Gör.Şerife (Işık) Terzi, Arş.Gör.Bengü Ergüner Tekinalp, Arş.Gör. Zeynep Cihangir, Arş.Gör. Ümit Sahranç, Arş.Gör. Özlem (Cansüngü) Koray ve Arş.Gör.Orçun Bozkurt'a teşekkür ederim.

Ayrıca araştırmamın ve yüksek lisans öğrenimimin her aşamasında benden desteklerini esirgemeyen annem Hidayet Çolak, babam Mehmet Çolak , abim Hakan Çolak'a teşekkür ederim.

Araştırmanın uygulanmasına izin veren, her türlü kolaylığı sağlayan Kanuni Lisesi müdürüne öğretmenlerine teşekkür ederim.

Handan Çolak

Ankara 2001

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM II

BÖLÜM III

BÖLÜM IV

BÖLÜM V

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

KISALTMALAR LİSTESİ

Σ (n): Toplam Öğrenci Sayısı

n : Öğrenci Sayısı

Akt. : Aktaran

Çev. : Çeviren

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu bölümde " Problem Durumu " , " Problem Cümlesi ", " Alt Problemler ", " Araştırmanın Önemi ", " Varsayımlar ", " Sınırlamalar " ve " Tanımlar " alt başlıkları ele alınmıştır.

1.1 Problem Durumu

Matematiğin nerde doğduğu tam olarak bilinmemesine rağmen, tarihin ilk çağlarından beri insanoğlunun hayatında her zaman matematik vardı. Matematiği günlük hayattan, doğadan soyutlamak olanaksızdır. Her şey matematiksel bir özelliğe sahiptir. Örneğin; insan vücudunun tüm kısımları; insanın boy oranına göre bir orana sahiptir. Aynı şekilde herhangi bir ağacın dalları ve yaprakları, ağacın boyuna göre bir orana sahiptir. Ayrıca matematikteki birçok kavramın insanların merakları ve ihtiyaçları doğrultusunda doğduğu bilinmektedir. Günlük hayatımızda karşılaştığımız birçok olgu ile matematik çift yönlü bir etkileşim içindedir. Yani matematikteki bazı kavramlar çevremizde gördüğümüz nesnelerden, olaylardan doğarken; matematiği kullanarak da çevremizde bir şeyler oluştururuz. Bunun örnekleri ; (Sertöz, 1998; Göker, 1997; Lines, 1997) bir Ayçekirdeğinde saat yönündeki spirallerin sayısı 55, ters yöndekilerin sayısı ise 34 veya 89 iken Kozalakta bu oranın 5'e 8 olmasıdır. Bu sayılar ünlü matematikçi Fibonacci'nin arkadaşının tavşan çiftliğinde, üreme döneminde en az kaç yavru bekleyeceğini hesap ederken bulduğu bir dizinin terimleridir ve matematikte Fibonacci sayıları olarak bilinir. Tersine Sertöz' ün (1998) belirttiği gibi Mimar Sinan minareleri ve kubbeleri inşaa ederken matematik ve geometri bilgisini kullanmıştır. Bu bilgi olmadığı zaman, yüzyıllarca dayanacak bir şaheser değil ancak bir gecekondu yapılabilirdi.

Fizik, kimya, biyoloji, müzik, astronomi, mühendislik, ticaret...vb. matematikten geniş şekilde yararlanmaktadırlar. Leonardo De Vinci'nin de belirttiği gibi " Bir bilim matematiksel olduğu ölçüde etkindir". Gerek fen bilimleri, gerek sosyal bilimler ve gerekse sanatla bu kadar içli dışlı olan ve evrensel bir dil özelliği taşıyan matematiğin öğretimi de önem kazanmaktadır.

Matematik eğitimi almak; birçok olguyu anlamlandırmakla kalmayıp, insanın hayatına disiplin getirmektedir. Aynı zamanda analitik düşünme ve problem çözme becerisi de kazandırmaktadır.

Semerci'nin de (2000) belirttiği gibi düşünme; bir amaç için yapılan araştırma süreci veya kesin olarak bilinmeyen şeylerin ortaya çıkarılma sürecidir ve bireylerin rahat yaşaması, başarılı olması için önemli bir öğedir. Gagné " Eğitimin temel noktasının insanlara düşünmeyi, mantık gücünü kullanmayı, daha iyi problem çözücü olmayı öğretmek" olduğuna inanıyordu (Akt: Jonassen, 2000:63). Düşünme bir problemle başlar, problemin çözümü ise, birey için bir amaca dönüşür ve bu amaç bireyin düşünmesini yönlendirir. Böylece problemle ortaya çıkan düşünme, bir süreci oluşturur (Kalaycı, 2001:2). Bütün öğrenciler için problem çözme kapasitelerini artırma bir amaçtır fakat bu amaca yalnızca müfredat, öğretim ve düşünme bazı amaçlar doğrultusunda bir sıraya konulduğu zaman ulaşılabilir (Petit ve Zawojewski, 1997). Aslında eğitim kurumlarından mezun olan bireyin elde ettikleriyle, karşılaştıkları problemleri çözmeleri, hipotezler kurmaları, model hazırlamaları, verileri yorumlamaları, üst düzey zihinsel süreçleri (analiz, sentez, değerlendirme) kullanmaları beklenmektedir (Büyükkurt, 1990:30).

Geleceğe yapılan en güzel yatırım, insan beynine yapılan yatırımdır. Bu ise ancak insanlığın yaradılışından beri süregelen bir etkinlik alanı olan eğitim ile mümkündür. Bir toplumun devamlılığı ve gelişmesi, toplumu oluşturan her bireyin eğitilmesiyle mümkün olmaktadır. Günlük yaşayış gittikçe karmaşıklaşmakta, buna paralel olarak matematiğe duyulan ihtiyaç artmaktadır. Bu ihtiyaca cevap verebilmek için matematik alanındaki araştırmalar ve buluşlar hızla artmaktadır. Matematikteki bu ilgi artışının sonucundan, okulların programları dolayısıyla matematik eğitimi de etkilenmektedir (Baykul, Sağlamer Tekışık,1984:25). Matematikte temel amaç, insanlarda doğuştan var olan düşünebilme kabiliyetini geliştirmektir. Beklenen amaçlardan biri de, insanda davranış ve doğru düşünme yetenekleri oluşturmaktır. Bunları sağlayacak en önemli araç ise matematiğin eğitimidir (Göker; 1997:23).

Fakat matematiğin dayandığı temel dinamiklerin verimli biçimde anlaşılabilmesi ve kullanılabilmesi, diğer bir deyişle bu dinamiklere bağlı bilgi üretilmesi için karşı karşıya olduğumuz en önemli darboğaz, kavramların arkasındaki sıkıntılardır. Ülkemizde matematiksel kavramlarla düşüncemizi ifade edip bunları amaçlarımız doğrultusunda işleyip sonuç çıkarmak yerine, genelde problem çözümleri üzerine bir eğilim vardır. Maalesef her kademedeki matematik derslerinin büyük bir kısmı bu doğrultuda işlenmekte ve öğretilmektedir. Bunun sonucu olarak matematik, yalnız kendi içinde problem çözme aracı olarak toplumdaki yerini almıştır. Bu temel problemin aşılması için işlem ve kavram boyutlarına birlikte etkinliklerle yaklaşılması sonucunda matematik derslerinin ülke düzeyinde beklenen sonuçların alınması kolaylaşacaktır (Mirasyedioğlu, 1998:5). Akdağ (1993) tarafından yapılan "Matematik ve Fen Bilimleri Öğretiminde Karşılaşılan Sorunlar " adlı çalışmasında; öğretmenlerin derslerin daha çok "ansiklopedik ve ezbere dayalı bilgiler" içerdiğini düşündükleri ve öğrencilerinde bu görüşe sahip oldukları saptanmıştır. Akdağ sınıf düzeyi yükseldikçe derslerin bu özelliğinin arttığını ve sonuçta ezbere dayalı bir öğretim ortaya çıktığını ileri sürmüştür.

Gerçekten matematik dersini ilkokulda eğlenceli bulan öğrencilerden birçoğu ilkokuldan sonraki yıllarda bu dersi sıkıcı bulmaya başladığı, birçok araştırma tarafından ortaya konulmuştur. Pırıe ve Martın (1997), "Denklem, Tüm Denklem Fakat Denklem Hiçbir Şey; Lineer Denklemleri Öğretmeye Bir Yaklaşım " adlı araştırmasında lineer denklemler inşaa edilirken en çok kullanılan metodu " Bir Terazi Olarak Denklem" başlığı altında almışlardır. Bu metotta eşitlik işareti (=) öğrencilere terazinin ekseni olarak anlatılır ve terazinin dengede kalabilmesi için kefenin birine konulması gerekli olan bir nesne veya ağırlık öğrencilere buldurulmaya çalışılır. Bu yolla denklem kurma ve denklem çözme öğretilir. Pırıe ve Martın; artık bu terazilerin kullanılmadığına dikkat çekmişlerdir. Öğrenciler belki terazi denilince marketlerde karşılaştıkları elektronik terazileri anımsayacak ve öğretmen denklemi kurarken öğrenci bu sırada terazinin ne olduğunu anlamaya uğraşacaktır. Doğal olarak öğrenci bu konuyu anlamayacaktır. Programda yer alan bir konuya bunun gibi bir yaklaşım tarzı da matematik alanında arzu edilen başarıyı ve gelişmeyi engelleyebilir. Dolayısıyla öğrenciler matematikten uzaklaşabilir. Bu nedenle öğrencilerin nasıl düşündüğünü anlamak ve onların düşünceleri ile bağdaşan eğitim geliştirmek zorundayız.

Bugün çoğu öğretmen matematikteki başarıyı formülleri, kural ve yöntemleri anında, uygun bir şekilde kullanabilme olarak görmekte, formülü veya hesaplamayı doğru icra edebilmeyi yeterli bulmaktadır (Baki, 1996). Matematiksel durumlarda öğrencilerin durumlarını ifade etmek istediğimiz zaman doğal eğilimimiz öğrencilerin kesirler, fonksiyonlar, süreklilik veya ikizkenar üçgenler hakkındaki fikirlerini tanımlamak, diğer muhtemel durumlara aldırış etmemektir (Vinner, 1997). Fakat bir öğrenciyi belli problemleri çözebilecek şekilde donatmak, hayatta başarılı olacak şekilde eğitmek, yalnızca onun formülleri bilmesine, hesaplamaları doğru yapmasına değil, matematiksel anlayışının ve matematiksel düşünmesinin gelişmesine bağlıdır.

Matematiğin dayandığı temel kavramların anlaşılması ve kullanılabilmesi yani bu kavramlara bağlı bilgi üretilmesi çağdaş eğitim sistemimizin temel hedeflerinden birisidir. Bu yaklaşım ile matematikteki temel kavramlar ve işlemler ezber yerine, matematiksel düşünme alışkanlıklarının gelişmesine imkan sağlayacak şekilde öğretilmelidir. Başka bir ifadeyle matematik öğretiminin çocuklar için birtakım gerçeklerin ezberlenmesi şeklinde değil, bir çeşit düşünme yöntemi olarak görülmesi ve bu yöntemin onların dünyayı algılama çabalarına ışık tutucu nitelikte olması gerekir. Aksi takdirde öğrenilen bilgi zihinde uzun süre muhafaza edilemez ve yeni kavramlar öğrencinin bilişsel yapısındaki yerine tam olarak yerleşemez. Anlamlı öğrenme ancak yeni öğrenilen kavramlarla önceden öğrenilenler arasında bağlantı kurulduğu zaman gerçekleşebilir. Anlamlı şekilde öğrenilen bilgiyi Senemoğlu (1998) anlamsız olarak öğrenilen bilgiden daha kolay geri getirilebilir, daha kalıcı ve genellenebilir özelliğe sahip olarak ifade etmiştir. Dolayısıyla bilgi anlamlı şekilde öğrenilirse; ezbere alınan, gerçek anlamda hiçbir zaman öğrenilmeyen bir "yığın "olma işlevinden kurtulur.

Türkiye'de olduğu gibi Amerika Birleşik Devletleri'nde de matematik eğitimi üzerine taşınan kaygılar bu alanda 1989'dan beri bu yana politika ve uygulama alanında bütün düzeyleri kapsayan geniş çaplı bir reform hareketinin başlamasına neden olmuştur. Bu reform hareketi matematik öğretimi ile ilgili olarak matematiksel içerikte, öğretim tekniklerinde ve öğrenme anlayışında değişiklikler önermek suretiyle, okullardaki matematik öğretiminin kalitesini artırmayı hedeflemiştir (Çakıroğlu,1999).

Bu nedenle insan yaşamında önemli bilim dallarından biri olan matematiğin istenilen nitelikte öğrenilmesi için nitelikli bir öğretim programının hazırlanması ve alanda meydana gelen yenilikler ışığında amaçların belirlenmesi gerekmektedir.

Eğitimde amaçlar, öğretimi yönlendirmesi, öğrenme-öğretme işleminin ortaya konmasını ve ölçmelere kılavuzluk etmesi açısından gerekli görülmektedir. Amaçlar öğrenciye kazandırılmak üzere seçilen özelliklerdir. Diğer bir anlatımla yetiştirilecek bireyde bulunması uygun görülen, eğitim yoluyla kazandırılabilir istendik özelliklerdir. Bu özellikler bilgiler, tutumlar, ilgiler, alışkanlıklar ...vb. olabilir (Demirel, 1999:147-148).

Amaçların aşamalı olarak sınıflandırılması üç alanda yapılmıştır. Bunlar Bilişsel alan, Duyuşsal alan ve Psikomotor (Devinişsel) alan. Amaçlar basitten karmaşığa, kolaydan zora doğru bir sıralama göstermektedir. Bu amaçlar şu şekildedir.

A.Eğitim Hedeflerinin Taksonomisi

Derslerin hedeflerinin özel olarak saptanması yanında tüm dersler için geçerli olabilecek hedeflerin sınıflamaları vardır. Bu sınıflamaların kabul görenlerinden biri Bloom ve arkadaşlarının 1950'lerde yaptığı, Bloom Taksonomisi adıyla bilinen aşamalı sınıflamadır.

Bloom ve arkadaşları bu sınıflandırmayı öğrencinin bir dersten başarılı olabilmek için gerek ve yeter şartlı faaliyetlerin neler olması gerektiğini tespit etmek amacıyla yapmışlardı. Sonradan her ders ve öğrenme ünitesine yoğunlaştırılarak geniş bir kullanım alanı çıkmıştır (Çelik, 2000:57). Bu sınıflandırma dereceli bir yapıya sahiptir. Karmaşık (daha üst) seviyelerde etkili olarak çalışmak için öğrenci ilk önce en basit ve en düşük zihinsel süreçlerin üstesinden gelmelidir (Bedwell, Hunt, Touzel, Wiseman,1991:46). Bloom taksonomisi tüm derslerin hedeflerini kapsayacak şekilde düzenlemiştir. Bu sınıflama genel alanlar itibari ile üç bölüme ayrılır.

1.Bilişsel Alan : Bu alanın davranışları bilgilerle ve zihin yetenekleri ile ilgilidir. Bloom ve arkadaşları bilişsel öğrenmeleri kendi içerisinde altı ana basamağa ayırmışlardır.

2.Duyuşsal Alan : Bu alanın davranışları insanın geliştirdiği duygu ve değerlerle ilgilidir. Bloom ve arkadaşları duyuşsal öğrenmeleri kendi içerisinde beş ana basamağa ayırmışlardır.

3.Devinişsel (Psikomotor) Alan: Bu alan kas ve zihin koordinasyonu gerektiren becerilerle ilgilidir. Bloom ve arkadaşları devinişsel öğrenmeleri kendi içerisinde yedi basamağa ayırmışlardır.

Bu alan ve alt başlıkları şöyledir;

BİLİŞSEL DAVRANIŞLAR

1.00 Bilgi

1.10 Bir alana özgü bilgiler

1.11 Terimler bilgisi

1.12 Olgular bilgisi

1.20 Bir alana özgü bilgilerle uğraşmanın araç ve yolları

1.21 Alışılar(teamül) bilgisi

1.22 Yönelim, sıra ve diziler bilgisi

1.23 Sınıflamalar bilgisi

1.24 Ölçütler bilgisi

1.25 Yöntemler bilgisi

1.30 Bir alandaki evrensel öğelerin ve soyutlamaların bilgisi

1.31 İlke ve genellemeler bilgisi

1.32 Kuram ve yapılar bilgisi

2.00 Kavrama

2.10 Çevirme (Tercüme)

2.20 Yorumlama (Tefsir)

2.30 Öteleme

3.00 Uygulama

4.00 Analiz

4.10 Öğelere dönük analiz

4.20 İlişkilere dönük analiz

4.30 Örgütleme ilkelerine dönük analiz

5.00 Sentez

5.10 Özdeşsiz bir iletişim muhtevası meydana getirme

5.20 Bir plan yada işlemler takımı önerisi meydana getirme

5.30 Bir soyut ilişkiler takımı meydana getirme

6.00 Değerlendirme

6.10 İç ölçütlerle değer yargısına varma

6.11 Dış ölçütlerle değer yargısına varma

DUYUŞSAL ALANLAR

1.0 Alma

1.10 Farkında olma

1.20 Almaya açıklık

1.30 Seçici dikkat

2.0 Algıya karşılık verme (Tepkide bulunma)

2.10 Uysallık

2.20 İsteklilik

2.30 Doyum

3.0 Değerler verme

3.10 Bir değeri kabullenme

3.20 Bir değere düşkünlük

3.30 Bir değere adanma

4.0 Değerde örgütlenme

4.10 Bir değerin kavramsallaştırılması

4.20 Bir değerler sistemi örgütleme

5.0 Değerler bütünüyle nitelenmişlik

5.10 Değerleri yaşantıya sokma

5.20 Değerleri karakter haline getirme

DEVİNİŞSEL (PSİKO-MOTOR) DAVRANIŞLAR

1.00 Uyarılma

1.10 Duyuşsal uyarılma

1.11 İşitme ile uyarılma

1.12 Görme ile uyarılma

1.13 Dokunma ile uyarılma

1.14 Tutma ile uyarılma

1.15 Koklama ile uyarılma

1.16 Devrimsel duyu ile uyarılma

1.20 İşaret seçme

1.30 Çevirme

2.00 Kuruluş

2.10 Zihinsel kuruluş

2.20 Bedensel kuruluş

2.30 Duygusal kuruluş

3.00 Kılavuzlanmış faaliyet

3.10 Taklit

3.20 Deneme-yanılma

4.00 Duruma uydurma

5.00 Karmaşık-dışa vuruş faaliyet

5.10 Kararsızlığın giderilmesi

5.20 Otomatik icra

6.00 Uyum

7.00 Yaratma

Altun'a (1998) göre kazanılması hedeflenen davranışlar matematik dersinde çoğunlukla Bilişsel alana girer. İlköğretim Matematik derslerindeki davranışların büyük çoğunluğu bilişsel alanın Bilgi, Kavrama, Uygulama basamaklarında yer alır. Bu nedenle bu çalışmada Duyuşsal ve Psikomotor (Devinişsel) alana girmeden Bilişsel alanın alt başlıkları üzerinde durulacaktır.

Bilgi düzeyinde bir davranış, ezber öğrenmeyi içerir ve olgular, ilkeler ve terimlerin hatırlanmasını gerektirir (Yalın, 2000:24; Özdemir ve Yalın, 2000:11). Bilgi düzeyinde bir davranış Çelik'e (2000) göre tanımlama, adlandırma, tarif teme, listeleme, eşleştirme, seçme, sıralama fiilleri ile biterken, hatırlanması istenenler tanım, kavram, metot, genelleme ve teori olurken, alınan öğrenme çıktıları ise öğrencilerin ezberleyerek öğrendikleri ve karşılaştıklarında hatırlayacakları olguları, terimleri, kavramları, prensip ve genellemeleri sıralama becerilerini, teknik ve yöntem bilgilerini kapsamaktadır. Matematikte bir kavramı tanımlamak, bilgi düzeyinde kazanılmış bir öğrenci davranışıdır.

Kavrama düzeyinde, öğrenciden önceden öğrendiklerini, yeni bir düzenlemeyle sunması istenir (Yalın, 2000:24; Özdemir ve Yalın, 2000:11). Bir kavramı kendi kelimeleri kullanarak tanımlama, özetleme, o kavramla ilgili herhangi bir örnek verme, öğrenilen ilkelerin nedenlerini belirtme kavrama düzeyinde kazanılmış bir öğrenci davranışlarıdır.

Bir bilginin hatırlanması onun bilindiği anlamına gelir. Ancak bu hatırlama ezberlemek suretiyle de olabilir, kavramak suretiyle de. İşte kavrama basamağı bir kimseyi ezberlemiş olan bir kimseden ayıran davranışlardan oluşur. Kavrama basamağındaki öğrencinin, bilgi basamağında elde ettiği bilgileri, anlamını bozmadan başka bir biçimde ifade etmesi, anlamını açıklaması, yorumlaması, bu yoruma dayanarak gelecekteki durumları kestirmesi gereklidir. Matematik dersinde kavrama basamağı çok önem taşımaktadır. Çağdaş eğitim sistemini geleneksel eğitimden ayıran hususlardan biri de "kavrama" ya önem vermesidir (Altun,1998:29). Bir sorunun kavrama düzeyinde bir davranışı ölçmesi için çevirme, yorumlama özelliklerinden birine sahip olmalıdır.

Çevirmeden; elde edilen bilginin farklı bir biçime çevrilmesi anlaşılır. Bacanlı' ya (1999) göre bilinen kavram veya mesaj farklı kelimelerle ifade edilir veya bir sembol türünden diğerine değiştirilir. Altun'a (1998) göre bu, grafikle verilen bir bilginin sayıya veya söze dökülmesi, sözel olarak anlatılan bilginin formüle edilmesi ya da grafikle gösterilmesi, sözel bilginin simgelerle anlatılması gibidir. Öğrencinin ezberlediği bilgiyi çevirme şansı yoktur, çevirebilmesi için anlaması (kavraması) gereklidir.

Yorumlamadan, bilgideki anlamın daha anlaşılır duruma getirilmesi yani açıklanması kastedilmektedir. Yorumlama ile genellemenin neden ve niçinleri ortaya konur.

Uygulama düzeyindeki davranışlar, daha önceden öğrenilen kuramsal ifadeler ve genellemelerin(olgular, kavramlar,ilkeler,kurallar, kuramlar, vs.) yeni durumlarda kullanılması ile ilişkilidir (Yalın, 2000: 24; Özdemir ve Yalın, 2000:11). Uygulama, öğrenilen bilginin, elde edilen becerilerin karşılaşılan yeni bir problemi çözmede kullanılmasıdır. Bu durum bilginin kavranmış olmasını da gerektirir. Bu yüzden uygulama düzeyindeki bir davranış, bilgi ve kavrama düzeyleri hakkında da bir fikir verir (Altun, 1998:30). Matematikte bir problemi çözmek uygulama düzeyinde kazanılmış bir öğrenci davranışıdır. Çelik'e (2000) göre trigonometrik kuralları pratikte kullanabilme uygulama düzeyinde bir davranıştır.

Analiz; bir problem yada sistemin yapısını tanıma; buradaki öğelerin arasındaki ilişkileri belirleme ve kuram, ilke ve genellemeleri tanıma gibi davranışlar içerir.

Sentez, fikir yada öğeleri belli ilişki ve kurallara göre birleştirip yeni bir bütün oluşturma yeteneğidir. Bu düzeyde öğrencinin belli bir problemle ilgili öğeleri düzenlemesi, bir problem durumu ile ilgili bir çözüm önermesi, farklı kaynaklardan kendine özgü bir ürün geliştirmesi davranışlarını kapsar (Yalın, 2000:24; Özdemir ve Yalın, 2000:11).

Değerlendirme, belirli bir iş, metot, çözüm yada ürünün değeri hakkında belirli ölçütler kullanarak yargıda bulunmak, belirli bir görüş yada öneriyi eleştirmek yada savunmak gibi davranışlar içerir (Yalın, 2000:24; Özdemir ve Yalın, 2000:11).

Taksonomideki davranışların hangi madde kapsamına girdiğini kesin olarak belirtmek bazen mümkün olmayabilir. Bir davranış taksonomideki iki maddeyle ilgili görünebilir (Altun,1998:30) .

Matematik öğretiminde eleştirilen konuların başında öğrencilerin analiz, sentez ve değerlendirme gibi ileri düzeydeki öğrenmelere ulaşmadaki başarısızlıkları gelmektedir. Bu durum, öğrenciler açısından, öğrencilerin öğrenme yeteneklerinin yetersiz olmalarından değil kendilerine sunulan öğrenme yaşantılarının öğrencinin öğrenmesine uygun olmamasından kaynaklanmaktadır. Diğer taraftan matematik öğretim programlarının da uygulama düzeyinde amaçlar belirleyerek ona yönelik öğrenme-öğretme süreci önermesi de bu duruma bir etken olarak görülebilir.

Matematiğin istenilen nitelikte öğretilmesi için nitelikli öğretim programlarının hazırlanması ve alanda meydan gelen yenilikler ışığında amaçların belirlenmesi gerekmektedir. Matematik dersinin amaçları şu şekildedir.

B. Matematik Dersinin Amaçları

Genel olarak amaçlar eğitim yoluyla bireyde istendik davranışlar değişikliğinin ne olduğunu gösterir. Matematik eğitiminde ise amaçlar " Matematik derslerinde yer alan öğretme-öğrenme etkinlikleriyle öğrencilere kazandırılacağı belirtilen bilgiler, yetenekler, beceriler, tutumlar ve ilgilerdir" (M.E.B.; 1992:11) şeklinde tanımlanmıştır.

Matematik öğretiminin genel amaçlarını şu şekilde ifade etmek mümkündür:

1. Öğrencilerde matematiksel düşünme yeteneğini geliştirme.

2. Günlük hayatta karşılaştığı problemlerin çözümünde mevcut koşulları doğru değerlendirme.

3. Mümkün olduğu hallerde bilgiyi nicelleşmiş verilerle ortaya koyma alışkanlığını kazandırma.

4. Öğrencilere soyutlama alışkanlığı kazandırma; bu yolla zihinsel bağımsızlığı ve yaratıcılığı geliştirme

5. Öğrencilere özelleştirme ve genelleştirme yapma alışkanlığı kazandırma; bu yolla sezgisel düşünceyi geliştirme.

6. Estetik değerleri geliştirme.

7.Bir problemin değişik yollardan çözülebileceğinden hareketle, farklı görüş ve düşüncelere zihnen açık olma ve onlara saygı duyma alışkanlığı kazandırma.

Lise matematik öğretiminin genel amaçları ise;

1. Çeşitli öğrenim dallarına ayrılacak olan öğrencilere, ilerde kendilerine gerekli olacak matematik kültürünü verme.

2. Doğru düşünme kurallarını öğretme. İspat kavramını algılama. İspat edilebilen bilimsel sonuçlar ile doğmalar arasındaki farkları kavratma. Her alanda varılan yargıların ve hükümlerin ispat edilebilir nitelikte olmasının gereğini ve önemini kavratma.

3. Geometrik kavramlardan ve modellerden hareketle aksiyomların gerekliliğini algılatma.

4. Matematiksel yapı kavramını algılatma. Sayı sistemlerini, geometrik modelleri ve grup, halka, cisim, vektör uzayı gibi cebirsel yapıları kavratma.

5. Geometrik problemleri incelemek için analitik geometrinin getirdiği kolaylıkları sezdirme.

6. Küme, bağıntı, sıralama, fonksiyon kavramlarını ve önemini kavratma.

7. Doğa olaylarını matematiksel modeller ile temsil etmeyi ve bu yolla doğa olaylarının açıklanabilirliğini algılatma.

8. Öğrencilerin edindiği bilgi ve becerileri günlük yaşayışlarında karşılaştıkları problemleri çözmek için kullanma alışkanlığı sağlama.

9. Karşılaşılan problemlerin çözümünde yerine göre;

a) Analiz-sentez
b) Tümdengelim
c) Tümevarım
d) Özelleştirme ve genelleştirme

yollarını kullanma alışkanlığı edinmelerini sağlama.

10. Öğretim ve öğrenim sürecinde öğrencide;

a) Matematiğe karşı ilgi uyandırma, olumlu tutum geliştirme.
b) İnceleme ve araştırma alışkanlığı yaratma
c) Önyargısız ve tarafsız olabilme isteği uyandırma
d) Bilginin yayılması için istek yaratma (M.E.B.;1992:11).

Varış'a (1988:153) göre amaçların gerçekleşmesindeki güçlükler çoğu zaman amaçlardan çok bu amaçları gerçekleştirmek için uygulanan yöntemlerden, tekniklerden, araç-gereçlerden kaynaklanmaktadır.

XV. Milli eğitim Şurası'nda, "Öğretim Yöntemleri" başlığı altında, tüm dersler için bir öneride bulunulmuştur. Bu öneri şu şekilde ifade edilmiştir: "...yalnızca geleneksel yöntemlerle değil, hazırlama, deneme, değerlendirme, genelleştirme ve sürekli olarak gözden geçirme evrelerini kapsayan öğrenme-öğretme yöntemlerinin benimsenmesi öğrencilere bilgi aktarmak yerine, öğrenmeyi öğretecek, temel kavramları anlama, yorumlama ve uygulayabilme imkanı verecek, problem çözme yetenek ve davranışları ile bilimsel düşünme alışkanlığı kazandıracak, inceleme ve araştırma yolu ile iletişim kurmayı özendirecek öğretim yöntemlerinin kullanılması gerekmektedir " (Onbeşinci Milli Eğitim Şurası, 1996:107).

Öğrencilerin başarısız olduğu derslerden biri matematik dersidir. Matematik dersine karşı olumsuz tutumlar edinen, " Matematik kaygı düzeyi " yüksek olan öğrencilerde bu başarısızlık daha fazla olmaktadır. Psikolog ve eğitimcilerin, matematik kaygısının azaltılması ve bu derse karşı olumlu tutumların kazandırılması için öğretmenlere yapılan önerileri arasında, derslerin değişik yöntem ve araç-gereçlerle işlenmesi yer almaktadır (Saygı, 1989; Aşkar, 1986). Alkan ve Kurt'a (1998) göre kullanılması gereken öğretim yöntemleri olarak; öğrenciye dönük analizci, eleştirel, öğrencinin sosyalleşmesine, bağımsız karar vermesine araştırma ve inceleme yapmasına olanak veren yöntemlerin kullanılmasını tavsiye etmişleridir.

Yapılan birçok araştırma matematik derslerinin işlenişinde kullanılan yöntemlerde sıkıntı olduğunu vurgulamaktadır. Türnüklü (1999) tarafından yapılan "Matematik Öğretmenlerinin Ölçme ve Değerlendirme Pratikleri ve Öğrencinin Öğrenmesini Geliştiren Değerlendirmeleri: Türkiye ve İngiltere'deki 11-14 Yaş Grubu Öğretmenleri İle Bir Çalışma" adlı doktora çalışmasında Türk öğretmenlerin öğrencilerdeki başarısızlıkların sebeplerini öğrencilerin kendisinde gördüklerini ve öğretmenlerin bir kısmının ise bunun sebebini kendi kullanmış olduklarını öğretim yönteminden kaynaklandığını belirttiklerini saptamıştır ve Türk matematik öğretmenlerinin öğrenci ile sınıf iletişimlerinin zayıf olduğunu gözlemlendiğini belirtmiştir.

Gür (1999) tarafından yapılan "Matematik Öğretmen Adayının Aktif Öğrenme Metodunu Kullanarak Matematiği Öğretmeyi Öğrenmesi" adlı doktora çalışmasında da Türkiye'deki üniversitelerdeki öğretim elemanları ile okullardaki staj öğretmenlerinin dersi işlerken sadece takrir, düz anlatım, gösterip yaptırma ve öğrencilerin anlayıp anlamadıklarını test etmek için soru sorma yöntemiyle öğretim yaptıklarını ve bundan başka yöntem kullanmadıklarını saptanmıştır.

Çakmak (1999) tarafından yapılan " İngiltere ve Türkiye'de Deneyimli Sınıf Öğretmenleri ve Aday Öğretmenlerin, İlköğretim Matematik Dersinde İzledikleri Öğretim Stratejileri ve Kullandıkları Öğretim Teknikleri Üzerinde Bir Araştırma" adlı doktora çalışmasında, öğretmenlerin kullandıkları öğretim stratejileri ve teknikleri ilköğretimde matematik dersi ile sınırlandırarak, deneyimli sınıf öğretmenleri ve aday öğretmenlerin cevaplarına dayalı olarak betimlemiştir. Bu çalışmada Türkiye ve İngiltere'deki araştırma gruplarında öğretmenlerin yeni öğretim tekniklerini öğrenmeye yönelik istekli oldukları, fakat öğretim yaparken herhangi yeni bir teknik denemedikleri yönünde görüşler verdikleri izlenmiştir. Çok az sayıda öğretmen, kullandıkları bir kaç farklı öğretim tekniğini örnek olarak yazdığı saptanmıştır.

Kutlu (1996) tarafından yapılan " Ortaöğretimde Matematik Öğretiminde Yeni Yöntemler" adlı yüksek lisans çalışmasında da ortaöğretim kurumlarında matematik öğretiminde yöntem ve sunuş şekli üzerine bir araştırma yapılmış ve bu araştırmanın ortaya koyduğu ders işleniş yönteminin etkili olduğu sonucuna varılmıştır. Matematikteki bazı konularda örnek ders planlarına yer verilmiş ve ders planlarının önemini vurgulamıştır.

Matematik öğretiminde kullanılan yöntemlerde matematiksel düşünmeyi geliştirdiği gibi bazen öğrencilerde kaygılarda yaratabilir. Altun' a (1998) göre " Matematik öğretiminde konuya yaklaşım çok önemlidir. Ele alınan bir konunun matematiğin bütünlüğü içerisindeki yerinin belirtilmesi gerekir. Ayrıca konuya anlaşılması kolay, sistematiğin özünü kavratacak biçimde bakılması, matematiği bir takım tanımlar ve kurallar yığını olmaktan çıkarır " Ayrıca Matematiğin yapısına uygun olduğu düşünülen bir öğretim Baykul' a (1999) göre ;

1. Öğrencilerin matematik ile ilgili kavramları anlamalarına (conceptual knowledge of mathematics)
2. Matematik ile ilgili işlemleri anlamalarına (procedural knowledge of mathematics)

3. Kavramların ve işlemlerin arasındaki bağları (connection of between conceptual and procedural knowledge) kurmalarına yardımcı olmak

şeklinde olmalıdır.

Öğretim yöntem ve teknikleri Özden' e (1998) göre öğrenmeyi sağlamak için birer araçtır. Bu araçların başarısı onu kullanma becerisine bağlıdır. Matematik derslerinin işlenişinde kullanılan yöntemler; herhangi bir kavramın öğretilmesinde birbirinin alternatifi olmayıp, çoğunlukla her birinin uygun düştüğü durum ayrı ayrıdır. Bir kavram kazandırılmasında çoğu kez birden çok yöntem bir arada kullanılır. Tek bir yöntemle bir kavramın kazandırılmasına çok ender rastlanır.

