EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

SOFT TOPOLOJİK UZAYLAR ÜZERİNE

Göknur Kale

Tez Danışmanı : Yrd. Doç.Dr. Ayşegül ÇAKSU GÜLER

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu : 403.04.01
Sunuş Tarihi : 02.09.2013

Bornova-İZMİR

2013

Göknur KALE tarafından **Yüksek Lisans** tezi olarak sunulan **"Soft Topolojik Uzaylar Üzerine"** başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 02.09.2013 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:		**İmza**
Jüri Başkanı	**:Yrd. Doç. Dr. Ayşegül ÇAKSU GÜLER**	**...........................**
Raportör Üye	**:Doç. Dr. Oya BEDRE ÖZBAKIR**	**........................... .**
Üye	**: Yrd. Doç. Dr. Esra DALAN YILDIRIM**	**...........................**

ÖZET

SOFT TOPOLOJİK UZAYLAR ÜZERİNE

KALE, Göknur

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Ayşegül ÇAKSU GÜLER
Eylül 2013, 48 sayfa

Bu tez esas olarak beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tez konusu tanıtılmış, ikinci bölümde ise tezin daha kolay anlaşılması için bazı temel tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde soft küme kavramı verilmiş ve özellikleri incelenmiştir. Ayrıca soft topolojik uzay kavramı verilmiş, soft kapanış ve soft iç tanımları verilerek özellikleri araştırılmıştır.

Dördüncü bölümde soft ideal kavramı verilmiş ve bu yapı kullanılarak soft ideal topolojik uzaylar üzerine çalışılmıştır. Soft ideal tanımıyla (F,A) soft kümesinin soft yerel dönüşümüne giriş yapılmış ve özellikleri araştırılmıştır.

Beşinci bölümde soft I-regülerlik ve soft I-normallik kavramlarına giriş yapılmış ve bu kavramların bazı özellikleri örneklendirilmiştir.

Anahtar sözcükler: soft küme, soft topolojik uzay, soft ideal, soft ideal topolojik uzay, soft I-regülerlik, soft I-normallik

ABSTRACT

ON SOFT TOPOLOJICAL SPACES

KALE, Göknur

MSc. in Mathematics
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Ayşegül ÇAKSU GÜLER
September 2013, 48 pages

This thesis essentially consist of five chapters.

In the first chapter, the subject of the thesis is introduced and, in the second chapter, in order to make the understanding easily, some basic definitions and theorems are given.

In the third chapter, soft set concept is given and characterizations of these soft sets are investigated. Moreover, soft topological space concept is given, soft closure and soft interior concepts are given and characterizations of these concepts are investigated.

In the fourth chapter, the definition of soft ideal is given and soft ideal topological spaces by using this structure are studied. Soft local mapping of (F,A) is introduced by the definition of soft ideal and its properties are investigated.

In the fifth chapter, the notion of soft I-regülerity and soft I-normality is introduced and some properties of these notions are examined.

Keywords: soft set, soft topological spaces, soft ideal, soft ideal topological spaces, soft I-regülerity, soft I-normality

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez konumu veren ve çalışmalarım süresince bana yol gösteren, destek veren ve hiçbir zaman anlayışını, sevgisini, yardımlarını esirgemeyen çok sevdiğim ve değer verdiğim saygıdeğer hocam Sayın Yrd.Doç. Dr. Ayşegül ÇAKSU GÜLER' e en içten teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca öğrenim hayatım boyunca benden sevgisini, desteğini ve her konuda yardımlarını esirgemeyen en değerli varlığım aileme teşekkürü borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET v

ABSTRACT vii

TEŞEKKÜR ix

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ xiii

1. GİRİŞ...1

2. ÖNBİLGİLER 3

2.1 İdeal Topolojik Uzaylar 3

3. SOFT TOPOLOJİK UZAYLAR...5

3.1 Soft Kümeler 5

3.2 Soft Topolojik Uzaylar 13

4. SOFT IDEAL TOPOLOJİK UZAYLAR..23

5. SOFT *I*-REGÜLER VE SOFT *I*-NORMAL UZAYLAR 27

5.1 Soft *I*-Regüler Uzaylar 27

5.2 Soft *I*-Normal Uzaylar...29

İÇİNDEKİLER (devam)

Sayfa

6. SONUÇ 31

KAYNAKLAR DİZİNİ 33

ÖZGEÇMİŞ 35

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\forall$	Evrensel niceleyici
$\exists$	Varlıksal niceleyici
$\Rightarrow$	Gerek koşul
$\Leftarrow$	Yeter koşul
$\Leftrightarrow$	Gerek ve yeter koşul
$\mathcal{U}(x)$	x noktasının açık komşuluklarının kümesi
I^X	Tüm fuzzy kümelerin kümesi
$S(X)$	Tüm soft kümelerin kümesi
$\widetilde{\emptyset}$	Boş soft küme
$\widetilde{X}$	Evrensel soft küme
$\widetilde{\cup}$	Soft birleşim
$\widetilde{\cap}$	Soft kesişim
E_α^x	Soft eleman
$\mathfrak{B}$	Soft baz
$cl(F,A)$	(F,A) soft kümesinin kapanışı
$int(F,A)$	(F,A) soft kümesinin içi
(φ,ψ)	Soft dönüşüm

1.GİRİŞ

Matematikte belirsizlikleri kaldırmak için fuzzy kümeler(Zadeh, 1965), vague kümeler(Gau and Buehrer, 1993), aralık matematiği(Atanassov,1994) ve rough kümeler(Pawlak,1982) gibi birçok kavram ortaya atıldı. Ama bu kavramlar çevresel alanlar, ekonomi, mühendislik gibi alanlarda bazı problemleri çözmede yetersiz kalıyordu. Bunun üzerine Molodtsov 1999'da bu problemlerin çözümünde etkili bir matematiksel araç olan soft küme kavramına giriş yaptı. Böylece birçok araştırmacı soft kümelere yöneldi ve soft kümelerin uygulamaları üzerindeki çalışmalar gittikçe arttı.

2011'de Shabir ve Naz soft topolojik uzay kavramını verdi ve soft iç, soft kapanış, soft alt uzay, soft ayırma aksiyomları gibi bazı kavramlar üzerine çalıştı. Aynı yıl Kharal ve Ahmad soft sınıflar üzerinde soft dönüşüm kavramını tanımladı. Yine aynı yıl Aygünoğlu ve Aygün soft dönüşümlerin soft sürekliliği üzerine çalışmalar yaptı. 2012'de Rong soft topolojik uzaylarda soft birinci sayılabilir uzaylar, soft ikinci sayılabilir uzaylar ve soft ayırma aksiyomları gibi yeni kavramlar üzerine çalıştı. 2013'te Nazmul ve Samanta soft topolojik uzayların komşuluğu üzerine çalıştı.

İlk defa 1933'te Kuratowski sonlu toplamsallık ve kalıtımsallık özelliklerine göre kapalı bir aile olan ideal kavramını ortaya attı. 1966'da ideal yardımıyla bir topolojik uzayda lokal fonksiyon kavramını tanımladı ve özelliklerini inceledi. 1945'te Vaidyanathaswamy lokal fonksiyon kavramını kullanarak bir kapanış işlemi tanımladı ve yeni bir topoloji oluşturarak bu topolojinin tabanını elde etti. 1990 yılında Jankovic ve Hamlet lokal fonksiyon kavramı üzerine yapılan çalışmaları inceledi ve yeni özellikler elde etti.

Bu tezde soft küme kavramı verildi ve soft topolojik uzaylar kavramına giriş yapılarak özellikleri incelendi. Ayrıca soft küme ve ideal kavramı birleştirilerek soft ideal kavramı tanımlandı ve soft idealin özellikleri incelendi. Daha sonra soft ideal topolojik uzay kavramı verilerek soft ideal topolojik uzaylarda regülerlik ve normallik kavramları çalışıldı.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tezin daha kolay anlaşılabilmesi için bazı temel tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1. İdeal Topolojik Uzaylar

Bu bölümde 1933'te Kuratowski tarafından tanımlanan ideal kavramı ve ona ait özellikler verilmiştir. Ayrıca 1990'da Jankovic ve Hamlet tarafından verilen Kuratowski kapanış aksiyomundan bahsedilmiştir.

Tanım 2.1.1. (Kuratowski, 1933) X boştan farklı bir küme olsun. X kümesinin bazı alt kümelerinden oluşan boştan farklı I kümesi aşağıdaki şartları sağlıyor ise I kümesine X üzerinde bir idealdir denir.

i) $A \in I$ ve $B \subset A$ ise $B \in I$ (kalıtsallık özelliği)
ii) $A \in I$ ve $B \in I$ ise $A \cup B \in I$ (sonlu toplamsallık özelliği).

Örnek 2.1.2. (Kuratowski, 1966) X boştan farklı bir küme olsun. O zaman

i) $I = \{A \subset X | A\ sonlu\}$ ailesi bir idealdir ve bu ideale sonlu kümeler ideali denir.
ii) $I = \{A \subset X\ |A\ sayılabilir\}$ ailesi bir idealdir ve bu ideale sayılabilir kümeler ideali denir.

Tanım 2.1.3.(Kuratowski, 1966) (X, τ) bir topolojik uzay, I ailesi X üzerinde bir ideal ve $A \subset X$ olmak üzere

$$A^{\star}(I) = \{x \in X | \forall U \in \mathcal{U}(x)\ için\ U \cap A \notin I\}$$

kümesine τ ve I ya göre A kümesinin lokal fonksiyonu denir. Kısaca $A^{\star}$ ile gösterilir.

Uyarı 2.1.4. (Jankovic and Hamlet, 1990) (X, τ) bir topolojik uzay, I ailesi X üzerinde bir ideal ve $A \subset X$ olmak üzere;

i) $I = \{\emptyset\}$ için $A^{\star}(\{\emptyset\})$=$cl(A)$ dır.
ii) $I = P(X)$ için $A^{\star}(P(X))$=$\emptyset$ dır.

Örnek 2.1.5. $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, X\}$ ve $I = \{\emptyset, \{a\}\}$ olsun. $A = \{b, c\}$ kümesini ele alalım. O zaman $A^\star = \{b, c, d\}$ dir.

Özellikler 2.1.6. (Kuratowski, 1966) (X, τ) bir topolojik uzay, I ailesi X üzerinde bir ideal ve $A, B \subset X$ olmak üzere aşağıdaki özellikler vardır.

i) $A \subset B$ ise $A^\star \subset B^\star$
ii) $A^\star \subset cl(A)$
iii) $A^\star$ kapalı bir kümedir
iv) $(A^\star)^\star \subset A^\star$
v) $(A \cup B)^\star = A^\star \cup B^\star$

Tanım 2.1.7. (Jankovic and Hamlet, 1990) (X, τ) topolojik uzay ve I, X üzerinde ideal olmak üzere (X, τ, I) üçlüsüne ideal topolojik uzay denir.

Örnek 2.1.8. $X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, X\}$, $I = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$ olsun. O zaman (X, τ, I) bir ideal topolojik uzaydır.

Teorem 2.1.9. (Jankovic and Hamlet, 1990) $\star : P(X) \to P(X)$ küme operatörü olmak üzere $cl^\star(A) = A \cup A^\star$ operatörü Kuratowski kapanış aksiyomlarını sağlar.

Sonuç 2.1.10. (Jankovic and Hamlet, 1990) Her (X, τ, I) ideal topolojik uzayı için τ dan daha ince

$$\tau^\star(I) = \{U \subset X | cl^\star(X - U) = X - U\}$$

şeklinde $\tau^\star(I)$ topolojisi vardır. Karmaşıklığa yol açmadığı sürece $\tau^\star(I)$ kısaca $\tau^\star$ şeklinde gösterilecektir.

Uyarı 2.1.11. (Jankovic and Hamlet, 1990) (X, τ, I) ideal topolojik uzay $A \subset X$ olmak üzere;

i) $I = \{\emptyset\}$ için $cl^\star(A) = cl(A)$ olduğundan $\tau^\star = \tau$ olur.
ii) $I = P(X)$ için $cl^\star(A) = A$ olduğundan $\tau^\star = P(X)$ olur.

3. SOFT TOPOLOJİK UZAYLAR

Bu bölümde 1999'da Molodtsov tarafından tanımlanmış olan soft küme kavramı verilmiş, özellikleri incelenmiş ve buna bağlı olarak 2011'de Shabir ve Naz tarafından tanımlanmış soft topolojik uzay kavramından bahsedilmiştir. Buna ek olarak 2011'de Aygünoğlu ve Aygün tarafından tanımlanan soft baz ve 2013'te Nazmul ve Samanta tarafından tanımlanan soft komşuluk kavramları verilmiştir .

3.1. Soft Kümeler

Tez boyunca X boştan farklı evrensel küme, E evrensel parametre kümesi, $A \subset E$ ve $P(X)$, X kümesinin kuvvet kümesi olacaktır.

