

**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ ENERJİ ENSTİTÜSÜ**

**NANO GAZ TRANSPORTUNDA KUANTUM ÖLÇEK ETKİLERİ**

**DOKTORA TEZİ**  
**Y. Lis. Z. Fatih ÖZTÜRK**

**Anabilim Dalı : ENERJİ BİLİM ve TEKNOLOJİ**

**Programı : ENERJİ BİLİM ve TEKNOLOJİ**

**ARALIK 2007**

**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ ENERJİ ENSTİTÜSÜ**

**NANO GAZ TRANSPORTUNDA KUANTUM ÖLÇEK ETKİLERİ**

**DOKTORA TEZİ**  
**Y. Lis. Z. Fatih ÖZTÜRK**  
**(301972002)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 7 Eylül 2007**  
**Tezin Savunulduğu Tarih : 14 Aralık 2007**

**Tez Danışmanı : Doç.Dr. Altuğ ŞİŞMAN**  
**Diğer Jüri Üyeleri Prof.Dr. Akif ATALAY**  
**Doç.Dr. Tuğrul HAKİOĞLU (Bilkent.Ü.)**  
**Doç.Dr. Cenap Ş. ÖZBEN**  
**Doç.Dr. Tayfun BÜKE (M.Ü.)**

**ARALIK 2007**

## ÖNSÖZ

Tez konumun belirlenmesinden sonuçlandırılmasına kadar geçen tüm süreçte büyük katkısı olan danışmanım Sayın Doç. Dr. Altuğ Şişman'a, tez çalışmamın önemli bir bölümünün gerçekleşmesini sağlayan 105T086 no.'lu araştırma projesini destekleyen TUBİTAK'a, verimli bir çalışma ortamını ve yurt dışı konferans desteği vererek sonuçlarımı duyurmamı sağlayan İstanbul Teknik Üniversitesi'ne, tez çalışmam süresince yapıcı eleştirileri ve yönlendirmeleriyle yaptıkları değerli katkılardan dolayı tez yürütme kurulu üyesi Sayın Doç. Dr. Tuğrul Hakioglu'na, doktora çalışmam ve hayatımın her aşamasında büyük destek veren aileme ve varlığıyla en büyük desteğim oğlum Yankı'ya teşekkür ederim.

Aralık 2007

Z. Fatih ÖZTÜRK

## İÇİNDEKİLER

<b>KISALTMALAR</b>	<b>v</b>
<b>TABLO LİSTESİ</b>	<b>vi</b>
<b>ŞEKİL LİSTESİ</b>	<b>ix</b>
<b>SEMBOL LİSTESİ</b>	<b>xii</b>
<b>ÖZET</b>	<b>xvi</b>
<b>SUMMARY</b>	<b>xviii</b>
<b>1. GİRİŞ</b>	<b>1</b>
1.1. Çalışmanın Amacı ve Tez Düzeni	5
<b>2. TEMEL KAVRAMLAR</b>	<b>7</b>
2.1. Klasik ve Kuantum Ölçek Etkileri	7
2.2. Kuantum Ölçek Etkilerinin Bir Sonucu Olarak Gazlarda Kuantum Sınır Tabakası ve Yoğunluk Dağılımı	8
2.3. Kuantum Transport ve Kuantum Potansiyel	11
2.4. Boltzmann Transport Denklemi ve Relaksasyon Zamanı Yaklaşımı	14
2.5. Direkt ve Bileşik (Coupled Flow) Akış	17
2.6. Fermi-Dirac, Bose-Einstein ve Maxwell-Boltzmann İstatistikleri	20
<b>3. GAZLARDA TRANSPORT VE KUANTUM DEJENERASYONU</b>	<b>22</b>
3.1. Akılar ve Relaksasyon Zamanı Yaklaşımı Altında Transport Katsayıları	22
3.1.1. Çarpışma Frekansı ve Relaksasyon Zamanı	26
3.1.2. Karakteristik Uzunluklar ve Transport Rejimleri	30
3.1.3. Maxwellian Gazlarda Denge Dışı Dağılım Fonksiyonu	32
3.1.4. Fermi, Bose ve Maxwellian Gazlar için Genelleştirilmiş Denge Dışı Dağılım Fonksiyonu	35
3.1.5. Parçacık, Enerji ve Isı Akılarının $g_{a,b}$ , $\eta$ ve $\tilde{h}$ Fonksiyonları ile Temsili	37
3.1.6. $g_{a,b}$ , $\eta$ ve $\tilde{h}$ Fonksiyonlarının D-Boyutlu Dikdörtgen Geometri için Hesaplanması	40
3.2. Maxwellian Gazlarda Transport Katsayıları	42
3.2.1. $L_g \gg l_0$ ve $Kn \ll 1$ Durumunda Transport	42
3.2.2. $L_g \ll l_0$ ve $Kn \ll 1$ Durumunda Transport	45
3.3. Fermi ve Bose Gazlarında Transport Katsayıları	47
3.3.1. $L_g \gg l_0$ ve $Kn \ll 1$ Durumunda Transport	47
3.3.2. $L_g \ll l_0$ ve $Kn \ll 1$ Durumunda Transport	53
3.3.3. $L_g \gg l_0$ Durumu için Fermi Gazında Transportun Dejenerasyonla Değişimi	57
3.3.4. $L_g \gg l_0$ Durumu İçin Bose Gazında Transportun Dejenerasyonla Değişimi	62

3.3.5. $L_g \ll l_0$ Durumu için Fermi Gazında Transportun Dejenerasyonla Değişimi	69
3.3.6. $L_g \ll l_0$ Durumu İçin Bose Gazında Transportun Dejenerasyonla Değişimi	73
<b>4. GAZ TRANSPORTUNDA KUANTUM ÖLÇEK ETKİLERİ</b>	<b>77</b>
4.1. Kuantum Ölçek Etkileri ve Yerel Yoğunluk Üzerinde Kuantum Ölçek Etkilerinin Etkin Kuantum Potansiyel Yardımıyla Temsili	78
4.1.1. Maxwellian Gazlarda Etkin Kuantum Potansiyel	81
4.1.2. Fermi ve Bose Gazlarında Etkin Kuantum Potansiyel	84
4.2. Maxwellian Gazlarda Kuantum Ölçek Etkileri Altında Transport	87
4.2.1. $L_g \gg l_0$ ve $Kn \ll 1$ Durumunda Transport	87
4.2.2. $L_g \ll l_0$ ve $Kn \ll 1$ Durumunda Transport	93
4.3. Fermi ve Bose Gazlarında Kuantum Ölçek Etkileri Altında Transport	98
4.3.1. $L_g \gg l_0$ ve $Kn \ll 1$ Durumunda Transport	98
4.3.1.1. Fermi Gazında Kuantum Ölçek Etkilerinin Dejenerasyonla Değişimi	106
4.3.1.2. Bose Gazında Kuantum Ölçek Etkilerinin Dejenerasyonla Değişimi	110
4.3.2. $L_g \ll l_0$ ve $Kn \ll 1$ Durumunda Transport	116
4.3.2.1. Fermi Gazında Kuantum Ölçek Etkilerinin Dejenerasyonla Değişimi	121
4.3.2.2. Bose Gazında Kuantum Ölçek Etkilerinin Dejenerasyonla Değişimi	125
<b>5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA</b>	<b>130</b>
<b>KAYNAKLAR</b>	<b>132</b>
<b>EKLER</b>	<b>137</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ</b>	<b>142</b>

## KISALTMALAR

<b>MB</b>	: Maxwell-Boltzmann
<b>FD</b>	: Fermi-Dirac
<b>BE</b>	: Bose-Einstein
<b>BTD</b>	: Boltzmann Transport Denklemi
<b>WBTD</b>	: Wigner Boltzmann Transport Denklemi
<b>BGK</b>	: Bhatnagar, Gross, Krook yaklaşımı; relaksasyon zamanı yaklaşımı
<b>CNT</b>	: Karbon Nano Tüp

## TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
<b>Tablo 2.1</b> Direkt ve çapraz etkiler.....	19
<b>Tablo 3.1</b> Parçacık ve ısı akısına ilişkin transport katsayılar ve Wiedemann-Franz oranının tanımı.....	26
<b>Tablo 3.2</b> Parçacık ve ısı akısına ait transport katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı $g_{a,b}$ ve $\eta$ fonksiyonları cinsinden değerleri.....	40
<b>Tablo 3.3</b> $L_g \gg l_o$ durumu için 1 boyutlu Maxwellian gazda iletim, difüzyon, ısı iletim, Soret, Peltier, Dufour katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.....	44
<b>Tablo 3.4</b> $L_g \gg l_o$ durumu için 2 boyutlu Maxwellian gazda iletim, difüzyon, ısı iletim, Soret, Peltier, Dufour katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.....	44
<b>Tablo 3.5</b> $L_g \gg l_o$ durumu için 3 boyutlu Maxwellian gazda iletim, difüzyon, ısı iletim, Soret, Peltier, Dufour katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.....	45
<b>Tablo 3.6</b> $L_g \ll l_o$ durumu için 1 boyutlu Maxwellian gazda iletim, difüzyon, ısı iletim, Soret, Peltier, Dufour katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.....	46
<b>Tablo 3.7</b> $L_g \ll l_o$ durumu için 2 boyutlu Maxwellian gazda iletim, difüzyon, ısı iletim, Soret, Peltier, Dufour katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.....	47
<b>Tablo 3.8</b> $L_g \ll l_o$ durumu için 3 boyutlu Maxwellian gazda iletim, difüzyon, ısı iletim, Soret, Peltier, Dufour katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.....	47
<b>Tablo 3.9</b> $L_g \gg l_o$ durumu için 1 boyutlu Fermi ve Bose gazlarının iletim, difüzyon, ısı iletim, Soret, Peltier, Dufour katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.....	50
<b>Tablo 3.10</b> $L_g \gg l_o$ durumu için 2 boyutlu Fermi ve Bose gazlarının iletim, difüzyon, ısı iletim, Soret, Peltier, Dufour katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.....	51
<b>Tablo 3.11</b> $L_g \gg l_o$ durumu için 3 boyutlu Fermi ve Bose gazlarının iletim, difüzyon, ısı iletim, Soret, Peltier, Dufour katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.....	51
<b>Tablo 3.12</b> $L_g \gg l_o$ durumu için 1, 2 ve 3 boyutlu Fermi ve Bose gazı için boyutsuz transport katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.....	52
<b>Tablo 3.13</b> $L_g \ll l_o$ durumu için 1 boyutlu domende Fermi ve Bose gazlarının iletim, difüzyon, ısı iletim, Soret, Peltier, Dufour katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.....	54
<b>Tablo 3.14</b> $L_g \ll l_o$ durumu için 2 boyutlu domende Fermi ve Bose gazlarının iletim, difüzyon, ısı iletim, Soret, Peltier, Dufour katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.....	55

<b>Tablo 3.15</b>	$L_g \ll l_o$ durumu için 3 boyutlu domende Fermi ve Bose gazlarının iletim, difüzyon, ısı iletim, Soret, Peltier, Dufour katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.....	55
<b>Tablo 3.16</b>	$L_g \ll l_o$ durumu için 1,2 ve 3 boyutlu Fermi ve Bose gazı için boyutsuz transport katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.....	56
<b>Tablo 3.17</b>	$L_g \gg l_o$ durumu için dejenere fermi gazında 1,2 ve 3 boyutlu domende boyutsuz iletim, difüzyon ve ısı iletim katsayılarının asimptotik değerleri.....	60
<b>Tablo 3.18</b>	$L_g \gg l_o$ durumu için dejenere fermi gazında 1, 2 ve 3 boyutlu domende boyutsuz Soret, Peltier ve Dufour katsayılarının asimptotik değerleri.....	62
<b>Tablo 3.19</b>	Dejenere Bose gazı için 1, 2 ve 3 boyutlu domenlerde boyutsuz iletim, difüzyon ve ısı iletim katsayılarının asimptotik değerleri.....	68
<b>Tablo 3.20</b>	Dejenere Bose gazı için 1,2 ve 3 boyutlu domende boyutsuz Soret, Peltier ve Dufour katsayılarının asimptotik değerleri.....	68
<b>Tablo 3.21</b>	$L_g \ll l_o$ durumu için dejenere Fermi gazında 1,2 ve 3 boyutlu domende boyutsuz iletim, difüzyon, ısı iletim Soret, Peltier ve Dufour katsayılarının asimptotik değerleri.....	72
<b>Tablo 3.22</b>	$L_g \ll l_o$ durumu için dejenere Bose gazında 1,2 ve 3 boyutlu domende boyutsuz iletim, difüzyon, ısı iletim Soret, Peltier ve Dufour katsayılarının asimptotik değerleri.....	76
<b>Tablo 4.1</b>	Kuantum ölçek etkisi altında $L_g \gg l_o$ durumu için 1 ve 2 boyutlu Maxwellian gazda transport katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.....	90
<b>Tablo 4.2</b>	Kuantum ölçek etkisi altında $L_g \gg l_o$ durumu için 3 boyutlu Maxwellian gazda transport katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.....	91
<b>Tablo 4.3</b>	Kuantum ölçek etkisi altında $L_g \gg l_o$ durumu için 1, 2 ve 3 boyutlu Maxwellian gazda boyutsuz transport katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.....	92
<b>Tablo 4.4</b>	Kuantum ölçek etkisi altında $L_g \ll l_o$ durumu için 1 ve 2 boyutlu Maxwellian gazda transport katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.....	95
<b>Tablo 4.5</b>	Kuantum ölçek etkisi altında $L_g \ll l_o$ durumu için 3 boyutlu Maxwellian gazda transport katsayıları ve Wiedemann-Franz katsayısı	96
<b>Tablo 4.6</b>	$L_g \ll l_o$ durumu için 1, 2 ve 3 boyutlu domende boyutsuz katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.....	97
<b>Tablo 4.7</b>	Kuantum ölçek etkisi altında $L_g \gg l_o$ durumu için 1 boyutlu Fermi ve Bose gazlarında transport katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.....	101
<b>Tablo 4.8</b>	Kuantum ölçek etkisi altında $L_g \gg l_o$ durumu için 2 boyutlu Fermi ve Bose gazlarında transport katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.....	102
<b>Tablo 4.9</b>	Kuantum ölçek etkisi altında $L_g \gg l_o$ durumu için 3 boyutlu Fermi ve Bose gazlarında transport katsayıları.....	103
<b>Tablo 4.10</b>	Kuantum ölçek etkisi altında $L_g \gg l_o$ durumu için 1, 2 boyutlu Fermi ve Bose gazlarında boyutsuz transport katsayıları.....	104
<b>Tablo 4.11</b>	Kuantum ölçek etkisi altında $L_g \gg l_o$ durumu için 3 boyutlu Fermi ve Bose gazlarında boyutsuz transport katsayıları.....	105
<b>Tablo 4.12</b>	Dejenere limitte 1, 2 ve 3-boyutlu Fermi gazı için kuantum ölçek etkisi altında boyutsuz iletim, difüzyon ve ısı iletim katsayılarının asimptotik ifadeleri.....	108
<b>Tablo 4.13</b>	Dejenere limitte 1, 2 ve 3-boyutlu Fermi gazı için kuantum ölçek etkisi altında boyutsuz Soret, Peltier ve Dufour katsayılarının asimptotik ifadeleri.....	110



<b>Tablo 4.14</b>	Dejenere limitte 1, 2 ve 3-boyutlu Bose gazı için kuantum ölçek etkisi altında boyutsuz iletim, difüzyon ve ısı iletim katsayılarının asimptotik ifadeleri.....	114
<b>Tablo 4.15</b>	Dejenere limitte 1, 2 ve 3-boyutlu Bose gazı için kuantum ölçek etkisi altında boyutsuz Soret, Peltier ve Dufour katsayılarının asimptotik ifadeleri.....	114
<b>Tablo 4.16</b>	Kuantum ölçek etkisi altında $L_g \ll l_o$ durumu için 1 boyutlu Fermi ve Bose gazlarında transport katsayıları.....	116
<b>Tablo 4.17</b>	Kuantum ölçek etkisi altında $L_g \ll l_o$ durumu için 2 boyutlu Fermi ve Bose gazlarında transport katsayıları.....	117
<b>Tablo 4.18</b>	Kuantum ölçek etkisi altında $L_g \ll l_o$ durumu için 3 boyutlu Fermi ve Bose gazlarında transport katsayıları.....	118
<b>Tablo 4.19</b>	Kuantum ölçek etkisi altında $L_g \ll l_o$ durumu için 1 ve 2 boyutlu Fermi ve Bose gazlarında boyutsuz transport katsayıları.....	119
<b>Tablo 4.20</b>	Kuantum ölçek etkisi altında $L_g \ll l_o$ durumu için 3 boyutlu Fermi ve Bose gazlarında Boyutsuz transport katsayıları.....	120
<b>Tablo 4.21</b>	Dejenere limitte $L_g \ll l_o$ durumu için 1, 2 ve 3-boyutlu Fermi gazının kuantum ölçek etkisi altında boyutsuz iletim, difüzyon ve ısı iletim katsayılarının asimptotik ifadeleri.....	123
<b>Tablo 4.22</b>	Dejenere limitte $L_g \ll l_o$ durumu için 1, 2 ve 3-boyutlu Fermi gazının kuantum ölçek etkisi altında boyutsuz Soret, Peltier ve Dufour katsayılarının asimptotik ifadeleri.....	125
<b>Tablo 4.23</b>	Dejenere limitte $L_g \ll l_o$ durumu için 1, 2 ve 3-boyutlu Bose gazının kuantum ölçek etkisi altında boyutsuz iletim, difüzyon ve ısı iletim katsayılarının asimptotik ifadeleri.....	129
<b>Tablo 4.24</b>	Dejenere limitte $L_g \ll l_o$ durumu için 1, 2 ve 3-boyutlu Bose gazının kuantum ölçek etkisi altında boyutsuz Soret, Peltier ve Dufour katsayıları asimptotik ifadeleri.....	129

## ŞEKİL LİSTESİ

	<b><u>Sayfa No</u></b>
<b>Şekil 2.1</b>	Dikdörtgen bir kutuda ideal gaz için termodinamik denge halinde boyutsuz yerel yoğunluk dağılımı..... 9
<b>Şekil 2.2</b>	İki boyutlu konum-momentum uzayında kontrol hacmi..... 15
<b>Şekil 3.1</b>	Parçacık-duvar çarpışmalarının baskın olduğu farklı transport süreçleri..... 30
<b>Şekil 3.2</b>	Parçacık-parçacık çarpışmalarının baskın olduğu transport rejimi..... 31
<b>Şekil 3.3</b>	He-4 için teorik olarak hesaplanan ısı iletim katsayısı ile deneysel sonuçların karşılaştırılması..... 34
<b>Şekil 3.4</b>	He-4 için Maxwellin yaklaşımı kullanılarak ve tesir kesitinin sıcaklık düzeltilmesi yapılarak elde edilen ısı iletim katsayısının teorik sonuçlarının deneysel sonuçlar ile karşılaştırılması..... 35
<b>Şekil 3.5</b>	$L_g \gg l_0$ Durumu İçin Dejenere Fermi gazında boyutsuz iletim katsayısının $\Lambda$ ile değişimi..... 57
<b>Şekil 3.6</b>	$L_g \gg l_0$ Durumu İçin Dejenere Fermi gazında boyutsuz difüzyon katsayısının $\Lambda$ ile değişimi..... 58
<b>Şekil 3.7</b>	$L_g \gg l_0$ Durumu İçin Dejenere Fermi gazında boyutsuz ısı iletim katsayısının $\Lambda$ ile değişimi..... 58
<b>Şekil 3.8</b>	$L_g \gg l_0$ Durumu İçin Dejenere Fermi gazında boyutsuz Soret katsayısının $\Lambda$ ile değişimi..... 61
<b>Şekil 3.9</b>	$L_g \gg l_0$ Durumu İçin Dejenere Fermi gazında boyutsuz Peltier katsayısının $\Lambda$ ile değişimi..... 61
<b>Şekil 3.10</b>	$L_g \gg l_0$ Durumu İçin Dejenere Fermi gazında boyutsuz Dufour katsayısının $\Lambda$ ile değişimi..... 62
<b>Şekil 3.11</b>	$L_g \gg l_0$ Durumu İçin Dejenere Bose gazında boyutsuz iletim katsayısının $\Lambda$ ile değişimi..... 63
<b>Şekil 3.12</b>	$L_g \gg l_0$ Durumu İçin Dejenere Bose gazında boyutsuz difüzyon katsayısının $\Lambda$ ile değişimi..... 64
<b>Şekil 3.13</b>	$L_g \gg l_0$ Durumu İçin Dejenere Bose gazında boyutsuz ısı iletim katsayısının $\Lambda$ ile değişimi..... 65
<b>Şekil 3.14</b>	$L_g \gg l_0$ Durumu İçin Dejenere Bose gazında boyutsuz Soret katsayısının $\Lambda$ ile değişimi..... 66
<b>Şekil 3.15</b>	$L_g \gg l_0$ Durumu İçin Dejenere Bose gazında boyutsuz Peltier katsayısının $\Lambda$ ile değişimi..... 66
<b>Şekil 3.16</b>	$L_g \gg l_0$ Durumu İçin Dejenere Bose gazında boyutsuz Dufour katsayısının $\Lambda$ ile değişimi..... 67
<b>Şekil 3.17</b>	$L_g \ll l_0$ Durumu İçin Dejenere Fermi gazında boyutsuz iletim katsayısının $\Lambda$ ile değişimi..... 69
<b>Şekil 3.18</b>	$L_g \ll l_0$ Durumu İçin Dejenere Fermi gazında boyutsuz difüzyon katsayısının $\Lambda$ ile değişimi..... 69

<b>Şekil 3.19</b>	$L_g \ll l_0$ Durumu İçin Dejenere Fermi gazında boyutsuz ısı iletim katsayısının $\Lambda$ ile değişimi.....	70
<b>Şekil 3.20</b>	$L_g \ll l_0$ Durumu İçin Dejenere Fermi gazında boyutsuz Soret katsayısının $\Lambda$ ile değişimi.....	71
<b>Şekil 3.21</b>	$L_g \ll l_0$ Durumu İçin Dejenere Fermi gazında boyutsuz Peltier katsayısının $\Lambda$ ile değişimi.....	71
<b>Şekil 3.22</b>	$L_g \ll l_0$ Durumu İçin Dejenere Fermi gazında boyutsuz Dufour katsayısının $\Lambda$ ile değişimi.....	72
<b>Şekil 3.23</b>	$L_g \ll l_0$ Durumu İçin Dejenere Bose gazında boyutsuz iletim katsayısının $\Lambda$ ile değişimi.....	73
<b>Şekil 3.24</b>	$L_g \ll l_0$ Durumu İçin Dejenere Bose gazında boyutsuz difüzyon katsayısının $\Lambda$ ile değişimi.....	73
<b>Şekil 3.25</b>	$L_g \ll l_0$ Durumu İçin Dejenere Bose gazında boyutsuz ısı iletim katsayısının $\Lambda$ ile değişimi.....	74
<b>Şekil 3.26</b>	$L_g \ll l_0$ Durumu İçin Dejenere Bose gazında boyutsuz Soret katsayısının $\Lambda$ ile değişimi.....	75
<b>Şekil 3.27</b>	$L_g \ll l_0$ Durumu İçin Dejenere Bose gazında boyutsuz Peltier katsayısının $\Lambda$ ile değişimi.....	75
<b>Şekil 3.28</b>	$L_g \ll l_0$ Durumu İçin Dejenere Bose gazında boyutsuz Dufour katsayısının $\Lambda$ ile değişimi.....	76
<b>Şekil 4.1</b>	Klasik ve kuantum yoğunluk dağılımlarının temsili gösterimi....	80
<b>Şekil 4.2</b>	Klasik ve kuantum potansiyeller altında yoğunluk dağılımları....	80
<b>Şekil 4.3</b>	Maxwellian gazda bir doğrultudaki boyutsuz yoğunluklar, yerel ve global kimyasal potansiyeller ve kuantum potansiyelin dağılımı.....	83
<b>Şekil 4.4</b>	Dejenere Fermi gazında etkin kuantum potansiyelin 1 boyutlu yer bağımlılığı, $\Lambda_0 = 20$ , $\alpha = 0.2$ .....	85
<b>Şekil 4.5</b>	Dejenere Bose gazında etkin kuantum potansiyelin 1 boyutlu yer bağımlılığı, $\Lambda_0 = -10^{-6}$ , $\alpha = 0.2$ .....	86
<b>Şekil 4.6</b>	Kuantum ölçek etkileri altında $L_g \gg l_0$ durumu için Fermi gazında boyutsuz iletim katsayısının $\Lambda$ ile değişimi.....	106
<b>Şekil 4.7</b>	Kuantum ölçek etkileri altında $L_g \gg l_0$ durumu için Fermi gazında boyutsuz difüzyon katsayısının $\Lambda$ ile değişimi.....	107
<b>Şekil 4.8</b>	Kuantum ölçek etkileri altında $L_g \gg l_0$ durumu için Fermi gazında boyutsuz ısı iletim katsayısının $\Lambda$ ile değişimi.....	107
<b>Şekil 4.9</b>	Kuantum ölçek etkileri altında $L_g \gg l_0$ durumu için Fermi gazında boyutsuz Soret katsayısının $\Lambda$ ile değişimi.....	109
<b>Şekil 4.10</b>	Kuantum ölçek etkileri altında $L_g \gg l_0$ durumu için Fermi gazında boyutsuz Peltier katsayısının $\Lambda$ ile değişimi.....	109
<b>Şekil 4.11</b>	Kuantum ölçek etkileri altında $L_g \gg l_0$ durumu için Fermi gazında boyutsuz Dufour katsayısının $\Lambda$ ile değişimi.....	110
<b>Şekil 4.12</b>	Kuantum ölçek etkileri altında $L_g \gg l_0$ durumu için Bose gazında boyutsuz iletim katsayısının $\Lambda$ ile değişimi.....	111
<b>Şekil 4.13</b>	Kuantum ölçek etkileri altında $L_g \gg l_0$ durumu için Bose gazında boyutsuz difüzyon katsayısının $\Lambda$ ile değişimi.....	111
<b>Şekil 4.14</b>	Kuantum ölçek etkileri altında $L_g \gg l_0$ durumu için Bose gazında boyutsuz ısı iletim katsayısının $\Lambda$ ile değişimi.....	112
<b>Şekil 4.15</b>	Kuantum ölçek etkileri altında $L_g \gg l_0$ durumu için Bose gazında boyutsuz Soret katsayısının $\Lambda$ ile değişimi.....	113

<b>Şekil 4.16</b>	Kuantum ölçek etkileri altında $L_g \gg l_o$ durumu için Bose gazında boyutsuz Peltier katsayısının $\Lambda$ ile değişimi.....	115
<b>Şekil 4.17</b>	Kuantum ölçek etkileri altında $L_g \gg l_o$ durumu için Bose gazında boyutsuz Dufour katsayısının $\Lambda$ ile değişimi.....	115
<b>Şekil 4.18</b>	Kuantum ölçek etkileri altında $L_g \ll l_o$ durumu için Fermi gazında boyutsuz iletim katsayısının $\Lambda$ ile değişimi.....	121
<b>Şekil 4.19</b>	Kuantum ölçek etkileri altında $L_g \ll l_o$ durumu için Fermi gazında boyutsuz difüzyon katsayısının $\Lambda$ ile değişimi.....	122
<b>Şekil 4.20</b>	Kuantum ölçek etkileri altında $L_g \ll l_o$ durumu için Fermi gazında boyutsuz ısı iletim katsayısının $\Lambda$ ile değişimi.....	122
<b>Şekil 4.21</b>	Kuantum ölçek etkileri altında $L_g \ll l_o$ durumu için Fermi gazında boyutsuz Soret katsayısının $\Lambda$ ile değişimi.....	123
<b>Şekil 4.22</b>	Kuantum ölçek etkileri altında $L_g \ll l_o$ durumu için Fermi gazında boyutsuz Peltier katsayısının $\Lambda$ ile değişimi.....	124
<b>Şekil 4.23</b>	Kuantum ölçek etkileri altında $L_g \ll l_o$ durumu için Fermi gazında boyutsuz Dufour katsayısının $\Lambda$ ile değişimi.....	124
<b>Şekil 4.24</b>	Kuantum ölçek etkileri altında $L_g \ll l_o$ durumu için Bose gazında boyutsuz iletim katsayısının $\Lambda$ ile değişimi.....	125
<b>Şekil 4.25</b>	Kuantum ölçek etkileri altında $L_g \ll l_o$ durumu için Bose gazında boyutsuz difüzyon katsayısının $\Lambda$ ile değişimi.....	126
<b>Şekil 4.26</b>	Kuantum ölçek etkileri altında $L_g \ll l_o$ durumu için Bose gazında boyutsuz ısı iletim katsayısının $\Lambda$ ile değişimi.....	126
<b>Şekil 4.27</b>	Kuantum ölçek etkileri altında $L_g \ll l_o$ durumu için Bose gazında boyutsuz Soret katsayısının $\Lambda$ ile değişimi.....	127
<b>Şekil 4.28</b>	Kuantum ölçek etkileri altında $L_g \ll l_o$ durumu için Bose gazında boyutsuz Peltier katsayısının $\Lambda$ ile değişimi.....	128
<b>Şekil 4.29</b>	Kuantum ölçek etkileri altında $L_g \ll l_o$ durumu için Bose gazında boyutsuz Dufour katsayısının $\Lambda$ ile değişimi.....	128

## SEMBOL LİSTESİ

$A$	: Transport domenin yüzey alanı
$a, b$	: Transport edilen büyüklüğün parçacığın sırasıyla belirli bir hız bileşeni ile mutlak hızına üstel bağımlılığını temsil eden sabitler
$C_A$	: Parçacık başına transport edilen herhangi bir A özelliğinin hız dışında bağlı olduğu büyüklükleri temsil eden sabit
$c_r, c_s$	: Akışa göre bağlı hızın r ve s bileşenleri
$D^\varphi, D^\mu$	: İletim katsayısı
$D^n$	: Difüzyon katsayısı
$D^T$	: Soret (termal difüzyon) katsayısı
$\tilde{D}^\varphi, \tilde{D}^\mu$	: Maxwellian gazın değerine göre boyutsuzlaştırılmış iletim katsayısı
$\tilde{D}^n$	: Maxwellian gazın değerine göre boyutsuzlaştırılmış difüzyon katsayısı
$\tilde{D}^T$	: Maxwellian gazın değerine göre boyutsuzlaştırılmış Soret katsayısı
$\hat{D}^\varphi, \hat{D}^\mu$	: Ölçek etkisiz değerine göre boyutsuzlaştırılmış iletim katsayısı
$\hat{D}^n$	: Ölçek etkisiz değerine göre boyutsuzlaştırılmış difüzyon katsayısı
$\hat{D}^T$	: Ölçek etkisiz değerine göre boyutsuzlaştırılmış Soret katsayısı
$F$	: Transport için sürücü kuvvet
$F_r^\mu$	: $r$ yönünde kimyasal potansiyel gradyanı sebebiyle meydana gelen sürücü kuvvet
$F_r^\varphi$	: $r$ yönünde herhangi bir dış potansiyel gradyanı sebebiyle meydana gelen sürücü kuvvet
$F_r^T$	: $r$ yönünde sıcaklık gradyanı sebebiyle meydana gelen sürücü kuvvet
$F_r^\Phi$	: Toplam potansiyel sürücü kuvvet, $F_r^\mu + F_r^\varphi$
$F_r^{\Phi T}$	: Termopotansiyel sürücü kuvvet, $F_r^\Phi - (\mu / k_b T) F_r^T$
$f$	: Denge dışı dağılım fonksiyonu
$f_A$	: Dağılım fonksiyonun antisimetrik kısmı
$f_S$	: Dağılım fonksiyonun simetrik kısmı
$f_o$	: Termodinamik denge durumundaki dağılım fonksiyonu
$f_w$	: Wigner dağılım fonksiyonu
$g_{a,b}$	: Akı ve transport katsayıların ifadelerinin genelleştirilmesi amacıyla tanımlanmış fonksiyon
$h$	: Parçacık başına entalpi
$\tilde{h}$	: Boyutsuz entalpi
$\hbar$	: İndirgenmiş Planck sabiti

$i_1, i_2, i_3$	: Kartezyen koordinatlarda $x_1, x_2, x_3$ eksenlerine ait birim vektörler
$J$	: Akı
$J_{rt}^A$	: $t$ yönündeki herhangi bir $A$ özelliğinin $r$ yönündeki akısı
${}_e J_{rt}^A$	: $t$ yönündeki herhangi bir $A$ özelliğinin $r$ yönündeki denge akısı
${}_{ne} J_{rt}^A$	: $t$ yönündeki herhangi bir $A$ özelliğinin $r$ yönündeki denge dışı akısı
$J_r^N$	: $r$ yönünde parçacık akısı
$J_r^Q$	: $r$ yönündeki ısı akısı
$J_r^U$	: $r$ yönünde enerji akısı
$Kn$	: Knudsen sayısı
$k_b$	: Boltzmann sabiti
$L_c$	: En olası de Broglie dalga boyunun yarısı
$L_g$	: Geometrik ortalama serbest yol
$L_{ij}$	: Kinetik katsayılar
$L_1$	: Domenin $x_1$ yönündeki boyutu
$L_2$	: Domenin $x_2$ yönündeki boyutu
$L_3$	: Domenin $x_3$ yönündeki boyutu
$L_*$	: Karakteristik uzunluk
$Li$	: Polilogaritmik fonksiyon
$l$	: Ortalama serbest yol
$l_0$	: Parçacık-parçacık çarpışmaları için ortalama serbest yol
$m$	: Parçacığın kütlesi
$N$	: Transport domenindeki toplam parçacık sayısı
$\tilde{n}$	: Boyutsuz yoğunluk, $(n/n_{cl})$
$n$	: Yoğunluk
$n_{cl}$	: Klasik yoğunluk, $(n_{cl} = N/V)$
$\bar{n}_{eff}$	: Etkin yoğunluk
$n_\sigma$	: Tesir kesitlerinin sıcaklık düzeltmesine ait katsayı
$\mathbf{p}$	: Parçacığın momentumu
$p_1, p_2, p_3$	: Parçacığın momentumunun kartezyen koordinatlardaki bileşenleri
$q$	: Parçacığın genelleştirilmiş kuantum durum değişkeni
$Q$	: Herhangi bir sürücü potansiyel, kuantum ölçek etkisiz transport katsayısı
$Q_{SE}$	: Kuantum ölçek etkisi altında hesaplanan transport katsayı
$\mathbf{r}$	: Konum vektörü
$S_c$	: Boltzmann denkleminin kaynak terimi
$S$	: Entropi
$s$	: Tesir kesitinin çarpışma parametresi
$T$	: Sıcaklık
$T_0$	: Referans sıcaklık
$t$	: Zaman
$U$	: Potansiyel
$U_b$	: Bohm potansiyeli

$U_q$	: Kuantum potansiyel
$U_Q$	: Wigner-Boltzmann denklemi ile hesaplanan kuantum potansiyel
$X$	: Sürücü kuvvet
$x_1, x_2, x_3$	: Kartezyen koordinatlarda konum vektörünün bileşenleri
$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$	: Kartezyen koordinatlarda konum vektörünün boyutsuz bileşenleri
$V$	: Hacim
$V_{eff}$	: Efektif hacim
$\mathbf{v}$	: Parçacığın hız vektörü
$v_t$	: t yönündeki hız bileşeni
$v_r^f$	: Akış hızının $r$ bileşeni
$v_1, v_2, v_3$	: Hızın $x_1, x_2, x_3$ yönündeki bileşenleri
$v_r, v_s$	: Parçacık hızının $r$ ve $s$ bileşenleri
$W$	: Saçılma hızı
$WF$	: Wiedemann-Franz oranı
$\tilde{WF}$	: Maxwellian gazın Wiedemann-Franz oranına bölünerek boyutsuzlaştırılmış Wiedemann-Franz oranı
$w$	: $(\varepsilon - \mu)/k_b T$
$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_D$	: 1, 2,.. ve $D$ yönündeki ters ölçek katsayısı
$\beta$	: $1/k_b T$
$\Gamma$	: Gamma fonksiyonu
$\gamma$	: $l_0/L_g$
$\delta$	: Sınır tabaka kalınlığı
$\tilde{\delta}$	: Boyutsuz sınır tabak kalınlığı
$\varepsilon$	: Parçacığın enerjisi
$\varepsilon_i, \varepsilon_j$	: $\mp 1$ değerini alan bir sabit
$\zeta$	: Riemann zeta fonksiyonu
$\eta$	: $V$ hacmine sahip olan tüm domenin $n$ yerel yoğunluğuna sahip olması durumunda domende bulunabilecek toplam parçacık sayısı
$\kappa$	: Parçacığın dalga sayısı
$\kappa^T$	: Isı iletim katsayısı
$\kappa^\mu, \kappa^\varphi$	: Peltier katsayısı
$\kappa^n$	: Dufour katsayısı
$\tilde{\kappa}^T$	: Maxwellian gazın değerine göre boyutsuzlaştırılmış ısı iletim katsayısı
$\tilde{\kappa}^\mu, \tilde{\kappa}^\varphi$	: Maxwellian gazın değerine göre boyutsuzlaştırılmış Peltier katsayısı
$\tilde{\kappa}^n$	: Maxwellian gazın değerine göre boyutsuzlaştırılmış Dufour katsayısı
$\hat{\kappa}^T$	: Ölçek etkisiz değerine göre boyutsuzlaştırılmış ısı iletim katsayısı
$\hat{\kappa}^\mu, \hat{\kappa}^\varphi$	: Ölçek etkisiz değerine göre boyutsuzlaştırılmış Peltier katsayısı
$\hat{\kappa}^n$	: Ölçek etkisiz değerine göre boyutsuzlaştırılmış Dufour katsayısı
$\bar{\lambda}$	: Termal de Broglie dalga boyu
$\Lambda$	: Boyutsuz kimyasal potansiyel, $\mu/k_b T$

$\mu$	: yerel kimyasal potansiyel
$\mu_0$	: Global kimyasal potansiyel
$\Pi_i^A$	: $C_A(v_i)^a  v_i ^b$
$\pi$	: Pi sayısı
$\sigma$	: Hız bağımlı tesir kesiti, $\sigma = \sigma_0  v ^s$
$\sigma_0$	: s'in birimine göre değişen tesir kesiti sabiti
$\sigma_1(\tilde{x}_1)$	: $x_1$ yönünde normalize boyutsuz yoğunluk dağılımı
$\sigma_2(\tilde{x}_2)$	: $x_2$ yönünde normalize boyutsuz yoğunluk dağılımı
$\sigma_3(\tilde{x}_3)$	: $x_3$ yönünde normalize boyutsuz yoğunluk dağılımı
$\tau$	: Relaksasyon zamanı
$\tau_0$	: Parçacık-parçacık çarpışmalarına ait ortalama serbest zaman
$\tau_g$	: Parçacık-duvar çarpışmalarına ait ortalama serbest zaman
$\nu$	: Toplam çarpışma frekansı
$\nu_{pp}$	: Parçacık-parçacık çarpışma frekansı
$\nu_{pb}$	: Parçacık-duvar çarpışma frekansı
$\varphi$	: Dış potansiyel
$\varphi_q$	: Kuantum potansiyel
$\Psi$	: Dalga fonksiyonu



## NANO GAZ TRANSPORTUNDA KUANTUM ÖLÇEK ETKİLERİ

### ÖZET

Yarıiletken teknolojilerinde kullanılan mikro fabrikasyon tekniklerinin gelişimi, yeni fiziksel etkilerin ortaya çıktığı mikro/nano boyutlarda sensörler, aktuatörler, tıbbi cihazlar, güç üreten mikro makineler, ısı değiştiricileri, pompalar, valfler, mikro-nano pipetler ve mikro iticilerin üretilmesini de mümkün kılmıştır.

Klasik ölçeklendirme yaklaşımında sistemin özelliklerinin ve fiziksel sabitlerin ölçeklendirmeden bağımsız olduğu kabul edilir. Bununla beraber, sistemin karakteristik uzunluğu sistemi kontrol eden mekanizmaya ait karakteristik uzunluğa yaklaştığında bu varsayım geçerliliğini yitirir ve parçacığın dalga karakteri önem kazanır. Bu nedenle nano boyutlardaki sistemlerde var olan farklı ölçek etkileri nedeniyle gazların transport davranışları makro ölçektekilerden oldukça farklıdır.

Mikro/nano sistemlerde termodinamik denge durumunda dahi yoğunluk dağılımı homojen olmayıp sınırlarda yoğunluğun sıfıra gittiği bir sınır tabaka oluşmaktadır. Bu tabaka, kalınlığı Planck sabiti ile orantılı olduğundan kuantum sınır tabakası olarak adlandırılır. Kuantum sınır tabakası sebebiyle gaz parçacıkları geometrik hacmi değil ondan daha küçük olan etkin (efektif) bir hacmi doldururlar. Parçacıkların dalga karakteri nedeniyle sınırlar ile parçacıklar arasında yerel olmayan itici bir etkileşme vardır. Bu yüzden parçacıklar domenin iç bölgelerinde toplanırlar ve bunun sonucu olarak da iç bölgelerdeki yoğunluk klasik yoğunluktan daha yüksek olur.

Kuantum sınır tabakasının kalınlığı parçacıkların termal de Broglie dalga boyu mertebesinde olup bu mertebeye karakteristik bir uzunluk tanımlar. Bu nedenle, sistemin boyutları kuantum sınır tabakası ile karşılaştırılabilir olduğunda kuantum ölçek etkileri sistem üzerinde etkin olur. Ayrıca sınırlar ile parçacıklar arasındaki yerel olmayan etkileşme sebebiyle parçacıklar sınırları termal de Broglie dalga boyu mesafesinde hissederler. Bundan dolayı, parçacıkların gördükleri potansiyel dalga karakterine sahip olmayan klasik parçacıkların gördükleri potansiyelden farklıdır. Bu fark klasik potansiyele etkin kuantum potansiyel olarak adlandırılan diğer bir potansiyelin eklenmesiyle ifade edilebilir. Etkin kuantum potansiyel yaklaşımında, klasik dağılım fonksiyonu, etkin kuantum potansiyelin ilave edilmesiyle kuantum dağılım fonksiyonu ile yer değiştirilir. Böylece, yerel yoğunluk üzerindeki kuantum etkiler etkin kuantum potansiyel yardımıyla modellenir.

Çoğu tersinmez süreçte akıllar sürücü kuvvetler ile lineer ilişkili olarak yazılabilir. Aynı anda birden fazla sürücü kuvvetin var olduğu bir sistemde bileşik transport söz konusu olur ve bir sürücü kuvvet birden fazla transportun sürücü kuvveti olarak işlev görür. Örneğin sıcaklık gradyeni sadece ısı transferine yol açmaz aynı zamanda difüzyona da yol açar. Sürücü kuvvetlerin bu tür ikincil etkileri çapraz etkiler olarak adlandırılır. Özellikle nano sistemlerde, gaz moleküllerinin ortalama serbest yolu sistem boyutları ile karşılaştırılabilir olduğundan çapraz etkiler ihmal edilemez ve

bileşik transport önem kazanır. Makro sistemlerde ise direkt sürücü kuvvetler transport üzerinde baskın olduğundan çapraz etkiler ihmal edilirler.

Sonuç olarak, nano ölçekte kuantum ölçek etkilerinin hem direkt hem de çapraz transport katsayıları üzerindeki etkilerinin araştırılması önem kazanmaktadır.

Bu çalışmada; dikdörtgen transport geometrisi için relaksasyon zamanı yaklaşımı altında Boltzmann transport denklemi kullanılarak Maxwellian, Fermi ve Bose gazlarının direkt ve çapraz transport katsayıları hem kuantum ölçek etkisi dikkate alınmadan hem de kuantum ölçek etkisi dikkate alınarak çıkarılmıştır. Parçacık-parçacık ve parçacık-duvar çarpışmaları sonucu meydana gelen transport süreçleri ayrı ayrı incelenmiştir. Parçacık-duvar çarpışmaları sonucu meydana gelen transport süreçlerinde transport katsayıları üzerindeki kuantum ölçek etkilerinin, parçacık-parçacık çarpışmaları sonucu meydana gelen transport süreçlerindekiyle daha güçlü olduğu görülmüştür.

Direkt (iletim, difüzyon ve termal iletkenlik) ve çapraz (Soret, Peltier ve Dufour) transport katsayıları 1, 2 ve 3 boyutlu dikdörtgen geometrilerde Maxwellian, Fermi ve Bose gazları için çıkarılmış ve D boyutlu dikdörtgen geometriler için genelleştirilmiştir. Kuantum ölçek etkisi ihmal edildiğinde, kuantum dejenerasyonunun transport katsayıları üzerindeki etkileri ayrıca incelenmiştir. Transport katsayıları üzerinde kuantum ölçek etkileri hem klasik hem de dejenere durumlarda incelenmiştir. Genel olarak, Fermi gazında artan dejenerasyonla transport katsayıları üzerinde kuantum ölçek etkilerinin azaldığı, bununla beraber Fermi gazındaki bu durumun tersine Bose gazında ise kuantum ölçek etkilerinin arttığı görülmüştür. Ayrıca, transport katsayılarında kuantum ölçek düzeltmeleri ile termal düzeltmelerin yanı sıra bileşik bir düzeltme olarak termo-ölçek düzeltmeleri de ortaya çıkmıştır. Evrensel Wiedemann-Franz yasasının kuantum ölçek etkileri nedeniyle evrenselliğini kaybettiği gösterilmiştir.

Sonuç olarak, hem direkt hem de çapraz etkilere ait transport katsayıların kuantum ölçek etkileri nedeniyle transport domeninin ölçek ve geometrisine bağlı olduğu görülmüştür. Bu sebeple domenin şekli ve ölçeği transport süreçleri üzerinde ilave bir kontrol parametresi olmaktadır. Bu kontrol parametreleri kullanılarak yeni transport süreçleri tanımlanabilir ve kuantum ölçek etkilerini kullanan yeni mikro ve nano makineler dizayn edilebilir.

## QUANTUM SIZE EFFECTS ON NANO GAS TRANSPORT

### SUMMARY

Development of micro fabrication techniques used in semiconductor technology have led to the production of small-scale devices such as micro/nano sensors, actuators, biomedical devices, pumps, propulsion system and micro engines for power generation based on some new physical effects.

Transport behavior of gases confined in nano scale is considerably different than that in macro scale, due to different kinds of size effects. Classic scaling approaches generally assumes that physical constants and material properties remain independent of the scale. However, this assumption breaks down when the wave character of gas particles is considered or the length scale of the system approaches to the characteristic length scale of the mechanism that controls the property of interest.

In nano-scale, even at thermodynamic equilibrium, density distribution is not uniform and there is a boundary layer near to the boundaries where the density goes to zero. This layer is called quantum boundary layer since the thickness of the layer is proportional to the Planck's constant. Due to quantum boundary layer, gas particles fill an effective volume which is less than the geometric one. Due to wave character of particles, there is a non-local repulsive interaction between boundaries and particles. Therefore particles tend to accumulate in the inner part of the domain and it causes a higher local density than the classical one for the interior regions.

Thickness of this boundary layer is in the order of thermal de Broglie wavelength of the particles and it defines a characteristic length scale. Therefore, quantum size effects appear when the size of the domain becomes comparable with the thickness of the boundary layer. Due to non-local interaction between boundaries and particles, particles feel the boundaries when the distance is in the order of thermal de Broglie wave length. Thus, the potential acting on the wave-like particles is different than the potential acting on the particle-like ones. The true potential can be represented by adding an effective quantum potential to the classical one. In an effective potential approach, one replaces the quantum distribution function by a classical distribution function with a modified potential. Thus, all the quantum effects on local density are modeled through the effective quantum potential.

In most of the irreversible processes, there is a linear relation between fluxes and driving forces. If two or more driving forces affect the system simultaneously, coupled transport occurs and each driving forces drive more than one transport process. For example, temperature gradient causes not only heat transport but also causes diffusion. The secondary effects of the driving forces are called cross effects. Especially in nano scale, when the mean free path of gas molecules becomes comparable to the system size, cross effects can not be neglected and coupled transport becomes important. In macro systems, only the self effects are dominant on the transport processes while the cross effects are negligible.

Consequently, in nano scale, it is important to examine the quantum size effects on the transport coefficients of both self and cross effects.

In this study, self and cross transport coefficients in a rectangular transport domain are derived for Maxwellian, Fermi and Bose gases by considering quantum size effects and Boltzmann transport equation under the relaxation time approximation. The particle-particle and particle-boundary collisions based transport processes are examined individually. In the case of particle-boundary collisions dominated transport regime, it is shown that quantum size effects are stronger in comparison with those in particle-particle collisions dominated one.

Self (conductivity, diffusion and thermal conductivity) and cross (Soret, Peltier and Dufour) transport coefficients are derived and generalized for Maxwellian, Fermi and Bose gases confined in a  $D$  dimensional rectangular transport domain and they are studied for 1, 2 and 3 dimensional cases. The effects of the quantum degeneracy on the transport coefficients without size effects are also analyzed. Quantum size effects on the transport coefficients are examined under both classical and degeneracy conditions. In general, it is observed that quantum size effects on transport coefficients decrease for Fermi gas and increase for Bose gas with the increase of degeneracy. Besides the quantum size and thermal corrections on transport coefficients, thermo-size corrections are appeared in nano scale. Furthermore, it is shown that the universal Wiedemann-Franz law loses its universality in nano scale due to quantum size effects.

Consequently, it is shown that both self and cross transport coefficients depend on size and geometry of the transport domain due to quantum size effects. Therefore, shape and size of the domain become additional control parameters on the transport processes. Because of these control parameters, some new transport processes can be defined and new micro and nano engines can be designed based on these quantum size effects.

## 1. GİRİŞ

**Feynman (2002)**'in mikro ve nano boyutlarda yapılabilecek cihazların önemini vurguladığı 1959 yılındaki konuşmasıyla başlayan süreç, mikroelektronik teknolojisinin gelişimi ile 1980'lerde elektronik ve kontrol mühendisliği alanındaki ilerlemelere önemli katkılarda bulunmuş, 2000'li yıllarda ise nanoteknolojideki ilerlemelerle beraber bu katkılar bilim ve mühendisliğin birçok dalına yayılmıştır. Yarıiletken teknolojilerinde kullanılan mikro fabrikasyon tekniklerinin gelişimi, güç üreten mikro makineler, ısı değiştiricileri, pompalar, valfler, mikro-nano pipetler ve mikro iticilerin üretilmesini de mümkün kılmıştır (**Epstein ve diğ., 1997**), (**O'Conner, 1992**), (**Gabriel, 1995**), (**Gravesen ve diğ., 1993**), (**Hogan, 1996**), (**Ho ve Tai, 1998**), (**Angel ve diğ., 1983**), (**Sullivan ve diğ., 2001**), (**Mehra ve diğ., 2000**), (**Spadaccini ve diğ., 2003**), (**Whalen ve diğ., 2003**), (**Gad-el-Hak, 1999**). Günümüzde, üretilen çiplerde kullanılan transistörlerin karakteristik uzunlukları sürekli küçülmektedir ve her 2 yılda bir aynı hacimdeki çipin içine yerleştirilen bileşenler 2 kat artmaktadır. Tasarlanan sistem boyutlarının düşürülmesi sistemin cevap zamanını da düşürmektedir. Şu anda geliştirilmiş mikro-makinalarda çalışma ve durdurma (startup, shutdown) birkaç yüz mikrosaniye kadar kısa bir zamanda gerçekleştirilebilmektedir (**Epstein, 1997**).