Geleneksel öğretme yöntemlerinde, bütün faaliyetler öğretmenin merkezde olduğu görüşüne göre biçimlenir. Öğretmen aktif, öğrenci pasif alıcı durumundadır. Bütün roller öğretmende toplanmıştır (Fidan, 1985:168). Senemoğlu (1998:444) ise çoğunlukla düz anlatım ve bilgi aktarmaya dayalı olarak ifade etmiştir.

Fidan'a (1985:177) göre matematik, sosyal bilgiler ve fen derslerinde buluş ve araştırma yoluyla öğrenme, tartışma ve problem çözme çok önem kazanan öğretim teknikleridir.

Aksu 'ya (1991:35) göre diğer derslerde olduğu gibi matematik dersinde de " Hangi konular hangi yöntemlerle işlenebilir?" sorusuna tek bir cevap vermek zordur. Matematik öğretiminde öğretmen merkezli klasik yöntemlerden düz anlatım, problem çözme ve soru-cevap yöntemi yaygın olarak kullanılmaktadır.

Akdağ (1993) tarafından yapılan "Matematik ve Fen Bilimleri Öğretiminde Karşılaşılan Sorunlar" adlı doktora çalışmasında Malatya ilinde 12 liseden toplam 1215 öğrenci ve 98 öğretmene uyguladığı anket sonucunda; gerek Matematik gerekse Fen Bilimleri derslerinde öğretmenlerin en çok başvurdukları öğretim yöntemlerinin soru-cevap ve problem çözme olduğu ve buluş, proje ve laboratuvar gibi yöntemlerin ise çok az kullanıldığı sonucuna ulaşmıştır. Diğer sonuçlar ise öğrencilere göre de; öğretmenlerin Matematik ve Fen Bilimleri derslerinde en çok düz anlatım, soru-cevap gibi klasik yöntemler kullanmakta, ayrıca lise üçüncü sınıf matematik, Fizik ve kimya derslerinin öğretiminde klasik yöntemler, diğer sınıflara göre daha fazla oranda kullanılmakta olmasıdır.

Matematik öğretiminde pek çok öğretim stratejisi, yöntem ve teknik kullanılmaktadır. Aşağıda matematik öğretiminde kullanılan strateji, yöntem ve teknikler alt başlıklar halinde kısaca tanıtılmaktadır.

C. Matematik Öğretiminde Kullanılan Stratejiler

Strateji; Cangelosi'ye (1992:34) göre "bir amaç veya sonucu elde etmek için yapılan manevra veya taktiklerin serisi veya planı veya metodudur" Clark ve Starr 'a (1968) göre de dersin hedeflerine ulaşmasını sağlayan ve metodun belirlenmesine yön veren genel bir yaklaşımdır (Akt: Büyükkaragöz ve Çivi, 1996). Öğretim stratejileri şu başlıklar altında toplanmaktadır:

a) Buluş Yoluyla Öğretim Stratejisi

b) Sunuş Yoluyla Öğretim Stratejisi

c) Araştırma Soruşturma Yoluyla Öğretim Stratejisi

Aşağıda matematik öğretiminde kullanılan başlıca stratejiler alt başlıklar halinde kısaca tanıtılmaktadır.

a) Buluş Yoluyla Öğretim Stratejisi : Buluş yoluyla öğrenme, öğrenciye davranışları, kendi gözlem ve etkinliklerine dayalı olarak kazandırmayı esas alır. Burada öğretmenin rolü öğrenciye davranışı kazanmasında rehber olmak; kavramları ve ilkeleri vermek değil bunları kendi kendine öğrenebilecekleri bir öğrenme ortamı yaratmaktır. Snelbecker'e göre (1974) göre buluş yoluyla öğretim yöntemi öğrenilen bilginin neden ve nasıl olduğuna karar vermede öğrenci katılımını gerektirir ve karar vermede önemli bir rol oynar (Akt: Martin, 2000).

Bir genellemeyi öğrenciye doğrudan söyleyip alıştırma çalışmalarına geçmek sakıncalıdır. Bu yüzden kavram, kural ve genellemelerin öğrencilerce keşfedilmesi gerekir. Bu yöntem bilginin öğrenci tarafından sezilmesi ve bulunması esasına dayanır. Öğrenci matematik öğrenmekte değil, matematik yapmaktadır. (Altun,1998:40). Öğretimin başarılı olması konuların anlamlı, temel kavram ve ilkelere dayandırılması ve bir bütünlük gösterecek şekilde yapılaştırılmasıyla mümkündür. Bu suretle, konunun temel öğesinin ve bunlar arasındaki ilişkilerin kavranması yeni yöntemlere ve yeni buluşlara yol açabilir (Fidan, 1985).

Altun 'a (1998) göre bu yöntem bilgi basamağının "Terimler bilgisi" ve "İlke ve genellemeler bilgisi" ile kavrama basamağının "Yorumlama" davranışlarının kazandırılması için çok elverişlidir. Bir biliş kuramcısı olan Bruner (1915-) buluş yolunun matematik, fizik, yabancı dil gibi alanlara çok uygun olduğunu ve buluş yönteminin zihinde tutmayı kolaylaştıracağını, öğrenmeyi daha fazla güdüleyeceğini belirtmiştir (Altun,1998:42). Baykul'a (1999) göre matematiğin yapısına en uygun modellerden birisi buluş yoluyla öğrenme stratejisidir. Bu model kullanılarak yapılacak bir öğretimde öğrenciler, öğretme etkinliklerinin yardımıyla ve öğretmenin kılavuzlamasıyla matematiği adeta kendileri keşfederler; onun değerini anlar, başarmanın zevkini tadar ve ona karşı olumlu tutum geliştirirler.

Sönmez' e (1999:188) göre bu strateji kullanılırken dikkat edilmesi gerekli ilkeler şunlardır: Hedef davranışlar bilişsel alanın kavrama, analiz ve değerlendirme; en az birinde olmalıdır. Öğretmen ilke bulduracak, nedeni, niçini, niyeyi vb. bulduracaksa, bunlarla ilgili uygun en az iki-üç örneği sınıfa getirmeli; öğrencilere dağıtmalı; ya tahtaya çizmeli ya da yazmalıdır. Hedef davranışlarla ilgili açık uçlu (nedenli, niçinli, niyeli, nasıllı) soruları öğrencilere sormalı; her soruyu sorduktan ve işlemleri yaptırdıktan sonra içinden 20'ye kadar saymalıdır. Bu sürenin sonunda en az beş öğrenciden yanıt almalı; alınan yanıtın gerekçeleri istenmeli; sınıfta tartışma ortamı açılmalıdır. Öğretmen yalnız yol gösterici olmalıdır. Genellikle öğretmen bu stratejide tümevarım, aklın tekrar probleme dönmesi, analoji, diyalektik akıl yürütme türlerinin öğrencilerce kullanılmasını sağlayacak etkinlikleri öğrenme-öğretme ortamında işe koşmalıdır. İlkeyi nedeni, niçini ve nasılı bulduktan sonra, öğrenciden bunlara uygun düşen yeni örnekler istenmelidir. Öğretmen tartışmanın başka bir konuya kaymasına izin vermemelidir.

Bu stratejiyi kullanan öğretmen; güdümlü tartışma ve örnek olay yöntemlerinden birini; küçük grup tartışması, soru-cevap, çember, zıt panel, münazara, açık oturum vb teknikleri eğitim ortamında işe koşmalıdır. Öğrenciye sorulacak sorular açık uçlu ve onların yanıtları ise gerekçeli olmalıdır (Sönmez, 1999:188).

b) Sunuş Yoluyla Öğretim Stratejisi: Sunuş yoluyla öğretim stratejisinde bilgilerin öğrencilere sunularak kazandırılması esastır. İlke ve kavramları öğretmen sınıfa açıklar. Öğretmen merkezlidir. Buluş yoluyla öğretim stratejisinden ayrıldığı noktalar bunlardır. Buluş yoluyla öğretim stratejisinde öğretmen rehber konumundadır ve öğrenciler bilgilere kendileri ulaşırlar.

c) Araştırma Soruşturma Yoluyla Öğretme Stratejisi: Bu strateji yoluyla öğretme faaliyetleri öğrencilerin etkinliklerine dayalı konulardaki problemlerin çözümü için uygulanan bir öğretim yaklaşımıdır. Bu stratejiye en uygun yöntem problem çözme yöntemidir. Bu yaklaşım; uygulama, analiz ve sentez yapma, değerlendirme gibi en yüksek bilişsel davranışların kazandırılmasında etkili olmaktadır. Araştırma soruşturma yoluyla öğretme, problem çözme, örnek olay ve laboratuar metotlarının etkili bir şekilde uygulanabileceği bir yaklaşımdır (Büyükkaragöz ve Çivi, 1996) . Öğretmen bu stratejide yol gösterici, yardım edici; eğer problem çözülemezse, örnek bir başka problem üzerinde yapıp gösterici olmalıdır. Bu stratejide; gösterip yaptırma yöntemi ve workshop, beyin fırtınası, rol yapma, dramatizasyon, yaratıcı drama, deney, gezi, gözlem vb. teknikler kullanılabilir (Sönmez, 1999:221).

D. Matematik Öğretiminde Kullanılan Öğretim Yöntemleri

Öğretim yöntemi genellikle " Öğrencilerin özellikleri, ders araç-gereçleri ile tüm öğrenme durumları göz önünde tutularak belirlenen ve izlenen yol" olarak tanımlanmaktadır. (Oğuzkan, 1985:72). Kuşkusuz her öğretim durumunu başarı ile uygulayabilecek tek bir yöntemden söz edilemez. Ancak, önemli olan yöntemin yerinde ve zamanında kullanılarak, öğrencide istenilen davranış değişikliğini elde etmektir. Diğer bilim dallarında olduğu gibi matematik öğretiminde de bir çok yöntem kullanılmaktadır. Bu öğretim yöntemleri şu başlıklar halinde toplanmaktadır: Düz Anlatım Yöntemi, Soru-Cevap Yöntemi, Gösterip Yaptırma Yöntemi, Problem çözme Yöntemi, Güdümlü Tartışma Yöntemi, Örnek Olay Yöntemi (Büyükkaragöz ve Çivi, 1996; Sönmez, 1999, Demirel, 1999: 81:89; Çilenti ve Özçelik, 1991: 96-107; Kaptan, 1998: 172-188; Özden, 1998: 151-161).

Bu yöntemler geleneksel (klasik) ve çağdaş (modern) yöntemler olarak karşımıza çıkmaktadır. Geleneksel öğretme yöntemlerinde, bütün faaliyetler öğretmenin merkezde olduğu görüşüne göre biçimlenir. Öğretmen aktif, öğrenci pasif alıcı durumundadır. Bütün roller öğretmende toplanmıştır (Fidan, 1985:168). Senemoğlu (1998:444) ise çoğunlukla düz anlatım ve bilgi aktarmaya dayalı olarak ifade etmiştir. Araştırmalarda; öğretmenlerin matematik derslerinde genellikle takrir, düz anlatım, problem çözme, gösterip yaptırma ve öğrencilerin anlayıp anlamadıklarını test etmek için soru-cevap yöntemiyle öğretim yaptıklarını ve bundan başka yöntem kullanmadıklarını saptanmıştır (Akdağ, 1993; Aksu, 1991 Gür, 1999). Bu araştırmada matematik derslerinde kullanılan sıklıkla kullanılan yöntemleri alt başlıklar halinde incelenecektir.

a) Anlatım Yöntemi: Öğretmen yada öğrencinin bir konu hakkında anlatmak suretiyle bilgi vermesidir. Bir ders saati içinde öğretmen birçok kereler bu yönteme başvurabilir (Altun,1998:39). Genellikle konunun tanıtılması, amacın açıklanması için derse başlangıç sırasında bu metot kullanılır.

Anlatım genelde kaynağın kontrolünde, öğrenenle sık etkileşime girilmeyen tek yönlü bir iletişim yöntemidir (Yalın, 2001:60). Büyükkaragöz ve Çivi' ye (1996:75) göre anlatım yöntemi her ne kadar tenkit edilse de, dersin başında öğrencilerin derse karşı güdülenmesinde, konuyla ilgili yapılacak çalışmaların açıklanmasında, bu çalışmaların sonucunun özetlenmesinde ve öğrenciler tarafından anlaşılması güç olan konuların açıklanmasında bu metodun uygulanması gerekmektedir. Fakat en önemli husus tüm öğretim durumlarında sadece anlatım yönteminin kullanılmamasıdır. Bu metodu etkili hale getirmek için yerinin ve süresinin iyi ayarlanması gerekmektedir. Aksi halde öğrencilerin dikkatlerinin dağılmasına ve başka şeylerle ilgilenmesine neden olabilir. Öğretmen bu metodu kullanırken görsel-işitsel desteğe de gereksinim duymalıdır. Matematik derslerinde genellikle derse girişi yaparken; konuyu tanıtmada, amacı açıklamada ve önceden öğrenilen kavramları hatırlatmada bu yöntem kullanılır.

b) Soru-Cevap Yöntemi: Soru-cevap yöntemi, öğretmenin bir konu ile ilgili hazırladığı soruların öğrencilere sorulması ve onlardan alınan cevapları değerlendirerek öğretim yapması esasına dayanır (Yalın, 2001:60). Büyükkaragöz ve Çivi' ye (1996:78) göre soru-cevap yöntemi, anlatım yönteminden sonra eğitimde en çok kullanılan yöntemlerden birisidir ve eğitimde meydana gelen çağdaş değişmelere rağmen öğretimdeki önemini hala korumaktadır.

Öğretmenle birlikte öğrencinin de derse aktif olarak katılması sonucu oluşan öğrenmeler daha kalıcıdır. Anlatım yönteminin aksine soru-cevap yönteminde iletişim çift yönlüdür. Öğrenci pasif durumdan kurtulup aktif duruma geçer. Soru-cevap yöntemiyle oluşturulan öğretme-öğrenme faaliyetinin başarılı olabilmesi için öncelikle hazırlanan soruların amaca hizmet edecek nitelikte olması gerekir. Bu nedenle soruların şu özellikleri taşımasına özen gösterilmelidir: İyi bir soru, öğrencinin anlayabileceği bir dille ifade edilmelidir. Soru açık, basit, anlaşılır ve direkt olmalıdır. Soru sormanın amacı öğrenciyi güdülemektir. Bu nedenle, iyi bir soru, öğrencinin zihinsel gücünü kullanabileceği nitelikte olmalıdır. Kitaptaki bilgileri tekrardan ileri geçmeyen sorular, güdüleyici olma niteliğine ulaşmazlar. İyi bir soru,düşünmeye özendirici nitelikte olmalıdır. Öğrencinin cevap veremeyeceği güçlükte soru sorup onu utandırma ve ümitsizliğe yol açmanın yapıcı yönü olmadığı gibi, ona çok kolay gelebilecek soru sormanın da zaman kaybından başka yararı olmaz. Bu nedenle, iyi bir soru, dersin hedefleriyle tutarlı olduğu kadar, öğrencinin yaşı, yeteneği ve ilgisiyle de tutarlı olmalıdır. İyi bir soru, mevcut bilgiyi yoklama yerine sınıfın üzerinde çalıştığı konuyla ilgili sorunlara çözüm arayıcı olmalıdır (Bilen, 1993:92).

Öğretmen soru sorma tekniğini iyi bilmeli, yerinde ve zamanında soru sormalıdır. Mesela; matematik dersinde öğretmen soruyu yazı tahtasına yazdıktan sonra öğrencilere " ...şimdi bu soruyu hangi metot ile çözebiliriz ve en iyi çözüm nedir ? " şeklinde bir soru sorduğu zaman; sorunun ikinci kısmından dolayı öğrenciler en iyi çözümü bilse bile cevap vermeyebilir.

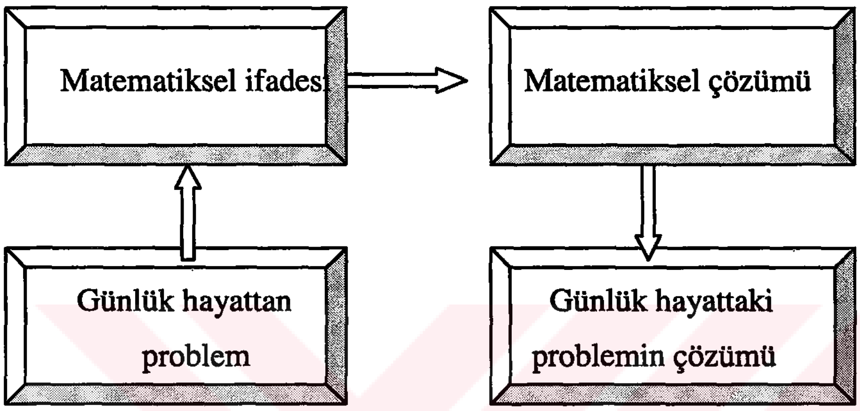
c) Gösterip Yaptırma Yöntemi: Gösterip yaptırma yöntemi, bir işi oluşturan işlemlerin uygulanmasını, araç-gereçlerin çalıştırılmasını önce gösterip sonra da öğrenciye alıştırma ve uygulama yaptırarak öğretme yoludur (Yalın, 2001:60, Demirel, 1999:86). Küçükahmet' e (1998) göre en önemli faydası herhangi bir şeyin en uygun biçimde ya da ustaca nasıl başarılacağını göstermedir.

Bu yöntem bilişsel alanın uygulama, devinişsel alanın tüm basamaklarındaki davranışlar için uygundur. Bu yöntemde fiziksel yada zihinsel beceriler önce öğretmen tarafından gösterilir ve gerekli açıklamalar yapılır, daha sonra öğrencilerin aynı becerileri uygulaması istenir (Altun,1998:51).

d) Problem Çözme Yöntemi : Öğreticinin bir konuyu sınıfa bir problem gibi getirmesine dayanan bir yöntemdir. Eğer öğrenciler problemi çözmek için heyecan duyarlarsa bu yöntem başarılı olur. Aksi takdirde zaman kaybettirir. Düşünme, ilgi dikkat, yaratıcı çözümler arama gibi zihinsel fonksiyonları kullandığı için değişik bir yöntemdir (Küçükahmet,1992:36). Fidan'ın (1985) belirttiği gibi problem çözmede önemli olan kişinin halihazırda bildikleriyle karşılaştığı problem arasında ilişki kurabilmesidir.

Problem çözme yöntemiyle öğrenme yaklaşımı, bilimsel araştırma yöntemini temel almaktadır. Bu yaklaşımın özü John Dewey'in genel problem çözme yöntemindeki 5 aşamaya dayanmaktadır. Bu aşamalar; Problemi tanıma, Geçici hipotezleri formüle etme ,Veri toplama organize etme, değerlendirme ve açıklama, Sonuca ulaşma ,Sonuçları test etme (Küçükahmet,1998:60) şeklindedir.

Matematikte en çok kullanılan yöntemlerden birisi problem çözme yöntemidir. Hayatta karşılaşılan bir problem aşağıdaki döngüye uygun olarak çözülür. Önce problemin matematik ifadesi elde edilmekte ve bir matematik problemi haline gelmektedir. Daha sonra problemin matematiksel çözümü yapılmakta son olarak bu çözüm gerçek hayat için yorumlanmaktadır (Altun, 1998;110). Bu döngü aşağıdaki gibi ifade edilebilir.



Fraser (1980) öğrenciler için kılavuzluk eden bir problem çözme yolu belirtmiştir. Bir probleme cevap vereceğin zaman;

1. Problemi dikkatli oku ,verilenleri ve istenilenleri anladığına emin ol
2. Sembollere dikkatli bak ve matematik problemini anladığına emin ol.
3. Problemin cevabının ne çeşit olduğu hakkında düşün ve eğer mümkün ise kaç cevap olabileceğini düşün.
4. Probleme nasıl cevap vereceğini düşün ve en iyi yolu yaz
5. Gerekli ise bir diyagram çiz. Doğru sembolleri kullan.
6. Bitirdiğin zaman metodunun gerçekten doğru cevabı verdiğini kontrol et.
7. Çalışmanı kontrol et. Aynısını yapmaksızın cevabını kontrol etmek için başka bir yol biliyorsan onu kullanarak yeniden çöz.
8. Cevabın yanlış ise hatanı bulmayı dene ve soruyu tekrar çöz.
9. Matematikten korkma matematik ilginçtir.

E. Matematik Öğretiminde Kullanılan Teknikler

Demirel (1999) tekniği, "Bir öğretme yöntemini uygulamaya koyma biçimi, ya da sınıf içinde yapılan işlemlerin bütünü" olarak tanımlamaktadır. Bu çalışmada teknikler başlıklar halinde sunulacaktır. Belli başlı öğretim teknikleri şu başlıklar altında toplanabilir: Panel, Diyalog, Forum, Komite Görüşmesi, Sunu (Brifing), Sempozyum, Konferans, Söylev, Demeç, Grup Tartışması, Çember Tekniği, Zıt Panel, Münazara, Açık Oturum, Workshop, Beyin fırtınası, Rol oynama, Dramatizasyon (Sönmez, 1999; Büyükkaragöz ve Çivi, 1996).

Her öğretmen konusuna göre yukarıda belirtilen strateji, yöntem ve teknikleri tercih etmektedir. Bugün okulların pek çoğunda matematik derslerinde öğrenme-öğretme faaliyetlerinde öğretmenin daha aktif ve bilgi verici durumda olduğu, öğrencilerin alıcı ve pasif durumda kaldığı bir sistem uygulanmaktadır. Özellikle ortaöğretim matematik öğretiminde bu daha fazla gözlenmektedir. Belki bunun sebeplerinden birisi de ortaöğretim matematik müfredatındaki konuların, ilköğretim matematik müfredatındaki konulara göre biraz daha soyut olmasıdır.

Analiz (Calculus), ileri düzeyde matematiğin başlangıcı ve ileri konuların anlaşılmasında temel oluşturmaktadır. Ubuz' a (1999) göre son yıllarda Analiz'de (Calculus'ta) sayısız çalışma yapılmasının başlıca nedenleri;

i) Ezbere işlem uygulamalarına yönelik eğilim,
ii) Kavramsal anlamdaki yetersizlik ,
iii) İleri matematik öğretim ve öğrenimindeki kaliteyi yükseltmektir.

Ezbere öğrenme, formüllerin ve kuralların hesaplama sorularını çözmek için hatırlanmasına bağlıdır. Kavramsal anlama veya kavram oluşumu ise, kavramaların gelişimi ve onların matematiğin temel ilişkileri çerçevesinde toplanmaktadır. Ubuz' a (1999) göre yapılan araştırmalar göstermiştir ki;

1) Öğrenciler, genel matematik yöntemlerini, tamamen zayıf kavram imgeleri üzerine kurulan algoritmik düzeyde öğreniyor. Kavramların gelişimi sürecinde

çıkarımların yapılmasına engel olan en önemli konuların başında fonksiyonlar ve limit kavramları gelmektedir

2) Gözde canlandırma nadir olarak yapılmakta ve eğer yapılırsa da, görsel- grafiksel ve çözümsel- cebirsel gösterimler arasında bilişsel bağlantı büyük bir problem yaratmaktadır.

Tüm dünya üniversite öğrencileri Analiz (Calculus) dersi için çaba sarf etmektedirler. Başarısız olduklarında harcanan zaman boşa gitmiş ve bir çok düş de yıkılmış olur. Öğretim elemanları da, başarısız öğrencilere pek çok şeyi tekrar öğretmek zorunda kalırlar. Öğrencilerin mühendis veya temel bilimci olma hedefleri de kaybolur. Analiz (Calculus) dersini, Analiz (Calculus) öncesi konuları anlamayan öğrencilere öğretmek durumunda kalanlar, bunun heves kıran bir çaba olduğunu belirtirler. Öğretici için bu öğrencilere konulardan anlam çıkarmak olanaksızdır ve iki tarafta anlamanın getireceği zevkten mahrum kalırlar. Sonuçta öğrenciler konuları ezberlemekten başka çare bulamazlar. Çünkü konulardan anlam çıkarabilecek araçları yoktur. Ezberleme, unutmayı ve gelecek yıllarda da daha fazla sıkıntıyı getirir (Hallett , 1996).

Literatür incelendiğinde de üniversite öğrencilerinin fonksiyon, limit, türev ve integral gibi Analiz'deki temel kavramları kavrayamadıkları görülmektedir (Akt : Ferrini-Mundy, Gaudard, 1992).

Limit kavramı Analiz'in çeşitli dallarında çok önemli bir rol oynar. Limit kavramı çok önemli kavramlardan birisi olan sürekliliği özel bir hal olarak ihtiva eder (Bayar ve Gündüzalp, 1988).

Çeşitli okullardaki matematik öğretmenleri ile yapılan görüşmelerde öğrencilerin limit kavramını yorumlama konusunda büyük bir sorunla karşı karşıya olduğu görüşü dile getirilmektedir. Bu nedenle, ortaöğretim matematik programında önemli bir yer işgal eden, birçok karışık kavramın temelini teşkil eden ve öğrencilerin çoğunun algılamada güçlük çektiği limit kavramının öğretimi ile ilgili bu çalışmanın yapılmasına ihtiyaç duyulmuştur.

1.2. PROBLEM CÜMLESİ

Geleneksel öğretim yönteminden farklı olarak oluşturulan eğitim durumunun ortaöğretim matematik programında yer alan limit kavramı öğretiminde öğrenci başarısına etkisi nedir?

1.3. ALT PROBLEMLER

1. "Bir Dizinin Limiti" kavramını öğrenmede deney ve kontrol grubu arasında anlamlı bir fark var mıdır?

2. "Bir Fonksiyonun Bir Noktadaki Limiti " kavramını öğrenmede deney ve kontrol grubu arasında anlamlı bir fark var mıdır?

3. Limitin formal tanımı öğrenmede deney ve kontrol grubu arasında anlamlı bir fark var mıdır?

1.4. ARAŞTIRMANIN ÖNEMİ

Matematikte iki farklı görüşten söz etmek mümkündür. Bunlardan birisi işlemsel matematik görüşü diğeri kavramsal matematik görüşüdür.

İşlemsel matematik görüşüne sahip öğrencilere göre; matematik öğrenmek için bir kimse mutlaka kuralları (genellikle ezberlemek yoluyla) öğrenmelidir. Aynı zamanda bu kuralların hangi durumlarda uygulandığı da önemlidir. Bu görüşte, her zaman kural ve yöntemleri bilen ve öğrenciye aktaran bir otorite olarak öğretmenin varlığı söz konusudur (Baki-Bell,1997). Fakat Yıldırım'ın (1996) belirttiği gibi "Matematik bir takım kurallar ve tanımlar yığını, bir ispatlar koleksiyonu değildir."

İşlemsel görüşün tersine; kavramsal görüşe sahip olan öğrenci, problem çözmede ve matematiksel bilgi üretmede kendi yaratıcılığını kullanabilen bir problem çözücü gibidir. O, öğretmenin matematiğini ve algoritmalarını yeniden üretmek yerine matematiği anlayarak öğrenmeye önem verir ve kendi matematiğini, kendi çözümünü üretmeye çalışır. Kavramsal görüş, matematiği birbirine bağlı kavramların ve düşünceler ağı olarak görür ve bu matematiksel kavramların dışarıdan kopya edilmesi yerine öğrencinin bizzat kendisinin yapısallaştırmasını önerir (Baki-Bell,1997).

Şu anda matematik eğitiminde yaşanan en önemli sorunlardan biri işlemsel görüşü taşıyan öğrencilerin üniversitelerin matematik bölümlerinde çoğunluğu oluşturmasıdır. Bu öğrenciler lise yıllarında kavramsal anlamayı geliştirmede matematiksel rutinleri tekrar etmeyi öğreniyorlar. Doğaldır ki; bu öğrenme biçimi ortaöğretimde ve üniversite sıralarında bu öğrenciler başarılı olmasına yetiyor, ancak bu başarılı öğrenciler ciddi kavramsal anlama eksiklikleri ile üniversite programlarına geliyorlar. Bu öğrencilerin birçoğu, ileri düzeyde matematiksel düşünceyi gerektiren, problem çözme, çözümleme, varsayımda bulunma ve genelleme yapabilme becerileri gerektiren üniversite matematiğinde başarılı olamamaktadırlar. Türkiye'de matematik öğretimi daha çok işlemsel görüşe dayanmaktadır. Öğrencilerin işlemsel matematik görüşünden , kavramsal matematik görüşüne doğru değişim isteniyorsa, varolan geleneksel matematik sınıfında matematik öğretiminin değişmesi gerekmektedir (Baki-Bell,1997). Matematik öğretimi için uygun eğitim durumu iyi belirlenirse bu değişim gerçekleşebilir.

Bu araştırma matematik sınıflarında işlemsel görüşten kavramsal görüşe doğru olması istenilen bu değişimi gerçekleştirmeyi ve bu iki görüş arasında bağ kurmayı amaçlamaktadır.

Deneysel olan bu çalışma sonucunda elde edilen bilgilerin sürdürülen eğitim çalışmalarına katkı sağlayacağı ve geleneksel yöntemden farklı olarak geliştirilen eğitim durumunun limit kavramının öğrenilmesinde etkili olacağı düşünülmektedir.

1.5. VARSAYIMLAR

Araştırmada aşağıdaki durumlar varsayım olarak kabul edilmiştir.

1. Deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin verilen testleri ciddiyetle yanıtlayacakları varsayılmıştır.
2. Araştırmada kullanılan ölçme araçlarının ölçülmek istenen davranışları doğru olarak ölçtüğü kabul edilmiştir.

1.6. SINIRLAMALAR

Bu araştırmanın sınırlamaları şunlardır;

1. Bu araştırma lise 3. sınıf ile sınırlandırılmıştır.
2. Bu araştırma "limit" kavramını anlatmak için ayrılan 200 dakikalık süre ile sınırlandırılmıştır.
3. Bu araştırma Ankara ili, Kanuni Lisesi Lise 3.sınıflardan alınan iki grup öğrenci ile sınırlandırılmıştır.

1.7.TANIMLAR

ε,δ LİMİT TANIMI : $X \subseteq \Re$ olmak üzere $f : X \to \Re$ reel bir fonksiyon ve $r \in \Re$, X' in aşikar olmayan bir yığılma noktası olsun. Bu takdirde

$$(\forall \varepsilon \in \Re_+)(\exists \delta \in \Re_+)(\forall x \in X)(0 < |x - r| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

ise $L \in \Re$ ye f 'nin r noktasındaki limiti denir ve $\lim\limits_{x \to r} f(x) = L$ olarak gösterilir (Todorov,2001).

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ gösterimi x sayısının a sayısından farklı kalarak a sayısına yaklaşması durumunda, f(x) değerinin de L sayısına yaklaşacağını ifade eder. Yani x'in a'ya yeterince yakın tutulmasıyla, f(x) b'ye istenildiği kadar yaklaştırılabilir. Bu durum matematiksel olarak şöyle ifade edilebilir: Keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde, öyle bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilir ki, f'nin tanım bölgesi içinde bulunan ve $0 < |x-a| < \delta$ koşulunu sağlayan her x sayısı için $|f(x)-L| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır (Spivak, 1991).

SONSUZ KÜÇÜK : Eğer $\forall n \in N$ için $|dx| < \frac{1}{n}$ ise dx sayısına sonsuz küçük denir (Todorov,2001).

BİR DEĞİŞKENİN LİMİTİ: x bir değişkeni, a da bir sabit bir sayıyı göstermek üzere x=a demek, x değişkeni a sabit değerini alıyor demektir. $x \neq a$ olmak üzere, x değişkeni sonsuz adetteki sayıları temsil ediyor ve sonunda temsil edilen bu sayılar a'ya yeterince yakın oluyorsa yani a' dan farklı istenildiği kadar küçük oluyorsa, x, a'ya doğru gidiyor veya x, a sayısına yaklaşıyor denir ve

$$x \to a \qquad \text{veya } \lim x = a$$

şeklinde yazılır. a' ya x' in limiti denir. Başka bir ifade ile $x \to a$ demek x'in a sayısına olan uzaklığının yeterince küçük yani bu uzaklık her pozitif sayıdan küçük demektir. Sembolle $\forall \varepsilon > 0$ için

$$0 < |x-a| < \varepsilon$$

veya

$$a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$$

şeklinde gösterilir . $x \to 0$ olması halinde x sonsuz küçük oluyor denir. Sonsuz küçük kelimesi, ancak değişken kavramı ile ilgili olduğu zaman bir anlam taşır. Aksi halde, sıfırdan farklı bir sonsuz küçükten bahsetmek doğru olmaz.

x değişkeninin mutlak değerinin, yeterince büyük A sayısından daha büyük sayıları temsil etmesi halinde, x sonsuz oluyor denir ve bunu ifade etmek üzere

$$x \to \infty \quad \text{veya} \quad \lim x = \infty$$

yazılır. Sayı ekseni üzerinde, x değişken noktası, gittikçe sola ve sağa doğru kaydığına göre

$$x \to -\infty \quad \text{veya} \quad x \to \infty$$

durumları ayırt edilir (Öztunç,1972).

BİR REEL DİZİNİN LİMİTİ: (a_n) bir dizi ve $a \in \Re$ olsun. Her pozitif $\varepsilon > 0$ sayısı için $n \geq N(\varepsilon)$ olduğunda $|a_n - a| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N(\varepsilon)$ doğal sayısı(indisi) varsa (a_n) dizisi a sayısına yakınsar denilir ve $\lim_n (a_n) = a$ ile veya $a_n \to a$ ile gösterilir (Ağlı, 1998) .

SÜREKLİLİK: $f = \{(x,y) : y = f(r), x \in \Re\}$ fonksiyonu tanım cümlesinin bir a noktasında reel bir limite sahip ve bu limit f'nin a'daki değerine eşitse" f fonksiyonu a noktasında süreklidir" denir. Yani,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

ise, a noktasında süreklidir.

Süreklilik bir noktada incelenebildiği gibi tanım cümlesinin herhangi bir alt kümelerinde de incelenebilir. $A \subset \Re$ olmak üzere A_1, f'nin tanım kümesi olan A'nın bir alt kümesi olsun. $\forall x_1 \in A_1$ için $\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$ oluyorsa f, A_1 kümesinde süreklidir denir (Hacısalihoğlu ve Balcı, 1996).

ERİŞİ: Öğrencinin programa giriş davranışları ile programdan çıkışta hedeflenen davranışları arasındaki tutarlı fark (Ertürk,1975).

II. BÖLÜM

İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Bu bölümde araştırmanın konusu olan limit kavramı ve bu kavramın öğretimi ile ulaşılabilen tüm araştırmalara ve elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

Slomer (1999) "Limitler Kavramına Sayısal Yaklaşım" adlı çalışmasında bir fonksiyonun bir noktadaki limitini hesaplamada grafiklerin ve nümerik değerlerin bir tablosunu kullanmanın iyi bir yol olduğunu belirtmiştir. Slomer bu çalışmasında T_1-93 makinesinde bir fonksiyonun bir noktada sağdan ve soldan limitinin nasıl hesaplandığını örneklerle açıklamıştır.