Tanım 3.1.1. (Molodtsov, 1999) Bir (F, A) ikilisi X üzerinde soft küme olarak adlandırılır. Burada F,

$$F : A \to P(X)$$

ile verilen bir dönüşümdür. X üzerinde bir soft küme başka bir şekilde ifade edilecek olursa X kümesinin alt kümelerinin parametrize edilmiş bir ailesidir. $\alpha \in A$ olacak şekilde $F(\alpha)$ kümesi (F, A) soft kümesinin α-yaklaşım kümesi olarak adlandırılır. Buradan da anlaşılabileceği gibi bir soft küme bildiğimiz anlamda bir küme değildir.

Tez boyunca $S(X)$ ile X üzerindeki tüm soft kümelerin kümesi gösterilmektedir.

Örnek 3.1.2. $X = \{a, b, c, d\}$ hastaların kümesini ve $E = \{\,diyabet,$ $tansiyon, kolestrol, şeker\}$ parametreler kümesi de hastaneye gelen kişilerin sahip olabilecekleri hastalıkları göstersin. (F, E) soft kümesi bir hastaneye gelen kişilerin şikayetlerini göstersin. F dönüşümünü düşünürsek ;

$F(diyabet) = \{a, b\}$; "a ve b kişileri diyabet hastasıdır."

$F(tansiyon) = \{a\}$; " a kişisi tansiyon hastasıdır."

$F(kolestrol) = \{c\}$; " c kişisi kolestrol hastasıdır."

$F(şeker) = \emptyset$ " şeker şikayetiyle hastaneye gelen kişi yoktur."

şeklinde tanımlansın.

Tanımlanan soft kümeyi yazmak istersek birinci bileşen parametre, ikinci bileşen bu parametreye karşı gelen X'in alt kümesi olacak şekilde ikililerin bir kümesi olarak ifade ederiz;

$$(F,E)=\{(diyabet,\{a,b\}),(tansiyon,\{a\}),(kolestrol,\{c\}),(şeker,\emptyset)\}.$$

Örnek 3.1.3. (Molodtsov, 1999) X evrensel küme, A bir fuzzy kümesi ve μ_A, A fuzzy kümesinin bir üyelik fonksiyonu olsun.

μ_A fonksiyonu için α-seviye kümelerinin ailesini düşünelim.

$$F(\alpha)=\{x\in X|\ \mu_A(x)\geq\alpha\},\quad \alpha\epsilon[0,1].$$

Eğer F ailesi biliniyorsa $\mu_A(x)$ fonksiyonu aşağıdaki formülle bulunabilir:

$$\mu_A(x)=sup_{\alpha\in[0,1],x\in F(\alpha)}\ \alpha$$

Böylece Zadeh'in her A fuzzy kümesi $(F,[0,1])$ soft kümesidir.

Bu örneğin daha iyi anlaşılabilmesi için Aktaş ve Çağman tarafından oluşturulan aşağıdaki örnek incelenmiştir.

Örnek 3.1.4. (Aktaş and Çağman, 2007) Zadeh'in fuzzy kümesi özel bir soft küme olarak düşünülebilir.

$X=\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5,h_6\}$, $E=\{en\ iyi,iyi,orta,kötü\}$ olsun.

$$F_{en\ iyi}=\{(h_1,0.2),(h_2,0.7),(h_5,0.9),(h_6,1.0)\}$$

$$F_{kötü}=\{(h_1,0.9),(h_2,0.3),(h_3,1.0),(h_4,1.0),(h_5,0.2)\}$$

şeklinde iki fuzzy küme düşünelim. Bu iki fuzzy kümenin α-seviye kümeleri

$$F(\alpha)=\{x\in X|\mu(x)\geq\alpha\},\quad \alpha\epsilon[0,1]\ \text{ olacak şekilde;}$$

$$F_{en\ iyi}(0.2)=\{h_1,h_2,h_5,h_6\},\quad F_{kötü}(0.2)=\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\},$$

$$F_{en\ iyi}(0.7)=\{h_2,h_5,h_6\},\quad F_{kötü}(0.3)=\{h_1,h_2,h_3,h_4\},$$

$$F_{en\ iyi}(0.9)=\{h_5,h_6\},\quad F_{kötü}(0.9)=\{h_1,h_3,h_4\},$$

$$F_{en\,iyi}(1.0) = \{h_6\}, \quad F_{kötü}(1.0) = \{h_3, h_4\}$$

elde edilir.

$A = \{0.2, 0.3, 0.9, 1.0\} \subset [0,1]$ olarak alalım.

$$F_{kötü}: A \rightarrow P(X)$$

$(F_{kötü}, [0,1]) = \{(0.2, \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}), (0.3, \{h_1, h_2, h_3, h_4\}), (0.9, \{h_1, h_3, h_4\})$

$, (1.0, \{h_3, h_4\})\}$ soft kümedir.

Örnek 3.1.5. $X = \{h_1, h_2, h_3\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{h_1\}, \{h_2\}, \{h_1, h_2\}\}$ olsun. $\mathcal{U}$ dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\mathcal{U}: X \rightarrow P(P(X))$$

$$h_1 \rightarrow \{\{h_1\}, \{h_1, h_2\}, X\}$$

$$h_2 \rightarrow \{\{h_2\}, \{h_1, h_2\}, X\}$$

$$h_3 \rightarrow \{X\}$$

O zaman $(\mathcal{U}, X)$, $P(X)$ üzerinde bir soft kümedir.

Tanım 3.1.6. (Feng et al., 2008) $A, B \subset E$ olacak şekilde (F, A) ve (G, B) X üzerinde iki soft küme olsun. Eğer

i) $A \subset B$;
ii) Her $\alpha \in A$ için $F(\alpha) \subset G(\alpha)$

koşulları sağlanıyor ise (F, A), (G, B)' nin soft alt kümesidir denir ve $(F, A) \tilde{\subset} (G, B)$ şeklinde gösterilir. Eğer $(F, A) \tilde{\subset} (G, B)$ ve $(G, B) \tilde{\subset} (F, A)$ ise (F, A) eşittir (G, B) denir ve (F, A)=(G, B) şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.7. (Ali et al., 2009) $A \subset E$ olacak şekilde (F, A) X üzerinde bir soft küme olsun. O halde (F, A) soft kümesinin $(F, A)^c$ ile gösterilen tümleyeni her $\alpha \in A$ için

$$F^c(\alpha) = X - F(\alpha)$$

yaklaşım fonksiyonu ile elde edilir ve $(F, A)^c = (F^c, A)$ dır.

Tanım 3.1.8. (Maji et al., 2003) $A \subset E$ olacak şekilde (F, A), X üzerinde bir soft küme olsun. Eğer her $\alpha \in A$ için $F(\alpha) = \emptyset$ ise (F, A) soft kümesi boş soft küme olarak isimlendirilir ve $\widetilde{\emptyset}$ ile gösterilir.

Örnek 3.1.9. (Maji et al., 2003) X ahşap evlerin kümesi ve E parametrelerin bir kümesi olsun. $X = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ ve $E = \{tuğla, çamur, çelik, taş\}$ şeklinde verilsin. (F, E) soft kümesi "evlerin yapımı" aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$(F, E) = \{(tuğladan\ yapılan\ evler, \emptyset), (çamurdan\ yapılan\ evler, \emptyset),$

$(çelikten\ yapılan\ evler, \emptyset), (taş \text{tan}\ yapılan\ evler, \emptyset)\}$

Burada (F, E) bir boş soft kümedir.

Tanım 3.1.10. (Shabir and Naz, 2011) X evrensel küme, $A \subset E$ ve Y, X in boştan farklı bir alt kümesi olsun. (Y, A) soft kümesi her $\alpha \in A$ için $Y(\alpha) = Y$ koşulunu sağlıyorsa $\tilde{Y}$ olarak gösterilir.

Özellikle (X, E) soft kümesi $\tilde{X}$ olarak gösterilecektir. $\tilde{X}$ soft kümesine evrensel soft küme denir.

3.1.1. Soft kümelerde işlemler

Tanım 3.1.1.1. (Maji et al., 2003) $A, B \subset E$ olacak şekilde (F, A) ve (G, B) X üzerinde iki soft küme olsun. Bu soft kümelerin birleşimi (H, C)'dir. Burada, $C = A \cup B$ olmak üzere her $c \in C$ için,

$$H(c) = \begin{cases} F(c), & c \in A \setminus B \\ G(c), & c \in B \setminus A \\ F(c) \cup G(c), & c \in A \cap B \end{cases}$$

ile tanımlanır ve $(H, C) = (F, A) \tilde{\cup} (G, B)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.1.2. (Pei and Miao, 2005) $A, B \subset E$ olacak şekilde (F, A) ve (G, B) X üzerinde iki soft küme olsun. Bu soft kümelerin kesişimi (H, C)'dir. Burada, $C = A \cap B$ olmak üzere her $c \in C$ için,

$$H(c) = F(c) \cap G(c)$$

ile tanımlanır ve $(H, C) = (F, A) \tilde{\cap} (G, B)$ şeklinde gösterilir.

Örnek 3.1.1.3. $X = \{h_1, h_2, h_3\}$, $E = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $A, B \subset E$ olacak şekilde $A = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ ve $B = \{\alpha_2, \alpha_3\}$ olsun. (F, A) ve (G, B) soft kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$F(\alpha_1) = \{h_1\},\ F(\alpha_2) = \{h_1, h_3\},$$

$$G(\alpha_2) = \{h_1, h_2\},\ G(\alpha_3) = \{h_3\},$$

O zaman $(H, C) = (F, A) \tilde{\cup} (G, B)$ olacak şekilde (H, C) soft kümesi

$$H(\alpha_1) = \{h_1\},\ H(\alpha_2) = X,\ H(\alpha_3) = \{h_3\}$$

şeklindedir.

Benzer olarak $(K, C) = (F, A) \tilde{\cap} (G, B)$ olarak alırsak (K, C) soft kümesi $K(\alpha_2) = \{h_1\}$ şeklindedir.

Önerme 3.1.1.4. (Shabir and Naz, 2011) $A \subset E$ olacak şekilde (F, A) ve (G, A), X üzerinde iki soft küme olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler sağlanır:

i) $((F, A) \tilde{\cup} (G, A))^c = (F, A)^c \tilde{\cap} (G, A)^c$
ii) $((F, A) \tilde{\cap} (G, A))^c = (F, A)^c \tilde{\cup} (G, A)^c$.

Tanım 3.1.1.5. (Shabir and Naz, 2011) $A \subset E$ olacak şekilde (F, A) ve (G, A) X üzerinde iki soft küme olsun. (F, A) ve (G, A) soft kümelerinin farkı her $\alpha \in A$ için $(F - G)(\alpha) = F(\alpha) - G(\alpha)$ şeklinde tanımlanır ve $(F, A) - (G, A) = (F - G, A)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.1.6. (Zorlutuna et al., 2012) X bir küme, her $j \in J$ için $A_j \subset E$ ve X üzerindeki soft kümelerin boştan farklı ailesi $\{(F_j, A_j) | j \in J\}$ olsun. O zaman ;

i) Her $j \in J$ için (F_j, A_j) soft kümelerinin kesişimi, $C = \bigcap_{j \in J} A_j \neq \emptyset$, $J(x) = \{j \in J | x \in A_j\}$ ve her $x \in C$ için $H(x) = \bigcap_{j \in J(x)} F_j(x)$ olmak üzere (H, C) olarak tanımlanır. Bu $(H, C) = \tilde{\bigcap}_{j \in J} (F_j, A_j)$ şeklinde gösterilir.
ii) Her $j \in J$ için (F_j, A_j) soft kümelerinin birleşimi, $B = \bigcup_{j \in J} A_j$, $J(x) = \{j \in J | x \in A_j\}$ ve her $x \in B$ için $G(x) = \bigcup_{j \in J(x)} F_j(x)$ olmak

üzere (G,B) olarak tanımlanır. Bu $(G,B) = \tilde{\bigcup}_{j\in J}(F_j, A_j)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.1.7. (Shabir and Naz, 2011) $A \subset E$ olacak şekilde (F,A), X üzerinde bir soft küme ve Y, X'in boştan farklı alt kümesi olsun. O zaman (F,A)'nın Y üzerindeki soft alt kümesi (F_Y, A) şeklinde gösterilir ve

$$\text{her } \alpha \in A \text{ için } \; F_Y(\alpha) = Y \cap F(\alpha)$$

olarak tanımlanır. Burada $(F_Y, A) = \tilde{Y} \,\tilde{\cap}\, (F,A)$ dır.

Tanım 3.1.1.8. (Kharal and Ahmad, 2011) $S(X)$ ve $S(Y)$ sırasıyla X ve Y üzerindeki tüm soft kümelerin ailesi ve A, B sırasıyla X ve Y üzerindeki parametre kümeleri olsun. $\varphi : X \to Y$ ve $\psi : A \to B$ dönüşümler olacak şekilde (φ,ψ), $S(X)$ den $S(Y)$ ye bir soft dönüşüm olarak adlandırılır.

i) $(F,A) \in S(X)$ olsun. (F,A) nın (φ,ψ) soft dönüşümü altındaki görüntüsü $(\varphi,\psi)(F,A)$ şeklinde gösterilen Y üzerinde bir soft kümedir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$(\varphi,\psi)(F,A)(\beta) = \begin{cases} \bigcup_{\alpha\in\psi^{-1}(\beta)} \varphi\big(F(\alpha)\big), & \psi^{-1}(\beta) \neq \emptyset \\ \emptyset & , \textit{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

ii) $(G,B) \in S(Y)$ olsun. (G,B) nın (φ,ψ) soft dönüşümü altındaki ön görüntüsü $(\varphi,\psi)^{-1}(G,B)$ şeklinde gösterilen X üzerinde bir soft kümedir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$(\varphi,\psi)^{-1}(G,B)(\alpha) = \varphi^{-1}\big(G(\psi(\alpha))\big).$$

Eğer φ ve ψ bire-bir ise (φ,ψ) soft dönüşümü bire-bir dir ve φ ve ψ örten ise (φ,ψ) soft dönüşümü örten dir.