Mikro ve nano ölçekte gaz transportu yarıiletkenlere göre yeni bir çalışma alanını oluşturmakta ve biyoloji, kimya, malzeme, elektrik, optik, otomotiv, tıp gibi birçok alanda uygulamaları bulunmaktadır. Küçük ölçekli sistemlerde sıvıların yüksek viskozite etkisi nedeniyle akışkan olarak mümkün olduğu sürece gazlar tercih edilmektedir. Sistem boyutları küçük olduğunda, sistem parametrelerinde meydana gelen çok küçük bir değişiklik sistemin genel karakteristiklerini etkilemektedir. Küçük ölçeklerde gaz akışları genellikle nümerik olarak modellendiğinden hem zaman hem de maliyet açısından zorluklar getirmektedir. Bu sebeple, uygun modeller kurulabilmesi ve üretilecek sistemlerin dizayn parametrelerinin optimizasyonu için akış karakteristiklerinin anlaşılabilmesi önem kazanır. Mikro ve nano akışlarda, ölçek küçüldükçe temel fizik de hızla değişir ve yüzeylerin akış

üzerinde yaratacağı etkiler nedeni ile makro ölçekteki akışlardan farklılıklar gözlenir. Bu yüzey etkileri genel olarak ölçek etkilerinin sebeplerinden birini oluşturur (**Chen, 2005**), (**Tien ve diğ., 1998**). Sistemin boyutları parçacıkların termal de Broglie dalga boyu ile karşılaştırılabilir olduğunda, enerji özdeğerlerindeki kesiklilik de önem kazanır ve transport katsayıları sistem boyutlarından etkilenir. Transport katsayıları üzerindeki bu etki kuantum ölçek etkileri (quantum size effects, QSE) olarak adlandırılır ve genellikle nanometrik ölçülerde gözlenir. Boyutların küçülmesiyle sistemi sınırlayan yüzeyin hacme oranı da büyümekte ve böylece yüzey etkilerinin katkısı da artmaktadır (**Karnidakis ve Beskok, 2002**). Mikro ve nano sistemler mekanik, optik, termal, elektrik gibi çalışma alanlarını içine alan çok disiplinli bir araştırma dalı olduğundan yeni uygulama alanları buldukça mikro ve nano sistemlerdeki araştırmalar daha karmaşık bir hal alarak artmaya devam etmektedir. Sistem boyutları parçacığın ortalama serbest yolu ile karşılaştırılabilir boyutlarda olur ise, parçacığın diğer parçacıklardan çok sistemin sınırları ile olan çarpışmaları önem kazanır. Bu durum, klasik ölçek etkilerinden birini oluşturur.

Sistem boyutlarının küçülmesiyle parçacıkların termal de Broglie dalga boyu ve sistemin karakteristik uzunluklarının karşılaştırılabilir olması, bu sistemlerdeki transport mekanizmalarıyla ilgili yeni araştırmaların doğmasına sebep olmuştur. Bunun sonucu olarak özellikle yarıiletken ve metallerde elektron transportu üzerine kuantum kökenli etkiler yoğun olarak incelenmiştir. Öte yandan mikro ve nano gaz transportunda, klasik ölçek etkileri dahi deneysel zorluklar nedeniyle genellikle hesaplamalı olarak incelenmekte, kuantum ölçek etkileri ise üzerinde çalışılacak yeni bir alanı oluşturmaktadır (**Ancona ve Iafrate, 1989**), (**Jalochowski ve Bauer, 1988**), (**Trivedi ve Ashcroft, 1988**), (**Tesanovic ve diğ., 1986**), (**Tsuchiya ve Ravaioli, 2001**), (**Arora ve Awad, 1981**).

Kuantum ve klasik ölçek etkilerinin transport katsayıları üzerinde meydana getireceği değişimler deneysel ve ölçüm kolaylıkları nedeni ile iletken ve yarıiletkenler üzerinde yoğun bir şekilde çalışılmaya gelmektedir (**Sheng ve diğ., 1995**), (**Sondheimer, 1950**), (**Trivedi ve Ashcroft, 1988**), (**Freeman ve Gettys, 1978**).

Termodinamik denge durumunda bile, gazların yerel yoğunluğunun sistem sınırlarına yaklaştıkça azalarak sifira gittiği bir tabakanın olduğu gösterilmiş ve bu tabaka kuantum sınır tabakası olarak adlandırılmıştır. Söz konusu tabakanın varlığı nedeniyle parçacıkların doldurduğu hacim gerçek hacimden daha küçük olmaktadır.

Bunun sonucu olarak, kuantum sınır tabakasının dışında etkin yoğunluk klasik yoğunluktan daha yüksek olmaktadır (**Şişman ve diğ., 2007**). Bu tabakanın varlığı, termodinamik özellikler üzerinde kuantum ölçek etkilerinin kökenini ve özelliklerin ölçek ve şekil bağımlılığını açıklamaktadır. Kuantum sınır tabakasına yol açan mekanizmanın transport katsayılarını etkilemesi de beklenen bir sonuçtur. Bu tez çalışmasının temel amaçlarından biride bu etkiyi araştırmaktır.

Mikro ve nano ölçekte gerçekleşen transport süreçlerinde makro ölçekte alışılmış olunan ve her akıyı tek bir sürücü potansiyel ile ilişkilendiren yasalar yeterliliğini yitirir. Örneğin, makroskopik ölçekte sadece sıcaklık gradyeninden kaynaklanan ısı akısı mikro ve nano ölçekte yoğunluk gradyeni ya da dış potansiyel gradyen nedeniyle de gerçekleşebilir. Aslında bu tür süreçler, gaz yoğunluğunun düşük olması ve buna bağlı olarak ortalama serbest yolun sistem boyutlarıyla karşılaştırılabilir duruma gelmesi durumunda makro sistemlerde de gözlenir. Bu tür süreçler tersinmez süreçlerin termodinamiğinin çalışma konusu olup ilk çalışmalar 1931 yılında **Onsager (1931)** tarafından, lineer denklemlerin kinetik katsayıları arasında kurduğu karşılıklık (reciprocity) ilişkileri ile başlamış ve daha sonraki yıllarda bu konuya **Casimir (1945)**, **Prigogine (1967)**, **Groot ve Mazur (1954a, 1954b)** tarafından önemli katkılarda bulunulmuştur. İki veya daha fazla tersinmez süreç aynı anda gerçekleştiğinde süreçler birbirleri ile karışabilir (**Onsager 1931**). Klasik termodinamik, denge durumları ile sınırlı olup tersinir süreçler arasındaki denge durumları için geçerlidir. Klasik termodinamikte geçerli olan ilişkiler denge durumu dışındaki sistemlerde geçerliliğini yitirir. Tersinmez süreçler incelenirken yerel denge varsayımı yapılır. Bu varsayımda sistem, makroskopik bir sistemin özelliklerini gösterecek kadar büyük, aynı zamanda denge koşullarının sağlanabileceği kadar küçük alt sistemlere bölünür. Sürücü kuvvetlerin çok şiddetli olmadığı birçok tersinmez süreçte akılar sürücü kuvvetler ile lineer ilişkilidir. Akı ifadesinin birden fazla sürücü kuvvete bağlı olduğu akıslara bileşik akış (coupled flow) denir. Akının birincil sürücü kuvvet ile lineer bağımlı olarak ifade edildiği basit akıslarda geçerli olan ilişkiler (Fick yasası Fourier yasası vb.), birden fazla gradyanın olduğu bileşik akıslarda (coupled flow) yeterli olmaz. Bileşik akıslarda, akı ifadesi birincil ve ikincil sürücü kuvvetler ile lineer ilişkili olarak ifade edilir. Birincil sürücü kuvvetler sistem üzerinde baskındır. Denge durumunda sistem üzerindeki tüm akılar ve kuvvetler sıfırlanır (**Jou ve diğ., 1996**). Birden fazla sürücü

kuvvet sebebi ile oluşan çapraz etkilerin (cross effects) varlığı ile birçok yeni transport mekanizması gözlemlenmiş ve bu mekanizmaları kullanan cihazların tasarlanabilmesi mümkün olmuştur (**Meixner, 1941**), (**Cowling, 1970**), (**Callen, 1948**), (**Hirschfelder ve diğ., 1964**), (**Loyalka ve Hickey, 1991**), (**Groot ve Mazur, 1961**), (**Sharipov, 1994**), (**Loyalka, 1971**). Mikro ve nano ölçekte önem kazanan çapraz etkilerin transport süreçlerinde ele alınması önem taşımaktadır.

Standart atmosferik koşullarda bile gazların ortalama serbest yolu yaklaşık 70nm civarında olduğundan mikro ve nano sistemlerin boyutlarıyla karşılaştırılabilir olur. Bunun sonucu olarak ölçek etkileri önem kazanır ve süreklilik yaklaşımı geçerliliğini yitirir (**Arkılcı ve diğ., 1997**). Süreklilik yaklaşımının geçerliliğini yitirmesi nedeniyle süreklilik şartı altında iyi sonuç veren akışkanlar mekaniğinin standart korunum denklemleri yerine daha temel olan Boltzmann transport denklemi (BTD) kullanılabilir. Basit bir makroskopik sistem, hız bileşenleri ve iki adet bağımsız termodinamik değişken olmak üzere beş değişkenle tanımlanabilir. Fakat,  $N$  parçacıktan oluşan makroskopik bir sistemin, mikroskopik bakış açısı ile incelenebilmesi için en az  $6N$  adet değişkene ihtiyaç vardır. Mikroskopik ve makroskopik bakış açıları arasındaki bu büyük farklılık, mikroskopik hesaplamalarda istatistik kullanılarak aşılır, (**Jou, 1988**). İstatistik mekaniğin gelişimi ile gaz transportundaki çalışmalar hız kazanmıştır. BTD'nin çözümü, denge durumu dışındaki gazların istatistiğinde, dağılım fonksiyonunun zaman içindeki evrimini tanımlar (**Alexeev, 2004**). Dağılım fonksiyonu parçacığın konumuna, momentumuna ve zamana bağlıdır. Dağılım fonksiyonu; gaz molekülleri için Maxwell-Boltzmann (MB), elektronlar için Fermi-Dirac (FD) ve foton/fonon için Bose-Einstein (BE) istatistikleriyle belirlenen fonksiyonlar ile tanımlanır. BTD'nin sonuçları ile deneysel çalışmalar arasında mükemmel bir uyum vardır ve özellikle gazların transportu ile ilgili çalışmaların hemen hemen tümünün temelini oluşturur (**Blatt ve Opie, 1974**). BTD'deki saçılma terimi momentumun lineer olmayan bir fonksiyonu olduğundan en basit fiziksel problemler için bile çözümü zorlaştırır. Çözümün basitleştirilmesi için relaksasyon zamanı yaklaşımı yapılır. Bu yaklaşımla, parçacıklar arası çarpışmaları temsil eden integral, relaksasyon terimi ile yer değiştirilerek BTD lineerleştirilir (**Bhatnagar ve diğ., 1954**). Transport katsayılarının doğru olarak hesaplanabilmesi, mühendislik uygulamalarında sistem karakteristiklerinin anlaşılabilmesi ve dizayn parametrelerinin belirlenmesi için önemlidir.



Transport süreçlerinin modellenmesinde yaygın olarak kullanılan BTD klasik mekaniğin varsayımlarına dayalı bir denklem olup kuantum etkilerin önem kazandığı özellikle nano ölçekte gerçekleşen süreçlerin modellenmesinde dikkatle kullanılmalıdır. Bilindiği gibi kuantum mekaniğinde faz uzayı kavramı Heisenberg belirsizlik ilkesi sebebiyle klasik faz uzayından farklılık gösterir. Kuantum mekaniksel bir parçacığın konumu ve momentumu aynı anda kesin bir biçimde belirlenemediğinden parçacığın  $r$  konumunda ve  $p$  momentumunda bulunma olasılığı tanımlanamaz. Bu yüzden, kuantum mekaniksel bir parçacık için faz uzayında kesin bir dağılım fonksiyonu da tanımlanamaz. Kuantum mekaniğindeki çalışmalarda, faz uzayındaki dağılım fonksiyonlarına benzeyen ve klasik ile kuantum mekaniksel bakış açılarını birleştiren dağılım fonksiyonları kullanılmaktadır (**Hillery ve diğ., 1984**). Sistem üzerindeki kuantum mekaniksel etkilerin klasik etkilerden ayrıştırılması mümkün değildir. Bu yüzden kuantum etkiler, etkin kuantum potansiyel yaklaşımı yapılarak temsil edilebilir. Etkin potansiyel yaklaşımında klasik dağılım fonksiyonu, parçacıkların üzerine etkidiği düşünülen ve kuantum etkileri temsil eden bir potansiyelin ilave edilmesiyle kuantum mekaniksel dağılım fonksiyonu ile yer değiştirilir (**Sano ve Hiroki, 2002**). Etkin potansiyel yaklaşımı ile elde edilen sonuçlar Planck sabiti sıfıra giderken klasik sonuçları vermelidir.

### **1.1 Çalışmanın Amacı ve Tez Düzeni**

Bu tez çalışmasında, nano ölçekli sistemlerde kuantum ölçek etkilerinin gazların direkt ve çapraz transport katsayılarına olan etkilerinin araştırılması amaçlanmış ve bu çerçevede;

Bölüm 1 ve 2’de nano sistemlerde yapılan çalışmalar hakkında genel bir bilgi verilmiş ve nano sistemlerde belirgin hale gelen kuantum ölçek etkileri başta olmak üzere ölçek etkileri, mikro ve nano ölçekte önem kazanan yoğunluk gradyanı nedeniyle ısı transferi ve sıcaklık gradyanı nedeniyle parçacık akısı gibi çapraz etkiler, gazlarda kuantum ölçek etkilerinin yol açtığı homojen olmayan yoğunluk dağılımı ve kuantum sınır tabakası, kuantum transport ve kuantum potansiyel kavramları ve relaksasyon zamanı yaklaşımı altında Boltzmann transport denklemi ile ilişkili temel kavramlar verilmiştir.

Bölüm 3'te; transport katsayıları üzerinde kuantum dejenerasyonun neden olduğu etkilerle kuantum ölçek etkilerinin birbirinden ayırt edilebilmesi için kuantum ölçek etkisi dikkate alınmadan,

- D boyutlu dikdörtgen bir transport domeninde bulunan Maxwellian, Fermi ve Bose gazları için parçacık, enerji ve ısı akıları türetilmiş,
- Direkt transport katsayıları (iletkenlik, difüzyon ve termal iletkenlik) ve çapraz transport katsayıları (Soret, Peltier ve Dufour) D-boyutlu olarak genelleştirilerek, hem parçacık-parçacık çarpışmalarının hem de parçacık-duvar çarpışmalarının baskın olduğu transport rejimleri ayrı ayrı incelenmiş,
- Fermi ve Bose gazları için elde edilen boyutsuz transport katsayılarının dejenerasyonla değişimleri incelenerek dejenere durumlara ait asimptotik ifadeler hesaplanmıştır.

Bölüm 4'te ise kuantum ölçek etkisi dikkate alınarak;

- Yerel yoğunluk üzerinde kuantum ölçek etkileri etkin kuantum potansiyel yardımıyla temsil edilmiş,
- Direkt transport katsayıları (iletkenlik, difüzyon ve termal iletkenlik) ve çapraz transport katsayıları (Soret, Peltier ve Dufour) D-boyutlu olarak genelleştirilerek, hem parçacık-parçacık çarpışmalarının hem de parçacık-duvar çarpışmalarının baskın olduğu transport rejimleri ayrı ayrı incelenmiş,
- Fermi ve Bose gazları için elde edilen boyutsuz transport katsayıları üzerinde kuantum ölçek etkilerinin dejenerasyonla değişimleri incelenerek dejenere durumlara ait asimptotik ifadeler hesaplanmıştır,

Bölüm 5'de ise tez çalışmasında elde edilen sonuçlar özetlenerek tezde ele alınan problemin nasıl geliştirilebileceğine değinilmiştir.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

### 2.1 Klasik ve Kuantum Ölçek Etkileri

Sistem boyutları küçüldüğünde sistemin davranışları ve bu ölçekte gerçekleşen süreçler makro ölçektekinden önemli ölçüde farklılaşmaktadır. Bu farklılaşmaya klasik ve kuantum kökenli etkiler yol açar ve bu nedenle de ölçeğin küçülmesiyle ortaya çıkan bu etkiler klasik ve kuantum ölçek etkileri olarak sınıflandırılabilirler.

Küçülen sistem boyutları ile birlikte sistemin yüzey/hacim oranı büyümekte ve buna paralel olarak hacimsel kuvvetler yüzey kuvvetleri yanında önemini yitirmektedir. Böylece makro ölçekte ihmal edilebilen yüzey gerilimi mikro ölçekte belirleyici bir kuvvet olarak ortaya çıkmaktadır. Ayrıca küçülen boyutlarla beraber atalet kuvvetleri azalırken viskoz kuvvetler de baskın olmaya başlarlar. Mikro ölçekte öne çıkan bu tür etkiler sistemin davranışlarında da köklü değişimlere yol açarlar. Bu tür klasik ölçek etkilerinden bir diğeri ise parçacıkların ortalama serbest yolunun transporta sebep olan sürücü potansiyellerin en küçük karakteristik uzunluğu yanında ihmal edilemez hale gelmesi ve süreklilik yaklaşımının geçerliliğini yitirmesidir. Bu durumda akışkanlar mekaniğinde makro ölçekte kullandığımız birçok denklem, sınır koşulu ve çözüm tekniği de geçerliliğini yitirmektedir. Örneğin, dış atmosferde yoğunluk çok düşük olduğundan ortalama serbest yol çok yüksektir ve böyle bir ortam için tasarlanan bir aracın atmosferle olan etkileşimi süreklilik yaklaşımı yapılarak modellenemez. Ayrıca, bu tür düşük yoğunluklu ortamlar için tasarlanan cihazlar için ısı transferi ve akış karakteristikleri ancak moleküler akış şartları göz önünde bulundurularak hesaplanabilir.

Mikro ya da nano sistemlerde farklı davranışların ortaya çıkmasına yol açan bir diğer durum da; sistemin boyutları yanında, parçacıkların kuantum mekaniği tarafından öngörülen termal de Broglie dalga boylarının ihmal edilemediği durumlardır. Böyle bir durumda, parçacıkların momentum ve dolayısıyla enerji değerlerine ilişkin süreklilik yaklaşımı da geçerliliğini yitirir ve kesiklilik, sistemin davranışlarında özellikle nano ölçekte gözlenebilen yeni ve ilginç davranışların ortaya çıkmasına yol açar. Bunlardan

biri; sonlu büyüklükte bir sistemin kaçınılmaz olarak kuantum kökenli bir yüzey enerjisine sahip olmasıdır (Sisman, 2004), (Sisman and Muller, 2004). Parçacıkların karşılıklı etkileşmelerinden bağımsız olarak varolabilen kuantum yüzey enerjisi, termodinamik hal fonksiyonlarını geometriye ve ölçüğe bağımlı kılmaktadır. Bunun sonucunda kuantum kökenli ölçek etkileri ortaya çıkmaktadır. Bunlar arasında anizotropik gaz basıncı, ölçek ve geometri farkından kaynaklanan gaz difüzyonu, termoelektrik etkilere benzer termoölçek etkilerinin ortaya çıkması sayılabilir.

Genel olarak makro ve mikro sistemlerin farklılaşmasının, sistem boyutları ile çeşitli karakteristik uzunlukların arasındaki büyüklük sıralamasının değişmesinden kaynaklandığı söylenebilir. Sonuç olarak, mikro sistemlerin davranışları makro sistemlerin davranışlarından önemli ölçüde farklılaşabilmekte ve makro ölçekte gözlenemeyen çok sayıda yeni davranış ve özellik mikro ve nano ölçekte ortaya çıkmaktadır. Buna bağlı olarak mikro/nano teknoloji birçok yeni problemi ve araştırma konusunu da gündeme getirmektedir (Timp, 1999), (Reith, 2003).

## **2.2 Kuantum Ölçek Etkilerinin Bir Sonucu Olarak Gazlarda Kuantum Sınır Tabakası ve Yoğunluk Dağılımı**

Makro sistemlerde termodinamik denge durumunda gazların yoğunluk dağılımı, herhangi bir dış potansiyelin olmaması durumunda homojen olarak ele alınır. Makro sistemlerin aksine, kuantum mekaniksel etkiler göz önüne alındığında, termodinamik denge durumunda bile ideal gazların yoğunluk dağılımının homojen olmadığı görülmüştür (Sisman ve diğ., 2007). Gazı sınırlayan domenin sınırlarına yaklaştıkça yoğunluğun sıfıra gittiği bir sınır tabakası vardır. Bu sınır tabakanın kalınlığı Planck sabitine bağlı olup Planck sabiti sıfıra giderken tabakanın kalınlığı da sıfıra gittiğinden kuantum sınır tabakası olarak adlandırılmıştır. Kuantum sınır tabakası makro sistemlerde ihmal edilebilirken, mikro ve nano sistemlerde ihmal edilemeyecek sonuçlara yol açmaktadır. Kuantum sınır tabakasının varlığı nedeni ile parçacıklar geometrik hacmin tamamını değil, etkin (efektif) bir hacmi doldururlar. Literatürde kuantum sınır tabakası dikkate alınarak boyutları  $L_1$ ,  $L_2$  ve  $L_3$  olan dikdörtgen bir kutu içinde bulunan Maxwellian bir gazın yerel yoğunluk dağılımı boyutsuz olarak,

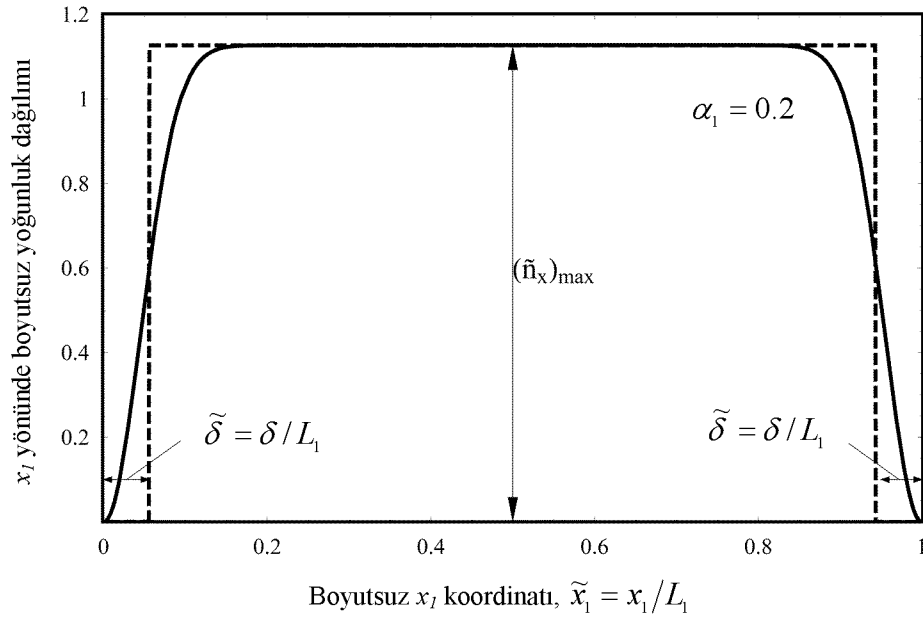
$$\tilde{n} = \frac{n}{n_{cl}} = \frac{\sigma_1(\tilde{x}_1)}{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\sqrt{\pi}}\right)} \frac{\sigma_2(\tilde{x}_2)}{\left(1 - \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}}\right)} \frac{\sigma_3(\tilde{x}_3)}{\left(1 - \frac{\alpha_3}{\sqrt{\pi}}\right)} \quad (2.1)$$

şeklinde verilmiştir (Sisman ve diğ., 2007). Burada;  $\tilde{n}$  boyutsuz yoğunluk,  $n$  yoğunluk,  $N$  toplam parçacık sayısı ve  $V$  domenin hacmi olmak üzere  $n_{cl} = N/V$  klasik yoğunluk,  $L_c$  en olası de Broglie dalga boyunun yarısı,  $\tilde{x}_1 = x_1/L_1$ ,  $\tilde{x}_2 = x_2/L_2$  ve  $\tilde{x}_3 = x_3/L_3$  boyutsuz koordinatlar olmak üzere,

$$\sigma_1(\tilde{x}_1) = \left[ 1 - \exp\left[-\left(\frac{\pi\tilde{x}_1}{\alpha_1}\right)^2\right] \right] \left[ 1 - \exp\left[-\left(\frac{\pi(1-\tilde{x}_1)}{\alpha_1}\right)^2\right] \right] \quad (2.2)$$

$$\alpha_1 = L_c/L_1 \quad (2.3)$$

olarak tanımlanır. Burada,  $\sigma_1(\tilde{x}_1)$  normalize boyutsuz yoğunluk dağılımı,  $\alpha_1$  (2.3) ifadesi ile tanımlanan  $x_1$  yönündeki ters ölçek katsayısı ve  $L_1$  ise  $x_1$  yönünde domenin boyutudur. (2.1) ifadesindeki  $\sigma_2(\tilde{x}_2)$  ve  $\sigma_3(\tilde{x}_2)$  terimleri de ilgili yönlerde (2.2) denklemindeki gibi tanımlanır. (2.1) denklemini kullanılarak  $x_1$  yönündeki yerel yoğunluk dağılımı Şekil 2.1’de sürekli çizgi ile verildiği olduğu gibi elde edilir. Klasik limit durumunda (makro boyutlar),  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \rightarrow 0$  olacağından  $n \rightarrow n_{cl}$  sonucuna ulaşılır.



**Şekil 2.1:** Dikdörtgen bir kutuda ideal gaz için termodinamik denge halinde boyutsuz yerel yoğunluk dağılımı (Sisman ve diğ., 2007).

Şekil 2.1'den de görüldüğü gibi homojen yoğunluk dağılımı sadece makro sistemlerde geçerli olabilecek bir yaklaşımdır. Nano sistemlerde ise gazın yoğunluğu domen sınırlarındaki bir tabaka içerisinde azalmakta ve gaz parçacıkları sınırlardan uzaklaşarak domenin iç bölgelerindeki yoğunluğun klasik yoğunluktan daha yüksek olmasına yol açmaktadır ( $\tilde{n} > 1$ ). Bu dağılım, termodinamik denge durumundaki bir ideal gazda dahi yoğunluğun homojen olmadığını göstermektedir. Domen sınırlarında yoğunluğun azaldığı bu tabakanın kalınlığını analitik olarak ifade edebilmek amacıyla genliği ve domen integrali gerçek yoğunluk dağılımınıninkine eşit olan ve Şekil 2.1'de kesikli çizgilerle temsil edilen homojen bir yoğunluk dağılımı esas alınarak boyutsuz sınır tabakasının kalınlığı

$$\tilde{\delta} = \frac{\alpha_1}{2\sqrt{\pi}} = \frac{L_c}{2\sqrt{\pi}L_1} = \frac{\bar{\lambda}}{4L_1} \Rightarrow \delta = \frac{\bar{\lambda}}{4} \quad (2.4)$$

olarak verilmiştir. Burada,  $\bar{\lambda}$  termal de Broglie dalga boyu,  $\delta$  sınır tabaka kalınlığıdır. Bu durumda gazın gerçek yoğunluk dağılımı yerine daha basit olan ve kesikli çizgilerle temsil edilen homojen bir yoğunluk dağılımına sahip olduğu, ancak domen sınırlarından  $\delta = \bar{\lambda}/4$  kalınlığındaki bir bölgede gaz parçacıklarının bulunmadığı ve bu nedenle de yoğunluğun klasik yoğunluktan daha yüksek olduğunu düşünmek birçok açıdan pratik bir kullanım ve yorum imkanı yaratır. Böylece gazın geometrik hacim yerine ondan daha küçük olan etkin bir hacmi doldurduğunu söylemek ve buradan hareketle de etkin yoğunluğu hesaplamak mümkündür. Bu durumda etkin hacim

$$V_{eff} = V - A\delta \quad (2.5)$$

olarak yazılır. Burada,  $V$  domenin hacmi,  $A$  domenin yüzey alanıdır. Etkin hacmi kullanarak da etkin yoğunluk için

$$\bar{n}_{eff} = \frac{N}{V_{eff}} = \frac{N}{V - A\delta} = \frac{N}{V} \frac{1}{1 - \frac{A\delta}{V}} = \frac{n_{cl}}{1 - \frac{A\delta}{V}} \quad (2.6)$$

ifadesi yazılabilir.

### 2.3 Kuantum Transport ve Kuantum Potansiyel

Kuantum sınır tabakasının varlığı; sınırların kuyu potansiyel şeklinde temsil edilmesine rağmen parçacıkların bu potansiyeli dalga karakterleri nedeniyle tanecik karakterine sahip parçacıktan farklı olarak sınıra temas ettiklerinde değil, termal dalga boyu mesafesinden itibaren görmeye başladıklarını göstermektedir. Böylece parçacıkların dalga karakterleri nedeniyle gördükleri potansiyel, klasik potansiyelden farklı olmaktadır. Bu fark, klasik potansiyele bir kuantum potansiyel terimi eklenerek temsil edilebilmektedir. Böylece, dalga karakterine sahip parçacıkların, tanecik karakterine sahip parçacıklar için verilen bir klasik potansiyele ilave olarak bir kuantum potansiyele de maruz kaldıklarını düşünmek ve bu kuantum potansiyeli göz önüne almak koşuluyla parçacıkları yine tanecik yapılı parçacıklar olarak ele alabilmek mümkün olmaktadır. Bir anlamda kuantum potansiyel, parçacıkların dalga karakteri nedeniyle oluşan farklılıkları kompakt biçimde temsil etmenin ve daha önemlisi bu temsil içersinde parçacıkları, tanecik yapılı klasik parçacık gibi ele almaya devam etmenin bir yolu olmaktadır. Bu temsil, aynı zamanda termodinamik denge durumunda oluşan homojen olmayan yoğunluk dağılımına da bir açıklama getirmeyi kolaylaştırmaktadır. Buna göre yoğunluk dağılımında domen sınırlarına yaklaştıkça artan düşüş kuantum potansiyelin gradyeninden kaynaklanmakta ve termodinamik denge durumunda kuantum potansiyel gradyeni, kimyasal potansiyel gradyeni ile dengelenmekte ve bunun sonucunda da denge durumunda homojen olmayan bir yoğunluk dağılımı oluşmaktadır. Bu durum tıpkı, yer çekim alanında gaz yoğunluğunun homojen olmaması gibidir.

Yarı iletken cihazların küçülmesi, kuantum mekaniksel modellemeyi gerekli kılmıştır (**Bordone ve diğ., 2003**). Bu modellemeler sadece kuantum etkilerin anlaşılabilmesi için değil aynı zamanda yarı klasik yaklaşımların gerçek kuantum çözümler ile karşılaştırılarak geçerlilik sınırlarının anlaşılabilmesi için de önemli olmuştur. Üretilen cihazların boyutları nanometre mertebesine indikçe kuantum mekaniksel değişimler sistemin karakteristikleri üzerinde etkili olmaya başlamaktadır. Klasik Boltzmann denklemi kuantum mekaniksel etkileri dikkate almamaktadır. Kuantum yaklaşım, parçacığın fiziksel durumunu Schrodinger denkleminin çözümünden elde edilen dalga fonksiyonu ile tanımlar. Yapılan simülasyonlarda parçacık saçılmaları için gerçekçi bir saçılma modeli elde edememenin getirdiği zorluklar nedeni ile tamamıyla kuantum bir model kullanmak çeşitli sorunlar yaratmakta ve hesaplar

karmaşıklılaşmaktadır. Bu yüzden tamamı ile kuantum kökenli modeller yerine kuantum potansiyel teriminin ilavesi ile yarı klasik modellerin kullanılması çoğu durumda tercih edilmektedir (**Winstead ve diğ., 2001**). Etkin potansiyel yaklaşımında; kuantum dağılım fonksiyonu, kuantum etkileri temsil eden bir potansiyelin eklenmesi karşılığında klasik dağılım fonksiyonu ile yer değiştirilir. Böylece, sistem üzerinde var olan kuantum etkiler kuantum potansiyel yardımı ile temsil edilerek sistem klasik probleme indirgenir (**Ferry, 2000**).

Wigner transport denklemi potansiyel terimine kuantum düzeltmesi yapılmış bir transport denklemdir ve

$$\frac{\partial f_w}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_w - \nabla_{\mathbf{r}} U \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_w + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1} \hbar^{2s}}{4^s (2s+1)!} (\nabla_{\mathbf{r}} U \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_w)^{2s+1} = \left( \frac{\partial f_w}{\partial t} \right)_{\text{çarp}} \quad (2.7)$$

şeklinde verilir. Burada;  $f_w$  Wigner dağılım fonksiyonu,  $\mathbf{v}$  parçacığın hızı,  $t$  zaman,  $U$  potansiyel,  $\hbar$  indirgenmiş Planck sabiti,  $\mathbf{r}$  konum,  $\mathbf{p}$  ise momentumu göstermektedir. Literatürde (2.7) denklemi Wigner-Boltzmann ya da düzeltilmiş Boltzmann denklemi olarakta adlandırılmaktadır. Wigner transport denkleminin soldan 4. terimi Planck sabiti sıfıra giderken sıfıra gider. Bu durumda Wigner transport denklemi Boltzmann transport denklemine indirgenir ve,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f - \nabla_{\mathbf{r}} U \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{çarp}} \quad (2.8)$$

olarak yazılır. (2.7) eşitliğinde verilen Wigner transport denkleminin soldan 3. ve 4. terimleri,

$$-\nabla_{\mathbf{r}} U \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_w + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1} \hbar^{2s}}{4^s (2s+1)!} (\nabla_{\mathbf{r}} U \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_w)^{2s+1} = -\nabla_{\mathbf{r}} U_q \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_w \quad (2.9)$$

şeklinde bir  $U_q$  kuantum potansiyeli ile ifade edilirse (2.7) denklemi,

$$\frac{\partial f_w}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_w - \nabla_{\mathbf{r}} U_q \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f_w = \left( \frac{\partial f_w}{\partial t} \right)_{\text{çarp}} \quad (2.10)$$

şeklinde yazılabilir. (2.10) denkleminin Boltzmann transport denklemi formunda olduğu ve  $U_q \rightarrow U$  durumunda Boltzmann transport denklemini verdiği görülmektedir. Böylece uygun bir kuantum potansiyel terimi kullanılarak Boltzmann transport denkleminin kuantum etkileri incelemek için kullanılabileceği görülebilir.



İleri teknolojinin ürettiği fiziksel sistemlerin boyutları, elektronların dalga boyu ile karşılaştırılabilir kadar küçük olabilmektedir. Bu sistemlerin, parçacıkların yeri ve momentumunun aynı anda ve sonsuz kesinlikte bilinebileceği varsayımına dayanan klasik mekanik ile incelenmesi mümkün değildir (**Jacobani ve Bordone, 2004**). Bu sorun yukarıda değinildiği gibi sistem üzerinde etkili olan potansiyele ayrıca bir kuantum terimi ilave edilmesi ile aşılar. Böylece, klasik mekaniğe kuantum potansiyel terimi ilave edilerek klasik modeller kullanılmaya devam edilir. Bu terim sebebiyle parçacıklar üzerine ilave bir kuantum kuvvetin etki ettiği düşünülür. Denge durumunda bulunan sistemlere kuantum düzeltmeler getiren çalışmalar uzun yıllardır yapılmaktadır. **Wigner (1932)** tarafından yapılan çalışmada, dağılım fonksiyonunda meydana gelen değişimler, sistem üzerinde etkili olan potansiyelin yüksek dereceden türevlerini içeren Wigner fonksiyonu ile tanımlanmıştır. Klasik teorilere kuantum düzeltmelerin bir potansiyel olarak eklenmesi **Bohm (1951, 1952)** tarafından yapılan çalışmalarla başlamıştır. Bohm'un çalışmasında kuantum potansiyel (2.11) denkleminde verilen tek parçacık Schrödinger denklemi,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_q}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi_q + U_b \Psi_q \quad (2.11)$$

kullanılarak elde edilmiştir. Burada,  $\Psi_q$  dalga fonksiyonu,  $m$  kütle ve  $U_b$  potansiyeldir. Bohm potansiyeli olarak adlandırılan bu potansiyel,

$$U_b = -\frac{\hbar^2}{2m\sqrt{n}} \frac{\partial^2 \sqrt{n}}{\partial x^2} \quad (2.12)$$

şeklinde tanımlanır. Burada;  $\sqrt{n}$  ise Schrödinger denkleminin çözümlerinden elde edilen dalga fonksiyonunun büyüklüğünü göstermektedir,  $\sqrt{n} = |\Psi_q(x,t)|$  (**Bohm, 1952**). Diğer bir kuantum potansiyel, Wigner dağılım fonksiyonunun zaman içerisindeki evrimini tanımlayan Wigner-Boltzmann Transport Denklemi (WBTD) kullanılarak elde edilir. WBTD'de  $f(r,p)$  faz uzayında  $r$  konumunda ve  $p$  momentumundaki parçacıkları temsil eden Wigner dağılım fonksiyonu olmak üzere,

$$f(r,p) = \frac{e^{-\beta\left(\frac{p^2}{2m}+V\right)}}{h} \left[ 1 - \frac{\hbar^2 \beta^2}{8m} \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - \frac{\beta}{3} \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \frac{p^2}{m} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \right] \right] + O(\hbar^2) \right] \quad (2.13)$$

şeklinde verilir (**Ancona ve Iafrate, 1989**). Burada;  $k_b$ , Boltzmann sabiti ve  $T$  sıcaklık olmak üzere  $\beta = 1/k_b T$  olarak tanımlanır. (2.13) denkleminde de görüldüğü gibi  $\hbar \rightarrow 0$  durumunda dağılım fonksiyonu klasik Maxwell Boltzmann dağılımını verir. WBTD ile elde edilen kuantum potansiyel terimi,

$$U_Q = -\frac{\hbar^2}{8m} \frac{\partial^2 (\ln n)}{\partial x^2} \quad (2.14)$$

şeklindedir. Bu potansiyel Wigner potansiyeli veya yoğunluk değişimi düzeltmesi (density gradient correction) olarak adlandırılır (**Iafrate ve diğ., 1981**). Literatürde farklı kuantum potansiyel yaklaşımları vardır. **Ferry ve Zhou (1993)**, **Gardner ve Ringofer (1996)** tarafından yapılan çalışmalarda Bloch denklemi kullanılarak klasik potansiyel terimine değişik fonksiyonel bağımlılıklarda kuantum potansiyel terimleri ilave edilmiştir.

Sonuç olarak kuantum ölçek etkilerinin önemli olduğu koşullarda transport süreçleri kuantum potansiyel kullanılmak koşuluyla Boltzmann transport denklemi yardımıyla incelenebilmektedir.

## 2.4 Boltzmann Transport Denklemi ve Relaksasyon Zamanı Yaklaşımı

Kinetik teori ile yapılan formülasyonlar yerel termodinamik denge varsayımına dayanır. Sisteme ait karakteristik boyut ve kontrol değişkenlerinin karakteristik zaman büyüklükleri ortalama serbest yol ve ortalama serbest zaman ile karşılaştırılabilir olduğunda yerel termodinamik denge varsayımı kullanılamaz. Bu durumda doğrudan transport denkleminin kullanılması gerekir. Bu yüzden mikro ve nano sistemler incelenirken kütle, enerji ve momentum denklemleri yerine Boltzmann Transport Denklemi (BTD) kullanılır.

BTD parçacığın faz uzayındaki korunum denklemi olarak düşünülebilir. Altı boyutlu konum-momentum faz uzayındaki bir kontrol hacmi düşünüldüğünde, bu kontrol hacmindeki parçacıkların  $\delta t$  zamanındaki değişimi Şekil 2.2 yardımı ile,

$$\delta f \delta \mathbf{r} \delta \mathbf{p} = [f(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r})] \mathbf{v} \delta t \delta \mathbf{p} + [f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{p} + \delta \mathbf{p})] \mathbf{F} \delta t \delta \mathbf{r} + \left[ S_c(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{çarp}} \right] \delta t \delta \mathbf{r} \delta \mathbf{p} \quad (2.15)$$

şeklinde yazılabilir. (2.15) denklemi yardımı ile BTD altı boyutlu konum-momentum uzayı için,

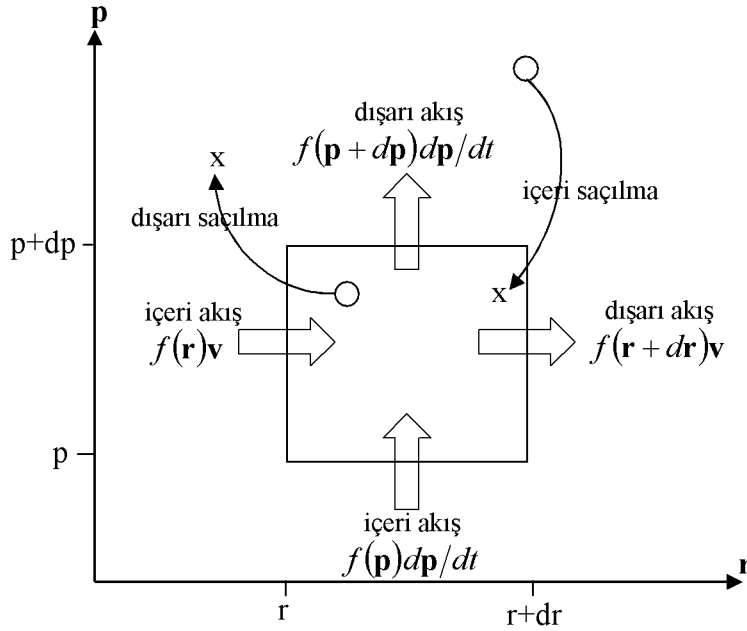
$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{çarp}} + S_c \quad (2.16)$$

olarak elde edilir. Burada;  $f$  parçacık topluluğunun istatistiksel dağılım fonksiyonu olup parçacığın  $t$  anında  $\mathbf{r}$  konumunda  $\mathbf{p}$  momentumuyla bulunma olasılığını temsil etmekte,  $\mathbf{v}$  parçacıkların hızını,  $\mathbf{F}$  parçacıklara etki eden kuvveti,  $S_c$  ise kaynak terimini göstermektedir.  $\nabla_{\mathbf{r}} f$  ve  $\nabla_{\mathbf{p}} f$  terimleri kartezyen koordinatlarda sırasıyla,

$$\nabla_{\mathbf{r}} f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \mathbf{i}_3 \quad (2.17)$$

$$\nabla_{\mathbf{p}} f = \frac{\partial f}{\partial p_1} \mathbf{i}_1 + \frac{\partial f}{\partial p_2} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial f}{\partial p_3} \mathbf{i}_3 \quad (2.18)$$

olarak yazılır. Burada;  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  sırası ile  $x_1, x_2$  ve  $x_3$  yönlerindeki birim vektörlerdir.



**Şekil 2.2:** İki boyutlu konum-momentum uzayında kontrol hacmi.

Denge dışı dağılım fonksiyonu,

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + f_A(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \quad (2.19)$$

şeklinde yazılabilir. Burada;  $f_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  dağılım fonksiyonunun simetrik,  $f_A(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  ise antisimetrik kısımlarını temsil etmektedir. Denge durumunda antisimetrik kısım sıfır olur. BTD, uygun dağılım fonksiyonları ile elektronlar, fononlar, fotonlar ve gaz molekülleri için kullanılabilir.

(2.16) denkleminin sağ tarafında bulunan çarpışma terimi, parçacıkların çarpışmaları sebebi ile dağılım fonksiyonunda meydana gelen değişimleri gösterir ve denge durumundan ayrılan bir sistemin dengeye gelmesi bu terim ile belirlenir. Bu terimin kesin bir şekilde belirlenebilmesi, çarpışma mekanizmasının karmaşık doğası gereği zordur. En çok kullanılan hali ile bu terim,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{çarp}} = \sum_{\mathbf{p}'} [W(\mathbf{p}, \mathbf{p}')f(\mathbf{p}') - W(\mathbf{p}', \mathbf{p})f(\mathbf{p})] \quad (2.20)$$

şeklinde verilir. Burada;  $W(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  terimi  $\mathbf{p}'$  durumunda bulunan parçacıkların  $\mathbf{p}$  durumuna saçılma hızını vermektedir. BTD denklemindeki saçılma hızı terimi,  $W$ , genellikle  $\mathbf{p}$ 'nin nonlinear bir fonksiyonu olduğu için BTD'nin çözümünü zorlaştırmaktadır. Bu sebeple, relaksasyon zamanı yaklaşımı çarpışma terimi çoğunlukla,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{çarp}} = \frac{f_0 - f}{\tau} \quad (2.21)$$

şeklinde basitleştirilebilir (**Bhatnagar ve diğ., 1954**). Burada;  $f_0$  denge durumu dağılım fonksiyonunu,  $\tau$  yere ve momentuma bağlı relaksasyon zamanını gösterir. Bu yaklaşım BTD'nin lineerleştirilmesini sağlar ve eğer sistem denge durumundan ayrılırsa dengenin tekrar oluşması bu terimin dinamiğine bağlıdır. Relaksasyon zamanı yaklaşımı; kontrol değişkenlerinin zamanla değişimlerini temsil eden karakteristik zaman, parçacıklar arası çarpışmalara ait ortalama zamandan büyük olduğunda ve saçılmalar izotropik olduğunda geçerlidir. Böylece, relaksasyon zamanı yaklaşımı altında BTD,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = \frac{f_0 - f}{\tau} \quad (2.22)$$

şeklinde elde edilir. Relaksasyon zamanı yaklaşımı BGK yaklaşımı olarak da isimlendirilir. Transport ortamını oluşturan parçacıkların özelliğine göre MB, FD ve BE istatistikleri kullanılabilir. Akıların ve transport katsayılarının elde edilebilmesi için BTD'nin çözülerek denge dışı dağılım fonksiyonunun elde edilmesi gerekir. Çarpışma teriminin karmaşıklığından dolayı BTD'nin çözümünde çoğunlukla sadece ikili çarpışmalar dikkate alınır. Düşük yoğunluklarda çok parçacık dağılım fonksiyonu tek parçacık dağılım fonksiyonu yardımıyla temsil edilebilir. BTD'den elde edilen dağılım fonksiyonu bilindiğinde tüm transport özellikler hesaplanabilir (Tien ve diğ., 1998), (Chen, 2005), (Lundstorm, 2000).

## 2.5 Direkt ve Birleşik (Coupled Flow) Akış

Özellikle mikro ve nano ölçekte, sistemin boyutları ortalama serbest yol ile karşılaştırılabilir olduğundan, makro sistemlerde ihmal edilen çapraz etkiler ve dolayısıyla birleşik transport önem kazanır. Klasik termodinamikteki ilişkiler tersinmez süreçlerde geçerliliğini yitirir. Bu yüzden klasik termodinamiğin uygulama alanları kısıtlıdır. Tersinmez süreçlerin termodinamiği temel olarak yerel denge hipotezine dayanır. Bu temel hipotez; sistemin klasik termodinamik ilkelerin geçerli olacağı yeteri kadar büyük alt sistemlere bölünmesi fakat aynı zamanda bölünen her bir alt sistemin denge durumuna yakın olabilecek kadar küçük seçilmesini varsayar. Böylece fiziksel alt sistemin termal ve mekanik özellikleri arasındaki anlık ilişkiler denge durumundaki bir sistem ile aynı kabul edilir. Tersinmez süreçlerin termodinamiğinde temel kavram entropinin üretim hızıdır. Sistemde birim hacimdeki entropi üretimi,

$$\frac{1}{V} \frac{dS}{dt} = \sum_i J_i X_i \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.23)$$

şeklinde gösterilebilir. Burada;  $S$  entropi,  $J$  akı ve  $X$  sürücü kuvvettir. İki veya daha fazla termodinamik sürecin meydana geldiği sistemlerde transport süreçleri birbirine karışabilir. Tersinmez süreçlerin termodinamiğinin temel varsayımı, denge durumundan çok az ayrılan bir sistem için akıların, genelleştirilmiş kuvvetlerin lineer kombinasyonu olarak,

$$J_i = \sum_j L_{ij} X_j \quad i, j = 1, 2, \dots \quad (2.24)$$

şeklinde ifade edilir olmasıdır. (2.24) denklemini fenomenolojik denklem olarak adlandırılır. Yapılan deneylerde, özellikle transport süreçlerin çoğunun (2.24) denkleminde olduğu gibi akılar ile kuvvetler arasında lineer bir ilişkiyle tanımlanabileceği görülmüştür (**Vavruç, 2002**). Burada  $L_{ij}$ ; kinetik katsayıları göstermektedir. Kinetik katsayılar matrisi bu lineerleştirilmiş teoride simetriktir. Kinetik katsayılar matrisinin diagonal terimlerini içeren ifadelerin ( $L_{ii}X_i$ ) akıya olan katkıları direkt etkiler (self effects), diagonal dışındaki terimleri içeren ifadelerin ( $L_{ij}X_i, i \neq j$ ) akıya olan katkıları ise çapraz etkiler (cross effects) olarak adlandırılır. Onsager tarafından verilen karşılıklılık (reciprocal) bağıntıları tersinmez süreçlerin termodinamiğinin önemli sonuçlarından biridir (**Onsager, 1931**). Karşılıklılık bağıntıları Casimir tarafından farklı tipteki termodinamik akılar için (zamanla akının işaretinin değiştiği durumlar) genelleştirilmiştir. Onsager-Casimir teorisi kinetik katsayılar arasındaki ilişkiyi,

$$L_{ij} = \varepsilon_i \varepsilon_j L_{ji} \quad (2.25)$$

şeklinde vermektedir (**Casimir, 1945**). Burada; sürücü kuvvetin zaman içinde işaretinin değişip değişmemesine göre  $\varepsilon_i = \pm 1$  değerini alır. Böylece karşılıklılık bağıntıları sayesinde, tersinmez süreçleri belirleyen kinetik katsayıların sayısı azalmış olur (**Sharipov, 1999**).  $i \neq j$  için hesaplanan  $L_{ij}$  kinetik katsayılarına çapraz katsayılar denir. Tablo 2.1’de bazı direkt ve çapraz etkileri oluşturan sürücü kuvvetler ve bu sürücü kuvvetlerin meydana getirdiği akılar özetlenmiştir. Bu tabloda, diagonal terimler haricinde oluşan akılara çapraz etkiler denir. Sürekli ortam yaklaşımı altında, parçacıkların ortalama serbest yolu karakteristik uzunluklardan çok küçük olduğunda çapraz etkiler ihmal edilebilir. Geçiş bölgesi ve serbest moleküler akış koşullarında parçacıkların ortalama serbest yolu ile karakteristik uzunluklar karşılaştırılabilir olduğundan çapraz etkiler ihmal edilemeyecek kadar önem kazanır (**Loyalka ve Hickey, 1991**).

Sonuç olarak; çapraz etkilerin makro sistemlerdeki transport süreçlerine katkıları önemsizken, mikro ve nano ölçekteki transporta katkıları ihmal edilemeyecek kadar önemlidir. Bu katkılar yeni transport mekanizmalarına ve dolayısıyla yeni transport süreçlere yol açarak bu süreçleri kullanan tamamen yeni makinaların gerçekleştirilmesine de olanak sağlamaktadır.

**Tablo 2.1: Direkt ve çapraz etkiler (Horseman ve diğ, 1996).**

AKI (J)	GRADYAN (X)			
	Sıcaklık	Basınç	Kimyasal Potansiyel	Dış Potansiyel
Isı	Termal İletkenlik (Fourier kanunu)	izotermal ısı transferi	Dufour etkisi	Peltier etkisi
Akışkan	Thermo-osmosis	Hidrolik İletkenlik (Darcy Kanunu)	Kimyasal-osmosis	Elektro-osmosis
Parçacık	Soret etkisi	Filtrasyon	Difüzyon (Fick Kanunu)	Elektrophoresis
Elektrik Akımı	Termoelektrik	Akış potansiyeli	Difüzyon potansiyeli	Elektrik İletkenlik (Ohm Kanunu)

1834 yılında Peltier tarafından bulunan ve çapraz etkilerden biri olan termoelektrik etki (Peltier effects), elektriksel potansiyel gradyan sebebi ile ısı akışı meydana gelmesine neden olur. Bu etki kullanılarak teknolojiye termoelektrik soğutucular tasarlanmıştır. Termoelektrik soğutucu, farklı malzemelerden yapılmış bir bağlantının (junction) iki ucuna potansiyel farkı uygulandığında, bağlantının ara yüzeyi ile çevre arasında elektrik akımı ile orantılı bir ısı transferinin oluşmasıyla çalışır. Bu cihaza Peltier cihazı, Peltier diodu, Peltier ısı pompası, katı hal soğutucusu veya termoelektrik soğutucu denir. Elektronik cihazların soğutulmasında ve taşınabilir soğutucularda genellikle termoelektrik etkiden yararlanır. Termoelektrik soğutucular, hareketli parçaları olmadığından vibrasyona duyarlı parçaların ve tasarımında boyutun önemli bir kriter olduğu mikroelektronik cihazların soğutulmasında özellikle kullanılmaktadır.