Tall ve Vinner (1981) " Limit ve Süreklilik ile İlgili Olarak Matematikte Kavram Algılama ve Kavram Tanımlama" adlı çalışmada;

i) kavram imajları (öğrencilerin kavram imajları)

ii) kavram tanımları(kavramı belirmek için öğretmenler yada öğrenciler tarafından kullanılan kelimeler)

iii) kavram tanım imajları (öğrencilerin kavram tanım imajları)

belirlemek için ilkinde 36 diğerinde 70 üniversite öğrencisine anket uygulamışlardır ve açık uçlu sorulara verilen kısa cevapları kategorize etmişlerdir. İlk ankette öğrencilerden $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+...)$ limitini bulmaları, bir limit tanımı vermeleri, 0,999...=1 olup olmadığı ve neden bu cevabı verdiklerini açıklamaları istemiştir. Anketin sonuçları öğrencilerin güçlü kavram imajları ve zayıf kavram tanım imajına sahip olduklarını ortaya çıkarmıştır. İkinci ankette öğrencilere $\lim_{x\to1}\frac{3x-1}{x-1}=3$ ün ne anlama geldiği ve $\lim_{x\to a}f(x)=c$ nin bir tanımını yazmalarını istenmiştir. 31 öğrencinin "x, a'ya yaklaşırken f(x), c' ye yaklaşır " dinamik tanımını, 21 öğrencinin bir tanım veremediği ve bu 52 öğrencinin hepsinin de verilen örneğe dinamik yaklaşım kullandıkları saptanmıştır. Ayrıca limitin ε,δ şeklitanımını veren

4 öğrenciden üçünün örneğe formal yaklaşım kullandığı ve birinin ise dinamik yaklaşım kullandığını saptanmıştır. Diğer 14 öğrencinin yanlış şeklitanım verdiği ve bu 14 öğrenciden 10'unun örneğe dinamik yaklaşım kullanırken 4'ünün ise formal yaklaşım kullandıkları saptanmıştır. Elde edilen bulgular öğrencilerin genellikle tanıma göre örneğe aynı yaklaşımı kullandıklarını ve zayıf veya yanlış kavram tanımlarına sahip olduklarını ortaya çıkarmıştır. Tall ve Vinner uygun kavram imajı formlandırmanın güçlüğünün ve uygunsuz kavram imajının zorlayıcı etkisinin, öğrencilerin zihnindeki formal teorinin gelişimi ciddi olarak engelleyebileceğini belirtmişlerdir (Akt: Murphy, 1999).

Monaghan (1991) " Limit Kelimesinin Algılanması İle İlgili Problemler " adlı çalışmasında limit kavramını öğrenme ve öğretmede kullanılan dilin etkilerini incelemiştir. Monaghan 16 yaşlarındaki 54 lise öğrencisine ve bir sene sonra anketin düzeltilmiş formunu 190 lise öğrencisine uygulamıştır. Ankette; eğilim (tends to), yaklaşma (approaches), yakınsama (converges) ve limit deyimlerini kullanarak aynı soruyu dört farklı şekilde sormuştur. Limit kelimesi öğrenciler tarafından çoğunlukla bir sınır olarak (bir hız limiti gibi, yasaklanmasına rağmen hız limitini geçmek mümkündür) düşünüldüğü görülmüştür. Diğer limit kavramları fiziksel veya zihinsel yetenekte sınır (bir kişinin sabrının sınır veya bir yükseklik limitine atlamak gibi) düşünüldüğü görülmüştür. Yaklaşma (approaches)' dan bir şeyin diğer şeye doğru er geç ulaşma fikri ile hareket etmesi (trenin istasyona yaklaşması gibi), eğilim (tends to)'dan kişisel bir eğilim (birinin kahve içmeye eğilimi olması gibi), yakınsama (converges) 'dan dokunmadan gittikçe yaklaşmadan çok, ulaşma veya dokunma anladıkları gözlenmiştir. Elde edilen bulgular öğrencilerin bu dört deyimi farklı algıladıklarını ortaya koymuştur (Akt: Murphy,1999).

Williams (1991), "Üniversite Analiz (Calculus) Dersi Öğrencilerinin Limit Kavramını Algılamaları İle İlgili Oluşturdukları Modeller " adlı çalışmasını iki aşamada yapmıştır. İlk aşamada 341 lisans öğrencisine limit kavramı ile ilgili bir anket uygulamıştır. Bu ankette öğrencilerden aşağıdaki ifadeleri doğru veya yanlış olarak işaretlemeleri ve bir limiti en iyi tanımladığı düşündükleri bir ifadeyi seçmeleri ve bir limit tanımı vermeleri istenmiştir.

- Limit kavramı, x verilen bir noktaya hareket ederken fonksiyonun almış olduğu nasıl hareket ettiğini belirler.
- Limit bir fonksiyonun almış olduğu değerleri-n aşamayacağı bir sayı veya noktadır.
- x değişkenini belli değerleri kısıtlayarak bir fonksiyonun alabileceği y değerlerine istenilen kadar yakın olan sayıdır.
- Limit bir fonksiyonun aldığı değerler bakımından yeterince yaklaştığı fakat asla ulaşamayacağı bir sayıdır.
- Limit dilediğimiz uygunlukta yapılabilecek bir yaklaşımdır.
- Limit verilen bir sayıya yakın sayıların görüntülerinin limite ulaşılıncaya kadar alınması ile belirlenir

Bu ifadelerden birincisi dinamik–teorik, ikincisi bir sınır olarak hareket, üçüncüsü formal, dördüncüsü ulaşılamaz, beşincisi bir yaklaşım olarak hareket, altıncısı dinamik-pratiktir. Elde edilen sonuçlardan sınır, yaklaşım, ulaşılamaz, ve dinamik olan dört limit görüşü seçilmiştir. Çalışmanın ikinci aşamasında ise dördü dinamik, dördü ulaşılamaz, biri sınır, biri yaklaşım görüşünü ileri süren 10 öğrenci seçilmiş ve bu öğrencilerle beş toplantı yapılmıştır. Bu toplantılardan elde edilen sonuçlar öğrencilerin dinamik limit görüşüne sahip olduklarını, daha şekli limit görüşünü benimsemede beş toplantının yetersiz ve öğrencilerde formal düşünmenin önemini anlamada eksiklikleri olduğunu göstermiştir.

Davis ve Vinner (1986) tarafından yapılan " Limit Fikri: Görünüşte Bazı Kaçınılmaz Yanlış Kavram Aşamaları" adlı çalışmanın amacı öğrencilerin limit kavramını geliştirmeye odaklanan bir Analiz Dersleri Dizisi (Calculus Sequence) belirlemektir. Bu amaç doğrultusunda Analiz Dersleri Dizisi (Calculus Sequence)'nin ilk yılı boyunca öğrencilere teoremler ispatlanarak, tanımlar ifade edilerek ve yanlış tanımların zayıflığını örneklerle açıklayan örnekler dizisini sunarak limit kavramının ustalıkları verilmiştir. İkinci yılın ilk günü 50 üniversite öğrencisinden bir dizinin limiti kavramını tanımlamaları ve formal bir tanım vermeleri istenmiştir. Sonuçlarda önceki yıl limitlerine ulaşabilen dizilerle çalışılmasına rağmen, birçok öğrencinin halen "Bir dizi asla limitine ulaşamaz" yanıtı verdikleri görülmüştür. Bazı kavramların halen var olduğu ve öğrencilerin cevaplarını etkilediği saptanmıştır. Davis ve Vinner alışılmış hataları ve yanlış kavramları yapmaktan öğrencileri önlemek için derslerini düzenlemelerine rağmen aynı hataların ortaya çıktığını saptamışlardır (Akt: Murphy, 1999).

Lauten, Graham ve Ferrini-Mundy (1994) tarafından yapılan "Öğrencilerin Analizdeki Temel (Calculus) Kavramlarını Anlamaları: Grafik Hesap Makinesi ile Etkileşim " adlı çalışmada 5 öğrenci ile görüşmeler yapılmış ve araştırmada bir öğrenci ile yapılan görüşme sonuçlarına yer verilmiştir. Çalışmanın amacı ise öğrencilerin fonksiyonlar ve limit kavram imajları ve bu kavramları anlamaları, öğrencilerin grafik hesap makinesi kullanmaya olan eğilimlerini saptamaktı. Sonuçlar görüşmeye alınan öğrencinin, hesap makinesini minimum ölçüde kullandığını, sunulan altı limit ifadesinden dinamik limit ifadesini yani " Bir limit x belli bir noktaya giderken bir fonksiyonun nasıl hareket ettiğini tanımlar " ifadesini seçtiğini ve formal tanımın onun için hiçbir anlamı olmadığını göstermiştir. (Akt: Murphy, 1999).

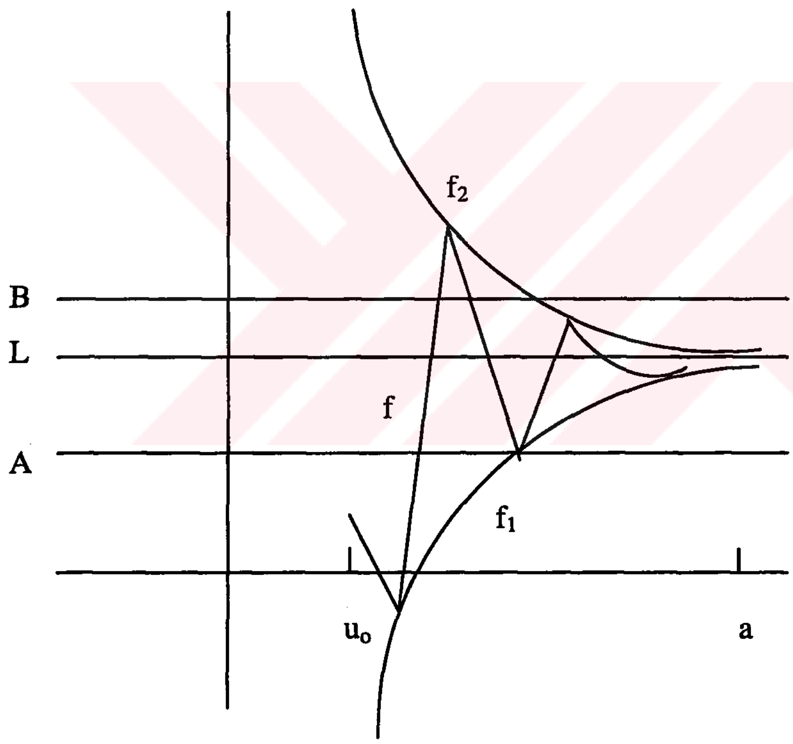
Sierpinska (1987), " Beşer Olarak Öğrenciler ve Limit ile İlgili Epistemolojik Engeller " adlı çalışmasında 17 yaşlarındaki bir grup öğrenci ile yapılan 45 dakikalık dört oturumun raporlarını sunmuştur. Seriler konusu seçilerek yapılan görüşmeler sonucunda öğrencilerde bilimsel bilgi, sonsuz kavramı, fonksiyon kavramı ile ilgili eksiklikler olduğu ortaya konulmuş ve limitle ilgili eksiklerin ana kaynağı olarak; bilimsel bilgi, sonsuz kavramı, fonksiyon kavramı ve reel sayı kavramı gösterilmiştir.

Gillman (1997), "Analiz Dersindeki (Calculus) Güçlükler" adlı çalışmasında (ε,δ) limit tanımındaki miktar belirleyicilerin $(\forall,\exists)$ öğrenciler için alışılmadık olduğunu, bu nedenle bu tanımı anlamakta güçlük çektiklerinden bahsetmiş ve alternatif bir limit tanımı önermiştir. Gillman tarafından önerilen soldan limit tanımı aşağıdaki gibidir:

“ f, (u_o,a) aralığında tanımlı bir fonksiyon , L bir sayı ve f_1 de bu aralıkta düzgün artan bir fonksiyon öyle ki f_1 ‘in grafiği tamamen y=L doğrusunun altında fakat $\forall A < L$ için y=A doğrusunu aşsın. f_2’de yine aynı aralıkta tanımlı, düzgün azalan ve grafiği tamamen y=L doğrusunu üstünde fakat $\forall B > L$ için y=B doğrusunu da aşan bir başka fonksiyon olsun.

Şekil II.1

Gilmann Tarafından Önerilen Bir Fonksiyonun Soldan Limiti



Eğer $\forall x \in (u_o, a)$ için $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$ eşitsizliğini sağlayan yukarıdaki gibi iki fonksiyon varsa L sayısına f Fonksiyonunun a noktasındaki soldan limiti denir ve $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ ile gösterilir (Şekil II.1). Benzer şekilde $x \to a^+$ için f_1 azalan ve f_2

artan fonksiyon alarak $x \to a^{+}$ için limit tanımı yapılabilir. Eğer sağdan ve soldan limit var ve L'ye eşit ise; L'ye f'nin a noktasındaki limiti denir ve $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ile gösterilir.

Todorov (2001) " Klasiğe Dönüş: Sonsuz Küçüklerle Limit Öğretimi " adlı çalışmasını limit öğretmek için geleneksel metoda alternatif arayan matematik öğretmenleri için yazdığını ileri sürmüş ve alışılmış ε, δ limit tanımına denk bir tanım vermiştir. Todorov'a göre bir limitin varlığını belirtmede ε, δ limit tanımında dört miktar belirleyici $(\forall, \exists, \forall, \forall)$ kullanılmakta ve bu nedenle karmaşıklaşmaktadır. Ayrıca bir fonksiyonun ε, δ limit tanımı limit değeri için bir tahmini bir L değeri gerekmektedir. ε, δ limit tanımı L değerini nasıl hesaplayacağımız hakkında herhangi bir ipucu vermemektedir. L için makul bir değer tahmin etmek zorundayız ve bundan sonra ε, δ limit tanımı yardımıyla tahminimizin doğruluğunu ispatlarız yada ispatlayamayız. Eğer fonksiyonun grafiğini biliyorsak L değeri makul olarak tahmin edilebilmektedir. Bu tahmini öğrenciler ne derece yapabilirler? Todorov'un çalışmasında önce sonsuz küçük tanımını yapılmış ve sıfırdan farklı sonsuz küçük dx, keyfi olarak seçilirse f (r+dx) değerinin, L limitini tek olarak belirleyeceği gösterilmiştir. Pratikte bu metodun nasıl işlediğini göstermek için Analizden (Calculus'tan) örnekler sunulmuştur.

Brudney, Keir ve Viruleg (1993) " Limit Kavramının Sezgisel Anlamayı Geliştirmek İçin Tablolama Programı Kullanma" adlı çalışmasının amacının limit kavramını sezgisel bir anlama için öğrencilere kılavuzluk etmek olduğunu belirtmiştir. Bu çalışma dört bağımsız aktivite içermektedir. İlk aktivite geometrik bir aktivitedir. İkinci aktivite; farklı tipteki diziler ve onların davranışlarının tartışıldığı bir aktivitedir. Üçüncü aktivite; dizileri anlayan öğrencilere sonsuz geometrik dizileri anlamak ve bir toplama sahip olma şartlarını keşfetmeleri için bir fırsat veren bir aktivitedir. Dördüncü aktivite ise bir fonksiyonun klasik limit tanımını incelemek ve temel bir fikir edinmek için öğrencilere izin veren bir aktivitedir.

Szydlik (2000) " Matematiksel İnançlar ve Bir Fonksiyonun Limitini Kavramsal Anlama" adlı çalışmasında 27 üniversite Analiz Dersi (Calculus) öğrencisinin matematiksel inançları ve bu inançlar ile limiti anlama arasındaki ilişkiyi araştırmıştır. Bu çalışma iki aşamada yapılmıştır. İlk aşamada üniversite Analiz Dersi (Calculus) öğrencilerine bir anket uygulanmış ve ankete verilen cevaplar doğrultusunda 27 öğrenci seçmiştir. İkinci aşamada ise bu 27 öğrenci ile reel sayılar, sonsuzluk, fonksiyon kavramları ve matematiksel doğruluk ve geçerliğin nasıl kurulduğu hakkındaki inançlarla ilgili görüşmeler yapılmıştır. Görüşmede öğrencilere 8 soru sorulmuştur ve bu sorulara verilen cevapları açıklamaları istenmiştir. Bu sorulardan birisinde öğrencilerden bir limit tanımı yapmaları istenmiştir. Öğrenciler bir fonksiyonun bir noktadaki limiti kavramı tanımına üç şekilde cevap vermişlerdir.

1. *Sezgisel:* x limitinin alındığı s noktasına yakın olduğunda fonksiyonda L'ye yakın oluyorsa fonksiyonun limiti L'dir.
2. *Hareket* : Eğer x, s'ye yaklaşırken fonksiyon da L'ye gittikçe yaklaşıyorsa fonksiyonun limiti L'dir.
3. *Tutarsız veya Alakasız Cevap* : Çok az sayıda öğrenci limitin bir tanımını verememiştir. .

27 öğrencinin hepsi de özellikle grafik sunulduğu zaman hareket tanımını kullanarak limit problemlerini çözmüşlerdir ve çalışmalarını açıklarken hareket tanımını kullanmışlardır. Birkaç öğrenci ya ilerleme yada sonsuz küçük tanım kullanmışlardır. Matematiksel doğruluğu belirlemek için uzmana başvuran öğrenciler daha çok manasız ve uygunsuz limit tanımları vermişler, limiti daha çok sınır veya ulaşılamaz olarak tanımlamışlar. Ayrıca deneysel delil, sezgi, mantık veya tutarlılığa başvuran öğrencilerden daha az olarak, yaptıkları limit problemlerini doğrulayabilmişlerdir. Szydlik elde ettiği bulgular ışığında öğrencilerin Analiz Dersi (Calculus'u); uygulanılan, hatırlanan yöntem ve gerçeklerin bir koleksiyonu olarak gördüğünü ve öğrencilerin bu yöntem ve gerçeklerin altında yatan teoriye değer vermediklerini ve bunları anlamak için de bir çabaları olmadığını saptamıştır.

Bir çok araştırma, teknoloji ile eğitimin öğrenmede öğrenciler üzerinde olumlu etkileri olduğunu desteklemektedir. Bu nedenle limit kavramının formal tanımının anlatıldığı ve değişik örneklerin bulunduğu; ulaşılabilen web sitelerinin adresleri ve bu siteler hakkında kısa bilgiler Ek 3'de verilmiştir.

BÖLÜM III
YÖNTEM

Bu bölümde; araştırmanın modeli, evren, örneklem hakkında bilgiler, verilerin toplanması, araştırmacı tarafından oluşturulan farklı eğitim durumu ile limit kavramının sunumu, verilerin çözümü ve yorumlanmasında kullanılan yöntem ve teknikler açıklanmıştır.

III.1. ARAŞTIRMANIN MODELİ

Lise 3.sınıf matematik programında yer alan limit kavramı öğretimine geleneksel yöntemden farklı eğitim durumunun sunulmaya çalışıldığı bu araştırma; tarama yöntemi ve deneysel yöntem kullanılarak yapılmıştır. Bu nedenle ilk olarak araştırma konusu ile ilgili belgesel tarama yapılmıştır.

Bu araştırmada kontrol gruplu son test deseni kullanılmıştır. Son test gruplu modelde yansız atama ile oluşturulmuş iki grup bulunur. Bunlardan biri deney öteki kontrol grubu olarak atanır (deney sonu ölçme yapılır). Modelin simgesel görünümü

G_1	R	X	$O_{1,2}$
G_2	R	X	$O_{2,2}$

dir. Bu modelde "X" 'in etkisi $O_{1,2}$ ve $O_{2,2}$ ölçmelerinin karşılaştırılmasıyla saptanır (Karasar,1994:98)

Sonuçta, bu iki grup arasındaki ölçümler farkın (varsa) deney değişkeninden, işlemden gelebileceği yargısına varılır (Kaptan, 1998:84).

Grupların matematik dersi limit konusundaki başarıları, deney bitince bir erişi testi ile ölçülmüştür. Araştırma 29'u kontrol ve 32'si deney grubu olmak üzere toplam 61 denek ile yürütülmüştür.

III.2. ÇALIŞMA EVRENİ

Araştırmanın çalışma evreni olarak Ankara ili ortaöğretim okullarından Kanuni Lisesi olarak belirlenmiştir.

III.3. VERİLERİN TOPLANMASI

Araştırma konusu ile ilgili literatür taranarak, bulunanlar araştırmanın kuramsal kısmını oluşturmuştur.

Bu araştırmanın deneysel verilerini elde etmek için araştırmacı tarafından bir erişi testi hazırlanmıştır. Hazırlanan erişi testi (Ek 2), Ortaöğretim Matematik öğretim programında yer alan limit kavramını öğrenmede öğrenci başarısını ölçecek şekilde hazırlanmıştır. Her bir soruda ayrı bir davranış ölçülmek üzere toplam 14 soru sorulmuştur. Erişi testi uzman görüşleri ile güvenilir hale getirilmiştir.

III.4. FARKLI EĞİTİM DURUMUNUN OLUŞTURULMASI

Farklı eğitim durumunun oluşturulmasında öncelikle öğretmenlerle görüşülmüş ve limit konusunu içeren ortaöğretimde kaynak kitap olarak önerilen ders kitapları incelenmiştir. Daha sonra limit konusunun anlatımının yer aldığı Analiz (Calculus) kitapları ve web sayfaları incelenmiştir. Bu aşamadan sonra limit konusu ile yapılmış olan araştırmalarda incelenerek farklı bir eğitim durumu oluşturulmuştur.

III.5. DENEYİN UYGULAMASI

Deney başlamadan önce oluşturulan gruplara bir test uygulanıp her iki grubun seviyelerinin aynı olduğu istatistiksel olarak belirlenmiştir.

Rastgele biri deney diğeri kontrol grubu olarak atanmıştır. Rastgele belirlenen deney grubuna araştırmacı tarafından hazırlanan farklı eğitim durumu ile limit kavramı sunulmuştur.

Araştırmacı tarafından hazırlanan farklı eğitim durumunda aşamalı olarak ;

i) Yakınsama kavramı

ii) Bir dizinin limiti

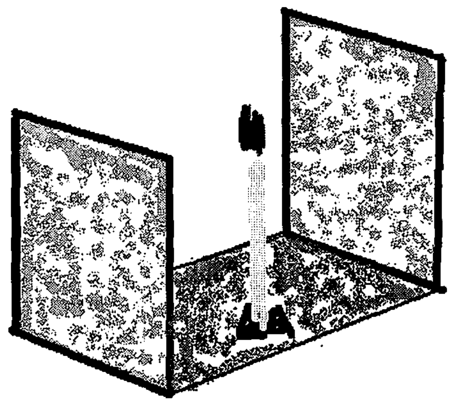
iii) Bir fonksiyonun limiti

kavramları öğrencilere kavrattırılmaya çalışılmıştır.

İlk olarak araştırmacı tarafından "Yakınsama" kavramı ne olduğu iki ayna ile bir mumdan oluşan düzenek (Şekil III.1) yardımı ile buluş yolu öğretim stratejisi, soru-cevap ve gözlem yöntemleri kullanılarak hissettirilmeye çalışılmıştır.

Bu düzenek aynı ebatlarda olan iki ayna ve bir mumdan oluşmaktadır. Aynalar Şekil III.1'deki gibi karşılıklı tutulup arasına yanan mum yerleştirilmiştir. Soru- cevap yöntemi kullanılarak iç içe gözüken aynalardaki mumun alevine dikkatleri çekilmiş ve en içteki aynaya doğru ilerledikçe mum alevleri arasındaki mesafenin nasıl değiştiğine ilişkin yanıtlar aranmıştır.

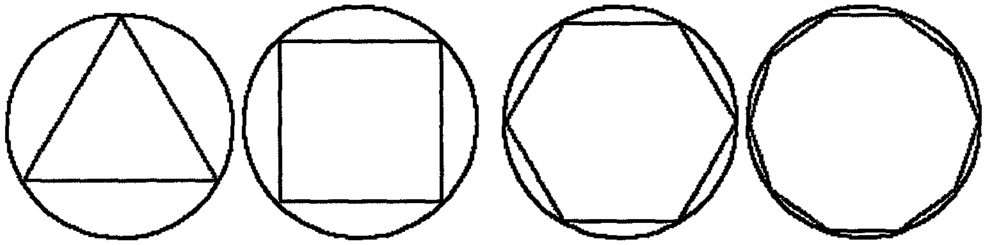
Şekil III.1. Araştırmacı Tarafından Hazırlanan Düzenek



Daha sonra yakınsama kavramının hissedilmesine yönelik olarak http://www.coolmath.com/limit.htm adresinde sunulan "Geometrik Bir Yaklaşım" başlığındaki örnek (Şekil III.2) tepegöz ve asetatlar yardımıyla öğrencilere sunulmuştur.

Bu örnekte her defasında kenar sayısı artırılan bir çember içerisine çizilmiş çokgenler bulunmaktadır. Birinci şekilde bir üçgen, ikincisinde bir dörtgen, üçüncüsünde bir altı gen ve son şekilde bir 10 gen çizilmiştir.

Şekil III.2. Geometrik Bir Örnek



Buluş yolu ile öğretim stratejisi, soru-cevap yöntemi ile öğrencilerin $\lim_{n\to\infty}(n - gen) = çember$'e ulaşmaları sağlanmıştır. Böylece bu örnek ile limit kavramı öğrencilere somut olarak sunulmaya çalışılmış ve limit konusuna da bir giriş yapılmıştır.

"Bir dizinin limiti" kavramı buluş yolu ile öğretim stratejisi, soru-cevap yöntemi ve tepegöz ile öğrencilere kavrattırılmaya çalışılmıştır. Verilen bir dizinin terimleri soru-cevap yöntemi ile öğrencilere buldurtturulmuş daha sonra bu terimler sayı doğrusu üzerinde işaretlettirilmiştir. Bu aşamada terimlerin sayı doğrusundaki yerleri ile ayna-mum düzeneği ve geometrik örnek ile ilişki kurmaları sağlanmıştır. Daha sonra terim sayısı büyüdükçe, dizinin terimlerinin hangi sayıya yaklaştığı öğrenciye buldurtturulmuştur.

Öğrencilerin "Bir dizinin limiti" kavramını davranışa dönüştürmelerini sağlamak için $\left(\frac{1}{n}\right), \left(\frac{2n+2}{2n}\right), \left(\frac{n}{n+1}\right), \left(\frac{5n+3}{n}\right), \left(\frac{5}{n^2}\right), \left(\frac{n+1}{n-1}\right), \left(\frac{1-5n}{5n+1}\right)$ dizilerinin limitleri bulunmuştur. Bunlardan birisinin sunumu aşağıdaki gibidir.

n. terimi $\frac{n}{n+1}$ olan diziye bakalım. Dikkat edelim ki n=1 dizinin ilk terimi, n=2 dizinin ikinci terimi,.... dir.

- Bu dizinin terimleri nasıldır?

n= 1 için $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

n=2 için $\frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$

n=3 için $\frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$

n=4 için $\frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$

....

Gerçekten bu dizinin terimleri

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6},....,\frac{99}{100},....,\frac{999999}{100000},....$$

0.5 , 0.666.. , 0.75 , 0.8, 0.833... ,...., 0.99,...0.999999,.....

şeklindedir.

- n büyüdükçe bu terimlerin çok yakın olduğu bir sayı düşünebiliyor musunuz?
- Bu terimlerden birisi 1 olabilir mi?
- Bunu matematik dili ile nasıl yazarsınız? Bunu

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})=1$$

şeklinde ifade edebiliriz.

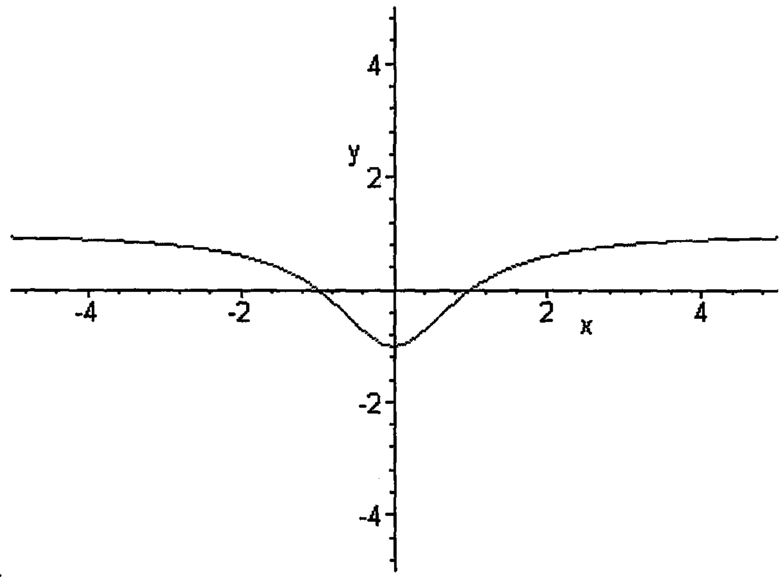
Bu örneklerden sonra anlatım yöntemi ile ara özet yapılmıştır. En son olarak limiti olmayan $(-1)^n$ dizisinin limiti örneğine dikkatleri çekilmiştir.

Bir fonksiyonun bir noktadaki limit kavramı öğretilirken tablo yöntemi ve grafikler kullanılmıştır. Önce bir a sayısına yakın x değerleri ve bu x'lerin f altındaki f(x) görüntüleri öğrencilere buldurtturulmuş ve (x,f(x)) tablosu oluşturmaları istenmiştir. Anlatım yöntemi ile dizinin limiti ile fonksiyonun bir noktadaki limiti arasında bağlantı kurulmuş ve bu tablo yardımıyla soru- cevap yöntemi kullanılarak x, a sayısına sağdan ve soldan yaklaşırken f(x) değerlerinin hangi sayıya yaklaştığı keşfettirilmeye çalışılmıştır.

Öğrencilerin "Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti" kavramını davranışa dönüştürmelerini sağlamak için sunulan örneklerden birisinin sunumu aşağıdaki gibidir.

$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyonun grafiği

şekildeki gibidir.



x büyüdükçe (yani x-ekseni üzerinde sağa doğru gittikçe), f fonksiyonunun x noktalarında aldığı değerler 1'e gittikçe yaklaşıyor görünür. Eğer fonksiyonun bazı x noktalarda almış olduğu birkaç değerini hesaplarsak bu eğilimi görebiliriz.

x=1 için f(1)=0
x=2 için f(2)=0.6
x=5 için f(5)=0.9231
x=10 için f(10)=0.9802
x=100 için f(100)= 0.9998
x=1000 için f(1000)= 0.999998

x	1	2	5	10	100	1000
f(x)	0	0.6	0.9231	0.9802	0.9998	0.999998

x'i yeterince büyük seçersek bu fonksiyonun alacağı değerlerin 1'e yaklaştığını hissedebiliriz. Öyleyse

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1$$

bulunur. Şimdi bu fonksiyonun 1 noktasındaki limitini bulmak için tablo yöntemini kullanalım.

x=0.8 için f(0.8)= 0.2195...
x=0.9 için f(0.9)= 0.104...
x=0.99 için f(0.99)= 0.010049...
x=0.999 için f(0.999)=0.0010004..
x=1 için f (1)=0
x=1.001 için f(1.001)=0.0009995...
x=1.01 için f(1.01)= 0.00995
x=1.1 için f(1.1)= 0.0950226
x=1.2 için f(1.2)= 0.1803278

x	0.8	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.2
f(x)	1.80.2195	0.104..	0.010049.	0.0010004	0	0.0009995.	0.0099	0.095022	0.180327

Tablodan da görüldüğü gibi x, 1'e yaklaştıkça x'in f altındaki görüntüleri 0'a yaklaşmaktadır. Matematiksel olarak bunu

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+1} = 0$$

şeklinde ifade edebiliriz. Şimdi -1'de f fonksiyonunun limitini hesaplamak için yine tablodan yararlanıldı.

x=-0.8 için f(-0.8)= 0.2195...
x=-0.9 için f(-0.9)= 0.104...
x=-0.99 için f(-0.99)= 0.010049...
x=-0.999 için f(-0.999)=0.0010004..
x=-1 için f (-1)=0
x=-1.001 için f(-1.001)=0.0009995...
x=-1.01 için f(-1.01)= 0.00995
x=-1.1 için f(-1.1)= 0.0950226
x=-1.2 için f(-1.2)= 0.1803278

x	-0.8	-0.9	-0.99	-0.999	-1	-1.001	-1.01	-1.1	-1.2
f(x)	1.80.219	0.104..	0.010049.	0.0010004	0	0.0009995.	0.0099	0.095022	0.180327

Tablodan da görüldüğü gibi x, -1'e yaklaştıkça x'in f altındaki görüntüleri 0'a yaklaşmaktadır. Matematiksel olarak bunu

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+1} = 0$$

şeklinde ifade edebiliriz. " 0'da f fonksiyonunun limitinin –1 olduğunu tablo yöntemi kullanarak bulunuz" şeklindeki bir soru öğrencilere bırakıldı.

Daha sonra bu x, f(x) değerleri tepegöz ile gösterilen fonksiyonların grafikleri üzerinde öğrencilere işaretlettirilmiş ve böylece grafik üzerinde x bir a sayısına sağdan ve soldan yakınsarken f(x) değerlerinin yakınsadığı sayı buldurtturulmuştur. En son aşama olarak tepegözle grafiği gösterilen fonksiyonların limitleri sayısal değerler verilmeden direk tahmin yoluyla buldurulmaya çalışılmıştır.

Bu şekilde öğrenciler, $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ fonksiyonunun 1 ve -1 noktasındaki; $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ fonksiyonunun 1 noktasındaki; $f(x)=x+4$ fonksiyonunun 2 noktasındaki; $f(x)=x^2+1$ fonksiyonunun 2 noktasındaki; $f(x)=\dfrac{|2x-4|}{x-2}$ fonksiyonunun 2 noktasındaki ve son olarak $f(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonunun 0 noktasındaki limitlerini bulmuşlardır.

Bu fonksiyonların her biri farklı özelliklere sahip olacak şekilde seçilmiştir. Bu sayede öğrencilerin bazı yanlış davranış kazanmalarının önüne geçilmeye çalışılmıştır.

Kontrol grubunda limit kavramı geleneksel yöntemlerle sunulmuştur. (Ek 3) Şöyle ki; önce sağdan ve soldan limit kavramlarının tanımı ve sonra bu tanımlar yardımıyla limit tanımı verilmiş ve bundan sonra örneklerle çözüm yolları öğrencilere takdim edilmiştir.

Deney bitince her iki gruba da erişi testi uygulanmıştır. Elde edilen veriler saklanmış ve sonuçları yorumlanmıştır.

III.6.VERİ TOPLAMA ARACININ GELİŞTİRİLMESİ

Her bir soruda ayrı bir davranış ölçülmek üzere son testte (Ek 2) toplam 14 soru sorulmuştur. Bu sorular üç farklı soru tipinden oluşmaktadır. 1. ve 2. sorular çoktan seçmeli , 3., 4.,5.,10., 11., 12., 13.,14. sorular açık uçlu ve 6., 7.,8.,9.,11., sorular çoktan seçmelidir. Yalnız 1. ve 2. sorularda öğrencilerin seçtikleri seçenekleri niçin ve neden seçtiklerine ilişkin açıklama istenmiştir.