Örnek 3.1.1.9. (Kharal and Ahmad, 2011) $X = \{h_1, h_2, h_3\}, Y = \{y_1, y_2, y_3\}, E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}, E' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ ve $S(X), S(Y)$ sırasıyla X ve Y üzerindeki tüm soft kümelerin koleksiyonu olsun. $A = \{e_1, e_2, e_4\}$ ve $C = \{e'_1, e'_2\}$ olsun. $\varphi : X \to Y$ ve $\psi : E \to E'$ dönüşümleri şu şekilde tanımlansın;

$$\varphi(h_1) = y_2, \qquad \varphi(h_2) = y_3, \qquad \varphi(h_3) = y_2,$$

$$\psi(e_1) = e'_3, \qquad \psi(e_2) = e'_3, \qquad \psi(e_3) = e'_2, \qquad \psi(e_4) = e'_3.$$

X ve Y üzerindeki iki soft küme sırasıyla şu şekilde tanımlansın;

$$(F,A)=\{(e_2,\emptyset),(e_3,\{h_1\}),(e_4,\{h_1,h_2,h_3\})\},$$

$$(G,C)=\{(e_1',\{y_1,y_3\}),(e_2',\{y_2\})\}.$$

$(F,A)\in S(X)$ ve $B=\psi(A)=\{e_2',e_3'\}$ olacak şekilde $(\varphi,\psi)(F,A)(B)$, Y üzerinde bir soft kümedir;

$$(\varphi,\psi)(F,A)(e_2')=\varphi\big(F(\{e_3\})\big)=\varphi(\{h_1\})=y_2,\quad \psi^{-1}(e_2')\cap A=\{e_3\}$$

$$(\varphi,\psi)(F,A)(e_3')=\varphi\left(\bigcup_{\alpha\in\psi^{-1}(e_3')\cap A}F(\alpha)\right)=\varphi(\{F(e_2)\cup F(e_4)\})$$
$$=\varphi(\emptyset\cup\{h_1,h_2,h_3\})=\{y_2,y_3\}.$$

Böylece $(\varphi,\psi)(F,A)(B)=\{(e_2',\{y_2\}),(e_3',\{y_2,y_3\})\}$ olur.

$(G,C)\in S(Y)$ ve $D=\psi^{-1}(C)=\{e_3\}$ olacak şekilde $(\varphi,\psi)^{-1}(G,C)(D)$, X üzerinde bir soft kümedir;

$$(\varphi,\psi)^{-1}(G,C)(e_3)=\varphi^{-1}\big(G(\psi(e_3))\big)=\varphi^{-1}\big(G(e_2')\big)=\varphi^{-1}(\{y_2\})=\{h_1,h_3\}$$

Böylece $(\varphi,\psi)^{-1}(G,C)(D)=\{(e_3,\{h_1,h_3\})\}$ dır.

Teorem 3.1.1.10. (Kharal and Ahmad, 2011) $S(X)$ ve $S(Y)$ sırasıyla X ve Y üzerindeki tüm soft kümelerin ailesi ve $\varphi:X\to Y$, $\psi:E\to E'$ dönüşümler olsun. Her $j\in J$ için $A_j,A\subset E$ ve $B_j,B\subset E'$ olacak şekilde (F,A)ve her $j\in J$ için (F_j,A_j) X üzerinde, (G,B) ve her $j\in J$ için (G_j,B_j) Y üzerinde soft kümeler olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler sağlanır:

i) $(\varphi,\psi)(\tilde{\emptyset})=\tilde{\emptyset}$
ii) $(\varphi,\psi)(\tilde{X})\tilde{\subseteq}\tilde{Y}$, eğer (φ,ψ) örten ise eşitlik sağlanır
iii) $(\varphi,\psi)^{-1}(\tilde{\emptyset})=\tilde{\emptyset}$
iv) $(\varphi,\psi)^{-1}(\tilde{Y})=\tilde{X}$
v) $(F_1,A_1)\tilde{\subseteq}(F_2,A_2)$ ise $(\varphi,\psi)(F_1,A_1)\tilde{\subseteq}(\varphi,\psi)(F_2,A_2)$
vi) $(G_1,B_1)\tilde{\subseteq}(G_2,B_2)$ ise $(\varphi,\psi)^{-1}(G_1,B_1)\tilde{\subseteq}(\varphi,\psi)^{-1}(G_2,B_2)$
vii) $(F,A)\tilde{\subseteq}(\varphi,\psi)^{-1}((\varphi,\psi)(F,A))$, eğer (φ,ψ) bire-bir ise eşitlik sağlanır
viii) $(\varphi,\psi)\big((\varphi,\psi)^{-1}(G,B)\big)\tilde{\subseteq}(G,B)$, eğer (φ,ψ) örten ise eşitlik sağlanır
ix) $(\varphi,\psi)\big(\tilde{\bigcup}_{j\in J}(F_j,A_j)\big)=\tilde{\bigcup}_{j\in J}(\varphi,\psi)(F_j,A_j)$
x) $(\varphi,\psi)\big(\tilde{\bigcap}_{j\in J}(F_j,A_j)\big)\tilde{\subseteq}\tilde{\bigcap}_{j\in J}(\varphi,\psi)(F_j,A_j)$, eğer (φ,ψ) bire-bir ise eşitlik sağlanır

xi) $(\varphi,\psi)^{-1}\big(\widetilde{\bigcup}_{j\in J}(G_j,B_j)\big)=\widetilde{\bigcup}_{j\in J}(\varphi,\psi)^{-1}(G_j,B_j)$
xii) $(\varphi,\psi)^{-1}\big(\widetilde{\bigcap}_{j\in J}(G_j,B_j)\big)=\widetilde{\bigcap}_{j\in J}(\varphi,\psi)^{-1}(G_j,B_j)$
xiii) $((\varphi,\psi)(F,A))^c\,\widetilde{\subseteq}\,(\varphi,\psi)((F,A)^c)$
xiv) $(\varphi,\psi)^{-1}((G,B)^c)=((\varphi,\psi)^{-1}(G,B))^c$.

Bu kısımdan sonra karmaşıklığa yol açmaması nedeniyle evrensel parametre kümesini A olarak alacağız.

Tanım 3.1.1.11. (Das and Samanta, …; Samanta and Nazmul, 2013; Lin, …) X üzerinde bir (E,A) soft kümesi öyle bir $\alpha\in A$ ve öyle bir $x\in X$ için $E(\alpha)=\{x\}$, her $\beta(\neq\alpha)\in A$ için $E(\beta)=\emptyset$ koşulunu sağlıyorsa bu kümeye bir soft elemandır denir ve E_α^x ile gösterilir.

$$E(\beta)=\begin{cases}\{x\}, & \beta=\alpha\\ \emptyset\,, & \beta\neq\alpha\end{cases}$$

X evrensel kümesi üzerindeki tüm soft elemanların kümesi ε ile gösterilir.

Tanım 3.1.1.12. (Das and Samanta, …; Samanta and Nazmul, 2013) (G,A), X üzerinde bir soft küme olsun. $x\in G(\alpha)$ koşulunu sağlayan E_α^x soft elemanı, (G,A) soft kümesindedir denir ve $E_\alpha^x\,\widetilde{\in}\,(G,A)$ şeklinde gösterilir.

$$E_\alpha^x\,\widetilde{\in}\,(G,A):\Leftrightarrow\; x\in G(\alpha).$$

Önerme 3.1.1.13. (Das and Samanta, …) X üzerindeki her (F,A) soft kümesi kendisine ait tüm soft elemanların birleşimi şeklinde yazılır.

$$(F,A)=\widetilde{\bigcup}_{E_\alpha^x\widetilde{\in}(F,A)}E_\alpha^x\ .$$

Önerme 3.1.1.14 (Das and Samanta, …) (F,A) ve (G,A) X üzerinde soft kümeler olsun. O zaman bir E_α^x soft elemanı için aşağıdaki ifadeler sağlanır:

i) $E_\alpha^x\,\widetilde{\in}\,(F,A)\;\Leftrightarrow E_\alpha^x\,\widetilde{\notin}\,(F,A)^c$
ii) $E_\alpha^x\,\widetilde{\in}\,(F,A)\;\widetilde{\cup}\,(G,A)\Leftrightarrow E_\alpha^x\,\widetilde{\in}\,(F,A)$ ya da $E_\alpha^x\,\widetilde{\in}\,(G,A)$
iii) $E_\alpha^x\,\widetilde{\in}\,(F,A)\;\widetilde{\cap}\,(G,A)\Leftrightarrow E_\alpha^x\,\widetilde{\in}\,(F,A)$ ve $E_\alpha^x\,\widetilde{\in}\,(G,A)$.

3.2. Soft Topolojik Uzaylar

Bu bölümden itibaren tez boyunca kolaylık olması açısından parametre kümesini A olarak alacağız.

Tanım 3.2.1. (Shabir and Naz, 2011) τ, X üzerindeki soft kümelerin bir koleksiyonu olsun. τ aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise X üzerinde bir soft topolojidir denir;

i) $\widetilde{\emptyset}, \tilde{X} \in \tau$,
ii) Her $(F,A),(G,A) \in \tau$ için $(F,A) \ \widetilde{\cap} \ (G,A) \in \tau$,
iii) Her $j \in J$ için $(F_j,A) \in \tau$ için $\widetilde{\cup}_{j\in J} \left(F_j,A\right) \in \tau$.

(X,τ,A), X üzerinde bir soft topolojik uzay olarak adlandırılır. τ nun elemanları X te $\tau -$ soft açık ya da kısaca soft açık olarak adlandırılır. X üzerindeki bir soft kümenin tümleyeni τ ya aitse bu soft küme X'te soft kapalı olarak adlandırılır.

Örnek 3.2.2. $X = \{h_1,h_2,h_3\}$, $A = \{\alpha_1,\alpha_2\}$ olsun.

$$F_1(\alpha_1) = \{h_1\},\ F_1(\alpha_2) = \{h_2\},$$

$$F_2(\alpha_1) = \{h_2\},\ F_2(\alpha_2) = \{h_2\},$$

$$F_3(\alpha_1) = \{h_1,h_2\},\ F_3(\alpha_2) = \{h_2\},$$

$$F_4(\alpha_1) = \emptyset,\ F_4(\alpha_2) = \{h_2\},$$

olmak üzere $\tau = \{\widetilde{\emptyset},\tilde{X},(F_1,A),(F_2,A),(F_3,A),(F_4,A)\}$ X üzerinde bir soft topolojidir.

Örnek 3.2.3. X bir küme ve $A = \{\alpha\}$ olsun. $\tau = \{(F,A) \ \widetilde{\in} \ S(X) | F(\alpha) = \emptyset \ veya \ F^c(\alpha) \ sonlu\}$ X üzerinde bir soft topolojidir.

Tanım 3.2.4. (Shabir and Naz, 2011) X üzerindeki soft topoloji $\tau = \{\widetilde{\emptyset},\tilde{X}\}$ olsun. O zaman τ, X üzerinde soft kaba topoloji olarak adlandırılır ve (X,τ,A) ya X üzerinde soft kaba topolojik uzaydır denir.

Tanım 3.2.5. (Shabir and Naz, 2011) X üzerindeki soft topoloji τ, X üzerinde tanımlanmış tüm soft kümelerin koleksiyonu olsun. O zaman τ, X üzerinde soft ince topoloji olarak adlandırılır ve (X,τ,A) ya X üzerinde soft ince topolojik uzaydır denir.

Önerme 3.2.6. (Shabir and Naz, 2011) (X,τ,A), X üzerinde soft topolojik uzay olsun. O zaman her $\alpha \in A$ için $\tau_\alpha = \{F(\alpha)|(F,A) \in \tau\}$, X üzerinde bir topoloji tanımlar.

İspat. Her $\alpha \in A$ için $\tau_\alpha = \{F(\alpha)|(F,A) \in \tau\}$ olsun.

i) $\tilde{\emptyset}, \tilde{X} \in \tau$ olduğundan $\emptyset, X \in \tau_\alpha$.
ii) $F(\alpha), G(\alpha) \in \tau_\alpha$ olsun. $(F,A),(G,A) \in \tau$ olduğundan $(F,A) \,\tilde{\cap}\, (G,A) \in \tau$ ve τ_α tanımından $F(\alpha) \cap G(\alpha) \in \tau_\alpha$ elde edilir.
iii) $\{F_j(\alpha)|j \in J\}$, τ_α daki kümelerin bir koleksiyonu olsun. $(F_i,A) \in \tau$ olduğundan her $j \in J$ için $\tilde{\cup}_{j\in J} \left(F_j, A\right) \in \tau$ elde edilir. Böylece $\cup_{j\in J} F_j(\alpha) \in \tau_\alpha$.