Benzer şekilde termoelektrik etkilerden bir diğeri olan Seebeck etkisine dayanan termoelektrik jeneratörlerle ısı enerjisi hiçbir hareketli parça olmaksızın doğrudan elektrik enerjisine dönüştürülebilmektedir. Bu tür sistemler teorik olarak yüksek verime sahip, küçük kütle ve hacim özelliklerinde ve arıza olasılığı son derece düşük olduğundan özellikle uzay ve askeri uygulamalarda önemli uygulama alanları bulmuştur (Middleton ve Scanlon, 1953), (Sorrell ve diğ, 2005).

Çapraz etkiler olan termoelektrik, termomagnetik ve galvanometrik etkilere ait karşılıklılık bağıntıları içeren uygulamalar Callen (1948) tarafından ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Sonuç olarak, özellikle nano ölçekte transport olaylarının gerek anlaşılabilmesi ve modellenebilmesi ve de çapraz etkilere dayanan yeni cihazların tasarlanabilmesi için birleşik akış ve çapraz etkilerin de kuantum ölçek etkileri altında incelenmesi önemlidir.

## 2.6 Fermi-Dirac, Bose-Einstein ve Maxwell-Boltzmann İstatistikleri

Maxwellian istatistiğe dayanan ve klasik gazlar için geçerli olan bağıntılar düşük sıcaklıklarda ya da yüksek yoğunluklarda geçerliliğini yitirir. Örneğin; klasik ideal gaz için  $3k_bT/2$  olan ortalama enerji ifadesi düşük sıcaklıklarda ideal gaz için dahi doğruluğunu yitirmektedir. Metallerde çoğu durumda ideal gaz olarak ele alınabilen iletkenlik bandındaki elektronlar, sıfır sıcaklığında bile  $3k_bT/2$ 'den çok daha yüksek enerji içermektedir. Diğer bir örnek Helyum-3 ve Helyum-4 gazları için verilebilir. Düşük sıcaklıktaki Helyum-3 ve Helyum-4 karışımından meydana gelen gazda her iki gazın ortalama kinetik enerjileri birbirlerinden çok farklıdır. Helyum-3'ün ortalama kinetik enerjisi  $3k_bT/2$ 'den daha büyük, Helyum-4'ün ortalama kinetik enerjisi ise daha küçüktür. Bunun sebebi Helyum-3'ün Fermi-Dirac istatistiğine, Helyum-4'ün ise Bose-Einstein istatistiğine uygun davranmasıdır. Helyum-4 2K'in altında süper akışkan gibi davranırken, Helyum-3 ancak 3mK'in altında süper akışkan olarak davranır. Kuantum istatistiğinde Fermi-Dirac ve Bose-Einstein olmak üzere iki farklı istatistik kullanılır. Kuantum istatistiğinin temel varsayımı tüm parçacıkların fermionlar ve bozonlar olarak iki sınıfa ayrılmasıdır. Fermi-Dirac istatistiğine uyan parçacıklara fermion, Bose-Einstein istatistiğine uyan parçacıklara ise bozon denir. Fermionlar ve bozonlar arasındaki diğer bir fark bozonların tam ( $s = 0, \pm\hbar, \pm 2\hbar, \dots$ ), fermionların ise yarım spinlere ( $s = \pm\hbar/2, \pm 3\hbar/2, \dots$ ) sahip olmasıdır. Elektron, proton ve nötronlar fermion, pi-mezonları ve fotonlar ise bozonlara örnek olarak verilebilir.

Fermi-Dirac istatistiğinde Pauli dışarlama ilkesi sebebiyle aynı kuantum durumunda iki fermion bulunamaz. Bozonlar ise Pauli dışarlama ilkesine uymazlar ve aynı kuantum durumunda birden fazla bozon yer alabilir. Bose-Einstein istatistiğinde, aynı enerji seviyesinde birden fazla bozon bulunuyor olması, özellikle çok düşük sıcaklıklarda Fermi-Dirac istatistiğinden tamamen farklı sonuçların doğmasına sebep olur ve bu durum Bose-Einstein yoğunlaşması olarak adlandırılan bir etkinin ortaya çıkmasını sağlar. Klasik istatistikte parçacıklar ayırt edilebilirlerken, kuantum



istatistiğinde parçacıklar ayırt edilemez olarak kabul edilirler. Bozonlar simetrik, fermionlar ise antisimetrik dalga fonksiyonuna sahiptirler **(Bellac ve diğ, 2004)**. Toplam parçacık ve enerjinin korunumu altında entropinin maksimizasyonu, parçacıkların mikro durumlar üzerindeki dağılım fonksiyonlarını verir. Fermion ve bozon için  $\varepsilon$  enerji seviyesinde bulunan parçacıkların sayısını veren dağılım fonksiyonu,

$$\begin{pmatrix} FD \\ BE \end{pmatrix} f = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{k_b T}} \pm 1} \quad (2.26)$$

şeklinde yazılır. Burada,  $\varepsilon$  parçacığın enerjisini,  $\mu$  yerel kimyasal potansiyeli göstermektedir. Klasik limit durumunda,  $\mu / k_b T \ll -1$ , hem Fermi-Dirac hem de Bose-Einstein istatistikleri Maxwell-Boltzmann istatistiğine yakınsar. Maxwell-Boltzmann istatistiği yüksek sıcaklık ve/veya düşük yoğunluk durumlarında oldukça iyi bir yaklaşımdır. Maxwell-Boltzmann istatistiğinde parçacıkların aynı mikro duruma sahip bulunma olasılığı çok düşüktür. Fermi-Dirac istatistiğinde  $\Lambda = \mu / k_b T$  değeri  $-\infty < \Lambda < \infty$  arasında değişirken Bose-Einstein istatistiğinde  $-\infty < \Lambda < 0$  arasında değişir.

### 3. GAZLARDA TRANSPORT VE KUANTUM DEJENERASYONU

Bu bölümde; parçacık, enerji ve ısı akısı ile bu akılara ilişkin transport katsayıları relaksasyon zamanı yaklaşımı altında D boyutlu Maxwellian, Fermi ve Bose tipi asal gazlar için genelleştirilmiş olarak türetilmiştir. Maxwellian, Fermi ve Bose gazları için transport katsayıları hem parçacık-parçacık çarpışmalarının hem de parçacık-duvar çarpışmalarının baskın olduğu transport rejimleri için analitik olarak elde edilmiştir. Gerek direkt akılara ait iletim, difüzyon ve ısı iletim katsayıları gerekse çapraz akılara ait Soret, Peltier ve Dufour katsayıları için kuantum dejenerasyonunun zayıf ve kuvvetli olduğu asimptotik koşullarda analitik ifadeler verilmiştir. Analitik sonuçlar, transport katsayılarının kontrol değişkenlerine fonksiyonel bağımlılıklarını açık olarak ifade etmeleri, böylece fiziksel yorumlamaya imkan sağlamaları ve sadece belirli sayısal değerlere ait sonuçlar olmayıp genel sonuçlar olmaları nedeniyle önemlidir. Çalışmada asal gazlar ele alındığından uygun bir yaklaşım olarak parçacıklar arası etkileşmelerin ihmal edildiği ideal gaz yaklaşımı kullanılmış ve böylece analitik sonuçların elde edilebilmesi sağlanmıştır. Ele alınan transport katsayıları üzerinde kuantum dejenerasyonun etkileri 1, 2 ve 3 boyutlu sistemlerde detaylı olarak incelenmiştir. Böylece kuantum ölçek etkilerinin kuantum dejenerasyonla olan değişimlerinin incelenebilmesi için bir temel oluşturulmuştur.

#### 3.1 Akılar ve Relaksasyon Zamanı Yaklaşımı Altında Transport Katsayıları

Parçacıkların sahip olduğu skaler ya da daha genel olarak  $t$  yönündeki vektörel herhangi bir  $A$  özelliğinin  $r$  yönündeki akısı,

$$J_{rt}^A = \sum_{v_1, v_2, v_3 = -\infty}^{+\infty} \Pi_t^A v_r f \quad (3.1)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada;  $v_r$  parçacıkların  $r$  yönündeki hızını ve  $\Pi_t^A$  parçacığın en genelde  $t$  yönündeki vektörel bir özelliğini göstermekte olup, parçacık, momentum ve enerji akıları için sırası ile  $1$ ,  $mv_r$ ,  $m|\mathbf{v}|^2/2$  değerlerini almaktadır.

(3.1) ifadesindeki toplamlar parçacıkların hız bileşenlerinin olası tüm değerleri üzerinden yapılmaktadır.  $\Pi_t^A$  ifadesi,

$$\Pi_t^A = C_A (v_t)^a |v|^b \quad (3.2)$$

olarak genel bir formda yazılabilir. Böylece,  $(C_A, a, b)$  üç terimli parçacık, momentum ve enerji akıları için sırası ile  $(1,0,0)$ ,  $(m,1,0)$  ve  $(m/2,0,2)$  değerlerini alır.

Akı ifadelerini denge durumundaki akı ile denge dışı durumdaki akıların toplamı olarak yazmak çoğu durumda yorumlama açısından yararlı olmaktadır. Bu çerçevede denge dışı dağılım fonksiyonu  $f$ , dengedeki dağılım fonksiyonu  $f_0$  ile dengeden olan sapmayı ifade eden  $f - f_0$  teriminin toplamı şeklinde  $f = f_0 + (f - f_0)$  olarak ele alınır,  $A$  büyüklüğüne ait akı,

$$J_{rt}^A = \sum_{-\infty}^{\infty} \Pi_t^A v_r f = {}_e J_{rt}^A + {}_{ne} J_{rt}^A \quad (3.3)$$

olarak yazılabilir. Tez çalışması boyunca toplamların yapıldığı değişkenler toplam sembollerinin altında kısa gösterim amacıyla ilk geçtikleri yer dışında tekrarlanmamış, sadece toplam aralığı belirtilmiştir. (3.3) ifadesinde yer alan  $A$  özelliğine ait denge ve denge dışı akılar sırasıyla,

$${}_e J_{rt}^A = \sum_{-\infty}^{\infty} \Pi_t^A v_r f_0 \quad (3.4)$$

$${}_{ne} J_{rt}^A = \sum_{-\infty}^{\infty} \Pi_t^A v_r (f - f_0) \quad (3.5)$$

şeklinde ifade edilir. Denge dağılım fonksiyonu parçacık hızının çift fonksiyonu olduğundan sadece  $v_t$ 'nin tek kuvvetiyle ilişkili olan büyüklüklerde ve ancak  $t=r$  durumu için denge akısı sıfırdan farklıdır. Örneğin transport yönünde momentum transferi için denge akısı, sıfırdan farklı olup bilindiği gibi stres tensörünün normal bileşenlerine eşittir. Bu durum gazlarda basınç ifadesine karşılık gelmektedir. Bunun

tersi durumlarda ise denge akısı her zaman sıfır değerini almaktadır,  
 $(r \neq t, a = 1,3,5...) \vee (r = t, a = 0,2,4...) \Rightarrow {}_e J_r^A = 0$ .

Dağılım fonksiyonunun denge durumundan uzaklaşmasının nedeni dağılım fonksiyonunun kontrol değişkenlerinin konum ve zaman bağımlılığıdır. Kontrol değişkenlerinin konumla yavaş değişmesi durumunda akılarla kontrol değişkenlerinin gradyanları arasında lineer ilişkiler söz konusudur. Relaksasyon zamanı yaklaşımı altında denge dışı dağılım fonksiyonu denge dağılım fonksiyonu cinsinden,

$$f = f_0 - \tau \frac{df_0}{dt} \quad (3.6)$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $\tau$  relaksasyon zamanı olarak adlandırılan ve belirli bir hızda hareket eden parçacığın bir çarpışma ile diğer çarpışma arasında geçen ortalama serbest zamanını temsil eden büyüklüktür. Denge dağılım fonksiyonunun  $f_0(\mu, \varepsilon, T) = f_0[\mu(t, x), \varepsilon(t, x), T(t, x)]$  zamana göre türevi kontrol değişkenleri gözönüne alınarak

$$\frac{df_0}{dt} = \frac{\partial f_0}{\partial t} + v_r \left[ \frac{\partial f_0}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial x_r} + \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_r} + \frac{\partial f_0}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x_r} \right] \quad (3.7)$$

olarak yazılır. Burada  $\mu$  parçacığın kimyasal potansiyeli,  $\varepsilon$  parçacığın enerjisi,  $T$  sıcaklık ve  $x_r$  ise yer vektörünün r yönündeki bileşenidir. Bu tez çalışması boyunca tekrarlayan indisler üzerinden toplam kuralı kullanılmıştır. Enerji korunumu gereği  $\varphi$  herhangi bir dış potansiyel olmak üzere,

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_r} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} \quad (3.8)$$

yazılabilir. Kimyasal potansiyel, enerji ve sıcaklık gradyanları sebebiyle oluşan sürücü kuvvetler,

$$F_r^\mu = - \frac{\partial \mu}{\partial x_r} \quad (3.9)$$

$$F_r^\varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_r} \quad (3.10)$$

$$F_r^T = -k_b \frac{\partial T}{\partial x_r} \quad (3.11)$$

şeklinde tanımlanarak (3.6) ifadesi zamandan bağımsız olan duraylı durumda,

$$f = f_0 + \tau v_r \left( \frac{\partial f_0}{\partial \mu} F_r^\mu - \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} F_r^\varphi + \frac{1}{k_b} \frac{\partial f_0}{\partial T} F_r^T \right) \quad (3.12)$$

olarak yazılır. Böylece, duraylı durumda denge dışı akı, (3.12) eşitliği (3.5)'de kullanılarak

$${}_{ne} J_{rt}^A = \sum_{-\infty}^{\infty} \Pi_t^A v_r^2 \left( \frac{\partial f_0}{\partial \mu} F_r^\mu - \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} F_r^\varphi + \frac{1}{k_b} \frac{\partial f_0}{\partial T} F_r^T \right) \quad (3.13)$$

eşitliğiyle yazılır.

Bu tez çalışması çerçevesinde parçacık ve ısı akıları ele alınmış olup bu büyüklüklerin direkt ve çapraz akılarına ait transport katsayıları incelenmiştir. Parçacık ve enerji akısı sırasıyla,

$$J_r^N = \sum_{-\infty}^{\infty} v_r f = m v_r^f \quad (3.14)$$

$$J_r^U = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m v_s v_s v_r f \quad (3.15)$$

olarak tanımlanır. Burada;  $n$  yerel parçacık yoğunluğu,  $v_r^f$  akış hızının  $r$  bileşenidir. İletimle olan ısı akısı ise

$$J_r^Q = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m c_s c_s c_r f = J_r^U - \left( h + \frac{1}{2} m v_s^f v_s^f \right) J_r^N \quad (3.16)$$

şeklinde tanımlanır. Burada;  $c$  parçacıkların akışa göre bağıl hızı (peculiar velocity) olup  $c_s = v_s - v_s^f$  şeklinde tanımlanır,  $h$  parçacık başına entalpi değerini temsil eder. Akış hızının ses hızından yeterince düşük olması durumunda iletimle olan ısı akısı

$$J_r^Q \cong J_r^U - h J_r^N \quad (3.17)$$

olarak basitleşir. Akıllarla sürücü kuvvetler arasında relaksasyon zamanı yaklaşımının sağladığı lineer ilişkiler kullanılarak, parçacık ve ısı akıları ile ilişkili direkt ve çapraz akılara ait transport katsayıları Tablo 3.1’de verildiği gibi tanımlanır. Burada parçacık ve ısı akıları için transport edilen büyüklüğün skaler ve ilgili akının da vektörel bir büyüklük olduğu ve ayrıca  ${}_e J_r^N = {}_e J_r^Q = 0$  olduğundan  $J_r^N = {}_{ne} J_r^N$  ve  $J_r^Q = {}_{ne} J_r^Q$  olduğu dikkate alınmalıdır.

**Tablo 3.1:** Parçacık ve ısı akısına ilişkin transport katsayıları ve Wiedemann-Franz oranının tanımı.

İletim katsayısı	$D^\varphi = D^\mu = \frac{J_r^N}{F_r^\varphi} = \frac{J_r^N}{F_r^\mu}$
Difüzyon kaysayısı	$D^n = -\frac{J_r^N}{(\partial n / \partial x_r)_T} = \frac{J_r^N}{(\partial n / \partial \mu)_T F_r^\mu} = \left( \frac{\partial \mu}{\partial n} \right)_T D^\mu$
Isı iletim katsayısı	$\kappa^T = k_b \left( \frac{J_r^Q}{F_r^T} \right)_{J_r^N=0}$
Soret katsayısı	$D^T = k_b \frac{J_r^N}{F_r^T}$
Peltier katsayısı	$\kappa^\varphi = \kappa^\mu = \frac{J_r^Q}{F_r^\varphi} = \frac{J_r^Q}{F_r^\mu}$
Dufour katsayısı	$\kappa^n = -\frac{J_r^Q}{(\partial n / \partial x_r)_T} = \frac{J_r^Q}{(\partial n / \partial \mu)_T F_r^\mu} = \left( \frac{\partial \mu}{\partial n} \right)_T \kappa^\mu$
Wiedemann-Franz (WF)	$WF = \frac{\kappa^T}{D^\varphi}$

### 3.1.1 Çarpışma Frekansı ve Relaksasyon Zamanı

$\mathbf{v}$  hızı ile hareket eden bir parçacığın  $\mathbf{v}^t$  hızı ile hareket eden hedef parçacıklarla çarpışma frekansı,

$$\nu_{pp}(\mathbf{v}) = \sum_{v_1^t, v_2^t, v_3^t = -\infty}^{\infty} f(\mathbf{v}^t) \sigma |\mathbf{v} - \mathbf{v}^t| \quad (3.18)$$

olarak ifade edilir. Burada;  $\sigma$  parçacıkların çarpışma tesir kesiti olup genelde parçacıklar arasındaki bağıl hızın üstel bir fonksiyonudur ve aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$\sigma = \sigma_0 |\mathbf{v} - \mathbf{v}^t|^s \quad (3.19)$$

Burada;  $\sigma_0$  birimi  $s$ 'e bağlı tesir kesiti sabiti,  $s$  tesir kesitinin hız bağımlılığını veren çarpışma parametresi olup katı küre (hard sphere) yaklaşımına uygun etkileşmeler için sıfır değerini alır. (3.19) eşitliği (3.18) ifadesinde kullanılarak

$$\nu_{pp}(\mathbf{v}) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{v}^t) \sigma_0 |\mathbf{v} - \mathbf{v}^t|^{s+1} \quad (3.20)$$

yazılır. (3.20) ifadesi parçacıklar arası çarpışma frekansını tam olarak ifade etmekle beraber bu ifadeden hareketle elde edilen relaksasyon zamanının kullanılması durumunda transport katsayıları için analitik sonuçların elde edilmesi mümkün olmamaktadır. Öte yandan çarpışma frekansının hesaplanmasında bağıl hız yerine mutlak hızın kullanılması transport katsayılarının sıcaklık ve yoğunluk gibi kontrol parametrelerine olan fonksiyonel bağımlılığını değiştirmemekte ve her iki methodla hesaplanan transport katsayıları arasındaki oran bire yakın olmaktadır. Diğer yandan parçacıklar arası çarpışmalara ait tesir kesitlerinin deneysel çalışmalarla belirleniyor olması bire yakın olan bu düzeltmenin tesir kesitlerinin içerisinde ele alınabilmesine olanak sağlamaktadır. Çünkü, tesir kesitlerinin belirlenebilmesi ancak hesap yoluyla bulunan transport katsayılarının deneysel ölçüm sonuçlarına ayarlanması (fitting) ile mümkündür. Dolayısıyla bağıl hız modeli yerine analitik sonuçların elde edilebilmesine olanak sağlayan mutlak hız modelini kullanmak ve bağıl hız modelinden gelen ve bire yakın olan düzeltme faktörünü tesir kesitlerinin belirlenmesi esnasında tesir kesitlerine gelen bir düzeltme gibi ele almak olanaklıdır. Nitekim, literatürde de ancak mutlak hız yaklaşımıyla analitik sonuçlara ulaşılabilmektedir. Literatürde daha da kaba yaklaşımlar yapılarak, parçacık hızına bağımlı olduğu için transport katsayılarını temsil eden integrallerin içerisinde işleme girmesi gereken relaksasyon zamanı terimi, dağılım fonksiyonu üzerinden ortalaması alınarak bir sabite dönüştürülmekte ve integralin dışına çıkarılmaktadır (**Huang, 1987**).

Bu çalışmada, transport katsayılarını analitik olarak elde edebilmek ve özellikle kuantum ölçek etkilerinin etki mekanizmalarını ve bu etkilerin sıcaklık ve yoğunluk gibi kontrol parametrelerine olan fonksiyonel bağımlılıklarını anlayabilmek için parçacıklar arası çarpışma frekansı mutlak hız esas alınarak ifade edilmiştir. Böylece (3.20) denklemi,

$$\nu_{pp}(\mathbf{v}) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{v}') \sigma_0 |\mathbf{v}|^{s+1} = n \sigma_0 |\mathbf{v}|^{s+1} = \frac{|\mathbf{v}|}{l_0} \quad (3.21)$$

şeklinde ifade edilir. Burada;  $l_0$  parçacık-parçacık çarpışmaları için ortalama serbest yol olup  $l_0 = 1/(n\sigma_0|\mathbf{v}|^s)$  şeklinde tanımlanır. Parçacıklar kendi aralarında çarpıştıkları gibi (particle-particle collisions) ortamı sınırlayan duvarlarla da çarpışırlar (particle-boundary collisions). Parçacıkların duvarlarla olan çarpışma frekansı ise

$$\nu_{pb}(\mathbf{v}) = |\mathbf{v}| \left( \frac{|\mathbf{v}_1|}{|\mathbf{v}|} \frac{1}{L_1} + \frac{|\mathbf{v}_2|}{|\mathbf{v}|} \frac{1}{L_2} + \frac{|\mathbf{v}_3|}{|\mathbf{v}|} \frac{1}{L_3} \right) \quad (3.22)$$

şeklinde yazılabilir. Burada;  $L_1, L_2$  ve  $L_3$  transport domeninin  $x_1, x_2$  ve  $x_3$  yönlerindeki uzunlukları olup ilgili yönlerdeki ortalama geometrik serbest yol olarak düşünülebilir. Böylece  $v$  hızıyla hareket eden bir parçacığın toplam çarpışma frekansı aşağıdaki gibi yazılır,

$$\nu(\mathbf{v}) = \nu_{pp}(\mathbf{v}) + \nu_{pb}(\mathbf{v}). \quad (3.23)$$

Ortalama serbest zaman ise çarpışma frekansının tersi olduğundan,

$$\tau(\mathbf{v}) = \frac{1}{\nu(\mathbf{v})} = \frac{1}{\nu_{pp}(\mathbf{v}) + \nu_{pb}(\mathbf{v})} = \frac{1}{|\mathbf{v}| \left( \frac{1}{l_0} + \frac{1}{L_g} \right)} = \frac{l}{|\mathbf{v}|} \quad (3.24)$$

olarak ifade edilir. Burada;  $l$  ortalama serbest yol olup parçacık-parçacık ve parçacık-duvar etkileşmelerine ait serbest yollar cinsinden,

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{l_0} + \frac{1}{L_g} \quad (3.25)$$



şeklinde elde edilir. (3.24) ifadesi

$$\tau = \frac{1}{\frac{|\mathbf{v}|}{l_0} + \frac{|\mathbf{v}|}{L_g}} = \frac{1}{\frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_g}} \quad (3.26)$$

şeklinde de yazılabilir. Burada;  $\tau_0$  parçacıklar arası çarpışmaya ait ortalama serbest zaman,  $\tau_g$  parçacıkların domenin duvarları ile çarpışmalarına ait ortalama serbest zaman olarak adlandırılır.  $L_g$  ve  $l_0$  karakteristik uzunluklar olup bunlar arasındaki büyüklük sıralamasına bağlı olarak ortalama serbest zamanı aşağıdaki gibi ele almak mümkündür

$$\tau = \begin{cases} \frac{L_g}{|\mathbf{v}|} & L_g \ll l_0 \\ \frac{l_0}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{n\sigma_0|\mathbf{v}|^{s+1}} & L_g \gg l_0 \end{cases} \quad (3.27)$$

Burada;  $L_g \ll l_0$  durumu parçacık duvar etkileşmelerinin,  $L_g \gg l_0$  durumu ise parçacıklar arası etkileşmelerin baskın olduğu transport koşullarını göstermektedir. Relaksasyon zamanı yaklaşımının yapılabilmesi için yerel termodinamik denge varsayımının geçerli olması gerektiğinden gradyanların zayıf olması gerekmektedir. Herhangi bir sürücü  $Q$  potansiyelinin birim uzunluktaki bağıl değişimini gösteren karakteristik uzunluk,  $L_*$ ,

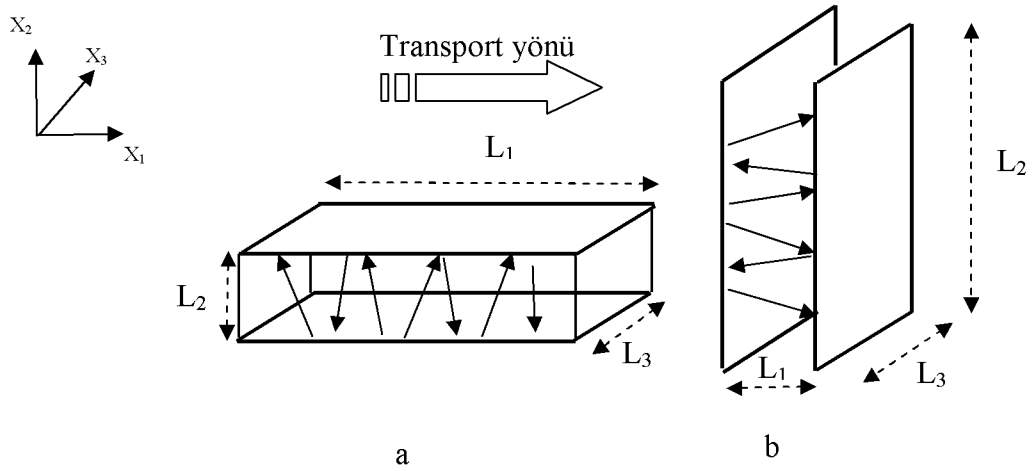
$$\frac{1}{L_*} = \frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.28)$$

şeklinde tanımlanır. Birden fazla sürücü potansiyel olması durumunda, her bir sürücü potansiyele ait farklı karakteristik uzunluklar söz konusudur. Böyle bir durumda karakteristik uzunluk,  $L_*$ , her bir sürücü potansiyele ait karakteristik uzunlukların en küçüğüne eşit olur. Ortalama serbest yol ile sürücü potansiyellere ait karakteristik uzunluk karşılaştırılarak transport rejimi hakkında bilgi edinilebilir. Bu karşılaştırma için aşağıda tanımlanan Knudsen sayısı kullanılır,

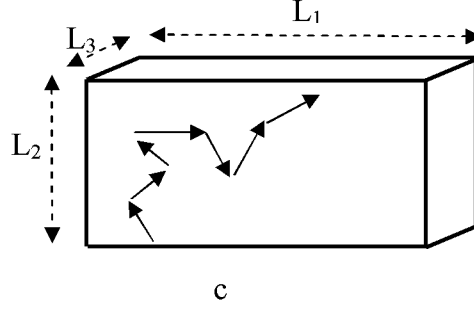
$$Kn = \frac{l}{L_*}. \quad (3.29)$$

### 3.1.2 Karakteristik Uzunluklar ve Transport Rejimleri

Transport mekanizması karakteristik uzunlukların birbirleri ile olan ilişkileri ile belirlenir. Tez çerçevesinde incelenecek transport rejimleri Şekil 3.1 ve Şekil 3.2’de verilmiş olup tez boyunca transport yönü,  $x_1$  yönü olarak seçilmiştir. Şekil 3.1’de verilen transportta parçacık duvar çarpışmaları, Şekil 3.2’de verilen transportta ise parçacık-parçacık çarpışmalarının baskın olduğu görülmektedir. Şekil 3.1a’da transporta dik yöndeki duvarlarla olan çarpışmalar baskın iken Şekil 3.1b’de transport yönündeki duvarlarla olan çarpışmalar baskındır. Şekil 3.1a’da parçacıklar transport yönü boyunca duvarlarla çok sayıda çarpışma yapmakta ve bu çarpışmaların difüzyif saçılma ile sonuçlanması durumunda her çarpışmada duvarlarla yerel dengeye gelmektedir. Böylece  $L_1 \gg L_2$  yada  $L_1 \gg L_3$  olduğu sürece akışkan içerisinde yerel kontrol değişkenlerinin sürekliliğinden söz edilebilir. Bu tür bir transport geometrisi, özellikle karbon nano tüplerde (CNT) tutuklanmış gazlarda transport için oldukça uygun bir model geometri oluşturmaktadır. Şekil 3.1b’de ise parçacıklar difüzyif saçılma ile transport yönünde bir duvardan ayrılarak diğer duvara varmakta ve transportu tamamlamaktadır. Bu çerçevede transport domeninde yerel dengede bulunan bir akışkan yerine her iki duvarla dengede bulunan iki farklı akışkandan söz edilebilir. Ancak kontrol değişkenleri farklı olan bu iki akışkanın, değişkenlerin arasındaki bağıl farkın çok küçük olması durumunda hidrodinamik transport modelinde kullanılan zayıf gradyan yaklaşımı yine kullanılabilir. Bu tür transport geometrisi ise, günümüz teknolojisinde nano ölçekte üretilen yapılarda sıkça karşılaşılan yaygın bir geometriyi oluşturmaktadır.



Şekil 3.1: Parçacık-duvar çarpışmalarının baskın olduğu farklı transport süreçleri.



**Şekil 3.2:** Parçacık-parçacık çarpışmalarının baskın olduğu transport rejimi.

Şekil 3.1a'da verilen transport, karakteristik uzunluklar cinsinden  $l_0 \gg L_g$  ( $l = L_g$ ),  $Kn \ll 1$  ( $L_g \ll L_*$ ) ile ifade edilir. Burada; geometrik serbest yol parçacık-parçacık çarpışmalarına ait ortalama serbest yol  $l_0$ 'dan çok küçük olduğundan parçacıklar çoğunlukla yüzeyler ile çarpışmakta ve difüzyif saçılma durumunda dağılım fonksiyonunun kontrol değişkenleri yüzeyin değerlerine sahip olacak şekilde yansımaktadır. Böylece, parçacıklar yüzeye çarptığında yüzeyle termodinamik dengeye gelmekte ve gaz ile yüzeyler sürekli yerel denge içerisinde bulunmaktadır. Parçacıklar yüzeylerle birçok çarpışma yaparak transport yönünde ilerleseler de  $Kn \ll 1$ ,  $L_g = L_2$  olduğundan ve parçacıklar  $L_2$  kadar mesafede yüzeylerle yerel dengede olduğundan dağılım fonksiyonunun kontrol değişkenleri yerel olarak sabit kabul edilebilmektedir.

Şekil 3.1b'deki transport,  $l_0 \gg L_g$  ( $l = L_g$ ),  $Kn \ll 1$  ( $L_g \ll L_*$ ), olmak üzere bir önceki duruma benzer olarak ifade edilir. Bu durumda parçacıklar transport yönünde yüzeyler ile çarpışmakta ve yine difüzyif saçılma durumunda yüzeyin değerleri ile saçılmaktadır. Bunun sonucu olarak parçacıklar yüzeylerle termodinamik dengeye gelerek yüzeyden ayrılmaktadır. Parçacıklar bir yüzeyden diğerine giderken hiçbir çarpışma yapmadığından moleküler transport koşulları oluşmakta fakat  $Kn \ll 1$  olduğundan kontrol değişkenlerinin yüksek ve düşük değerleri arasındaki farkın küçük olması sebebi ile moleküler transport sonuçları hidrodinamik transport sonuçlarına yakınsamaktadır.

Şekil 3.2'de verilen transport,  $l_0 \ll L_g$  ( $l = l_0$ ),  $Kn \ll 1$  ( $l_0 \ll L_*$ ), ile ifade edilir. Bu durumda parçacıkların kendi aralarında yaptıkları çarpışmalar yüzeyler ile yaptıkları çarpışmalardan çok daha fazladır ve  $Kn = l_0/L_* \ll 1$  olduğundan dağılım

fonksiyonundaki kontrol değişkenlerindeki değişim ortalama serbest yol mesafesinde çok küçük olduğundan yerel denge koşulu sağlanmaktadır. Bu transport rejimi hidrodinamik transport rejimidir.

Knudsen sayısına ilişkin koşulun tam tersi durumunda,  $Kn \gg 1$ , Şekil 3.1a'da parçacıklar bir duvardan diğerine çarpışma yapmadan gittiğinden, parçacıkların çarpışmalar arasında aldıkları mesafede kontrol değişkenleri şiddetli bir şekilde değişecek ve yerel denge varsayımı geçerliliğini yitirecektir. Benzer şekilde Şekil 3.2'deki transport  $Kn \gg 1$  durumu için incelendiğinde, parçacıkların kendi aralarında yaptıkları çarpışmalarda aldıkları yolda kontrol değişkenlerinin şiddetli değişimi yerel denge varsayımının geçerliliğini yitirmesine yol açacak ve hidrodinamik veya serbest moleküler transport modelleri kullanılamayacaktır. Sadece Şekil 3.1b'deki durumda  $Kn \gg 1$  için çözüm serbest moleküler transport modeli ile elde edilebilir. Bu tez çalışmasında  $Kn \ll 1$  koşulunda gerçekleşen transport süreçleri incelenmiştir.

### 3.1.3 Maxwellian Gazlarda Denge Dışı Dağılım Fonksiyonu

Klasik gazlar için denge dağılım fonksiyonu,

$$f_0 = e^{\mu/k_b T} e^{-\varepsilon/k_b T} \frac{1}{V} \quad (3.30)$$

olarak tanımlanır. Burada;  $k_b$  Boltzmann sabiti,  $V$  transport domeninin hacmini göstermektedir. (3.30) denkleminde  $w = (\varepsilon - \mu)/(k_b T)$  değişken dönüşümü yapılarak denge dağılım fonksiyonu (3.6) ifadesinde yerleştirilerek denge dağılım fonksiyonunun zamana bağlı değişimi,

$$\frac{df_0}{dt} = \frac{\partial f_0}{\partial t} + v_r (-f_0) \left[ \frac{\partial w}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial x_r} + \frac{\partial w}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_r} + \frac{\partial w}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x_r} \right] \quad (3.31)$$

eşitliği ile elde edilir. Bu ifadede yer alan  $\partial w/\partial \mu$ ,  $\partial w/\partial \varepsilon$  ve  $\partial w/\partial T$  türevleri sırası ile  $-1/k_b T$ ,  $1/k_b T$  ve  $\mu - \varepsilon/k_b T^2$  olarak hesaplanıp (3.31) denkleminde yerleştirilerek denge dağılım fonksiyonunun zamana göre değişimi,

$$\frac{df_0}{dt} = \frac{\partial f_0}{\partial t} - v_r f_0 \left[ -\frac{1}{k_b T} \frac{\partial \mu}{\partial x_r} + \frac{1}{k_b T} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_r} - \frac{\varepsilon - \mu}{k_b T^2} \frac{\partial T}{\partial x_r} \right] \quad (3.32)$$

şeklinde ifade edilir. Bu ifade düzenlendiğinde,

$$\frac{df_0}{dt} = \frac{\partial f_0}{\partial t} - v_r f_0 \frac{1}{k_b T} \left[ -\frac{\partial \mu}{\partial x_r} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_r} - k_b w \frac{\partial T}{\partial x_r} \right] \quad (3.33)$$

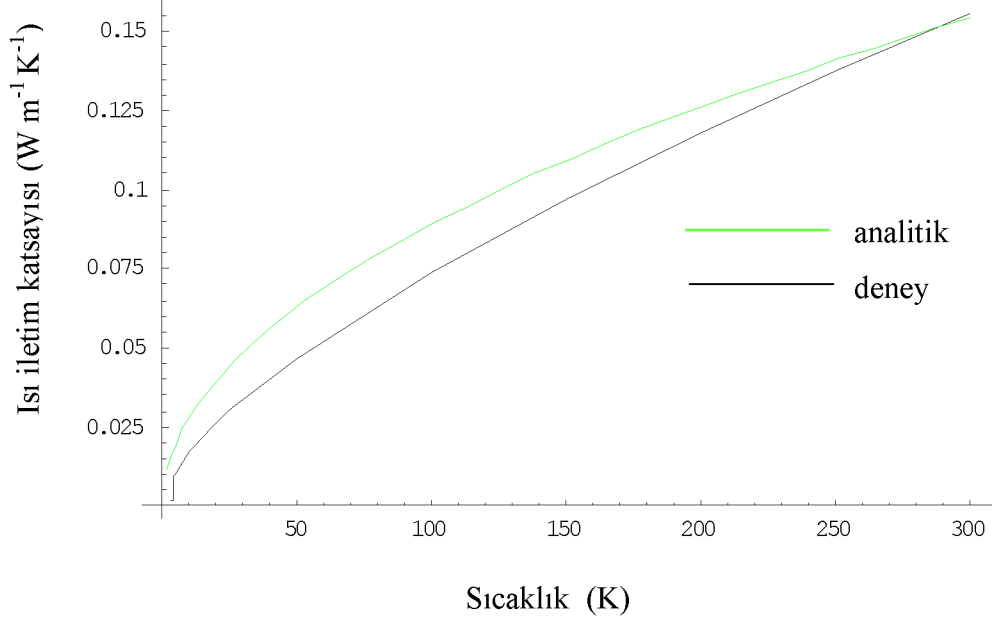
elde edilir. (3.33) ifadesi (3.6) ifadesinde yerleştirilerek Maxwellian gazlar için denge dışı dağılım fonksiyonu,

$$f = f_0 + \tau v_r \frac{1}{k_b T} \frac{1}{V} e^{-w} \left( F_r^\mu + F_r^\varphi + \frac{\varepsilon - \mu}{k_b T} F_r^T \right) \quad (3.34)$$

olarak elde edilir. Bu ifadede,  $F_r^\Phi = F_r^\mu + F_r^\varphi$  tanımı da yapılarak denge dışı dağılım fonksiyonu ,

$$f = f_0 + \tau v_r \frac{1}{V} \frac{1}{k_b T} e^{\mu/k_b T} e^{-\varepsilon/k_b T} \left( F_r^\Phi + \frac{\varepsilon - \mu}{k_b T} F_r^T \right) \quad (3.35)$$

şeklinde yazılır. (3.35) eşitliğindeki dağılım fonksiyonu ile Maxwellian gazlar için hem bağıl hız hem de mutlak hızlar kullanılarak transport katsayıları hesaplanmıştır. Bağıl hızlar kullanılarak elde edilen transport katsayılarının sadece nümerik çözümleri mevcut olup mutlak hız yaklaşımı ile elde edilen transport katsayıları ise ilerideki bölümlerde dağılım fonksiyonu ve akılar genelleştirildikten sonra verilmiştir. Bağıl hız yaklaşımı ile elde edilen transport katsayılarına ait ifadeler ise karmaşık nümerik integraller içermesi ve daha sonrasında bu tez çalışmasının ilerleyen bölümlerinde kullanılmamış olmaları nedeni ile burada detaylı verilmemiştir. Şekil 3.3'de Helyum gazının (He-4) ısı iletim katsayısının sıcaklıkla değişimine ait deneysel değerler ile mutlak hız modeline dayanan ve Tablo 3.5'de verilen analitik sonucun öngörülleri görülmektedir. Deneysel ve analitik sonuçlar arasındaki fark tesir kesitinin sıcaklık bağımlılığı nedeni ile meydana gelmektedir.

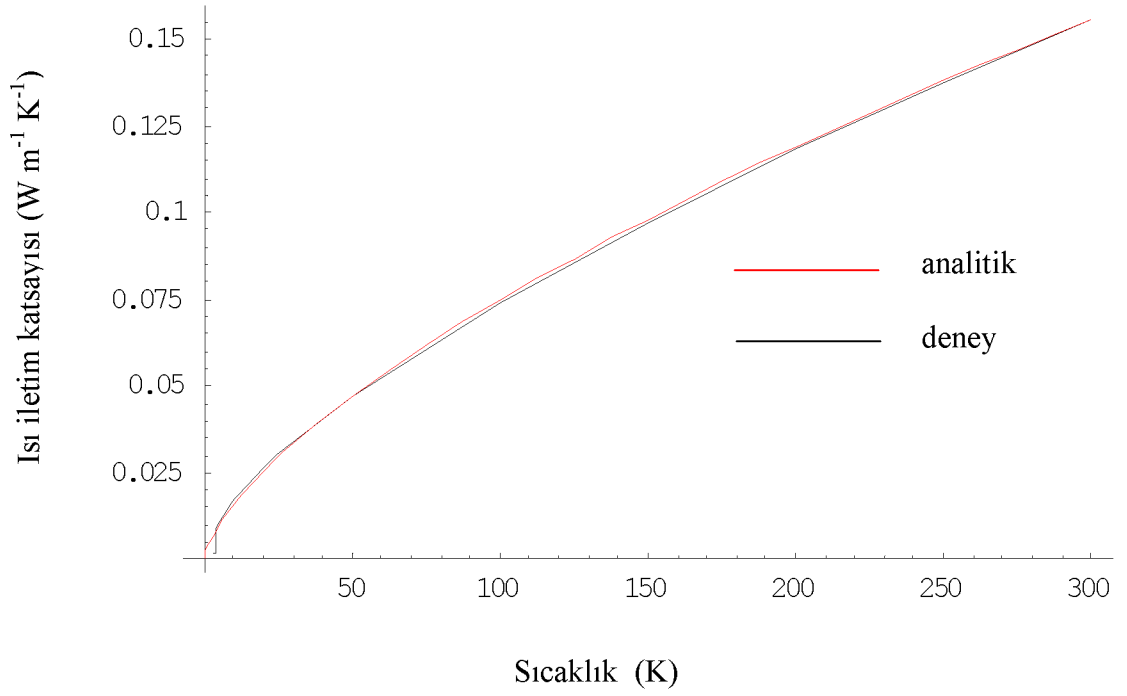


**Şekil 3.3:** He-4 için teorik olarak hesaplanan ısı iletim katsayısı ile deneysel sonuçların karşılaştırılması.

Literatürde tesir kesitlerinin sıcaklık bağımlılığı genel olarak,

$$\sigma(T) = \sigma(T_0) \left( \frac{T}{T_0} \right)^{-n_\sigma} \quad (3.36)$$

şeklinde ifade edilir (**Gnedin ve Ostriker, 2001**). Burada;  $n_\sigma$  tesir kesitlerinin sıcaklık düzeltmesine ait bir sabit,  $T_0$  ise referans sıcaklıktır. (3.36) eşitliğinde yer alan  $n_\sigma$  değeri farklı etkileşme mekanizmalarına göre değişmektedir. Genelde  $n_\sigma$  değeri 0 ile 1 arasında değişmekte olup bu değer analitik modelin deneysel ölçümlere uyarlanması ile bulunur. Helyumun ısı iletim katsayısı için saçılma tesir kesitine  $(T/300)^{-1/6}$  şeklinde bir düzeltme yapılarak elde edilen analitik sonucun deneysel sonuçlarla karşılaştırılması Şekil 3.4’de görülmektedir. Şekil 3.4’den de görüldüğü gibi hesaplanan ısı iletim katsayısı ile deneysel sonuçlar uyum içindedir. Bu uyum analitik sonuçların elde edilmesine olanak sağlayan mutlak hız modelinin yeterliliğini göstermektedir.



**Şekil 3.4:** He-4 için Maxwellian gaz yaklaşımı kullanılarak ve tesir kesitinin sıcaklık düzeltmesi yapılarak elde edilen ısı iletim katsayısının teorik sonuçlarının deneysel sonuçlar ile karşılaştırılması.

### 3.1.4 Fermi, Bose ve Maxwellian Gazlar için Genelleştirilmiş Denge Dışı Dağılım Fonksiyonu

Maxwell-Boltzmann, Fermi-Dirac ve Bose-Einstein istatistiklerini genelleştirilmiş olarak temsil eden denge dağılım fonksiyonu,

$$f_0 = \frac{1}{e^w \pm 1} \frac{1}{V} \quad (3.37)$$

ile verilebilir. Burada; paydada +1 durumu Fermi gazı, -1 durumu Bose gazı ve  $\pm 1$  teriminin alınmadığı durum ise Maxwellian gaz için geçerlidir. Relaksasyon zamanı yaklaşımı altında (BGK) elde edilen (3.12) denkleminde (3.37) ifadesi kullanılırsa genelleştirilmiş kuvvetler cinsinden denge dışı dağılım fonksiyonu,

$$f = f_0 + \frac{\tau_r}{k_b T} \frac{1}{V} \frac{e^w}{(e^w \pm 1)^2} (F_r^\mu + F_r^\phi + w F_r^T) \quad (3.38)$$

şeklinde elde edilir. Sonuç olarak, (3.27) ifadesi (3.38) eşitliğinde kullanılarak denge dışı dağılım fonksiyonu parçacık-parçacık etkileşmelerinin ve parçacık-duvar etkileşmelerinin baskın olduğu durumlar için sırasıyla,

$$f = f_0 + \frac{1}{k_b T \sigma_o} \frac{1}{\eta} \frac{v_r}{|\mathbf{v}|^{s+1}} \frac{e^w}{(e^w \pm 1)^2} (F_r^\mu + F_r^\varphi + w F_r^T) \quad L_g \gg l_0 \quad (3.39)$$

$$f = f_0 + \frac{n L_g}{k_b T} \frac{1}{\eta} \frac{v_r}{|\mathbf{v}|} \frac{e^w}{(e^w \pm 1)^2} (F_r^\mu + F_r^\varphi + w F_r^T) \quad L_g \ll l_0 \quad (3.40)$$

olarak yazılır. Burada;  $\Lambda = \mu/k_b T$  olmak üzere yerel yoğunluk dağılımı,

$$n = \frac{1}{V} \sum_{\varepsilon} \frac{1}{e^{-\Lambda + \varepsilon/k_b T} \pm 1} = \frac{1}{V} \eta \quad (3.41)$$

şeklinde tanımlanır. Değişken yerel yoğunluğun,  $n$ , tüm domen üzerinden integre edilmesi ile bulunan toplam parçacık sayısı  $N$  ile  $\eta$  birbirine karıştırılmamalıdır.  $\eta$ ,  $V$  hacmine sahip olan tüm domenin yerel  $n$  yoğunluğuna sahip olması durumunda domendeki toplam parçacık sayısını temsil etmektedir. Denge dışı dağılım fonksiyonunda kimyasal potansiyel ile dış potansiyel terimini içeren genelleştirilmiş kuvvetler  $F_r^\mu + F_r^\varphi = F_r^\Phi$  şeklinde gösterilerek ve

$$F_r^\Phi - \frac{\mu}{k_b T} F_r^T + \frac{\varepsilon}{k_b T} F_r^T = F_r^{\Phi T} + \frac{\varepsilon}{k_b T} F_r^T \quad (3.42)$$

düzenlemesi yapılarak denge dışı dağılım fonksiyonu  $L_g \gg l_0$  durumu için,

$$f = f_0 + \frac{1}{k_b T \sigma_o} \frac{1}{\eta} \frac{v_r}{|\mathbf{v}|^{s+1}} \frac{e^w}{(e^w \pm 1)^2} \left( F_r^{\Phi T} + \frac{\varepsilon}{k_b T} F_r^T \right) \quad (3.43)$$

olarak elde edilir. Burada  $L_g \gg l_0$  için verilen (3.43) ifadesinden  $L_g \ll l_0$  durumu için geçerli olacak ifadeye  $s=0$  durumunda ulaşmak için sadece  $\sigma_0 \rightarrow 1/nL_g$  dönüşümünün yapılması yeterlidir.



### 3.1.5 Parçacık, Enerji ve Isı Akılarının $g_{a,b}$ , $\eta$ ve $\tilde{h}$ Fonksiyonları ile Temsili

$A$  özelliğine ait denge dışı durumdaki akı, (3.43) ifadesi (3.5) denkleminde kullanılarak

$${}_{ne}J_{rt}^A = \frac{1}{k_b T \sigma_o} \frac{1}{\eta} \sum_{-\infty}^{\infty} \Pi_t^A \frac{v_r^2}{|\mathbf{v}|^{s+1}} \frac{e^w}{(e^w \pm 1)^2} \left( F_r^{\Phi T} + \frac{\varepsilon}{k_b T} F_r^T \right) \quad (3.44)$$

ile gösterilir. (3.44) eşitliği  $\Pi_t^A$ 'nın (3.2)'de verilen açık ifadesi kullanılarak,

$${}_{ne}J_{rt}^A = \frac{C_A}{k_b T \sigma_o} \frac{1}{\eta} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{v_t^a v_r^2}{|\mathbf{v}|^{s+1-b}} \frac{e^w}{(e^w \pm 1)^2} \left( F_r^{\Phi T} + \frac{\varepsilon}{k_b T} F_r^T \right) \quad (3.45)$$

biçiminde yazılabilir. Parçacığın kinetik enerji ifadesinden hareketle aşağıdaki ifadeler yazılabilir,

$$|\mathbf{v}| = \left( \frac{2\varepsilon}{m} \right)^{1/2} = \left( \frac{2k_b T}{m} \right)^{1/2} \left( \frac{\varepsilon}{k_b T} \right)^{1/2} \quad (3.46)$$

$$v_t^a v_r^2 = \left( \frac{2k_b T}{m} \right)^{\frac{a+2}{2}} \left( \sqrt{\frac{m}{2k_b T}} v_t \right)^a \left( \frac{mv_r^2}{2k_b T} \right) \quad (3.47)$$

$$\frac{v_t^a v_r^2}{|\mathbf{v}|^{s+1-b}} = \left( \frac{2k_b T}{m} \right)^{\frac{a+b-s+1}{2}} \frac{\left( \sqrt{\frac{m}{2k_b T}} v_t \right)^a \left( \frac{mv_r^2}{2k_b T} \right)}{\left( \frac{\varepsilon}{k_b T} \right)^{\frac{s+1-b}{2}}} \quad (3.48)$$

(3.48) ifadesi (3.45) eşitliğinde kullanılarak ve (3.4) eşitliği ile verilen denge akısı da gözönüne alınarak genelleştirilmiş akı ifadesi,

$$J_r^A = {}_eJ_r^A + \frac{C_A}{k_b T \sigma_o} \left( \frac{2k_b T}{m} \right)^{\frac{a+b-s+1}{2}} \frac{1}{\eta} \left( g_{a,b} F_r^{\Phi T} + g_{a,b+2} F_r^T \right) \quad (3.49)$$

olarak elde edilir. Burada;

$$g_{a,b} = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{m}{2k_b T}} v_t\right)^a \left(\frac{mv_r^2}{2k_b T}\right)}{\left(\frac{\varepsilon}{k_b T}\right)^{\frac{s+1-b}{2}} (e^w \pm 1)^2} e^w \quad (3.50)$$

olarak tanımlıdır.  $g_{a,b}$ 'nin  $v_t^a$ ,  $v_r^2$  ve dağılım fonksiyonunun kontrol değişkenlerine göre türevi,  $\partial f_0 / \partial w$ , ile doğru orantılı iken  $|v|^{s+1-b}$  ile ters orantılı olduğu görülmektedir. Parçacık ve ısı akısına ilişkin transport katsayılarının ve Wiedemann-Franz oranının  $g_{a,b}$ ,  $\tilde{h}$  ve  $\eta$  fonksiyonlarına bağlı olarak türetilen genel ifadeleri Tablo 3.2'de verilmiştir. Bu bölümde çıkarılan genelleştirilmiş akı ifadesi daha önce Bölüm 3.1.2 ve 3.2.2'de açıklanan nedenlerle  $l_0 \ll L_g$  ve  $Kn \ll 1$  koşulları altında türetilmiştir.  $l_0 \ll L_g$  olduğunda ortalama serbest yol  $l = l_0$  olacağından parçacık-parçacık etkileşmeleri baskındır. Diğer taraftan ortalama geometrik serbest yolun parçacık-parçacık etkileşmelerine ait ortalama serbest yoldan çok küçük olması durumunda,  $l_0 \gg L_g$ , ortalama serbest yol geometrik serbest yola eşit olur,  $l = L_g$ . Bu durumda ise genelleştirilmiş akı ifadesinde  $s=0$  durumu için  $\sigma_0 = 1/nL_g$  yazılarak parçacık-duvar etkileşmelerinin baskın olduğu akı ifadesi kolayca,

$$J_{rt}^A = {}_e J_r^A + \frac{C_A n L_g}{k_b T} \left(\frac{2k_b T}{m}\right)^{\frac{a+b-s+1}{2}} \frac{1}{\eta} (g_{a,b} F_r^{\Phi T} + g_{a,b+2} F_r^T) \quad (3.51)$$

şeklinde elde edilir.