III.7. VERİLERİN ÇÖZÜMLENMESİ VE YORUMLANMASI

Araştırmanın 1., 2. ve 3. alt problemlerini test etmek için erişi testinde üç farklı soru tipine yer verilmiştir. Bu sorular çoktan seçmeli, açık uçlu ve çoktan seçmeli fakat kısa cevap gerektiren sorulardır.

Her bir soruda deney ve kontrol grubundaki öğrenci başarısı ayrı ayrı incelenmiştir. Her soru için tablolar hazırlanmıştır. Çoktan seçmeli sorularda deney ve kontrol grupları erişi puanları arasındaki farklılığı ölçmek için t-testi kullanılmıştır. Hata payı α=0,05 olarak alınmıştır.

Açık uçlu sorularda öğrencilerin verdikleri cevaplar, benzerliklerine göre araştırmacı tarafından ve uzman görüşleri ile gruplandırılmış, yüzdeleri alınmış ve deney ile kontrol grubu arasında anlamlı bir fark olup olmadığına bakılmıştır.

BÖLÜM IV

BULGULAR VE YORUMLAR

Bu bölümde araştırmada ele alınan alt problemlerin sınanması için araştırma verilerinin istatistiksel çözümlemeleri sonucunda elde edilen bulgulara ve yorumlara yer verilmiştir. Geleneksel yöntemden farklı olarak geliştirilen eğitim durumunun öğrencilerin limit kavramını öğrenmedeki başarılarına etkisine ilişkin bulgu ve yorumlar alt problem sırasına göre gösterilmiştir.

a) Birinci Alt Probleme İlişkin Bulgu ve Yorumlar

Birinci alt problemde, " "Bir Dizinin Limiti" kavramını öğrenmede deney ve kontrol grubu arasında anlamlı bir fark var mıdır?" sorusuna cevap aranmıştır.

Bir dizinin limiti kavramını öğrenmede, deney ve kontrol grubu arasındaki fark incelenirken üç farklı yönden yaklaşılmıştır. Terimleri ve genel terimi verilen dizinin limitini bulmada ve bir dizinin limiti tanımını bilmede deney ve kontrol grubu arasındaki farka bakılmış ve elde edilen bulgulardan birinci alt problem test edilmiştir.

Birinci alt problemi test etmek için erişi testinde (Ek 2) 1., 2. ve 3. sorular sorulmuştur. 1. ve 2. soru çoktan seçmeli olup, öğrencilerden işaretledikleri seçeneği neden seçtikleri de sorulmuştur. 3. soru açık uçlu bir sorudur.

Soru 1. Terimleri $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{8},\cdots$ olan dizinin limiti aşağıdakilerden hangisidir ? Kısaca sebebini yazınız.

a) 1 b) 0 c) Limit yok d) ∞

1. soruda; terimleri verilen bir dizinin limiti sorulmuştur. 1. soruya verilen cevapların deney ve kontrol grubuna göre dağılımı Tablo IV.1' de gösterilmiştir.

Tablo IV. 1

1. Soruya Verilen Cevapların Deney ve Kontrol Grubuna Göre Dağılımı

Soru 1										
Grup		**a(n)**	**%**	**b*(n)**	**%**	**c(n)**	**%**	**d(n)**	**%**	**Σ (n)**
	Deney	-	0	30	93,75	-	0	2	6,25	32
	Kontrol	-	0	29	100	-	0	-	0	29

(* Doğru cevap seçeneği)

Deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin 1. sorudaki erişi puanları arasında anlamlı fark olup olmadığını belirlemek amacıyla yapılan t-testi sonuçları Tablo IV. 2'de gösterilmiştir.

Tablo IV.2

Erişi Testi Soru 1'deki Erişiler Açısından Deney ve Kontrol Grubu Puanları Farklılığı

Gruplar	**N**	$\overline{X}$	**s**	**t**	**p**
Kontrol	29	1,0000	0,0000	-1,367	0,177
Deney	32	1,0625	0,2459		

Tablo IV.2 incelendiğinde deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin 1. sorudaki erişi puanları arasında (p>0,05) anlamlı fark olmadığı görülmektedir.

Kontrol grubundaki doğru seçeneği işaretleyen öğrenciler tarafından verilen gruplandırılmış cevaplar ve yüzdeleri Tablo IV. 3' de ve deney grubundaki yanlış seçeneği işaretleyen öğrenciler tarafından verilen gruplandırılmış cevaplar ve yüzdeleri Tablo IV. 4'te ve deney grubundaki doğru seçeneği işaretleyen öğrenciler tarafından verilen gruplandırılmış cevaplar ve yüzdeleri Tablo IV. 5' de gösterilmiştir.

Tablo IV. 3

1. Soruda Doğru Seçeneği İşaretleyen Kontrol Grubundaki Öğrencilerin Verdikleri Gruplandırılmış Cevaplar ve Yüzdeleri

Grup	Öğrencilerin Verdikleri Cevaplar	n	Σ(n)	%
Kontrol	Sayı 1'den başlayıp küçüldüğü için	2	5	17,24
	Sayı küçüldüğü için sıfıra gider	1		
	Payda büyüyüp pay sabit kaldığından sıfıra yaklaşır	2		
	$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{\infty}$ olduğu için	3	5	17,24
	$\frac{1}{\infty}=0$ olduğu için	1		
	$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{\infty}$ ve $\frac{1}{\infty}=0$	1		
	Payı paydasından küçük olduğu için, limit sıfıra yaklaştığı için	1	3	10,34
	Limit sıfıra yaklaştığı için	2		
	Payı paydasından küçük olduğu için	11	11	37,93
	Sıfıra yaklaşıyor	2	2	6,9
	$\frac{1}{\infty}$ olduğu için belirsizlik var	2	2	6,9
	Paylar 1 olarak devam edip sonsuz olduğu için	1	1	3,45
	Toplam	29	29	100

Tablo IV.3 incelendiğinde kontrol grubundaki öğrencilerin % 10,34' ü sayıların sıfıra yaklaşması yerine; limitin sıfıra yaklaştığını belirttikleri görülmektedir. Bu cevap öğrencilerin limit tanımını bilmediğini gösterir. Bu şöyle yorumlanabilir: Bloom'a göre; bir kavramın tanımı bilme, sorunca söyleme gibi davranışlar bilgi basamağında davranışlar iken bir problemi çözme uygulama basamağında bir davranıştır. Fakat bu; öğrencilerin limitin tanımını bilmeksizin problemi çözmüş olmaları öğrencilerin bilgi basamağında eksik oldukları ve bu bilgiyi ezbere öğrenmiş oldukları şeklinde yorumlanabilir.

%10,35'i (%6,9 +% 3,45) kabul edilebilir bir açıklama getirememiş, % 37,93'ü ise; "payı paydasından küçük olduğu için" cevabı vermiştir. $\left(\frac{2n}{2n+1}\right)$ dizisinin de payı paydasından küçüktür. Fakat bu limitinin sıfır olması anlamına gelmemektedir. Bu nedenle bu öğrencilerin verdikleri cevapta kabul edilebilir bir cevap değildir.

% 6,9'u ise sadece sıfıra yaklaşıyor cevabı vermiştir. Bu öğrencilerin $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ eşitliğini hatırladıkları, bir neden gösteremedikleri saptanmıştır. Bu şöyle yorumlanabilir: Bloom'a göre; görünce hatırlama, sorunca söyleme bilgi basamağında bir davranış iken, nedenini ve niçinini söyleme kavrama basamağında bir davranıştır. Bu nedenle bu öğrencilerin $\left(\frac{1}{n}\right)$ dizisinin limitinin 0 olduğunu bildikleri fakat neden 0 olduğunu bilmedikleri göz önüne alınırsa; bu öğrencilerin bu bilgiyi bilgi basamağında öğrendikleri fakat kavrama basamağına çıkamadıkları söylenebilir.

Tablo IV. 3 'den kontrol grubundaki öğrencilerin % 17,24' ü sayıların 1'den başlayıp azalarak sıfıra yaklaştığını ve bu nedenle limitin sıfır olduğu cevabını verdikleri görülmektedir. Bu noktada öğrencilerin "Dizi" kavramını önceden bildikleri dikkate alınacak olursa, bu dizide negatif sayı olmayacağı ve bu nedenle de terim sayısı büyüdükçe dizinin terimlerinin sıfıra daha yakın bir sayı olacağını düşünmeleri ihtimali vardır. Bu kabul edilebilir bir cevaptır. Bu öğrencilerin $\left(\frac{1}{n}\right)$ dizisinin limitinin neden 0 olduğunu bildikleri söylenebilir.

Öğrencilerin % 17,24'ü $\frac{1}{\infty}=0$ eşitliğini belirtmişler. Todorov (2001) "Klasiğe Dönüş: Sonsuz Küçük İle Limit Öğretimi" adlı makalesinde bu eşitliği yazmıştır. Bu seviyede öğrencilerin genişletilmiş reel sayılar cümlesini bilmedikleri dikkate alınırsa, bu kabul edilebilir bir cevap olamaz fakat ders kitaplarında sıkça rastlanıldığı ve öğretmenler tarafından da bu gösterimin kullanıldığı göz önünde tutulursa, uzman görüşleri ile bu öğrencilerin verdikleri cevap kabul edilebilir bir cevaptır.

Elde edilen bulgular ışığında kontrol grubundaki öğrencilerin % 100'ü terimleri $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{8},\cdots$ olan dizinin limitinin 0 olduğunu bilmesine rağmen yalnızca % 34,48'i kabul edilebilir bir cevap verdiği saptanmıştır. Bu şu şekilde yorumlanabilir: Geleneksel yöntem ile $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ eşitliği verilip, bu eşitliğin doğruluğu epsilon-delta limit tanımı ile ispatlandığı için öğrencilerin bu bilgiyi neden veya niçini bilmeden yani ezbere öğrendikleri söylenebilir.

Tablo IV. 4

1. Soruda Yanlış Seçeneği İşaretleyen Deney Grubundaki Öğrencilerin Verdikleri Gruplandırılmış Cevaplar ve Yüzdeleri

Grup	∞ cevabını verenler	n	Σ(n)	%
Deney	Sonsuzdur rakamlar gittikçe küçülüyor limit 1 ve 0 olamaz sayılar arttığı için limit sonsuzdur.	1	2	6,25
	Sonsuzdur Bu sayılar değer bakımından ilerledikleri için	1		
	Toplam	2	2	6,25

Tablo IV. 5

1. Soruda Doğru Seçeneği İşaretleyen Deney Grubundaki Öğrencilerin Verdikleri Gruplandırılmış Cevaplar ve Yüzdeleri

Grup	Öğrencilerin Verdikleri Cevaplar	n	Σ(n)	%
Deney	Bu kesirler gittikçe sıfıra yaklaştığı için cevabı sıfırdır.	1	25	78,12
	1, 0.5,0,3 ...., 0 olduğu için 0 'a yaklaştığı için	6		
	Sayılar sıfıra yaklaştığı için limit sıfırdır.	7		
	Sayılar 1'den 0'a yaklaşıyor limiti 0'dır.	4		
	Çünkü dizideki sayılar küçülüyor ve dolayısıyla 0'a gidiyor	2		
	Dizinin terimleri 1'den 0'a doğru gidiyor.1'den başlayıp paydası devamlı artıyor ve sonuçta sayı azalıyor 0'a gidiyor yani sonuç 0'dır	1		
	Çünkü 1 sayısından küçülüyor negatif değer de alamayacağı için limiti 0'dır.	2		
	Sıfıra gider çünkü kesrin paydasındaki sayılar 2,3,4,.. sayıları arttıkça sayı azalıyor ve bu nedenle 0'a gider.	1		
	Sayı ilerledikçe 0'a yaklaşıyor bu nedenle limit 0'dır.	1		
	Dizideki sayılar 0 sayısına yaklaşmaktadır.Buna soldan limiti de alınmış diyebiliriz	1	3	9,375
	Sayılar küçüldüğü için limit 0'dır.	2		
	Sayılar sonsuza değil sıfıra yaklaştığı için sıfırdır	1	1	3,125
	Payda küçüldüğü için sayı sonunda sıfıra eşit olur.	1	1	3,125
	Toplam	30	30	93,75

Deney grubundaki öğrencilerin % 93,75' i doğru seçeneği işaretlemiştir. Tablo IV. 5 incelendiğinde; deney grubundaki öğrencilerin %3,125' inin " Sayılar sıfıra değil sonsuza yaklaştığı için" cevabını verdikleri görülmektedir. Bu kabul edilebilir bir cevap değildir. Bu cevap doğrultusunda deney grubundaki öğrencilerin % 3,125' inin limitin ya sonsuz yada sıfır olması gerektiğini düşündükleri söylenebilir.

% 3,125' i ise " Payda küçüldüğü için sayı sıfıra eşit olur " cevabını vermiştir. Fakat paydanın küçülmesi limitin 0 olması anlamına gelmeyeceğinden bu kabul edilebilir bir cevap değildir.

% 9,375' i ise "Sayılar küçüldüğü için veya sadece sayılar 0' a yaklaşmaktadır" cevabı vermiştir. Dizinin terimlerinin giderek küçülmesi limitinin 0 olacağı anlamına gelmediğinden bu cevap kabul edilebilir bir cevap değildir.

Deney grubundaki öğrencilerin % 78,125'i sayıların 1'den başlayıp azalarak sıfıra yaklaştığını ve bu nedenle limitin sıfır olduğu cevabını verdikleri görülmektedir. Bu kabul edilebilir bir cevaptır. Dolayısıyla verilen cevaplar doğrultusunda deney grubundaki öğrencilerin % 78,125'i kabul edilebilir bir cevap vermiştir.

Elde edilen bulgular ışığında, deney grubundaki öğrencilerin % 93,75' ü terimleri $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{8},\cdots$ olan dizinin limitinin 0 olduğunu bilmesine rağmen yalnızca % 78,125'inin kabul edilebilir bir cevap verdiği saptanmıştır. Bu şu şekilde yorumlanabilir: Bloom'a göre; görünce hatırlama, sorunca söyleme bilgi basamağında bir davranış iken, nedenini ve niçinini söyleme kavrama basamağında bir davranıştır. Bu nedenle deney grubundaki öğrencilerin % 78,125'inin terimleri verilen bir dizinin limiti kavramını kavrama basamağında öğrendikleri söylenebilir.

Doğru sonuca ulaşmada deney ve kontrol grubu arasında anlamlı bir fark çıkmamasına rağmen verilen cevaplar doğrultusunda kontrol grubundaki öğrencilerin yalnızca % 34,48'i kabul edilebilir bir cevap verirken deney grubunda bu oran % 78,125 dır. Dolayısıyla terimleri $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{8},\cdots$ olan dizinin limitinin 0 olduğunu kontrol grubundaki öğrencilerin çoğunluğu bilgi basamağında öğrenmelerine rağmen, deney grubundaki öğrencilerin çoğunluğunun bunu kavrama basamağında öğrendikleri söylenebilir. Terimleri $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{8},\cdots$ olan dizi daha sonra gelebilecek karmaşık sorular için temel teşkil ettiği ve verilebilecek diğer sorular içinde aynı mantık ile sonuç bulunabileceği için bu sonuç "Terimleri verilen bir dizinin limiti" kavramını öğrenmede deney ve kontrol grubu arasındaki farkı göstermektedir.

Elde edilen bulgular doğrultusunda "Terimleri Verilen Bir Dizinin Limiti" kavramını öğrenmede deney ve kontrol grubu arasında deney grubu lehine anlamlı bir fark olduğu saptanmıştır.

Soru 2. n. terimi $\frac{n}{n+1}$ olan diziyi göz önüne alalım. Bu dizinin limiti yani $\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})$ aşağıdakilerden hangisidir? Kısaca sebebini yazınız.

a) 0 **b)** 1 **c)** ∞ **d)** limit yok

2. soruya verilen cevapların deney ve kontrol grubuna göre dağılımı Tablo IV. 6' da gösterilmiştir.

Tablo IV. 6

2. Soruya Verilen Cevapların Deney ve Kontrol Grubuna Göre Dağılımı

Soru 2												
Grup		a(n)	%	b*(n)	%	c(n)	%	d(n)	%	Boş	%	Σ(n)
	Deney	1		27	84,3	4		-	0	-		32
	Kontrol	1		24	82,8	3		-	0	1		29

(* Doğru cevap seçeneği)

Deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin 2. sorudaki erişi puanları arasında anlamlı fark olup olmadığını belirlemek amacıyla yapılan t-testi sonuçları Tablo IV. 7'de gösterilmiştir.

Tablo IV. 7

Erişi Testindeki Soru 2'deki Erişiler Açısından Deney Ve Kontrol Grubu Puanları Farklılığı

Gruplar	N	$\overline{X}$	s	t	p
Kontrol	29	1,2069	0,4913	0,312	0,649
Deney	32	1,1563	0,3689		

Tablo IV. 7. incelendiğinde deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin 2. sorudaki erişi puanları arasında ($p>0.05$) anlamlı fark olmadığı görülmektedir.

Kontrol grubundaki doğru seçeneği işaretleyen öğrencilerin verdiği araştırmacı tarafından gruplandırılmış cevaplar ve yüzdeleri Tablo IV. 8'de, soruya yanlış cevap veren öğrencilerin verdiği araştırmacı tarafından gruplandırılmış cevaplar ve yüzdeleri Tablo IV. 9'da ve deney grubundaki soruya doğru cevap veren öğrencilerin verdiği araştırmacı tarafından gruplandırılmış cevaplar ve yüzdeleri Tablo IV.10' da soruya yanlış cevap veren öğrencilerin verdiği araştırmacı tarafından gruplandırılmış cevaplar ve yüzdeleri Tablo IV. 11'de gösterilmiştir.

Tablo IV. 8

2. Soruda Doğru Seçeneği İşaretleyen Kontrol Grubundaki Öğrencilerin Verdikleri Gruplandırılmış Cevaplar ve Yüzdeleri

Grup	Öğrencilerin Verdikleri Cevaplar	n	Σ(n)	%
	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\infty}{\infty+1} = \frac{\infty}{\infty} = 1$ sonsuzla toplanan bir sayı veya sonsuzdan bir sayı çıkarıldığında sonuç yine ∞ dur. Dolayısıyla $\frac{\infty}{\infty}$ =1 dur	1		
	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\infty}{\infty+1} = \frac{\infty}{\infty} = 1$	1		
	$1, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ..., \frac{\infty}{\infty+1}, \frac{\infty}{\infty}$ =1 kendisiyle sayının bir fazlasının bölümü sonsuz sayıda 1'in etkisi olmadığından cevap 1'dir.	6		
	$\frac{\infty}{\infty+1} = \frac{\infty}{\infty} = 1$	1		
	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\infty}{\infty+1} = 1$	2		
	$\frac{\infty}{\infty}$ =1	4		
Kontrol	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine göre n nin katsayılar oranıdır.	2	23	79,31
	$\frac{\infty}{\infty}$ sadeleştirme yapıldığından sonuç 1 dir	2		
	n' ye değerler verdiğimizde $1, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, ..., \frac{\infty}{\infty+1}$ çıkar sonsuzun bir sayı ile toplamı ∞ olduğundan $\frac{\infty}{\infty}$ =1 dir. Bu nedenle $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{\infty}{\infty+1} = \frac{\infty}{\infty} = 1$	3		
	$\frac{\infty}{\infty}$ =1 olur. n'ye değerler verdiğimizde $\frac{\infty}{\infty+1}$ böylece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{\infty}{\infty+1} = \frac{\infty}{\infty} = 1$	1		
	n=5 için $\lim\limits_{5\to\infty} \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, ..., \frac{n}{n+1} = 1$ n=6 için $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{\infty}$	1	1	3,45
	Toplam	24	24	82,76

Tablo IV. 9

2. Soruda Yanlış Seçeneği İşaretleyen Kontrol Grubundaki Öğrencilerin Verdikleri Gruplandırılmış Cevaplar ve Yüzdeleri

Grup	İşaretlenen seçenek	Öğrencilerin Verdikleri Kısa Cevaplar	n	Σ(n)	%
Kontrol	0	$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$ n yerine ∞ yazıldığında $\frac{\infty}{\infty}$ olduğundan payı paydasından küçük olduğundan	1	1	3,45
	∞	$\frac{\infty}{\infty}$ belirsiz olduğu için	1	3	10,35
		$\frac{n}{n+1}=\frac{\infty}{\infty+1}$ buda sonsuzdur.	1		
		$\frac{\infty}{\infty+1}=\frac{\infty}{\infty}$	1		
		Boş	1	1	3,45
Toplam			5	5	17,25

Kontrol grubundaki öğrencilerin % 3,45'inin bu soruya cevap vermemiştir. Tablo IV. 8 incelendiğinde % 79,31' u ∞'u bir reel sayı gibi düşünüp reel sayılarda yapılan toplama, sadeleştirme işlemlerini yaptıkları görülmektedir. Kontrol grubundaki öğrencilerin % 3,45' inin limit kavramı hakkında bir fikre sahip olmadığı söylenebilir. Dolayısıyla kontrol grubundaki öğrencilerin %79,31' u doğru cevap seçeneğini işaretlemelerine rağmen hiçbirinin kabul edilebilir bir cevap vermemiştir.

Tablo IV. 9 incelendiğinde yanlış cevap seçeneğini işaretleyen kontrol grubundaki öğrencilerin de doğru cevap veren öğrenciler gibi; n yerine ∞ değerini vererek işlem yaptıkları görülmektedir.

Elde edilen bulgular ışığında kontrol grubundaki öğrencilerin genel terimi verilen dizinin limitini bulma işlemini doğru olarak yapabildikleri fakat bu işlemin limit kavramı ile ilişkisini kuramadıkları söylenebilir.

Tablo IV. 10

2. Soruda Doğru Seçeneği İşaretleyen Deney Grubundaki Öğrencilerin Verdikleri Gruplandırılmış Cevaplar ve Yüzdeleri

Grup	Öğrencilerin Verdikleri Cevaplar	n	Σ(n)	%
Deney	$\frac{n}{n}=1$ olduğundan limit 1'dir.	1	17	53,125
	$\frac{n}{n+1}$ katsayı oranları 1 olur.	16		
	Değer veririz.1 için 0.5 ,2 için 0.6 3 için 0.75 ... sayılar giderek 1'e yaklaşıyor.	8	10	31,25
	n için verilen tüm değerler 1'e yaklaştığı için	1		
	n'ye değerler verelim 1' e yaklaşır.	1		
	$\frac{\infty}{\infty+1}$ lim 1'e gider.	1	1	3,125
	Toplam	28	28	87,5

Tablo IV. 11

2. Soruda Yanlış Seçeneği İşaretleyen Deney Grubundaki Öğrencilerin Verdikleri Gruplandırılmış Cevaplar ve Yüzdeleri

Grup	İşaretlenen seçenek	Öğrencilerin verdikleri kısa cevaplar	n	Σ(n)	%
Deney	0	n=1 için $\frac{1}{2}$ n=2 için $\frac{2}{3}$ ... n sayısı arttıkça dizideki limitte 0 sayısına yaklaşmaktadır .Buna n'ye değer vererek görebiliriz	1	1	3,125
	∞	n sayısı sonsuza bağlanmıştır.	1	3	9,375
		$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\infty}{\infty+1}$ olduğu için	1		
		Çünkü n sonsuza gitmektedir. n'nin sonsuza giderken $\frac{n}{n+1}$ deki limitini bulmamız gerekiyor	1		
	Toplam		4	4	12,5

2. soruya deney grubundaki öğrencilerin % 87,5' i doğru cevap vermiştir. Tablo IV.10 incelendiğinde deney grubundaki öğrencilerin % 3,125' i doğru cevap vermesine rağmen neden $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ dizisinin limitinin 1 olduğuna mantıklı bir açıklama getiremedikleri görülmektedir.

Deney grubundaki öğrencilerin % 53,125' i ise dereceleri eşit olduğundan n' lerin katsayıları oranı olduğunu belirtmişlerdir. Bu cevap uzman görüşleri ile kabul edilebilir bir cevap değildir. Çünkü bu şekilde sonucun tahmin edilmesi öğrencilerin limit problemini çözebildiklerini, fakat gerçekten " Limit " kavramını bilip bilmediklerini açıkça göstermemektedir.

Deney grubundaki öğrencilerin % 31,25' i n' ye değerler vererek, terim sayısı büyüdükçe terimlerin 1' e yaklaştığını belirtmişlerdir. Bu kabul edilebilir bir cevaptır.

Tablo IV.11 incelendiğinde deney grubundaki öğrencilerden % 12,5'i yanlış şıkkı işaretlemesine rağmen limit kavramını öğrendikleri fakat sonucu yanlış tahmin ettiği söylenebilir. Fakat yine de bu kabul edilebilir bir cevap değildir.

Bu sonuçlar deney grubundaki öğrencilerin % 31,25'inin sonucu doğru tahmin edip kabul edilebilir bir cevap verdiklerini göstermektedir.

Sonuç olarak 2. soruda doğru sonuca ulaşmada deney ve kontrol grubu arasında anlamlı fark çıkmamasına rağmen verilen cevaplar doğrultusunda kontrol grubundaki öğrencilerden hiçbirisi kabul edilebilir bir cevap veremezken, deney grubundaki öğrencilerin % 31,25' i kabul edilebilir bir cevap vermiştir. Elde edilen bulgular doğrultusunda " Genel terimi verilen bir dizinin limiti " kavramını öğrenmede, deney ve kontrol grubu arasında deney grubu lehine anlamlı bir fark olduğu saptanmıştır. Bu şu şekilde yorumlanabilir: Bloom'a göre bir olgunun nedenini ve niçini bilme, kavrama basamağında davranışlar iken hatırlama sorunca söyleme bilgi basamağındaki davranışlardır. Kontrol grubundaki öğrenciler sonucu doğru tahmin etmelerine rağmen nedeni ve niçini bilmedikleri için bilgi basamağında bunu öğrenirken; deney grubundaki öğrencilerin "Genel terimi verilen bir dizinin limiti" kavramını kavrama basamağında öğrendikleri söylenebilir.

Soru 3. Genel terimi $\frac{2n+3}{n}$ olan dizinin limitinin 2 yani; $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n}=2$ olmasından ne anlıyorsunuz bir kaç cümle ile yazınız.

3. soru açık uçlu bir sorudur. Bu soruda bir dizinin limitinin bir L sayısı olmasından ne anladıkları ölçülmeye çalışılmıştır. Kontrol grubu tarafından verilen gruplandırılmış cevaplar ve yüzdeleri Tablo IV. 12' de ve deney grubu tarafından verilen gruplandırılmış cevaplar ve yüzdeleri Tablo IV. 13' de gösterilmiştir.

Tablo IV. 12

Kontrol Grubundaki Öğrencilerin 3. Soruya Verdikleri Gruplandırılmış Cevaplar ve Yüzdeleri

Grup	Öğrencilerin verdiği cevaplar	n	Σ(n)	%
Kontrol	n'nin katsayısına bakılarak bulunur	2	12	41,38
	Terimlerin dereceleri eşittir.Bu nedenle n'nin katsayısına bakılarak bulunur	7		
	$\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği olduğu için n'nin katsayılar oranına bakılır.	1		
	Sayılar sonsuza giderken 3 ün hiçbir değeri kalmaz yani limit n katsayılar oranıdır	2		
	Limit sonsuza yakınsarken limit 2 oluyor yani limit sonsuzda 2 'yi gösteriyor $\frac{\infty}{\infty}$ olduğu için	1	14	48,27
	n yerine sonsuz yazarız ve hangi belirsizlik ortaya çıkarsa ona göre işlem yaparız. Sonuç 2 çıkarsa $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n}=2$ nin limiti vardır. Çıkmıyorsa $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n}=2$ nin limiti yoktur.	4		
	Sonsuz sayılarda 3 ün etkisi yoktur $\frac{2n+3}{2}=2$ gibi	7		
	$\frac{\infty}{\infty}$ belirsiz olduğu için	1		
	$\frac{2n+3}{2}$ sayısının alabileceği minimum değer 2 dir Örneğin n=1000 $\frac{2000+3}{1000}=2{,}003$	1		
	Boş	3	3	10,34
	Toplam	29	29	100

Kontrol grubundaki öğrencilerin % 10,34 ' ü 3. soruya cevap vermemiştir. Tablo IV. 12 incelendiğinde; kontrol grubundaki öğrencilerin % 89,66' sının 3. soruya cevap vermesine rağmen % 48,27'inin mantıklı bir açıklama getiremedikleri görülmektedir. % 41,38' i ise n' nin katsayılarına bakılarak limitin 2 olması gerektiğini belirtmişlerdir. Bu kabul edilebilir bir cevap değildir. Çünkü bu soruda bir dizinin limitinin bir L sayısı olmasından ne anladıkları ölçülmeye çalışılmıştır. Fakat verilen cevaplara bakıldığında kontrol grubundaki öğrencilerin % 41,38' inin limitin nasıl bulunduğunu ifade ettikleri dolayısıyla işlemsel görüşe sahip oldukları söylenebilir.

Sonuç olarak kontrol grubundaki öğrencilerin hiçbirisi bir dizinin limitinin bir L sayısı olmasına kabul edilebilir bir cevap veremedikleri görülmektedir.

Tablo IV. 13

Deney Grubundaki Öğrencilerin 3. Soruya Verdikleri Gruplandırılmış Cevaplar ve Yüzdeleri

Grup	Öğrencilerin verdiği cevaplar	n	Σ(n)	%
Deney	n yerine değer verilirse sayı 2'ye yaklaştığı için limit 2'dir.	16	16	50
	Pay ve paydadaki n'nin sayıların katsayıları oranıdır.	8	8	25
	Paydanın yani n'nin sonsuza gittiğini anlıyorum $n \to \infty$ a giderken limitini bulmamız gerekiyor	1		
	Limit 2'den başlayarak sonsuza doğru gider	1	3	9,375
	Limit en fazla 2 olabilir 2'ye kadar gider.	1		
	Genel terimi $\frac{2n+3}{n}$ dizisinin 2 noktasında limitinin olduğunu ve bu limitin 2'ye eşit olduğunu anlıyorum	1		
	Bu terimin 2 eşitliğinde tanımlı olduğunu anlıyorum	1	5	15,625
	Limit $n \to \infty$ yaklaşırken $\frac{2n+3}{n}$ nin limitinin 2 olduğunu anlıyorum	3		
	Toplam	32	32	100

Deney grubundaki öğrencilerin % 9,375'inin bir dizinin limitinin bir L sayısı olmasına mantıklı açıklama getiremedikleri ve % 15,625' nin ise soruyu anlamadıkları ve sadece yazılan matematiksel ifadenin okunuşunu yazdıkları Tablo IV. 13' den görülmektedir.

Deney grubundaki öğrencilerin % 25'i ise Tablo IV. 13' de görüldüğü gibi n' nin katsayılarına bakıldığı zaman limitin 2 olacağını ifade etmişlerdir. Bu soruda bir dizinin limitinin bir L sayısı olmasından ne anladıkları ölçülmeye çalışıldığı için bu kabul edilebilir bir cevap değildir. Bu öğrencilerin işlemsel görüşe sahip oldukları söylenebilir.

Öğrencilerin % 50'si ise; Tablo IV. 13' de görüldüğü gibi n'ye değerler verdiği zaman sayıları gittikçe 2'ye yaklaştığını ve limitin 2 olduğu cevabını vermişlerdir. Bu kabul edilebilir bir cevaptır. Dolayısıyla deney grubundaki öğrencilerden %50'sinin bir dizinin limitinin L sayısı olmasına kabul edilebilir bir açıklama getirdikleri söylenebilir.

Sonuç olarak kontrol grubundaki öğrencilerin hiçbiri kabul edilebilir bir cevap veremezken, deney grubundaki öğrencilerin % 50'inin bir dizinin limitinin L olmasına kabul edilebilir bir açıklama getirdikleri görülmektedir. Elde edilen ışığında bulgular bir dizinin limitinin L sayısı olmasını öğrenmede deney ve kontrol grubu arasında deney grubu lehine anlamlı bir fark olduğu saptanmıştır.

Bir dizinin limiti kavramını öğrenmede, deney ve kontrol grubu arasındaki fark incelenirken üç farklı yönden yaklaşılmıştır. Terimleri verilen dizinin limitini bulmada (Soru 1) ve genel terimi verilen dizinin limitini bulmada (Soru 2) ve bir dizinin limiti tanımını bilmede (Soru 3) deney ve kontrol grubu arasındaki farka bakılmış ve bulunan bulguların sonucundan hareketle birinci alt problem test edilmiştir.

Soru 1, 2 ve 3' den elde edilen bulgular şu şekilde özetlenebilir:

i) Terimleri verilen bir dizinin limitini tahmin etmede deney ve kontrol grubu arasında anlamlı bir fark çıkmamıştır. Fakat neden bu cevabı seçtiklerine ilişkin verdikleri cevaplarda, deney grubundaki öğrencilerin %78,125'i kabul edilebilir bir cevap verirken, kontrol grubundaki öğrencilerin sadece % 34,48 'i kabul edilebilir bir cevap vermiştir.

ii) Genel terimi verilen dizinin limitini tahmin etmede deney ve kontrol grubu arasında anlamlı bir fark çıkmamıştır. Fakat neden bu cevabı seçtiklerine ilişkin verdikleri cevaplarda, deney grubundaki öğrencilerin %31,25'i kabul edilebilir bir cevap verirken, kontrol grubundaki öğrencilerin hiçbiri kabul edilebilir bir cevap verememiştir.

iii) Bir dizinin limitinin bir L sayısı olmasına deney grubundaki öğrencilerin % 50'si kabul edilebilir bir cevap verirken, kontrol grubundaki öğrencilerin hiçbiri kabul edilebilir bir cevap vermemiştir. Kontrol grubundaki öğrencilerin % 41,38'i bu limitin nasıl bulunduğunu ifade ederken deney grubundaki öğrencilerin sadece % 25 'i bu limitin nasıl bulunduğunu ifade etmiştir.

Elde edilen bulgular " " Bir Dizinin Limiti " kavramını öğrenmede deney ve kontrol grubu arasında deney grubu lehine anlamlı bir fark olduğunu göstermektedir.

Elde edilen bulgular doğrultusunda geleneksel yöntemle (yani önce dizinin limiti tanımı verilip, ardından limit problemlerinin çözülmesi ve sonucun doğruluğunun epsilon-delta tanımı ile doğrulattırılması ile) "Bir dizinin limiti kavramı" verilen öğrencilerin bir dizinin limitiyle ilgili problemleri çözebildikleri fakat yaptıkları işlemin ne anlama geldiği; yani nedenleri ve niçinleri hakkında yorum yapamadıkları göstermektedir. Bu şu şekilde yorumlanabilir: Bir durum yada olgunun neden ve niçinlerine cevap verebilme Bloom'a göre kavrama basamağında bir davranıştır. Bunu gerçekleştiremeyen bir öğrencilerin bilgi basamağında olduğu ve bunun da önceki ezbere eğilimden kaynaklandığı söylenebilir.

b) İkinci Alt Probleme İlişkin Bulgu ve Yorumlar

İkinci alt problemde, " "Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti " kavramını öğrenmede deney ve kontrol grubu arasında anlamlı bir fark var mıdır ?" sorusuna cevap aranmıştır.

İkinci alt problemi test etmek için erişi testinde (Ek 2) 5.,6.,7.,8.,9.,10. ve 11. sorular sorulmuştur.