Önerme 3.2.6. nın tersinin her zaman doğru olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 3.2.7. (Shabir and Naz, 2011) $X = \{h_1, h_2, h_3\}$, $A = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ olsun. X üzerinde (F_1,A), (F_2,A), (F_3,A), (F_4,A) soft kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$F_1(\alpha_1) = \{h_2\},\ F_1(\alpha_2) = \{h_1\},$$

$$F_2(\alpha_1) = \{h_2, h_3\},\ F_2(\alpha_2) = \{h_1, h_2\},$$

$$F_3(\alpha_1) = \{h_1, h_2\},\ F_3(\alpha_2) = \{h_1, h_2\},$$

$$F_4(\alpha_1) = \{h_2\},\ F_4(\alpha_2) = \{h_1, h_3\},$$

$$\tau_{\alpha_1} = \{\emptyset, X, \{h_2\}, \{h_2, h_3\}, \{h_1, h_2\}\}$$

ve

$$\tau_{\alpha_2} = \{\emptyset, X, \{h_1\}, \{h_1, h_3\}, \{h_1, h_2\}\} ,$$

X üzerinde birer topolojidir ancak $\tau = \{\tilde{\emptyset}, \tilde{X}, (F_1,A),(F_2,A),(F_3,A),(F_4,A)\}$ X üzerinde bir soft topoloji değildir çünkü $(F_2,A) \,\tilde{\cup}\, (F_3,A) \notin \tau$ dir.

Tanım 3.2.8. (Shabir and Naz, 2011) (X,τ,A) bir soft topolojik uzay ve Y, X'in boştan farklı bir alt kümesi olsun. O zaman $\tau_Y = \{(F_Y,A) = \tilde{Y} \tilde{\cap} (F,A) \big| (F,A) \in \tau\}$, Y üzerinde bir soft relatif topoloji olarak adlandırılır ve (Y,τ_Y,A) , (X,τ,A) nın bir soft alt uzayıdır denir.

Örnek 3.2.9. (Shabir and Naz, 2011) Bir soft ince topolojik uzayın soft alt uzayı bir soft ince topolojik uzaydır.

Örnek 3.2.10. (Shabir and Naz, 2011) Bir soft kaba topolojik uzayın soft alt uzayı bir soft kaba topolojik uzaydır.

Teorem 3.2.11. (X,τ,A) soft topolojik uzay ve (Y,τ_Y,A) , (X,τ,A) nın bir soft alt uzayı olsun. (F,A) soft kümesinin Y üzerinde soft kapalı olması için gerek ve yeter koşul (K,A), X üzerinde bir soft kapalı küme olmak üzere $(F,A) = \tilde{Y} \tilde{\cap} (K,A)$ olmasıdır.

İspat. (F,A), Y üzerinde soft kapalı bir küme olsun. O halde (F,A) nın soft alt uzaya göre tümleyeni Y üzerinde soft açıktır. τ_Y nin tanımından öyle bir $(G,A) \in \tau$ için $(F,A)^c = \tilde{Y} \tilde{\cap} (G,A)$ dır. Buradan soft alt uzaya göre tümleyene geçersek $(F,A) = \tilde{Y} \tilde{\cap} (G,A)^c$ elde edilir. Diğer taraftan (K,A), X üzerinde soft kapalı olmak üzere $(F,A) = \tilde{Y} \tilde{\cap} (K,A)$ olsun. Soft alt uzaya göre tümleyene geçersek $(F,A)^c = \tilde{Y} \tilde{\cap} (K,A)^c$ dır. $(K,A)^c$, X üzerinde soft açık küme olduğundan (F,A), Y üzerinde bir soft kapalı kümedir.

Sonuç 3.2.12. (X,τ,A) soft topolojik uzay ve $Y \subset X$ olsun. Y üzerindeki her bir soft kapalı kümenin X üzerinde soft kapalı küme olması için gerek ve yeter koşul $\tilde{Y}$ soft kümesinin X üzerinde soft kapalı küme olmasıdır.

İspat. Açıktır.

Tanım 3.2.13. (Aygünoğlu and Aygün, 2011) (X,τ,A) bir soft topolojik uzay ve τ'nun bir alt koleksiyonu $\mathfrak{B}$ olsun. Eğer τ 'nun her bir elemanı $\mathfrak{B}$' nin elemanlarının birleşimi şeklinde ifade edilebiliyor ise $\mathfrak{B}$, τ için bir soft bazdır denir.

Örnek 3.2.14. $X = \{h_1,h_2,h_3\}$, $A = \{e\}$ ve $\tau = S(X)$ olacak şekilde (X,τ,A) bir soft topolojik uzay olsun. O halde $\mathfrak{B} = \{(e,\{h_1\}),(e,\{h_2\}),(e,\{h_3\})\}$ τ için bir bazdır.

Tanım 3.2.15. (Shabir and Naz, 2011; Lin, …) (X,τ,A) bir soft topolojik uzay ve (F,A) X üzerinde bir soft küme olsun. O zaman (F,A) nın soft kapanışı

(F,A)'yı kapsayan soft kapalı üst kümelerin kesişimi şeklinde tanımlanır ve $cl((F,A))$ şeklinde gösterilir.

$$cl((F,A)) = \tilde{\cap}\, \{(G,A) | (G,A) \text{ soft kapalı ve } (F,A) \tilde{\subseteq} (G,A)\}.$$

Açıkça $cl((F,A))$, (F,A)'yı kapsayan en küçük soft kapalı kümedir.

Teorem 3.2.16. (Shabir and Naz, 2011) (X,τ,A) bir soft topolojik uzay ve $(F,A),(G,A)$ X üzerinde iki soft küme olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler sağlanır:

i) $cl(\tilde{\emptyset}) = \tilde{\emptyset}$ ve $cl(\tilde{X}) = \tilde{X}$
ii) $(F,A) \tilde{\subseteq} cl((F,A))$
iii) (F,A) bir soft kapalı küme olması için gerek ve yeter koşul $(F,A) = cl((F,A))$ olmasıdır
iv) $cl(cl((F,A))) = cl((F,A))$
v) $(F,A) \tilde{\subseteq} (G,A)$ ise $cl((F,A)) \tilde{\subseteq} cl((G,A))$
vi) $cl((F,A) \tilde{\cup} (G,A)) = cl((F,A)) \tilde{\cup} cl((G,A))$
vii) $cl((F,A) \tilde{\cap} (G,A)) \tilde{\subseteq} cl((F,A)) \tilde{\cap} cl((G,A))$.

İspat. **i)** ve **ii)** açıktır.

iii) (F,A), X üzerine bir soft kapalı küme ise kendisi (F,A) yı kapsayan bir soft kapalı kümedir. Böylece $(F,A),(F,A)$ yı kapsayan en küçük soft kapalı kümedir ve $(F,A) = cl((F,A))$.
Tersi için $(F,A) = cl((F,A))$ olsun. $cl((F,A))$ soft kapalı olduğundan (F,A) soft kapalıdır.
iv) $cl((F,A))$ soft kapalı olduğundan ve iii) den $cl(cl((F,A))) = cl((F,A))$.
v) $(F,A) \tilde{\subseteq} (G,A)$ olsun. O zaman (G,A) nın her soft kapalı üst kümesi (F,A) nın da soft kapalı üst kümesidir. Böylece (F,A) nın soft kapalı üst kümelerinin kesişimi, (G,A) nın soft kapalı üst kümelerinin kesişiminde kapsanır. Sonuç olarak $cl((F,A)) \tilde{\subseteq} cl((G,A))$ dır.
vi) $(F,A) \tilde{\subseteq} (F,A) \tilde{\cup} (G,A)$, $(G,A) \tilde{\subseteq} (F,A) \tilde{\cup} (G,A)$ olduğundan ve v) ten $cl((F,A)) \tilde{\subseteq} cl((F,A) \tilde{\cup} (G,A))$ ve $cl((G,A)) \tilde{\subseteq} cl((F,A) \tilde{\cup} (G,A))$ elde edilir. Böylece $cl((F,A)) \tilde{\cup} cl((G,A)) \tilde{\subseteq} cl((F,A) \tilde{\cup} (G,A))$ dır. Diğer taraftan ii) den $(F,A) \tilde{\subseteq} cl((F,A))$ dır. Benzer şekilde $(G,A) \tilde{\subseteq} cl((G,A))$ dır. Buradan $(F,A) \tilde{\cup} (G,A) \tilde{\subseteq} cl((F,A)) \tilde{\cup} cl((G,A))$ elde edilir. $cl((F,A)) \tilde{\cup} cl((G,A))$ X üzerinde soft kapalı olduğundan $cl((F,A) \tilde{\cup} (G,A)) \tilde{\subseteq} cl((F,A)) \tilde{\cup} cl((G,A))$

elde edilir. Böylece $cl((F,A)\tilde{\cup}(G,A)) = cl((F,A))\tilde{\cup}\, cl((G,A))$ dır.

vii) $(F,A)\tilde{\cap}(G,A) \tilde{\subseteq} (F,A)$, $(F,A)\tilde{\cap}(G,A) \tilde{\subseteq} (G,A)$ olduğundan ve v) den $cl\big((F,A)\tilde{\cap}(G,A)\big) \tilde{\subseteq} cl((F,A))$ ve $cl\big((F,A)\tilde{\cap}(G,A)\big) \tilde{\subseteq} cl((G,A))$ dır. Böylece $cl((F,A)\tilde{\cap}(G,A)) \tilde{\subseteq} cl((F,A))\tilde{\cap}\, cl((G,A))$ dır.

Teorem 3.2.16. deki vii) nin tersinin genelde doğru olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 3.2.17. (Shabir and Naz, 2011) $X = \{h_1,h_2,h_3\}$, $A = \{\alpha_1,\alpha_2\}$ olsun. X üzerinde (F_1,A), (F_2,A), (F_3,A), (F_4,A) , (F_5,A) , (F_6,A) , (F_7,A) soft kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlansın;

$$F_1(\alpha_1) = \{h_1,h_2\},\ F_1(\alpha_2) = \{h_1,h_2\},$$

$$F_2(\alpha_1) = \{h_2\},\ F_2(\alpha_2) = \{h_1,h_3\},$$

$$F_3(\alpha_1) = \{h_2,h_3\},\ F_3(\alpha_2) = \{h_1\},$$

$$F_4(\alpha_1) = \{h_2\},\ F_4(\alpha_2) = \{h_1\},$$

$$F_5(\alpha_1) = \{h_1,h_2\},\ F_1(\alpha_2) = X,$$

$$F_6(\alpha_1) = X,\ F_6(\alpha_2) = \{h_1,h_2\},$$

$$F_7(\alpha_1) = \{h_2,h_3\},\ F_7(\alpha_2) = \{h_1,h_3\},$$

$\tau = \{\tilde{\emptyset}, \tilde{X}, (F_1,A),(F_2,A),(F_3,A),(F_4,A),(F_5,A),(F_6,A),(F_7,A)\}$ X üzerinde bir soft topolojidir.

(F,A) ve (G,A) aşağıdaki şekilde tanımlansın;

$$F(\alpha_1) = \{h_1,h_3\},\ F(\alpha_2) = \emptyset,$$

$$G(\alpha_1) = \{h_2,h_3\},\ G(\alpha_2) = \{h_1,h_2\}.$$

O zaman $cl((F,A)) = (F_2,A)^c$ ve $cl((G,A)) = \tilde{X}$. Buradan $cl\big((F,A)\big)\tilde{\cap}\, cl((G,A)) = cl((F,A)\ )$ ve $cl\big((F,A)\tilde{\cap}(G,A)\big) = (F_5,A)^c$. Böylece $cl((F,A)\tilde{\cap}(G,A)) \tilde{\subseteq}\ cl((F,A))\tilde{\cap}\, cl((G,A))$ fakat $cl\big((F,A)\big)\tilde{\cap}\, cl\big((G,A)\big) \tilde{\nsubseteq} cl\big((F,A)\tilde{\cap}(G,A)\big)$ dır.

Tanım 3.2.18. (Shabir and Naz, 2011) (X,τ,A) bir soft topolojik uzay ve (F,A) X üzerinde bir soft küme olsun. O zaman (F,A) nın soft içi (F,A)'ın kapsadığı soft açık alt kümelerin birleşimi şeklinde tanımlanır ve $int((F,A))$ şeklinde gösterilir.

$$int((F,A)) = \tilde{\cup} \{(G,A) | (G,A) \text{ soft açık ve } (G,A) \tilde{\subseteq} (F,A)\}.$$

Açıkça $int(F,A)$, (F,A) nın kapsadığı en büyük soft açık kümedir.