(3.49)'de verilen genelleştirilmiş akı ifadesinden hareketle parçacık akısı,  $C_A = 1$ ,  $a=0$  ve  $b=0$  alınarak ve denge akısının sıfır olacağı hatırlanarak

$$J_r^N = \frac{1}{k_b T \sigma_0} \left(\frac{2k_b T}{m}\right)^{\frac{1-s}{2}} \frac{1}{\eta} (g_{0,0} F_r^{\Phi T} + g_{0,2} F_r^T) \quad (3.52)$$

olarak ifade edilir. Benzer şekilde enerji akısı,  $C_A = m/2$ ,  $a=0$  ve  $b=2$  alınarak ve yine denge akısının sıfır olacağı hatırlanarak

$$J_r^U = \frac{1}{\sigma_0} \left( \frac{2k_b T}{m} \right)^{\frac{1-s}{2}} \frac{1}{\eta} (g_{0,2} F_r^{\Phi T} + g_{0,4} F_r^T) \quad (3.53)$$

biçiminde elde edilir. Parçacık akısı ifadesinden  $F_r^{\Phi T}$  terimi,

$$F_r^{\Phi T} = \frac{1}{g_{0,0}} \left[ \frac{J_r^N}{\frac{1}{k_b T \sigma_0} \left( \frac{2k_b T}{m} \right)^{\frac{1-s}{2}} \frac{1}{\eta}} - g_{0,2} F_r^T \right] \quad (3.54)$$

şeklinde çekilir ve enerji akısı ifadesinde yerleştirilip gerekli düzenlemeler yapılırsa enerji akısı,

$$J_r^U = k_b T \frac{g_{0,2}}{g_{0,0}} J_r^N + \frac{1}{\sigma_0} \left( \frac{2k_b T}{m} \right)^{\frac{1-s}{2}} \frac{1}{\eta} \left[ g_{0,4} - \frac{(g_{0,2})^2}{g_{0,0}} \right] F_r^T \quad (3.55)$$

olarak elde edilir. Akış hızının ses hızından yeterince küçük olması durumunda ısı akısı için (3.17) eşitliğinden yararlanılarak

$$J_r^Q = k_b T \left( \frac{g_{0,2}}{g_{0,0}} - \tilde{h}_r \right) J_r^N + \frac{1}{\sigma_0} \left( \frac{2k_b T}{m} \right)^{\frac{1-s}{2}} \frac{1}{\eta} \left[ g_{0,4} - \frac{(g_{0,2})^2}{g_{0,0}} \right] F_r^T \quad (3.56)$$

eşitliği yazılır. Burada  $\tilde{h}$  boyutsuz entalpi ifadesi olup

$$\tilde{h} = \frac{1}{\eta} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(\varepsilon + 2\varepsilon_r)/k_b T}{e^{-\Lambda + \varepsilon/k_b T} \pm 1} \quad (3.57)$$

olarak tanımlanır.

**Tablo 3.2:** Parçacık ve ısı akısına ait transport katsayıları ve Wiedemann-Franz oranının  $g_{a,b}$  ve  $\eta$  fonksiyonları cinsinden değerleri.

İletim katsayısı	$D^\varphi = D^\mu = \frac{1}{k_b T \sigma_0} \left( \frac{2k_b T}{m} \right)^{\frac{1-s}{2}} \frac{g_{0,0}}{\eta}$
Difüzyon katsayısı	$D^n = \frac{k_b T}{n} D^\varphi \frac{\eta}{(\partial\eta/\partial\Lambda)_T}$
Isı iletim katsayısı	$\kappa^T = \frac{k_b}{\sigma_0} \left( \frac{2k_b T}{m} \right)^{\frac{1-s}{2}} \frac{1}{\eta} \left[ g_{0,4} - \frac{(g_{0,2})^2}{g_{0,0}} \right]$
Soret katsayısı	$D^T = \frac{1}{k_b T \sigma_0} \left( \frac{2k_b T}{m} \right)^{\frac{1-s}{2}} \frac{1}{\eta} \left( g_{0,2} - \frac{\mu}{k_b T} g_{0,0} \right)$
Peltier katsayısı	$\kappa^\varphi = \kappa^\mu = \frac{1}{\sigma_0} \left( \frac{2k_b T}{m} \right)^{\frac{1-s}{2}} \frac{1}{\eta} (g_{0,2} - \tilde{h} g_{0,0})$
Dufour katsayısı	$\kappa^n = \frac{k_b T}{n} \kappa^\mu \frac{\eta}{(\partial\eta/\partial\Lambda)_T}$
Wiedemann-Franz (WF)	$WF = k_b^2 T \left[ \frac{g_{0,4}}{g_{0,0}} - \left( \frac{g_{0,2}}{g_{0,0}} \right)^2 \right]$

### 3.1.6 $g_{a,b}$ , $\eta$ ve $\tilde{h}$ Fonksiyonlarının D-Boyutlu Dikdörtgen Geometri için Hesaplanması

D boyutlu dikdörtgen bir geometride tutuklanmış bir gazda gerçekleşen transport için  $g_{a,b}$ ,  $\tilde{h}$  ve  $\eta$  fonksiyonlarının analitik formları aşağıda izlenen yolla elde edilmiştir. D boyutlu dikdörtgen bir geometride tutuklanmış parçacıklar için Schrödinger denklemi,

$$\nabla^2 \Psi + \kappa^2 \Psi = 0 \quad (3.58)$$

şeklinde tanımlanır. Schrödinger denkleminin çözümlerinden elde edilen enerji özdeğerleri,

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \kappa^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \pi^2 \left[ \left( \frac{i_1}{L_1} \right)^2 + \left( \frac{i_2}{L_2} \right)^2 + \dots + \left( \frac{i_D}{L_D} \right)^2 \right], \quad i_1, \dots, i_D = \dots - 2, -1, 1, 2, \dots \quad (3.59)$$

olmak üzere,

$$\frac{\varepsilon}{k_b T} = \frac{mv^2}{2k_b T} = (\alpha_1 i_1)^2 + (\alpha_2 i_2)^2 + \dots + (\alpha_D i_D)^2 \quad (3.60)$$

eşitliği yardımıyla D-boyutlu dikdörtgen bir geometri için,

$$g_{a,b} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_D = -\infty}^{\infty} \frac{(\alpha_r i_r)^2 (\alpha_i i_i)^a}{\left[ (\alpha_1 i_1)^2 + (\alpha_2 i_2)^2 + \dots + (\alpha_D i_D)^2 \right]^{\frac{a+1-b}{2}}} \frac{\exp \left[ -\Lambda + (\alpha_1 i_1)^2 + (\alpha_2 i_2)^2 + \dots + (\alpha_D i_D)^2 \right]}{\left[ \exp \left[ -\Lambda + (\alpha_1 i_1)^2 + (\alpha_2 i_2)^2 + \dots + (\alpha_D i_D)^2 \right] \pm 1 \right]^b} \quad (3.61)$$

$$\eta = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_D = -\infty}^{\infty} \frac{1}{\exp \left[ -\Lambda + (\alpha_1 i_1)^2 + (\alpha_2 i_2)^2 + \dots + (\alpha_D i_D)^2 \right] \pm 1} \quad (3.62)$$

$$\tilde{h} = \frac{1}{\eta} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_D = -\infty}^{\infty} \frac{(\alpha_1 i_1)^2 + (\alpha_2 i_2)^2 + \dots + (\alpha_D i_D)^2 + 2(\alpha_r i_r)^2}{\exp \left[ -\Lambda + (\alpha_1 i_1)^2 + (\alpha_2 i_2)^2 + \dots + (\alpha_D i_D)^2 \right] \pm 1} \quad (3.63)$$

ifadeleri elde edilir. Bu eşitliklerde  $\alpha_j = L_c / L_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, D$  ve  $L_c = h / (2\sqrt{2mk_b T})$  şeklinde tanımlanır. (3.59) ifadesinde verilen  $i$  değerlerinin sıfır değerini almadığına dikkat edilmelidir. Bu nedenle (3.61)-(3.63) ifadelerinde yer alan toplamlar,  $i$ 'lerin sıfır değeri hariç diğer değerleri üzerinden yapılan toplamlardır. Bu tez çalışmasının bundan sonraki bölümlerinde kullanılan toplam ifadeleri de sıfırın dışlandıği toplamlar olacaktır.

Helyum için  $L_c$ 'nin değeri 300 K ile 3 K sıcaklıkları için sırasıyla yaklaşık olarak 0.05 nm ile 0.5 nm değerlerini almaktadır. Helyum atomunun çapının 0.06 nm olduğu ve ele alınan domenin boyutlarının her zaman  $L_c$  değerinden çok daha büyük olacağı gözönüne alınırsa  $\alpha$  değerlerinin birden çok küçük olacağı anlaşılır.  $\alpha_j \ll 1$  olması yukarıdaki eşitliklerdeki toplamların süreklilik yaklaşımı altında integrallerle yer değiştirilmesine olanak sağlar. Böylece  $a=0$  için D-boyutlu Maxwellian gazlarda genelleştirilmiş ifadeler,

$$g_{0,b} = \frac{\pi^{D/2}}{2\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_D} \frac{\Gamma\left(\frac{D-s+1+b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} e^\Lambda \quad (3.64)$$

$$\eta = \frac{\pi^{D/2}}{\alpha_1\dots\alpha_D} e^\Lambda \quad (3.65)$$

$$\tilde{h} = \frac{D+2}{2} \quad (3.66)$$

olarak elde edilir. Aynı toplamlar Fermi (He-3) ve Bose (He-4) gazları için benzer şekilde süreklilik yaklaşımı altında integrallerle yer değiştirilerek hesaplanırsa,

$$\begin{pmatrix} FD \\ BE \end{pmatrix} g_{0,b} = \mp \frac{\pi^{D/2}}{2\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_D} \frac{\Gamma\left(\frac{D-s+1+b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} Li_{\frac{D+b-1}{2}} [\mp \exp(\Lambda)] \quad (3.67)$$

$$\begin{pmatrix} FD \\ BE \end{pmatrix} \eta = \mp \frac{\pi^{D/2}}{\alpha_1\dots\alpha_D} Li_{\frac{D}{2}} [\mp \exp(\Lambda)] \quad (3.68)$$

$$\begin{pmatrix} FD \\ BE \end{pmatrix} \tilde{h} = \frac{D+2}{2} \frac{Li\left[\frac{D+2}{2}, \mp \exp(\Lambda)\right]}{Li\left[\frac{D}{2}, \mp \exp(\Lambda)\right]} \quad (3.69)$$

eşitlikleri bulunur. Burada;  $\Gamma$  gama fonksiyonunu,  $Li$  ise Polilogaritmik fonksiyonları temsil etmekte olup tanımları ve özellikleri Ek-A'da verilmiştir. Tez boyunca gösterimi basitleştirmek amacıyla  $Li_n[\mp \exp(\Lambda)]$  terimleri  $Li_n$  olarak gösterilmiştir.

## 3.2 Maxwellian Gazlarda Transport Katsayıları

### 3.2.1 $L_g \gg l_0$ ve $Kn \ll 1$ Durumunda Transport

(3.64)-(3.66) ifadeleri Tablo 3.2'de kullanılırsa parçacıkların katı küre olduğu varsayımını temsil eden  $s = 0$  için Maxwellian gazların D-boyutlu genelleştirilmiş transport katsayıları elde edilir. D-boyutlu Maxwellian gazın genelleştirilmiş iletim katsayısı,

$$D^\varphi = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2mk_b T}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} \quad (3.70)$$

olarak bulunur. Maxwellian gazlarda,

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial \Lambda}\right)_T = \eta \quad (3.71)$$

eşitliği geçerlidir. Bu ifade kullanılarak genelleştirilmiş difüzyon ve iletim katsayısı sırasıyla,

$$D^n = \frac{k_b T}{\sigma_0 \sqrt{2mk_b T}} \frac{1}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} \quad (3.72)$$

$$\kappa^T = \frac{k_b^2 T}{\sigma_0 \sqrt{2mk_b T}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} \left[ \Gamma\left(\frac{D+5}{2}\right) - \frac{\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)} \right] \quad (3.73)$$

olarak elde edilir. Isı iletim katsayısının iletim katsayısına oranı olarak tanımlanan Wiedemann-Franz oranı D-boyutlu Maxwellian gaz için,

$$WF = k_b^2 T \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{D+5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)^2} \right] \quad (3.74)$$

olarak bulunur. Maxwellian gaz için D-boyutlu genelleştirilmiş Soret, Peltier ve Dufour çapraz etkileri ise sırasıyla,

$$D^T = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2mk_b T}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right) - \Lambda \Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} \quad (3.75)$$

$$\kappa^\varphi = \frac{k_b T}{\sigma_0 \sqrt{2mk_b T}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right) - \frac{D+2}{2} \Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} \quad (3.76)$$

$$\kappa^n = \frac{(k_b T)^2}{\sigma_0 \sqrt{2mk_b T} n} \frac{\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right) - \frac{D+2}{2} \Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} \quad (3.77)$$

şeklinde elde edilir.

1, 2 ve 3 boyutlu Maxwellian gazların transport katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı sırasıyla Tablo 3.3, Tablo 3.4 ve Tablo 3.5’de verilmiştir.

**Tablo 3.3:**  $L_g \gg l_0$  durumu için 1 boyutlu Maxwellian gazda iletim, difüzyon, ısı iletim, Soret, Peltier, Dufour katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.

Direkt Etkiler		Çapraz Etkiler	
$D^\varphi$	$\frac{2}{\sigma_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi mk_b T}}$	$D^T$	$\frac{2}{\sigma_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi mk_b T}} (1 - \Lambda)$
$D^n$	$\frac{2}{\sigma_0} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \frac{1}{n}$	$\kappa^\varphi$	$-\frac{1}{\sigma_0} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi mk_b T}}$
$\kappa^T$	$\frac{2}{\sigma_0} \frac{k_b^2 T}{\sqrt{2\pi mk_b T}}$	$\kappa^n$	$-\frac{1}{\sigma_0} \frac{(k_b T)^2}{\sqrt{2\pi mk_b T} n}$
$WF$	$k_b^2 T$		

**Tablo 3.4:**  $L_g \gg l_0$  durumu için 2 boyutlu Maxwellian gazda iletim, difüzyon, ısı iletim, Soret, Peltier, Dufour katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.

Direkt Etkiler		Çapraz Etkiler	
$D^\varphi$	$\frac{\pi}{2\sigma_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi mk_b T}}$	$D^T$	$\frac{\pi}{2\sigma_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \left(\frac{3}{2} - \Lambda\right)$
$D^n$	$\frac{\pi}{2\sigma_0} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \frac{1}{n}$	$\kappa^\varphi$	$-\frac{\pi}{4\sigma_0} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi mk_b T}}$
$\kappa^T$	$\frac{3\pi}{4\sigma_0} \frac{k_b^2 T}{\sqrt{2\pi mk_b T}}$	$\kappa^n$	$-\frac{\pi}{4\sigma_0} \frac{(k_b T)^2}{\sqrt{2\pi mk_b T} n}$
$WF$	$\frac{3}{2} k_b^2 T$		



**Tablo 3.5:**  $L_g \gg l_0$  durumu için 3 boyutlu Maxwellian gazda iletim, difüzyon, ısı iletim, Soret, Peltier, Dufour katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.

Direkt Etkiler		Çapraz Etkiler	
$D^\varphi$	$\frac{4}{3\sigma_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi mk_b T}}$	$D^T$	$\frac{4}{3\sigma_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi mk_b T}} (2 - \Lambda)$
$D^n$	$\frac{4}{3\sigma_0} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \frac{1}{n}$	$\kappa^\varphi$	$-\frac{2}{3\sigma_0} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi mk_b T}}$
$\kappa^T$	$\frac{8}{3\sigma_0} \frac{k_b^2 T}{\sqrt{2\pi mk_b T}}$	$\kappa^n$	$-\frac{2}{3\sigma_0} \frac{(k_b T)^2}{\sqrt{2\pi mk_b T} n}$
$WF$	$2k_b^2 T$		

### 3.2.2 $L_g \ll l_0$ ve $Kn \ll 1$ Durumunda Transport

Bu transport rejiminde parçacıklar temelde kendi aralarında değil domeni sınırlayan duvarlar ile çarpışmaktadır. (3.70)-(3.77) ifadelerinde  $\sigma_0 = 1/nL_g$  yazılarak (bu ifadelerde  $s=0$  alınmış olduğundan) transport katsayıları kolaylıkla elde edilebilir. D-boyutlu Maxwellian gaz için iletim, difüzyon ve ısı iletim katsayıları sırasıyla,

$$D^\varphi = \frac{nL_g}{\sqrt{2mk_b T}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} \quad (3.78)$$

$$D^n = \frac{k_b TL_g}{\sqrt{2mk_b T}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} \quad (3.79)$$

$$\kappa^T = \frac{k_b^2 T n L_g}{\sqrt{2mk_b T}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} \left[ \Gamma\left(\frac{D+5}{2}\right) - \frac{\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)} \right] \quad (3.80)$$

şeklinde elde edilir. Wiedemann-Franz oranı için yine (3.74) ifadesi geçerlidir.

D-boyutlu Maxwellian gaz için Soret, Peltier ve Dufour çapraz etkilerine ait transport katsayıları da sırasıyla,

$$D^T = \frac{nL_g}{\sqrt{2mk_bT}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right) - \Lambda\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} \quad (3.81)$$

$$\kappa^\varphi = \frac{k_bTnL_g}{\sqrt{2mk_bT}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right) - \frac{D+2}{2}\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} \quad (3.82)$$

$$\kappa^n = \frac{(k_bT)^2L_g}{\sqrt{2mk_bT}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right) - \frac{D+2}{2}\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} \quad (3.83)$$

olarak bulunur. Maxwellian gazlarda 1, 2 ve 3 boyutlu domenlerde transport katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı sırasıyla Tablo 3.6, Tablo 3.7 ve Tablo 3.8'de verilmiştir.

**Tablo 3.6:**  $L_g \ll l_0$  durumu için 1 boyutlu Maxwellian gazda iletim, difüzyon, ısı iletim, Soret, Peltier, Dufour katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.

Direkt Etkiler		Çapraz Etkiler	
$D^\varphi$	$2nL_g \frac{1}{\sqrt{2\pi mk_bT}}$	$D^T$	$2nL_g \frac{1}{\sqrt{2\pi mk_bT}}(1-\Lambda)$
$D^n$	$2L_g \frac{k_bT}{\sqrt{2\pi mk_bT}}$	$\kappa^\varphi$	$-nL_g \frac{k_bT}{\sqrt{2\pi mk_bT}}$
$\kappa^T$	$2nL_g \frac{k_b^2T}{\sqrt{2\pi mk_bT}}$	$\kappa^n$	$-L_g \frac{(k_bT)^2}{\sqrt{2\pi mk_bT}}$
$WF$	$k_b^2T$		

**Tablo 3.7:**  $L_g \ll l_0$  durumu için 2 boyutlu Maxwellian gazda iletim, difüzyon, ısı iletim, Soret, Peltier, Dufour katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.

Direkt Etkiler		Çapraz Etkiler	
$D^\varphi$	$\frac{\pi n L_g}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi m k_b T}}$	$D^T$	$\frac{\pi n L_g}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi m k_b T}} \left( \frac{3}{2} - \Lambda \right)$
$D^n$	$\frac{\pi L_g}{2} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi m k_b T}}$	$\kappa^\varphi$	$-\frac{\pi n L_g}{4} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi m k_b T}}$
$\kappa^T$	$\frac{3\pi n L_g}{4} \frac{k_b^2 T}{\sqrt{2\pi m k_b T}}$	$\kappa^n$	$-\frac{\pi L_g}{4} \frac{(k_b T)^2}{\sqrt{2\pi m k_b T}}$
$WF$	$\frac{3}{2} k_b^2 T$		

**Tablo 3.8:**  $L_g \ll l_0$  durumu için 3 boyutlu Maxwellian gazda iletim, difüzyon, ısı iletim, Soret, Peltier, Dufour katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.

Direkt Etkiler		Çapraz Etkiler	
$D^\varphi$	$\frac{4nL_g}{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi m k_b T}}$	$D^T$	$\frac{4nL_g}{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi m k_b T}} (2 - \Lambda)$
$D^n$	$\frac{4L_g}{3} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi m k_b T}}$	$\kappa^\varphi$	$-\frac{2nL_g}{3} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi m k_b T}}$
$\kappa^T$	$\frac{8nL_g}{3} \frac{k_b^2 T}{\sqrt{2\pi m k_b T}}$	$\kappa^n$	$-\frac{2L_g}{3} \frac{(k_b T)^2}{\sqrt{2\pi m k_b T}}$
$WF$	$2k_b^2 T$		

### 3.3 Fermi ve Bose Gazlarında Transport Katsayıları

#### 3.3.1 $L_g \gg l_0$ ve $Kn \ll 1$ Durumunda Transport

(3.67) ve (3.69) ifadeleri Tablo 3.2’de kullanılarak  $s = 0$  olmak üzere Fermi ve Bose gazları için transport katsayıları elde edilir. D-boyutlu Fermi ve Bose gazı için geliştirilmiş iletim katsayısı,

$$\begin{pmatrix} FD \\ BE \end{pmatrix} D^\varphi = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2mk_b T}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right) Li_{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) Li_{\frac{D}{2}}} \quad (3.84)$$

şeklinde bulunur. Difüzyon katsayısının hesabı için gerekli  $\partial\eta/\partial\Lambda$  türevi polilogaritmik fonksiyonların türev kuralı,

$$\frac{d}{dz} Li_n[\pm e^\Lambda] = Li_{n-1}[\pm e^\Lambda] \quad (3.85)$$

olmak üzere D-boyutlu Fermi ve Bose gazı için genelleştirilmiş olarak,

$$\begin{pmatrix} FD \\ BE \end{pmatrix} \left( \frac{\partial\eta}{\partial\Lambda} \right)_T = \mp \frac{\pi^{D/2}}{\alpha_1 \dots \alpha_D} Li_{\frac{D-2}{2}} \quad (3.86)$$

şeklinde elde edilir. Bu ifade difüzyon katsayısının tanımında kullanılarak D-boyutlu bir domende genelleştirilmiş difüzyon ve ısı iletim katsayıları sırasıyla,

$$\begin{pmatrix} FD \\ BE \end{pmatrix} D^n = \frac{k_b T}{\sigma_0 \sqrt{2mk_b T}} \frac{1}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right) Li_{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) Li_{\frac{D-2}{2}}} \quad (3.87)$$

$$\begin{pmatrix} FD \\ BE \end{pmatrix} \kappa^T = \frac{k_b^2 T}{\sigma_0 \sqrt{2mk_b T}} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{D+5}{2}\right) Li_{\frac{D+3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) Li_{\frac{D}{2}}} - \frac{\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right)^2 Li_{\frac{D+1}{2}}^2}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) Li_{\frac{D-1}{2}} Li_{\frac{D}{2}}} \right] \quad (3.88)$$

olarak elde edilir. İletim katsayısı ve ısı iletim katsayısı tanımları kullanılarak Wiedemann-Franz oranı,

$$\begin{pmatrix} FD \\ BE \end{pmatrix} WF = k_b^2 T \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{D+5}{2}\right) Li_{\frac{D+3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right) Li_{\frac{D-1}{2}}} - \frac{\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right)^2 Li_{\frac{D+1}{2}}^2}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)^2 Li_{\frac{D-1}{2}}^2} \right] \quad (3.89)$$

eşitliği ile yazılır.

Fermi ve Bose gazları için D-boyuta genelleştirilmiş çapraz etkiler olan Seebeck, Peltier ve Dufour transport katsayıları da sırasıyla,

$$\left(\begin{array}{c} FD \\ BE \end{array}\right) D^T = \frac{1}{\sigma_o \sqrt{2mk_b T}} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right) Li_{\frac{D+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) Li_{D/2}} - \Lambda \frac{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right) Li_{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) Li_{D/2}} \right] \quad (3.90)$$

$$\left(\begin{array}{c} FD \\ BE \end{array}\right) \kappa^\varphi = \frac{k_b T}{\sigma_o \sqrt{2mk_b T}} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right) Li_{\frac{D+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) Li_{D/2}} - \left(\frac{D+2}{2}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right) Li_{\frac{D+2}{2}} Li_{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) Li_{D/2}^2} \right] \quad (3.91)$$

$$\left(\begin{array}{c} FD \\ BE \end{array}\right) \kappa^n = \frac{(k_b T)^2}{\sigma_o \sqrt{2mk_b T} n} \frac{Li_{\frac{D-2}{2}}}{Li_{D/2}^2} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right) Li_{\frac{D+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) Li_{D/2}} - \left(\frac{D+2}{2}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right) Li_{\frac{D+2}{2}} Li_{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) Li_{D/2}} \right] \quad (3.92)$$

eşitlikleri ile bulunur.

Polilogaritmik fonksiyonlar Maxwell-Boltzmann istatistiğinin geçerli olduğu klasik limiti temsil eden  $\Lambda \rightarrow -\infty$  durumunda aşağıda verilen asimptotik özelliğe sahiptir,

$$\lim_{\Lambda \rightarrow -\infty} Li_n \left[ \mp e^\Lambda \right] \rightarrow \mp e^\Lambda \quad (3.93)$$

Polilogaritmik fonksiyonların klasik limitte geçerli olan (3.93) özelliği (3-84) ve (3.87)-(3.92) ifadelerinde kullanılırsa Maxwellian gazlar için geçerli olan (3.70), (3.72)-(3.77) eşitliklerine ulaşılabildiği görülmektedir. Bu durum Fermi ve Bose gazları için elde edilen transport katsayılarının doğruluğu konusunda bir kontrol olanağı vermektedir.

1, 2 ve 3 boyutlu Fermi ve Bose gazlarının transport katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı sırasıyla Tablo 3.9, Tablo 3.10 ve Tablo 3.11’de verilmiştir.

**Tablo 3.9:**  $L_g \gg l_0$  durumu için 1 boyutlu Fermi ve Bose gazlarının iletim, difüzyon, ısı iletim, Soret, Peltier, Dufour katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.

Direkt Etkiler		Çapraz Etkiler	
$D^\varphi$	$\frac{2}{\sigma_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi m k_b T}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}}$	$D^T$	$\frac{2}{\sigma_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi m k_b T}} \frac{1}{Li_{1/2}} (Li_1 - \Lambda Li_0)$
$D^n$	$\frac{2}{\sigma_0} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi m k_b T}} \frac{1}{n} \frac{Li_0}{Li_{-1/2}}$	$\kappa^\varphi$	$\frac{2}{\sigma_0} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi m k_b T}} \frac{1}{Li_{1/2}} \left( Li_1 - \frac{3}{2} \frac{Li_{3/2} Li_0}{Li_{1/2}} \right)$
$\kappa^T$	$\frac{2}{\sigma_0} \frac{k_b^2 T}{\sqrt{2\pi m k_b T}} \left( 2 \frac{Li_2}{Li_{1/2}} - \frac{Li_1^2}{Li_0 Li_{1/2}} \right)$	$\kappa^n$	$\frac{2}{\sigma_0} \frac{(k_b T)^2}{\sqrt{2\pi m k_b T}} \frac{1}{n Li_{-1/2}} \left( Li_1 - \frac{3}{2} \frac{Li_{3/2} Li_0}{Li_{1/2}} \right)$
$WF$	$k_b^2 T \left( 2 \frac{Li_2}{Li_0} - \frac{Li_1^2 Li_{1/2}}{Li_0^2} \right)$		

Fermi ve Bose gazları için hesaplanan transport katsayıların Maxwellian gazlar için hesaplanan transport katsayılara bölünmesi ile boyutsuz transport katsayıları elde edilir. Boyutsuz transport katsayıları, kuantum dejenerasyonun transport üzerindeki etkisini temsil ederler ve dejenerasyonun transporta etkisini incelemek için uygun bir büyüklüğü tanımlarlar. Bu amaçla elde edilen ve tilda “~” sembolü ile diğerlerinden ayrılan boyutsuz transport katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı Tablo 3.12’de verilmiştir. Transport katsayıları arasında yer alan Soret katsayısı  $D^T$  Maxwellian gaz için de  $A$  büyüklüğünü içerdiğinden ve  $A$ ’nın -1’den çok küçük olan değerleri dışında bu terim doğru olmadığından boyutsuzlaştırmalar sırasında sadece bu terimin önünde yer alan çarpan terim esas alınmıştır.

**Tablo 3.10:**  $L_g \gg l_0$  durumu için 2 boyutlu Fermi ve Bose gazlarının iletim, difüzyon, ısı iletim, Soret, Peltier, Dufour katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.

Direkt Etkiler		Çapraz Etkiler	
$D^\varphi$	$\frac{\pi}{2\sigma_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \frac{Li_{1/2}}{Li_1}$	$D^T$	$\frac{\pi}{2\sigma_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \frac{1}{Li_1} \left( \frac{3}{2} Li_{3/2} - \Lambda Li_{1/2} \right)$
$D^n$	$\frac{\pi}{2\sigma_0} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \frac{1}{n} \frac{Li_{1/2}}{Li_0}$	$\kappa^\varphi$	$\frac{\pi}{2\sigma_0} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \frac{1}{Li_1} \left( \frac{3}{2} Li_{3/2} - 2 \frac{Li_2 Li_{1/2}}{Li_1} \right)$
$\kappa^T$	$\frac{3\pi}{8\sigma_0} \frac{k_b^2 T}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \left( 5 \frac{Li_{5/2}}{Li_1} - 3 \frac{Li_{3/2}^2}{Li_{1/2} Li_1} \right)$	$\kappa^n$	$\frac{\pi}{2\sigma_0} \frac{(k_b T)^2}{\sqrt{2\pi mk_b T} n} \frac{1}{Li_0} \left( \frac{3}{2} Li_{3/2} - 2 \frac{Li_2 Li_{1/2}}{Li_1} \right)$
$WF$	$\frac{3}{4} k_b^2 T \left( 5 \frac{Li_{5/2}}{Li_{1/2}} - 3 \frac{Li_{3/2}^2}{Li_{1/2}} \right)$		

**Tablo 3.11:**  $L_g \gg l_0$  durumu için 3 boyutlu Fermi ve Bose gazlarının iletim, difüzyon, ısı iletim, Soret, Peltier, Dufour katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.

Direkt Etkiler		Çapraz Etkiler	
$D^\varphi$	$\frac{4}{3\sigma_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}}$	$D^T$	$\frac{4}{3\sigma_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \frac{1}{Li_{3/2}} [2Li_2 - \Lambda Li_1]$
$D^n$	$\frac{4}{3\sigma_0} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \frac{1}{n} \frac{Li_1}{Li_{1/2}}$	$\kappa^\varphi$	$\frac{4}{3\sigma_0} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \frac{1}{Li_{3/2}} \left[ 2Li_2 - \frac{5}{2} \frac{Li_{5/2} Li_1}{Li_{3/2}} \right]$
$\kappa^T$	$\frac{8}{3\sigma_0} \frac{k_b^2 T}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \left[ 3 \frac{Li_3}{Li_{3/2}} - 2 \frac{Li_2^2}{Li_{3/2} Li_1} \right]$	$\kappa^n$	$\frac{4}{3\sigma_0} \frac{(k_b T)^2}{\sqrt{2\pi mk_b T} n} \frac{1}{Li_{1/2}} \left[ 2Li_2 - \frac{5}{2} \frac{Li_{5/2} Li_1}{Li_{3/2}} \right]$
$WF$	$2k_b^2 T \frac{1}{Li_1} \left( 3Li_3 - 2 \frac{Li_2^2}{Li_1} \right)$		

**Tablo 3.12:**  $L_g \gg l_0$  durumu için 1, 2 ve 3 boyutlu Fermi ve Bose gazı için boyutsuz transport katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.

	$D=1$	$D=2$	$D=3$
$\tilde{D}^\varphi$	$\frac{Li_0}{Li_{1/2}}$	$\frac{Li_{1/2}}{Li_1}$	$\frac{Li_1}{Li_{3/2}}$
$\tilde{D}^n$	$\mp \frac{\exp(\Lambda)}{Li_{1/2}} \frac{Li_0}{Li_{-1/2}}$	$\mp \frac{\exp(\Lambda)}{Li_1} \frac{Li_{1/2}}{Li_0}$	$\mp \frac{\exp(\Lambda)}{Li_{3/2}} \frac{Li_1}{Li_{1/2}}$
$\tilde{\kappa}^T$	$2 \frac{Li_2}{Li_{1/2}} - \frac{Li_1^2}{Li_0 Li_{1/2}}$	$\frac{1}{2} \left( 5 \frac{Li_{5/2}}{Li_1} - 3 \frac{Li_{3/2}^2}{Li_{1/2} Li_1} \right)$	$\left( 3 \frac{Li_3}{Li_{3/2}} - 2 \frac{Li_2^2}{Li_1 Li_{3/2}} \right)$
$\tilde{D}^T$	$\frac{1}{Li_{1/2}} (Li_1 - \Lambda Li_0)$	$\frac{1}{Li_1} \left( \frac{3}{2} Li_{3/2} - \Lambda Li_{1/2} \right)$	$\frac{1}{Li_{3/2}} (2Li_2 - \Lambda Li_1)$
$\tilde{\kappa}^\varphi$	$-\frac{2}{Li_{1/2}} \left( Li_1 - \frac{3}{2} \frac{Li_{3/2} Li_0}{Li_{1/2}} \right)$	$-\frac{2}{Li_1} \left( \frac{3}{2} Li_{3/2} - 2 \frac{Li_2 Li_{1/2}}{Li_1} \right)$	$-\frac{2}{Li_{3/2}} \left[ 2Li_2 - \frac{5}{2} \frac{Li_{5/2} Li_1}{Li_{3/2}} \right]$
$\tilde{\kappa}^n$	$\pm 2 \frac{\exp(\Lambda)}{Li_{1/2}} \frac{1}{Li_{-1/2}} \left( Li_1 - \frac{3}{2} \frac{Li_{3/2} Li_0}{Li_{1/2}} \right)$	$\pm 2 \frac{\exp(\Lambda)}{Li_1} \frac{1}{Li_0} \left( \frac{3}{2} Li_{3/2} - 2 \frac{Li_2 Li_{1/2}}{Li_1} \right)$	$\pm 2 \frac{\exp(\Lambda)}{Li_{3/2}} \frac{1}{Li_{1/2}} \left[ 2Li_2 - \frac{5}{2} \frac{Li_{5/2} Li_1}{Li_{3/2}} \right]$
$WF$	$2 \frac{Li_2}{Li_0} - \frac{Li_1^2 Li_{1/2}}{Li_0^2}$	$\frac{1}{2} \left( 5 \frac{Li_{5/2}}{Li_{1/2}} - 3 \frac{Li_{3/2}^2}{Li_{1/2}^2} \right)$	$\frac{1}{Li_1} \left( 3Li_3 - 2 \frac{Li_2^2}{Li_1} \right)$



### 3.3.2 $L_g \ll l_0$ ve $Kn \ll 1$ Durumunda Transport

(3.84), (3.87)-(3.88) ve (3.90)-(3.92) ifadelerinde  $\sigma_0 = 1/nL_g$  (bu ifadelerde zaten  $s=0$  alınmıştır) yazılarak Fermi ve Bose gazı için iletim, difüzyon, ısı iletim, Soret, Peltier ve Dufour katsayıları sırasıyla,

$$\begin{pmatrix} FD \\ BE \end{pmatrix} D^\varphi = \frac{nL_g}{\sqrt{2mk_bT}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right) Li_{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) Li_{\frac{D}{2}}} \quad (3.94)$$

$$\begin{pmatrix} FD \\ BE \end{pmatrix} D^n = \frac{k_b T L_g}{\sqrt{2mk_bT}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right) Li_{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) Li_{\frac{D-2}{2}}} \quad (3.95)$$

$$\begin{pmatrix} FD \\ BE \end{pmatrix} \kappa^T = \frac{k_b^2 T n L_g}{\sqrt{2mk_bT}} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{D+5}{2}\right) Li_{\frac{D+3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) Li_{\frac{D}{2}}} - \frac{\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right)^2 Li_{\frac{D+1}{2}}^2}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) Li_{\frac{D-1}{2}} Li_{\frac{D}{2}}} \right] \quad (3.96)$$

$$\begin{pmatrix} FD \\ BE \end{pmatrix} D^T = \frac{nL_g}{\sqrt{2mk_bT}} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right) Li_{\frac{D+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) Li_{\frac{D}{2}}} - \Lambda \frac{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right) Li_{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) Li_{\frac{D}{2}}} \right] \quad (3.97)$$

$$\begin{pmatrix} FD \\ BE \end{pmatrix} \kappa^\varphi = \frac{k_b T n L_g}{\sqrt{2mk_bT}} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right) Li_{\frac{D+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) Li_{\frac{D}{2}}} - \left(\frac{D+2}{2}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right) Li_{\frac{D+2}{2}} Li_{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) Li_{\frac{D}{2}}^2} \right] \quad (3.98)$$

$$\begin{pmatrix} FD \\ BE \end{pmatrix} \kappa^n = \frac{L_g (k_b T)^2}{\sqrt{2mk_bT}} \frac{1}{Li_{\frac{D-2}{2}}} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} Li_{\frac{D+1}{2}} - \left(\frac{D+2}{2}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right) Li_{\frac{D+2}{2}} Li_{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) Li_{\frac{D}{2}}} \right] \quad (3.99)$$

şeklinde elde edilir. Wiedemann-Franz oranı için (3.89) eşitliği geçerliliğini korumaktadır.

1, 2 ve 3 boyutlu Fermi ve Bose gazlarının transport katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı sırasıyla Tablo 3.13, Tablo 3.14 ve Tablo 3.15’de verilmiştir. Tablo 3.16’da ise boyutsuz katsayılar verilmiştir. Boyutsuzlaştırmalar sırasında yerel yoğunluk için (3.41) ve (3.68) ifadeleri kullanılmıştır.

**Tablo 3.13:**  $L_g \ll l_0$  durumu için 1 boyutlu domende Fermi ve Bose gazlarının iletim, difüzyon, ısıl iletim, Soret, Peltier, Dufour katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.

Direkt Etkiler		Çapraz Etkiler	
$D^{\varphi}$	$\frac{2nL_g}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}}$	$D^T$	$\frac{2nL_g}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \frac{1}{Li_{1/2}} (Li_1 - \Lambda Li_0)$
$D^n$	$\frac{2L_g k_b T}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \frac{Li_0}{Li_{-1/2}}$	$\kappa^{\varphi}$	$\frac{2nL_g k_b T}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \frac{1}{Li_{1/2}} \left( Li_1 - \frac{3}{2} \frac{Li_{3/2} Li_0}{Li_{1/2}} \right)$
$\kappa^T$	$\frac{2nL_g k_b^2 T}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \left( 2 \frac{Li_2}{Li_{1/2}} - \frac{Li_1^2}{Li_0 Li_{1/2}} \right)$	$\kappa^n$	$\frac{2L_g (k_b T)^2}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \frac{1}{Li_{-1/2}} \left( Li_1 - \frac{3}{2} \frac{Li_{3/2} Li_0}{Li_{1/2}} \right)$
$WF$	$k_b^2 T \left( 2 \frac{Li_2}{Li_0} - \frac{Li_1^2 Li_{1/2}}{Li_0^2} \right)$		

$L_g \ll l_0$  ve  $Kn \ll 1$  koşullarında D-boyutlu Fermi ve Bose gazı için elde edilen ifadeler yine  $L_g \ll l_0$  ve  $Kn \ll 1$  transport koşullarında Maxwellian gaz için elde edilen transport katsayılara bölünerek boyutsuzlaştırılır. Bir transport koşulundan diğerine  $s=0$  alınarak ve  $\sigma_0 = 1/nL_g$  transformasyonu yapılarak geçildiğinden, boyutsuz büyüklüklerin değerleri değişmemektedir. Fakat, kuantum ölçek etkisi altında transport incelendiğinde, boyutsuz büyüklüklerin değerlerinde de farklılıklar olduğu Bölüm 4’de gösterilmiştir. 1, 2 ve 3 boyutlu Fermi ve Bose gazı için boyutsuz transport katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı Tablo 3.16’da verilmiştir.

**Tablo 3.14:**  $L_g \ll l_0$  durumu için 2 boyutlu domende Fermi ve Bose gazlarının iletim, difüzyon, ısı iletim, Soret, Peltier, Dufour katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.

Direkt Etkiler		Çapraz Etkiler	
$D^\varphi$	$\frac{\pi L_g}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi m k_b T}} \frac{Li_{1/2}}{Li_1}$	$D^T$	$\frac{\pi L_g}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi m k_b T}} \frac{1}{Li_1} \left( \frac{3}{2} Li_{3/2} - \Lambda Li_{1/2} \right)$
$D^n$	$\frac{\pi L_g}{2} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi m k_b T}} \frac{Li_{1/2}}{Li_0}$	$\kappa^\varphi$	$\frac{\pi L_g}{2} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi m k_b T}} \frac{1}{Li_1} \left( \frac{3}{2} Li_{3/2} - 2 \frac{Li_2 Li_{1/2}}{Li_1} \right)$
$\kappa^T$	$\frac{3\pi L_g}{8} \frac{k_b^2 T}{\sqrt{2\pi m k_b T}} \left( 5 \frac{Li_{5/2}}{Li_1} - 3 \frac{Li_{3/2}^2}{Li_{1/2} Li_1} \right)$	$\kappa^n$	$\frac{\pi L_g}{2} \frac{(k_b T)^2}{\sqrt{2\pi m k_b T}} \frac{1}{Li_0} \left( \frac{3}{2} Li_{3/2} - 2 \frac{Li_2 Li_{1/2}}{Li_1} \right)$
$WF$	$\frac{3}{4} k_b^2 T \left( 5 \frac{Li_{5/2}}{Li_{1/2}} - 3 \frac{Li_{3/2}^2}{Li_{1/2}^2} \right)$		

**Tablo 3.15:**  $L_g \ll l_0$  durumu için 3 boyutlu domende Fermi ve Bose gazlarının iletim, difüzyon, ısı iletim, Soret, Peltier, Dufour katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.

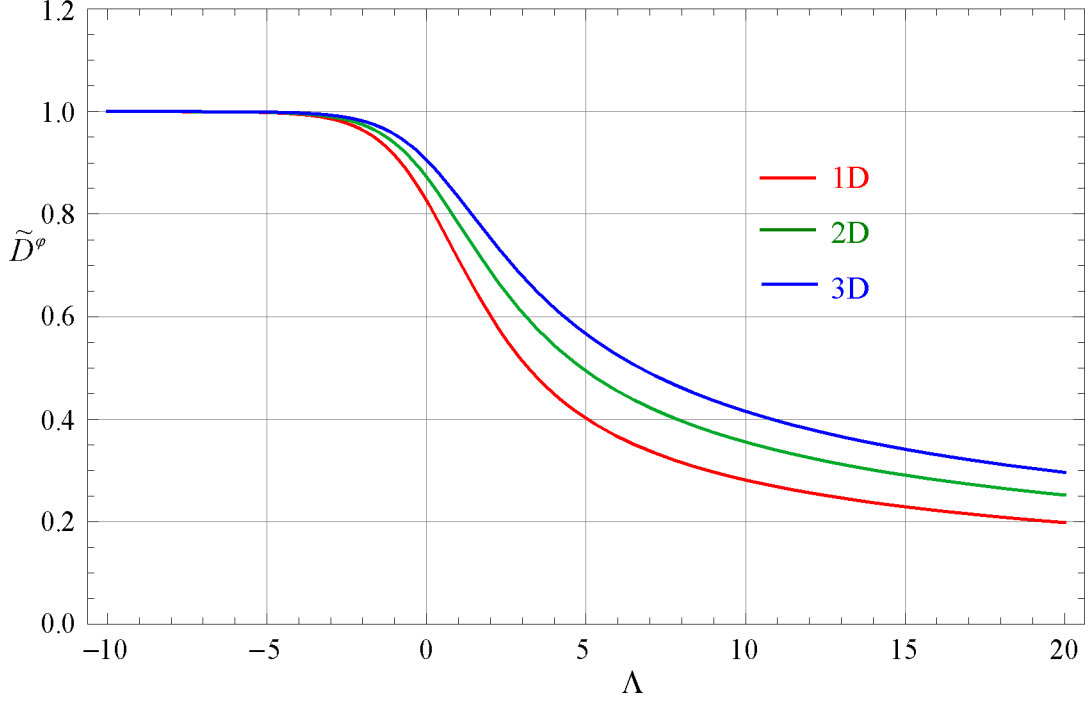
Direkt Etkiler		Çapraz Etkiler	
$D^\varphi$	$\frac{4nL_g}{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi m k_b T}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}}$	$D^T$	$\frac{4nL_g}{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi m k_b T}} \frac{1}{Li_{3/2}} [2Li_2 - \Lambda Li_1]$
$D^n$	$\frac{4L_g}{3} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi m k_b T}} \frac{Li_1}{Li_{1/2}}$	$\kappa^\varphi$	$\frac{4nL_g}{3} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi m k_b T}} \frac{1}{Li_{3/2}} \left[ 2Li_2 - \frac{5}{2} \frac{Li_{5/2} Li_1}{Li_{3/2}} \right]$
$\kappa^T$	$\frac{8nL_g}{3} \frac{k_b^2 T}{\sqrt{2\pi m k_b T}} \left[ 3 \frac{Li_3}{Li_{3/2}} - 2 \frac{Li_2^2}{Li_{3/2} Li_1} \right]$	$\kappa_{11}^n$	$\frac{4L_g}{3} \frac{(k_b T)^2}{\sqrt{2\pi m k_b T}} \frac{1}{Li_{1/2}} \left[ 2Li_2 - \frac{5}{2} \frac{Li_{5/2} Li_1}{Li_{3/2}} \right]$
$WF$	$2k_b^2 T \left( 3 \frac{Li_3}{Li_1} - 2 \frac{Li_2^2}{Li_1^2} \right)$		

**Tablo 3.16:**  $L_g \ll l_0$  durumu için 1, 2 ve 3 boyutlu Fermi ve Bose gazı için boyutsuz transport katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.

	$D=1$	$D=2$	$D=3$
$\tilde{D}^\varphi$	$\mp \frac{Li_0}{\exp(\Lambda)}$	$\mp \frac{Li_{1/2}}{\exp(\Lambda)}$	$\mp \frac{Li_1}{\exp(\Lambda)}$
$\tilde{D}^n$	$\frac{Li_0}{Li_{-1/2}}$	$\frac{Li_{1/2}}{Li_0}$	$\frac{Li_1}{Li_{1/2}}$
$\tilde{\kappa}^T$	$\mp \frac{1}{\exp(\Lambda)} \left( 2Li_2 - \frac{Li_1^2}{Li_0} \right)$	$\mp \frac{1}{2} \frac{1}{\exp(\Lambda)} \left( 5Li_{5/2} - 3 \frac{Li_{3/2}^2}{Li_{1/2}} \right)$	$\mp \frac{1}{\exp(\Lambda)} \left( 3Li_3 - 2 \frac{Li_2^2}{Li_1} \right)$
$\tilde{D}^T$	$\mp \frac{1}{\exp(\Lambda)} (Li_1 - \Lambda Li_0)$	$\mp \frac{1}{\exp(\Lambda)} \left( \frac{3}{2} Li_{3/2} - \Lambda Li_{1/2} \right)$	$\mp \frac{1}{\exp(\Lambda)} (2Li_2 - \Lambda Li_1)$
$\tilde{\kappa}^\varphi$	$\pm \frac{2}{\exp(\Lambda)} \left( Li_1 - \frac{3}{2} \frac{Li_{3/2} Li_0}{Li_{1/2}} \right)$	$\pm \frac{2}{\exp(\Lambda)} \left( \frac{3}{2} Li_{3/2} - 2 \frac{Li_2 Li_{1/2}}{Li_1} \right)$	$\pm \frac{2}{\exp(\Lambda)} \left( 2Li_2 - \frac{5}{2} \frac{Li_{5/2} Li_1}{Li_{3/2}} \right)$
$\tilde{\kappa}^n$	$-\frac{2}{Li_{-1/2}} \left( Li_1 - \frac{3}{2} \frac{Li_{3/2} Li_0}{Li_{1/2}} \right)$	$-\frac{2}{Li_0} \left( \frac{3}{2} Li_{3/2} - 2 \frac{Li_2 Li_{1/2}}{Li_1} \right)$	$-\frac{2}{Li_{1/2}} \left[ 2Li_2 - \frac{5}{2} \frac{Li_{5/2} Li_1}{Li_{3/2}} \right]$
$WF^{\tilde{}}$	$\frac{1}{Li_0} \left( 2Li_2 - \frac{Li_1^2}{Li_0} \right)$	$\frac{1}{2Li_{1/2}} \left( 5Li_{5/2} - 3 \frac{Li_{3/2}^2}{Li_{1/2}} \right)$	$\frac{1}{Li_1} \left( 3Li_3 - 2 \frac{Li_2^2}{Li_{3/2}} \right)$

### 3.3.3 $L_g \gg l_0$ Durumu İçin Fermi Gazında Transportun Dejenerasyonla Değişimi

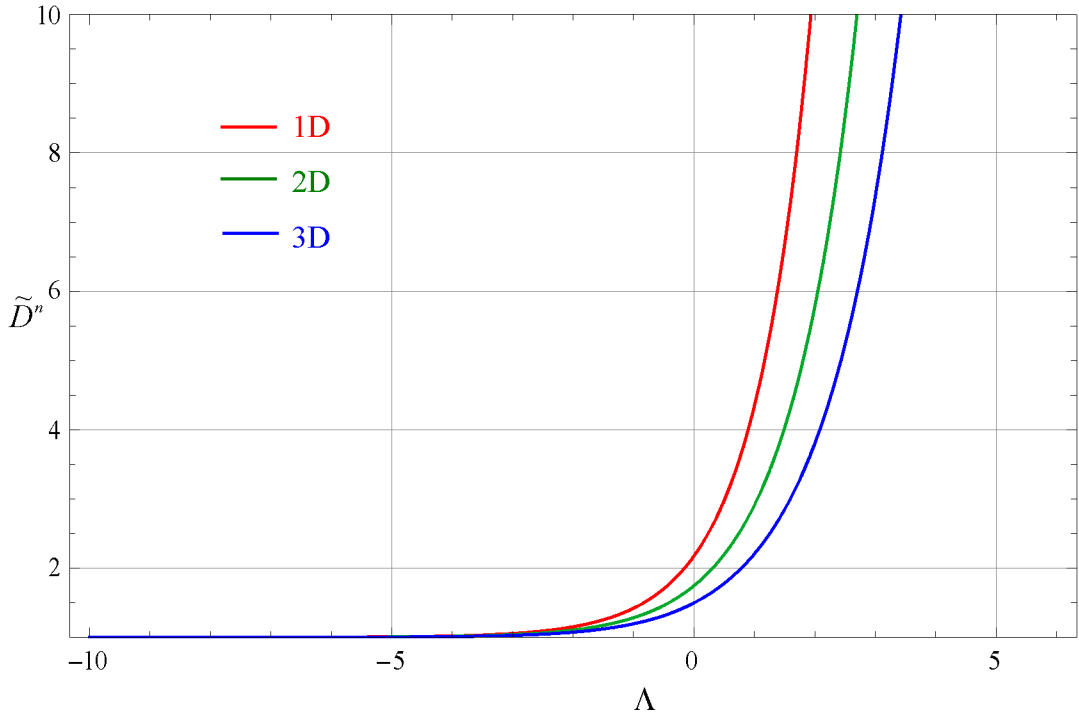
1, 2 ve 3 boyutlu Fermi gazına ait iletkenlik, difüzyon ve ısı iletkenlik katsayılarının  $\Lambda$  ile değişimleri Tablo 3.12’de verilen ifadelerden hareketle sırasıyla Şekil 3.5, Şekil 3.6 ve Şekil 3.7’de verilmiştir.