Bir fonksiyonun bir a noktasındaki limiti bulunurken; fonksiyonun a noktasındaki sağdan ve soldan limitine bakılır, eğer a noktasında sağdan ve soldan limiti var ve birbirine eşit ise bu fonksiyonun a noktasında limiti vardır denilir. Dolayısıyla bir fonksiyonun, bir noktadaki limiti kavramının öğrenilmesi için bir fonksiyonun bir noktadaki sağdan ve soldan limiti kavramının öğrenilmesi ön şart bir davranışlardan birisidir.

Bir fonksiyonun bir noktadaki sağdan ve soldan limiti ve bu noktadaki limiti kavramını öğrenmede deney ve kontrol grubu arasında fark olup olmadığını test etmek için (her bir soru farklı bir davranışı ölçecek şekilde) erişi testinde aşağıdaki soru tiplerine yer verilmiştir.

- Bir a sayısına yakın x sayıları ve bu x'lerin herhangi bir f fonksiyonu altındaki görüntülerinden (f(x)' lerden) oluşan tablo verilerek, o fonksiyonun a noktasındaki limitinin bulunması (soru 5).
- Grafiğinde, bir a noktasında sıçrama olan ve o noktada tanımlı olmayan herhangi bir parçalı fonksiyonun a noktasındaki limitinin bulunması (soru 6).
- Grafiğinde, bir a noktasında sıçrama olan ve o noktada tanımlı olan herhangi bir parçalı fonksiyonun a noktasındaki sağdan ve soldan limitinin bulunması (soru 7).
- Sürekli bir fonksiyonun bir noktadaki limitinin bulunması (soru 8).

- Bir a noktasında sürekli olmayan bir fonksiyonun (yani a noktasındaki limiti, a noktasındaki değerine eşit olamayan) bir fonksiyonun limitinin bulunması. (soru 9).
- Limiti ∞ olan bir fonksiyonun limitinin bulunması (soru 10).
- Sadece kuralı verilen bir fonksiyonun kritik noktadaki limitinin bulunması (Soru 11).

Soru 5. f(x)=$\frac{(x^2-1)}{x-1}$ fonksiyonunu göz önüne alalım x'in -1 'e yakın olduğu yerlerde f fonksiyonunun aldığı değerler aşağıda verilmiştir. Aşağıdaki tabloyu inceleyerek bu fonksiyonun x=-1 deki limitini bulunuz.

x=-0.8 için f(-0.8)= 0.2
x=-0.9 için f(-0.9)= 0.1
x=-0.99 için f(-0.99)= 0.01
x=-0.999 için f(-0.999)=0.001
x=-1 için f(-1)=0
x=-1.001 için f(-1.001)=0.001
x=-1.01 için f(-1.01)= 0.01
x=-1.1 için f(-1.1)= 0.1
x=-1.2 için f(-1.2)= 0.2

x	-0.8	-0.9	-0.99	-0.999	-1	-1.001	-1.01	-1.1	-1.2
f(x)	0.2	0.1	0.01	0.001	0	0.001	0.01	0.1	0.2

5. soruda bir a noktasına yakın x sayıları ve x sayılarına karşılık gelen f(x) değerleri öğrencilere verilmiş, öğrencilere verilen fonksiyonun bu a noktasındaki limitini sorulmuştur.

Deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin 5. sorudaki erişi puanları arasında anlamlı fark olup olmadığını belirlemek amacıyla yapılan t-testi sonuçları Tablo IV. 14' de gösterilmiştir.

Tablo IV. 14

Erişi Testi Soru 5'deki Erişiler Açısından Deney ve Kontrol Grubu Puanları Farklılığı

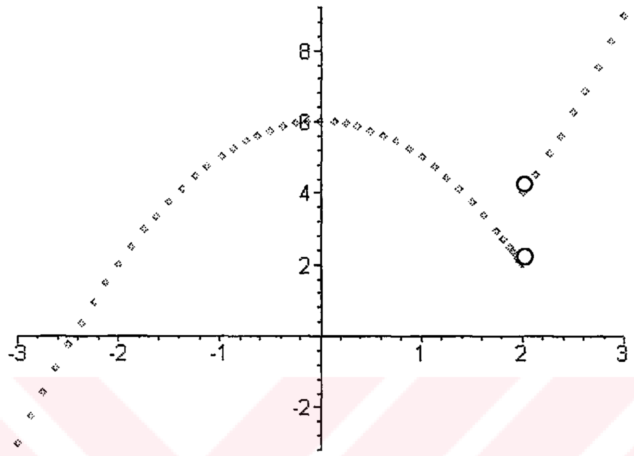
Gruplar	N	$\overline{X}$	s	t	p
Kontrol	29	1,2069	0,6199		
Deney	32	1,0938	0,3902	0,862	0,392

Tablo IV. 14 incelendiğinde deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin 5. sorudaki erişi puanları arasında ($p>0,05$) anlamlı fark olmadığı görülmektedir. Elde edilen bulgular deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin; bir a noktası yakınındaki x sayılarına karşılık f(x) değerlerinden oluşan tablo verildiğinde ve bu a noktasındaki limiti sorulduğunda iki grubun erişilerinde fark olmadığını göstermektedir. Fakat kontrol grubundaki öğrencilerin bu sonuca ulaşırken verilen x sayılarını ve f(x) değerlerini dikkate almadıkları (yani yakınsama kavramını kullanmadıkları) ve

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}\frac{(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x\to -1} x+1 = 0$$

cevabını verdikleri dikkate alınırsa; kontrol grubundaki öğrencilerin hazır modellerle soruya yaklaşım sergiledikleri tespit edilmiştir. Deney grubundaki öğrenciler ise; -1 sayısına yaklaşıldıkça f fonksiyonun 0 noktasına yaklaştığını ve limitin bu nedenle 0 cevabını verdikleri tespit edilmiştir. Bu şu şekilde yorumlanabilir: Kontrol grubundaki öğrencilerin verilen bilgileri kullanmadıkları yani yorum yapmadıkları ve sadece işlemsel olarak soruya cevap verdikleri fakat deney grubundaki öğrencilerin ise verilen bilgiler ışığında yorum yaparak doğru sonuca ulaştıkları söylenebilir.

Soru 6. Aşağıda grafiği verilen $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6 & x < 2 \\ x^2 & x > 2 \end{cases}$ fonksiyonunun x=2 noktasındaki limiti $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?



a) 2 b) 4 c) Limit yok d) 2

6. soruda parçalı bir fonksiyonun limiti sorulmuştur. Bu fonksiyon bir 2 noktasında tanımlı değil, 2 noktasında sağdan ve soldan limiti farklı olduğu için bu noktada limiti olmayacak şekilde seçilmiştir.

Deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin 6. sorudaki erişi puanları arasında anlamlı fark olup olmadığını belirlemek amacıyla yapılan t-testi sonuçları Tablo IV. 15' de gösterilmiştir.

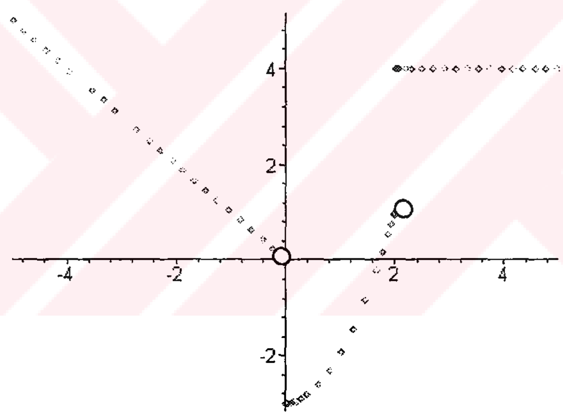
Tablo IV. 15

Erişi Testi Soru 6' deki Erişiler Açısından Deney ve Kontrol Grubu Puanları Farklılığı

Gruplar	N	$\overline{X}$	s	t	p
Kontrol	29	1,1379	0,3509	1,521	0,134
Deney	32	1,0313	0,1768		

Tablo IV. 15 incelendiğinde deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin 6. sorudaki erişi puanları arasında (p>0,05) anlamlı fark olmadığı görülmektedir. Aslında bu beklenen bir sonuçtur. Çünkü bu soru öğrencilerin alışık olduğu soru tipindendir. Bu şu şekilde yorumlanabilir: Öğrencilerin alışkın olduğu tipte sorulan bir soru sorulduğunda deney ve kontrol grubunun erişileri arasında anlamlı fark olmadığı söylenebilir.

Soru 7. Aşağıda grafiği verilen $f(x)=\begin{cases} -x & , \quad x<0 \\ x^2-3 & , \quad 0\le x<2 \\ 4 & , \quad x\ge 2 \end{cases}$ fonksiyonunu göz önüne alalım.



Buna göre aşağıdakileri cevaplayınız.

i) Bu fonksiyonun x=2 noktasında sağdan limiti $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

a) 4 **b)** 1 **c)** 0 **d)**-3

ii) Bu fonksiyonun x=2 noktasında soldan limiti $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

a) 1 **b)** 4 **c)** 0 **d)**-3

iii) $\lim_{x \to 2} f(x)$ nedir?

a) 1 **b)** 4 **c)** limit yok **d)**-3

7. soru üç şıklı bir sorudur. i şıkkında parçalı bir fonksiyonun bir noktadaki sağdan limiti, ii şıkkında aynı fonksiyonun aynı noktada soldan limiti, iii şıkkında ise yine aynı noktadaki limiti sorulmuştur. Bu sayede " Bir fonksiyonun bir noktada sağdan ve soldan limitini bulma, eğer sağdan ve soldan limiti var ve eşit (diyelim ki L) ise bu fonksiyonun o noktada limiti vardır ve L 'dir" bilgisine sahip olup olmadıkları ölçülmeye çalışılmıştır.

Deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin 7. sorudaki i, ii, iii şıklarındaki erişi puanları arasında anlamlı fark olup olmadığını belirlemek amacıyla yapılan t-testi sonuçları sırasıyla Tablo IV.16, Tablo IV. 7 ve Tablo IV.18' de gösterilmiştir.

Tablo IV. 16

Erişi Testi Soru 7 i' deki Erişiler Açısından Deney ve Kontrol Grubu Puanlarının Farklılığı

Gruplar	N	$\overline{X}$	s	t	p
Kontrol	29	1,2759	0,4549		
Deney	32	1,0625	0,2459	2,308	0,025

Tablo IV.16 incelendiğinde deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin 7. sorunun i şıkkındaki erişi puanları arasında ($p<0,05$) anlamlı fark olduğu görülmektedir. Bu ise " Bir fonksiyonun bir noktada sağdan limitini bulmada" deney ve kontrol grubu arasında kontrol grubu lehine anlamlı bir fark olduğunu göstermektedir.

Tablo IV. 17

Erişi Testi Soru 7 ii' deki Erişiler Açısından Deney ve Kontrol Grubu Puanlarının Farklılığı

Gruplar	N	$\overline{X}$	s	t	p
Kontrol	29	1,4828	0,6877		
Deney	32	1,0938	0,2961	2,917	0,005

Tablo IV.17 incelendiğinde deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin 7. sorunun ii şıkkındaki erişi puanları arasında (p<0,05) anlamlı fark olduğu görülmektedir. Bu ise "Bir fonksiyonun bir noktada soldan limitini bulmada" deney ve kontrol grubu arasında kontrol grubu lehine anlamlı bir fark olduğunu göstermektedir.

Tablo IV. 18

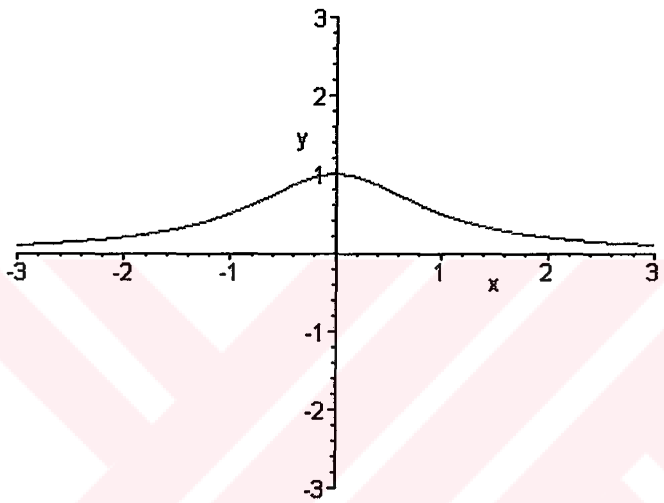
Erişi Testi Soru 7 iii' deki Erişiler Açısından Deney ve Kontrol Grubu Puanlarının Farklılığı

Gruplar	N	$\overline{X}$	s	t	p
Kontrol	29	1,3103	0,7123		
Deney	32	1,0000	0,0000	2,467	0,017

Tablo IV.18 incelendiğinde deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin 7. sorunun iii şıkkındaki erişi puanları arasında (p<0,05) anlamlı fark olduğu görülmektedir.

Dolayısıyla 7. sorudan elde edilen bulgular "Bir fonksiyonun bir noktada sağdan ve soldan limitini bulma, eğer sağdan ve soldan limiti var ve eşit (diyelim ki L) ise bu fonksiyonun o noktada limiti vardır ve L 'dir" bilgisine sahip olup olmada deney ve kontrol grubu arasında kontrol grubu lehine anlamlı bir fark olduğunu göstermektedir.

Soru 8. $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ ile verilen f fonksiyonunun x=2 noktasındaki limiti $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{1+x^2}$ aşağıdakilerden hangisidir.?



a) 0 **b)** $\dfrac{1}{5}$ **c)** limit yok **d)** 1

8. soruda sürekli bir fonksiyonun limiti sorulmuştur. Deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin 8. sorudaki erişi puanları arasında anlamlı fark olup olmadığını belirlemek amacıyla yapılan t-testi sonuçları Tablo IV.19'da gösterilmiştir.

Tablo IV. 19

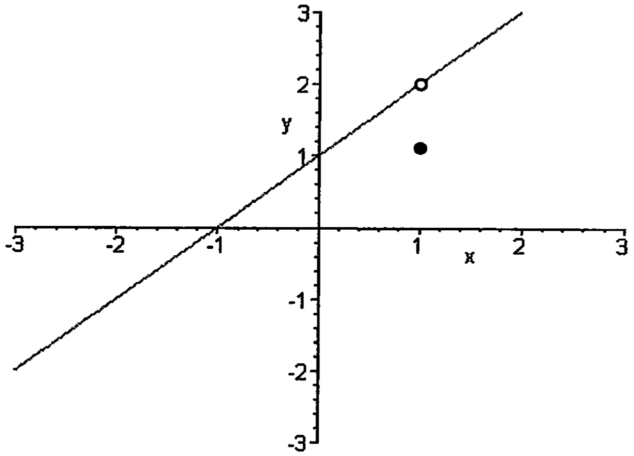
Erişi Testi Soru 8'deki Erişiler Açısından Deney ve Kontrol Grubu Puanlarının Farklılığı

Gruplar	N	$\overline{X}$	s	t	p
Kontrol	29	1,6552	0,7209	4,047	0,000
Deney	32	1,0938	0,2961		

Tablo IV.19 incelendiğinde deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin 8. soruda erişi puanları arasında ($p<0,05$) anlamlı fark olduğu görülmektedir.

8. sorudan elde edilen bulgular sürekli bir fonksiyonun bir noktada limitini bulmada deney ve kontrol grubu arasında kontrol grubu lehine anlamlı bir fark olduğunu göstermektedir.

Soru 9. Aşağıda grafiği verilmiş olan ve $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & , \quad x\neq 1 \\ 1 & , \quad x=1 \end{cases}$ ile verilen f fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyonun x=1 deki limiti $\lim_{x\to 1} f(x)$ aşağıdakilerden hangisidir ?



a) 2 **b)** $\frac{1}{5}$ **c)** Limit yok **d)** 0

9. soruda sürekli olmayan ve süreksizlik noktasında limiti var olan parçalı bir fonksiyonun limiti sorulmuştur. Deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin 9. sorudaki erişi puanları arasında anlamlı fark olup olmadığını belirlemek amacıyla yapılan t-testi sonuçları Tablo IV.20'de gösterilmiştir.

Tablo IV. 20

Erişi Testi Soru 9' deki Erişiler Açısından Deney ve Kontrol Grubu Puanlarının Farklılığı

Gruplar	N	$\overline{X}$	s	t	p
Kontrol	29	2,0690	0,2579	8,176	0,000
Deney	32	1,2813	0,4568		

Tablo IV. 20 incelendiğinde deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin 9. soruda erişi puanları arasında ($p<0,05$) anlamlı fark olduğu görülmektedir.

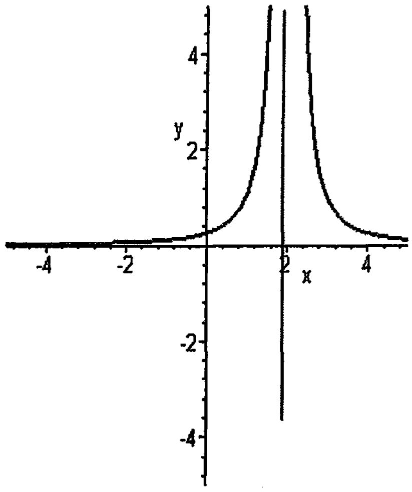
9. sorudan elde edilen bulgular sürekli olmayan ve fakat süreksizlik noktasında limiti var olan parçalı bir fonksiyonun limitini bulmada deney ve kontrol grubu arasında kontrol grubu lehine anlamlı bir fark olduğunu göstermektedir.

Soru 10. Aşağıda grafiği verilmiş olan ve $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$ ile verilen f fonksiyonu göz önüne alalım. Buna göre grafiği kullanarak bu fonksiyonun x=2 noktasındaki;

a) Sağdan limitini bulunuz

b) Soldan limitini bulunuz

c) Bu fonksiyonun x=2 noktasında limiti var mıdır? Neden?



10. soru üç şıklı bir sorudur. Limiti ∞ olan bir fonksiyonun limiti sorulmuştur. i şıkkında bu fonksiyonun bu noktadaki sağdan limiti, ii şıkkında aynı fonksiyonun aynı noktadaki soldan limiti, iii şıkkında ise yine aynı noktadaki limiti sorulmuştur. Bu sayede " Bir fonksiyonun bir noktada sağdan ve soldan limiti var ve eşit (diyelim ki L) ise bu fonksiyonun o noktada limiti vardır ve L 'dir ve L, ∞ dur " bilgisine sahip olup olmadıkları ve ölçülmeye çalışılmıştır. Bu sorunun 7. sorudan farkı L'nin ∞ olmasıdır.

Deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin 10. sorudaki i, ii, iii şıklarındaki erişi puanları arasında anlamlı fark olup olmadığını belirlemek amacıyla yapılan t-testi sonuçları sırasıyla Tablo IV.21, Tablo IV.22 ve Tablo IV.23' de gösterilmiştir.

Tablo IV. 21

Erişi Testi Soru 10 i'deki Erişiler Açısından Deney ve Kontrol Grubu Puanlarının Farklılığı

Gruplar	N	$\overline{X}$	s	t	p
Kontrol	29	2,4828	0,5085	4,642	0,000
Deney	32	1,6563	0,8273		

Tablo IV. 21 incelendiğinde deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin 10. sorunun i şıkkındaki erişi puanları arasında ($p<0,05$) anlamlı fark olduğu görülmektedir. Limiti ∞ olan bir fonksiyonun bir noktada sağdan limitini bulmada deney ve kontrol grubu arasında kontrol grubu lehine anlamlı bir fark olduğunu göstermektedir.

Tablo IV. 22

Erişi Testi Soru 10 ii'deki Erişiler Açısından Deney ve Kontrol Grubu Puanlarının Farklılığı

Gruplar	N	$\overline{X}$	s	t	p
Kontrol	29	2,4828	0,5085	4,642	0,000
Deney	32	1,6563	0,8273		

Tablo IV. 22 incelendiğinde deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin 10. sorunun ii şıkkındaki erişi puanları arasında ($p<0,05$) anlamlı fark olduğu görülmektedir. Limiti ∞ olan bir fonksiyonun bir noktada soldan limitini bulmada deney ve kontrol grubu arasında kontrol grubu lehine anlamlı bir fark olduğunu göstermektedir.

Tablo IV. 23

Erişi Testi Soru 10 iii' deki Erişiler Açısından Deney ve Kontrol Grubu Puanlarının Farklılığı

Gruplar	N	$\overline{X}$	s	t	p
Kontrol	29	2,4138	0,6278	3,094	0,003
Deney	32	1,8125	0,8590		

Tablo IV. 23 incelendiğinde deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin 10. sorunun iii şıkkındaki erişi puanları arasında ($p<0,05$) anlamlı fark olduğu görülmektedir.

10. sorunun i, ii, iii şıklarından elde edilen bulgular limiti ∞ olan bir fonksiyonun bir noktada limitini bulmada deney ve kontrol grubu arasında kontrol grubu lehine anlamlı bir fark olduğunu göstermektedir.

Bu soruda i, ii ve iii 'de deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin cevaplarının bulunduğu bir tablonun yapılmasına ihtiyaç duyulmuştur. Bu tablonun yapılmasının sebebi; deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin sağdan ve soldan limit tanımlarını bilip, bu tanımları limit tanımı ile birleştirmedeki erişileri arasındaki farka bakabilmektir.

10. soruya kontrol grubundaki öğrencilerin verdiği araştırmacı tarafından gruplandırılmış cevaplar ve yüzdeleri Tablo IV. 24' te , deney grubundaki öğrenciler tarafından verilen ve araştırmacı tarafından gruplandırılmış cevaplar ve yüzdeleri Tablo IV. 25' de gösterilmiştir.

Tablo IV. 24

Kontrol Grubundaki Öğrencilerin 10. Soruya Verdikleri Gruplandırılmış Cevaplar ve Yüzdeleri

<table>
<tr><th>Grup</th><th>Öğrencilerin verdikleri cevaplar</th><th>n</th><th>Σ(n)</th><th>%</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Kontrol</td><td>a) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{(x-2)^2}=\dfrac{1}{4}$ b) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{(x-2)^2}=\dfrac{1}{10}$ c) limit yok</td><td>1</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">6,9</td></tr>
<tr><td>a) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{(x-2)^2}=\dfrac{1}{4}$ b) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{(x-2)^2}=\dfrac{1}{16}$ c) limit yok</td><td>1</td></tr>
<tr><td>a) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{(x-2)^2}=\dfrac{1}{0^+}$ b) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{(x-2)^2}=\dfrac{1}{0^-}$ c) $\lim\limits_{x\to 2^+}=\lim\limits_{x\to 2^-}$ olduğu için 0 dır.</td><td>5</td><td>5</td><td>17,24</td></tr>
<tr><td>a) $\dfrac{1}{(x-2)^2}=\dfrac{1}{4}$ b) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{(x-2)^2}=\dfrac{1}{4}$ c) hem sağdan hem soldan olduğu için limit x=2 de yoktur.</td><td>3</td><td>3</td><td>10,34</td></tr>
<tr><td>a)x=2 y=0 b) x=2 y=0 c) yoktur limit 0 dır</td><td>4</td><td>4</td><td>13,8</td></tr>
<tr><td>a)sağdan yaklaşınca küçülür –1 değerini alır b)soldan yaklaşınca limiti 1 dir c) x=2 noktasında limiti 0 dır</td><td>1</td><td>1</td><td>3,45</td></tr>
<tr><td>Boş</td><td>14</td><td>14</td><td>48,27</td></tr>
<tr><td>Toplam</td><td>29</td><td>29</td><td>100</td></tr>
</table>

Tablo IV. 24 incelendiğinde kontrol grubundaki öğrencilerden % 48,27'sinin bu soruya cevap vermedikleri görülmektedir.

% 6,9'u ise sağdan ve soldan limiti yanlış fakat farklı bulmuşlar ve buldukları sonuçlar doğrultusunda limit yok cevabı vermişlerdir. Uzman görüşleri ile bu cevap kabul edilebilir değildir. Bu öğrencilerin sağdan ve soldan limit kavramını bilmedikleri söylenebilir.

% 10,34'ü ise sağdan ve soldan limiti bir şekilde yanlış fakat farklı olarak aynı bulmuşlar ve bunun sonucunda ise limit yok cevabı vermişlerdir. Dolayısıyla cevapları kabul edilebilir değildir. Bu öğrencilerin hem sağdan ve soldan limit kavramını bilmedikleri ve hem de bu kavramları limit kavramı ile birleştiremedikleri söylenebilir.

Tablo IV. 24 incelendiğinde % 31,3 (% 13,8 + % 3,45)' ünün ise ya x' e değerler vererek y' yi buldukları yada sağdan yaklaşırsa –1 soldan yaklaşırsa 1 değerini alır ve bu noktadaki limiti 0' dır cevabını verdikleri görülmektedir. Bu öğrencilerin cevapları kabul edilebilir değildir.

%17,24'ü ise sağdan limiti $\frac{1}{0^+}$ ve soldan limiti $\frac{1}{0^-}$ olarak bulmuşlar, sağdan ve soldan limitin eşit olduğundan limitin o noktada var olduğunu fakat sonucun 0 olduğunu belirtmişlerdir. Bu öğrencilerin sağdan ve soldan eşit limiti buldukları ve bu nedenle bu noktada limitin var olduğunu bildikleri görülmektedir. Fakat burada öğrenciler $\frac{1}{0^+} = \frac{1}{0^-} = 0$ yanlış kavramına da sahip oldukları görülmektedir. Ancak öğrencilerin verdikleri cevap uzman görüşleri ile kabul edilebilir bir cevaptır.

Tablo IV. 25

Deney Grubundaki Öğrencilerin 10. Soruya Verdikleri Gruplandırılmış Cevaplar ve Yüzdeleri

Grup	Öğrencilerin verdikleri cevaplar	n	Σ(n)	%
Deney	a) ∞ b) ∞ c) Limit var	10	19	59,37
	a) ∞ b) ∞ c) ∞	6		
	a) ∞ b) ∞ c) Boş	3		
	a) 2 b)- 2 c) limit sağdan ve soldan eşit değildir ve yoktur.	5	8	25
	a) $\frac{1}{2^2(-2)^2}=\frac{1}{4+4}=\frac{1}{8}$ b) $\frac{1}{1^2-1^2}=\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{1}{4+4}=\frac{1}{8}$ vardır sağdan limit soldan limite eşit	1		
	c) x=2 noktasında limit yoktur çünkü sağdan limit soldan limite eşit değildir	1		
	a) $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{1}{(2-2)^2}=\frac{1}{0}$ b) $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{1}{(-2-2)^2}=\frac{1}{16}$ c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}=\frac{1}{(2-2)^2}=\frac{1}{0}$	1		
	Boş	5	5	15,62
	Toplam	32	32	100

Tablo IV. 25 incelendiğinde deney grubundaki öğrencilerden % 15,62'sinin bu soruya cevap vermediği ve % 25'inin kabul edilebilir cevap vermedikleri görülmektedir.

% 59,37'si ise doğru sonucu bulmuşlardır. Aslında bu soruda sonuca nasıl ulaştıkları ölçülmeye çalışılmıştır fakat sorunun sorulma tarzından dolayı öğrencilerin sadece sonucu tahmin ettikleri ve bu nedenle yalnızca cevabı verdikleri ve bu nedenle uzman görüşleri ile cevapları kabul edilebilir cevaptır.

Soru 11.

$$f : \Re \to \Re$$
$$x \to f(x) = \begin{cases} x-1 & , x \leq 1 \\ 2x & , x > 1 \end{cases}$$

ile verilen f fonksiyonunun 1 noktasındaki limitini bulunuz?

a) 1 b) 0 c) limit yok d) 2

11. soruda parçalı bir fonksiyon verilmiş ve bu fonksiyonun kritik noktadaki limiti sorulmuştur. Deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin 11. sorudaki erişi puanları arasında anlamlı fark olup olmadığını belirlemek amacıyla yapılan t-testi sonuçları Tablo IV.26' da gösterilmiştir.

Tablo IV. 26

Erişi Testi Soru 11'deki Erişiler Açısından Deney ve Kontrol Grubu Puanlarının Farklılığı

Gruplar	N	X	s	t	p
Kontrol	29	1,2414	0,5110	0,751	0,456
Deney	32	1,1563	0,3689		

Tablo IV. 26 incelendiğinde deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin 11. sorudaki erişi puanları arasında (p>0,05) anlamlı fark olmadığı görülmektedir.

11. sorudan elde edilen bulgular; kuralı verilen bir fonksiyonun kritik noktadaki limitini bulmada deney ve kontrol grupları arasında anlamlı fark olmadığını göstermektedir.

İkinci alt problemi test etmek için erişi testinde sorulan 5., 6., 7., 8., 9., 10. ve 11. sorulardan elde edilen bulgular şu şekilde özetlenebilir:

i) Deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin; bir a noktası yakınındaki x sayılarına karşılık f(x) değerlerinden oluşan tablo verildiğinde ve bu a noktasındaki limiti sorulduğunda iki grubun erişilerinde fark olmadığını göstermektedir. Fakat kontrol grubundaki öğrencilerin bu sonuca ulaşırken verilen x sayılarını ve f(x) değerlerini dikkate almadıkları yani yakınsama kavramını kullanmadıkları ve

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to -1} x + 1 = 0$$

cevabını verdikleri dikkate alınırsa; kontrol grubundaki öğrencilerin hazır modellerle soruya yaklaşım sergilemişlerdir. Deney grubundaki öğrenciler ise; -1 sayısına yaklaşıldıkça f fonksiyonun 0 noktasına yaklaştığını ve limitin bu nedenle 0 olduğunu söylemişlerdir (soru 5).

ii) Öğrencilerin alışkın olduğu tipte bir soruda deney ve kontrol grubu arasında anlamlı fark olmadığı söylenebilir (soru 6).

iii) "Bir fonksiyonun bir noktada sağdan ve soldan limitini bulma, eğer sağdan ve soldan limiti var ve eşit (diyelim ki L) ise bu fonksiyonun o noktada limiti vardır ve L 'dir" bilgisine sahip olup olmada deney ve kontrol grubu arasında deney grubu lehine anlamlı bir fark olduğunu göstermektedir (soru 7).

iv) Sürekli bir fonksiyonun bir noktada limitini bulmada deney ve kontrol grubu arasında deney grubu lehine anlamlı bir fark olduğunu göstermektedir (soru 8).

v) Sürekli olmayan ve o noktada limiti var olan parçalı bir fonksiyonun limitini bulmada deney ve kontrol grubu arasında deney grubu lehine anlamlı bir fark olduğunu göstermektedir (soru 9)

vi) Limiti ∞ olan bir fonksiyonun bir noktada limitini bulmada deney ve kontrol grubu arasında deney grubu lehine anlamlı bir fark olduğunu göstermektedir (soru 10).

vi) Kuralı verilen bir fonksiyonun kritik noktadaki limitini bulmada deney ve kontrol grupları arasında anlamlı fark olmadığını göstermektedir (soru 11).

Elde edilen bulgular "Bir Fonksiyonun Bir Noktadaki Limiti " kavramını öğrenmede deney ve kontrol grubu arasında deney grubu lehine anlamlı bir fark vardır " şeklinde ifade edilen alt problemini doğrulamaktadır.

Aslında 5. ve 6. soru öğrencilerin alışık oldukları limit problemleridir. 5. soruda fonksiyonun kuralı ve belli bir nokta civarındaki aldığı değerler verilmiştir. 6. soru bu değerler verilmeden sorulmuştur. 5. soruda öğrencilerden bu değerlerden hareketle bu fonksiyonun bu noktadaki limiti bulmaları beklenmesine rağmen kontrol grubundaki öğrenciler bu değerleri dikkate almayarak rutin işlemler yaparak sonuca ulaşırken; deney grubundakiler ise yakınsama kavramını kullanarak sonuca ulaşmışlardır. 5. ve 6. sorularda deney ve kontrol grubu arasında erişi puanları arasında anlamlı bir fark bulunamamasına rağmen kontrol grubundaki öğrenciler işlemsel görüşe sahipken deney grubundaki öğrencilerin işlem ile kavram arasında bağ kurdukları ve sonuca bu doğrultuda ulaştıkları söylenebilir.

11. soruda ise sadece kuralı verilen parçalı bir fonksiyonun limiti sorulmuştur. Bu soruda öğrencilerin alıştığı tipten bir sorudur ve bu sorunun 6. sorudan farkı; 6. soruda fonksiyon limitine bakılacak olan noktada tanımlı değil iken; 11. soruda fonksiyon o noktada tanımlıdır. 11. soruda da 5. ve 6. soruda olduğu gibi deney ve kontrol grubu arasında erişi puanlarında anlamlı bir fark bulunamamıştır.

Bu sonuçlar doğrultusunda alışılmış rutin problemler sorulduğunda deney ve kontrol grubu arasında erişi puanlarında anlamlı bir fark olmadığı söylenebilir.

7. soruda sağdan, soldan limit bulmada, 8. soruda sürekli bir fonksiyonun limitini bulmada, 9. soruda sürekli olmayan fakat o noktada limiti olan bir fonksiyonun limitini bulmada ve 10. soruda limiti ∞ olan bir fonksiyonun limitini

bulmada deney ve kontrol grubu arasında kontrol grubu lehine anlamlı bir fark bulunmuştur.

Elde edilen bulgular şu şekilde yorumlanabilir: Bir problem yada sistemin yapısını tanıma; problemin öğeleri arasındaki ilişkileri belirleme, bir problemdeki ilke ve genellemeleri tanıma gibi davranışlar Bloom' a göre analiz basamağında bir davranış iken, daha önceden öğrenilen kuramsal ifadelerin ve genellemelerin yeni problemlerde kullanılması yani problemi çözmek uygulama basamağında bir davranıştır. Dolayısıyla geleneksel yöntemle öğrencilerin bir fonksiyonun limitini uygulama basamağında öğrenirken, deney grubundaki öğrencilerin analiz basamağında öğrendikleri söylenilebilir.

c) Üçüncü Alt Probleme İlişkin Bulgu ve Yorumlar

Üçüncü alt problemde, "Limitin formal tanımı öğrenmede deney ve kontrol grubu arasında anlamlı bir fark var mıdır ?" sorusuna cevap aranmıştır.

Üçüncü alt problemi test etmek için erişi testinde (Ek 2) 4., 12., 13. ve 14. sorular sorulmuştur.

Limitin formal tanımı verilirken sağdan ve soldan yakınsama kavramları öğrencilerin öğrenmesi gerekli olan ön davranışlardan birisidir.

Soru 4. x bir değişkeni a da bir sabit bir reel sayıyı göstersin. $x \neq a$ olmak üzere reel sayı doğrusu üzerinde ;
a) x değişkeninin a sayısına sağdan yakınsaması ,
b) x değişkeninin a sayısına soldan yakınsaması ,
deyimlerinden anladıklarınızı birkaç cümle ile yazınız.

4. soru açık uçlu bir sorudur ve bu soruda reel eksen üzerinde bir x değişkenin bir a sayısına sağdan ve soldan yakınsama kavramını bilgi basamağında öğrenmede deney ve kontrol grubu arasında deney grubu lehine anlamlı bir fark olup olmadığı ölçülmeye çalışılmıştır.