Önerme 3.2.19. (Nazmul and Samanta, 2013) (X,τ,A) bir soft topolojik uzay ve $(F,A),(G,A)$ X üzerinde iki soft küme olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler sağlanır:

i) $int(\tilde{\emptyset}) = \tilde{\emptyset}$ ve $int(\tilde{X}) = \tilde{X}$
ii) $int((F,A))$ soft açık bir kümedir
iii) $int((F,A)) \tilde{\subseteq} (F,A)$
iv) (F,A) soft kümesinin bir soft açık küme olması için gerek yeter koşul $(F,A) = int((F,A))$ olmasıdır
v) $int(int((F,A))) = int((F,A))$
vi) $(F,A) \tilde{\subseteq} (G,A)$ ise $int((F,A)) \tilde{\subseteq} int((G,A))$
vii) $int((F,A) \tilde{\cap} (G,A)) = int((F,A)) \tilde{\cap} int((G,A))$.

Tanım 3.2.20. (Nazmul and Samanta, 2013) (X,τ,A) bir soft topolojik uzay ve (H,A), X üzerinde bir soft küme olsun. $(G,A) \in \tau$ olacak şekilde $(H,A) \tilde{\subseteq} (G,A) \tilde{\subseteq} (F,A)$ koşulunu sağlayan (F,A) kümesine (H,A) kümesinin soft komşuluğu denir. Eğer $(H,A) = E_\alpha^x$ ise o zaman (F,A) , E_α^x soft elemanının bir soft komşuluğudur.

E_α^x soft elemanının soft komşuluk sistemi $\mathcal{N}(E_\alpha^x)$, E_α^x nın tüm soft komşuluklarının bir ailesidir.

E_α^x soft elemanının soft açık komşuluk sistemi $\mathcal{V}(E_\alpha^x)$, E_α^x nın tüm soft açık komşuluklarının bir ailesidir.

Örnek 3.2.21. $X = \{h_1,h_2,h_3\}$, $A = \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ olsun. X üzerinde (F_1,A), (F_2,A) soft kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$F_1(\alpha_1) = \{h_1,h_2\},\ F_1(\alpha_2) = \{h_1,h_3\},\quad F_1(\alpha_3) = X,$$

$$F_2(\alpha_1) = \{h_1\},\ F_2(\alpha_2) = \{h_3\},\ F_2(\alpha_3) = \{h_2,h_3\},$$

$\tau = \{\tilde{\emptyset},\tilde{X},(F_1,A),(F_2,A)\}$ X üzerinde bir soft topolojidir. $E_{\alpha_2}^{h_3}$ soft elemanını ve $G(\alpha_1) = \{h_1\}$, $G(\alpha_2) = \{h_3\}$, $G(\alpha_3) = X$ olacak şekilde (G,A) soft kümesini düşünelim.(G, A) soft kümesi $E_{\alpha_2}^{h_3}$ soft elemanının soft komşuluğudur. Gerçekten;$(F_2, A) \in \tau$ için $E_{\alpha_2}^{h_3} \tilde{\in} (F_2, A) \tilde{\subset} (G, A)$ dır.

$F(\alpha_1) = \{h_1\}$, $F(\alpha_2) = \emptyset$, $F(\alpha_3) = \{h_2, h_3\}$ şeklinde tanımlanan (F, A) soft kümesini ele alalım. (G, A) soft kümesi (F, A) soft kümesinin soft komşuluğudur. Gerçekten;$(F_2, A) \in \tau$ için $(F, A) \tilde{\subset} (F_2, A) \tilde{\subset} (G, A)$ dır.

Önerme 3.2.22. (Nazmul and Samanta, 2013) (X, τ, A) bir soft topolojik uzay olsun. $\mathcal{N}(E_\alpha^x)$ soft komşuluklar sınıfı aşağıdaki özellikleri sağlar:

i) Her $E_\alpha^x \in \varepsilon$ için $\mathcal{N}(E_\alpha^x) \neq \emptyset$ dır.
ii) $\mathcal{N}(E_\alpha^x)$ sınıfına ait her soft küme E_α^x soft elemanını içerir.
iii) $\mathcal{N}(E_\alpha^x)$ sınıfına ait herhangi bir soft kümenin üst kümeside $\mathcal{N}(E_\alpha^x)$ sınıfına aittir.
iv) $\mathcal{N}(E_\alpha^x)$ sınıfına ait sonlu sayıda kümenin kesişimi yine $\mathcal{N}(E_\alpha^x)$ sınıfına aittir.
v) $(F, A) \in \mathcal{N}(E_\alpha^x)$ olsun. $(G, A) \tilde{\subset} (F, A)$ olacak şekilde öyle bir $(G, A) \in \mathcal{N}(E_\alpha^x)$ vardır ki her $E_\alpha^y \tilde{\in} (G, A)$ için $(F, A) \in \mathcal{N}(E_\alpha^y)$ dir.

İspat. i), **ii)**, **iii)** açıktır.

iv) $(F_1, A), (F_2, A) \in \mathcal{N}(E_\alpha^x)$ olsun. O zaman öyle $(U_1, A), (U_2, A) \in \tau$ vardır öyleki $E_\alpha^x \tilde{\in} (U_1, A) \tilde{\subset} (F_1, A)$ ve $E_\alpha^x \tilde{\in} (U_2, A) \tilde{\subset} (F_2, A)$. Buradan $E_\alpha^x \tilde{\in} (U_1, A) \tilde{\cap} (U_2, A) \tilde{\subset} (F_1, A) \tilde{\cap} (F_2, A)$ elde edilir. $(U_1, A) \tilde{\cap} (U_2, A) \in \tau$ olduğundan $(F_1, A) \tilde{\cap} (F_2, A) \in \mathcal{N}(E_\alpha^x)$ dir.
v) (F, A) kümesi E_α^x soft elemanının bir soft komşuluğu olduğundan $E_\alpha^x \tilde{\in} (G, A) \tilde{\subset} (F, A)$ olacak şekilde bir $(G, A) \in \mathcal{N}(E_\alpha^x)$ soft açık kümesi vardır. (G, A) soft açık olduğundan kendi elemanlarının bir soft komşuluğudur; yani her $E_\alpha^y \tilde{\in} (G, A)$ için $(G, A) \in \mathcal{N}(E_\alpha^y)$ dır. (iii) den (G, A) soft kümesini kapsayan (F, A) soft kümesi de E_α^y soft elemanının komşuluğudur; yani $(F, A) \in \mathcal{N}(E_\alpha^y)$ dır.

Tanım 3.2.23. (X, τ, A) bir soft topolojik uzay, $Y \subset X$ ve E_α^x soft elemanının X üzerindeki soft komşuluk sistemi $\mathcal{N}(E_\alpha^x)$ olsun. O zaman

$$\mathcal{N}_Y(E_\alpha^x) = \{(F_Y, A) \mid (F_Y, A) = \tilde{Y} \tilde{\cap} (F, A), her\ (F, A) \in \mathcal{N}(E_\alpha^x)\}$$

kümesi E_α^x soft elemanının (Y, τ_Y, A) soft alt uzayına göre soft komşuluklarının bir ailesidir.

Örnek 3.2.24. Örnek 3.2.21 i göz önüne alalım. $Y = \{h_1, h_3\} \subset X$ olsun. O zaman (F, A) soft kümesinin soft alt uzaya göre soft komşuluğu $(G_Y, A) = \tilde{Y} \tilde{\cap} (G, A)$ olacak şekilde $(G_Y, A) = \{(\alpha_1, \{h_1\}), (\alpha_2, \{h_3\}), (\alpha_3, \{h_1, h_3\})\}$ soft kümesidir.

Tanım 3.2.25. (Nazmul and Samanta, 2013) (X, τ, A) bir soft topolojik uzay ve (F, A), X üzerinde bir soft küme olsun. E_α^x soft elemanının bir (G, A) soft açık komşuluğu (F, A) tarafından kapsanıyor ise E_α^x, (F, A)'nın bir soft iç noktasıdır denir. $int((F, A))$, (F, A)'nın soft iç noktalarının birleşimidir.

$$int((F, A)) = \tilde{\bigcup}\{E_\alpha^x | E_\alpha^x \ (F, A) \ nın \ bir \ soft \ iç \ noktası\}.$$

Tanım 3.2.26. (X, τ, A) bir soft topolojik uzay ve (F, A) X üzerinde bir soft küme olsun. E_α^x soft elemanını içeren her soft komşuluğun (F, A) soft kümesi ile kesişimi boştan farklı ise E_α^x soft elemanına (F, A) soft kümesinin soft değme noktasıdır denir.

$$\forall (G, A) \in \mathcal{N}(E_\alpha^x) \ \text{için} \ (G, A) \tilde{\cap} (F, A) \neq \tilde{\emptyset}.$$

Teorem 3.2.27. (Lin, ...) (X, τ, A) bir soft topolojik uzay olsun. Bir E_α^x soft elemanının $cl((F, A))$ soft kümesinde olması için gerek ve yeter koşul E_α^x soft elemanının her bir soft komşuluğu ile (F, A) nın arakesitinin boştan farklı olmasıdır.

İspat. (G, A), E_α^x soft elemanının soft açık bir komşuluğu olsun. $(F, A) \tilde{\cap} (G, A) = \tilde{\emptyset}$ olduğunu kabul edelim. O zaman $(F, A) \tilde{\subseteq} (G, A)^c$ elde edilir. $E_\alpha^x \tilde{\in} (G, A)$ olduğundan $E_\alpha^x \tilde{\notin} (G, A)^c$ ve $(G, A)^c$, (F, A) soft kümesini kapsayan soft kapalı küme olduğundan $E_\alpha^x \tilde{\notin} cl((F, A))$ elde edilir. Bu bir çelişkidir. Diğer taraftan $E_\alpha^x \tilde{\notin} cl((F, A))$ olduğunu kabul edelim. O zaman $E_\alpha^x \tilde{\in} (cl((F, A)))^c$ dir. Ayrıca $cl((F, A)) \tilde{\cap} (cl((F, A)))^c = \tilde{\emptyset}$ olduğundan $(F, A) \tilde{\cap} (cl((F, A)))^c = \tilde{\emptyset}$ dir. $(cl((F, A)))^c$, E_α^x soft elemanının soft açık bir komşuluğu olduğundan $(F, A) \tilde{\cap} (cl((F, A)))^c = \tilde{\emptyset}$ ifadesi E_α^x soft elemanının (F, A) soft kümesinin soft değme noktası olmadığını gösterir. Bu bir çelişkidir.

Teorem 3.2.28. (X, τ, A) bir soft topolojik uzay ve (F, A), X üzerinde bir soft küme olsun. O zaman $cl((F, A))$, (F, A)'nın soft değme noktalarının birleşimidir.

$$cl((F, A)) = \tilde{\bigcup}\{E_\alpha^x | E_\alpha^x \ (F, A) \ nın \ soft \ değme \ noktası\}.$$

İspat. Teorem 3.2.27 in ispatından açıktır.

Tanım 3.2.29. (Nazmul and Samanta, 2013) X boştan farklı bir küme olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $C : S(X) \to S(X)$ dönüşümüne bir soft kapanış operatörü denir:

i) $C(\tilde{\emptyset}) = \tilde{\emptyset}$;
ii) $(F, A) \tilde{\subseteq} C[(F, A)]$;
iii) $C[(F, A) \tilde{\cup} (G, A)] = C[(F, A)] \tilde{\cup} C[(G, A)]$;
iv) $C[C[(F, A)]] = C[(F, A)]$.

Önerme 3.2.30. (Nazmul and Samanta, 2013) C, X üzerinde bir soft kapanış operatörü ise (F, A) nın τ- kapanışı $C[(F, A)]$ olacak şekilde bir tek τ soft topolojisi vardır.

İspat. $\tau = \{(F, A)^c \mid C[(F, A)] = (F, A)\}$ olsun.

i) $\tilde{\emptyset}, \tilde{X} \in \tau$ olduğu açıktır.
ii) $\{(F_j, A)^c \mid j \in J\}$, τ kümesinin elemanlarının herhangi bir koleksiyonu ve $(F, A) = \tilde{\cap}_{j \in J} (F_j, A)$ olsun. Her $j \in J$ için Tanım 3.2.29 dan $C[(F, A)] \tilde{\subseteq} C[(F_j, A)] = (F_j, A)$ dır. Buradan $C[(F, A)] \tilde{\subseteq}$ (F, A) elde edilir. Dolayısıyla $C[(F, A)] = (F, A)$ olarak bulunur ve τ kümesinin tanımından $(F, A)^c \in \tau$ dir.
iii) $(F, A)^c, (G, A)^c \in \tau$ olsun. O zaman $C[(F, A) \tilde{\cup} (G, A)] = C[(F, A)] \tilde{\cup} C[(G, A)] = (F, A) \tilde{\cup} (G, A)$ dir. Buradan $((F, A) \tilde{\cup} (G, A))^c = (F, A)^c \tilde{\cap} (G, A)^c \in \tau$ elde edilir.

Dolayısıyla τ, X üzerinde bir soft topolojidir ve tekliği açıktır.

Tanım 3.2.31. (Aygünoğlu and Aygün, 2011) (X, τ, A) ve (Y, τ', A') iki soft topolojik uzay ve $(\varphi, \psi): S(X) \to S(Y)$ bir soft dönüşüm olsun.

i) Her $(G, A') \in \tau'$ için $(\varphi, \psi)^{-1}(G, A') \in \tau$ koşulunu sağlıyorsa bu dönüşüme soft süreklidir denir.
ii) Her $(F, A) \in \tau$ için $(\varphi, \psi)(F, A) \in \tau'$ koşulunu sağlıyorsa bu dönüşüme soft açıktır denir.