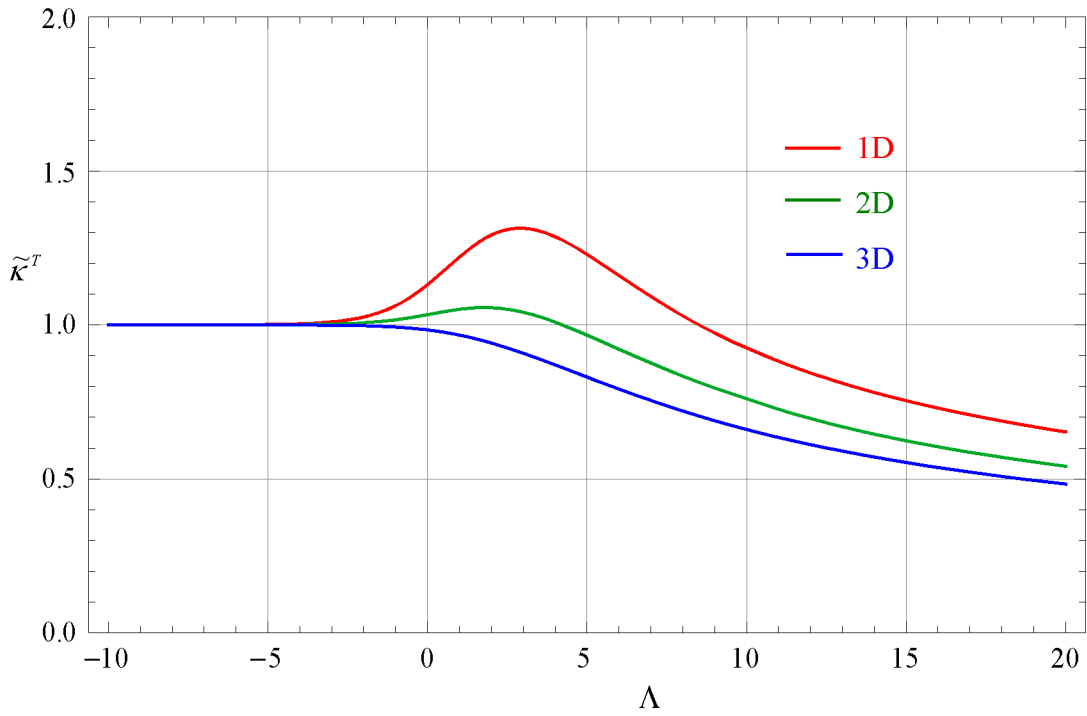
**Şekil 3.5:**  $L_g \gg l_0$  durumu için dejenere Fermi gazında boyutsuz iletim katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.

Şekil 3.5’de iletkenliğin  $\Lambda$ ’nın artan değerleri ile azaldığı dolayısıyla dejenerasyonun iletkenliği kötüleştirdiği görülmektedir. Fermi dejenerasyonu koşullarında polilogaritmik fonksiyonların asimptotik davranışları Ek-A’da gerek matematiksel formda gerekse grafik formunda verilmiştir. Yüksek dereceden polilogaritmik fonksiyonlar artan  $\Lambda$  değeri ile daha hızlı büyümektedir. Tablo 3.12’de verilen iletkenlik ifadelerinde bu davranışın iletkenliğin sıfıra gitmesine yol açacağı açıkça anlaşılabilir. Fiziksel olarak, yüksek dejenerasyon koşullarında hem artan yoğunluk nedeniyle ortalama serbest yol küçülmekte hem de yükselen Fermi seviyesi nedeniyle parçacıkların uyarım olasılığı azalmaktadır. Böylece iletkenliğe katkıda bulunan parçacık sayısının azalması ve çarpışmaların artması iletkenliğin sıfıra gitmesine yol açmaktadır.  $\Lambda$ ’nın birden oldukça büyük değerler aldığı şiddetli dejenerasyon koşullarında polilogaritmik fonksiyonların Ek-A’da verilen asimptotik açılımlarını kullanarak iletkenlik üzerinde dejenerasyonun etkisini temsil eden

boyutsuz iletkenlik katsayısı basitleştirilebilir. Bu basitleştirilmiş ifadeler farklı boyutlar için Tablo 3.16'da yer almaktadır.



Şekil 3.6:  $L_g \gg l_0$  durumu için dejenere Fermi gazında boyutsuz difüzyon katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.



Şekil 3.7:  $L_g \gg l_0$  durumu için dejenere Fermi gazında boyutsuz ısı iletim katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.

Şekil 3.6'da boyutsuz difüzyon katsayısının dejenerasyonla arttığı görülmektedir. Böylece artan dejenerasyonun difüzyonu Maxwellian gazda gerçekleşen difüzyona göre iyileştirdiğinden söz edilebilir. Ancak difüzyon katsayısının kendisinin artan dejenerasyonla azalarak sifıra gittiği unutulmamalıdır.  $\Lambda$ 'nın artan değerleri, artan yoğunluğa ya da azalan sıcaklığa karşılık gelmektedir. Burada boyutsuz difüzyon katsayısının artmasının nedeni, Maxwellian gazın difüzyon katsayısının artan yoğunluk ya da azalan sıcaklıkla olan azalmasının daha hızlı olmasıdır. Fermi gazının difüzyon katsayısı (3.87) ifadesi ile verilmiştir. Bu ifade yoğunluk ile ters orantılı olup yoğunluk da  $\Lambda$ 'ya bağlıdır. Yoğunluğun şiddetli dejenerasyon koşullarında  $\Lambda$ 'ya bağımlılığı, (3.68) ifadesinin (3.41)'de kullanılması ve polilogaritmik fonksiyonların asimptotik ifadelerinin kullanılması ile

$$n = \frac{\pi^{D/2}}{L_c^D} \frac{\Lambda^{D/2}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}+1\right)} = \frac{(2m\pi)^{D/2}}{(h/2)^D} \frac{\mu^{D/2}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}+1\right)} \quad (3.100)$$

şeklinde elde edilir. (3.100) ifadesi ile verilen yoğunluk (3.87) ifadesinde kullanılır ve yine polilogaritmik fonksiyonların asimptotik ifadelerinden yararlanılırsa, Fermi gazının şiddetli dejenerasyon koşullarındaki ifadesi

$$D^n = \frac{(h/2)^D \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{\sigma_0 (2\pi m)^{\frac{D+1}{2}} \mu^{\frac{D-1}{2}}} \quad (3.101)$$

olarak bulunur. Böylece  $D=1$  için difüzyon katsayısının sabit bir değer aldığı,  $D=2$  ve  $D=3$  için ise artan yoğunlukla  $\mu$  artacağından sifıra yakınsadığı anlaşılmaktadır. Boyutsuz difüzyon katsayısının şiddetli dejenerasyon koşullarındaki basitleştirilmiş ifadeleri polilogaritmik fonksiyonların asimptotik ifadeleri kullanılarak yine farklı boyutlar için Tablo 3.16'da verilmiştir.

Fermi gazının boyutsuz ısı iletim katsayısının dejenerasyonla değişimi Şekil 3.7'de verilmiştir. Burada ilginç bir davranışın ortaya çıktığı görülmektedir. 3 boyutta dejenerasyon ısı iletim katsayısını azaltan bir etkiye sahip iken, 1 ve 2 boyutta iyileştirici bir etkinin ardından azaltan bir etki ortaya çıkmaktadır. Maksimum değer Tablo 3.12'de verilen boyutsuz ısı iletim katsayılarının  $\Lambda$ 'ya göre türevleri sifıra eşitlenerek ancak sayısal olarak bulunabilir. Bu sayısal değerler Şekil 3.7'de görülen

maksimum değerlere karşılık gelmektedir. Boyutsuz ısı iletim katsayısının şiddetli dejenerasyon koşullarındaki basitleştirilmiş ifadeleri polilogaritmik fonksiyonların asimptotik ifaları kullanılarak farklı boyutlar için Tablo 3.17’de verilmiştir.

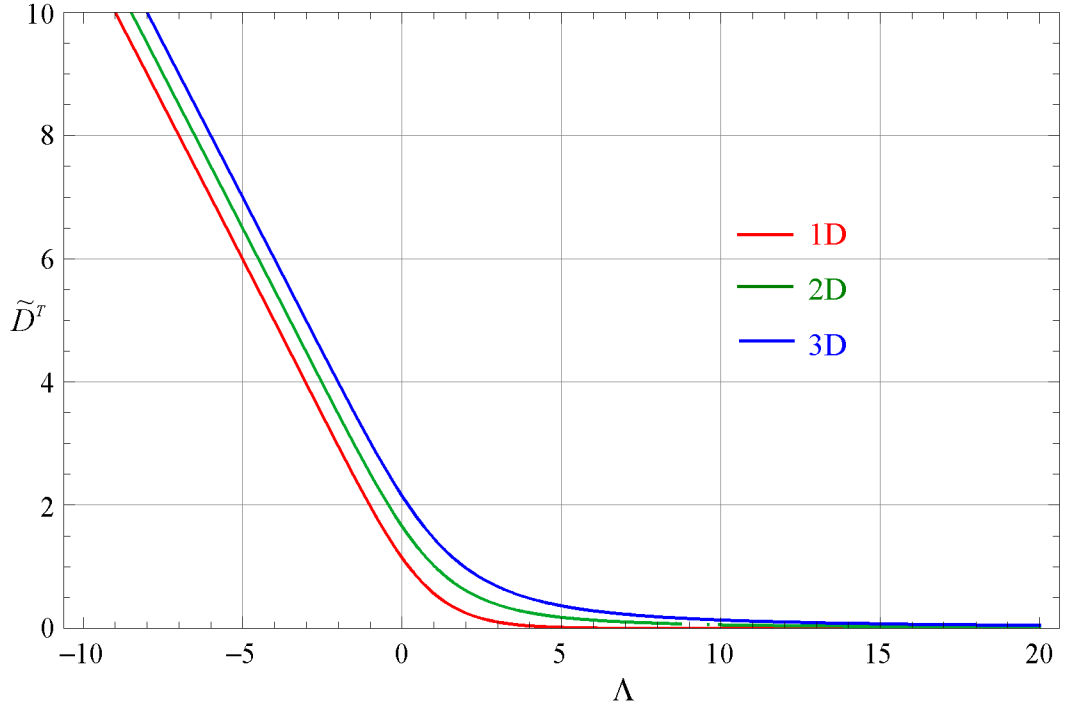
**Tablo 3.17:**  $L_g \gg l_0$  durumu için dejenere Fermi gazında 1,2 ve 3 boyutlu domende boyutsuz iletim, difüzyon ve ısı iletim katsayılarının asimptotik değerleri.

	$D = 1$	$D = 2$	$D = 3$
$\tilde{D}^p$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\Lambda}} \left( 1 + \frac{\pi^2}{24\Lambda^2} \right)$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}\sqrt{\Lambda}} \left( 1 - \frac{\pi^2}{24\Lambda^2} \right)$	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\Lambda}} \left( 1 - \frac{\pi^2}{8\Lambda^2} \right)$
$\tilde{D}^n$	$\exp(\Lambda) \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{48\Lambda^2} \right)$	$\exp(\Lambda) \left( \frac{2}{\sqrt{\pi}\sqrt{\Lambda}} - \frac{\pi^{3/2}}{12\Lambda^{5/2}} \right)$	$\exp(\Lambda) \left( \frac{3\pi}{8\Lambda} - \frac{\pi^{3/2}}{32\Lambda^3} \right)$
$\tilde{K}^T$	$\frac{\pi^{5/2}}{6\sqrt{\Lambda}} \left( 1 + \frac{\pi^2}{24\Lambda^2} \right)$	$\frac{4\pi^{3/2}}{9\sqrt{\Lambda}} \left( 1 - \frac{\pi^2}{12\Lambda^2} \right)$	$\frac{\pi^{5/2}}{8\sqrt{\Lambda}} \left( 1 - \frac{11\pi^2}{24\Lambda^2} \right)$

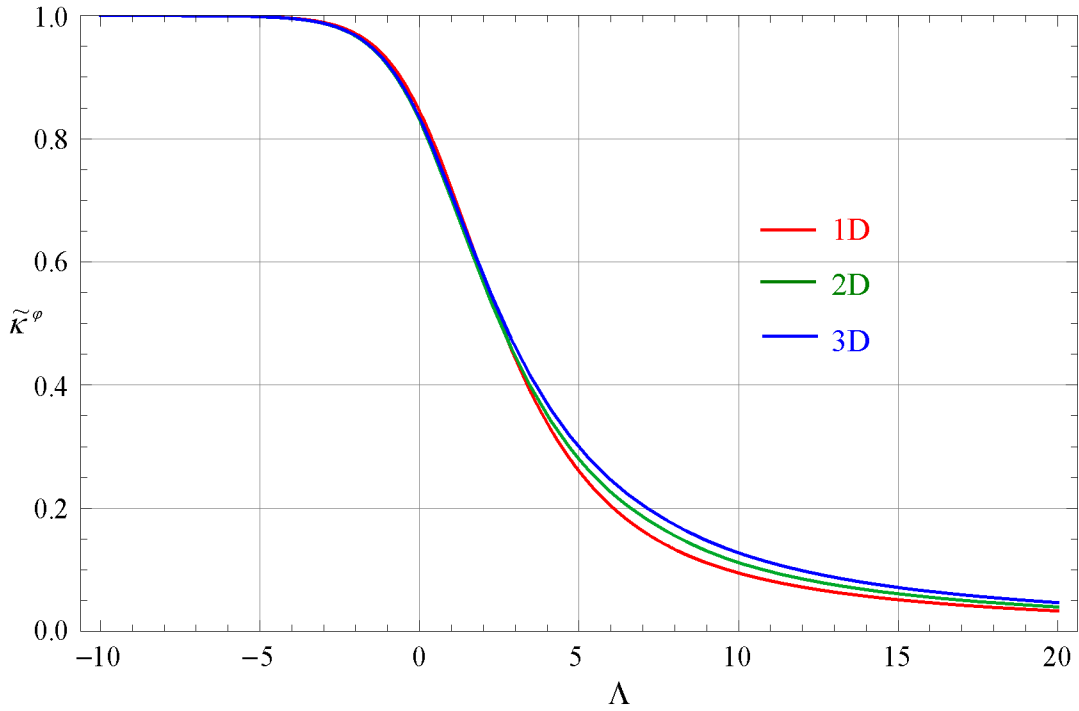
1, 2 ve 3 boyutlu Fermi gazının boyutsuz çapraz etkilerine ait Soret, Peltier ve Dufour katsayılarının  $\Lambda$  ile değişimleri sırasıyla Şekil 3.8, Şekil 3.9 ve Şekil 3.10’da görülmektedir. Şekil 3.8’de verilen boyutsuz Soret katsayısının artan dejenerasyonla azalarak sifıra gittiği, tersi durumda ise arttığı ve Maxwellian gazın değerine yakınsadığı anlaşılmaktadır. Burada boyutsuzlaştırma işleminin 1, 2 ve 3 boyut için sırasıyla Tablo 3.3, Tablo 3.4 ve Tablo 3.5’de verilen Maxwellian gazın Soret katsayılarında parantezli terimlerin dışındaki ifadeler bölünerek elde edildiği unutulmamalıdır. Bu nedenle  $\Lambda$ ’nın -1’den küçük değerleri için boyutsuz Soret katsayısı 1, 2 ve 3 boyut için sırasıyla  $(1 - \Lambda)$ ,  $\left( \frac{3}{2} - \Lambda \right)$  ve  $(2 - \Lambda)$  değerlerine yakınsamaktadır.

Şekil 3.9 ve Şekil 3.10’da ise artan dejenerasyonla sırasıyla Peltier ve Dufour katsayılarının azalarak sifıra gittiği, tersi durumda ise beklendiği gibi 1 değerine yakınsadığı görülmektedir. 1, 2 ve 3 boyutlu Fermi gazının boyutsuz Soret, Peltier ve Dufour katsayılarının şiddetli dejenerasyon koşullarındaki basitleştirilmiş ifadeleri ise Tablo 3.18’de verilmiştir.

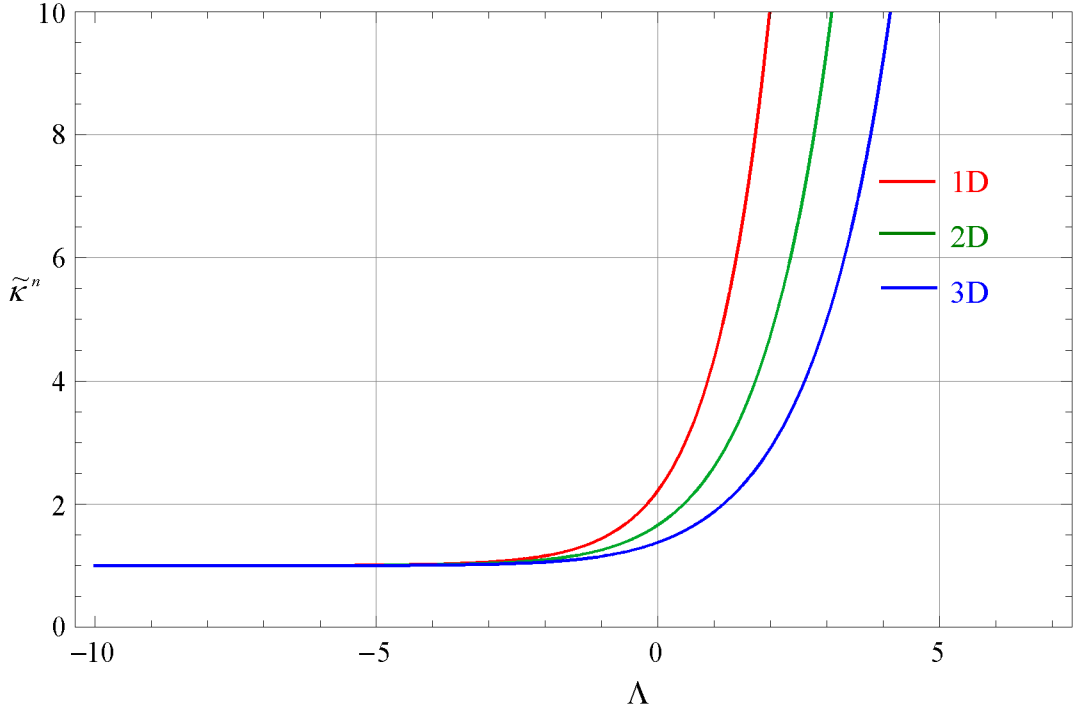




**Şekil 3.8:**  $L_g \gg l_0$  durumu için dejenere Fermi gazında boyutsuz Soret katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.



**Şekil 3.9:**  $L_g \gg l_0$  durumu için Dejenere Fermi gazında boyutsuz Peltier katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.



**Şekil 3.10:**  $L_g \gg l_0$  durumu için dejenere Fermi gazında boyutsuz Dufour katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.

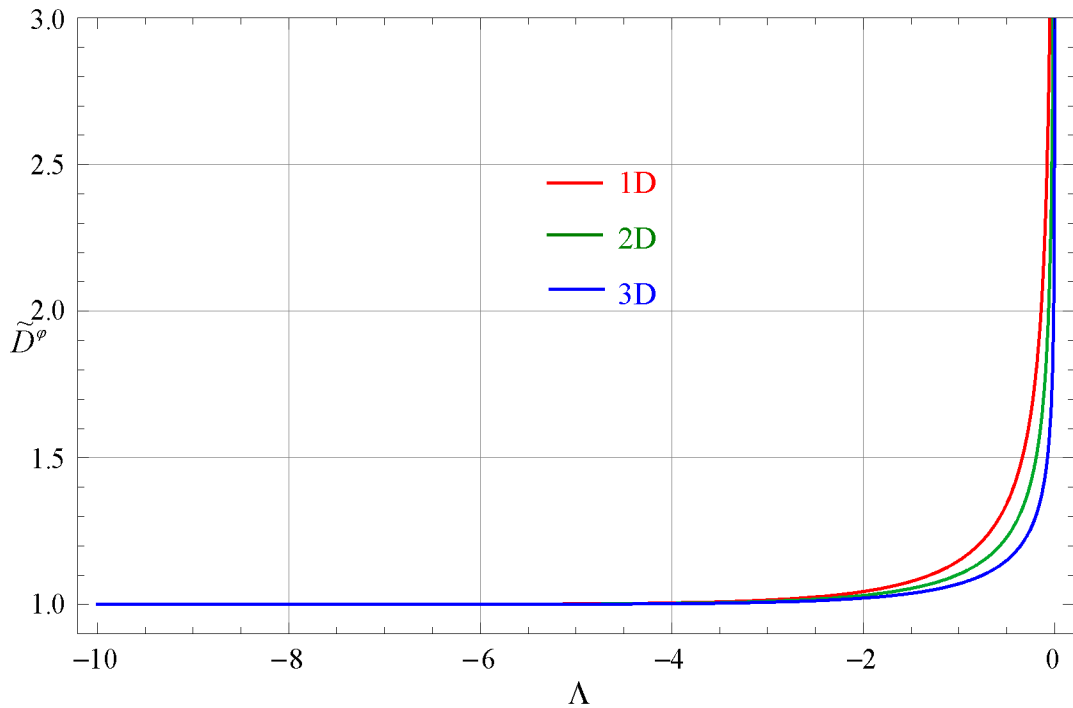
**Tablo 3.18:**  $L_g \gg l_0$  durumu için dejenere Fermi gazında 1, 2 ve 3 boyutlu domende boyutsuz Soret, Peltier ve Dufour katsayılarının asimptotik değerleri.

	$D = 1$	$D = 2$	$D = 3$
$\tilde{D}^T$	0	$\frac{\pi^{3/2}}{3\Lambda^{3/2}}$	$\frac{\pi^{5/2}}{4\Lambda^{3/2}} \left(1 - \frac{\pi^2}{8\Lambda^2}\right)$
$\tilde{K}^\varphi$	$\frac{\pi^{5/2}}{6\Lambda^{3/2}} \left(1 + \frac{\pi^2}{12\Lambda^2}\right)$	$\frac{2\pi^{3/2}}{3\Lambda^{3/2}} \left(1 - \frac{\pi^2}{12\Lambda^2}\right)$	$\frac{\pi^{5/2}}{4\Lambda^{3/2}} \left(1 - \frac{\pi^2}{2\Lambda^2}\right)$
$\tilde{K}^n$	$\frac{\pi^2 \exp(\Lambda)}{12\Lambda}$	$\frac{2\pi^{3/2} \exp(\Lambda)}{3\Lambda^{3/2}}$	$\frac{\pi^3 \exp(\Lambda)}{8\Lambda^2}$

### 3.3.4 $L_g \gg l_0$ Durumu İçin Bose Gazında Transportun Dejenerasyonla Değişimi

1, 2 ve 3 boyutlu Bose gazına ait iletkenlik, difüzyon ve ısıl iletkenlik katsayılarının  $\Lambda$  ile değişimleri Tablo 3.12’de verilen ifadelerden hareketle sırasıyla Şekil 3.11, Şekil 3.12 ve Şekil 3.13’de verilmiştir. Şekil 3.11’de iletkenliğin  $\Lambda$ ’nın artan değerleri ile arttığı dolayısıyla dejenerasyonun iletkenliği iyileştirdiği görülmektedir. Tablo 3.2’den iletkenliğin  $g_{0,0}/\eta$  ile orantılı olduğu anlaşılmaktadır. Denklem (3.67)

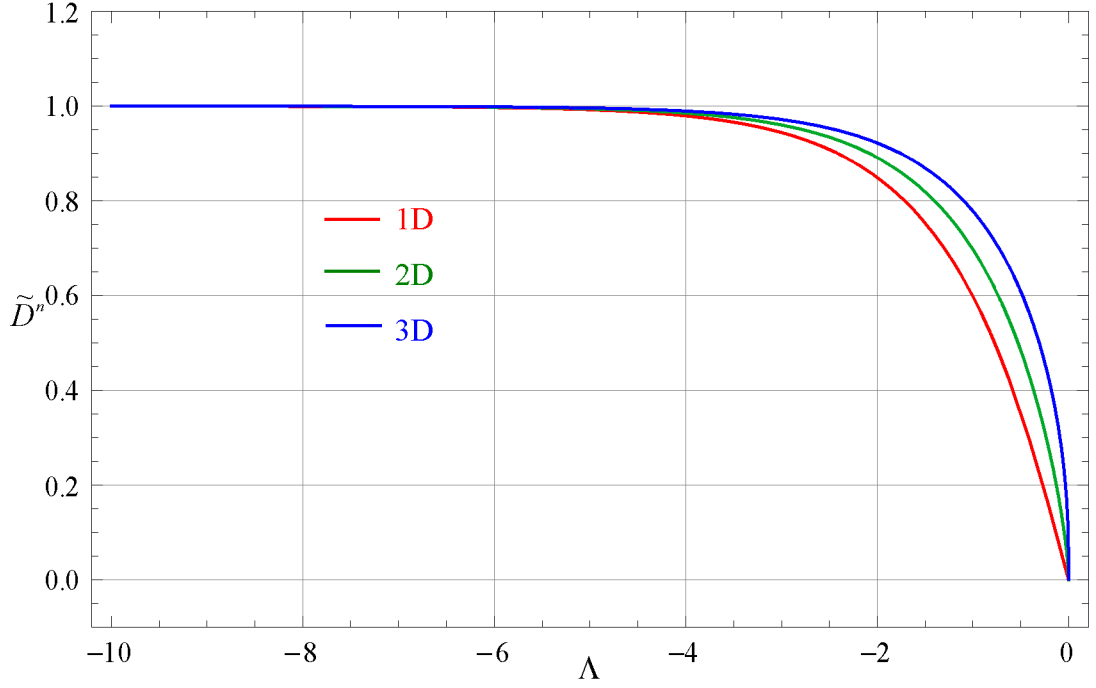
ve (3.68) ifadelerinden de bu oran için  $g_{0,0}$ 'ın orantılı olduğu polilogaritmik fonksiyonun derecesinin  $\eta$ 'nın bağlı olduğu polilogaritmik fonksiyonun derecesinden daima küçük olduğu açıktır. Polilogaritmik fonksiyonların Ek-A'da verilen gerek asimptotik formlarından gerekse de grafiklerinden görüleceği gibi düşük dereceli polilogaritmik fonksiyonlar  $\Lambda$ 'nın değeri sifıra yaklaşırken yüksek dereceli olanlara göre daha hızlı artmaktadır. Bu durum Şekil 3.11'deki davranışı açıklamaktadır. Fiziksel olarak, yüksek dejenerasyon koşullarında parçacıkların artan yoğunluğu nedeniyle ortalama serbest yol azalmakta ve bu iletkenliğe olumsuz bir katkı yaparken dejenere Bose gazında parçacıkların yer seviyesinde toplanma eğilimleri nedeniyle denklem (3.50) ve (3.67) gereği transporta katkı artmakta ve baskın gelmektedir. Şiddetli dejenerasyon koşullarına karşılık gelen  $\Lambda \rightarrow 0$  durumu için polilogaritmik fonksiyonların Ek-A'da verilen asimptotik açılımlarını kullanarak iletkenlik üzerinde dejenerasyonun etkisini temsil eden boyutsuz iletkenlik katsayısı basitleştirilebilir. Bu basitleştirilmiş ifadeler farklı boyutlar için Tablo 3.19'da yer almaktadır.



**Şekil 3.11:**  $L_g \gg l_0$  durumu için dejenere Bose gazında boyutsuz iletim katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.

Şekil 3.12'de 1, 2 ve 3 boyutlu Bose gazına ait boyutsuz difüzyon katsayısına dejenerasyonun etkisi görülmektedir. Dejenerasyonun artışı ( $\Lambda$ 'nın sifıra yaklaşması) ile difüzyonun zayıfladığı anlaşılmaktadır. Tablo 3.12'den de görüleceği gibi

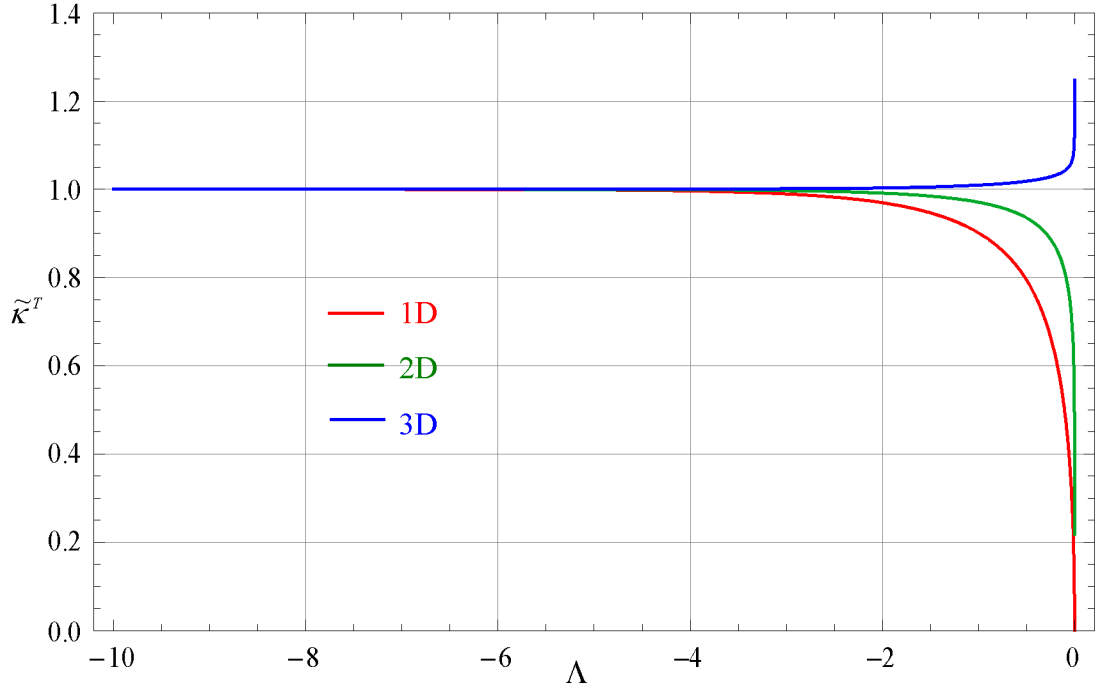
difüzyonun  $Li_{(D-1)/2}/Li_{(D-2)/2}$  ile orantılı olması ve düşük dereceli polilogaritmik fonksiyonların dejenerasyon koşullarında daha hızlı büyümesi boyutsuz difüzyonun sifira yaklaşmasına neden olmaktadır. Difüzyonun parçacıkların ısıl hareketleri ile gerçekleşen bir süreç olduğu düşünülürse artan dejenerasyonla daha çok sayıda parçacığın yer seviyesine geçmesi sonucunda difüzyona katkıda bulunan parçacık sayısının azalması bu davranışın fiziksel sebebini oluşturmaktadır. Dejenere durumdaki asimptotik ifadeler Tablo 3.19’de 1, 2 ve 3 boyut için verilmiştir.



**Şekil 3.12:**  $L_g \gg l_0$  durumu için dejenere Bose gazında boyutsuz difüzyon katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.

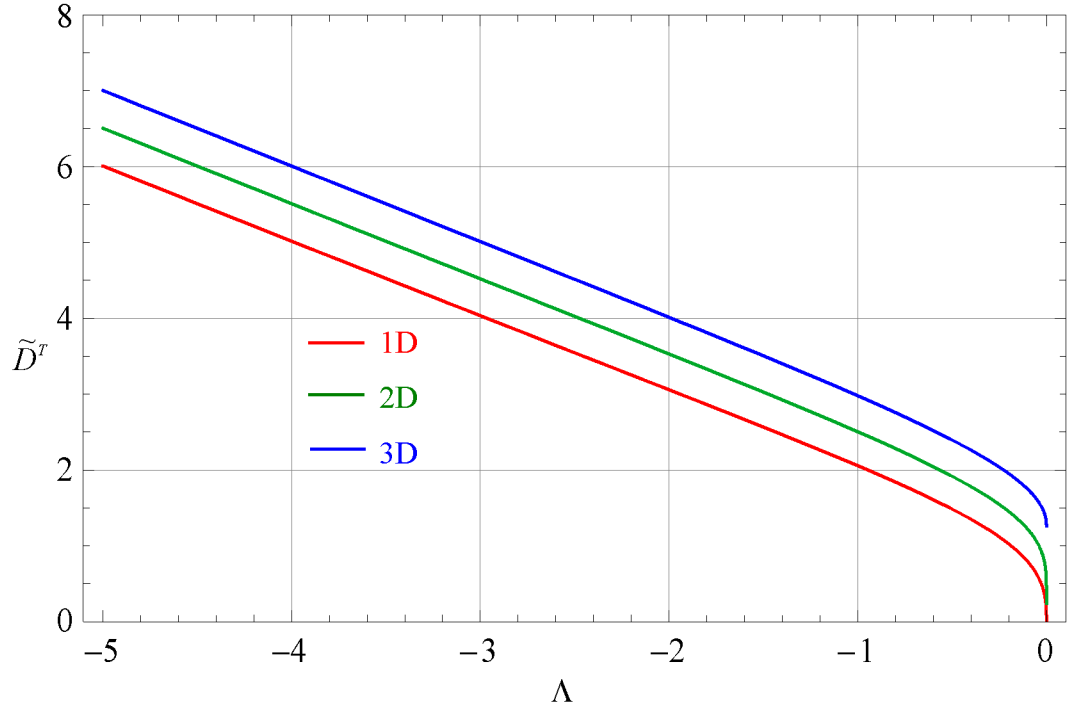
Boyutsuz ısı iletim katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi ise Şekil 3.13’de verilmiştir. 3 boyutlu bir sistemde  $\Lambda$  sıfır değerine yaklaşırken uyarılmış seviyede bulunan parçacıkların yoğunluğu sonlu olduğundan yer seviyesinde bulunan parçacık sayısı hızla artmaktadır. Isı iletimi ise parçacıkların ısıl hareketleri sırasındaki uyarımlarla gerçekleştiğinden yer seviyesinde bulunan parçacık sayısı arttıkça iyileşmektedir. Bu durum Şekil 3.13’de 3 boyutlu Bose gazının boyutsuz ısı iletim katsayısının davranışını açıklamaktadır. 2 ve 1 boyutlu Bose gazında ise uyarılmış seviyelerde bulunan parçacık yoğunluğu sınırlı olmadığından bu durumun tersi gözlenmektedir. Bu durum matematiksel olarak  $Li_{1/2}(e^\Lambda)$  ve  $Li_1(e^\Lambda)$  değerlerinin  $\Lambda$  sıfır değerine yaklaşırken sonsuza gitmesine karşın  $Li_{3/2}(e^\Lambda)$  değerinin  $\zeta(3/2)$  değerine gitmesinden

kaynaklanmaktadır. Tablo 3.19’de farklı boyutlar için verilen asimptotik ifadelerden de bu durum açıkça görülmektedir. 3 boyutlu davranışta boyutsuz ısı iletim katsayısının dejenerasyon nedeniyle  $3\zeta(3)/\zeta(3/2) \cong 1.38$  değerine gittiği anlaşılmaktadır.

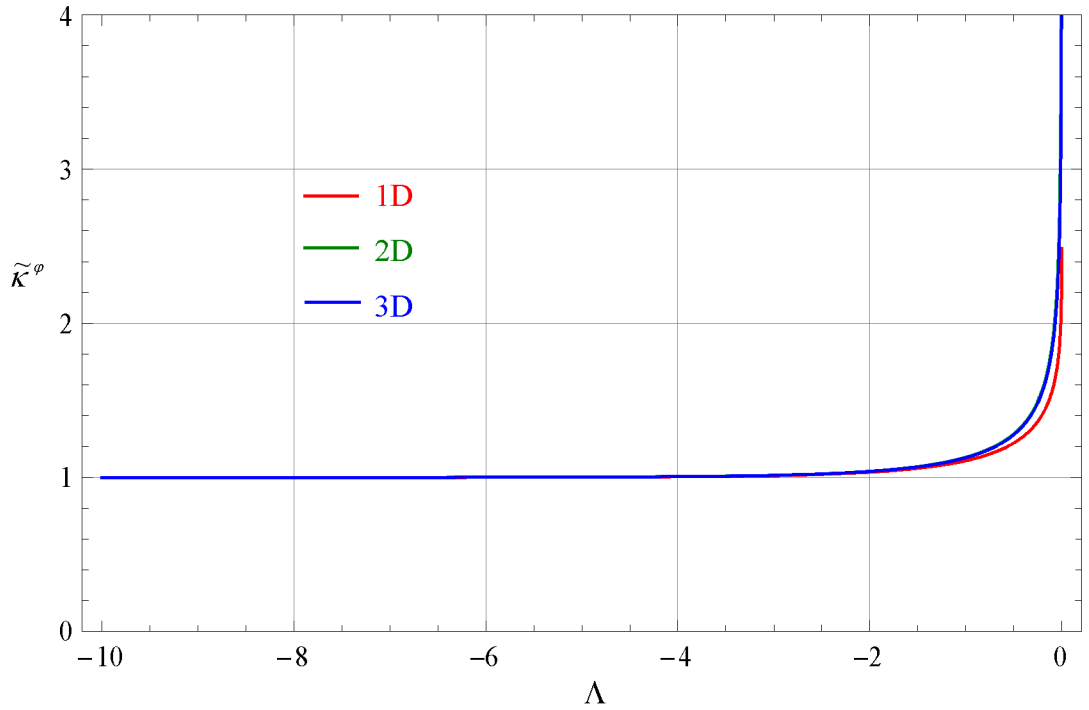


**Şekil 3.13:**  $L_g \gg l_0$  durumu için dejenerere Bose gazında boyutsuz ısı iletim katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.

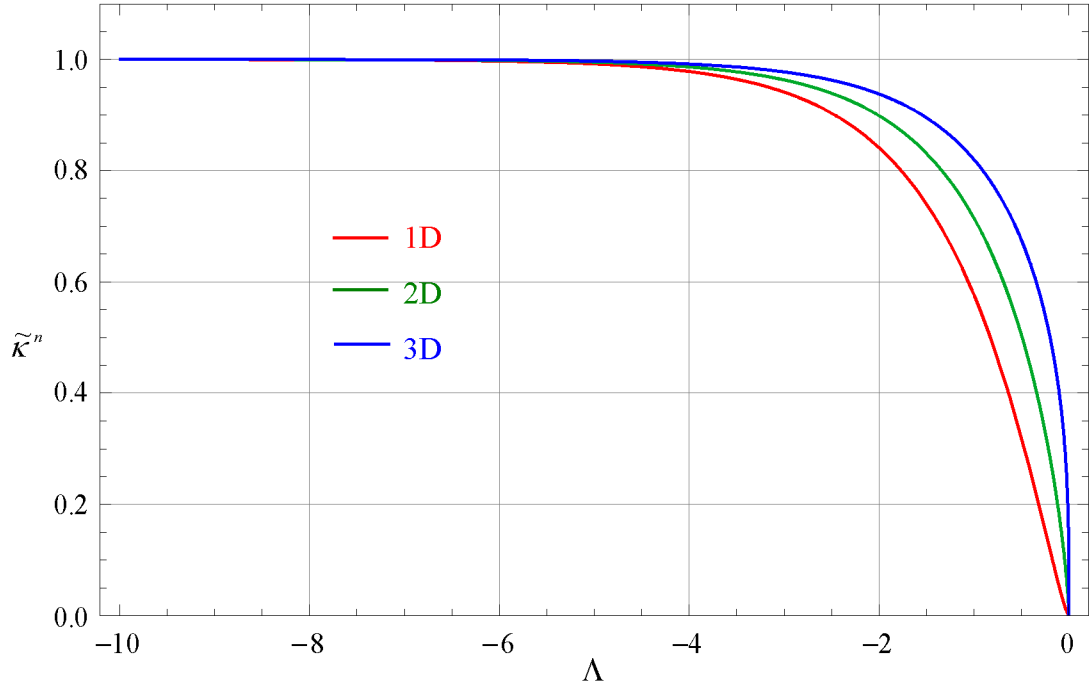
1, 2 ve 3 boyutlu Bose gazının boyutsuz çapraz etkilerine ait Soret, Peltier ve Dufour katsayılarının  $\Lambda$  ile değişimleri sırasıyla Şekil 3.14, Şekil 3.15 ve Şekil 3.16’da görülmektedir. Şekil 3.14’de verilen boyutsuz Soret katsayısının artan dejenerasyonla azalarak sıfıra gittiği, tersi durumda ise arttığı ve Maxwellian gazın değerine yakınsadığı anlaşılmaktadır. Fermi gazında olduğu gibi, burada boyutsuzlaştırma işleminin 1, 2 ve 3 boyut için sırasıyla Tablo 3.3, Tablo 3.4 ve Tablo 3.5’de verilen Maxwellian gazın Soret katsayılarında parantezli terimlerin dışındaki ifadelerle bölünerek elde edildiği unutulmamalıdır. Bu nedenle  $\Lambda$ ’nın -1’den küçük değerleri için boyutsuz Soret katsayısı 1, 2 ve 3 boyut için yine sırasıyla  $(1 - \Lambda)$ ,  $\left(\frac{3}{2} - \Lambda\right)$  ve  $(2 - \Lambda)$  değerlerine yakınsamaktadır. Şekil 3.15’de artan dejenerasyonla Peltier katsayısının 1 boyutlu Peltier katsayısı hariç artarak sonsuza, tersi durumda ise beklendiği gibi 1 değerine yakınsadığı görülmektedir. Şekil 3.16’da Dufour katsayısı artan dejenerasyonla sıfıra gitmektedir.



**Şekil 3.14:**  $L_g \gg l_0$  durumu için dejenere Bose gazında boyutsuz Soret katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.



**Şekil 3.15:**  $L_g \gg l_0$  durumu için dejenere Bose gazında boyutsuz Peltier katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.



**Şekil 3.16:**  $L_g \gg l_0$  durumu için Dejenere Bose gazında boyutsuz Dufour katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.

1 boyutlu Bose gazının boyutsuz Peltier katsayısının artan dejenerasyonla Tablo 3.20'den de görüleceği gibi  $3\zeta(3/2)/\pi \cong 2.49$  değerine yakınsadığı anlaşılmaktadır. 1, 2 ve 3 boyutlu Bose gazının boyutsuz Soret, Peltier ve Dufour katsayılarının şiddetli dejenerasyon koşullarındaki basitleştirilmiş ifadeleri ise Tablo 3.20'da yer almaktadır.

**Tablo 3.19:** Dejenere Bose gazı için 1, 2 ve 3 boyutlu domenlerde boyutsuz iletim, difüzyon ve ısı iletim katsayılarının asimptotik değerleri.

	$D=1$	$D=2$	$D=3$
$\tilde{D}^\varphi$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{-\Lambda}} \left( 1 - \frac{\sqrt{-\Lambda}\xi(1/2)}{\sqrt{\pi}} \right)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\text{Ln}(-\Lambda)\sqrt{-\Lambda}} \left( 1 + \frac{\sqrt{-\Lambda}\xi(1/2)}{\sqrt{\pi}} \right)$	$-\frac{\text{Ln}(-\Lambda)}{\xi(3/2)} \left( 1 + \frac{2\sqrt{-\Lambda}\sqrt{\pi}}{\xi(3/2)} \right)$
$\tilde{D}^n$	$\frac{2\sqrt{-\Lambda}}{\sqrt{\pi}} \left( 1 + \frac{\Lambda}{2} \right)$	$\sqrt{\pi}\sqrt{-\Lambda} \left( 1 + \frac{\sqrt{-\Lambda}\xi(1/2)}{\sqrt{\pi}} \right)$	$-\frac{\text{Ln}(-\Lambda)\sqrt{-\Lambda}}{\sqrt{\pi}} \left( 1 - \frac{\sqrt{-\Lambda}\xi(1/2)}{\sqrt{\pi}} \right)$
$\tilde{K}^T$	$\frac{\pi^{3/2}\sqrt{-\Lambda}}{3} \left( 1 - \frac{\sqrt{-\Lambda}\xi(1/2)}{\sqrt{\pi}} \right)$	$-\frac{5\xi(5/2)}{2\text{Ln}(-\Lambda)} \left( 1 - \frac{3\sqrt{-\Lambda}\xi(3/2)^2}{5\sqrt{\pi}\xi(5/2)} \right)$	$\frac{3\xi(3)}{\xi(3/2)} \left( 1 + \frac{2\sqrt{-\Lambda}\sqrt{\pi}}{\xi(3/2)} + \frac{\pi^4}{54\text{Ln}(-\Lambda)\xi(3)} \right)$

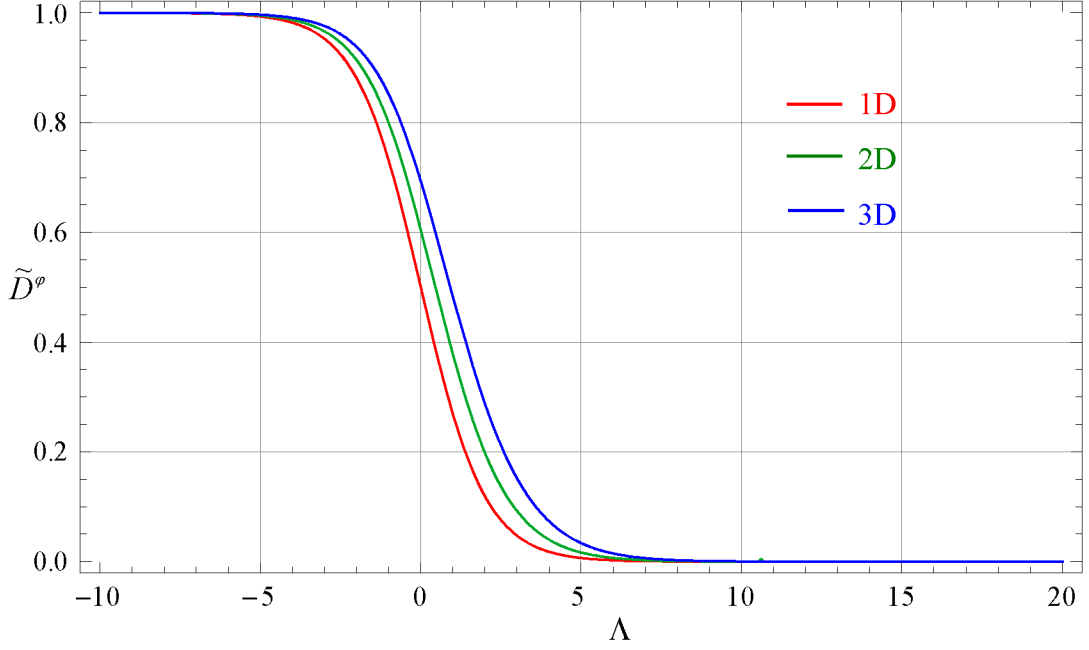
**Tablo 3.20:** Dejenere Bose gazı için 1, 2 ve 3 boyutlu domende boyutsuz Soret, Peltier ve Dufour katsayılarının asimptotik değerleri.

	$D=1$	$D=2$	$D=3$
$\tilde{D}^T$	$\frac{\sqrt{-\Lambda}}{\sqrt{\pi}} \left( 1 - \frac{1}{\text{Ln}(-\Lambda)} \right)$	$-\frac{3}{2} \frac{\xi(3/2)}{\text{Ln}(-\Lambda)} \left( 1 - \frac{4\sqrt{-\Lambda}\sqrt{\pi}}{3\xi(3/2)} \right)$	$\frac{\pi^2}{3\xi(3/2)} \left( 1 + \frac{2\sqrt{-\Lambda}\sqrt{\pi}}{\xi(3/2)} \right)$
$\tilde{K}^\varphi$	$\frac{3\xi(3/2)}{\pi} \left( 1 + \frac{2\sqrt{-\Lambda}\sqrt{\pi}\text{Ln}(-\Lambda)}{3\xi(3/2)} \right)$	$\frac{2\pi^{5/2}}{3\text{Ln}(-\Lambda)^2\sqrt{-\Lambda}} \left( 1 + \frac{9\sqrt{-\Lambda}\text{Ln}(-\Lambda)\xi(3/2)}{2\pi^{5/2}} \right)$	$-\frac{5\text{Ln}(-\Lambda)\xi(5/2)}{\xi(3/2)^2} \left( 1 + \frac{4\sqrt{-\Lambda}\sqrt{\pi}}{\xi(3/2)} + \frac{2\pi^2(2\sqrt{-\Lambda}\sqrt{\pi} + \xi(3/2))}{15\text{Ln}(-\Lambda)\xi(5/2)} \right)$
$\tilde{K}^n$	$\frac{3\xi(3/2)}{2\pi(-\Lambda)^{3/2}} \left( 1 - \frac{3\sqrt{-\Lambda}\xi(1/2)}{\sqrt{\pi}} - \frac{2\sqrt{-\Lambda}\sqrt{\pi}}{\xi(3/2)} + \frac{2\sqrt{-\Lambda}\sqrt{\pi}\text{Ln}(-\Lambda)}{3\xi(3/2)} \right)$	$-\frac{2\pi^{5/2}}{3\text{Ln}(-\Lambda)^3(-\Lambda)^{3/2}} \left( 1 + \frac{\sqrt{-\Lambda}\xi(1/2)}{\sqrt{\pi}} + \frac{9\sqrt{-\Lambda}\text{Ln}(-\Lambda)\xi(3/2)}{2\pi^{5/2}} \right)$	$-\frac{5\sqrt{\pi}\text{Ln}(-\Lambda)\xi(5/2)}{\sqrt{-\Lambda}\xi(3/2)^3} \left( 1 + \frac{2\pi^2\xi(3/2)}{15\text{Ln}(-\Lambda)\xi(5/2)} \right)$

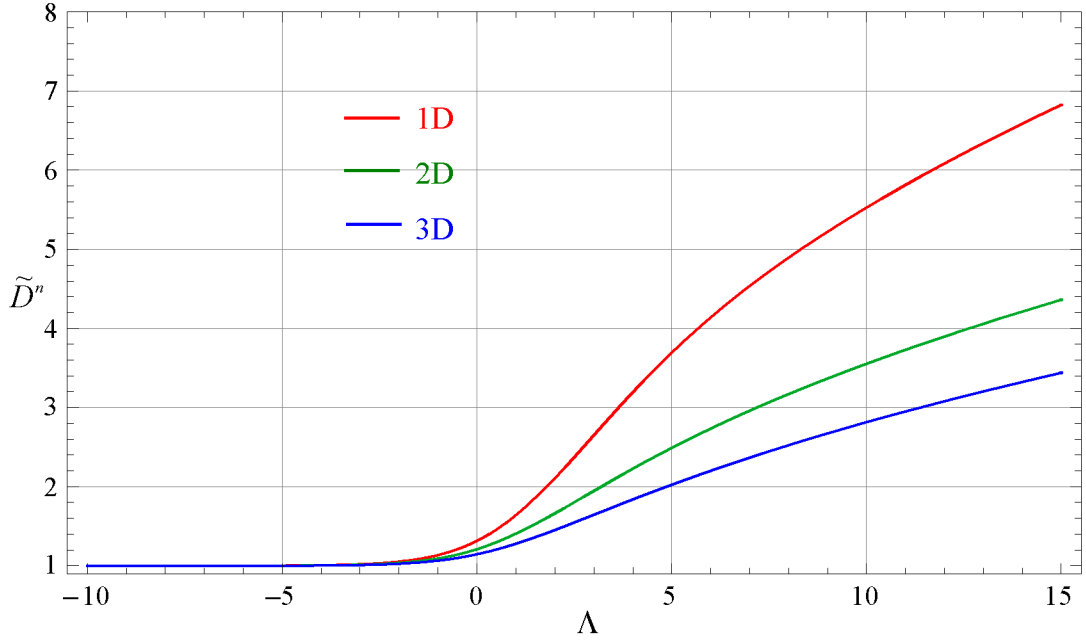


### 3.3.5 $L_g \ll l_0$ Durumu İçin Fermi Gazında Transportun Dejenereyle Değişimi

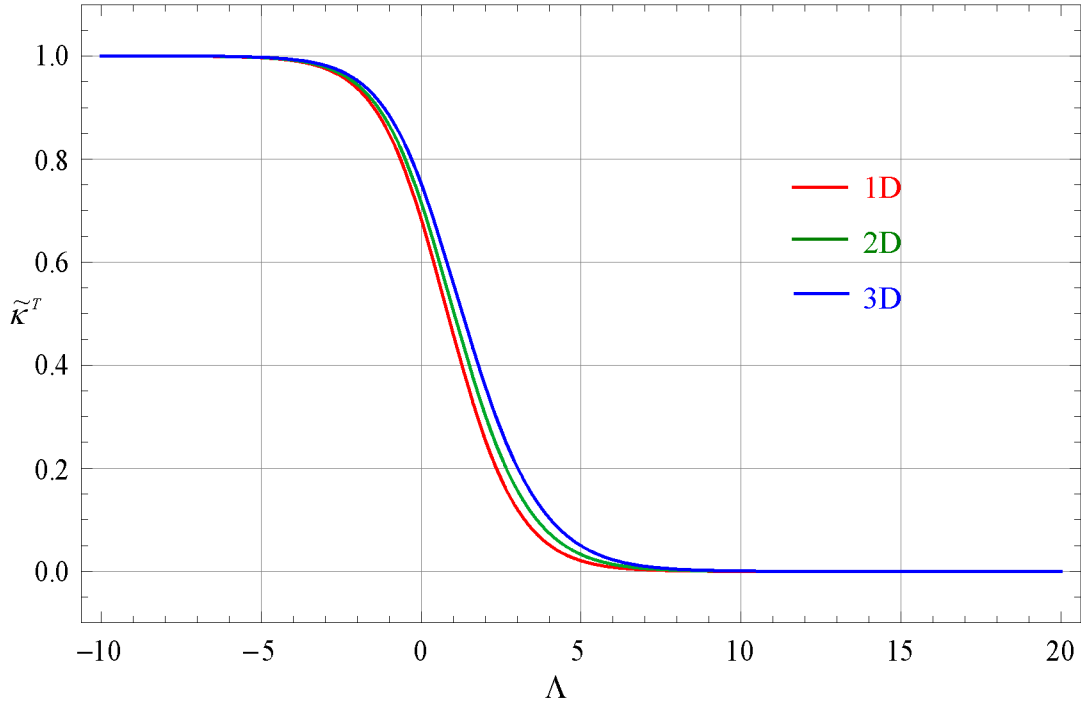
Fermi gazına ait boyutsuz iletkenlik, difüzyon ve ısı iletkenlik katsayılarının artan dejenereyle değişimleri Şekil 3.17, Şekil 3.18 ve Şekil 3.19'da verilmiştir.