Öztunç (1972) yakınsama kavramını aşağıdaki gibi ifade etmiştir :

x bir değişkeni a bir sabiti göstermek üzere $x \neq a$ olmak üzere x değişkeni sonsuz sayıda değerler alabiliyor ve sonunda a' dan farkı istenildiği kadar küçük oluyorsa, x a' ya doğru gidiyor veya x a değişkenine yakınsıyor denir ve $x \to a$ veya $\lim x = a$ şeklinde yazılır. a' ya x' in limiti denir. Bunun diğer tanımı şöyledir: $x \to a$ demek, x-a farkının mutlak değeri, sonunda pozitif istenildiği kadar küçük, keyfi her ε sayısından daha küçük oluyor ve daima öyle kalıyor demektir.

$$0 < |x - a| < \varepsilon$$

veya aynı şeyi ifade etmek üzere

$$a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$$

dır.

Eğer sağdan yakınsama kavramından bahsediyorsak eşitsizliğin sağ tarafını eğer soldan yakınsama kavramından bahsediyorsak eşitsizliğin sol tarafını göz önüne alırız.

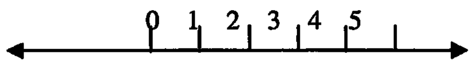
4. soruya kontrol grubu tarafından verilen gruplandırılmış cevaplar ve yüzdeleri Tablo IV. 27' de ve deney grubu tarafından verilen gruplandırılmış cevaplar ve yüzdeleri Tablo IV. 28 'de gösterilmiştir.

Tablo IV. 27

Kontrol Grubundaki Öğrencilerin 4. Soruya Verdikleri Gruplandırılmış Cevaplar ve Yüzdeleri

Grup	Öğrencilerin verdikleri cevaplar	n	Σ(n)	%
Kontrol	Sağdan yaklaşıyorsa +∞ dur,Soldan yaklaşıyorsa -∞ dur.	2	2	6,9
	x'in pozitif bir sayı olup limiti sağdan olması - + x'in negatif bir sayı olup limiti soldan olması a x	1	1	3,45
	Sağdan yaklaşınca x değişkeninin alabileceği en küçük değer a' dır .Soldan yaklaşınca x değişkeninin alabileceği en büyük değer a' dır	1		
	Sağdan yakınsaması a'ya x değişkeni azalan değerlerle yaklaşır.Yani x'e azalan değerler verilir. a x^+ Soldan yakınsaması a'ya x değişkeni artan değerlerle yaklaşır. Yani x'e artan değerler verilir x- a	2	9	31,03
	-∞ $\lim_{x \to a^+} = a$ a -∞ da a'ya yaklaşmasıdır. +∞ $\lim_{x \to a^-} = a$ a +∞ da a'ya yaklaşmasıdır	6		
	Sağdan yaklaşması sağdan limit almak demektir. Sağdan yakınsarsa a'dan büyük olur. a Soldan yaklaşması soldan limit almak demektir. Soldan yakınsadığında a'dan küçük olur. a	1	1	3,45
	Sağdan limite yaklaştığımızda aldığı değer ,Soldan limite yaklaştığımızda aldığı değer	2	2	6,9
	x değişkeni sağdan yaklaşıyorsa küçülür -1 değerini alır. x değişkeni soldan yaklaşıyorsa büyür +1 değerini alır.	1	1	3,45
	Boş	7	7	24,14
	Toplam	23	23	79,32

Tablo IV. 27 devam

Grup	Öğrencilerin verdikleri cevaplar	n	Σ(n)	%
Kontrol	x değişkeninin a'ya sağdan yaklaşması limitin a'da sağda olduğunu bildirir pozitiftir. Soldan yaklaşınca limit a'da soldan yaklaştığında solda limit (-) dir 	1	2	6,9
	x değişkenin a'ya sağdan yakınsaması ile limitin artı olarak alınması anlatılmaktadır. Soldan yakınsaması ise eksi alınmasıdır.	1		
	x değişkeni bu aralıktaki bir a noktasına azalan değerlerle yaklaştığında f(x)'ten a' ya yaklaşıyorsa f(x)' nun x⟶ a' ya yaklaşırken ki sağdan limiti denir $\lim_{x\to a^+} f(x)=a$ yine bir f(x) fonksiyonu bir a noktasına artan değerlerle yaklaşıyorsa a sayısına f(x) fonksiyonunun x⟶ a'ya yaklaşırken ki soldan limiti denir. $\lim_{x\to a^-} f(x)=a$	2	2	6,9
	Sağdan yakınsaması $\lim_{x\to a^+}$ sayı doğrusu üzerinde +∞ a doğru artar.Soldan yakınsaması $\lim_{x\to a^-}$ sayı doğrusu üzerinde -∞ a doğru ilerler.	1	1	3,45
	$\lim_{x\to a^+} x$ sağdan alınmasına denir. Yani a değerine sağdan yaklaşmasına denir. $\lim_{x\to a-} x$ $\lim_{x\to a-} x$ soldan alınmasına denir. Yani a değerine soldan yaklaşmasına denir.	1	1	3,45
	Toplam	6	6	20,68

Tablo IV. 27 incelendiğinde 4. soruya kontrol grubundaki öğrencilerin % 24,14'ünün cevap vermediği görülmektedir.

Tablo IV. 27 incelendiğinde kontrol grubundaki öğrencilerin % 3,45'inin bir a sayısına sağdan ve soldan yakınsama kavramına "x'in pozitif bir sayı olup limiti sağdan olması, x'in negatif bir sayı olup limiti soldan olması" cevabı verdikleri görülmektedir. Bu öğrencilerin a=0 gibi düşündükleri ve buna göre yorum yaptıkları söylenebilir. Bu özel bir hal olduğundan kabul edilebilir bir cevap değildir.

Öğrencilerin % 6,9'u limitin + veya – olmasını, limitin sağdan ve soldan olmasına bağladıkları söylenebilir.

% 6,9'u ise bir fonksiyonun bir noktadaki sağdan ve soldan limitinden bahsetmiştir. Fakat sorulan soru reel eksen üzerinde yakınsama kavramı olduğundan bu cevap kabul edilebilir bir cevap değildir.

% 6,9'u ise bir noktaya yaklaşma yerine limite yaklaşma ifadesini kullanmıştır. Bu kabul edilebilir bir ifade değildir. Bu öğrencilerin yakınsama kavramının tanımı bilmediği söylenebilir.

% 6,9'u ise "Sağdan yaklaşıyorsa $+\infty$ dur, Soldan yaklaşıyorsa $-\infty$ dur" cevabı vermiştir. %3,45'i ise limitin $-\infty$ ve $+\infty$ a doğru gitmesini anladıkları görülmektedir. Bu kabul edilebilir bir cevap değildir. Bu öğrencilerin ise sağ ve soldan olmasını $-\infty$ ve $+\infty$ gitme olarak algıladıkları söylenebilir.

% 3,45'i ise sağdan -1 soldan $+1$ olacağını, % 3,45'i ise sadece matematiksel gösterimin okunuşunu yazmışlardır. Bunlar kabul edilebilir bir cevap değildir.

% 3,45'i ise "Sağdan yaklaşması sağdan limit almak demektir. Sağdan yakınsarsa *a*' dan büyük olur" cevabı vermiştir. Bu kabul edilebilir bir cevap değildir.

% 31,03'ü ise x değişkeni a noktasına sağdan ve soldan yaklaşırken x değişkenine azalan ve artan değerler veririz cevabı vermişlerdir. Bu öğrencilerin cevapları uzman görüşleri ile kabul edilebilir bir cevaptır. Bu öğrencilerin a=0 gibi düşündükleri ve kavramı bildikleri fakat hep aynı tarzda yani a=0 olacak şekilde örnekler çözdükleri için böyle ifade ettikleri söylenebilir.

Tablo IV. 27'den de görüldüğü gibi kontrol grubundaki öğrencilerin % 24,14 'ü bu soruya cevap vermezken, sadece % 31,03'ü kabul edilebilir cevap vermişlerdir.

Tablo IV. 28

Deney Grubundaki Öğrencilerin 4. Soruya Verdikleri Gruplandırılmış Cevaplar ve Yüzdeleri

Grup	Öğrencilerin Verdikleri Cevaplar	n	Σ(n)	%
Deney	Limite göre x'in a sayısına yaklaştıkça yani a sayısına giderken artıkça vereceği sonuç Limite göre x'in a sayısına uzaklaştıkça yani a sayısının azalımında verilen sonuç	1	1	3,125
	x'i a sayısına pozitif değerlerle yaklaştırma x'i a sayısına negatif değerlerle yaklaştırma	1	3	9,375
	x bir değişkense ve $x \neq a$ ise x pozitif bir sayı olup ve a noktasına göre limit alınır $x \neq a$ olmadığı için x negatif olabilir bu da yine limitin a'ya göre alınacağı anlamına gelir	1		
	x değişkeninin a sayısına sağdan yakınsaması x sayısının pozitif tamsayı olduğunu gösterir.Sayı doğrusunda x değişkeni için rakam aldığımızda pozitif sayıları kullanırız. x değişkeninin a sayısına soldan yakınsaması x değişkeninin negatif sayılar olduğunu gösterir.	1		
	$\lim\limits_{x \to a}$ sayısına sağdan yaklaşarak sıfıra yaklaşarak $\lim\limits_{x \to a}$ sayısına soldan yaklaşarak sıfıra yaklaşarak	1	1	3,125
	x'in limitinin sağdan yakınsaması x'in limitinin soldan yakınsaması	1	1	3,125
	x değişkeninin a'ya göre sağdan lim anlamına gelir x değişkeninin a'ya göre soldan lim anlamına gelir	1	1	3,125
	x değişkeninin a sayısına sağdan yaklaşmasından x değişkeninin büyüdüğü anlaşılır ve sağdan limiti a'dır. x değişkeninin a sayısına soldan yaklaşmasından x değişkeninin küçüldüğü anlaşılır ve soldan limiti a'dır.	1	1	3,125
	a sayısına x'in sağ tarafından başlayarak değerler verilmesi a sayısına x'in sol tarafından başlayarak değerler verilmesi	1	1	3,125
	Boş	2	2	6,25
	Toplam	11	11	34,375

Tablo IV. 28 devam				
Grup	**Öğrencilerin verdikleri cevaplar**	**n**	**T.Ö**	**%**
Deney	$\lim_{x \to a^+}$ a ← x $\lim_{x \to a^-}$ x → a	1		
	x değişkeni büyükten küçüğe a sayısına yaklaştığı , x değişkeni küçükten büyüğe a sayısına yaklaştığı	4		
	x'e değer verdiğimizde a'ya +∞'dan yaklaşmasını anlıyorum, x'e değer verdiğimizde a'ya -∞'dan yaklaşmasını anlıyorum	1		
	x değişkeninin sayı doğrusunda (+) taraftan yaklaşması x değişkeninin sayı doğrusunda (-) taraftan yaklaşması	1		
	x değişkenin a sayısına sağ taraftan yaklaşması x değişkenin a sayısına sol taraftan yaklaşması	1		
	$x \to a^+$ olarak gösterilir.Sağ tarafındaki terimler örnek olarak a ← x $x \to a^-$ olarak gösterilir.Sol tarafındaki terimler örnek olarak x → a	1		
	x değişkenin sağdan a'ya yaklaşan sayılar x değişkenin soldan a'ya yaklaşan sayılar	1	21	65,625
	Pozitif (+) taraftan x değişkenin a sayısına yaklaşması Negatif (-) taraftan x değişkenin a sayısına yaklaşması	1		
	Limiti sağdan ele almamız, işlemi sağ taraftan yapmamız, Limiti soldan ele almamız, işlemi sol taraftan yapmamız	1		
	x değişkeninin a'ya sağdan yakın değeri Soldan yakın değeri	1		
	x değişkeninin a sayısına sağdan yakınsamasından x değişkenin arttığı anlaşılır ve sağdan limiti a'dır x değişkeninin a sayısına soldan yakınsamasından x değişkenin arttığı anlaşılır ve soldan limiti a'dır	1		
	x değişkenine sağdan değerler verdiğimizde a sayısına yaklaşması x değişkenine soldan değerler verdiğimizde a sayısına soldan yaklaşması	1		
	a sayısına sayı doğrusuna göre sağ taraftan yaklaşmasıdır. a ← a sayısına sayı doğrusuna göre küçük olan taraftan yaklaşmasıdır. → a	3		
	a sayısına sayı doğrusuna göre büyük taraftan yaklaşması demektir. a sayısına sayı doğrusuna göre küçük olan taraftan yaklaşması demektir.	3		
	Toplam	21	21	65,625

Tablo IV. 28 incelendiğinde deney grubundaki öğrencilerin % 6,25'inin bu soruya cevap vermedikleri görülmektedir.

Deney grubundaki öğrencilerin % 3,125'i "Limite göre x'in *a* sayısına yaklaştıkça yani *a* sayısına giderken arttıkça vereceği sonuç, limite göre x'in *a* sayısına uzaklaştıkça yani *a* sayısının azalımında verilen sonuç" cevabı verdikleri ve öğrencilerin % 3,125'inin de "x değişkeninin *a* sayısına sağdan yaklaşmasından x değişkeninin büyüdüğü anlaşılır ve sağdan limiti *a*'dır. x değişkeninin *a* sayısına soldan yaklaşmasından x değişkeninin küçüldüğü anlaşılır ve soldan limiti *a*'dır." cevapları verdikleri Tablo IV. 28'den görülmektedir. Bu cevaplar kabul edilebilir cevap değildir. Çünkü a=-5 olduğunu kabul edelim. Bu takdirde x, *a*'ya sağdan yaklaşırken x'in alacağı sayılar –1, -2, -3, -4, -4.9, -4.99,... şeklindedir. Bu nedenle bu ifade kabul edilebilir değildir. Burada yine bu öğrencilerin 0 sayısına göre yorum yaptıkları söylenebilir.

Deney grubundaki öğrencilerinin % 9,375'inin "x'i *a* sayısına pozitif değerlerle yaklaştırma, x'i *a* sayısına negatif değerlerle yaklaştırma" cevabı verdikleri Tablo IV. 27'den görülmektedir. Bu öğrencilerin a=0 gibi düşündükleri ve buna göre tanım yaptıkları söylenebilir. Bu özel bir durum olduğundan uzman görüşleriyle bu cevap kabul edilebilir bir cevap değildir.

Öğrencilerin % 3,125 'inin "$\lim\limits_{x\to a}$ sayısına sağdan yaklaşarak, $\lim\limits_{x\to a}$ sayısına sağdan yaklaşarak" ifadeleri kullandıkları Tablo IV. 28' den görülmektedir. Bu cevabın kabul edilebilir bir cevap değildir. Çünkü $\lim\limits_{x\to a}$ bir gösterimdir .

Öğrencilerin %3,125'i "x'in limitinin sağdan yakınsaması x'in limitinin soldan yakınsaması" cevabı verdikleri Tablo IV. 28'den görülmektedir. Bu cevap kabul edilebilir bir cevap değildir. Çünkü x' in limitinin yakınsaması ifadesi kabul edilebilir bir ifade değildir.

Öğrencilerin % 3,125'i "x değişkeninin a'ya göre sağdan lim anlamına gelir, x değişkeninin a'ya göre soldan lim anlamına gelir" cevabı verdikleri Tablo IV. 28'den görülmektedir. Bu ifade öğrencinin yakınsama kavramını bilip bilmediğine ışık tutacak bir ifade değildir. Bu nedenle uzman görüşleriyle kabul edilebilir bir cevap değildir.

Öğrencilerin % 3,125 'i "a sayısına x'in sağ tarafından başlayarak değerler verilmesi, a sayısına x'in sol tarafından başlayarak değerler verilmesi " cevabı vermişlerdir. Bu öğrenciler a sayısını değişken olarak ifade etmişlerdir. Bu nedenle bu cevap kabul edilebilir bir cevap değildir.

% 65,625'i ise x değişkeninin a sayısına ya sayı doğrusunda sağ taraftan (sol taraftan) yaklaşma yada artı taraftan (eksi taraftan) yaklaşma ifadeleri kullanarak yakınsama kavramını tanımlamışlardır. Bu kabul edilebilir bir cevaptır.

Elde edilen bulgulardan sağdan ve soldan yakınsama kavramlarının ne olduğu sorulduğu 4. soruda kontrol grubundaki öğrencilerin % 31,03'i, deney grubundaki öğrencilerin ise % 65,625' inin kabul edilebilir cevap verdikleri saptanmıştır.

Elde edilen bulgular reel eksen üzerinde sağdan ve soldan yakınsama kavramının tanımı bilmede deney ve kontrol grubu arasında deney grubu lehine anlamlı bir fark olduğunu göstermektedir.

Soru 12 . $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x+5}{2x+8} = \dfrac{4}{7}$ ifadesinden ne anlıyorsunuz birkaç cümle ile yazınız.

12. soru açık uçlu bir sorudur ve bu soruda deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin bir fonksiyonun bir noktadaki limitinin bir L sayısı olmasından ne anladıkları ölçülmeye çalışılmıştır.

12. soruya kontrol grubundaki öğrencilerin verdikleri gruplandırılmış cevaplar ve yüzdeleri Tablo IV.29' da, deney grubundaki öğrencilerin verdikleri benzerliklerine göre gruplandırılmış cevaplar ve yüzdeleri Tablo IV.30' da gösterilmiştir.

Tablo IV. 29

Kontrol Grubundaki Öğrencilerin 12. Soruya Verdikleri Gruplandırılmış Cevaplar ve Yüzdeleri

Grup	Öğrencilerin verdiği cevaplar	n	Σ(n)	%
Kontrol	$\lim_{x\to 3}\frac{x+5}{2x+8}=\frac{4}{7} \Rightarrow \frac{3+5}{6+8}=\frac{8}{14}=\frac{4}{7}$	10	19	65,5
	$\lim_{x\to 3}\frac{x+5}{2x+8}=\frac{4}{7} \Rightarrow \frac{3+5}{6+8}=\frac{8}{14}=\frac{4}{7}$ bu fonksiyonda normal limit alınır. Bu nedenle x yerine 3 yazılır	7		
	İfadede x yerine 3 yazdığımızda sonuç 4/7 dir	2		
	Limite sağdan ve soldan yaklaştığımızda 4/7 yani eşit olduğu için limit vardır.	1	2	6,9
	Limite sağdan ve soldan limit aldığımızda 4/7 yani eşit çıktığı için limit vardır.	1		
	Lim 3 e yaklaşırken x'in yerine 3 yazdığımızda çıkar	3	3	10,35
	Sağdan ve soldan aldığımızda 4/7 değerini alır.	1	1	3,45
	Boş	4	4	13,8
	Toplam	29	29	100

Tablo IV. 29 incelendiğinde kontrol grubundaki öğrencilerin % 13,8'inin 12. soruyu boş bıraktıkları görülmektedir.

Öğrencilerin % 10,35'i limitin yaklaşması ifadesini kullanmışlardır. Bu kabul edilebilir bir ifade değildir.

Kontrol grubundaki öğrencilerin % 3,45'i "Sağdan ve soldan aldığımızda $\frac{4}{7}$ değerini alır " cevabı verdikleri Tablo IV.29'dan görülmektedir. Aslında bir fonksiyonun bir noktada sağdan ve soldan limiti var ve herhangi bir L sayısına eşit ise fonksiyonun o noktada limiti var ve L'dir denir. Fakat burada bu öğrencilerin verdikleri cevap yeterli değildir . Bu nedenle kabul edilebilir bir cevap değildir.

Kontrol grubundaki öğrencilerin % 6,9'u sağdan ve soldan limitlerin eşit olduğu için limitin var olmasından bahsetmişlerdir. Fakat bu öğrenciler "limite sağdan ve soldan yaklaştırma" ve "limite sağdan ve soldan limit alma" ifadeleri kullanmışlardır. Bu ifadeler kabul edilebilir değildir. Bu nedenle bu öğrencilerin verdikleri cevaplar uzman görüşleri ile kabul edilebilir cevap değildir.

Kontrol grubundaki öğrencilerin % 65,5'i ise x yerine 3 koyarak sonuca ulaşmışlardır. Aslında sorumuz $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+5}{2x+8}$ hesaplayınız olsaydı bu kabul edilebilir bir cevap olabilirdi fakat $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+5}{2x+8}=\frac{4}{7}$ ifadesinden ne anladıkları sorulduğu için kabul edilebilir bir cevap değildir. Fakat kontrol grubundaki öğrencilerin büyük çoğunluğunun bir fonksiyonun bir noktadaki limitinden, o fonksiyonun o noktadaki değerini anladıkları saptanmıştır. Bu sürekli bir fonksiyon için doğru bir ifadedir fakat her fonksiyon için bunu söyleyemeyiz. Bu kontrol grubundaki öğrencilerin çoğunluğunun işlemsel görüşe sahip olduğunu göstermektedir.

Elde edilen bulgular doğrultusunda kontrol grubundaki hiçbir öğrenci kabul edilebilir bir cevap vermemiştir. Bu sonuç şu şekilde yorumlanabilir: Kontrol grubundaki öğrencilerin işlemsel görüşe sahip olduğu ve işlemi yapabildikleri fakat bunun ne anlama geldiğini bilmedikleri söylenebilir.

Tablo IV. 30

Deney Grubundaki Öğrencilerin 12. Soruya Verdikleri Gruplandırılmış Cevaplar ve Yüzdeleri

Grup	Öğrencilerin verdiği cevaplar	n	Σ(n)	%
Deney	Limit 3'e yaklaşarak $\frac{4}{7}$ olduğunu anlıyorum	2	4	12,5
	Limiti $\frac{4}{7}$ ye yaklaştığını anlıyorum	2		
	x' e 3'e yakın sayılar verdiğimizde f fonksiyonunda bunları yerine koyduğumuzda bu fonksiyonun $\frac{4}{7}$ 'ye yakın olması	1	10	31,25
	Sağdan ve soldan limitinin eşit ve $\frac{4}{7}$ olduğunu anlıyorum	2		
	x, 3'e yaklaşırken x+5'in 2x+8'e oranı $\frac{4}{7}$ yaklaşır.	3		
	x→3 iken $\frac{x+5}{2x+8} \to \frac{4}{7}$	2		
	x'e -1,-2 , 0,1,2,3, versem $\frac{4}{7}$ yakın sayılar bulunur.	2		
	x yerine 3 yazarız çıkan sonucu sadeleştiririz.	5	16	50
	$\lim\limits_{x \to 3} \frac{x+5}{2x+8} = \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{3+5}{6+8} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$	11		
	x 3'e yaklaşırkenki değerinin $\frac{4}{7}$ olduğunu gösterir.	1	1	3,125
	Boş	1	1	3,125
	Toplam	32	32	100

Tablo IV.30 incelendiğinde deney grubundaki öğrencilerin % 3,125'inin 12. soruyu boş bıraktığı görülmektedir.

% 12,5 (% 6,25+% 6,25)'i ise "Limit 3'e yaklaşarak $\frac{4}{7}$ olduğunu anlıyorum" ve "Limiti $\frac{4}{7}$'ye yaklaştığını anlıyorum" ifadesi kullanmıştır. Bu öğrencilerin yaklaşma kavramını bildikleri fakat bunu ifade edemedikleri veya yanlış algıladıkları söylenebilir. Limitin yaklaşması ifadesini kullandıkları için bu öğrencilerin verdikleri cevap kabul edilebilir bir cevap değildir.

Deney grubundaki öğrencilerin % 50'si x yerine 3 yazıp çıkan sonucu sadeleştirmeden bahsetmişlerdir. Aslında sorumuz $\lim_{x\to 3}\frac{x+5}{2x+8}$ hesaplayınız olsaydı bu kabul edilebilir bir cevap olabilirdi fakat $\lim_{x\to 3}\frac{x+5}{2x+8}=\frac{4}{7}$ ifadesinden ne anladıkları sorulduğu için kabul edilebilir bir cevap değildir.

Öğrencilerin % 3,125'i "x 3'e yaklaşırkenki değerinin $\frac{4}{7}$ olduğunu gösterir." cevabını verdikleri Tablo IV. 30'dan görülmektedir. x, 3'e yaklaşırken f fonksiyonu $\frac{4}{7}$'ye yaklaşır doğru bir ifadedir fakat f fonksiyonunun o noktadaki değerini alması sadece sürekli fonksiyonlar için doğru bir ifadedir. Burada bu fonksiyon içinde doğrudur fakat her fonksiyon için bu yazılamayacağı için uzman görüşleri ile bu cevap kabul edilebilir bir cevap değildir.

Öğrencilerin % 31,25'i $x\to 3$ iken $\frac{x+5}{2x+8}\to\frac{4}{7}$ veya sağdan veya sağdan ve soldan limitleri eşit ve $\frac{4}{7}$ olduğu için limitin $\frac{4}{7}$ olduğunu ifade etmişlerdir. Bu sorudan beklenende bu ifadeler olduğundan bu öğrencilerin cevapları kabul edilebilir bir cevaptır.

Sonuç olarak deney grubundaki öğrencilerin % 31,25'inin işlemi neden ve niçinleri ile bildikleri ve yapılan işlemin ne anlama geldiğini bildiği saptanmıştır.

12. sorudan elde edilen bulgularla; deney grubundaki öğrencilerden % 31,25'inin işlemi neden ve niçinleri ile bildikleri ve yapılan işlemin ne anlama geldiklerini bildikleri fakat kontrol grubundaki öğrencilerinin işlemsel görüşe sahip

oldukları ve sadece işlem yapıp sonuca ulaştıkları; hiçbir öğrencinin yaptığı işlemin ne anlama geldiğini bilmediği saptanmıştır.

Elde edilen bulgular bir a noktasında bir fonksiyonun limitinin tanımını bilgi basamağında bilmede ve yaptığı işlemin ne anlama geldiğini bilmede deney ve kontrol grubu arasında deney grubu lehine anlamlı bir fark olduğunu göstermektedir.

Soru 13. $\lim_{x\to\infty}\frac{5x+5}{2x+8}=\frac{5}{2}$ ifadesinden ne anlıyorsunuz birkaç cümle ile yazınız.

13. soru açık uçlu bir sorudur ve bu soruda deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin bir fonksiyonun ∞'daki limitinin bir L sayısı olmasından ne anladıkları ölçülmeye çalışılmıştır.

Kontrol grubundaki öğrencilerin verdikleri gruplandırılmış cevaplar Tablo IV. 31'de, deney grubundaki öğrencilerin verdikleri gruplandırılmış cevaplar Tablo IV. 32'de gösterilmiştir.

Tablo IV. 31

Kontrol Grubundaki Öğrencilerin 13. Soruya Verdikleri Gruplandırılmış Cevaplar ve Yüzdeleri

Grup	Öğrencilerin verdiği cevaplar	n	Σ(n)	%
Kontrol	$\lim_{x \to \infty} \frac{5x+5}{2x+8} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{5\infty + 5}{2\infty + 8} = \frac{5\infty}{2\infty} = \frac{5}{2}$	1	10	34,5
	f(x) de x lerin derecesi eşit olduğu için x'lerin katsayı oranı limite eşittir	6		
	x lerin derecesi eşit olduğu için x'lerin katsayı oranına bakılarak sonuç bulunur. Veya x'in yerine ∞ yazılarak da bulunabilir. $\frac{5\infty+5}{2\infty+8} = \frac{5\infty}{2\infty} = \frac{5}{2}$	1		
	En büyük terimlerin katsayıları oranı limiti verir.	1		
	x lerin derecesi eşit olduğu için x'lerin katsayı oranı limite eşittir.Çünkü $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği çıkar.Bu sebepten dolayı x'in derecelerine bakılır.Bu dereceler eşit olduğundan katsayılar oranı alınır . Buda 5/2 dir.	1		
	Lim ∞ a yaklaşırken x'in yerine ∞ yazarsak $\frac{\infty}{\infty}$ olur ve x'in katsayısına bakılır	2	2	6,9
	$\frac{\infty}{\infty}=1$ olduğu için	2	2	6,9
	Sayılar ∞ a gittiğinde 5 ve 8 in değeri kalmaz yani ∞ da x'lerin katsayı oranıdır.	8	8	27,6
	$\frac{5x+5}{2x+8}$ ifadesinin sonsuzda sadeleşmiş şeklidir.	2	2	6,9
	$\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine göre 5/2 dir.	1	1	3,4
	Boş	4	4	13,8
	Toplam	29	29	100

Tablo IV. 31 incelendiğinde kontrol grubundaki öğrencilerin % 13,8'i bu soruya cevap vermediği görülmektedir.

Öğrencilerin % 34,5'i x' lerin derecesi eşit olduğu için x' lerin katsayıları oranına bakarak sonucu bulmuşlardır. Bu soruda öğrencilerden sonucu nasıl bulduklarını değil, bu ifadeden ne anladıklarını ölçmek istediğimiz için bu öğrencilerin verdikleri cevap uzman görüşleri ile kabul edilebilir cevap değildir.

Öğrencilerin % 6,9'u "Lim ∞ a yaklaşırken x'in yerine ∞ yazarsak " cevabı verdikleri Tablo IV.31'de görülmektedir. Limitin yaklaşması ifadesi kullanmışlardır. Bu kabul edilebilir bir ifade değildir.

Öğrencilerin % 6,9'u "$\frac{\infty}{\infty}$=1 olduğu için" cevabı vermişlerdir. Bu öğrenciler ∞'u bir reeel sayı olarak düşünmüşler ve sadeleştirme yapmışlardır. Bu kabul edilebilir bir cevap değildir.

Öğrencilerin % 27,6' sı "Sayılar ∞ a gittiğinde 5 ve 8 in değeri kalmaz yani ∞ da x'lerin katsayı oranıdır" cevabı vermişlerdir. x'lerin katsayıları oranı cevabı verdikleri için bu öğrencilerin cevabının kabul edilebilir değildir.

Öğrencilerin % 6,9'u " $\frac{5x+5}{2x+8}$ ifadesinin sonsuzda sadeleşmiş şeklidir" ve % 3,4' ü "$\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğine göre 5/2 dir " cevabı vermişlerdir. Bu cevapların kabul edilebilir bir cevap değildir..

Elde edilen bulgularla uzman görüşleri ile kontrol grubundaki öğrencilerden hiçbirinin kabul edilebilir bir cevap vermedikleri saptanmıştır.

Tablo IV. 32

Deney Grubundaki Öğrencilerin 13. Soruya Verdikleri Gruplandırılmış Cevaplar ve Yüzdeleri

Grup	Öğrencilerin verdiği cevaplar	n	Σ(n)	%
	x , ∞'a giderken $\frac{5}{2}$ 'ye gider	2		
	x yerine 1, 2, 3, 4 ..koyarsak $\frac{5}{2}$ 'ye gider	1		
	x , ∞'a giderken 5x+5'in 2x+8'e oranı $\frac{5}{2}$ dir	1		
	$x \rightarrow \infty$ giderken $\frac{5x+5}{2x+8}$ in $\frac{5}{2}$ 'ye gitmesi gerekiyor	1	8	25
	x sonsuza yaklaşırken fonksiyonda aldığı değerdir,x'e değer verip limiti öyle buluruz	1		
	$x \rightarrow \infty$ yaklaşırken değeri $\frac{5}{2}$ dir	1		
Deney	$\frac{5}{2}$ olur çünkü x'in katsayıları oranıdır.	3		
	$\frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$ olur.	2	17	53,125
	$\frac{5(x+1)}{2(x+4)} = \frac{5}{2}$	1		
	Derecesi büyük olan sayıların katsayıları oranıdır.	11		
	Sayı ∞' giderken limit $\frac{5}{2}$ 'ye yaklaştığı	2	2	6,25
	Burada ∞x yerine konmuştur	1	1	3,125
	x yerine a yazarız sonra çıkan değer sadeleştirilir	1	1	3,125
	Boş	3	3	9,375
	Toplam	32	32	100

Tablo IV. 32 incelendiğinde deney grubundaki öğrencilerin % 9,375'inin bu soruya cevap vermediği görülmektedir.

Öğrencilerin % 25’i x ∞’ ya giderken f(x)’in L’ ye yakınsaması cevabı vermişlerdir. Bu kabul edilebilir bir cevaptır.

Öğrencilerin % 53,125 ’i x’lerin katsayılarının oranına bakarak sonucu tahmin etmişlerdir. Bu öğrenciler limitin nasıl bulunduğunu ifade etmişlerdir. Bu soruda bir fonksiyonun ∞’daki limitinin bir L sayısı olmasından ne anladıklarını ölçmek olduğu için bu cevap kabul edilebilir bir cevap değildir.

Öğrencilerin % 6,25 ’i “Limitin yaklaşması” ifadesi kullanmışlardır. Bu kabul edilebilir bir ifade değildir.

Öğrencilerin % 3,125’i “Burada ∞ x yerine konmuştur ” ve % 3,125’i “x yerine *a* yazarız sonra çıkan değer sadeleştirilir” cevabı verdikleri Tablo IV. 32 den görülmektedir. Bu öğrencilerin ∞’u bir reel sayı gibi düşündükleri, bu nedenle cevapları kabul edilebilir bir cevap değildir.

Elde edilen bulgular bir fonksiyonun ∞’ daki limitinin bir L sayısı olmasına kontrol grubunda hiçbir öğrenci kabul edilebilir bir cevap vermezken, deney grubundaki öğrencilerin % 25’i kabul edilebilir bir cevap vermiştir. Elde edilen bulgulardan bir fonksiyonun ∞’ daki limitinin bir L sayısını olmasını bilmede deney ve kontrol grubu arasında deney grubu lehine anlamlı bir fark olduğu saptanmıştır.

Soru 14. $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ifadesinden ne anlıyorsunuz birkaç cümle ile yazınız

14. soru açık uçlu bir sorudur ve bir fonksiyonun bir a noktasındaki limitinin bir L sayısı olmasından ne anladıkları ne anladıkları yani limitin formal tanımı sorulmuştur. Formal limit tanımı bilmede deney ve kontrol grubu arasında deney grubu lehine anlamlı fark olup olmadığı test edilmeye çalışılmıştır.

Tablo IV. 33

Kontrol Grubundaki Öğrencilerin 14. Soruya Verdikleri Gruplandırılmış Cevaplar

Grup	Öğrencilerin verdiği cevaplar	n	Σ(n)	%
	$\lim\limits_{x \to a}$ yaklaşırken f(x) fonksiyonu L ye yaklaşır.	1	1	3,45
	x, a'ya yaklaşırken sağdan ve soldan limitlerini aldığımızda aynı sonuçları elde ettiğimiz için $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ olmuştur.	7		
	Sağdan ve soldan a'ya yaklaştığımızda L değerini aldığı için	1		
	x, a'ya yaklaşırken ki değerinin L olduğunu anlıyoruz	1	17	58,6
	$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ olduğu için eşittir.	1		
Kontrol	x'in a noktasındaki limitinin L olduğunu	7		
	L gibi bir ifadenin a'ya yaklaşıp, uzaklaşması	1	1	3,45
	$\lim\limits_{x \to a}$ yaklaşırken f(x) in değeri sabit bir sayı olduğu	2	2	6,9
	Limitte f(x) fonksiyonunda L de x yerine a sayısı yazıldığında ifadenin çözümü ve çözüm kümesinin bulunacağı	1	1	3,45
	f(a)=L eşit olduğunu anlıyoruz.	2	2	6,9
	Boş	5	5	17,25
	Toplam	29	29	100

Tablo IV. 33 incelendiğinde kontrol grubundaki öğrencilerin %17,25'inin bu soruya cevap vermediği görülmektedir.