Tanım 3.2.32. (Varol and Aygün, …) (X, τ, A) ve (Y, τ', A') iki soft topolojik uzay ve $(\varphi, \psi): S(X) \to S(Y)$ bir soft dönüşüm olsun. Bu soft dönüşüm sürekli, açık, birebir ve örten ise soft homeomorfizm olarak adlandırılır.

Tanım 3.2.33. (Rong, 2012) (X, τ, A) bir soft topolojik uzay ve (G, A), X üzerinde bir soft kapalı küme olsun. (G, A) ve (G, A) nın elemanı olmayan her soft eleman için bunları kapsayan ayrık soft açık kümeler var ise (X,τ,A) ya soft regüler uzay denir.

$$(X,\tau,A) \text{ soft regüler uzaydır} :\Leftrightarrow (\forall (G,A)^c \in \tau)\left(E_\alpha^x \,\tilde{\notin}\, (G,A)\right)\left(\exists (F_1,A) \in \mathcal{V}(E_\alpha^x)\right)\left(\exists (F_2,A) \in \mathcal{V}\big((G,A)\big): ((F_1,A) \,\tilde{\cap}\, (F_2,A) = \tilde{\emptyset}\right)$$

Örnek 3.2.34. $X = \{h_1,h_2,h_3,h_4\}$, $A = \{\alpha\}$ olsun. X üzerinde (F_1,A), (F_2,A), (F_3,A), (F_4,A), (F_5,A), (F_6,A) soft kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$F_1(\alpha) = \{h_1\},\ F_2(\alpha) = \{h_2\}, F_3(\alpha) = \{h_1,h_2\},$$

$$F_4(\alpha) = \{h_2,h_3,h_4\},\ F_5(\alpha) = \{h_1,h_3,h_4\},\ F_6(\alpha) = \{h_3,h_4\},$$

olacak şekilde $\tau = \{\tilde{\emptyset},\tilde{X},(F_1,A),(F_2,A),(F_3,A),(F_4,A),(F_5,A),(F_6,A)\}$ X üzerinde bir soft topolojidir ve (X,τ,A) soft topolojik uzayı soft regüler uzaydır.

Tanım 3.2.35. (Rong, 2012) (X,τ,A) bir soft topolojik uzay ve (G_1,A) ve (G_2,A) ayrık soft kapalı kümeler olsun. Eğer (G_1,A) ve (G_2,A) soft kümelerini kapsayan ayrık soft açık kümeler var ise (X,τ,A) ya soft normal uzaydır denir.

$$(X,\tau,A) \text{ soft normal uzaydır} :\Leftrightarrow (\forall (G_1,A)^c,(G_2,A)^c \in \tau)\left(\exists (F_1,A) \in \mathcal{V}\big((G_1,A)\big)\right)\left(\exists (F_2,A) \in \mathcal{V}\big((G_2,A)\big): ((F_1,A) \,\tilde{\cap}\, (F_2,A) = \tilde{\emptyset}\right)$$

Örnek 3.2.36. $X = \{h_1,h_2,h_3,h_4\}$, $A = \{\alpha\}$ olsun. X üzerinde (F_1,A), (F_2,A), (F_3,A), (F_4,A) soft kümeleri aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$F_1(\alpha) = \{h_1,h_2\},\ F_2(\alpha) = \{h_3,h_4\},\ F_3(\alpha) = \{h_4\},\ F_4(\alpha) = \{h_1,h_2,h_4\},$$

olacak şekilde $\tau = \{\tilde{\emptyset},\tilde{X},(F_1,A),(F_2,A),(F_3,A),(F_4,A)\}$ X üzerinde bir soft topolojidir ve (X,τ,A) soft topolojik uzayı soft normal uzaydır.

4. SOFT IDEAL TOPOLOJİK UZAYLAR

Bu bölümde soft ideal tanımı, (F,A)'nın soft yerel dönüşümü verilmiştir ve soft $\star$ - kapanış operatörünü tanımlanmıştır. Daha sonra bazı kavramlar ve bu kavramlarla ilgili bazı teoremlerin ispatları verilmiştir.

Tanım 4.1. X boştan farklı herhangi bir küme olsun. X üzerindeki bazı soft kümelerden oluşan boştan farklı I kümesi aşağıdaki şartları sağlıyor ise, I kümesine X üzerinde bir soft idealdir denir.

i) $(F,A) \in I$ ve $(G,A) \tilde{\subseteq} (F,A)$ ise $(G,A) \in I$,
ii) $(F,A) \in I$ ve $(G,A) \in I$ ise $(F,A) \tilde{\cup} (G,A) \in I$.

Örnek 4.2. $X = \{h_1, h_2\}$ ve $A = \{\alpha, \beta\}$ olsun. O zaman $I = \{\widetilde{\emptyset}, \{ (\alpha, \{h_2\}), (\beta, \emptyset)\}, \{(\alpha, \emptyset), (\beta, \{h_1\})\}, \{(\alpha, \{h_2\}), (\beta, \{h_1\})\}\}$ kümesi X üzerinde bir soft idealdir.

Örnek 4.3. X boştan farklı bir küme ve $A = \{\alpha\}$ olsun. O zaman

i) $I = \{(F,A) \in S(X) | F(\alpha)\ sonlu\}$
ii) $I = \{(F,A) \in S(X) | F(\alpha)\ sayılabilir\}$
iii) $I = \{(F,A) \in S(X) | F(\alpha)\ hiçbir\ yerde\ yoğun\ olmayan\ küme\}$

aileleri X üzerinde birer soft idealdir.

Önerme 4.4. I, X üzerinde bir soft ideal ve Y, X'in bir alt kümesi olsun. O zaman $I_Y = \{\tilde{Y} \tilde{\cap} (I,A) | (I,A) \in I\}$ Y üzerinde bir soft idealdir.

İspat. Soft ideal tanımından açıktır.

Örnek 4.5. $X = \mathbb{R}$, $A = \{\alpha\}$ ve X üzerindeki soft ideal $I = \{(F,A) | F(\alpha)\ sayılabilir\}$ olsun. $Y = \mathbb{N} \subset X$ olsun. O zaman $I_Y = \{\tilde{Y} \tilde{\cap} (F,A) | Y \cap F(\alpha) sayılabilir\}$ Y üzerinde bir soft idealdir.

Önerme 4.6. (X, τ, A) bir soft topolojik uzay ve I , X üzerinde bir soft ideal olsun. $\varphi : X \to Y$ ve $\psi : A \to B$ olmak üzere (φ, ψ), $S(X)$ den $S(Y)$ ye bir soft dönüşüm olsun. O zaman $(\varphi, \psi)(I) = \{(\varphi, \psi)(I,A) | (I,A) \in I\}$ şeklinde tanımlanan ve Y üzerindeki soft kümelerin bir koleksiyonu olan $(\varphi, \psi)(I)$, Y üzerinde bir soft idealdir.

İspat. Soft ideal ve (φ, ψ) soft dönüşüm tanımlarından açıktır.

Örnek 4.7. $X = \{h_1, h_2\}, Y = \{y_1, y_2\}, A = \{\alpha, \beta\}, A' = \{\alpha', \beta'\}$ ve $S(X), S(Y)$ sırasıyla X ve Y üzerindeki tüm soft kümelerin koleksiyonu olsun.
$\varphi : X \to Y$ ve $\psi : A \to A'$ dönüşümleri şu şekilde tanımlansın;

$$\varphi(h_1) = y_2, \qquad \varphi(h_2) = y_1,$$

$$\psi(\alpha) = \alpha', \qquad \psi(\beta) = \beta'.$$

X üzerindeki soft ideal şu şekilde tanımlansın;

$$I = \{\widetilde{\emptyset}, \{(\alpha, \{h_2\}), (\beta, \emptyset)\}, \{(\alpha, \emptyset), (\beta, \{h_1\})\}, \{(\alpha, \{h_2\}), (\beta, \{h_1\})\}\} .$$

O zaman

$$(\varphi, \psi)(I) = \{\widetilde{\emptyset}, \{(\alpha', \{y_1\}), (\beta', \emptyset)\}, \{(\alpha', \emptyset), (\beta', \{y_2\})\}, \{(\alpha', \{y_1\}), (\beta', \{y_2\})\}\}$$

Y üzerinde bir soft idealdir.

Tanım 4.8. (X, τ, A) bir soft topolojik uzay olsun. I , X üzerinde bir soft ideal ve $(.)^\star$, $S(X)$ den $S(X)$'e bir soft küme operatörü olmak üzere

$$(F, A)^\star(I, \tau) = \widetilde{\cup}\{E_\alpha^x \widetilde{\in} \widetilde{X} | (U, A) \widetilde{\cap} (F, A) \notin I , her\ (U, A) \in \mathcal{V}(E_\alpha^x)\}$$

kümesine (F, A)'nın τ ve I'ya göre soft yerel dönüşümü denir. Tez boyunca $(F, A)^\star(I, \tau)$ yerine kısaca $(F, A)^\star$ kullanılacaktır.

Uyarı 4.9. (X, τ, A) bir soft topolojik uzay ve I, X üzerinde bir soft ideal olsun.

i) $I = \{\widetilde{\emptyset}\}$ ise $(F, A)^\star = cl((F, A))$
ii) $I = S(X)$ ise $(F, A)^\star = \widetilde{\emptyset}$

Teorem 4.10. (X, τ, A) bir soft topolojik uzay ve I, X üzerinde bir soft ideal olsun. $(F, A), (G, A)$ X üzerinde soft kümeler olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler sağlanır:

i) $(F, A) \widetilde{\subseteq} (G, A)$ ise $(F, A)^\star \widetilde{\subseteq} (G, A)^\star$
ii) $(F, A)^\star \widetilde{\subseteq} cl((F, A))$
iii) (F, A) soft açık ve $(F, A) \widetilde{\cap} (G, A) \in I$ ise $(F, A) \widetilde{\cap} (G, A)^\star = \widetilde{\emptyset}$
iv) $(F, A)^\star$ soft kapalıdır
v) (F, A) soft kapalı ise $(F, A)^\star \widetilde{\subseteq} (F, A)$

vi) $((F,A)^{\star})^{\star} \tilde{\subseteq} (F,A)^{\star}$

vii) $\big((F,A) \tilde{\cup} (G,A)\big)^{\star} = (F,A)^{\star} \tilde{\cup} (G,A)^{\star}$.

İspat.

i) $E_{\alpha}^{x} \tilde{\notin} (G,A)^{\star}$ olsun. O zaman bazı $E_{\alpha}^{x} \tilde{\in} (U,A) \in \tau$ için $(U,A) \tilde{\cap} (G,A) \in I$ elde edilir. Hipotezden ve ideal tanımından $(U,A) \tilde{\cap} (F,A) \in I$. Böylece $E_{\alpha}^{x} \tilde{\notin} (F,A)^{\star}$ elde edilir.

ii) $E_{\alpha}^{x} \tilde{\notin} cl((F,A))$ olduğunu kabul edelim. O zaman bazı $E_{\alpha}^{x} \tilde{\in} (U,A) \in \tau$ için $(U,A) \tilde{\cap} (F,A) = \tilde{\emptyset}$ dır. Böylece $E_{\alpha}^{x} \tilde{\notin} (F,A)^{\star}$ elde edilir.

iii) (F,A) soft açık ve $(F,A) \tilde{\cap} (G,A) \in I$ olsun. Kabul edelim ki $(F,A) \tilde{\cap} (G,A)^{\star} \neq \tilde{\emptyset}$ ve $E_{\alpha}^{x} \tilde{\in} (F,A) \tilde{\cap} (G,A)^{\star}$ olsun. O zaman (F,A) soft açık olduğundan $(F,A) \tilde{\cap} (G,A) \notin I$ elde edilir. Bu bir çelişkidir. Böylece $(F,A) \tilde{\cap} (G,A)^{\star} = \tilde{\emptyset}$ dır.

iv) Kabul edelim ki $E_{\alpha}^{x} \tilde{\notin} (F,A)^{\star}$ olsun. Buradan öyle bir $(U,A) \in \tau$ için $(F,A) \tilde{\cap} (U,A) \in I$ elde edilir. iii) den $(U,A) \tilde{\cap} (F,A)^{\star} = \tilde{\emptyset}$ dır. Böylece $E_{\alpha}^{x} \tilde{\notin} cl((F,A)^{\star})$ elde edilir.

v) (F,A) soft kapalı olduğundan ve ii) den $(F,A)^{\star} \tilde{\subseteq} (F,A)$ elde edilir.

vi) iv) ve v) den açıktır.

vii) $(F,A) \tilde{\subseteq} (F,A) \tilde{\cup} (G,A)$ ve $(G,A) \tilde{\subseteq} (F,A) \tilde{\cup} (G,A)$ olduğundan ve i) den $((F,A) \tilde{\cup} (G,A))^{\star} \tilde{\supseteq} (F,A)^{\star} \tilde{\cup} (G,A)^{\star}$ elde edilir. $E_{\alpha}^{x} \tilde{\notin} (F,A)^{\star} \tilde{\cup} (G,A)^{\star}$ olsun. O zaman $E_{\alpha}^{x} \tilde{\notin} (F,A)^{\star}$ ve $E_{\alpha}^{x} \tilde{\notin} (G,A)^{\star}$ dır. $(.)^{\star}$ operatörünün tanımından $(H_1,A) \tilde{\cap} (F,A) \in I$ ve $(H_2,A) \tilde{\cap} (G,A) \in I$ olacak şekilde (H_1,A), (H_2,A) soft açık kümeleri vardır. Buradan $E_{\alpha}^{x} \tilde{\notin} ((F,A) \tilde{\cup} (G,A))^{\star}$ olur.