Şekil 3.17 :  $L_g \ll l_0$  durumu için dejenere Fermi gazında boyutsuz iletken katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.

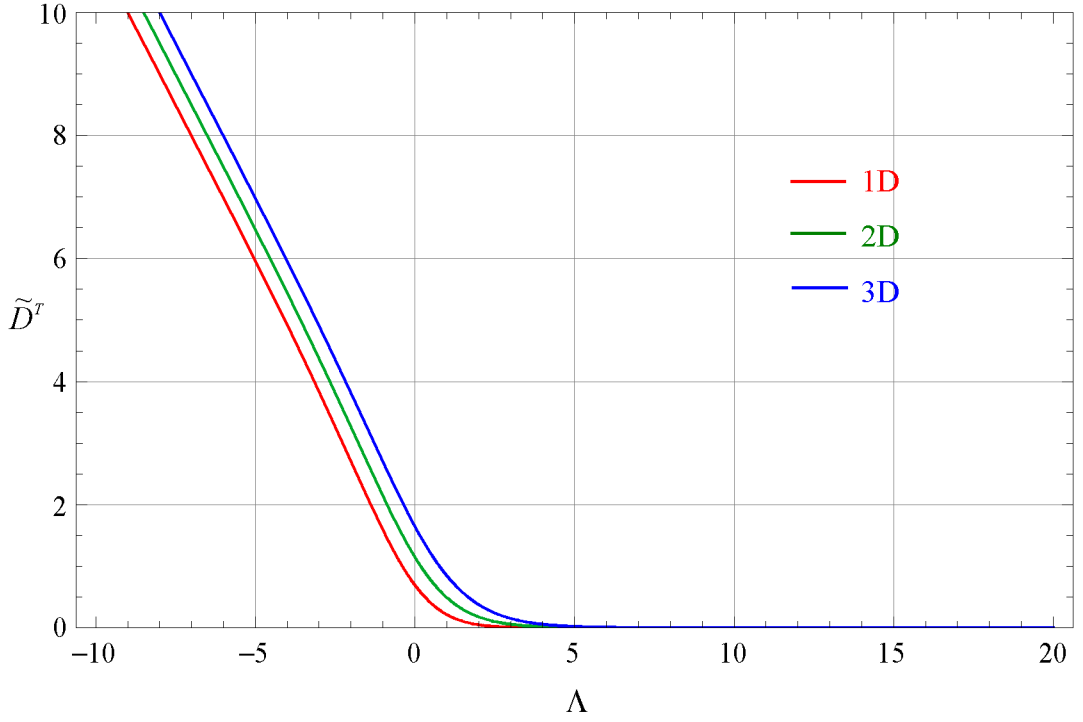


Şekil 3.18 :  $L_g \ll l_0$  durumu için dejenere Fermi gazında boyutsuz difüzyon katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.

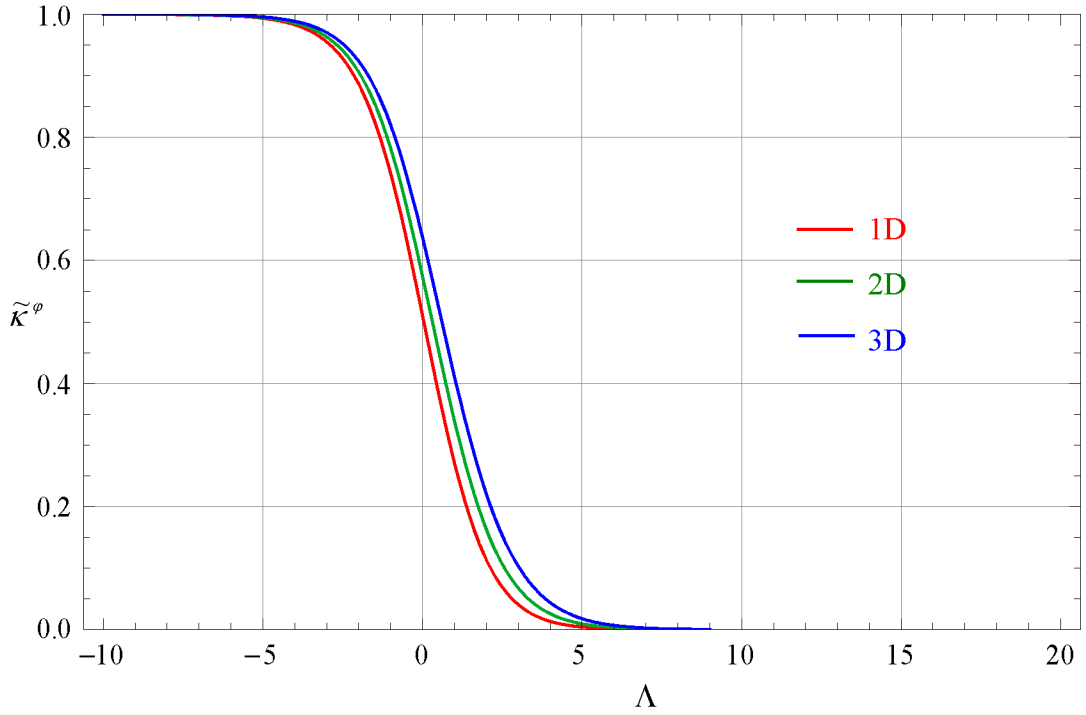


**Şekil 3.19 :**  $L_g \ll l_0$  durumu için dejenere Fermi gazında boyutsuz ısı iletim katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.

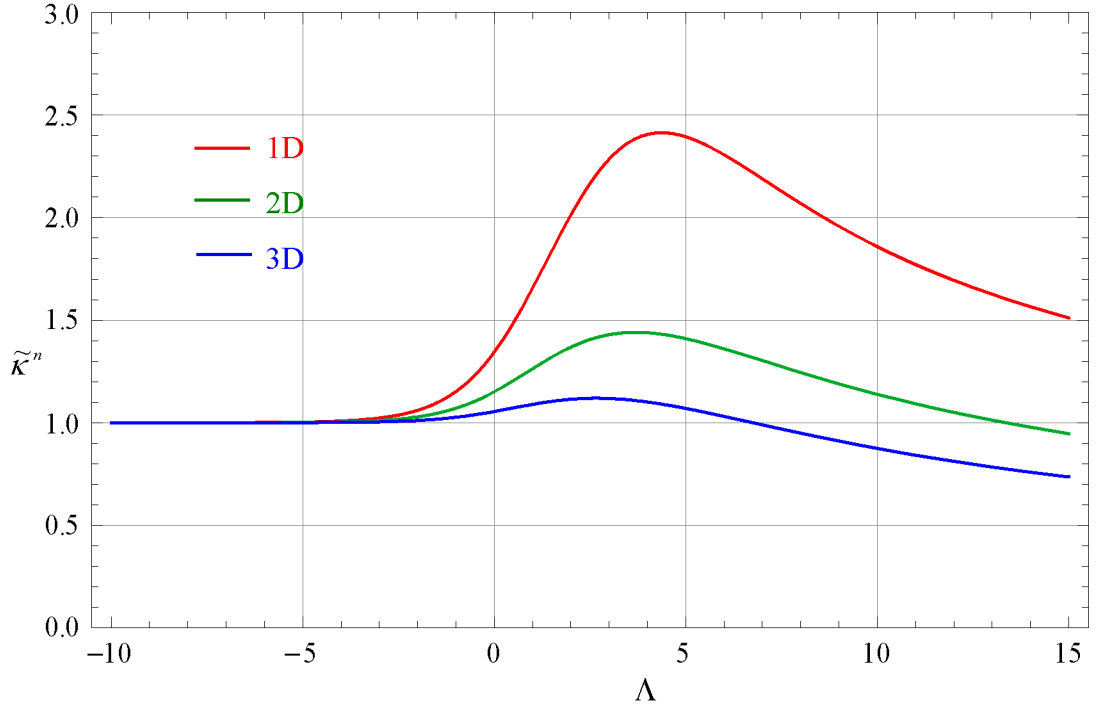
Şekil 3.17 ve Şekil 3.19'dan görüldüğü gibi artan dejenerasyonla iletkenlik ve ısı iletkenliğinin kötüleştiği görülmektedir. Tablo 3.16'da 1, 2 ve 3 boyutlu Fermi gazına ait boyutsuz analitik ifadelerden bu davranış açıkça görülmektedir. Şekil 3.18'de verilen difüzyon katsayısı ise artan dejenerasyonla artmaktadır. Difüzyon katsayısının bu davranışında Tablo 3.16'daki analitik ifadelerden yüksek dereceden polilogaritmik fonksiyonların artan dejenerasyonla düşük dereceli polilogaritmik fonksiyonlara göre daha hızlı büyümesinden kaynaklanmaktadır. Çapraz etkiler olan Soret, Peltier ve Dufour katsayılarının 1, 2 ve 3 boyutlu değişimleri de sırasıyla Şekil 3.20, Şekil 3.21 ve Şekil 3.22'de verilmiştir. Artan dejenerasyonla Soret ve Peltier katsayıları azalmakta Dufour katsayısı ise artan dejenerasyonla önce hafif artmakta ve daha sonra azalmaktadır. Tüm transport katsayılarına ait asimptotik ifadeler Tablo 3.21'de verilmiştir. Asimptotik ifadeler hesaplanırken kullanılan polilogaritmik fonksiyonlara ait bağıntılar EK-A'da yer almaktadır.



**Şekil 3.20 :**  $L_g \ll l_0$  durumu için dejenere Fermi gazında boyutsuz Soret katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.



**Şekil 3.21 :**  $L_g \ll l_0$  durumu için dejenere Fermi gazında boyutsuz Peltier katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.



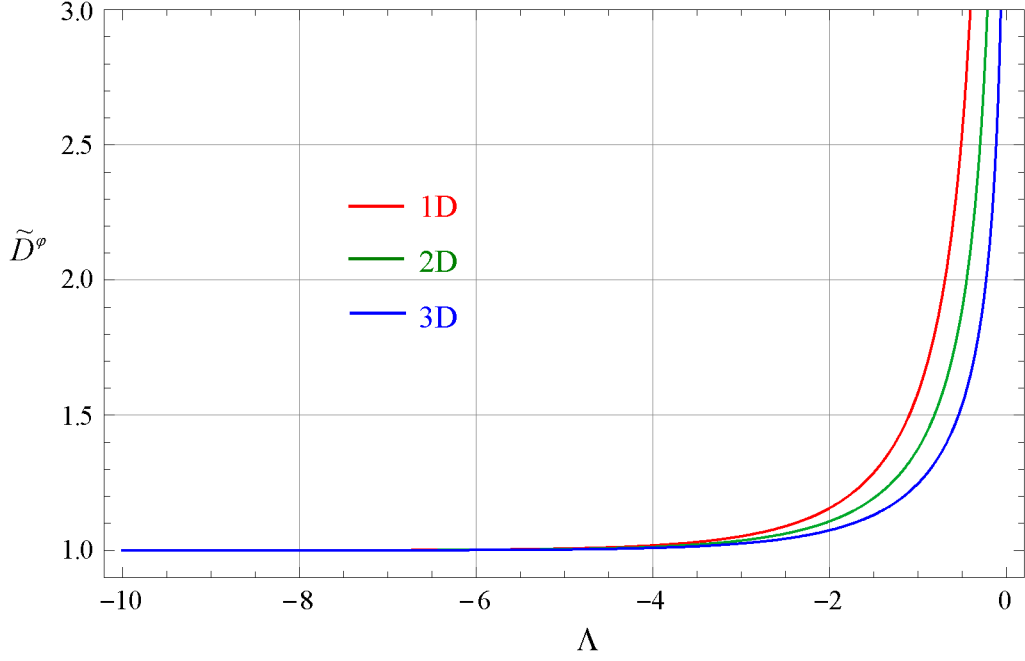
**Şekil 3.22 :**  $L_g \ll l_0$  durumu için dejenere Fermi gazında boyutsuz Dofour katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.

**Tablo 3.21:**  $L_g \ll l_0$  durumu için dejenere Fermi gazında 1,2 ve 3 boyutlu domende boyutsuz iletim, difüzyon, ısı iletim, Soret, Peltier ve Dufour katsayılarının asimptotik değerleri.

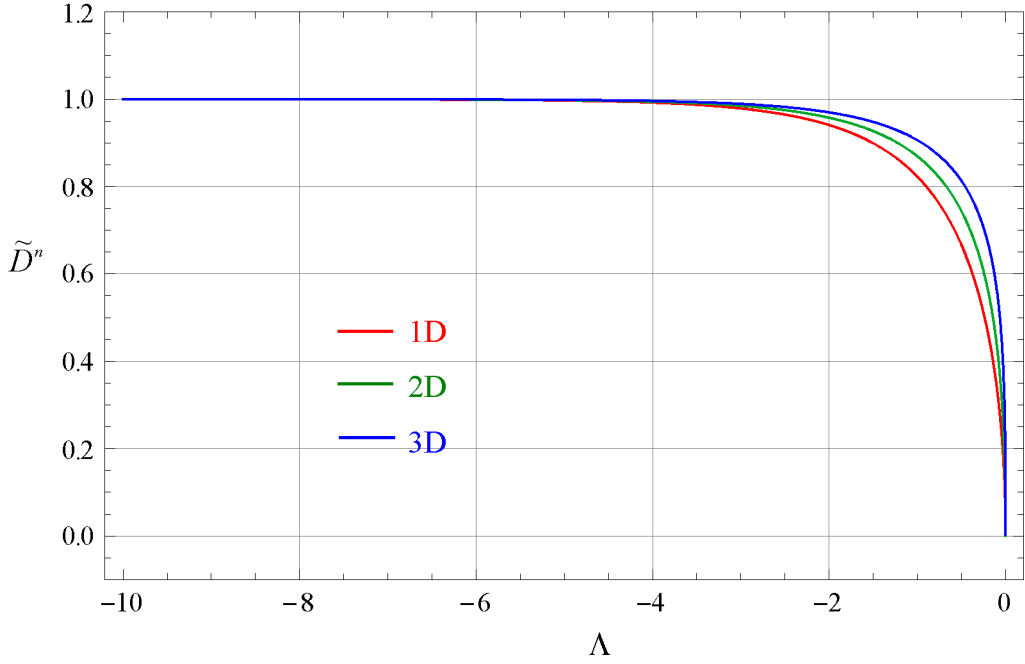
	$D = 1$	$D = 2$	$D = 3$
$\tilde{D}^\varphi$	$\exp(-\Lambda)$	$\exp(-\Lambda) \left( \frac{2\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\pi}} - \frac{\pi^{3/2}}{12\Lambda^{3/2}} \right)$	$\exp(-\Lambda)\Lambda$
$\tilde{D}^n$	$\frac{\sqrt{\pi\Lambda}}{2} - \frac{\pi^{5/2}}{16\Lambda^{3/2}}$	$\frac{2\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\pi}} - \frac{\pi^{3/2}}{12\Lambda^{3/2}}$	$\frac{\sqrt{\pi\Lambda}}{2} + \frac{\pi^{5/2}}{48\Lambda^{3/2}}$
$\tilde{K}^T$	$\exp(-\Lambda) \frac{\pi^2}{3}$	$\exp(-\Lambda) \left( \frac{4\pi^{3/2}\sqrt{\Lambda}}{9} - \frac{\pi^{7/2}}{27\Lambda^{3/2}} \right)$	$\exp(-\Lambda) \left( \frac{\pi^2\Lambda}{6} - \frac{\pi^4}{18\Lambda} \right)$
$\tilde{D}^T$	0	$\exp(-\Lambda) \frac{\pi^{3/2}}{3\sqrt{\Lambda}}$	$\exp(-\Lambda) \frac{\pi^2}{3}$
$\tilde{K}^\varphi$	$\exp(-\Lambda) \frac{\pi^2}{3\Lambda}$	$\exp(-\Lambda) \frac{2\pi^{3/2}}{3\sqrt{\Lambda}}$	$\exp(-\Lambda) \left( \frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^4}{8\Lambda^2} \right)$
$\tilde{K}^n$	$\frac{\pi^{5/2}}{6\sqrt{\Lambda}} - \frac{\pi^{9/2}}{72\Lambda^{5/2}}$	$\frac{2\pi^{3/2}}{3\sqrt{\Lambda}} - \frac{\pi^{7/2}}{18\Lambda^{5/2}}$	$\frac{\pi^{5/2}}{6\sqrt{\Lambda}} - \frac{\pi^{9/2}}{18\Lambda^{5/2}}$

### 3.3.6 $L_g \ll l_0$ Durumu İçin Bose Gazında Transportun Dejenerasyonla Değişimi

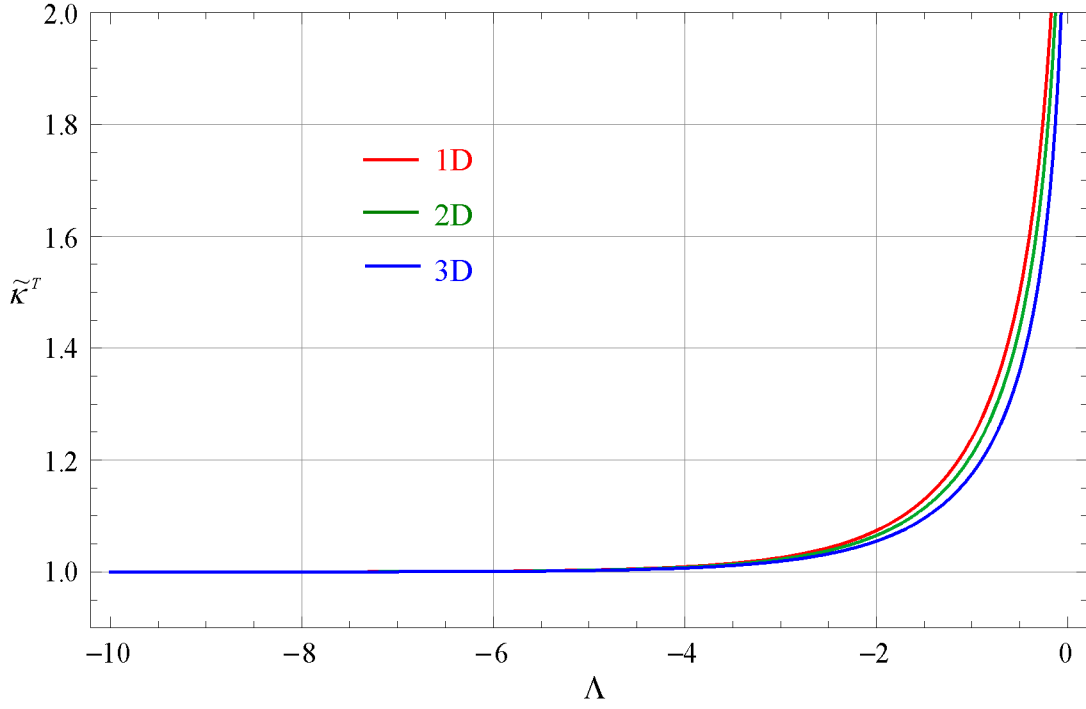
Bose gazına ait boyutsuz iletkenlik, difüzyon ve ısı iletkenlik katsayılarının artan dejenerasyonla değişimleri Şekil 3.23, Şekil 3.24 ve Şekil 3.25’de verilmiştir.



Şekil 3.23 :  $L_g \ll l_0$  durumu için dejenerere Bose gazında boyutsuz iletim katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.

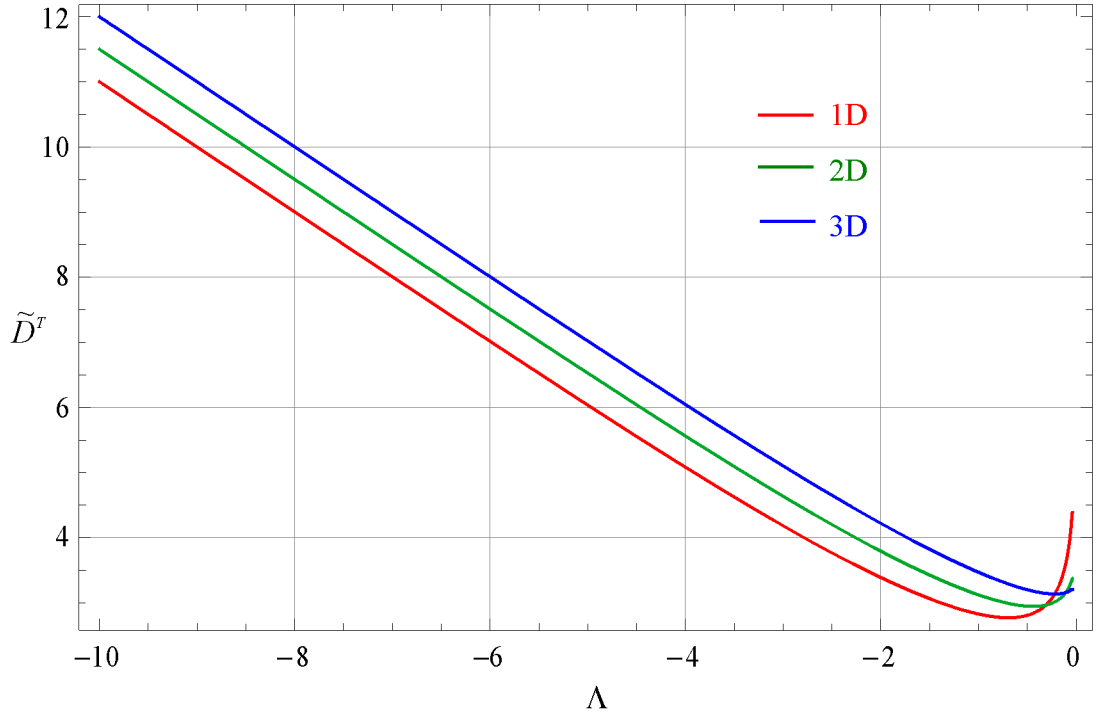


Şekil 3.24 :  $L_g \ll l_0$  durumu için dejenerere Bose gazında boyutsuz difüzyon katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.

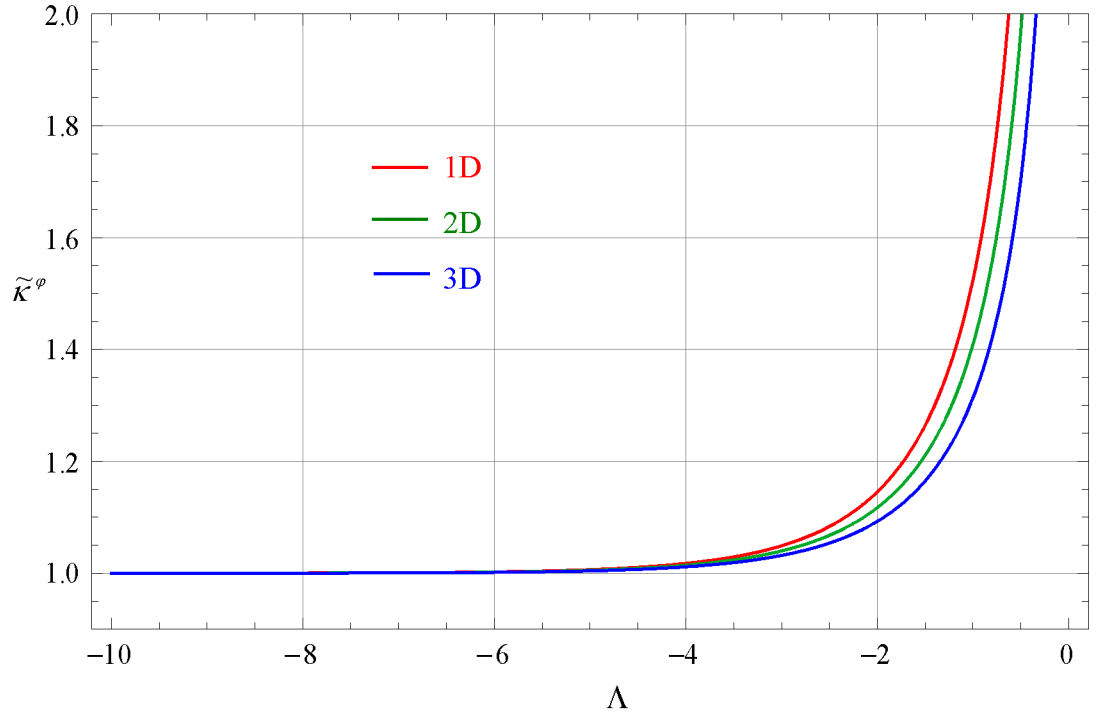


**Şekil 3.25 :**  $L_g \ll l_0$  durumu için dejenerere Bose gazında boyutsuz ısı iletim katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.

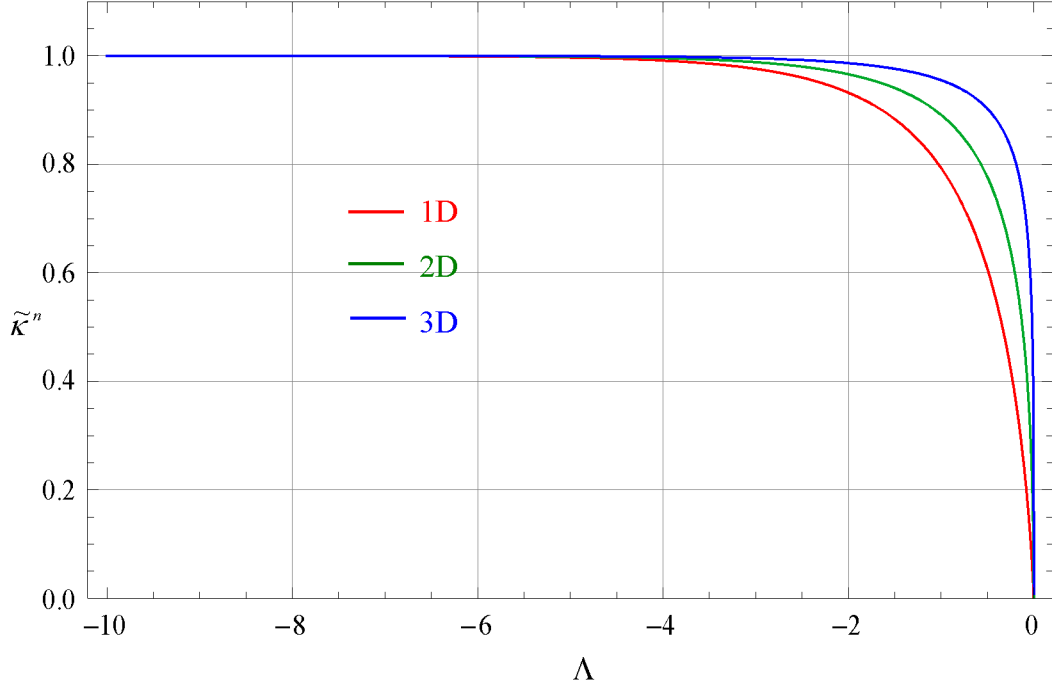
Şekil 3.23 ve Şekil 3.25’de verilen iletkenlik ve ısı iletkenlik katsayılarının artan dejenerasyonla arttığı görülmektedir. Artan dejenerasyonla yer seviyesindeki parçacık sayısı arttığından bu parçacıkların iletkenliğe katkısı da artmaktadır. Şekil 3.24’te verilen difüzyon katsayısı ise artan dejenerasyonla azalmaktadır. Tablo 3.16’da difüzyon katsayısı için verilen analitik ifade de düşük dereceli polilogaritmik ifadenin daha hızlı büyümesi difüzyon katsayısının azalmasına neden olmaktadır. Çapraz etkiler olan Soret, Peltier ve Dufour katsayılarına ait transport katsayılar ise sırasıyla Şekil 3.26, Şekil 3.27 ve Şekil 3.28’de verilmiştir. Soret ve Dofuor katsayıları artan dejenerasyonla azalırken Peltier katsayısı ise artan dejenerasyonla artmaktadır. Tüm transport katsayılarına ait asimptotik ifadeler Tablo 3.22’de verilmiştir.



**Şekil 3.26 :**  $L_g \ll l_0$  durumu için dejenere Bose gazında boyutsuz Soret katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.



**Şekil 3.27 :**  $L_g \ll l_0$  durumu için dejenere Bose gazında boyutsuz Peltier katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.



**Şekil 3.28 :**  $L_g \ll l_0$  durumu için dejenere Bose gazında boyutsuz Dofour katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.

**Tablo 3.22:**  $L_g \ll l_0$  durumu için dejenere Bose gazında 1,2 ve 3 boyutlu domende boyutsuz iletim, difüzyon, ısı iletim, Soret, Peltier ve Dufour katsayılarının asimptotik değerleri .

	$D = 1$	$D = 2$	$D = 3$
$\tilde{D}^\varphi$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{\Lambda}$	$\sqrt{\frac{\pi}{\Lambda}} \zeta\left(\frac{1}{2}\right)$	$-\ln(\Lambda) + \left(\frac{1}{2} - \ln(\Lambda)\right)\Lambda$
$\tilde{D}^n$	$2\sqrt{\frac{\Lambda}{\pi}}$	$\sqrt{\pi\Lambda} + \zeta\left(\frac{1}{2}\right)\Lambda$	$\frac{-\ln(\Lambda)\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\pi}} + \frac{\ln(\Lambda)\zeta\left(\frac{1}{2}\right)\Lambda}{\pi}$
$\tilde{K}^T$	$\frac{\pi^2}{3}(1+\Lambda)$	$\frac{5}{2}\zeta\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{3\zeta\left(\frac{3}{2}\right)^2\sqrt{\Lambda}}{2\sqrt{\pi}}$	$\frac{\pi^4}{18\ln(\Lambda)} + 3\zeta(3)$
$\tilde{D}^T$	$1 - \ln(\Lambda)$	$\frac{3}{2}\zeta\left(\frac{3}{2}\right) - 2\sqrt{\pi\Lambda}$	$\frac{\pi^2}{3}(1+\Lambda)$
$\tilde{K}^\varphi$	$\frac{3\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi\Lambda}}$	$-\frac{2\pi^{5/2}}{3\ln(\Lambda)\sqrt{\Lambda}} - \frac{2\pi^2\zeta\left(\frac{1}{2}\right)}{3\ln(\Lambda)}$	$-\frac{2\pi^2}{3} - \frac{5\ln(\Lambda)\zeta\left(\frac{5}{2}\right)}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}$
$\tilde{K}^n$	$\frac{6\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\Lambda}{\pi}$	$-\frac{2\pi^{5/2}}{3\ln(\Lambda)} - 3\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\Lambda$	$\left(-\frac{2\pi^{3/2}}{3} - \frac{5\ln(\Lambda)\zeta\left(\frac{5}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}\right)\sqrt{\Lambda}$



#### 4. GAZ TRANSPORTUNDA KUANTUM ÖLÇEK ETKİLERİ

Özellikle nano boyutlu sistemlerde gerçekleşen gaz transportunun analizi ve modellenmesi, bu ölçekte belirgin hale gelen kuantum ölçek etkilerinin gözönüne alınması gerekmektedir. Gazlarda kuantum ölçek etkilerinin incelenmesi için seçilebilecek en uygun gaz, hem termal de Broglie dalga boyunun büyük olması hem de asal bir gaz olması sebebiyle helyumdur. Helyum atomunun termal de Broglie dalga boyu katıların kafes yapısının karakteristik boyutlarından daha büyük bir değere sahiptir. Elektronlar kristal yapının içine nüfuz edebilirken, helyum atomunun tesir kesitinin yüksek olması nedeniyle pratikte kristal yapıya hiç nüfuz edemez ve yüzey atomlarından saçılırlar. Bu özellikleri sebebiyle helyum, yüzeylerin incelenmesinde yaygın olarak da kullanılmaktadır (**Dastoor ve Allison, 2003**), (**Farias ve Reider, 1998**), (**Pertaya, 2004**). Sonuç olarak, helyum atomlarının katı yüzeye penetrasyonu söz konusu olmadığından Schrödinger denkleminin çözümlerinde Dirichlet sınır şartı oldukça gerçekçi bir sınır şartı oluşturmaktadır. Tek atomlu bir gaz olan Helyum atomunun, dönme ve titreşim modlarının olmaması da hesaplamalar için ayrıca bir kolaylık sağlar.

Bu bölümde; yerel denge koşulları altında relaksasyon zamanı yaklaşımı kullanılarak transport katsayıları üzerinde kuantum ölçek etkileri incelenmiştir. Bu amaçla önce yerel yoğunluk üzerinde kuantum ölçek etkileri ele alınarak bu etkilerin dağılım fonksiyonuna etkin kuantum potansiyelin ilave edilmesiyle temsil edilebileceği gösterilmiştir. Daha sonra D boyutlu dikdörtgen bir transport domeninde bulunan Maxwellian, Fermi ve Bose gazlarının  $L_g \gg l_0$  ve  $L_g \ll l_0$  transport rejimleri için iletim, difüzyon, ısı iletimi, Soret, Peltier ve Dufour transport katsayıları ve Wiedemann-Franz oranları üzerinde kuantum ölçek etkileri modellenmiştir. Fermi ve Bose gazları için elde edilen transport katsayılarında, kuantum ölçek etkilerinin dejenerasyonla değişimi incelenmiş ve sonuçlar hem grafik hem de tablolarla verilerek tartışılmıştır.

#### 4.1 Kuantum Ölçek Etkileri ve Yerel Yoğunluk Üzerinde Kuantum Ölçek Etkilerinin Etkin Kuantum Potansiyel Yardımıyla Temsili

Kuantum ölçek etkilerinin kaynağı; Heisenberg belirsizlik ilkesinin bir sonucu olarak, sonlu domende tutuklanmış parçacıkların momentum bileşenlerinin mümkün olabilen en küçük değerinin domenin boyutlarıyla ters orantılı bir değere sahip olmasıdır. Böylelikle sonlu bir domende hiçbir zaman parçacıkların momentumları ya da diğer bir deyişle hızları sıfır değerini alamamaktadır. Bu durum, özellikle nano sistemlerin termodinamik ve transport gibi çeşitli özelliklerinin istatistik fiziğin yöntemleriyle hesaplanması sırasında önem kazanmaktadır. Çünkü istatistik fizikte birçok özellik momentum yada hız bileşenleri üzerinden yapılan sonsuz toplam ifadeleri ile temsil edilmekte ve bu toplamların hesaplanması sırasında da toplamlar süreklilik yaklaşımı yapılarak integrallerle yer değiştirmektedir. Yapılan bu yaklaşım sonucu parçacıkların momentum yada hız bileşenlerinin sıfır değerini alabileceği varsayılmış olmakta ve bundan dolayı bir hata gelmektedir. Bu hata, sistemi oluşturan parçacıkların termal de Broglie dalga boyu yanında sistemin boyutlarının çok büyük olduğu makro sistemlerde ihmal edilebilirken mikro ve nano sistemlerde anlamlı bir değer almaktadır. Bu nedenle, mikro ve nano sistemler için toplamların hesaplanmasında toplamları integrallerle yer değiştirmek yerine daha hassas bir hesaplama imkanı sağlayan Poisson toplam formülü gibi bağıntılardan yararlanmak gerekmektedir. Bu tür toplam formülleri, integral yaklaşımdan hatalı olarak gelen sıfır katkısını düzelten bir ikinci terimine sahiptir. Sonuç olarak bu düzeltme terimi, bu çalışmada ele alınan kuantum ölçek etkilerinin matematiksel kaynağını oluşturmaktadır.

Kuantum ölçek etkilerinin gazların global termodinamik özellikleri üzerindeki etkileri literatürde son yıllarda üzerinde çalışılmaya başlanan bir problemi oluşturmaktadır (Dai, 2004), (Sisman, 2004). Global özellikler üzerindeki kuantum ölçek etkilerinin nedenine daha yakından bakıldığında bunun yerel özellikler üzerindeki kuantum etkilerinden kaynaklandığı görülmektedir. Örneğin termodinamik denge durumunda klasik beklentilerin tersine gazın yerel yoğunluk dağılımının domen sınırlarına yakın bölgelerde homojen olmadığı gösterilmiş ve yoğunluğun homojen olmadığı bu tabaka, kalınlığı  $\hbar$  ile orantılı olduğu için de literatürde kuantum sınır tabakası olarak adlandırılmıştır (Sisman ve diğ., 2007). Kuantum sınır tabakasının varlığı; sınırların kuyu potansiyel şeklinde temsil

edilmesine rağmen parçacıkların bu potansiyeli dalga karakterleri nedeniyle tanecik yapısına sahip klasik parçacıklardan farklı olarak sınıra temas ettiklerinde değil, termal dalga boyunun yarısına yakın bir mesafeden itibaren görmeye başladıklarını göstermektedir. Yoğunluk ve yoğunluğa bağlı özellikler üzerinde kuantum ölçek etkilerinin nedeni, kalınlığı termal de Broglie dalga boyu mertebesinde olan bu kuantum tabakasının varlığıdır. Makro sistemlerde sistemin boyutları bu tabakanın kalınlığından çok büyük olduğundan kuantum ölçek etkileri ihmal edilebilirken, mikro ve nano sistemlerde bu tabakanın varlığı sistemin davranışları üzerinde anlamlı değişimler yaratır.

Klasik ve kuantum olasılık yoğunlukları sırası ile  $1/V$  ve  $|\psi_r(x)|^2$  olarak ifade edilirler. Burada  $r$  indisi kuantum hal indisidir. Böylece klasik ve kuantum mekaniğine göre ideal gazın termodinamik denge durumundaki yerel yoğunluk dağılımları da sırası ile,

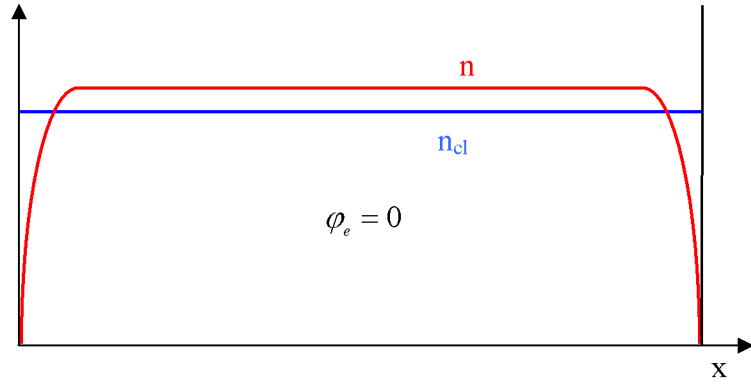
$$n_{cl} = \frac{1}{V} \sum_r f_r \quad (4.1)$$

$$n(x_1) = \sum_r f_r |\psi_r(x_1)|^2 \quad (4.2)$$

olarak ifade edilir. Burada  $f_r$  dağılım fonksiyonu olup gazın istatistiksel özelliklerine göre

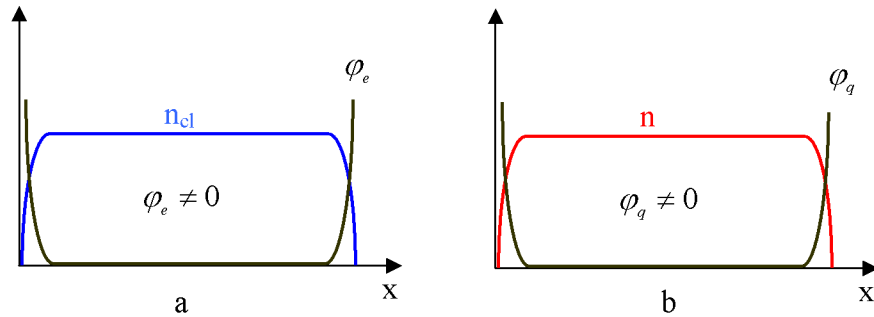
$$\begin{pmatrix} FD \\ BE \end{pmatrix} f_r = \frac{1}{\exp[(\varepsilon_r - \mu_0)/k_b T] \pm 1} \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlanır. Boyutsuz yoğunluk dağılımı,  $\tilde{n}$ , (4.1) ve(4.2) ifadelerinin oranını temsil eder. Klasik yoğunluk dağılımı ifadesi parçacıkların tanecik karakterine sahip parçacıklar olduğu varsayımına dayanırken, kuantum yoğunluk dağılımı parçacıkların dalga karakterini göz önüne almaktadır. Homojen olan klasik yoğunluk dağılımı ( $n_{cl}$ ) ile kuantum yoğunluk dağılımı ( $n$ ) herhangi bir dış potansiyelin,  $\varphi_e$ , olmadığı durum için Şekil 4.1’de temsili olarak gösterilmiştir.



**Şekil 4.1:** Klasik ve kuantum yoğunluk dağılımlarının temsili gösterimi.

Sistem sınırlarına yakın itici bir  $\varphi_e$  dış potansiyelin varlığı durumunda oluşan klasik yoğunluk dağılımı ise Şekil 4.2a'da yine temsili olarak görülmektedir. Şekil 4.1'deki kuantum yoğunluk dağılımı ile Şekil 4.2a'daki klasik yoğunluk dağılımının karşılaştırılması, aradaki yakın benzerliği göstermektedir. Bu benzerlik, herhangi bir dış potansiyelin olmaması durumunda oluşan kuantum yoğunluk dağılımının bir dış potansiyelin varlığı altındaki klasik yoğunluk dağılımı ile temsil edilebileceğini işaret etmektedir. Böylece; gazı, dalga karakterine sahip parçacıklardan oluşan bir sistem şeklinde düşünmek yerine tanecik karakterine sahip klasik parçacıklardan oluşan ancak domen sınırlarını keskin bir kuyu potansiyel yerine profili temsili olarak Şekil 4.2b'de gösterilen ve domen sınırlarına yakın bölgede şiddetlenen itici bir  $\varphi_q$  potansiyeli olarak algıladığını düşünmek mümkündür.  $\varphi_q$  potansiyeli fiziksel yorumlamayı kolaylaştırmaktadır. Klasik yoğunluk ifadesinden hareketle kuantum yoğunluk dağılımını elde etmeyi sağlayan bu potansiyel,  $\varphi_q$ , etkin (efektif) kuantum potansiyel olarak adlandırılır (Shaikh ve diğ., 2005), (Akis ve diğ., 2001).



**Şekil 4.2:** Klasik ve kuantum potansiyeller altında yoğunluk dağılımları.

Etkin kuantum potansiyelin ,  $\varphi_q$ , hesaplanması;  $\varphi_q$  'ya maruz kalan bir gazın klasik yoğunluk dağılımı ile gazın herhangi bir potansiyele maruz kalmaması durumundaki kuantum yoğunluk dağılımının birbirine eşitlenmesini gerektirir. Böylece (4.1)-(4.3) ifadelerinden hareketle

$$\left( \begin{array}{l} FD \\ BE \end{array} \right) \frac{1}{V} \sum_r \frac{1}{\exp[(\varphi_q(\mathbf{x}) + \varepsilon_r - \mu_0)/k_b T] \pm 1} = \sum_r \frac{|\psi_r(\mathbf{x})|^2}{\exp[(\varepsilon_r - \mu_0)/k_b T] \pm 1} \quad (4.4)$$

yazılır. Bu eşitlik  $\varphi_q$  'nun hesaplandığı denklemi oluşturur.

Sonuç olarak;  $\varphi_q$  'nun bilinmesi durumunda, gaz parçacıkları tanecik yapılı klasik parçacıklar olarak ele alınabileceği için yerel yoğunluk ve ona bağlı özellikler üzerindeki kuantum ölçek etkilerini  $\varphi_q$  yardımıyla temsil edebilme imkanı oluşur. Daha önemlisi transport katsayılarının türetiminde kullanılan dağılım fonksiyonunun klasik olasılık yoğunluğu ile tanımlanabilmesine olanak sağlar. Aşağıda Maxwellian, Fermi ve Bose gazları için etkin kuantum potansiyelin türetilmesi verilmiştir.

#### 4.1.1 Maxwellian Gazlarda Etkin Kuantum Potansiyel

Maxwellian gaz için (4.4) ifadesi,

$$\exp[-\varphi_q(\mathbf{x})/k_b T] \frac{1}{V} \sum_r \exp[-\varepsilon_r/k_b T] = \sum_r \exp[-\varepsilon_r/k_b T] |\psi_r(\mathbf{x})|^2 \quad (4.5)$$

şeklinde basitleşir ve buradan etkin kuantum potansiyel,

$$\exp[-\varphi_q(\mathbf{x})/k_b T] = \frac{\sum_r \exp(-\varepsilon_r/k_b T) |\psi_r(\mathbf{x})|^2}{\frac{1}{V} \sum_r \exp(-\varepsilon_r/k_b T)} = \frac{n(\mathbf{x})}{n_{cl}} = \tilde{n}(\mathbf{x}) \quad (4.6)$$

$$\varphi_q(\mathbf{x}) = -k_b T \ln \tilde{n}(\mathbf{x}) \quad (4.7)$$

olarak elde edilir. Böylece yoğunluk dağılımı aşağıdaki gibi yazılabilir

$$n(\mathbf{x}) = n_{cl} e^{-\frac{\varphi_q(\mathbf{x})}{k_b T}} = \left[ \frac{e^{-\frac{\mu_0}{k_b T}}}{V} \sum_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{k_b T}} \right] e^{-\frac{\varphi_q(\mathbf{x})}{k_b T}} \quad (4.8)$$

Burada  $\mu_0$  yer koordinatlarına bağlı olmayıp global (domenin tamamına ait) kimyasal potansiyeli temsil etmektedir.  $\mu_0$ 'ın hesaplanması için domendeki toplam parçacık sayısı,

$$N = \int_V n(x) dx = \frac{e^{\frac{\mu_0}{k_b T}}}{V} \sum_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{k_b T}} \int_V e^{-\frac{\varphi_e(x)}{k_b T}} dx \quad (4.9)$$

olarak yazılır ve (4.6) ifadesinden de görüleceği gibi

$$\int_V e^{-\frac{\varphi_e(x)}{k_b T}} dx = V \quad (4.10)$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$e^{\frac{\mu_0}{k_b T}} = \frac{N}{\sum_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{k_b T}}} \quad (4.11)$$

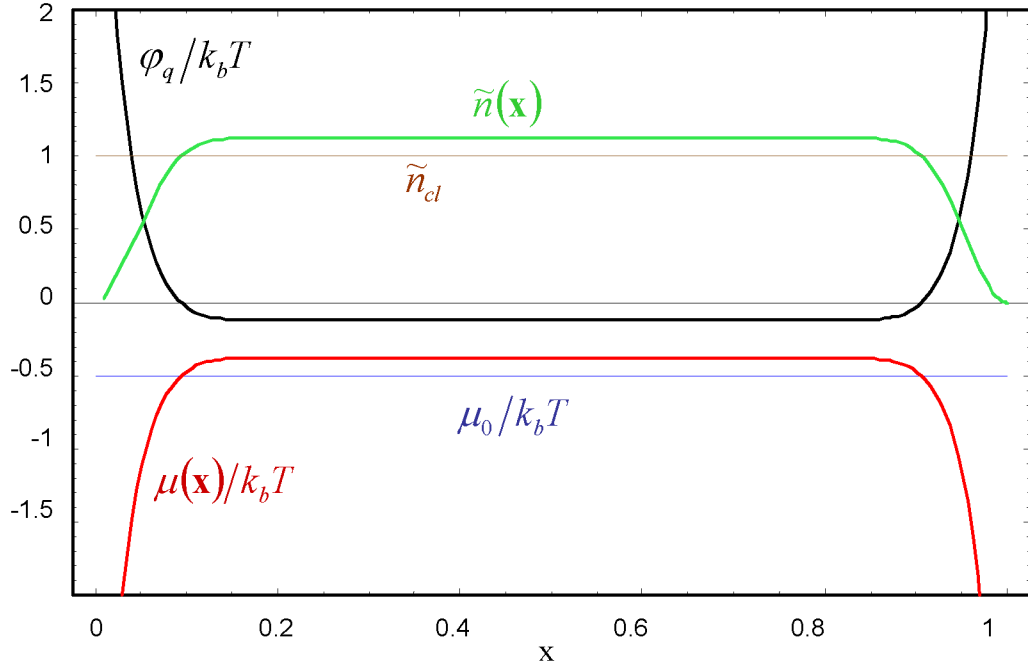
elde edilir. Yerel kimyasal potansiyel,  $\mu(\mathbf{x})$ , ise

$$\mu(\mathbf{x}) = \mu_0 - \varphi_q(\mathbf{x}) \quad (4.12)$$

şeklinde ifade edilir. Böylece yerel kimyasal potansiyel gradyeni dış potansiyel gradyeninin ters işaretlisine eşittir,

$$\frac{\partial \mu(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = - \frac{\partial \varphi_q(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.13)$$

Bir diğer deyişle, yerel kimyasal potansiyel dış potansiyeli dengeleyecek şekilde bir yer bağımlılığı gösterir ve böylece global kimyasal potansiyel sabit bir değer alır. Yerel kimyasal potansiyelin bu yer bağımlılığı yoğunluğun da yer bağımlı olmasına yol açar. Böylelikle yoğunluğun neden termodinamik denge durumunda dahi homojen olmadığı açıklanmış olur. Şekil 4.3'de Maxwellian gazda bir doğrultudaki boyutsuz yoğunluklar, yerel ve global kimyasal potansiyeller ve kuantum potansiyel keyfi bir ölçekte bir arada görülmektedir.