Kontrol grubundaki öğrencilerin % 3,45'i ve % 6,9 'u cevaplarında "$\lim\limits_{x \to a}$ yaklaşırken" ifadesi kullanmışlardır. Bu ifade kabul edilebilir bir ifade değildir.

Kontrol grubundaki öğrencilerin % 58,6'sı sağdan ve soldan limitlerine bakıldığı zaman, sağdan ve soldan limitlerinin var ve L' ye eşit olduğundan fonksiyonun o noktadaki limitinin L olduğunu ifade etmişlerdir. Bunun kabul edilebilir bir ifadedir.

Kontrol grubundaki öğrencilerin % 3,45'inin "limitte f(x) fonksiyonunda L de x yerine a sayısı yazıldığında ifadenin çözümü ve çözüm kümesinin bulunacağı" ve öğrencilerin % 3,45'inin " L gibi bir ifadenin a'ya yaklaşıp, uzaklaşması " cevabı verdikleri Tablo IV. 33' de görülmektedir. Bu ifadeler kabul edilebilir bir cevap değildir.

Kontrol grubundaki öğrencilerin % 6,9'u "f(a)=L eşit olduğunu anlıyoruz" cevabı verdikleri Tablo IV. 33' de görülmektedir. Eğer bu şart varsa fonksiyon o noktada süreklidir fakat bir fonksiyonun bir noktadaki limitinin tanımı olarak bu ifade kabul edilebilir bir cevap değildir.

Elde edilen bulgulardan kontrol grubundaki öğrencilerin % 58,6'sının kabul edilebilir bir cevap verdiği saptanmıştır.

Tablo IV. 34

Deney Grubundaki Öğrencilerin 14. Soruya Verdikleri Gruplandırılmış Cevaplar ve Yüzdeleri

Grup	Öğrencilerin verdiği cevaplar	n	Σ(n)	%
Deney	f(x) fonksiyonunda x ⟶a yaklaşırken, yaklaştığı değer L'dir.	1	25	78,2
	x ⟶a yaklaşırken, yaklaştığı değer L'dir	1		
	f(x) fonksiyonunda x a' ya giderken limitinin L olduğunu anlıyorum	4		
	x⟶ a giderken f(x)'in L'ye yaklaşmış olduğunu bulmamız gerekiyor	2		
	x⟶ a giderken limiti L anlamındadır	4		
	Sağdan ve soldan limitinin eşit olduğu ve bu değerin L'ye eşit olduğunu	1		
	x ⟶a giderken f(x)'in limitinin L olduğunu	1		
	x⟶ a iken sağdan ve soldan L'ye yaklaştığını anlarız	1		
	x sayısının a'ya yaklaştığında f(x) L'ye yaklaşır	1		
	x=a da limitinin L olduğunu anlıyorum	1		
	x ⟶a iken f(x) ⟶L	8		
	Sayı a'ya yaklaşırken limitinin L'ye yaklaşması	2	2	6,2
	Boş	5	5	15,6
	Toplam	32	32	100

Tablo IV. 34 incelendiğinde deney grubundaki öğrencilerin %15,6'sının bu soruya cevap vermediği görülmektedir.

Deney grubundaki öğrencilerin % 78,2 'si "x ⟶a iken f(x) ⟶ L" veya "sağdan ve soldan limitlerin var ve L'ye eşit olduğu için f ' nin limitinin L olduğunu" veya "x a 'ya giderken f'nin limitinin L olduğunu " ifade ettikleri Tablo IV. 34' de görülmektedir. bunlar kabul edilebilir cevaplardır.

Deney grubundaki öğrencilerin % 6,2 'sinin "sayı a'ya yaklaşırken limitinin L'ye yaklaşması" cevabı verdikleri Tablo IV. 34' de görülmektedir. Burada "limitin yaklaşması" ifadesi kabul edilebilir bir ifade değildir.

Elde edilen bulgulardan kontrol grubundaki öğrencilerden % 58,6'sı kabul edilebilir bir cevap verirken, deney grubundaki öğrencilerin % 78,2 'sinin kabul edilebilir cevap verdiği saptanmıştır. Dolayısıyla bir fonksiyonun bir noktadaki limitinin formal tanımını bilmede deney ve kontrol grubu arasında deney grubu lehine anlamlı bir fark vardır.

Denence 3'ü test etmek için erişi testinde sorulan 4., 12., 13., ve 14. sorularda bir fonksiyonun bir noktadaki limiti kavramı sayısal değerlerden daha genel ifadeye doğru sorulmuştur.

Yakınsama kavramı limit kavramını anlamak için temeldir. Bu nedenle 4. soruda reel eksen üzerinde sağdan ve soldan yakınsama kavramının formal tanımı sorulmuştur. Kontrol grubundaki öğrencilerinin % 31,03'i kabul edilebilir bir cevap verirken deney grubundaki öğrencilerin % 65,625'inin kabul edilebilir cevap vermiştir.

12. soruda $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x+5}{2x+8} = \frac{4}{7}$ ifadesinden ne anladıklarını yazmaları istenmiştir. Kontrol grubundaki öğrencilerinin hiçbiri kabul edilebilir bir cevap veremezken deney grubundaki öğrencilerin % 31,25'inin kabul edilebilir cevap vermiştir.

13. soruda $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x+5}{2x+8} = \frac{5}{2}$ ifadesinden ne anladıklarını yazmaları istenmiştir. Kontrol grubundaki öğrencilerinin hiçbiri kabul edilebilir cevap veremezken deney grubundaki öğrencilerin % 25'inin kabul edilebilir cevap vermiştir.

14. soruda $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ifadesinden ne anladıklarını yazmaları istenmiştir. Kontrol grubundaki öğrencilerinin % 58,6' ü kabul edilebilir bir cevap verirken deney grubundaki öğrencilerin % 78,2'sinin kabul edilebilir cevap verdikleri saptanmıştır.

Bu bulgular ışığında formal tanımı bilmede deney ve kontrol grubu arasında deney grubu lehine anlamlı bir fark çıktığı saptanmıştır. Bu şu şekilde yorumlanabilir: Bloom'a göre bir kavramın tanımı sorunca söyleme, bilme; bilgi basamağındaki davranışlar iken problemi çözme ve nedeni, niçini ile bilme analiz basamağındaki davranışlardır. Elde edilen bulgulardan salt problemleri çözebilmede deney ve kontrol grubu arasında fark olmamasına rağmen kontrol grubundaki öğrencilerin işlemi neden ve niçinleri ile bilmedikleri saptanmıştır. Geleneksel yöntem ile salt problem çözüldüğü yani hedeflerin uygulama basamağında tutulduğu söylenebilir. Fakat bu matematikte kavram ile işlem arasındaki bağı kurmak için yeterli değildir. Böyle olunca ezbere öğrenme ve matematiği sadece rutin problem çözme olarak görülmesi çok doğaldır.

BÖLÜM V

V.1.TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada geleneksel yöntemden farklı oluşturulan eğitim durumunun Lise 3 müfredat programında yer alan "Limit" kavramı öğretimine etkisine ilişkin bulgular tartışılarak yorumlanmıştır.

Bu araştırmanın amacı geleneksel yöntemden farklı oluşturulan eğitim durumunun Lise 3 müfredat programında yer alan "Limit" kavramı öğretimine etkisini ortaya koymaktır.

Araştırma sonucunda elde edilen bulgular bir dizinin limitini öğrenmede , bir fonksiyonun bir noktadaki limitini öğrenme ve limitin formal tanımını öğrenmede deney ve kontrol grubu arasında deney grubu lehine anlamlı bir fark vardır alt problemlerini doğrulamaktadır. Elde edilen bulgular ışığında, deney ve kontrol grubu karşılaştırıldığında; bir dizinin limiti ile ilgili soruları çözmede deney ve kontrol grubu arasında anlamlı fark çıkmazken kontrol grubundaki öğrencilerin kavramla işlem arasında bir bağ kuramadıklarını göstermektedir. Mesela kontrol grubundaki öğrenciler $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n}$ sonucun 0 olduğunu doğru tahmin etmelerine rağmen bunun neden 0 olduğuna mantıklı açıklama getirememişlerdir. Üstelik bir dizinin limitinin bir L sayısı olmasından; yapılan işlemler yada öğretilen limit çözme yollarının sonucunda elde ettiğimiz sayı olarak ifade ettikleri görülmektedir. Fakat deney grubundaki öğrencilerin bir dizinin limiti ile ilgili soruları çözebildikleri ve bunun ne anlama geldiğini ve nedenleri, niçinleri ile bu kavramı öğrendikleri görülmektedir.

Bir fonksiyonun limiti ile ilgili sorularında polinomal fonksiyonun limitini bulmada (soru 8), kuralı ve grafiği verilen parçalı bir fonksiyonun bir noktada limitini bulmada (soru 6 ve soru 11) deney ve kontrol grubu arasında anlamlı fark çıkmazken; kuralı verilen parçalı bir fonksiyonun bir noktada sağdan ve soldan limiti sorulduğunda (soru 7) deney ve kontrol grubu arasında kontrol grubu lehine anlamlı fark çıktığı görülmektedir. Limiti ∞ olan ve o noktadaki limiti, o noktadaki değerine eşit olmayan (süreksiz) fonksiyonların limitleri sorulduğunda da deney ve kontrol grubu arasında kontrol grubu lehine anlamlı fark çıkmıştır. Bu bulgular ışığında kontrol grubundaki öğrencilerin bir problemleri çözerken önceden yapmaya alışık oldukları soru tipleriyle soru sorulduğunda doğru sonuca ulaşırken farklı soru tiplerinde sorular sorulduğunda doğru sonuca ulaşmakta bu kadar başarılı olmadıkları söylenebilir. Deney grubundaki öğrenciler ise çoğu kez tanımı kullanarak yada yorum yaparak doğru sonuca ulaşmışlardır.

Limitin formal tanımı sorulduğunda da kontrol grubundaki öğrenciler işlemsel cevap vermiştir. Deney grubundaki öğrenciler ise yakınsama kavrama ile ifade etmişlerdir.

Bu bulgular ışığında geleneksel yöntem ile öğrenciler limit tanımını ifade olarak bilip, alışılmış limit problem verildiğinde çözebildiklerini fakat geleneksel yöntemden farklı oluşturulan eğitim durumu ile öğrencilerin kavram ile işlem arasında bağ kurabildikleri, yaptıkları işlemin ne anlama geldiğini ve bununda öğrenci başarısını olumlu yönde etkilediği görülmektedir.

Limit kavramı ile deneysel bir çalışmaya rastlanmamıştır. Yapılan çalışmalarda genellikle görüşme tekniği ile öğrencilerin limit kavramı ile ilgili yanlış kavramları tespit edilmiş ve görüşmelerle bu yanlış kavramlar giderilmeye çalışılmıştır.

Tall ve Vinner (1981) " Limit ve Süreklilik ile İlgili Olarak Matematikte Kavram Algılama ve Kavram Tanımlama" adlı çalışmada; öğrencilere $\lim_{x\to 1}\frac{3x-1}{x-1}=3$ün ne anlama geldiği sorulmuş ve $\lim_{x\to a} f(x)=c$nin bir tanımını yazmaları söylenmiştir. Elde edilen bulgular öğrencilerin zayıf kavramlara sahip olduğunu çıkarmıştır. . Tall ve Vinner uygun kavram imajı formlandırmanın güçlüğünün ve uygunsuz kavram imajının zorlayıcı etkisinin, öğrencilerin zihnindeki formal teorinin gelişimi ciddi olarak engelleyebileceğini belirtmişlerdir.

Williams (1991) "Üniversite Analiz Dersi (Calculus) Öğrencilerinin Limit Kavramını Algılamaları İle İlgili Oluşturdukları Modeller " adlı çalışmasında limit ile ilgili ifadeler verip öğrencilerden bunların doğru yanlış olarak belirtmeleri istemiştir. Elde edilen sonuçlar öğrencilerin işlemsel limit görüşüne sahip olduklarını, daha formal limit görüşünü benimsemede beş toplantının yetersiz ve öğrencilerde formal düşünmenin önemini anlamada eksiklikleri olduğunu göstermiştir.

Lauten, Graham & Ferrini-Mundy (1994) tarafından yapılan "Öğrencilerin Analizdeki Temel (Calculus) Kavramlarını Anlamaları: Grafik Hesap Makinesi ile Etkileşim " adlı çalışmada formal tanımın görüşmelere alınan öğrenci için hiçbir anlamı olmadığını göstermiştir.

Gilman (1997) ve Todorov (2001) tarafından yapılan çalışmalarda her ikisi de limit tanımının öğrenciler tarafından anlaşılmadığını belirtmişlerdir ve limit tanıma alternatif bir tanım vermişlerdir.

IV.2.ÖNERİLER

Matematik dersinde kavramlar birbirine bağlıdır ve bir kavram diğer kavramlar için temel teşkil etmektedir. Bu çalışmada geleneksel yöntemden farklı olarak geliştirilen eğitim durumunun öğrencilerin limit tanımını öğrenmesine etkisi incelenmiştir. Bu amaçla erişi testinde deney ve kontrol grubundaki erişileri arasında farka bakılmıştır.

Bu karşılaştırmalar sonucunda geleneksel yöntemden farklı oluşturulan eğitim durumunun "limit" kavramını öğrenmede; deney grubundaki öğrencilerin kontrol grubundaki öğrencilere kıyasla daha iyi öğrendikleri ve kavramın özünü hissettikleri görülmüştür.

Yapılacak çalışmalar için şu önerilerde bulunulabilir:

1. Bu çalışmada sadece limitin formal tanımı, bir fonksiyonun bir noktadaki limiti ve bir dizinin limiti kavramlarına yönelik geleneksel yöntemden farklı bir eğitim durumu geliştirilmiş ve bu eğitim durumunun, öğrencilerin bu kavramları anlamasına etkisi araştırılmıştır. İleri bir araştırma "belirsizlik" hallerine kapsayacak şekilde daha kapsamlı yapılabilir.

2. Erişi testinde öğrencilerin açık uçlu sorulara verdikleri cevaplarda "değer" tanımını bilmedikleri gözlenmiştir. Öğrencilerde ve çoğu zaman öğretmenlerde "değer" kelimesinin reel sayı doğrusu üzerinde bir noktanın yerine onun değeri anladıkları gözlenmiştir. Ayrıca öğrencilerin ∞ kavramını da bilmedikleri ve ∞'u bir reel sayı olarak algıladıkları gözlenmiştir. İleri bir çalışma bu kavramları da içine alacak şekilde ve öğrencilerin yanlış bilgilerini düzeltecek şekilde yapılabilir.

3. Bu çalışmanın çalışma evreni lise 3 öğrencilerinden oluşturulmuştur. Ancak üniversite öğrencilerinin de yer aldığı gruplar oluşturularak geleneksel

yöntemden farklı eğitim durumu ile limit kavramı öğretiminin etkili olacağı düşünülebilir.

4. Bu araştırmada erişi testi öğrencilere belli aralıklarla (3 ay, 6 ay, 1 yıl) yeniden uygulanarak, limit kavramının ne kadarının hatırda tutulup tutulmadığının belirlenmesi amacıyla izleme çalışmaları devam ettirilebilir.

KAYNAKÇA

AĞLI, Esin. (1998). **İktisat Ve İşletme Uygulamalı Genel Matematik**. Ankara:Anı Yayıncılık.

AKDAĞ, Mustafa.(1993). **Matematik ve Fen Bilimleri Öğretiminde Karşılaşılan Sorunlar**. İnönü Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü. (Yayınlanmamış Doktora Tezi).

AKSU, Meral.(1991).**Matematik Öğretiminde Yöntemler Matematik Öğretimi**. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Açıköğretim Fakültesi Yayınları.

ALKAN, Cevat.(1992). **Eğitim Ortamlarının Düzenlenmesi.** Ankara Üniversitesi Eğitim Fakültesi.Ankara.

ALKAN, Cevat ve KURT, Mehmet (1998). **Özel Öğretim Yöntemleri Disiplinlerin Öğretim Teknolojisi**. Ankara: Anı Yayıncılık.

ALTUN , Murat. (1998). **Matematik Öğretimi** . Bursa: Erkam Matbaacılık .

ARVOLD, Bridget ve TURNER Pamela ve COONEY Thomas J.(1996***). Analyzing Teaching and learning : Art of Listening*. The Mathematics Teacher** , April ,89, (4), 326-329 .

ARNOLD, Dougles N.(1995). htpp://www.ima.umn.edu/~arnold/graphics.html

AŞKAR, Petek.(1986). *Matematik Dersine Yönelik Tutumu Ölçen Likert Tipi Bir Ölçeğin Geliştirilmesi*. **Eğitim ve Bilim Dergisi.** 11(62).

AYDINLI, Bekir. (1997). **Öğrencilerin Matematiğe Yönelik Tutumlarının Değerlendirmeleri.** Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. (Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi).

BACANLI, Hasan.(1999). **Duyuşsal Davranış Eğitimi**. Ankara: Nobel Yayın Dağıtım Ltd.Şti.

BAKİ, Adnan.(1996). ***Okul Matematiğinde Ne Öğretelim, Nasıl Öğretelim?.*** **Matematik Dünyası.** Haziran, 6 (3), 11-16.

BAKİ, Adnan ve BELL, Alan.(1997). *Ortaöğretim Matematik Öğretimi* ,**Yök Dünya Bankası Milli Eğitim Geliştirme Projesi Hizmet Öncesi Öğretmen Eğitimi.** Ankara.

BAYAR, Ergün ve GÜNDÜZALP, Yavuz.(1998). **Analiz I**. Trabzon: KTÜ Basımevi.

BAYKUL,Yaşar.(1999). **İlköğretimde Matematik Öğretimi**. Ankara: Anı Yayıncılık.

BAYKUL, Yaşar , SAĞLAMER, Emin , TEKIŞIK, Hüseyin Hüsnü. (1984). **İlkokul Öğretmenleri İçin Matematik Öğretimi Rehberi.** Ankara :Rehber Yayınevi

BEDWELL, Lance E. , HUNT Gilbert H., TOUZEL Tımothy J., WISEMAN Dennis G. (1991). **Effective Teaching Preparation and Implementation**. Charles C Thomas Publisher, Illinois, USA.

BİLEN, Mürüvvet.(1993). **Plandan Uygulamaya Öğretim**. Ankara: Takav Yayıncılık.

BRUDNEY, Phyllis, KEİR, Marilyn, VİRULEG, Mary. (1993). *Using the Spreadsheet to Develop an Intuitive Understanding of The Limit concept.* **http://www.woodrow.org./teachers/mi/1993/13brud.html** .

BÜYÜKKARAGÖZ, Savaş ve ÇİVİ, Cuma.(1996). **Genel Öğretim Metotları.** Konya: Öz Eğitim Basım Yayın Dağıtım Ltd.Şti.

BÜYÜKKURT , G. (1990). *"Eleştirisel Düşünme"* **Çağdaş Eğitim** , 15(18): 31-33.

CANGELOSİ, James S.(1992). **Systematic Teaching Strategies** . Longman Publishing Group. Newyork London.

ÇAKIROĞLU, Erdinç.(1999). **Hizmet Öncesi İlkokul Öğretmenlerinin Reforma Dayalı Matematik Öğretiminde Sahip Oldukları Öz-Etkinsellikleri.** İndiana Üniversity. (Yayınlanmamış Doktora Tezi).

ÇAKMAK, Melek. (1999). **İngiltere ve Türkiye'de Deneyimli Sınıf Öğretmenleri ve Aday Öğretmenlerinin, İlköğretim Matematik Dersinde İzledikleri Öğretim Stratejileri ve Kullandıkları Öğretim Teknikleri.** University of Leicester. (Yayınlanmamış Doktora Tezi).

ÇELİK, Duran. (2000).**Okullarda Ölçme ve Değerlendirme Nasıl Olmalı?** İstanbul: Milli Eğitim Yayınevi.

DAVİS, Robert ve VİNNER, Sholomo.(1986). *The Notion Of Limit: Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages.* **Journal of Mathematical Behaviour, 5, 281-303.**

DEMİREL, Özcan. (1999). **Kuramdan Uygulamaya Eğitimde Program Geliştirme.** Ankara: Pegem Yayıncılık .

DEMİREL, Özcan. (1999). **Planlamadan Değerlendirmeye Öğretme Sanatı.** Ankara: Pegem Yayıncılık.

DOUGLAS, N.Arnold. (1997). **http://ima.umn.edu/~arnold/graphics.html.july,2** .

ERTÜRK, Selahattin.(1979). **Eğitimde "Program" Geliştirme** .Ankara: Yelkentepe Yayınları, 4.

FERRİNİ -MUNDY , Joan ve GAUDARD, Marie.(1992). *Secondary Scholl Calculus: Prepartion Or Pitfall İn The Study Of College Calculus?* .**Journal For Research İn Mathematics Education**.23(1), 56-71.

FERRİNİ -MUNDY , Joan ve LAUTEN, Darien.(1994). *Learning About Calculus Learning.*,**The Mathematics Teacher** . February 87 (2).

FİDAN , Nurettin.(1985). **Okulda Öğrenme ve Öğretme.** Ankara: Alkım Yayınevi.

FRASER, Peter.(1980). **Mathematics Book 1**. Nurol Matbaacılık A.Ş. TED Ankara Colleges Publications.

GİLLMAN, Leonard. (1997). *Rigor in Calculus*. **Notices of the AMS**. 44 (8),932-934. (September).

GÖKER, Lütfi.(1997). **Matematik Tarihi Ve Türk-İslam Matematikçilerinin Yeri**. İstanbul: Milli Eğitim Basımevi.

GRAVEMEİJER, Koeno ve DOORMAN, Michiel.(1999). *Context Problems in Realistic Mathematics Education: A Calculus Course as an Example* . **Educational Studies in Mathematics**. 39, 111-129 Kulwer Academic Publishers. Printed İn The Netherlands.

GÜR, Hülya .(1999). **Matematik Öğretmen Adayının Aktif Öğrenme Metodunu Kullanarak Matematiği Öğretmeyi Öğrenmesi.** Üniversity of Leicester. (Yayınlanmamış Doktora Tezi).

HACISALİHOĞLU, H.Hilmi ve BALCI, Mustafa. (1996). **Temel Ve Genel Matematik**. Ankara: Ertem Basın Yayın Dağıtım Ltd.Şti.

HAHN, Karl.(1996). **http://valdosta.edu/~junji/limit_1.html**

HALLETT, Deborah Hughes.(1996).*Neden Birçok Öğrenci Calculus Dersinde Zorlanıyor?* .**Matematik Dünyası**. 6(2).

HEDDENS, James W. ve SPEER, William R. (1997). **Today's Mathematics, Part 2: Activities and Instructional Ideas.** An İmprint of Prentice Hall , Upper Saddle River, New Jersey Colombus, Ohio.

htpp://www.math.hmc.edu/calculus/tutorials/limits/

htpp://fourier.math.temple.edu/cgi-bin/manager

http://archives.math.utk.edu/visual. calculus/1/limits.17/index.html

http://www.central.edu/homepages/hibbarda/CEUM/

http://www.coolmath.com/limit1.htm

http://www.Woodrow.org/teachers/mi/1993/13brud.html

http://www.math.uga.edu/~lvalero/calc/sect2p2.htm

http://www.ping.be/math/limth.htm

http://www.mathacademy.com/platonic_realms/encyclop/articles/zeno_tor.html

http://www.mathacademy.com/platonic_realms/encyclop/articles/limits.html

http://www.math.ou.edu/~amiller/1823/misc/limex7limex.htm

http://www.langara.bc.ca/mathstats/resource/onWeb/calculus.../index.ht

JONASSEN, David H.(2000) "*Toward a Design Theory Of Problem Solving* " **Educatinaol Technology Research and Development**. 48(4). 63-85.

KALAYCI, Nurdan. (2001). "**Sosyal Bilgilerde Problem Çözme ve Uygulamalar** " Ankara: Gazi Kitapevi Tic.Ltd.Şti.

KARASAR, Niyazi.(1994). **Bilimsel Araştırma Yöntemi**. Ankara: Araştırma Eğitim Danışmanlık Ltd.

KAPTAN, Saim.(1998). **Bilimsel Araştırma ve İstatistik Teknikleri** .Ankara: Tekışık Web Ofset Tesisleri.

KUTLU, Göknur. (1996). **Ortaöğretimde Matematik Öğretiminde Yeni Yöntemler.** İstanbul: Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı (Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi).

KÜÇÜKAHMET, Leyla .(1992).**Hizmet İçi Eğitim (Teori ve Uygulamaları).** Ankara:Gazi Üniversitesi İletişim Fakültesi Matbaası.

KÜÇÜKAHMET, Leyla .(1998). **Öğretim İlke ve Yöntemleri.** Ankara: Alkım Yayıncılık.

KÜÇÜKAHMET, Leyla .(1999). **Öğretimde Planlama ve Değerlendirme** . İstanbul: Alkım Yayınevi .

LAURENCE,S.Husch..**http://archives.math.utk.edu7visual/calculus/1/limits.17/ index.html**

LAUTEN, A.Darien ve GRAHAM, Karen ve FERRİNİ-MUNDY, Joan. (1994). **Student Understanding Of Basic Calculus Concept : İnteraction With The Grafhics Calculator**.

LİES, Malcom E.(Çev.: Nermin Arık). (1997). "**Bir Sayı Tut**". Tübitak Popüler Bilim Kitapları. Pro-Mat Basın Yayın A.Ş. İstanbul.

MİLLİ EĞİTİM BAKANLIĞI. (1992) . **Ortaöğretim Matematik Dersi Programları**. İstanbul: Milli Eğitim Basımevi.

MİLLİ EĞİTİM BAKANLIĞI. (1996). **Onbeşinci Milli Eğitim Şurası**. İstanbul : .Milli Eğitim Basımevi

MİRASYEDİOĞLU, Şeref. (1998). **Temel matematik 1.** Ankara: Gündüz Eğitim Yayıncılık.

MURPHY, Lisa Denise. *Students' Conceptions of Limit a Review of Research Literature, With Attention to Methodology* . **http://www.mste.uiuc.edu/murphy7papers/LimitConceptsPaper.html/**

OĞUZKAN, M.Kemal. (11985). **Orta dereceli Okullarda Öğretim (Amaç, İlke, Yöntem ve Teknikler)**. Ankara: Emel Matbaacılık.

ÖZDEN, Yüksel.(1998). **Öğrenme ve Öğretme** .Ankara: Pe-gem Yayıncılık

ÖZDEMİR, Servet ve YALIN, H. İbrahim.(2000).**Öğretmenlik Mesleğine Giriş**.Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.

ÖZTUNÇ, M.Kemal. (1972). **Çözümleriyle Beraber Yüksek Matematik Diferansiyel Ve İntegral Hesap.** İstanbul: İrem Yayınları.(Cilt 1).

PETİT, Marge ve ZAWOJEWSKİ, Judith S. (1997). *Teachers and students Learning Together About Assessing Problem Solving*. **The Mathematics Teacher**, 90(6). September.

PIRIE, Susan E. ve MARTIN, Lyndon.(1997). *The Equation, The Whole Equation And Nothing But The Equation! One Approach To The Teching Of Linear Equations.* **Educational Studies in Mathematics.** 181, Kluwer Academic Publishers 34, 159.

SLOMER, Dave.(1999). *Numerical Zooming On Limits*. **The Mathematics Teachers**, 92 (5), 448.

SAYGI, Müge.(1989). *Matematik Kaygısı ve Matematik Kaygı Ölçeği Mars A'nın Türkiye'ye Uyarlama çalışmaları*. **Eğitim ve Bilim Dergisi,** 13(71).

SEMERCİ, Nuriye. (2000) "Kritik Düşünme Ölçeği". **Eğitim ve Bilim** , 25(116), 23-26. April.

SERTÖZ, Sinan. (1998). **Matematiğin Aydınlık Dünyası**. Tübitak Popüler Bilim Kitapları, Ankara: Nurol Matbaacılık.

SÖNMEZ, Veysel.(1986). **Program Geliştirmede Öğretmen El Kitabı**.Yargı Yayınları. Ankara.

SÖNMEZ, Veysel.(1998). **Program Geliştirmede Öğretmen El Kitabı**. Ankara: Anı Yayıncılık.

SİERPİNSKA, Anna.(1987).*Humaties Students and Epistemological Obstacles Related To Limits.***Educational Studies In Mathematics,** 18, 371-397.

SPİVAK, Michael.(1991).**Analiz.** Anadolu Açıköğretim Fakultesi ,Eskişehir. (Şubat).

SZYDLİK, Jennnifer Earles (2000). *Mathematics Beliefs And Conceptuel Understanding Of Limit Of Function.* **Journal Research İn Mathematics Education,** 31(3),258-276.

TALL, David.(Ed).(1991). **Advanced Mathematical Thinking**. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.

TODOROV, Todor D.(2001). *Back To Classics: Teaching Limits Through İnfinitesimals* .**İnternational Journal of Mathematics Education in Science and Tecnology,** 32 (1), 4-20 .

TROUCHE, Luc.(2000).*La Parabole Du Gaucher Et De La Casserole á Bec Versuer: Ètude Des Processus Dápprent İssage Dans Un Envirannement De Calculatries Symboliques.* **Educational Studies İn Mathematics,** 41,239-264. Kluwer Academic Publishers.Printed İn The Netherlands.

TÜRNÜKLÜ, Elif Beymen. (1999). **Matematik Öğretmenlerinin Ölçme Ve Değerlendirme Pratikleri Ve Öğrencinin Öğrenmesini Geliştiren Değerlendirmeleri Türkiye Ve İngiltere'deki 11-14 Yaş Grubu Öğretmenleri İle Çalışma**. Üniversity Of Leicester .(Yayınlanmamış Doktora Tezi).

UBUZ, Behiye.(1999). *Genel Matematikte (Calculus) Öğrenci Hataları.* **Matematik Dünyası,** .Aralık, 8 (5), 9-11.

WİLLİMAS, Steven R.(1991). *Models Of Limit Held By College Calculus Students.***Journal For Research İn Mathematics Education** ,.22 (3), 219-236.

WİLLİMAS, Steven R.(2001). *Predications of the Limit Concept: An Application of Repertory Grids*. **Journal for Research in Mathematics Education**, 32(4), 341-367.

Wu,H. (1997). http://www.math.berkeley.edu.

YALIN, Halil İbrahim. (2001). **Öğretim Teknolojileri Ve Materyal Geliştirme**.Ankara: Nobel Yayın Dağıtım Ltd.Şti.

YILDIRIM, Cemal. (1996). **Matematiksel Düşünme**. İstanbul: Remzi Kitapevi.

EKLER LİSTESİ

EK **SAYFA**

EKLER

Ek 1 : Hedef Ve Davranışlar

LİMİT VE SÜREKLİLİK

BÖLÜMÜN SÜRESİ: 40dk.

HEDEFLER VE DAVRANIŞLAR

Hedef 1 : Reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonlarda limit bilgisi

Davranışlar:

1.Reel değişkenli bir fonksiyonun bir noktadaki limitini tanımlayabilme

2. Reel değişkenli bir fonksiyonun bağımsız değişkeninin sonsuza gitmesi halinde limit değerini tanımlama.

3. Reel değişkenli bir fonksiyonun bir noktadaki sağdan ve soldan limitini tanımlama.

Hedef 2: Reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonların limitlerini kavrayabilme

Davranışlar

1. Reel değerli bir fonksiyonun bir noktadaki limitini örneklerle açıklama
2. Reel değerli bir fonksiyonun bağımsız değişkeninin sonsuza yaklaşması halinde limit değerini tanımlama
3. Reel değerli bir fonksiyonun bir noktadaki sağdan ve soldan limitini örneklerle açıklama
4. Sağdan limit , soldan limit ve limit kavramları arasındaki ilişkiyi açıklama
5. İki fonksiyonun toplamının ve farkının limiti ile bu fonksiyonların limitleri arasındaki ilişkiyi gösterme.
6. İki fonksiyonun çarpımının limiti ile bu fonksiyonların limitleri arasındaki ilişkiyi gösterme
7. İki fonksiyonun bölümünün limiti ile bu fonksiyonların limitleri arasındaki ilişkiyi gösterme

8. Bir fonksiyonun bir reel sayı ile çarpımının limiti ile, bu fonksiyonun limiti arasındaki ilişkiyi gösterme

Hedef 3 : Reel değişkenli reel değerli fonksiyonların limitleri ile ilgili uygulama yapabilme

Davranışlar

1. Limitlerinde belirsizlik halleri bulunmayacak şekilde verilen iki fonksiyonun toplamının ve farkının limitini hesaplama
2. Limitlerin belirsizlik halleri bulunmayacak şekilde verilen iki fonksiyonun çarpımının limitlerini hesaplama
3. Limitinde belirsizlik halleri bulunmayacak bir fonksiyonun bir reel sayı ile çarpımının limitlerini hesaplama
4. $x \to \infty$ iken lim (1/x) limitini bulup yazma
5. Limitlerinde belirsizlik halleri bulunmayacak şekilde verilen iki fonksiyonun bölümünün limitlerini hesaplama
6. Verilen bir tam değer fonksiyonunun belirtilen bir noktadaki limitini bulma
7. Verilen bir mutlak değer fonksiyonunun belirilen bir noktadaki limitini bulma
8. Verilen bir işaret fonksiyonunun belirilen bir noktadaki limitini bulma
9. Verilen parçalı bir fonksiyonunun belirilen bir noktadaki limitini bulma

Hedef 4 : Reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonların limitlerini hesaplama yöntemlerini kavrayabilme.

Davranışlar

1. Belirsizlik kavramını açıklama
2. Belirsizlik hallerini söyleme ve yazma($0/0, \infty/\infty, \infty-\infty, 0.\infty, 1^{\infty}, 0^{\infty}, \infty^{0}$)
3. 0/0 belirsizlik haline ait bir limitin hesaplanmasını açıklama
4. ∞/∞ belirsizlik haline ait bir limitin hesaplanmasını açıklama
5. ∞-∞ belirsizlik haline ait bir limitin hesaplanmasını açıklama

6. $0.\infty$ belirsizlik haline ait bir limitin hesaplanmasını açıklama

Hedef 5 : Reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonların limitlerini, hesaplama yöntemleri ile ilgili uygulama yapabilme

Davranışlar:

1. Verilen bir nokta 0/0 belirsizlik halini alan bir fonksiyonun bu noktadaki limitini hesaplama
2. Verilen bir noktada ∞/∞ belirsizlik halini alan bir fonksiyonun bu noktadaki limitini hesaplama
3. Verilen bir noktada $\infty-\infty$ belirsizlik halini alan bir fonksiyonun bu noktadaki limitini hesaplama
4. Verilen bir noktada $0.\infty$ belirsizlik halini alan bir fonksiyonun bu noktadaki limitini hesaplama
5. $x \rightarrow 0$ iken lim(sinx/x) i hesaplama
6. Verilen trigonometrik bir fonksiyonun istenilen bir noktadaki limitini hesaplama

Hedef 6 :Reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonların sürekliliğini kavrayabilme

EK 2 Erişi Testi Soruları

YÖNERGE

Bu testte toplam 14 soru bulunmaktadır. Lütfen soruları dikkatli okuduktan sonra test sorularında a, b, c, d şıklarından hangisini tercih ediyorsanız onu daire içine alınız.Yorumlarınız ve açık uçlu soruların cevabını yazmanız için boşluk bırakılmıştır. Bu boşluklara cevaplarınızı yazabilirsiniz.Verdiğiniz cevaplar bir araştırma için kullanılacaktır.Yardımlarınız için şimdiden teşekkür ederiz.