Aşağıdaki örnek Teorem 4.10 un i) ve ii) şıklarının terslerinin genelde doğru olmadığını gösterir.

Örnek 4.11. $X = \{a,b\}$, $A = \{\alpha,\beta\}$, $\tau = \{\tilde{\emptyset},\ \tilde{X},\ \{(\alpha,\{a\}),(\beta,\{b\})\}, \{(\alpha,\{b\}),(\beta,\{a\})\}\}$ ve $I = \{\tilde{\emptyset},\ \{(\alpha,\{a\}),(\beta,\{b\})\},\ \{(\alpha,\emptyset),(\beta,\{b\})\}, \{(\alpha,\{a\}),(\beta,\emptyset)\}\}$ olsun.$(F,A) = \{(\alpha,\emptyset),(\beta,\{b\})\}$ ve $(G,A) = \{(\alpha,\{a\}),(\beta,\{a\})\}$ için $(F,A)^{\star} = \tilde{\emptyset}$, $(G,A)^{\star}$=$\{(\alpha,\{b\}),(\beta,\{a\})\}$ olduğundan $(F,A)^{\star} \tilde{\subseteq} (G,A)^{\star}$ ama $(F,A) \tilde{\nsubseteq} (G,A)$ elde edilir. $(H,A) = \{(\alpha,\{a\}),(\beta,\emptyset)\}$ olarak alalım. $cl(H,A) = \{(\alpha,\{a\}),(\beta,\{b\})\}$ ve $(H,A)^{\star} = \tilde{\emptyset}$ olduğundan $cl(H,A) \tilde{\nsubseteq} (H,A)^{\star}$ dır.

Tanım 4.12. (X,τ,A) bir soft topolojik uzay ve I, X üzerinde bir soft ideal olsun. $(.)^{\star}$, $S(X)$ den $S(X)$'e bir soft küme operatörü olmak üzere $cl^{\star}((F,A)) = (F,A) \tilde{\cup} (F,A)^{\star}$ şeklinde tanımlanan $cl^{\star}$ a soft $\star$- kapanış operatörü denir.

Uyarı 4.13. Örnek 4.9 dan $I = \{\widetilde{\emptyset}\}$ ise $(F,A)^\star = cl((F,A))$ olduğu bilinmektedir. Bu durumda $cl^\star((F,A)) = cl((F,A))$ elde edilir.

Önerme 4.14. (X,τ,A) bir soft topolojik uzay, $(F,A),(G,A)$ X üzerinde soft kümeler ve I , X üzerinde bir soft ideal olsun. olsun. O zaman soft ⋆- kapanış operatörü için aşağıdaki koşullar sağlanır:

i) $cl^\star(\widetilde{\emptyset}) = \widetilde{\emptyset}$ ve $cl^\star(\tilde{X}) = \tilde{X}$
ii) $(F,A) \tilde{\subseteq} cl^\star((F,A))$
iii) $(F,A) \tilde{\subseteq} (G,A)$ ise $cl^\star((F,A)) \tilde{\subseteq} cl^\star((G,A))$
iv) $cl^\star(cl^\star((F,A))) = cl^\star((F,A))$
v) $cl^\star((F,A)) \tilde{\cup}\, cl^\star((G,A)) = cl^\star((F,A) \tilde{\cup} (G,A))$.

İspat. Teorem 4.10 ve $cl^\star$ tanımından ispatlar açıktır.

Not 4.15. $cl^\star((F,A)) = (F,A) \tilde{\cup} (F,A)^\star$ şeklinde tanımlanan $cl^\star$, Önerme 4.14 ve Tanım 3.2.29 dan bir soft ⋆ -kapanış operatörüdür. Önerme 3.2.30 den $cl^\star$ dan üretilen $\tau^\star = \{(U,A) \in S(X) | cl^\star\left(\tilde{X} - (U,A)\right) = \tilde{X} - (U,A)\}$ bir soft topolojidir. τ dan daha ince olan $\tau^\star$ soft ⋆- topolojik yapı olarak adlandırılır. $\tau^\star$ ın elemanları soft ⋆- açıklar ve soft ⋆ -açıkların tümleyenleri soft ⋆- kapalılar olarak adlandırılır.

Örnek4.16. $X = \{a,b\}$, $A = \{\alpha,\beta\}$, $\tau = \{\{(\alpha,\{a\}),(\beta,\{b\})\},\{(\alpha,\{b\}),(\beta,\{a\})\},\widetilde{\emptyset},\tilde{X}\}$ ve $I = \{\widetilde{\emptyset}, \{(\alpha,\emptyset),(\beta,\{a\})\}, \{(\alpha,\{b\}),(\beta,\emptyset)\}, \{(\alpha,\{b\}),(\beta,\{a\})$ $\}$ olsun. $\tau^\star = \{\widetilde{\emptyset},\tilde{X},\{(\alpha,\{a\}),(\beta,X)\},\{(\alpha,\{b\}),(\beta,\emptyset)\},\{(\alpha,\{b\}),(\beta,\{a\})\},$ $\{(\alpha,\{a\}),(\beta,\{b\})\},\{(\alpha,X),(\beta,\{b\})\},\{(\alpha,\emptyset),(\beta,\{a\})\}\}$ dır.

Tanım 4.17. (X,τ,A) bir soft topolojik uzay ve I, X üzerinde bir soft ideal olsun. (X,τ,A,I) ya bir soft ideal topolojik uzay denir.

5. SOFT *I*-REGÜLER VE SOFT *I*-NORMAL UZAYLAR

Bu bölümde soft I- regülerlik ve soft I- normallik tanımlarını verilmiştir. Buna ek olarak soft I- regülerlik ve soft I- normallikle ilgili bazı özellikler incelenmiştir.

5.1. Soft *I*-Regüler Uzaylar

Tanım 5.1.1. (X,τ,A,I) bir soft ideal topolojik uzay ve (G,A), X üzerinde bir soft kapalı küme olsun. $(G,A)-(V,A)\in I$ ve (G,A)'nın elemanı olmayan her E_α^x soft elemanı için $E_\alpha^x\in(U,A)$ olacak şekilde $(U,A),(V,A)$ ayrık soft açık kümeleri var ise (X,τ,A,I) ya bir soft I-regüler uzay denir.

$$(X,\tau,A,I) \text{ soft } I\text{-regüler uzaydır} :\Leftrightarrow (\forall (G,A)^c\in\tau)\left(E_\alpha^x \tilde{\notin} (G,A)\right)\left(\exists (U,A)\in \mathcal{V}(E_\alpha^x)\right)(\exists (V,A)\in\tau,(G,A)-(V,A)\in I):((U,A)\,\tilde{\cap}\,(V,A)=\tilde{\emptyset})$$

Uyarı 5.1.2. $I=\{\tilde{\emptyset}\}$ ise soft regülerlik ve soft I-regülerlik çakışır.

Örnek 5.1.3.

i) $X=\{a,b\},\ A=\{\alpha,\beta\},\ \tau=\{\tilde{\emptyset},\ \tilde{X},\ \{(\alpha,\{a\}),(\beta,\{b\})\},\{(\alpha,\{b\}),(\beta,\{a\})\},\{(\alpha,\emptyset),(\beta,\{a\})\},\{(\alpha,\{a\}),(\beta,X)\}\}$ ve $I=\{\tilde{\emptyset},\{(\alpha,\{b\}),(\beta,\emptyset)\}\}$ olmak üzere (X,τ,A,I) bir soft I-regüler uzaydır.

ii) $X=\{a,b,c\},\ A=\{\alpha,\beta\},\tau=\{\tilde{\emptyset},\ \tilde{X},\ \{(\alpha,\{a\}),(\beta,\{b\})\},\{(\alpha,\{a,c\}),(\beta,\{b,c\})\},\{(\alpha,\{a,b\}),(\beta,\{a,b\})\}\}$ ve . $I=\{\tilde{\emptyset},\{(\alpha,\{b\}),(\beta,\emptyset)\},\{(\alpha,\emptyset),(\beta,\{a\})\},\{(\alpha,\{b\}),(\beta,\{a\})\}\}$ olmak üzere (X,τ,A,I) soft I-regüler uzay değildir.

Teorem 5.1.4. (X,τ,A,I) bir soft I-regüler uzay ve $Y\subset X$ olsun. O zaman (Y,τ_Y,A,I_Y) soft I_Y-regüler uzaydır.

İspat. $Y\subset X$ ve (K,A), Y üzerinde bir soft kapalı küme olsun. $E_\alpha^x\,\tilde{\in}\,\tilde{Y}$ ve $E_\alpha^x\,\tilde{\notin}\,(K,A)$ olsun. (K,A), Y üzerinde bir soft kapalı küme olduğundan $(K,A)=\tilde{Y}\,\tilde{\cap}\,(F,A)$ olacak şekilde X üzerinde bir (F,A) soft kapalı kümesi vardır. Buradan $E_\alpha^x\,\tilde{\notin}\,(F,A)$ elde edilir. Hipotezden $E_\alpha^x\,\tilde{\in}\,(U,A)$ ve $(F,A)-(V,A)\in I$ olacak şekilde $(U,A),(V,A)$ ayrık soft açık kümeler vardır. Açıkça, $((K,A)-(V,A))\,\tilde{\cap}\,\tilde{Y}\in I_Y$ dir. $\tilde{Y}\,\tilde{\cap}\,(U,A)$ ve $\tilde{Y}\,\tilde{\cap}\,(V,A)$ ayrık soft açık kümeler olduğundan (Y,τ_Y,A,I_Y) bir soft I_Y-regüler uzaydır.

Teorem 5.1.5. (X,τ,A,I) bir soft ideal topolojik uzay olsun. O zaman aşağıdakiler denktir:

i) (X,τ,A,I) bir soft I-regüler uzaydır.

ii) Her bir $x \in X$ ve E_α^x' i içeren (U,A) soft açık kümesi için $cl((V,A)) - (U,A) \in I$ olacak şekilde E_α^x' i içeren (V,A) soft açık kümesi vardır.

iii) Her bir $x \in X$ ve E_α^x' i içermeyen (F,A) soft kapalı kümesi için $cl((V,A)) \tilde{\cap} (F,A) \in I$ olacak şekilde E_α^x' i içeren (V,A) soft açık kümesi vardır.

İspat. **i) ⇒ ii)** $x \in X$ ve (U,A), E_α^x' i içeren bir soft açık küme olsun. O zaman $E_\alpha^x \tilde{\in} (V,A)$ ve $\left(\tilde{X} - (U,A)\right) - (W,A) \in I$ olacak şekilde (V,A), (W,A) ayrık soft açık kümeleri vardır. Buradan $(I,A) \in I$ olacak şekilde $\left(\tilde{X} - (U,A)\right) \tilde{\subseteq} (W,A) \tilde{\cup} (I,A)$ elde edilir. $(V,A) \tilde{\cap} (W,A) = \tilde{\emptyset}$ olduğundan $(V,A) \tilde{\subseteq} \tilde{X} - (W,A)$ dır ve böylece $cl((V,A)) \tilde{\subseteq} \tilde{X} - (W,A)$ dır. Sonuç olarak $cl((V,A)) - (U,A) \tilde{\subseteq} (\tilde{X} - (W,A)) \tilde{\cap}((W,A) \tilde{\cup} (I,A))= (\tilde{X} - (W,A)) \tilde{\cap} (I,A)$ $\tilde{\subseteq} (I,A) \in I$.

ii) ⇒ iii) $E_\alpha^x \tilde{\notin} (F,A)$ olacak şekilde (F,A) X üzerinde bir soft kapalı küme olsun. O zaman $cl((V,A)) - (\tilde{X} - (F,A)) \in I$ olacak şekilde E_α^x' i içeren bir (V,A) soft açık kümesi vardır. Dolayısıyla $cl((V,A)) \tilde{\cap} (F,A) \in I$.

iii) ⇒ i) $E_\alpha^x \tilde{\notin} (F,A)$ olacak şekilde (F,A) X üzerinde bir soft kapalı küme olsun. O zaman $cl((V,A)) \tilde{\cap} (F,A) \in I$ olacak şekilde E_α^x' i içeren bir (V,A) soft açık kümesi vardır. Eğer $cl((V,A)) \tilde{\cap} (F,A) = (I,A) \in I$ ise $(F,A) - \left(\tilde{X} - cl((V,A))\right) = (I,A) \in I$. $E_\alpha^x \tilde{\in} (V,A)$ ve $(F,A) - \left(\tilde{X} - cl((V,A))\right) \in I$ olacak şekilde (V,A) ve $\tilde{X} - cl((V,A))$ ayrık soft açık kümelerdir. Bu yüzden (X,τ,A,I) bir soft I-regüler uzaydır.