**Şekil 4.3:** Maxwellian gazda bir doğrultudaki boyutsuz yoğunluklar, yerel ve global kimyasal potansiyeller ve kuantum potansiyelin dağılımı.

Dikdörtgen geometride tutuklanmış bir Maxwellian gaz için, kararlı hal Schrödinger denkleminin çözümünden elde edilen özfonksiyonlar (4.6) ifadesinde kullanılarak boyutsuz yoğunluk dağılımı,

$$\tilde{n}(x, y, z) = \frac{2 \sum_{i=1}^{\infty} \exp[-(\alpha_1 i)^2] \sin^2\left(\frac{\pi}{L_x} x_1 i\right) 2 \sum_{j=1}^{\infty} \exp[-(\alpha_2 j)^2] \sin^2\left(\frac{\pi}{L_y} x_2 j\right) 2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp[-(\alpha_3 k)^2] \sin^2\left(\frac{\pi}{L_z} x_3 k\right)}{\sum_{i=1}^{\infty} \exp[-(\alpha_1 i)^2] \sum_{j=1}^{\infty} \exp[-(\alpha_2 j)^2] \sum_{k=1}^{\infty} \exp[-(\alpha_3 k)^2]} \quad (4.14)$$

şeklinde elde edilir. Her bir doğrultuya ait terimin payında yer alan toplam ifadesi, Ek-A'da (A.1) eşitliği ile verilen Poisson toplam formülü kullanılarak ve  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \ll 1$  olduğu göz önüne alınarak

$$\sum_{i=1}^{\infty} \exp[-(\alpha_1 i)^2] \sin^2\left(\frac{\pi i}{L_1} x_1\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha_x} \sigma_1(\tilde{x}_1) \quad (4.15)$$

olarak çözülür. Burada  $\tilde{x} = x/L_1$  ve

$$\sigma_1(\tilde{x}_1) = \left[ 1 - \exp\left[-\left(\frac{\pi \tilde{x}_1}{\alpha_1}\right)^2\right] \right] \left[ 1 - \exp\left[-\left(\frac{\pi(1-\tilde{x}_1)}{\alpha_1}\right)^2\right] \right] \quad (4.16)$$

şeklinde tanımlanır. Paydada yer alan terim ise yine Poisson toplam formülü yardımıyla,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \exp[-(\alpha_1 i)^2] = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha_1} \left(1 - \frac{\alpha_1}{\sqrt{\pi}}\right) \quad (4.17)$$

olarak bulunur. Diğer doğrultulardaki terimler de benzer şekilde çözümlenerek boyutsuz yerel yoğunluk dağılımı için aşağıdaki analitik ifade elde edilir (Şişman ve diğ., 2007).

$$\tilde{n} = \frac{n}{n_{cl}} = \frac{\sigma_1(\tilde{x}_1)}{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\sqrt{\pi}}\right)} \frac{\sigma_2(\tilde{x}_2)}{\left(1 - \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}}\right)} \frac{\sigma_3(\tilde{x}_3)}{\left(1 - \frac{\alpha_3}{\sqrt{\pi}}\right)} = \tilde{\sigma}_1(\tilde{x}_1)\tilde{\sigma}_2(\tilde{x}_2)\tilde{\sigma}_3(\tilde{x}_3) \quad (4.18)$$

Burada  $n_{cl} = N/V$ ,  $\tilde{x}_1 = x_1/L_1$ ,  $\tilde{x}_2 = x_2/L_2$  ve  $\tilde{x}_3 = x_3/L_3$  dir. (4.18) ile ifade edilen boyutsuz yerel yoğunluk dağılımının (4.7)'de kullanılması ile dikdörtgen geometri için etkin kuantum potansiyel

$$\frac{\varphi_q(\mathbf{x})}{k_b T} = -\ln \left[ \frac{\sigma_1(\tilde{x}_1)}{\left(1 - \frac{\alpha_1}{\sqrt{\pi}}\right)} \right] - \ln \left[ \frac{\sigma_2(\tilde{x}_2)}{\left(1 - \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}}\right)} \right] - \ln \left[ \frac{\sigma_3(\tilde{x}_3)}{\left(1 - \frac{\alpha_3}{\sqrt{\pi}}\right)} \right] = \frac{{}^1\varphi_q(x_1)}{k_b T} + \frac{{}^2\varphi_q(x_2)}{k_b T} + \frac{{}^3\varphi_q(x_3)}{k_b T} \quad (4.19)$$

olarak elde edilir. Etkin kuantum potansiyelin tek bir doğrultudaki dağılımı  $\alpha=0.2$  değeri için Şekil 4.3'de görülmektedir. Maxwellian gaz için kuantum potansiyelin verilen bir noktadaki değeri sıcaklığa bağlı olarak değiştirilebilir. Çünkü ortalama dalga boyu sıcaklığın karekökü ile ters orantılı olarak değişmekte ve bu durum parçacıkların gördüğü potansiyeli de değiştirmektedir.

#### 4.1.2 Fermi ve Bose Gazlarında Etkin Kuantum Potansiyel

(4.4) ifadesine dayanarak Fermi ve Bose gazları için de etkin kuantum potansiyeli hesaplamak mümkündür. Ancak analitik çözümler sadece dejenere koşullarda mümkün olup etkin kuantum potansiyel bu koşullar için 1 boyutlu geometride aşağıdaki gibi elde edilir,

$$\sum_i \frac{|\psi_i(\mathbf{x})|^2}{e^{-\Lambda_0 + \frac{\epsilon_i}{k_b T}} + 1} = \frac{2}{L} \sum_i \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{L} x_i\right)}{e^{-\Lambda_0 + (\alpha_i)^2} + 1} \xrightarrow{\Lambda_0 \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\Lambda_0}}{L_c} \left[ 1 - \frac{\alpha_1}{2\pi\sqrt{\Lambda_0}} \frac{L_1}{x_1} \sin\left(\frac{2\pi\sqrt{\Lambda_0}}{\alpha_1} \frac{x_1}{L_1}\right) \right] \left[ 1 - \frac{\alpha_1}{2\pi\sqrt{\Lambda_0}} \frac{L_1}{L_1 - x_1} \sin\left(\frac{2\pi\sqrt{\Lambda_0}}{\alpha_1} \frac{L_1 - x_1}{L_1}\right) \right] \quad (4.20)$$

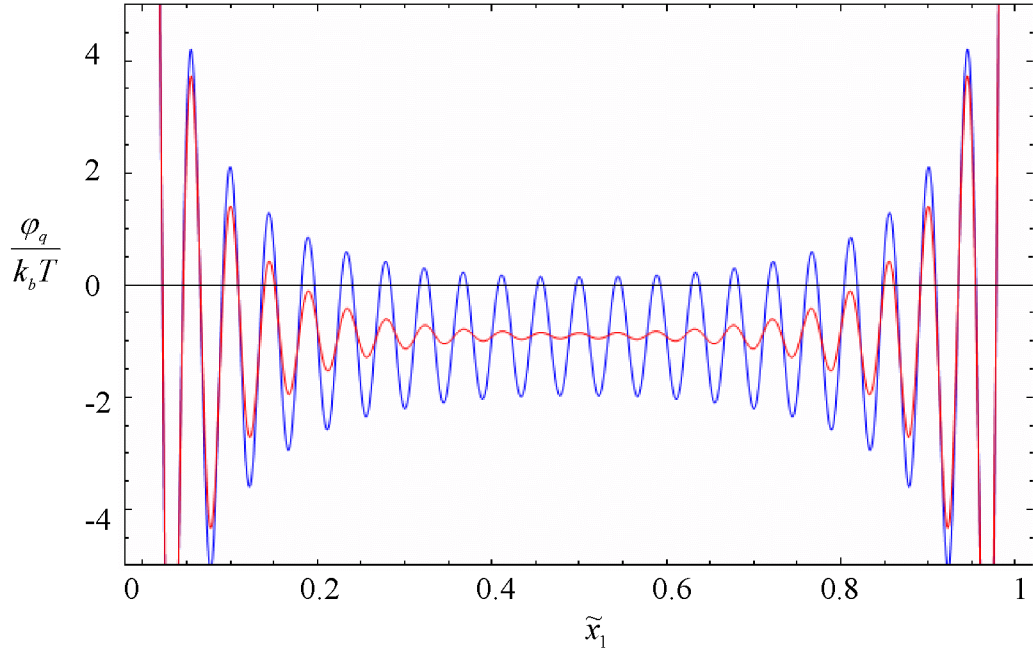


$$\frac{1}{L_1} \sum_i \frac{1}{e^{-\Lambda_0 + \frac{\varphi_q(x_1)}{k_b T} + (\alpha_1 i)^2} + 1} \xrightarrow{\Lambda_0 \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\Lambda_0 - \frac{\varphi_q(x_1)}{k_b T}}}{L_c} - \frac{1}{2L_1} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_q}{k_b T} = \Lambda_0 & \left[ 1 - \left[ 1 - \frac{\alpha_1}{2\pi\sqrt{\Lambda_0}} \frac{L_1}{x_1} \sin\left(\frac{2\pi\sqrt{\Lambda_0}}{\alpha_1} \frac{x_1}{L_1}\right) \right]^2 \left[ 1 - \frac{\alpha_1}{2\pi\sqrt{\Lambda_0}} \frac{L_1}{L_1 - x_1} \sin\left(\frac{2\pi\sqrt{\Lambda_0}}{\alpha_1} \frac{L_1 - x_1}{L_1}\right) \right] \right. \\ & \left. - \frac{\alpha_1}{\sqrt{\Lambda_0}} \left[ 1 - \frac{\alpha_1}{2\pi\sqrt{\Lambda_0}} \frac{L_1}{x_1} \sin\left(\frac{2\pi\sqrt{\Lambda_0}}{\alpha_1} \frac{x_1}{L_1}\right) \right] \left[ 1 - \frac{\alpha_1}{2\pi\sqrt{\Lambda_0}} \frac{L_1}{L_1 - x_1} \sin\left(\frac{2\pi\sqrt{\Lambda_0}}{\alpha_1} \frac{L_1 - x_1}{L_1}\right) \right] \right] \quad (4.22) \end{aligned}$$

(4.4) denkleminin sayısal çözümü ile elde edilen gerçek çözümle (4.22) ifadesi ile verilen analitik çözüm birarada Şekil 4.4'de gösterilmiştir. Kırmızı çizgi gerçek çözümü mavi çizgi ise (4.22) ile verilen yaklaşık analitik çözümü temsil etmektedir. Görüldüğü gibi yaklaşık çözüm sınırlarda oldukça iyi sonuçlar verirken, domenin orta bölgelerinde ortalama değeri gerçek çözümünki ile aynı olmakla beraber salınım genliğini daha yüksek tahmin etmektedir. Ancak  $\Lambda_0$  değerinin çok yüksek seçilmediğine de dikkat edilmelidir. Daha büyük değerlerde çok daha yakın değerler elde edilebilmektedir.

Dejenere Fermi gazında etkin kuantum potansiyel, gazın yerel sıcaklığından daha çok yerel yoğunluğuna bağlıdır. Gazın yerel yoğunluğu da etkin kuantum potansiyele bağlıdır.

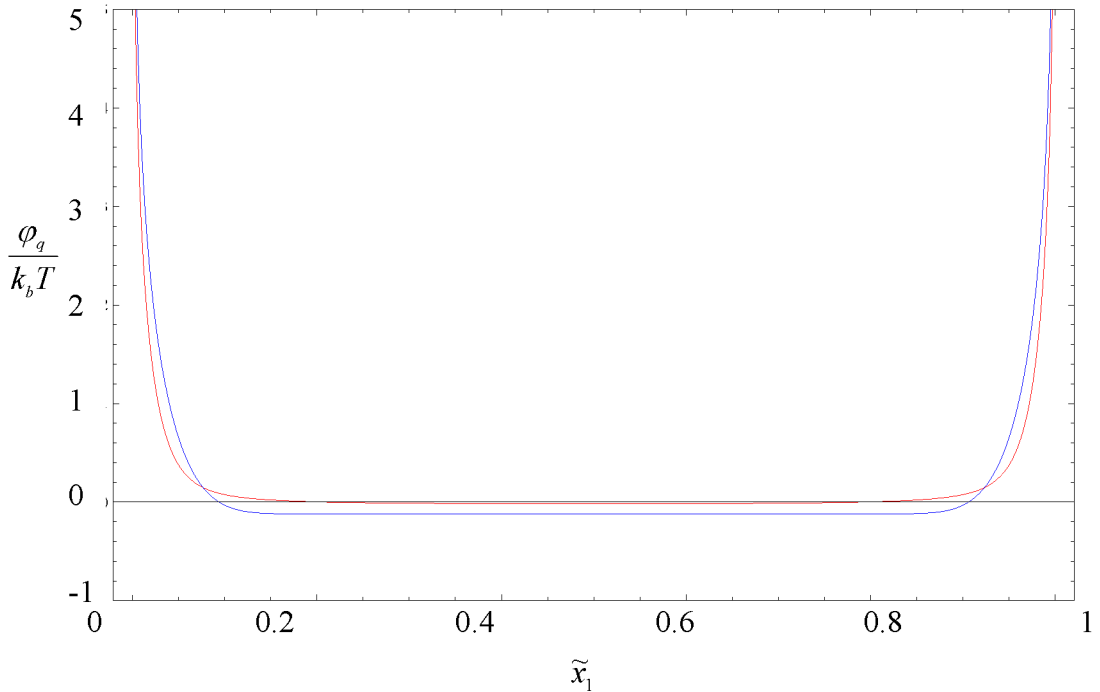


**Şekil 4.4:** Dejenere Fermi gazında etkin kuantum potansiyelin 1 boyutlu yer bağımlılığı,  $\Lambda_0 = 20$ ,  $\alpha = 0.2$ .

Dejenere Fermi gazında olduğu gibi Bose gazında da tek boyutlu bir domende etkin kuantum potansiyel için (4.4)'den hareketle

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\exp\left[-\Lambda_0 + \frac{\varphi_q(x_1)}{k_b T} + (\alpha_1 i)^2\right] - 1} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{L_x} x_1 i\right)}{\exp\left[-\Lambda_0 + (\alpha_1 i)^2\right] - 1} \quad (4.23)$$

denklemini yazılır. (4.23) ifadesi ancak sayısal olarak çözülebilir. Bu çözümün şiddetli dejenerasyon koşullarında ( $\Lambda_0 \rightarrow 0$ ) ve  $\alpha_1 \ll 1$  için sonucu Şekil 4.5'de kırmızı eğri olarak verilmiştir. Aynı şekil üzerinde Maxwellian gazın etkin kuantum potansiyeli de mavi eğri ile verilmiştir. Dejenere Bose gazı için etkin kuantum potansiyelin Maxwellian gazın sonuçlarına yakınsadığı açık olarak görülmektedir. Bu yakınsamanın nedeni kuantum potansiyelin sınırlara yakın bölgelerde pozitif değerler alarak dejenerasyon durumunda (4.4) ifadesindeki istatistiği Maxwellian istatistiğe yakınsatmasıdır. Böylece (4.19) ifadesinin dejenere Bose gazı için de geçerliliğini koruduğu söylenebilir.



**Şekil 4.5:** Dejenere Bose gazında etkin kuantum potansiyelin 1 boyutlu yer bağımlılığı,  $\Lambda_0 = -10^{-6}$ ,  $\alpha = 0.2$ .

## 4.2. Maxwellian Gazlarda Kuantum Ölçek Etkileri Altında Transport

### 4.2.1 $L_g \gg l_0$ ve $Kn \ll 1$ Durumunda Transport

Transport özelliklerin Maxwellian gazlar kullanılarak kuantum ölçek etkisi altında türetilmesi için  $g_{a,b}$ ,  $\tilde{h}$  ve  $\eta$  fonksiyonlarındaki toplamlar Poisson toplam formülü yardımı ile daha hassas bir şekilde hesaplanır. Poisson toplam formülü çift fonksiyonlar için,

$$f(i) = f(-i) \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} f(i) = \int_0^{\infty} f(i) di - \frac{f(0)}{2} + 2 \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f(i) \cos(2\pi si) \quad (4.24)$$

şeklinde yazılabilir. Domenin boyutları parçacıkların termal de Broglie dalga boyundan küçük yada eşit olduğunda Poisson toplam formülündeki üçüncü terim olan süreksizlik düzeltmesi terimi (discreteness correction term), sıfır düzeltmesi olarak adlandırılan ikinci terimin (zero correction term) yanında çok küçük olduğundan ihmal edilir. İkinci terim bu çalışmada ele alınan kuantum ölçek etkilerinin ortaya çıkmasına neden olur ve makro sistemlerde ihmal edilebilir bir düzeltme getirir. D boyutlu dikdörtgen bir domen için  $g_{a,b}$ ,  $\tilde{h}$  ve  $\eta$  fonksiyonlarının toplamlar cinsinden ifadelerini veren (3.61), (3.62) ve (3.63) eşitlikleri kuantum ölçek etkileri göz önüne alınarak hesaplandığında,  $\alpha_i \alpha_j$  ve  $\alpha_i \alpha_j \dots \alpha_k$  ( $i, j, k = 1, 2, \dots, D$ ) çarpımları  $\alpha \ll 1$  olduğundan ihmal edilerek  $a=0$  ve  $s=0$  için sırası ile,

$$g_{0,b} = \frac{\pi^{D/2}}{2\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_D} \frac{\Gamma\left(\frac{D+1+b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} e^{\Lambda} \left[ 1 - \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D+b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D+1+b}{2}\right)} \right] \quad (4.25)$$

$$\eta = \frac{\pi^{D/2}}{\alpha_1 \dots \alpha_D} e^{\Lambda} \left[ 1 - \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \right] \quad (4.26)$$

$$\tilde{h} = \frac{D+2}{2} \left[ 1 + \frac{1}{D+2} \left( \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \right) \right] \quad (4.27)$$

eşitlikleri elde edilirler. Burada;  $\Lambda = \Lambda(\mathbf{x}) = \Lambda_0 - \varphi_q(\mathbf{x})/k_b T$  olduğuna ve transport domeninin açık olduğu doğrultular için Neumann sınır koşulu nedeniyle  $\alpha$  değerlerinin sıfır değerini alacağına dikkat edilmelidir. Tablo 3.2’de verilen transport katsayılarının  $g_{a,b}$ ,  $\tilde{h}$  ve  $\eta$  fonksiyonları cinsinden tanımları kullanılarak D-boyutlu Maxwellian gaz için iletim, difüzyon ve ısı iletim katsayıları sırasıyla,

$$D^{\varphi} = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2mk_b T}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} \left[ 1 - \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)} \right] + \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \quad (4.28)$$

$$D^n = \frac{k_b T}{\sigma_0 \sqrt{2mk_b T}} \frac{1}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} \left[ 1 - \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)} \right] + \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \quad (4.29)$$

$$\kappa^T = \frac{k_b^2 T}{\sigma_0 \sqrt{2mk_b T}} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{D+5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} \left[ 1 - \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D+4}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D+5}{2}\right)} + \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \right] - \frac{\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} \left[ 1 - \frac{2(\alpha_2 + \dots + \alpha_D)}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right)} + \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)} + \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \right] \right] \quad (4.30)$$

olarak bulunur. (4.30) denklemindeki ısı iletkenlik katsayısında yer alan  $\alpha_1$  katsayısının açık kanal için değerinin sıfır alacağına dikkat edilmelidir. Çapraz etkiler olan Soret, Peltier ve Dufour transport katsayılarının D-boyutlu domende Maxwellian gaz için ifadeleri de sırasıyla,

$$D^T = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2mk_b T}} \left[ \begin{array}{c} \frac{\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} \left( 1 - \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right)} + \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \right) \\ - \Lambda \frac{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} \left( 1 - \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)} + \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \right) \end{array} \right] \quad (4.31)$$

$$\kappa^\varphi = \frac{k_b T}{\sigma_0 \sqrt{2mk_b T}} \left[ \begin{array}{c} \frac{\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} \left( 1 - \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right)} + \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \right) \\ - \frac{D+2}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} \left( 1 - \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)} + \frac{D+3}{D+2} \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \right) \end{array} \right] \quad (4.32)$$

$$\kappa^n = \frac{(k_b T)^2}{\sigma_0 \sqrt{2mk_b T} n} \left[ \begin{array}{c} \frac{\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} \left( 1 - \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right)} + \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \right) \\ - \frac{D+2}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} \left( 1 - \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)} + \frac{D+3}{D+2} \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \right) \end{array} \right] \quad (4.33)$$

şeklinde elde edilir. 1, 2 ve 3 boyutlu domenlerde Maxwellian gaz için hesaplanan transport katsayılar ve Wiedemann-Franz oranı Tablo 4.1 ve Tablo 4.2’de verilmiştir.

**Tablo 4.1:** Kuantum ölçek etkisi altında  $L_g \gg l_0$  durumu için 1 ve 2 boyutlu Maxwellian gazda transport katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.

	D=1	D=2
$D^\varphi$	$\frac{2}{\sigma_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi m k_b T}}$	$\frac{\pi}{2\sigma_0} \frac{1}{\sqrt{2m k_b T}} \left[ 1 - \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \right]$
$D^n$	$\frac{2}{\sigma_0} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi m k_b T}} \frac{1}{n}$	$\frac{\pi}{2\sigma_0} \frac{1}{\sqrt{2m \pi k_b T}} \frac{1}{n} \left[ 1 - \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \right]$
$\kappa^T$	$\frac{2}{\sigma_0} \frac{k_b^2 T}{\sqrt{2\pi m k_b T}} \left( 1 + \frac{\alpha_1}{\sqrt{\pi}} \right)$	$\frac{3\pi}{4\sigma_0} \frac{k_b^2 T}{\sqrt{2\pi m k_b T}} \left( 1 - \frac{10\alpha_2}{3\pi^{3/2}} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\sqrt{\pi}} \right)$
$D^T$	$\frac{2}{\sigma_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi m k_b T}} (1 - \Lambda)$	$\frac{\pi}{2\sigma_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi m k_b T}} \left[ \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{8\alpha_2}{3\pi^{3/2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \right) - \Lambda \left( 1 - \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \right) \right]$
$\kappa^\varphi$	$-\frac{k_b T}{\sigma_0 \sqrt{2\pi m k_b T}}$	$-\frac{\pi}{4\sigma_0} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi m k_b T}} \left( 1 - \frac{8\alpha_2}{\pi^{3/2}} + \frac{2\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \right)$
$\kappa^n$	$-\frac{(k_b T)^2}{\sigma_0 \sqrt{2\pi m k_b T} n}$	$-\frac{\pi}{4\sigma_0} \frac{(k_b T)^2}{\sqrt{2\pi m k_b T} n} \left( 1 - \frac{8\alpha_2}{\pi^{3/2}} + \frac{2\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \right)$
$WF$	$k_b^2 T \left( 1 + \frac{\alpha_1}{\sqrt{\pi}} \right)$	$\frac{3}{2} k_b^2 T \left( 1 + \frac{2\alpha_2}{3\pi^{3/2}} + \frac{\alpha_1}{\sqrt{\pi}} \right)$

Isı iletim katsayısındaki  $\alpha_1$  teriminin varlığı, ölçek etkileri gözönüne alındığında, ısı iletim katsayısının kanalın açık yada kapalı olma durumuna göre değişeceğini göstermektedir. Açık kanal durumunda  $\alpha_1 = 0$  olmaktadır. Böylece, ölçek etkisiz durumdan farklı olarak Wiedeman-Franz oranı ısı iletim katsayısının ölçülme koşullarına bağlı olmaktadır. Isı iletim katsayısının açık kanal için ölçülmesi durumunda Wiedemann-Franz oranlarında  $\alpha_1 = 0$  olacağı unutulmamalıdır.

**Tablo 4.2:** Kuantum ölçek etkisi altında  $L_g \gg l_0$  durumu için 3 boyutlu Maxwellian gazda transport katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.

	D=3
$D^\varphi$	$\frac{4}{3\sigma_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \left[ 1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{8} (\alpha_2 + \alpha_3) + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \right]$
$D^n$	$\frac{4}{3\sigma_0} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \frac{1}{n} \left[ 1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{8} (\alpha_2 + \alpha_3) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} (\alpha_2 + \alpha_3) \right]$
$\kappa^T$	$\frac{8}{3\sigma_0} \frac{k_b^2 T}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \left[ 1 - \frac{21\sqrt{\pi}}{64} (\alpha_2 + \alpha_3) + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \right]$
$D^T$	$\frac{4}{3\sigma_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \left[ 2 \left( 1 - \frac{9\sqrt{\pi}}{32} (\alpha_2 + \alpha_3) + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \right) - \Lambda \left( 1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{8} (\alpha_2 + \alpha_3) + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \right) \right]$
$\kappa^\varphi$	$-\frac{2}{3\sigma_0} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \left[ 1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{4} (\alpha_2 + \alpha_3) + 2 \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \right]$
$\kappa^n$	$-\frac{2}{3\sigma_0} \frac{(k_b T)^2}{\sqrt{2\pi mk_b T} n} \left[ 1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{4} (\alpha_2 + \alpha_3) + 2 \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \right]$
$WF$	$k_b^2 T \left[ 1 + \frac{3\sqrt{\pi}}{64} (\alpha_2 + \alpha_3) + \frac{\alpha_1}{\sqrt{\pi}} \right]$

Kuantum ölçek etkisi altında türetilen transport katsayıları,  $Q_{SE}$ , kuantum ölçek etkisiz ifadelerine,  $Q$ , bölünerek boyutsuzlaştırılabilir. Bu şekilde boyutsuzlaştırılan herhangi bir  $Q$  transport katsayısı,

$$\hat{Q} = \frac{Q_{SE}}{Q} \quad (4.34)$$

şeklinde gösterilmiştir. Böylece transport katsayıları üzerinde sadece ölçek etkilerinin neden olduğu değişimleri temsil eden boyutsuz transport katsayıları Tablo 4.3'de verilmiştir.

**Tablo 4.3:** Kuantum ölçek etkisi altında  $L_g \gg l_0$  durumu için 1, 2 ve 3-boyutlu Maxwellian gazda boyutsuz transport katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.

	$D=1$	$D=2$	$D=3$
$\hat{D}^\varphi$	1	$1 - \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}}$	$1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{8}(\alpha_2 + \alpha_3) + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}}$
$\hat{D}^n$	1	$1 - \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}} + \frac{2\alpha_2}{\sqrt{\pi}}$	$1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{8}(\alpha_2 + \alpha_3) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}(\alpha_2 + \alpha_3)$
$\hat{\kappa}^T$	$1 + \frac{\alpha_1}{\sqrt{\pi}}$	$1 - \frac{10}{3\pi^{3/2}} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\sqrt{\pi}}$	$1 - \frac{21\sqrt{\pi}}{64}(\alpha_2 + \alpha_3) + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}}$
$\hat{D}^T$	1	$\frac{\frac{3}{2}\left(1 - \frac{8\alpha_2}{3\pi^{3/2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}}\right) - \Lambda\left(1 - \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}}\right)}{\frac{3}{2} - \Lambda}$	$\frac{2\left(1 - \frac{9\sqrt{\pi}}{32}(\alpha_2 + \alpha_3) + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}}\right) - \Lambda\left(1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{8}(\alpha_2 + \alpha_3) + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}}\right)}{2 - \Lambda}$
$\hat{\kappa}^\varphi$	1	$1 - \frac{8\alpha_2}{\pi^{3/2}} + \frac{2\alpha_2}{\sqrt{\pi}}$	$1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{4}(\alpha_2 + \alpha_3) + 2\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}}$
$\hat{\kappa}^n$	1	$1 - \frac{8\alpha_2}{\pi^{3/2}} + \frac{3\alpha_2}{\sqrt{\pi}}$	$1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{4}(\alpha_2 + \alpha_3) + \frac{3(\alpha_2 + \alpha_3)}{\sqrt{\pi}}$
$WF^{\hat{}}$	$1 + \frac{\alpha_1}{\sqrt{\pi}}$	$\frac{3}{2}k_b^2T\left(1 + \frac{2\alpha_2}{3\pi^{3/2}} + \frac{\alpha_1}{\sqrt{\pi}}\right)$	$k_b^2T\left[1 + \frac{3\sqrt{\pi}}{64}(\alpha_2 + \alpha_3) + \frac{\alpha_1}{\sqrt{\pi}}\right]$



#### 4.2.2 $L_g \ll l_0$ ve $Kn \ll 1$ Durumunda Transport

(4.28)-(4.33) eşitliklerinde  $\sigma_0 = 1/nL_g$  yazılarak bu şartlara ait transport katsayılar kolaylıkla elde edilir. D boyutlu bir domende kuantum ölçek etkileri dikkate alındığında direkt etkiler olan iletim, difüzyon ve ısı iletim katsayıları sırasıyla,

$$D^\varphi = \frac{nL_g}{\sqrt{2mk_bT}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} \left[ 1 - \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)} \right] + \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \quad (4.35)$$

$$D^n = \frac{k_bTL_g}{\sqrt{2mk_bT}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} \left[ 1 - \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)} \right] + \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \quad (4.36)$$

$$\kappa^T = \frac{k_b^2TnL_g}{\sqrt{2mk_bT}} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{D+5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} \left[ 1 - \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D+4}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D+5}{2}\right)} + \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \right] - \frac{\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} \left[ 1 - \frac{2(\alpha_2 + \dots + \alpha_D)}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right)} \right] + \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)} + \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \right] \quad (4.37)$$

olarak bulunur. Çapraz etkiler olan Sorret, Peltier ve Dufour transport katsayılarının D-boyutlu domende Maxwellian gaz için ifadeleri de sırasıyla,

$$D^T = \frac{nL_g}{\sqrt{2mk_bT}} \left[ \begin{array}{c} \frac{\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} \left( 1 - \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right)} + \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \right) \\ -\Lambda \frac{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} \left( 1 - \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)} + \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \right) \end{array} \right] \quad (4.38)$$

$$\kappa^\varphi = \frac{k_b T n L_g}{\sqrt{2mk_bT}} \left[ \begin{array}{c} \frac{\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} \left( 1 - \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right)} + \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \right) \\ - \frac{D+2}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} \left( 1 - \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)} + \frac{D+3}{D+2} \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \right) \end{array} \right] \quad (4.39)$$

$$\kappa^n = \frac{(k_b T)^2 L_g}{\sqrt{2mk_bT}} \left[ \begin{array}{c} \frac{\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} \left( 1 - \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right)} + \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \right) \\ - \frac{D+2}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} \left( 1 - \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right)} + \frac{D+3}{D+2} \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \right) \end{array} \right] \quad (4.40)$$

şeklinde bulunur. Gerek (4.27)-(4.33) ifadeleri gerekse bundan sonra verilecek olan ifadeler, ölçek etkileri ortadan kalktığıında ( $\alpha$  değerlerinin sıfır olması durumu) ilgili büyüklüklerin Bölüm 3’de elde edilen ifadelerine en kolay ulaşılabileceği formatta verilmiştir. Kuantum ölçek etkisi altında 1, 2 ve 3 boyutlu Maxwellian gazlar için hesaplanan transport katsayıları Tablo 4.4 ve Tablo 4.5’te, boyutsuz transport katsayıları ise Tablo 4.6’da verilmiştir. Burada da boyutsuzlaştırma işlemi (4.34) eşitliği kullanılarak yapılmıştır. Boyutsuzlaştırmalar sırasında yerel yoğunluk  $n$ ’e bağlı katsayılar ölçek etkili ifadelerin ölçek etkisiz ifadelere bölümünde  $n$  değerinin aynı olmadığı ve doğrudan sadeleştirilemeyeceğine dikkat edilmelidir. Nitekim yoğunlukların oranı yoğunluğa gelen ölçek etkisini verecektir.

**Tablo 4.4:** Kuantum ölçek etkisi altında  $L_g \ll l_0$  durumu için 1 ve 2 boyutlu Maxwellian gazda transport katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.

	D=1	D=2
$D^\varphi$	$2nL_g \frac{1}{\sqrt{2\pi mk_b T}}$	$\frac{\pi n L_g}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \left[ 1 - \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \right]$
$D^n$	$2L_g \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi mk_b T}}$	$\frac{\pi L_g}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \left[ 1 - \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \right]$
$\kappa^T$	$2nL_g \frac{k_b^2 T}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \left( 1 + \frac{\alpha_1}{\sqrt{\pi}} \right)$	$\frac{3\pi n L_g}{4} \frac{k_b^2 T}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \left( 1 - \frac{10\alpha_2}{3\pi^{3/2}} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\sqrt{\pi}} \right)$
$D^T$	$2nL_g \frac{1}{\sqrt{2\pi mk_b T}} (1 - \Lambda)$	$\frac{\pi n L_g}{2\sqrt{2\pi mk_b T}} \left[ \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{8\alpha_2}{3\pi^{3/2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \right) \right]$ $-\Lambda \left( 1 - \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \right)$
$\kappa^\varphi$	$-\frac{k_b T n L_g}{\sqrt{2\pi mk_b T}}$	$-\frac{\pi n L_g}{4} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \left( 1 - \frac{8\alpha_2}{\pi^{3/2}} + \frac{2\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \right)$
$\kappa^n$	$-\frac{(k_b T)^2 L_g}{\sqrt{2\pi mk_b T}}$	$-\frac{\pi L_g}{4} \frac{(k_b T)^2}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \left( 1 - \frac{8\alpha_2}{\pi^{3/2}} + \frac{2\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \right)$
$WF$	$k_b^2 T \left( 1 + \frac{\alpha_1}{\sqrt{\pi}} \right)$	$\frac{3}{2} k_b^2 T \left( 1 + \frac{2\alpha_2}{3\pi^{3/2}} + \frac{\alpha_1}{\sqrt{\pi}} \right)$

Kuantum ölçek etkisi altında  $L_g \ll l_0$  durumu için 1, 2 ve 3 boyutlu Maxwellian gazlar için hesaplanarak Tablo 4.5, Tablo 4.6 ve Tablo 4.7' de verilen ve evrensel bir sabit olan Wiedemann-Franz oranlarının  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 'e bağlı olduğundan evrenselliğini yitirdiği görülmektedir.

**Tablo 4.5:** Kuantum ölçek etkisi altında  $L_g \ll l_0$  durumu için 3 boyutlu Maxwellian gazda transport katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.

	D=3
$D^\varphi$	$\frac{4nL_g}{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \left[ 1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{8}(\alpha_2 + \alpha_3) + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \right]$
$D^n$	$\frac{4L_g}{3} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \left[ 1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{8}(\alpha_2 + \alpha_3) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\alpha_2 + \alpha_3) \right]$
$\kappa^T$	$\frac{8nL_g}{3} \frac{k_b^2 T}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \left[ 1 - \frac{21\sqrt{\pi}}{64}(\alpha_2 + \alpha_3) + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \right]$
$D^T$	$\frac{4nL_g}{3\sqrt{2\pi mk_b T}} \left[ \begin{array}{c} 2 \left( 1 - \frac{9\sqrt{\pi}(\alpha_2 + \alpha_3)}{32} + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \right) \\ - \Lambda \left( 1 - \frac{3\sqrt{\pi}(\alpha_2 + \alpha_3)}{8} + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \right) \end{array} \right]$
$\kappa^\varphi$	$-\frac{2nL_g}{3} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \left[ 1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{4}(\alpha_2 + \alpha_3) + 2\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \right]$
$\kappa^n$	$-\frac{2L_g}{3} \frac{(k_b T)^2}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \left[ 1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{4}(\alpha_2 + \alpha_3) + 2\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \right]$
$WF$	$2k_b^2 T \left[ 1 + \frac{3\sqrt{\pi}}{64}(\alpha_2 + \alpha_3) + \frac{\alpha_1}{\sqrt{\pi}} \right]$

**Tablo 4.6:**  $L_g \ll l_0$  durumu için 1, 2 ve 3 boyutlu domende boyutsuz katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.

	$D=1$	$D=2$	$D=3$
$\hat{D}^\varphi$	1	$1 - \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}}$	$1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{8}(\alpha_2 + \alpha_3)$
$\hat{D}^n$	1	$1 - \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}}$	$1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{8}(\alpha_2 + \alpha_3) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\alpha_2 + \alpha_3)$
$\hat{\kappa}^T$	1	$1 - \frac{10\alpha_2}{3\pi^{3/2}}$	$1 - \frac{21\sqrt{\pi}}{64}(\alpha_2 + \alpha_3)$
$\hat{D}^T$	1	$\frac{\frac{3}{2}\left(1 - \frac{8\alpha_2}{3\pi^{3/2}}\right) - \Lambda\left(1 - \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}}\right)}{\frac{3}{2} - \Lambda}$	$\frac{2\left(1 - \frac{9\sqrt{\pi}}{32}(\alpha_2 + \alpha_3)\right) - \Lambda\left(1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{8}(\alpha_2 + \alpha_3)\right)}{2 - \Lambda}$
$\hat{\kappa}^\varphi$	1	$1 - \frac{8\alpha_2}{\pi^{3/2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}}$	$1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{4}(\alpha_2 + \alpha_3) + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}}$
$\hat{\kappa}^n$	1	$1 - \frac{8\alpha_2}{\pi^{3/2}} + \frac{2\alpha_2}{\sqrt{\pi}}$	$1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{4}(\alpha_2 + \alpha_3) + \frac{2(\alpha_2 + \alpha_3)}{\sqrt{\pi}}$
$WF$	1	$1 + \frac{2\alpha_2}{3\pi^{3/2}}$	$1 + \frac{3\sqrt{\pi}}{64}(\alpha_2 + \alpha_3)$

### 4.3 Fermi ve Bose Gazlarında Kuantum Ölçek Etkileri Altında Transport

#### 4.3.1 $L_g \gg l_0$ ve $Kn \ll 1$ Durumunda Transport

D boyutlu Fermi ve Bose gazları için,  $a=0$  ve  $s=0$  olmak üzere  $g_{0,b}$  ve  $\eta$  fonksiyonlarının genelleştirilmiş ifadeleri; kuantum ölçek etkisi altında (3.61), (3.62) ve (3.63) eşitliklerindeki toplamlar Poisson toplam formülü ile hesaplanarak  $\alpha_i \alpha_j$  ve  $\alpha_i \alpha_j \dots \alpha_D$  ( $i, j, k = 1, 2, \dots, D$ ) çarpımları  $\alpha \ll 1$  olduğundan ihmal edildiğinde sırası ile,

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{c} FD \\ BE \end{array} \right) g_{0,b} = \mp \frac{\pi^{D/2}}{2\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_D} \frac{\Gamma\left(\frac{D+1+b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)} Li_{\frac{D+b-1}{2}} \\ \left[ 1 - \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D+b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D+1+b}{2}\right)} \frac{Li_{\frac{D+b-2}{2}}}{Li_{\frac{D+b-1}{2}}} \right] \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\left( \begin{array}{c} FD \\ BE \end{array} \right) \eta = \mp \frac{\pi^{D/2}}{\alpha_1 \dots \alpha_D} Li_{\frac{D}{2}} \left[ 1 - \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{\frac{D-1}{2}}}{Li_{\frac{D}{2}}} \right] \quad (4.42)$$

olarak elde edilir. Burada yine  $\Lambda = \Lambda(\mathbf{x}) = \Lambda_0 - \varphi_q(\mathbf{x})/k_b T$  olduğu ve transport domeninin açık olduğu doğrultularda  $\alpha$  değerlerinin sıfır değerini alacağına dikkat edilmelidir. Fermi ve Bose gazları için difüzyon katsayısının hesabı için gereken  $\partial\eta/\partial\Lambda$  teriminin D-boyutlu genelleştirilmiş ifadesi,

$$\left( \begin{array}{c} FD \\ BE \end{array} \right) \left( \frac{\partial\eta}{\partial\Lambda} \right)_T = \mp \frac{\pi^{D/2}}{\alpha_1 \dots \alpha_D} Li_{\frac{D-2}{2}} \left( 1 - \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{\frac{D-3}{2}}}{Li_{\frac{D-2}{2}}} \right) \quad (4.43)$$

olmak üzere genelleştirilmiş iletim, difüzyon ve ısı iletim transport katsayıları sırasıyla,

$$\left(\frac{FD}{BE}\right)_{D^\varphi} = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2mk_b T}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right) Li_{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) Li_{\frac{D}{2}}} \left[ 1 - \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) Li_{\frac{D-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right) Li_{\frac{D-1}{2}}} + \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{\frac{D-1}{2}}}{Li_{\frac{D}{2}}} \right] \quad (4.44)$$

$$\left(\frac{FD}{BE}\right)_{D^n} = \frac{k_b T}{\sigma_0 \sqrt{2mk_b T}} \frac{1}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right) Li_{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) Li_{\frac{D-2}{2}}} \left[ 1 - \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) Li_{\frac{D-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right) Li_{\frac{D-1}{2}}} + \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{\frac{D-3}{2}}}{Li_{\frac{D-2}{2}}} \right] \quad (4.45)$$

$$\left(\frac{FD}{BE}\right)_{\kappa^T} = \frac{k_b^2 T}{\sigma_0 \sqrt{2mk_b T}} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{D+5}{2}\right) Li_{\frac{D+3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) Li_{\frac{D}{2}}} \left[ 1 - \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D+4}{2}\right) Li_{\frac{D+2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D+5}{2}\right) Li_{\frac{D+3}{2}}} + \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{\frac{D-1}{2}}}{Li_{\frac{D}{2}}} \right] - \frac{\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right)^2 Li_{\frac{D+1}{2}}^2}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) Li_{\frac{D-1}{2}} Li_{\frac{D}{2}}} \left[ 1 - \frac{2(\alpha_2 + \dots + \alpha_D)}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right)^2 Li_{\frac{D}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right) Li_{\frac{D+1}{2}}} + \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) Li_{\frac{D-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right) Li_{\frac{D-1}{2}}} + \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{\frac{D-1}{2}}}{Li_{\frac{D}{2}}} \right] \right] \quad (4.46)$$

şeklinde elde edilir. D-boyutlu Fermi ve Bose gazları için genelleştirilmiş boyutsuz entalpi ifadesi,

$$\left(\frac{FD}{BE}\right) \tilde{h} = \frac{D+2}{2} \frac{Li_{\frac{D+2}{2}}}{Li_{\frac{D}{2}}} \left[ 1 - \left( \frac{D+1}{D+2} \frac{Li_{\frac{D+1}{2}}}{Li_{\frac{D+2}{2}}} - \frac{Li_{\frac{D-1}{2}}}{Li_{\frac{D}{2}}} \right) \left( \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \right) \right] \quad (4.47)$$

olmak üzere çapraz etkiler Soret, Peltier ve Dufour transport katsayıları sırasıyla,

$$\left(\frac{FD}{BE}\right)_{D^r} = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2mk_b T}} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right) Li_{\frac{D+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) Li_{\frac{D}{2}}} \left( 1 - \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) Li_{\frac{D}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right) Li_{\frac{D+1}{2}}} + \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{\frac{D-1}{2}}}{Li_{\frac{D}{2}}} \right) \right. \\ \left. - \Lambda \frac{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right) Li_{\frac{D-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) Li_{\frac{D}{2}}} \left( 1 - \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) Li_{\frac{D-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right) Li_{\frac{D-1}{2}}} + \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{\frac{D-1}{2}}}{Li_{\frac{D}{2}}} \right) \right] \quad (4.48)$$

$$\left(\frac{FD}{BE}\right)_{\mathcal{K}^\varphi} = \frac{k_b T}{\sigma_0 \sqrt{2mk_b T}} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right) Li_{\frac{D+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) Li_{\frac{D}{2}}} \left( 1 - \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) Li_{\frac{D}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D+3}{2}\right) Li_{\frac{D+1}{2}}} + \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{\frac{D-1}{2}}}{Li_{\frac{D}{2}}} \right) \right. \\ \left. - \frac{D+2}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right) Li_{\frac{D-1}{2}} Li_{\frac{D+2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) Li_{\frac{D}{2}} Li_{\frac{D}{2}}} \left( 1 - \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{D+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) Li_{\frac{D-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{D+1}{2}\right) Li_{\frac{D-1}{2}}} \right) \right. \\ \left. - \frac{D+1}{D+2} \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{\frac{D+1}{2}}}{Li_{\frac{D+2}{2}}} + 2 \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{\frac{D-1}{2}}}{Li_{\frac{D}{2}}} \right] \quad (4.49)$$

$$\left(\frac{FD}{BE}\right)_{\mathcal{K}^n} = \frac{k_b T}{n} \mathcal{K}_{rr}^\varphi \frac{Li_{\frac{D}{2}}}{Li_{\frac{D-2}{2}}} \left( 1 - \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{\frac{D-1}{2}}}{Li_{\frac{D}{2}}} + \frac{\alpha_2 + \dots + \alpha_D}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{\frac{D-3}{2}}}{Li_{\frac{D-2}{2}}} \right) \quad (4.50)$$

olarak yazılır. İletim, difüzyon, ısı iletim, Soret, Peltier ve Dufour transport katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı sırasıyla 1, 2 ve 3 boyut için Tablo 4.7, Tablo 4.8 ve Tablo 4.9’da verilmiştir. Maxwellian gazda olduğu gibi Fermi ve Bose gazlarında da boyutsuzlaştırma, kuantum ölçek etkisi altında elde edilen katsayıların kuantum ölçek etkisiz ifadelerine bölünmesi ile elde edilir. Boyutsuzlaştırma yapıldıktan sonra elde edilen 1 ve 2 boyutlu transport katsayılar Tablo 4.10, 3 boyutlu transport katsayılar ise Tablo 4.11’de verilmiştir.



**Tablo 4.7:** Kuantum ölçek etkisi altında  $L_g \gg l_0$  durumu için 1 boyutlu Fermi ve Bose gazlarında transport katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.

	D=1
$D^\varphi$	$\frac{2}{\sigma_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi m k_b T}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}}$
$D^n$	$\frac{2}{\sigma_0} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi m k_b T}} \frac{1}{n} \frac{Li_0}{Li_{-1/2}}$
$\kappa^T$	$\frac{2}{\sigma_0} \frac{k_b^2 T}{\sqrt{2\pi m k_b T}} \left( 2 \frac{Li_2}{Li_{1/2}} - \frac{Li_1^2}{Li_{1/2} Li_0} \right) \left( 1 + \frac{\alpha_1}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} \right)$
$D^T$	$\frac{2}{\sigma_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi m k_b T}} \frac{1}{Li_{1/2}} [Li_1 - \Lambda Li_0]$
$\kappa^\varphi$	$\frac{2}{\sigma_0} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi m k_b T}} \frac{1}{Li_{1/2}} \left[ Li_1 - \frac{3}{2} \frac{Li_{3/2} Li_0}{Li_{1/2}} \right]$
$\kappa^n$	$\frac{2}{\sigma_0} \frac{(k_b T)^2}{\sqrt{2\pi m k_b T} n} \frac{1}{Li_{-1/2}} \left[ Li_1 - \frac{3}{2} \frac{Li_{3/2} Li_0}{Li_{1/2}} \right]$
$WF$	$k_b^2 T \left[ \left( 2 \frac{Li_2}{Li_0} - \frac{Li_1^2}{Li_0^2} \right) \left( 1 + \frac{\alpha_1}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} \right) \right]$

$L_g \gg l_0$  durumu için 1, 2 ve 3 boyutlu Fermi ve Bose gazları için tablolarda verilen Wiedemann-Franz oranlarının  $\alpha_1, \alpha_2$  ve  $\alpha_3$  bağımlılıkları nedeniyle Wiedemann-Franz yasasının evrenselliğini kaybettiği ve domenin şekline ve ölçeğine bağlı hale geldiği yine görülmektedir. Tablo 4.7’de verilen 1 boyutlu ısı iletim katsayısından tanımından görüldüğü gibi, ısı iletim katsayısının açık kanal için hesaplanması durumunda ölçek etkisi sıfır olacağından kuantum ölçek etkilerine bağlı olmayacaktır.

**Tablo 4.8:** Kuantum ölçek etkisi altında  $L_g \gg l_0$  durumu için 2 boyutlu Fermi ve Bose gazlarında transport katsayıları ve Wiedemann-Franz oranı.

	D=2
$D^\varphi$	$\frac{\pi}{2\sigma_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \frac{Li_{1/2}}{Li_1} \left[ 1 - \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{1/2}}{Li_1} \right]$
$D^n$	$\frac{\pi}{2\sigma_0} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \frac{1}{n} \frac{Li_{1/2}}{Li_0} \left[ 1 - \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{-1/2}}{Li_0} \right]$
$\kappa^T$	$\frac{3\pi}{8\sigma_0} \frac{k_b^2 T}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \left[ \begin{aligned} &5 \frac{Li_{5/2}}{Li_1} \left( 1 - \frac{32\alpha_2}{15\pi^{3/2}} \frac{Li_2}{Li_{5/2}} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{1/2}}{Li_1} \right) \\ &- 3 \frac{Li_{3/2}^2}{Li_1 Li_{1/2}} \left( 1 - \frac{16\alpha_2}{3\pi^{3/2}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} + \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{1/2}}{Li_1} \right) \end{aligned} \right]$
$D^T$	$\frac{\pi}{2\sigma_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \frac{1}{Li_1} \left[ \begin{aligned} &\frac{3}{2} Li_{3/2} \left( 1 - \frac{8\alpha_2}{3\pi^{3/2}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{1/2}}{Li_1} \right) \\ &- \Lambda Li_{1/2} \left( 1 - \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{1/2}}{Li_1} \right) \end{aligned} \right]$
$\kappa^\varphi$	$\frac{\pi}{2\sigma_0} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \frac{1}{Li_1} \left[ \begin{aligned} &\frac{3}{2} Li_{3/2} \left( 1 - \frac{8\alpha_2}{3\pi^{3/2}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{1/2}}{Li_1} \right) \\ &- 2 \frac{Li_{1/2} Li_2}{Li_1} \left( 1 - \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} - \frac{3\alpha_2}{4\sqrt{\pi}} \frac{Li_{3/2}}{Li_2} + 2 \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{1/2}}{Li_1} \right) \end{aligned} \right]$
$\kappa^n$	$\frac{\pi}{2\sigma_0} \frac{(k_b T)^2}{\sqrt{2\pi mk_b T n}} \frac{1}{Li_0} \left[ \begin{aligned} &\frac{3}{2} Li_{3/2} \left( 1 - \frac{8\alpha_2}{3\pi^{3/2}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{-1/2}}{Li_0} \right) \\ &- 2 \frac{Li_{1/2} Li_2}{Li_1} \left( 1 - \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} - \frac{3\alpha_2}{4\sqrt{\pi}} \frac{Li_{3/2}}{Li_2} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{1/2}}{Li_1} \right) \\ &\quad + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{-1/2}}{Li_0} \end{aligned} \right]$
$WF$	$\frac{3}{4} k_b^2 T \left[ \begin{aligned} &5 \frac{Li_{5/2}}{Li_{1/2}} \left( 1 - \frac{32\alpha_2}{15\pi^{3/2}} \frac{Li_2}{Li_{5/2}} + \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} + \frac{\alpha_1}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{1/2}}{Li_1} \right) \\ &- 3 \frac{Li_{3/2}^2}{Li_{1/2}^2} \left( 1 - \frac{16\alpha_2}{3\pi^{3/2}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} + \frac{8\alpha_2}{\pi^{3/2}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} + \frac{\alpha_1}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{1/2}}{Li_1} \right) \end{aligned} \right]$

**Tablo 4.9:** Kuantum ölçek etkisi altında  $L_g \gg l_0$  durumu için 3 boyutlu Fermi ve Bose gazlarında transport katsayıları.