SORULAR

1) Terimleri $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{8},\cdots$ olan dizinin limiti aşağıdakilerden hangisidir?

Kısaca sebebini yazınız.

a) 1 **b)** 0 **c)** limit yok **d)** ∞

Cevap:

2) n. terimi $\frac{n}{n+1}$ olan diziyi göz önüne alalım. Bu dizinin limiti yani $\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})$ aşağıdakilerden hangisidir? Kısaca sebebini yazınız.

a) 0 **b)** 1 **c)** ∞ **d)** limit yok

Cevap:

3) Genel terimi $\frac{2n+3}{n}$ olan dizinin limitinin 2 yani; $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n}=2$ olmasından ne anlıyorsunuz bir kaç cümle ile yazınız.

Cevap:

4) x bir değişkeni a da bir sabit bir reel sayıyı göstersin. $x \neq a$ olmak üzere reel sayı doğrusu üzerinde ;

a) x değişkeninin a sayısına sağdan yakınsaması ,

b) x değişkeninin a sayısına soldan yakınsaması ,

deyimlerinden anladıklarınızı birkaç cümle ile yazınız.

Cevap: a)

Cevap: b)

5) $f(x)=\dfrac{(x^2-1)}{x-1}$ fonksiyonunu göz önüne alalım x'in -1 'e yakın olduğu yerlerde f fonksiyonunun aldığı değerler aşağıda verilmiştir. Aşağıdaki tabloyu inceleyerek bu fonksiyonun x=-1 deki limitini bulunuz.

x=-0.8 için f(-0.8)= 0.2

x=-0.9 için f(-0.9)= 0.1

x=-0.99 için f(-0.99)= 0.01

x=-0.999 için f(-0.999)=0.001

x=-1 için f(-1)=0

x=-1.001 için f(-1.001)=0.001

x=-1.01 için f(-1.01)= 0.01

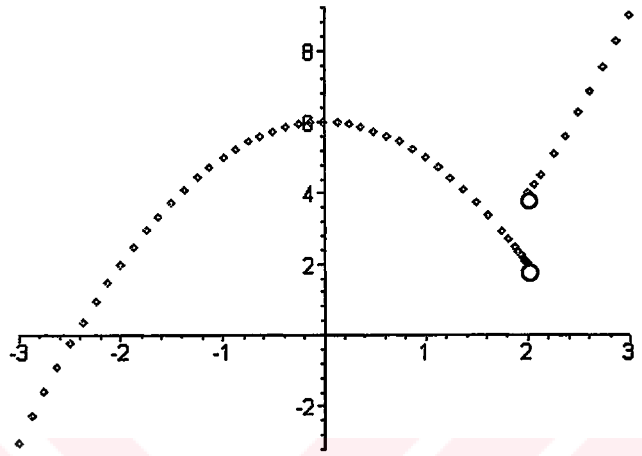
x=-1.1 için f(-1.1)= 0.1

x=-1.2 için f(-1.2)= 0.2

x	-0.8	-0.9	-0.99	-0.999	-1	-1.001	-1.01	-1.1	-1.2
f(x)	0.2	0.1	0.01	0.001	0	0.001	0.01	0.1	0.2

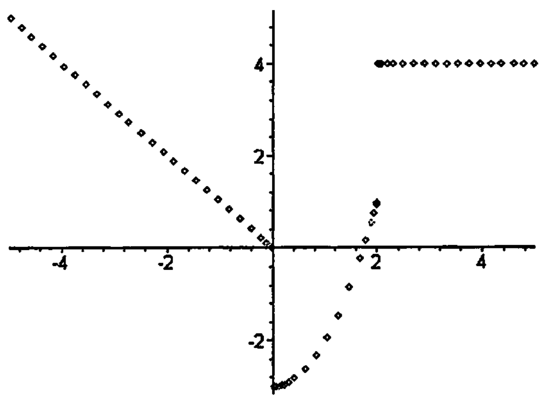
Cevap:

6) Aşağıda grafiği verilen $f(x)=\begin{cases}-x^2+6 & x<2\\ x^2 & x>2\end{cases}$ fonksiyonunun x=2 noktasındaki limiti $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?



a) 2 **b)** 4 **c)** limit yok **d)** 2

7) Aşağıda grafiği verilen $f(x)=\begin{cases}-x & , & x<0\\ x^2-3 & , & 0\le x<2\\ 4 & , & x\ge 2\end{cases}$ fonksiyonunu göz önüne alalım.



Buna göre aşağıdakileri cevaplayınız.

i) Bu fonksiyonun x=2 noktasında sağdan limiti $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

a) 4 **b)** 1 **c)** 0 **d)**-3

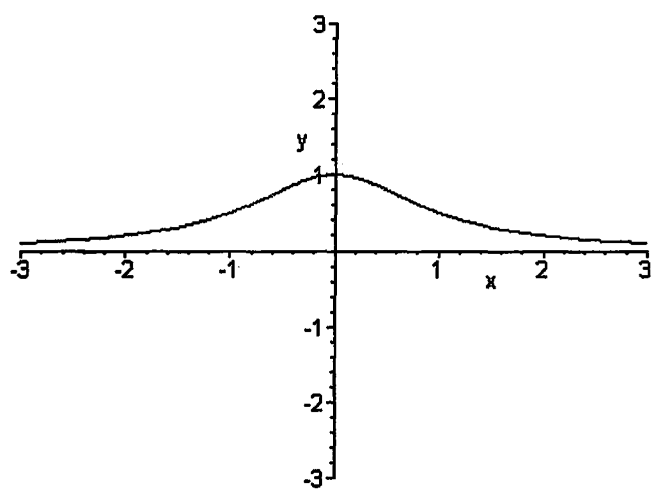
ii) Bu fonksiyonun x=2 noktasında soldan limiti $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ aşağıdakilerden hangisidir?

a) 1 **b)** 4 **c)** 0 **d)**-3

iii) $\lim_{x\to 2} f(x)$ nedir?

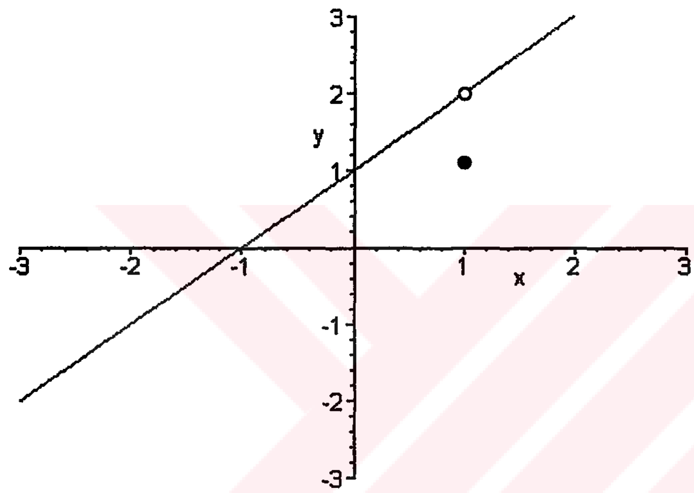
a) 1 **b)** 4 **c)** limit yok **d)**-3

8) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ ile verilen f fonksiyonunun x=2 noktasındaki limiti $\lim_{x\to 2}\dfrac{1}{1+x^2}$ aşağıdakilerden hangisidir?



a) 0 **b)** $\frac{1}{5}$ **c)** limit yok **d)** 1

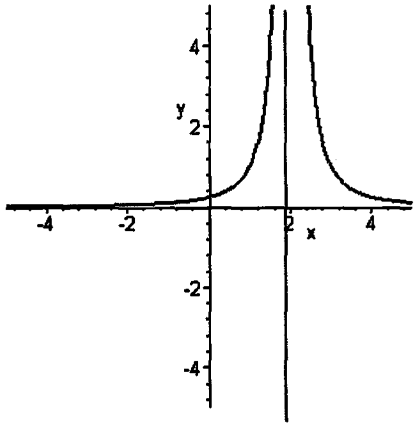
9) Aşağıda grafiği verilmiş olan ve $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & , \quad x \neq 1 \\ 1 & , \quad x=1 \end{cases}$ ile verilen f fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyonun x=1 deki limiti $\lim_{x\to 1} f(x)$ aşağıdakilerden hangisidir.?



a) 2 **b)** $\frac{1}{5}$ **c)** limit yok **d)** 0

10) Aşağıda grafiği verilmiş olan ve $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$ ile verilen f fonksiyonu göz önüne alalım.Buna göre grafiği kullanarak bu fonksiyonun x=2 noktasındaki

a) Sağdan limitini bulunuz
b) Soldan limitini bulunuz
c) Bu fonksiyonun x=2 noktasında limiti var mıdır? Neden?



Cevap: a)

Cevap: b)

Cevap: c)

11) $f:\Re \to \Re$

$$x \to f(x) = \begin{cases} x-1 & , x \le 1 \\ 2x & , x > 1 \end{cases}$$ ile verilen f fonksiyonunun 1 noktasındaki limitini bulunuz?

a) 1 **b)** 0 **c)** limit yok **d)** 2

12) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x+5}{2x+8} = \dfrac{4}{7}$ ifadesinden ne anlıyorsunuz birkaç cümle ile yazınız.

Cevap:

13) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x+5}{2x+8} = \dfrac{5}{2}$ ifadesinden ne anlıyorsunuz birkaç cümle ile yazınız.

Cevap:

14) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ ifadesinden ne anlıyorsunuz birkaç cümle ile yazınız

Cevap:

Ek 3 İlgili Web Siteleri

Hahn (1999) tarafından hazırlanan "http://www.valdosta.edu/~junji/limit_1.html" adlı web sayfasında; " Limit Kavramı " başlığında bir fonksiyonun bir noktadaki limitini bulmak için x, f(x) değerlerinden oluşan tablolardan yararlanılarak çözülmüş örnekler bulunmaktadır.

Arnold (1995) tarafından hazırlanan " htpp://www.ima.umn.edu/~arnold/graphics.html " adlı web sayfasında; limit tartışmada faydalı olan fonksiyonların grafiklerine yer verilmiştir. Bir örnekte 1 noktasında limiti –5'e eşit olan farklı özelliklere sahip fonksiyonlar verilmiştir. Bu fonksiyonlar 1 noktasında tanımsız, 1 noktasındaki değeri limitine eşit olmayan, 1 noktasındaki değeri limitine eşit olan ve 1 noktasında sağdan ve soldan limiti farklı olduğu için limiti olmayan fonksiyonlardır. Bu gibi örneklerle öğrencilerin limit kavramını bilgi düzeyinde değil, kavrama düzeyinde öğrenmesi mümkün olabilir.

Karen (1997) tarafından hazırlanan " http://www.coolmath.com/limit1.htm" adlı web sayfasında; "Limits" başlığı altında geometrik olarak limit kavramına yaklaşılmış ve bu aşamadan sonra limit kavramı sezdirttirilmiştir. Daha sonra fonksiyonların grafikleri üzerinde sezgisel olarak fonksiyonların limitleri bulunduğu örneklere yer verilmiştir.

Arnold tarafından hazırlanan "http://www.langara.bc.ca/mathstats/resource/onWeb/calculus.../index.ht" adlı web sayfasında; bir fonksiyonun limitleme davranışının sunulduğu örnekler, California'daki bir öğretmen tarafından sunulan bir sayıya ondalık yaklaşımlara ve Japonya'daki IES grubunun sunduğu; bir limit olarak e'nin tanımının Java Applet ile sunumuna yer verilmiştir

Husch tarafından hazırlanan "http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/1/limits.17/index.html" adlı web sayfasında; formal limit tanımlarına verilmiş ve TI-85 ve TI-86 grafik hesaplayıcı makinelerinde limitin nasıl hesaplanacağını gösteren örneklere yer verilmiştir.

Aşağıda bulunan adreslerdeki çalışmalar yapılan bu çalışma ile ilgilidir. Ancak bu çalışmaları yapan isimlere ulaşılamadığından yalnızca adreslerin isimleri verilmiştir.

"htpp://www.math.hmc.edu/calculus/tutorials/limits/ " adresinde ard arda gelen grafiklerle formal ε,δ limit tanımı verilmiştir.

"htpp://britanica.com/bcom/eb/article/8/0,5716,49448+1+48305,00.html" adresinde $\lim_{x\to x_o} f(x)$ olarak yazılan x_o noktasındaki f fonksiyonunun limitin farklı bir tanımına yer verilmiştir. Bu tanım aşağıdaki gibidir:

Eğer mümkün olduğu kadar kendi kendine x_o noktası haricinde, x_o noktası civarında herhangi bir aralıkta

$$f(x)=g(x)$$

olacak şekilde (kırılmamış) bir sürekli g fonksiyonu varsa bu takdirde

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = g(x)$$

yazılabilir. ε,δ limit tanımı bir sayının gerçekten limit olup olmadığını belirlemek için kullanılabilir. Fakat limit bulmak için yukarıdaki tanım kullanılabilir.

"htpp://fourier.math.temple.edu/cgi-bin/manager" adresinde Calculusta yer alan tüm konularla ilgili örneklere yer verilmiştir. Limit ve süreklilik konusuna ise delta bulma , basit limitler ve örnekler başlığı altında yer verilmiştir. Bu adreste Reich tarafından hazırlanan bir fonksiyonun bir noktadaki limitinin hesaplandığı bir sayfa da bulunmaktadır. Bu sayfada fonksiyon ve limitini bulmak istediğimiz noktayı girildiği zaman hazırlanan program o fonksiyonun, o noktadaki limitini bulmaktadır.

"http://www.central.edu/homepages/hibbarda/CEUM/" adresinde "Mathematica Kullanarak Calculusu İnceleme " başlığı altında matematica programı kullanarak bir noktaya sağdan ve soldan yaklaşmayı grafiksel olarak yer verilmiş ve daha sonra bu sayılara karşı fonksiyonun aldığı değerler bulunup daha sonra epsilon-delta tanımı verilmiştir.

"http://www.woodrow.org/teachers/mi/1993/13brud.html" adresinde "Limit Kavramını Sezgisel Anlamayı Geliştirmek İçin Tablolama Programı Kullanma" başlığı altında Microsoft Works veya Excel kullanarak limit kavramını sezgisel anlamaya yardımcı olabilecek dört aktivite yer almaktadır.

"http://www.math.uga.edu/~lvalero/calc/sect2p2.htm" adresinde "Limit Kavramı" başlığı altında limitin formal tanımı ve özellikleri verilip ardından fonksiyonların bazı noktalardaki limiti örneklerine yer verilmiştir.

"http://www.ping.be/math/limth.htm" adresinde bir dizinin limiti ve limit kavramının özellikleriyle ilgili teoremler ve formal ispatlarına yer verilmiştir.

"http://www.mathacademy.com/platonic_realms/encyclop/articles/zeno_tor.html" adresinde limit kavramıyla ilgili paradokslara yer verilmiştir.

"http://www.mathacademy.com/platonic_realms/encyclop/articles/limits.html " adresinde limitin tarihsel gelişimi ve Arşimet prensibine dayalı olarak formal epsilon-delta limit tanımı verilmiştir. Daha sonra sağdan ve soldan limit tanımları verilmiş, bu kavramlar örnekler üzerinde açıklanmış, daha sonra dizilerin limiti kavramı Arşimet prensibine dayalı olarak açıklanmıştır.

"http://www.math.ou.edu/~amiller/1823/misc/limex7limex.htm" adresinde limit tanımının formal epsilon-delta tanımı ile çözülmüş limit problemlerine yer verilmiştir.

T.C.
ANKARA VALİLİĞİ
Milli Eğitim Müdürlüğü

BÖLÜM : Kültür.
SAYI : B.08.4.MEM.4.06.00.11.070/ 3626
KONU : Araştırma.

7/11/2000

KEÇİÖREN KAYMAKAMLIĞINA
(İlçe Milli Eğitim Müdürlüğü)

Gazi üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Handan ÇOLAK'ın ilçeniz Kanuni Lisesinde uygulama yapabilmesine ilişkin 3.11.2000 tarih ve 3621 sayılı Valilik Oluru ilişikte gönderilmiştir.

Valilik Oluru gereğince işlem yapılması hususunun ilgili okul müdürlüğüne bildirilmesini rica ederim.

Gülseren ÇALI
Vali a.
Müdür Yardımcısı

EKLER:
Eki : 1-Valilik Oluru.

T.C.
ANKARA VALİLİĞİ
Milli Eğitim Müdürlüğü

03/11/2000

BÖLÜM : Kültür.
SAYI : B.08.4.MEM.4.06.00.11.070/ 3621
KONU : Araştırma.

VALİLİK MAKAMINA
ANKARA

İLGİ: Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'nün 19.10.2000 tarih ve 3654 sayılı yazısı.

Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Handan ÇOLAK'ın "Limit Öğretmeye Yeni Bir Yaklaşım" konulu tez ile ilgili uygulamayı İlimiz Kanuni Lisesinde yapabilmesi için ilgi yazı ile izin istenmektedir.

Kamu kurum ve kuruluşlarındaki öğrencilerin kılık-kıyafetleri ile okulun tüm kurallarına uyulması kaydıyla söz konusu istek Müdürlüğümüzce uygun görülmektedir.

Makamlarınızca da uygun görüldüğü takdirde, gereğini olurlarınıza arz ederim.

Nihat ALKAN
Başmüfettiş
Milli Eğitim Müdürü V.

OLUR
~~../11/2000~~

Şükrü KURNAZ
Vali a.
Vali Yardımcısı

03.11.2000

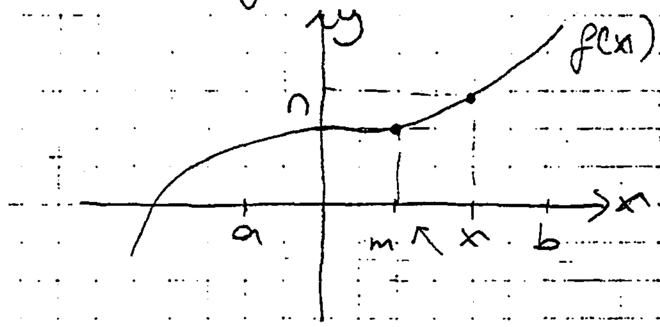
FONKSİYONLARIN LİMİTİ

DAN LİMİT:

(a,b) aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. x değişkeni de alıktaki bir m sayısına azalan değerlerle yaklaştığında te bir n sayısına yaklaşıyorsa n sayısına f(x), fonk- ıun x m'ye yaklaşırken sağdan limiti denir.

ı $f(x)=n$

$\to m^+$ şeklinde gösterilir.

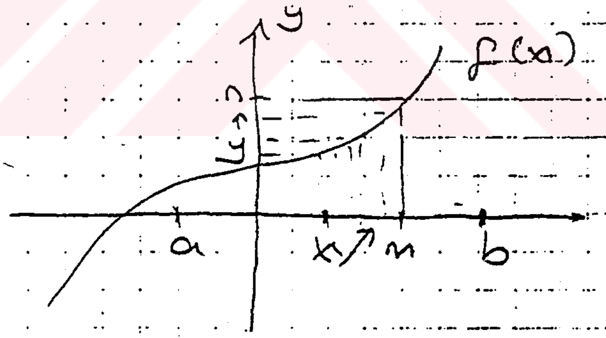


AN LİMİT:

'(x), (a,b) aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. x değişkeni lıktaki bir m noktasına artan değerlerle yaklaştığında, n n'ye yaklaşıyorsa, n sayısına f(x) in $x \to m$'ye rken soldan limiti denir.

$\lim f(x)=n$

$x \to m^-$ şeklinde gösterilir.



'T:

'a,b) aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. x değişkeni bu taki bir m sayısına sağdan veya soldan yaklaştığında ten n'ye yaklaşıyorsa n sayısına f(x) in $x=m$ için i denir.

$\lim f(x)=n$

$x \to m$ şeklinde gösterilir.

Buna göre f(x) in bir noktada limitinin olabilmesi için u noktadaki sağdan limitinin soldan limitine eşit olması gerekir. Bu eşit olan limite de $f(x)$'in limiti denir.

? Genel olarak $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ dır.

Ancak a noktası fonksiyonun sınır değeri ya da tanımsız yaptığı değer ise bu durumda sağdan ve soldan limitine bakmak gerekir. ve bu limitlerin birbirine eşit olması şarttır.

ÖRN: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 1$ ise $\lim_{x \to -2} f(x) = ?$

$$= (-2)^3 - 2(-2)^2 - 3(-2) + 1$$
$$= -8 - 8 + 6 + 1$$
$$= -16 + 7$$
$$= -9$$

ÖRN: $f(x) = \operatorname{Sgn}(x^2 - 4) + |3x - 1|$ ise $\lim_{x \to 3} f(x) = ?$

$$= \operatorname{Sgn}(3^2 - 4) + |3.3 - 1|$$
$$= 1 + 8$$
$$= 9$$

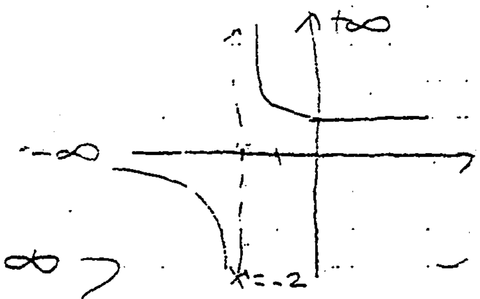
ÖRN: $\lim_{x \to 2} \left(\frac{\sqrt{3x - 2} + x + 1}{2x + 1} \right) = ?$

$$= \frac{\sqrt{3.2 - 2} + 2 + 1}{2.2 + 1} = \frac{5}{5} = 1$$

ÖRN: $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x + 1}{x - 1} \right) = ?$ (Sağdan ve soldan limitine bakılır)

$$\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = \frac{1+1}{1^+ - 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty \Rightarrow \frac{2}{0{,}000\ldots1} = +\infty$$
$$\lim_{x \to 1^-} \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = \frac{1+1}{1^- - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

limiti yok.



ÖRN: $\lim_{x \to -2} \left(\frac{1}{x + 2} \right) = ?$

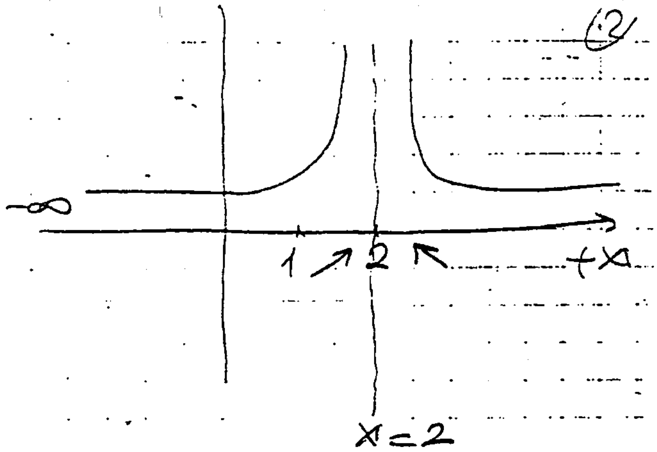
$$\lim_{x \to -2^+} \left(\frac{1}{x+2} \right) = \frac{1}{-2^+ + 2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$
$$\lim_{x \to -2^-} \left(\frac{1}{x+2} \right) = \frac{1}{-2^- + 2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

limiti yok

RN: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} = ?$

$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{(2^+-2)^2} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{(2^--2)^2} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$



ÖZEL TANIMLI FONKSİYONLARIN LİMİTLERİ

Özel tanımlı fonksiyonlarda sınır değerleri için limit alınır. sağdan ve soldan limitlere bakmak gerekir. Diğer değerler in normal limit alınır.

$x \to a$ için $f(a)$ bulunur.

PARÇALI FONKSİYONLARIN LİMİTİ

1: $f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x < -1 \text{ ise} \\ x^2-5, & -1 \le x < 1 \text{ ise} \\ 2x+1, & x \ge 1 \text{ ise} \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = ?$ b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = ?$

c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = ?$ d) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = ?$

e) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = ?$

a) $3.(-3)-1 = -9-1 = -10$

b) $0^2-5 = -5$

c) $2.2+1 = 5$

d) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) =$ sağdan ve soldan limit bakılır

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} = 3.(-1)-1 = -3-1 = -4 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} = (-1)^2-5 = 1-5 = -4 \end{array}\right\} \lim\limits_{x \to -1} f(x) = -4$

e) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1^2-5 = 1-5 = -4 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2.1+1 = 2+1 = 3 \end{array}\right\}$ limit yok

$$f(x)=\begin{cases} 2x-a, & x<2 \text{ ise} \\ x^2+2a, & x\geq 2 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonun her noktada limiti olduğuna göre a kaçtır?

$x \to 2$ için limit vardır.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

$$2.2-a = 2^2+2a$$

$$4-a=4+2a$$

$$4-4=2a+a$$

$$0=3a$$

$$\boxed{a=0}$$

MUTLAK DEĞERLİ FONKSİYONLARDA LİMİT

Mutlak değer içini "0" yapan değerlerde sağdan ve soldan bakılır. Diğer değerler için normal limit alınır.

1: $f(x)=|x^2-2x-8|$ ise $\lim\limits_{x\to 1} f(x) + \lim\limits_{x\to 4} f(x) = ?$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = |1^2-2.1-8| = |-9| = 9$$

$\lim\limits_{x\to 4} f(x) =$ Sağdan ve soldan limitine bakılır.

$$x^2-2x-8=0$$

$$-4 \quad +2$$

$$(x-4)(x+2)=0$$

$$x=4 \vee x'=-2$$

x	$-\infty$	-2		4	$+\infty$
$\lvert x^2-2x-8\rvert$	+		-		+

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 4^-} f(x) &= -(4^2-2.4-8)=0 \\ \lim_{x\to 4^+} f(x) &= 4^2-2.4-8=0 \end{aligned}\right\} \lim_{x\to 4} f(x)=0$$

2: $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-4}{|-x+2|}+|x-3|\right)=?$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-}\left(\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\underset{-\cancel{(x-2)}}{-x+2}}+|x-3|\right) &= -4+1=-3 \\ \lim_{x\to 2^+}\left(\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}+|x-3|\right) &= 4+1=5 \end{aligned}\right\} \lim_{x\to 2} f(x) \text{ yoktur}$$

Ö: $\lim\limits_{x\to -3^-} \left(\dfrac{|x^2-9|}{x+3} \right) = ?$

$\lim\limits_{x\to -3^-} \left(\dfrac{(x-3)\cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}} \right) = -3-3 = -6.$

Ö: $\lim\limits_{x\to 1} \left(\underbrace{|x^2-2x-3|}_{\substack{1^2-2-3 \\ 4}} + \underbrace{|x^2-1|}_{\substack{1-1 \\ 0}} \right) = ?$ $= 4$

SN: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{|x-1|} = ?$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{-x+1} &= \frac{1}{-1+1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1} &= \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned}\right\} \lim_{x\to 1} \frac{x}{|x-1|} = +\infty$$

İŞARET FONKSİYONLARINDA LİMİT

Signumun önündeki kısmı "0" yapan değerlerde sağdan ve soldan limite bakılır. Diğer değerler için normal değerler alınır.

Not: Genellikle sınır değerlerinde limit yoktur. Ancak çift katlı kök olan noktalarda limit vardır.

SN: $\lim\limits_{x\to -3} \left[(x-x^2) \cdot \operatorname{sgn}(x^2+2x-3) \right] = ?$

$x^2+2x-3=0$

$3, -1$

$(x+3)(x-1)=0$

$x=-3 \cup x=1$

x	$-\infty$ … -3	… 1	…
$\operatorname{sgn}(x^2+2x-3)$	$+1$	-1	$+1$
$f(x)$	$x-x^2$	x^2-x	$x-x^2$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to -3^-} f(x) &= -3-(-3)^2 = -3-9 = -12 \\ \lim_{x\to -3^+} f(x) &= (-3)^2-(-3) = 9+3 = +12 \end{aligned}\right\}$$ $x \to -3$ için limit yok

SN: $\lim\limits_{x\to 1} \left[(7x-3) \cdot \operatorname{sgn}(x^3-2x^2+x) \right] = ?$

$x^3-2x^2+x=0$

$x(x^2-2x+1)=0$

$x(x-1)^2=0$

$x=0 \cup x=1$

x	$-\infty$ … 0	… 1	… $+\infty$
$\operatorname{sgn}(x^3-2x^2+x)$	-1	$+1$	$+1$
$f(x)$	$-7x+3$	$7x-3$	$7x-3$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 7.1-3 = 4$

$\lim_{x\to 1} \left(\frac{|x-1|}{Sgn(1-x)} \right) = ?$

ÖRN: $\lim_{x\to -2^-} [\underbrace{Sgn(x^2-4)}_{+1} + \underbrace{Sgn(x^2-x-6)}_{+1}] = ?$

$= 1+1$

$= 2$

$- \quad \frac{-x+1}{+1} = 0$

$+ \quad \frac{x-1}{-1} = 0$

$f(x) = (x^2-9) \cdot Sgn(4-x^2) = ?$

a) $\lim_{x\to 3} f(x) + \lim_{x\to 4} f(x) = ?$ b) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = ?$ c) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = ?$

$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = 0$, $\lim_{x\to 4} f(4) = 7.(-1) = -7$

$4-x^2=0 \Rightarrow x = \mp 2$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = (2^2-9).1 = -5$

x	$-\infty$ -2	2	$+\infty$
$Sgn(4-x^2)$	-1	$+1$	-1
	$9-x^2$	x^2-9	$9-x^2$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = -8$

TAM DEĞER FONKSİYONLARINDA LİMİT

Tam değer içini tam sayı yapan noktalarda sağdan ve soldan limitlere bakılır. Diğer durumlarda normal limit alınır.

$\lim_{x\to 3} [\![2x-1]\!] = ?$

Sağdan ve soldan limitlere bakılır.

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 3^+} [\![2x-1]\!] = 5 \\ \lim_{x\to 3^-} [\![2x-1]\!] = 4 \end{array}\right\}$ limit yok

3 7/2 4 5 6 7

$x < \frac{7}{2} \Rightarrow 6 \leq 2x < 7 \Rightarrow 6-1 \leq 2x-1 < 7-1$

$\Rightarrow 5 \leq 2x-1 < 6$

$[\![2x-1]\!] = 5$

$x < 3 \Rightarrow 5 \leq 2x < 6 \Rightarrow 5-1 \leq 2x-1 < 6-1$

$\Rightarrow 4 \leq 2x-1 < 5$

$[\![2x-1]\!] = 4$

NOT: $f(x) = [\![ax+b]\!]$ biçimindeki fonksiyonlarda $a>0$ ise sınır değeri için sağdan limitlerde normal limit alınır. Soldan limitlerde ise ~~normal~~ limitin 1 eksiği alınır. $a<0$ ise bunun tersi olur.

sağdan

$\lim_{x\to 2^-} [\![\frac{3x-5}{7}]\!] = ?$ $\quad [\![\frac{2.3-5}{7}]\!] = [\![\frac{1}{7}]\!] = 0$

ÖRN: $\lim_{x\to 2^-} [\![x^6]\!] = 2^6-1=63$

ÖRN: $\lim_{x\to 2^+}\left(\underbrace{[\![3-2x^2]\!]}_{-1-1=-2} + \underbrace{\frac{x-2}{|x-2|}}_{1} - \underbrace{\mathrm{Sgn}(2x-4)}_{1}\right)=? \quad = -2$

ÖRN: $\lim_{x\to 3^-}\left(\underbrace{\mathrm{sgn}(x^2-9)}_{-1} + \underbrace{\frac{x^2-9}{|x+3|}}_{(-6)} - \underbrace{[\![\frac{3x-5}{2}]\!]}_{1}\right)=? \quad = -8$

BELİRSİZLİKLERDE LİMİT

$\frac{0}{0}$ BELİRSİZLİĞİNDE LİMİT

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ oluyorsa bu durumda a sayısı payın ve paydanın bir kökü demektir. Belirsizliği ortadan kaldırmak için bu kökü veren pay ve paydadaki $x-a$ çarpanını sadeleştirmek gerekir.

ÖRN: $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x^2-x-2}\right)=? \quad \frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x+1)}=\frac{2+2}{2+1}=\frac{4}{3}$

ÖRN: $\lim_{x\to -3}\left(\frac{x^2+6x+9}{x^2+2x-3}\right)=? \quad \frac{0}{0}$

$\lim_{x\to -3}\frac{\cancel{(x+3)}(x+3)}{\cancel{(x+3)}(x-1)}=\frac{-3+3}{-3-1}=\frac{0}{-4}=0$

ÖRN: $\lim_{x\to -1}\left(\frac{4x^3+4}{5x^2+6x+1}\right)=?$

$5x \quad 1$
$x \quad 1$

$\lim_{x\to -1}\frac{4(x^3+1)}{(5x+1)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{4\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{(5x+1)\cancel{(x+1)}}=\lim_{x\to -1}\frac{4(1+1+1)}{-4}=\frac{12}{-4}=-3$

ÖRN: $\lim_{x\to -2}\left(\frac{x^3+8}{3x^3-12x}\right)=?$

$\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{3x(x^2-4)}=\lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}{3x(x-2)\cancel{(x+2)}}=\frac{(-2)^2-2.(-2)+4}{-6.(-2-2)}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\quad x \quad +1}{2x^2-4x+2}\right)=?$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x(x^2-x-1+1)}{2(x-1)^2}=\frac{(x-1)(x-1)(x+1)}{2(x-1)(x-1)}$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{2}\right)=\frac{1+1}{2}=1$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)=?$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\dots+x^0)}{x-1}$$

$$\begin{array}{r|l} x^n-1 & x-1 \\ \mp x^n \pm x^{n-1} & \underbrace{x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x^0}_{n \text{ tane çarpan}} \\ \hline x^{n-1}-1 & \\ \mp x^{n-1} \pm x^{n-2} & \\ \hline x^{n-2}-1 & \end{array}$$

$$=\underbrace{1+1+1+\dots+1}_{n \text{ tane}}=n$$

KURAL: $x^n-1=(x-1)(\underbrace{x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x^0}_{n \text{ tane}})$

Ör: $\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}\right)=?$ $(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{x}+\sqrt{3})$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x+1-4)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{4}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\frac{\infty}{\infty}$'da BELİRSİZLİK

Rasyonel sayıların sonsuz için limitlerinde genellikle $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği ... limiti bulmak için dizilerdeki limit kuralları uygulanır.

... göre;

Payın derecesi büyük ise limit sonsuzdur.

Paydanın derecesi büyük ise limit 0'dır.

Payın derecesi = Paydanın derecesi ise pay ve paydadaki en büyük dereceli terimlerin katsayıları oranı limiti verir.

... Bir fonksiyonun sonsuz için limitini bulmak için en büyük dereceli terimde x yerine ∞ yazılarak işlem yapılır.