Teorem 5.1.6. (X,τ,A,I) bir soft I-regüler uzay ve (φ,ψ) $S(X)$ den $S(Y)$ ye bir soft homeomorfizm olsun. O zaman $(Y,\tau',A',(\varphi,\psi)(I))$ bir soft $(\varphi,\psi)(I)$-regüler uzaydır.

İspat. $E_{\alpha'}^y \tilde{\notin} (F,A')$ olacak şekilde (F,A') Y üzerinde bir soft kapalı küme olsun. (φ,ψ) bir soft homeomorfizm olduğundan $(\varphi,\psi)^{-1}(F,A') = (G,A)$ X üzerinde soft kapalı bir kümedir ve $(\varphi,\psi)(E_\alpha^x) = E_{\alpha'}^y$ olacak şekilde $E_\alpha^x \tilde{\in} S(X)$ vardır. Buradan $E_\alpha^x \tilde{\notin} (G,A)$ olduğu açıktır. Hipotezden, $E_\alpha^x \tilde{\in} (H_1,A)$ ve $(G,A) - (H_2,A) \in I$ olacak şekilde (H_1,A) ve (H_2,A) ayrık soft açık kümeleri vardır. $E_\alpha^x \tilde{\in} (H_1,A)$ ve (φ,ψ) bir soft homeomorfizm olduğundan $E_{\alpha'}^y \tilde{\in} (\varphi,\psi)(H_1,A)$ ve $(\varphi,\psi)(H_1,A)$, Y üzerinde bir soft açık kümedir. $(G,A) - (H_2,A) \in I$ olduğundan $(F,A') - (\varphi,\psi)(H_2,A) \in (\varphi,\psi)(I)$ ve $(\varphi,\psi)(H_2,A)$, Y üzerinde bir soft açık kümedir. Buradan $(\varphi,\psi)(H_1,A) \tilde{\cap} (\varphi,\psi)(H_2,A) = \tilde{\emptyset}$ elde edilir. Böylece $(Y,\tau',A',(\varphi,\psi)(I))$ bir soft $(\varphi,\psi)(I)$- regüler uzaydır.

5.2. Soft I-Normal Uzaylar

Tanım 5.2.1. (X,τ,A,I) bir soft ideal topolojik uzay olsun. X üzerindeki her bir $(F,A),(G,A)$ ayrık soft kapalı kümeleri için $(F,A)-(U,A)\in I$ ve $(G,A)-(V,A)\in I$ olacak şekilde $(U,A),(V,A)$ ayrık soft açık kümeler var ise (X,τ,A,I) ya soft I-normal uzay denir.

$$(X,\tau,A,I) \text{ soft } I\text{-normal uzaydır} :\Leftrightarrow (\forall(F,A)^c,(G,A)^c\in\tau)(\exists(U,A),(V,A)\in \tau)\big(\big((F,A)-(U,A)\in I\big)\wedge\big((G,A)-(V,A)\in I\big)\big):\big((U,A)\,\tilde{\cap}\,(V,A)=\tilde{\emptyset}\big)$$

Uyarı 5.2.2. $I=\{\tilde{\emptyset}\}$ ise o zaman soft normallik ve soft I-normallik çakışır.

Örnek 5.2.3. $X=\mathbb{R}$ ve $A=\{\alpha\}$ olsun. $\psi=\{(F,A)|F(\alpha)=(a,b],a<b\}$ bazı verilsin ve τ, ψ tarafından üretilmiş bir soft topoloji olsun. $I=\{(G,A)|G(\alpha)\ sonlu\}$ olmak üzere (X,τ,A,I) bir soft I-normal uzaydır.

Teorem 5.2.4. (X,τ,A,I) bir soft I-normal uzay ve $\tilde{Y}\in S(X)$ bir soft kapalı küme olsun. O zaman (Y,τ_Y,A,I_Y) bir soft I_Y-normal uzaydır.

İspat. (F,A) ve (G,A) Y üzerinde ayrık soft kapalı kümeler olsun. $\tilde{Y}$ soft kapalı olduğundan ve Sonuç 3.2.12 den (F,A) ve (G,A) X üzerinde ayrık soft kapalı kümelerdir. Hipotezden $(F,A)-(U,A)\in I$ ve $(G,A)-(V,A)\in I$ olacak şekilde $(U,A),(V,A)$ ayrık soft açık kümeleri vardır. $(F,A)-(U,A)=(I,A)\in I$ olsun. Buradan $(F,A)-\left(\tilde{Y}\,\tilde{\cap}\,(U,A)\right)=(\tilde{Y}\,\tilde{\cap}\,(I,A))\in I_Y$ elde edilir. Benzer şekilde $(G,A)-(\tilde{Y}\,\tilde{\cap}\,(V,A))\in I_Y$ dir. Böylece (Y,τ_Y,A,I_Y) bir soft I_Y-normal uzaydır.

Teorem 5.2.5. (X,τ,A,I) bir soft ideal topolojik uzay olsun. O zaman aşağıdakiler denktir:

- **i)** (X,τ,A,I) bir soft I-normal uzaydır.
- **ii)** Her (F,A) soft kapalı kümesi ve (F,A)'yı içeren (U,A) soft açık kümesi için $(F,A)-(V,A)\in I$ ve $cl((V,A))-(U,A)\in I$ olacak şekilde (V,A) soft açık kümesi vardır.
- **iii)** Her bir (F,A) ve (G,A) ayrık soft kapalı kümesi için $(F,A)-(U,A)\in I$ ve $cl((U,A))\,\tilde{\cap}\,(G,A)\in I$ olacak şekilde (U,A) soft açık kümesi vardır.

İspat. i) ⇒ ii) X üzerinde (F,A) soft kapalı ve (U,A) soft açık kümeler olsun. $\tilde{X}-(U,A)$ soft kapalı ve $(F,A)\,\tilde{\cap}\left(\tilde{X}-(U,A)\right)=\tilde{\emptyset}$. Hipotezden,

$(F,A)-(V_1,A)\in I$ ve $\left(\tilde{X}-(U,A)\right)-(V_2,A)\in I$ olacak şekilde (V_1,A), (V_2,A) ayrık soft açık kümeleri vardır. $(V_1,A)\tilde{\cap}(V_2,A)=\tilde{\emptyset}$ olduğundan $cl((V_1,A))\tilde{\subseteq}\tilde{X}-(V_2,A)$ elde edilir. Buradan $cl((V_1,A))-(U,A)\tilde{\subseteq}\left(\tilde{X}-(V_2,A)\right)-(U,A)=\left(\tilde{X}-(U,A)\right)-(V_2,A)\in I$ elde edilir. Dolayısıyla $cl((V_1,A))-(U,A)\in I$ dır.

ii) ⇒ iii) Hipotezden açıktır.

iii) ⇒ i) (F,A) ve (G,A) ayrık soft kapalı kümeler olsun. Hipotezden $(F,A)-(U,A)\in I$ ve $cl((U,A))\tilde{\cap}(G,A)=\tilde{\emptyset}$ olacak şekilde (U,A) soft açık kümesi vardır. $(V,A)=\tilde{X}-cl((U,A))$ olsun. (V,A) soft açık ve $(U,A)\tilde{\cap}(V,A)=\tilde{\emptyset}$ olduğundan (X,τ,A,I) bir soft I-normal uzaydır.

Teorem 5.2.6. (X,τ,A,I) bir soft I-normal uzay ve (φ,ψ) $S(X)$ den $S(Y)$ ye bir soft homeomorfizm olsun. O zaman $(Y,\tau',A',(\varphi,\psi)(I))$ bir soft $(\varphi,\psi)(I)$-normal uzaydır.

İspat. (F,A') ve (G,A') Y üzerinde ayrık soft kapalı kümeler olsun. (φ,ψ) sürekli olduğundan $(\varphi,\psi)^{-1}(F,A')$ ve $(\varphi,\psi)^{-1}(G,A')$ X üzerinde ayrık soft kapalı kümelerdir. (X,τ,A,I) soft I-normal uzay olduğundan $(\varphi,\psi)^{-1}(F,A')-(U,A)\in I$ ve $(\varphi,\psi)^{-1}(G,A')-(V,A)\in I$ olacak şekilde X üzerinde (U,A) ve (V,A) ayrık soft açık kümeler vardır. $(\varphi,\psi)^{-1}(F,A')-(U,A)\in I$ ise $(\varphi,\psi)((\varphi,\psi)^{-1}(F,A')-(U,A))\in(\varphi,\psi)(I)$ elde edilir buradan $(F,A')-(\varphi,\psi)(U,A)\in(\varphi,\psi)(I)$. Benzer şekilde $(G,A')-(\varphi,\psi)(V,A)\in I$. $(\varphi,\psi)(U,A)$ ve $(\varphi,\psi)(V,A)$ Y üzerinde ayrık soft açık kümeler olduğundan $(Y,\tau',A',(\varphi,\psi)(I))$ bir soft $(\varphi,\psi)(I)$- normal uzaydır.

6. SONUÇ

Soft küme kavramı ilk olarak Molodtsov tarafından 1999 yılında ortaya atılmıştır. Daha sonra soft topolojik uzaylar konusuna giriş yapılarak bu konuyla ilgili pek çok çalışma yapılmıştır.

Biz de bu tezdeki çalışmalarımızı, Shabir ve Naz ın 2011 yılında yayınlanan " Soft Topolojik Uzaylar Üzerine " isimli makalesini baz alarak yaptık. Soft topolojik uzayların özelliklerini inceledik ve örneklerle destekledik. Ayrıca soft topolojik uzayların bir genellemesi olan soft ideal topolojik uzaylar kavramını tanımladık, özelliklerini inceledik ve örneklendirdik. Son olarak soft I-regülerlik ve soft I- normallik kavramlarını verdik ve özelliklerini inceledik.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Aktaş, H., and Çağman, N., 2007, Soft set and soft groups, *Information Sciences*, No.177, 2726-2735.

Ali, M.I., Feng, F., Liu, X., Min, W.K. and Shabir, M., 2009, On some new operations in soft set theory, *Computer and Mathematics with Applications*, 57, 1547-1553.

Atanassov, K., 1994, Operators over interval valued intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems*, 64, 159-174.

Aygünoğlu, A. and Aygün, H.,2011, Some notes on soft topological spaces, *Neural Comput. Applic.*, Kocaeli, DOI 10.1007/s, 00521-011-0722-3.

Das, S. and Samanta, S. K., Soft metric, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics AFMI-J-120715R1*, in press.

Feng, F., Jun, Y. B. and Zhao, X. Z., 2008, Soft semirings, *Computer and Mathematics with Applications*, 56, 2621 – 2628.

Gau, W. L. and Buehrer, D. J., 1993, Vague sets , *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 23(2), 610-614.

Jancovic, D. and Hamlet, T.R., 1990, New topologies from old via ideals, *Amer. Math. Montly*, 97(4), 295-310.

Kharal, A. and Ahmad, B., 2011, Mappings on soft classes, *New Mathematics and Natural Computation*, Vol.7 No.3, 471-481.

Kuratowski, K., 1966, Topology, *Academic Press*, Vol.I.

Lin, F., Soft connected spaces and soft paracompact spaces, Submitted for publication.

Maji, P. K., Biswas, R. and Roy, A. R., 2003, Soft set theory, *Computer and Mathematics with Applications*, 45, 555 – 562.

Molodtsov, D., 1999, Soft set theory-first results, *Computer and Mathematics with Applications*, 37, 19-31.

Nazmul, S. K. and Samanta, S. K., 2013, Neighbourhood properties of soft topological spaces, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, Accepted.

Pawlak, Z., 1982, Rough sets, *International Journal of Computer Science*, 11, 341 – 356.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Pei, D. and Miao, D., 2005, From soft sets to information systems, in *Proceedings of the IEEE International Conference on Granular Computing*, 2, 617 – 621.

Rong, W., 2012, The countabilities of soft topological spaces, *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 68, 954-957.

Shabir, M. and Naz, M., 2011, On soft topological spaces, *Computer and Mathematics with Applications*, 61, 1786-1799.

Vaidyanathaswamy, R., 1944, The localization theory in set topology, *Proc. Indian Acad. Sci.*, Sec A, 20, 51 – 61.

Varol, B. P. and Aygün, H., On soft hausdorff spaces, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatic*, Accepted.

Zadeh, L. A., 1965, Fuzzy sets, *Information and control*, 8, 338 – 353.

Zorlutuna, I., Akdağ, M., Min, W. K. and Atmaca, S., 2012, Remarks on soft topological spaces, to appear in *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatic*, Accepted.

ÖZGEÇMİŞ

20.01.1989 yılında Konya' da doğdu. İlk ve orta öğrenimlerini 1995 – 2003 yılları arasında Gazi İlköğretim Okulu' nda tamamladı. Lise öğrenimine 2003 yılında Y. D. A. Hoca Ahmet Yesevi Lisesi' nde başlayan Göknur Kale, buradan 2007 yılında mezun oldu. Yine 2007 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü' nü kazandı ve 2011 yılında mezun oldu. Aynı yıl Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Topoloji Bilim Dalı' nda yüksek lisansa başladı. Halen öğrenimine burada devam etmektedir.