	D=3
$D^\varphi$	$\frac{4}{3\sigma_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} \left[ 1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{8} (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{1/2}}{Li_1} + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} \right]$
$D^n$	$\frac{4}{3\sigma_0} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \frac{1}{n} \frac{Li_1}{Li_{1/2}} \left[ 1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{8} (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{1/2}}{Li_1} + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} \right]$
$\kappa^T$	$\frac{8}{3\sigma_0} \frac{k_b^2 T}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \left[ 3 \frac{Li_3}{Li_{3/2}} \left( 1 - \frac{15\sqrt{\pi}}{64} (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{5/2}}{Li_3} \right) + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} \right] - 2 \frac{Li_2^2}{Li_{3/2} Li_1} \left( 1 - \frac{9\sqrt{\pi}}{16} (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{3/2}}{Li_2} + \frac{3\sqrt{\pi}}{8} (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{1/2}}{Li_1} \right) + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} \right]$
$D^T$	$\frac{4}{3\sigma_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \frac{1}{Li_{3/2}} \left[ 2Li_2 \left( 1 - \frac{9\sqrt{\pi}}{32} (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{3/2}}{Li_2} + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} \right) - \Lambda Li_1 \left( 1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{8} (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{1/2}}{Li_1} + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} \right) \right]$
$\kappa^\varphi$	$\frac{4}{3\sigma_0} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \frac{1}{Li_{3/2}} \left[ 2Li_2 \left( 1 - \frac{9\sqrt{\pi}}{32} (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{3/2}}{Li_2} + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} \right) - \frac{5}{2} \frac{Li_{5/2} Li_1}{Li_{3/2}} \left( 1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{8} (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{1/2}}{Li_1} - \frac{4}{5} \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_2}{Li_{5/2}} \right) + 2 \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} \right]$
$\kappa^n$	$\frac{4}{3\sigma_0} \frac{(k_b T)^2}{\sqrt{2\pi mk_b T n}} \frac{1}{Li_{1/2}} \left[ 2Li_2 \left( 1 - \frac{9\sqrt{\pi}}{32} (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{3/2}}{Li_2} + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} \right) - \frac{5}{2} \frac{Li_{5/2} Li_1}{Li_{3/2}} \left( 1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{8} (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{1/2}}{Li_1} - \frac{4}{5} \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_2}{Li_{5/2}} \right) + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} \right]$

**Tablo 4.10:** Kuantum ölçek etkisi altında  $L_g \gg l_0$  durumu için 1, 2 boyutlu Fermi ve Bose gazlarında boyutsuz transport katsayıları.

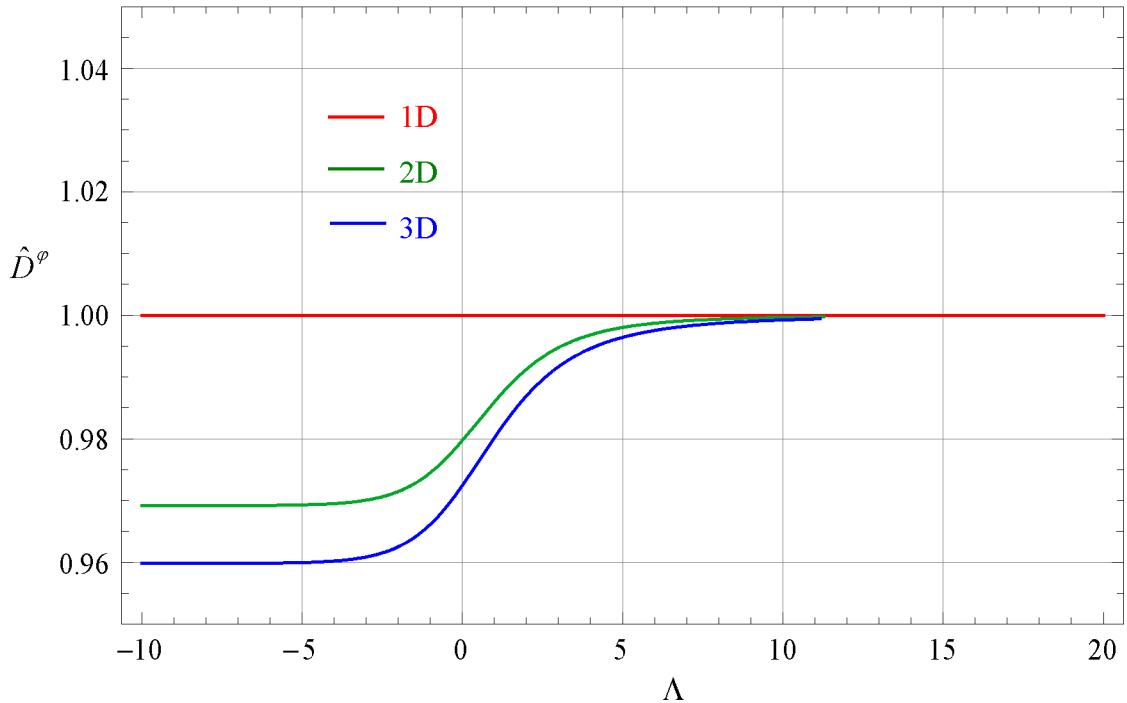
	$D=1$	$D=2$
$\hat{D}^\phi$	1	$1 - \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{1/2}}{Li_1}$
$\hat{D}^n$	1	$1 - \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{-1/2}}{Li_0} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{1/2}}{Li_1}$
$\hat{\kappa}^T$	$\left(1 + \frac{\alpha_1}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}}\right)$	$\frac{5 \frac{Li_{5/2}}{Li_1} \left(1 - \frac{32\alpha_2}{15\pi^{3/2}} \frac{Li_2}{Li_{5/2}} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{1/2}}{Li_1}\right) - 3 \frac{Li_{3/2}^2}{Li_1 Li_{1/2}} \left(1 - \frac{16\alpha_2}{3\pi^{3/2}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} + \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{1/2}}{Li_1}\right)}{5 \frac{Li_{5/2}}{Li_1} - 3 \frac{Li_{3/2}^2}{Li_1 Li_{1/2}}}$
$\hat{D}^T$	1	$\frac{\frac{3}{2} Li_{3/2} \left(1 - \frac{8\alpha_2}{3\pi^{3/2}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{1/2}}{Li_1}\right) - \Lambda Li_{1/2} \left(1 - \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{1/2}}{Li_1}\right)}{\frac{3}{2} Li_{3/2} - \Lambda Li_{1/2}}$
$\hat{\kappa}^\phi$	1	$\frac{\frac{3}{2} Li_{3/2} \left(1 - \frac{8\alpha_2}{3\pi^{3/2}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{1/2}}{Li_1}\right) - 2 \frac{Li_{1/2} Li_2}{Li_1} \left(1 - \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} - \frac{3\alpha_2}{4\sqrt{\pi}} \frac{Li_{3/2}}{Li_2} + 2 \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{1/2}}{Li_1}\right)}{\frac{3}{2} Li_{3/2} - 2 \frac{Li_{1/2} Li_2}{Li_1}}$
$\hat{\kappa}^n$	1	$\frac{\frac{3}{2} Li_{3/2} \left(1 - \frac{8\alpha_2}{3\pi^{3/2}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{1/2}}{Li_1} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{-1/2}}{Li_0}\right) - 2 \frac{Li_{1/2} Li_2}{Li_1} \left(1 - \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} - \frac{3\alpha_2}{4\sqrt{\pi}} \frac{Li_{3/2}}{Li_2} + \frac{2\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{1/2}}{Li_1} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{-1/2}}{Li_0}\right)}{\frac{3}{2} Li_{3/2} - 2 \frac{Li_{1/2} Li_2}{Li_1}}$

**Tablo 4.11:** Kuantum ölçek etkisi altında  $L_g \gg l_0$  durumu için 3 boyutlu Fermi ve Bose gazlarında boyutsuz transport katsayıları.

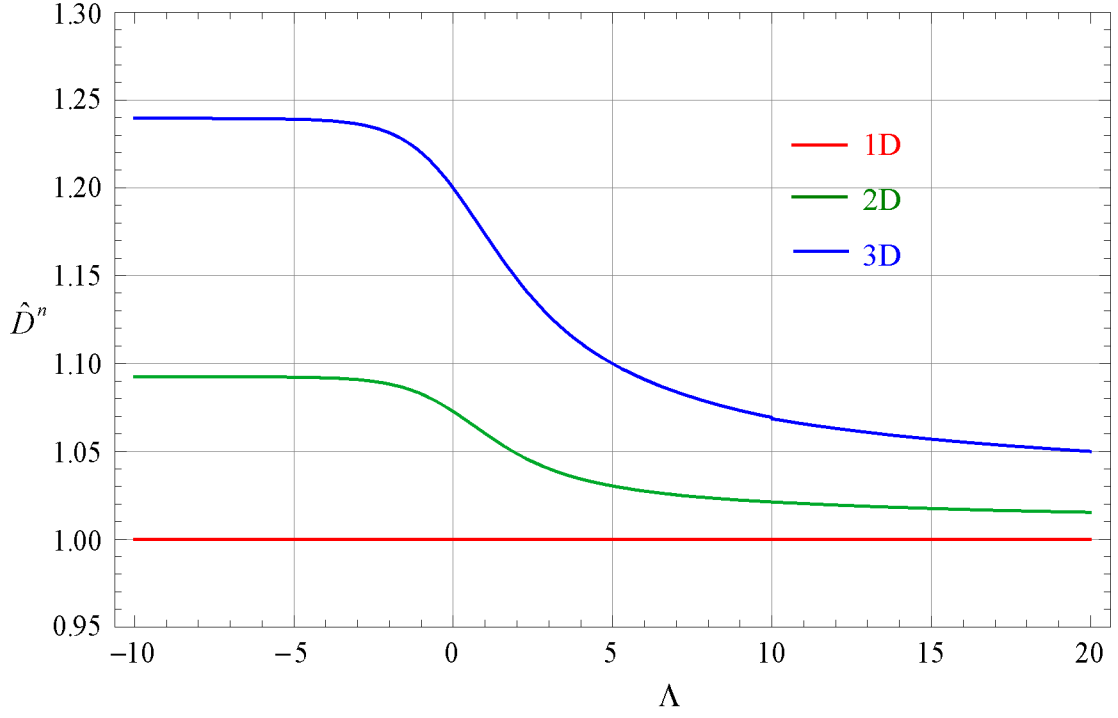
$\hat{D}^\phi$	$1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{8}(\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{1/2}}{Li_1} + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}}$
$\hat{D}^n$	$1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{8}(\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{1/2}}{Li_1} + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}}$
$\hat{\kappa}^T$	$\frac{3 \frac{Li_3}{Li_{3/2}} \left( 1 - \frac{15\sqrt{\pi}}{64}(\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{5/2}}{Li_3} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} \right) - 2 \frac{Li_2^2}{Li_1 Li_{3/2}} \left( 1 - \frac{9\sqrt{\pi}}{16}(\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{3/2}}{Li_2} + \frac{3\sqrt{\pi}}{8}(\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{1/2}}{Li_1} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} \right)}{3 \frac{Li_3}{Li_{3/2}} - 2 \frac{Li_2^2}{Li_1 Li_{3/2}}}$
$\hat{D}^T$	$\frac{2Li_2 \left( 1 - \frac{9\sqrt{\pi}}{32}(\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{3/2}}{Li_2} + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} \right) - \Lambda Li_1 \left( 1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{8}(\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{1/2}}{Li_1} + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} \right)}{2Li_2 - \Lambda Li_1}$
$\hat{\kappa}^\phi$	$\frac{4Li_2 \left( 1 - \frac{9\sqrt{\pi}}{32}(\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{3/2}}{Li_2} + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} \right) - 5 \frac{Li_{5/2} Li_1}{Li_{3/2}} \left( 1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{8}(\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{1/2}}{Li_1} - \frac{4}{5} \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_2}{Li_{5/2}} + 2 \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} \right)}{4Li_2 - 5 \frac{Li_{5/2} Li_1}{Li_{3/2}}}$
$\hat{\kappa}^n$	$\frac{4Li_2 \left( 1 - \frac{9\sqrt{\pi}}{32}(\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{3/2}}{Li_2} + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} \right) - 5 \frac{Li_{5/2} Li_1}{Li_{3/2}} \left( 1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{8}(\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{1/2}}{Li_1} - \frac{4}{5} \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_2}{Li_{5/2}} + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} + 2 \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} \right)}{4Li_2 - 5 \frac{Li_{5/2} Li_1}{Li_{3/2}}}$

#### 4.3.1.1 Fermi Gazında Kuantum Ölçek Etkilerinin Dejenerasyonla Değişimi

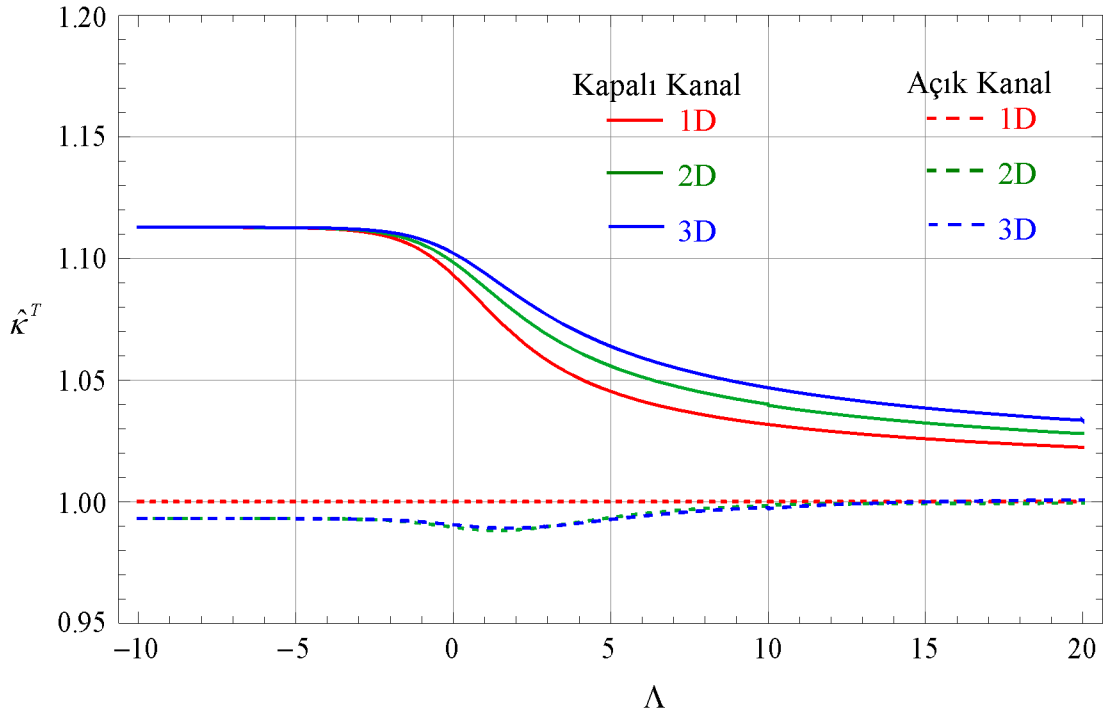
1, 2 ve 3-boyutlu domenlerde boyutsuz iletim, difüzyon ve ısı iletim katsayılarının  $\Lambda$  ile değişimi sırasıyla Şekil 4.6, Şekil 4.7 ve Şekil 4.8’de gösterilmiştir. Şekillerden kuantum ölçek etkilerinin transport katsayıları üzerindeki etkisinin Fermi gazında artan dejenerasyonla azaldığı anlaşılmaktadır. Bunun nedeni artan dejenerasyonla parçacıkların enerjilerinin artması sonucu de Broglie dalga boyunun küçülmesi ve buna bağlı olarak ölçek etkilerinin etkinliğinin azalmasıdır. 1 boyutlu durumda iletim ve difüzyon katsayıları üzerinde kuantum ölçek etkilerinin olmamasının nedeni iletkenlik ve difüzyonun ancak açık kanallarda tanımlanabilir olmasıdır. Isı iletimi ise hem kapalı hem de açık kanallarda gerçekleşebileceğinden ısı iletim katsayısı üzerinde kuantum ölçek etkilerinin  $\Lambda$  ile değişimi kapalı ve açık kanallar için ayrı ayrı incelenmiştir. Bu bölümde üretilen grafiklerde açık kanal için Şekil 3.1a gözönüne alınarak  $\{\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \alpha_3 = 0.2\}$  değerleri kullanılırken kapalı kanal için Şekil 3.1b gözönüne alınarak  $\{\alpha_1 = 0.2, \alpha_2 = \alpha_3 = 0\}$  değerleri kullanılmıştır.



**Şekil 4.6:** Kuantum ölçek etkileri altında  $L_g \gg l_0$  durumu için Fermi gazında boyutsuz iletim katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.



**Şekil 4.7:** Kuantum ölçek etkileri altında  $L_g \gg l_0$  durumu için Fermi gazında boyutsuz difüzyon katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.



**Şekil 4.8:** Kuantum ölçek etkileri altında  $L_g \gg l_0$  durumu için Fermi gazında boyutsuz ısı iletim katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.

Şekil 4.8’de kuantum dejenerasyonun ölçek etkisini diğer transport katsayılarında olduğu gibi azaltıcı bir etkiye sahip olduğu görülmektedir. Kapalı kanalda klasik limitte ölçek etkileri ısı iletimini artırırken açık kanalda azaltıcı bir etki yapmaktadır. Bu durum Tablo 4.1 ve Tablo 4.2’de verilen ısı iletim katsayılarında açık ve kapalı kanal için uygun  $\alpha$  değerleri kullanılarak görülebilir. Dejenere limitte Fermi gazına ait iletkenlik, difüzyon ve ısıl iletkenlik katsayılarının dejenere durumdaki değerleri polilogaritmik fonksiyonların  $\Lambda \rightarrow \infty$ ’a giderken Ek-A’da verilen seri açılımları yardımıyla elde edilir. Dejenere Fermi gazı için boyutsuz iletkenlik, difüzyon ve ısıl iletkenlik katsayılarının 1, 2 ve 3 boyutlu asimptotik ifadeleri Tablo 4.12’de verilmiştir.

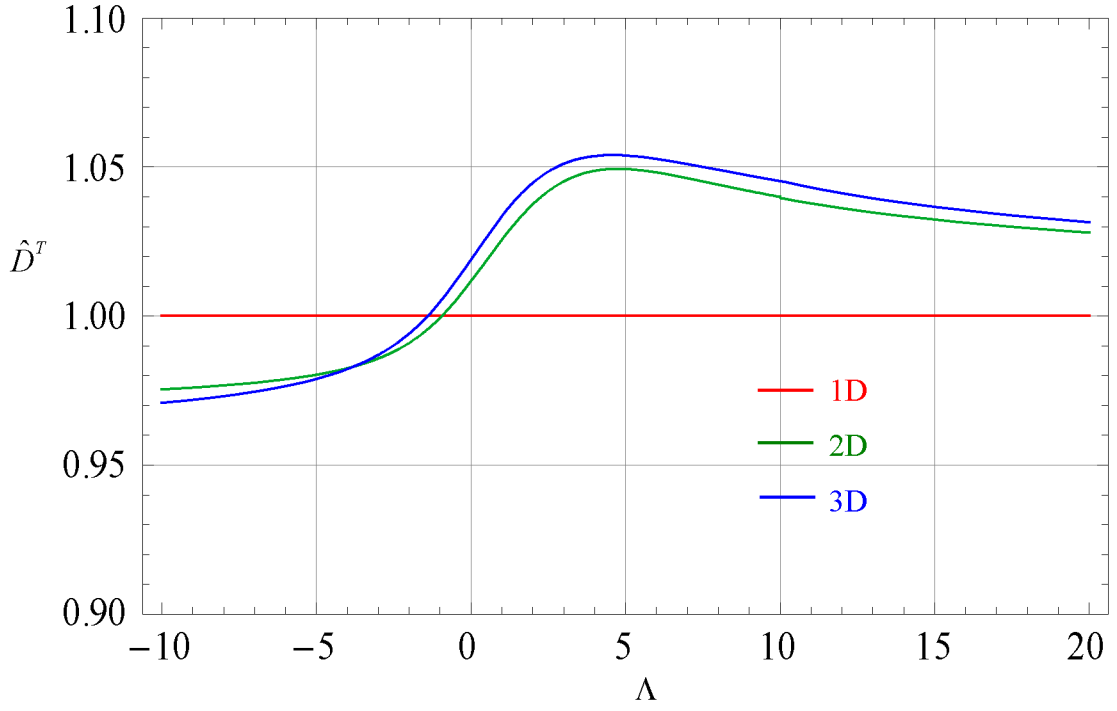
**Tablo 4.12:** Dejenere limitte 1, 2 ve 3-boyutlu Fermi gazı için kuantum ölçek etkisi altında boyutsuz iletim, difüzyon ve ısı iletim katsayılarının asimptotik ifadeleri.

	$D = 1$	$D = 2$	$D = 3$
$\hat{D}^\varphi$	1	$1 + \frac{\pi}{6} \alpha_2 \frac{1}{\Lambda^{5/2}}$	$1 - \frac{\pi^2 (\alpha_2 + \alpha_3)}{16} \frac{1}{\Lambda^{5/2}}$
$\hat{D}^n$	1	$1 + \frac{\alpha_2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$	$1 + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$
$\hat{K}^T$	$1 + \frac{\alpha_1}{2\sqrt{\Lambda}} + \frac{\alpha_1 \pi^2}{48\Lambda^{5/2}}$	$1 + \frac{2\alpha_1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} - \left( \frac{5\pi\alpha_2 + \pi\alpha_1}{12} \right) \frac{1}{\Lambda^{5/2}}$	$1 + \frac{3\alpha_1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} - \left( \frac{11\pi^2 (\alpha_2 + \alpha_3) + 3\pi^2 \alpha_1}{32} \right) \frac{1}{\Lambda^{5/2}}$

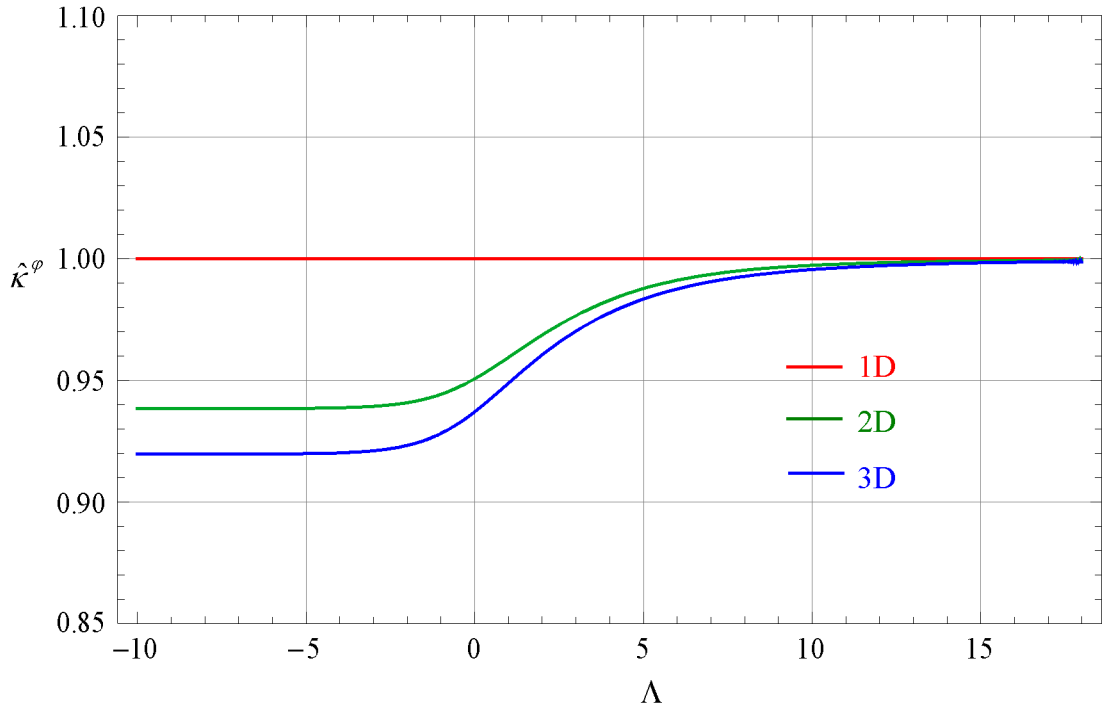
Tablo 4.12’de dejenere Fermi gazı durumunda  $\alpha/\sqrt{\Lambda}$  değerlerinin Fermi sıcaklığında hesaplanmış  $\alpha$  değerleri olduğu göz önüne alınırsa,  $\alpha/\sqrt{\Lambda}$  terimlerinin ölçek etkilerini,  $\alpha/\Lambda^{5/2}$  terimlerinin ise dejenere Fermi gazına termal düzeltmeyi temsil eden  $1/\Lambda^2$  terimlerinin  $\alpha/\sqrt{\Lambda}$  terimleri ile çarpımından oluşmuş olması nedeniyle termoölçek etkilerini temsil ettiği anlaşılmaktadır.

Soret, Peltier ve Dufour katsayılarının  $\Lambda$  ile değişimleri ise 1, 2 ve 3-boyutlu Fermi gazı için sırasıyla Şekil 4.9, Şekil 4.10 ve Şekil 4.11’de görülmektedir. Direkt etkilerde gözlenen davranışların benzer nedenlerle burada da ortaya çıktığı anlaşılmaktadır.

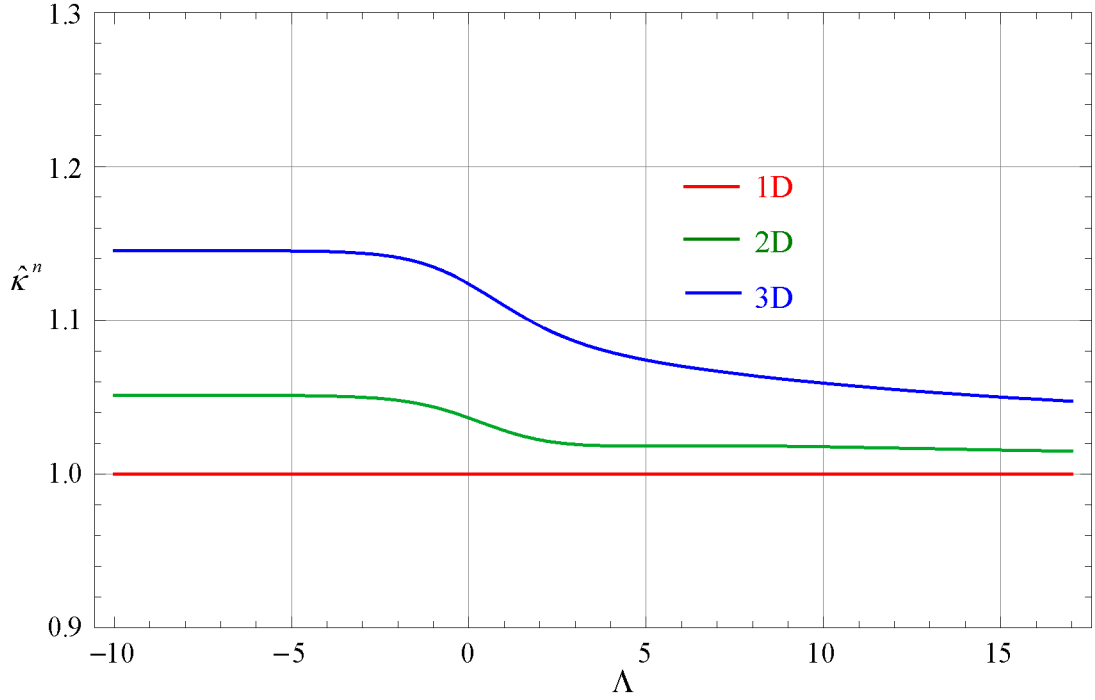




**Şekil 4.9:** Kuantum ölçek etkileri altında  $L_g \gg l_0$  durumu için Fermi gazında boyutsuz Soret katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.



**Şekil 4.10:** Kuantum ölçek etkileri altında  $L_g \gg l_0$  durumu için Fermi gazında boyutsuz Peltier katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.



**Şekil 4.11:** Kuantum ölçek etkileri altında  $L_g \gg l_0$  durumu için Fermi gazında boyutsuz Dufour katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.

Çapraz etkiler Soret, Peltier ve Dufour katsayılarının dejenere Fermi gazı için boyutsuz analitik ifadeleri Tablo 4.13’de verilmiştir.

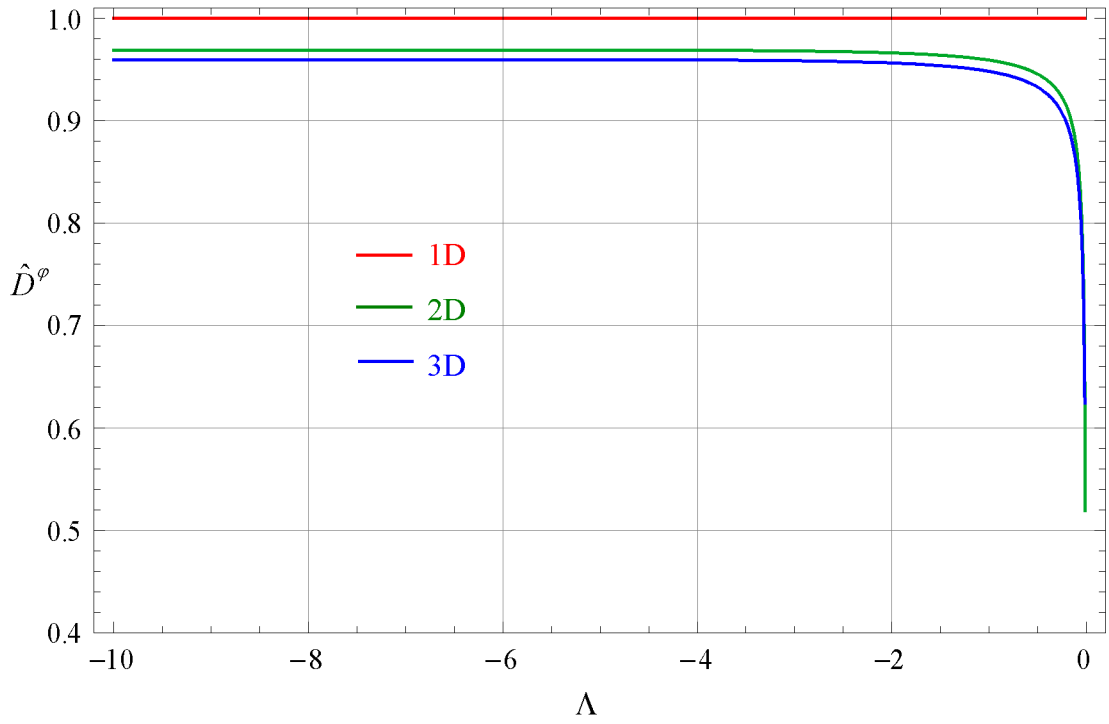
**Tablo 4.13:** Dejenere limitte 1, 2 ve 3-boyutlu Fermi gazı için kuantum ölçek etkisi altında boyutsuz Soret, Peltier ve Dufour katsayılarının asimptotik ifadeleri.

	$D = 1$	$D = 2$	$D = 3$
$\hat{D}_{11}^T$	1	$1 + \frac{2\alpha_2}{\pi\sqrt{\Lambda}} - \frac{\pi\alpha_2}{12\Lambda^{5/2}}$	$1 + \frac{3(\alpha_2 + \alpha_3)}{8} \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$
$\hat{\kappa}_{11}^\varphi$	1	$1 - \frac{\pi\alpha_2}{2} \frac{1}{\Lambda^{5/2}}$	$1 - \frac{3\pi^2(\alpha_2 + \alpha_3)}{8} \frac{1}{\Lambda^{5/2}}$
$\hat{\kappa}_{11}^n$	1	$1 + \frac{\alpha_2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} - \frac{3\pi\alpha_2}{8} \frac{1}{\Lambda^{5/2}}$	$1 + \frac{(\alpha_2 + \alpha_3)}{2} \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} - \frac{17\pi^2(\alpha_2 + \alpha_3)}{48} \frac{1}{\Lambda^{5/2}}$

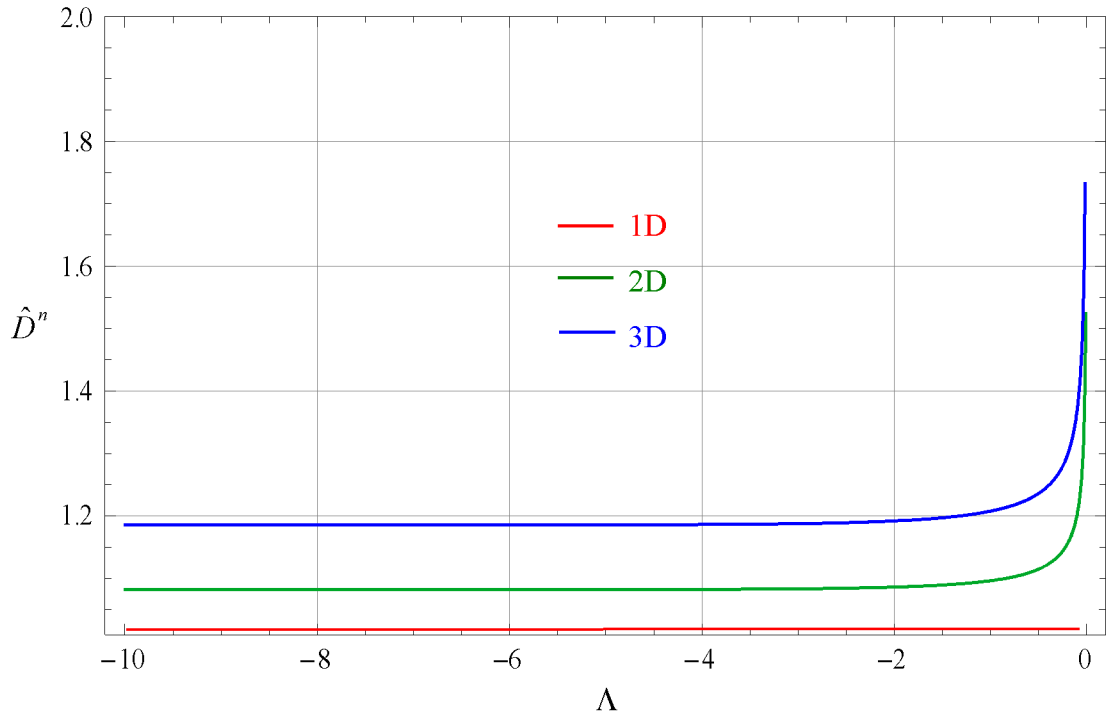
#### 4.3.1.2 Bose Gazında Kuantum Ölçek Etkilerinin Dejenereyle Değişimi

Kuantum ölçek etkileri altında Bose gazına ait direkt ve çapraz etkilere bağlı transport katsayılarının dejenereyle değişimleri incelenmiştir. Şekil 4.12, Şekil 4.13 ve Şekil 4.14’de 1, 2 ve 3 boyutlu Bose gazının sırasıyla boyutsuz iletkenlik, difüzyon ve ısıl iletkenlik transport katsayılarının artan dejenereyle değişimleri görülmektedir. Dejenere Bose gazı için boyutsuz iletkenlik, difüzyon ve

ısı iletkenlik katsayılarının 1, 2 ve 3 boyutlu asimptotik ifadeleri ise Tablo 4.14’de verilmiştir.

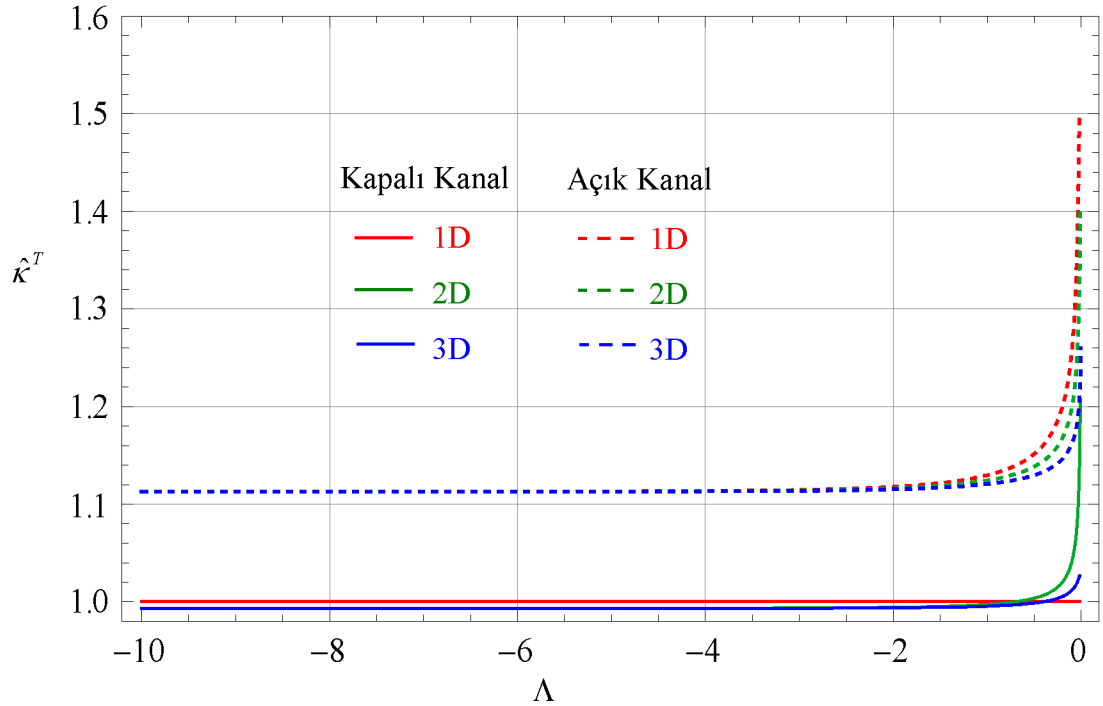


**Şekil 4.12:** Kuantum ölçek etkileri altında  $L_g \gg l_0$  durumu için Bose gazında boyutsuz iletim katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.

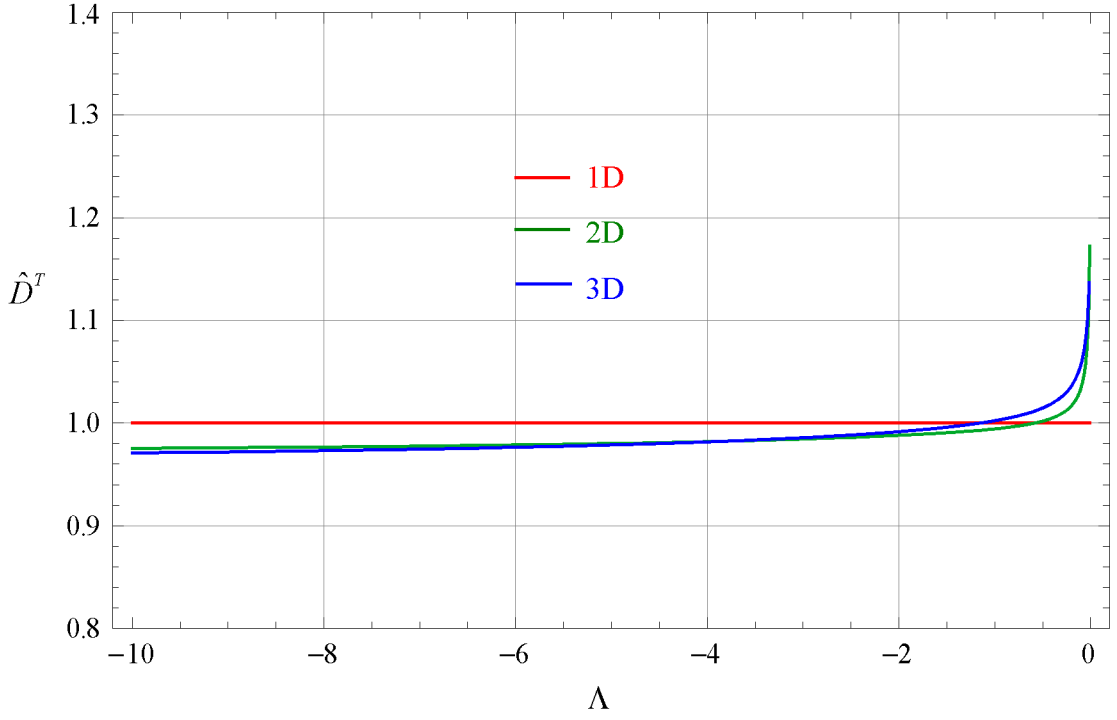


**Şekil 4.13:** Kuantum ölçek etkileri altında  $L_g \gg l_0$  durumu için Bose gazında boyutsuz difüzyon katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.

Şekil 4.12’de dejenerasyonun Bose gazının iletkenliği üzerinde kuantum ölçek etkilerinin olumsuz bir yönde etkidiği görülmektedir. Tablo 3.2’den anlaşılacağı üzere iletkenliğe  $g$  ve  $\eta$  fonksiyonları ters katkıda bulunmakta ve  $g$ ’ye gelen negatif bir katkı iletkenliği azaltırken  $\eta$ ’ya gelen negatif bir katkı ise artırmaktadır. (4.25) ve (4.26) ifadeleri ise  $g$  ve  $\eta$  fonksiyonlarına gelen kuantum ölçek etkilerinin negatif olduğunu göstermektedir. Bu nedenle Tablo 4.10 ve Tablo 4.11’den de anlaşılacağı üzere iletkenlik üzerinde her iki fonksiyondan ötürü gelen kuantum ölçek etkileri birbirleri ile ters işaretlidir. Şekil 4.12, dejenere Bose gazında parçacıkların hızları ile ilgili olan  $g$  fonksiyonuna gelen düzeltmenin baskın olduğunu göstermektedir. Şekil 4.13’den ise difüzyon sabitinde bu dengenin  $\eta$  fonksiyonunun lehine döndüğü anlaşılmaktadır. Şekil 4.14’de kuantum ölçek etkilerinin dejenere Bose gazının ısı iletim katsayısına Fermi gazının tersine kapalı kanalda pozitif, açık kanalda ise klasik limitte negatif dejenere limitte pozitif bir etki yaptığı görülmektedir. Tablo 4.10 ve Tablo 4.11’de ısı iletim katsayısına gelen kuantum ölçek etkisinin çok sayıda terimin katkılarının bir sonucu olarak belirlendiği anlaşılmaktadır.



**Şekil 4.14:** Kuantum ölçek etkileri altında  $L_g \gg l_0$  durumu için Bose gazında boyutsuz ısı iletim katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.



**Şekil 4.15:** Kuantum ölçek etkileri altında  $L_g \gg l_0$  durumu için Bose gazında boyutsuz Soret katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.

Şekil 4.15’de Bose gazının Soret katsayısı üzerinde kuantum ölçek etkileri klasik limitte negatif bir etkiye sahipken dejenere limitte pozitif bir katkı yaptığı görülmektedir. Bu da klasik limitte hızlara gelen düzeltme baskın iken dejenere limitte yerel yoğunluk üzerindeki düzeltmenin baskın olduğunu göstermektedir. Dejenere Bose gazının boyutsuz iletim, difüzyon, ısı iletim, Soret, Peltier ve Dufour katsayılarının 1, 2 ve 3 boyutlu asimptotik ifadeleri de Tablo 4.14 ve Tablo 4.15’de verilmiştir.

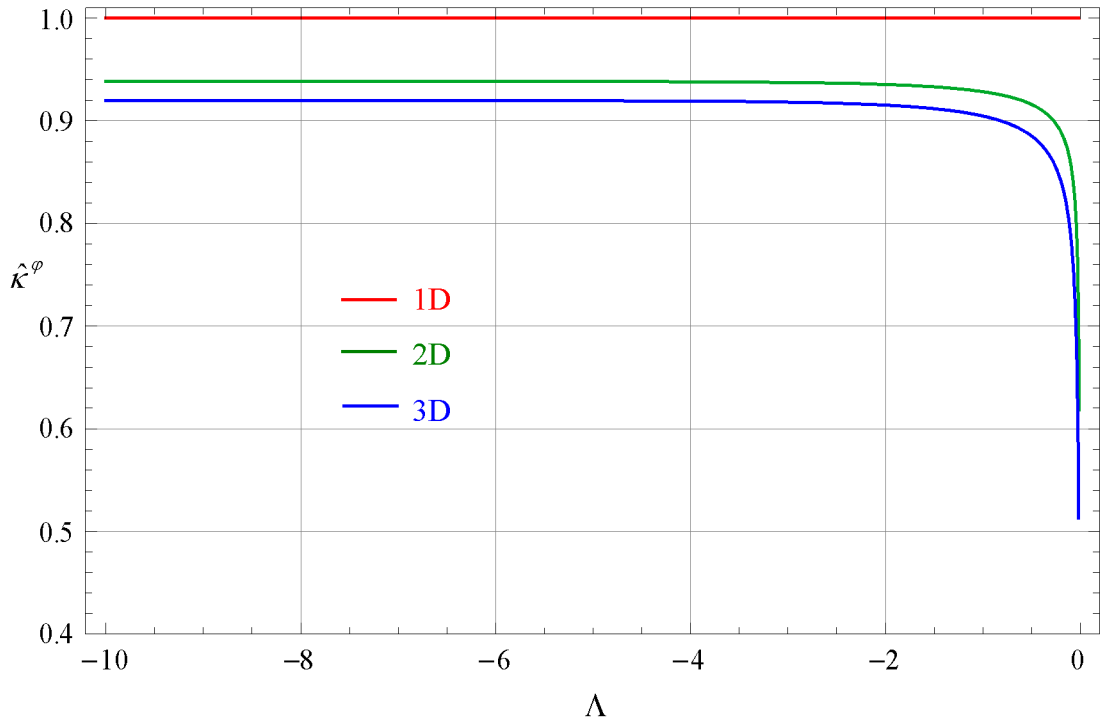
Peltier ve Dufour katsayıları üzerinde ölçek etkilerinin dejenerasyonla değişimi ise sırasıyla Şekil 4.16 ve 4.17’de verilmiştir. Ölçek etkilerinin her iki katsayıya da negatif bir etki yaptığı ve bu etkinin dejenerasyonla şiddetlendiği anlaşılmaktadır.

**Tablo 4.14:** Dejenere limitte 1, 2 ve 3-boyutlu Bose gazı için kuantum ölçek etkisi altında boyutsuz iletim, difüzyon ve ısı iletim katsayılarının asimptotik ifadeleri.

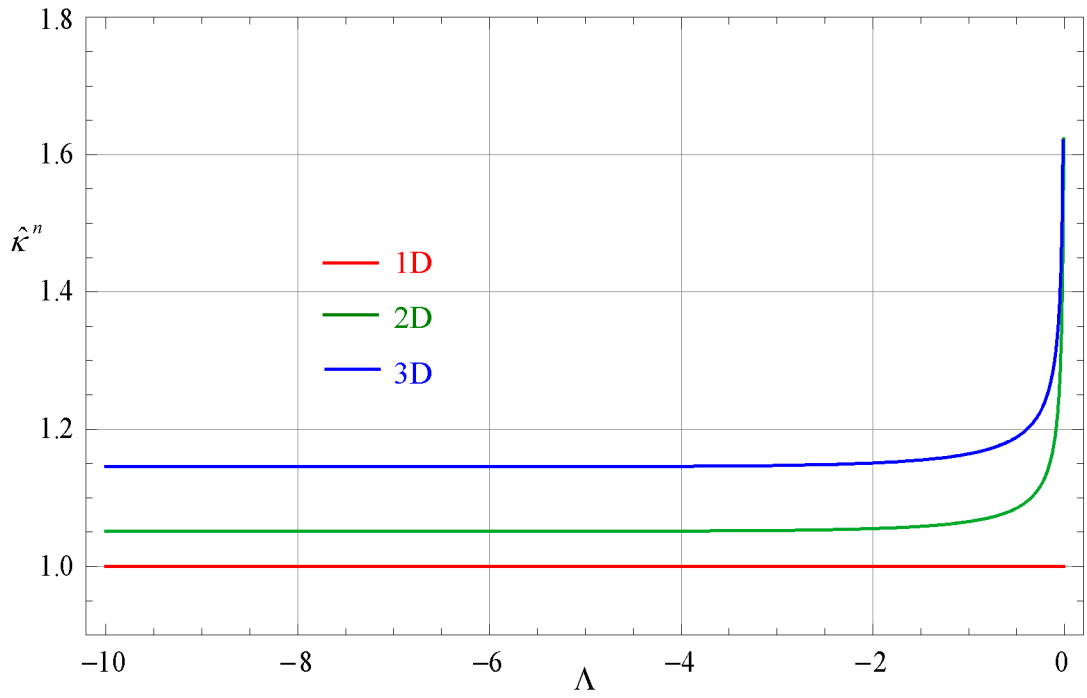
	$D=1$	$D=2$	$D=3$
$\hat{D}^\varphi$	1	$1 - \frac{4\alpha_2}{\pi^2 \sqrt{-\Lambda}} - \frac{\alpha_2}{\sqrt{-\Lambda} \ln(-\Lambda)}$	$1 + \frac{3\pi(\alpha_2 + \alpha_3)}{8\sqrt{-\Lambda} \ln(-\Lambda)}$
$\hat{D}^n$	1	$1 - \left(\frac{\alpha_2}{2} - \frac{4\alpha_2}{\pi^2}\right) \frac{1}{\sqrt{-\Lambda}} - \frac{\alpha_2}{\sqrt{-\Lambda} \ln(-\Lambda)}$	$1 + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\pi \sqrt{-\Lambda}} + \frac{3\pi(\alpha_2 + \alpha_3)}{8\sqrt{-\Lambda} \ln \sqrt{-\Lambda}}$
$\hat{K}^T$	$1 + \frac{\alpha_1}{\pi \sqrt{-\Lambda}}$	$1 - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\sqrt{-\Lambda} \ln(-\Lambda)}$	$1 - \frac{2(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sqrt{-\Lambda} \ln(-\Lambda)^2 \zeta(3)}$

**Tablo 4.15:** Dejenere limitte 1, 2 ve 3-boyutlu Bose gazı için kuantum ölçek etkisi altında boyutsuz Soret, Peltier ve Dufour katsayılarının asimptotik ifadeleri.

	$D=1$	$D=2$	$D=3$
$\hat{D}^T$	1	$1 - \frac{\alpha_2}{\sqrt{\Lambda} \ln(-\Lambda)}$	$1 - \frac{(\alpha_2 + \alpha_3) \ln(-\Lambda)}{\sqrt{\pi} \zeta(3/2)}$
$\hat{K}^\varphi$	1	$1 - \frac{4\alpha_2}{\pi^2 \sqrt{-\Lambda}} - \frac{2\alpha_2}{\sqrt{-\Lambda} \ln(-\Lambda)}$	$1 + \frac{3\pi(\alpha_2 + \alpha_3)}{8\sqrt{-\Lambda} \ln(-\Lambda)}$
$\hat{K}^n$	1	$1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\right) \frac{\alpha_2}{\sqrt{-\Lambda}} - \frac{2\alpha_2}{\sqrt{-\Lambda} \ln(-\Lambda)}$	$1 - \frac{(\alpha_2 + \alpha_3)}{\pi \sqrt{-\Lambda}}$



**Şekil 4.16:** Kuantum ölçek etkileri altında  $L_g \gg l_0$  durumu için Bose gazında boyutsuz Peltier katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.



**Şekil 4.17:** Kuantum ölçek etkileri altında  $L_g \gg l_0$  durumu için Bose gazında boyutsuz Dufour katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.

### 4.3.2 $L_g \ll l_0$ ve $Kn \ll 1$ Durumunda Transport

Bu koşullar için (4.44)-(4.46) ve (4.48)-(4.50) eşitliklerinde  $\sigma_0 = 1/nL_g$  kullanılarak transport katsayıları elde edilebilir. Ancak bu işlem yapılırken kuantum ölçek etkileri ele alındığından parçacık yoğunluğuna,  $n$ , gelen kuantum ölçek düzeltmeleri de dikkate alınmalıdır. Bu durum, boyutsuzlaştırılmış transport katsayılarının farklı transport rejimlerinde farklı olmasına yol açar ve önceki alt bölümde  $L_g \gg l_0$  durumu için elde edilen boyutsuz katsayılardan farklı transport katsayıları elde edilir.

1, 2 ve 3 boyutlu Fermi ve Bose gazları için transport katsayıları sırasıyla Tablo 4.16, Tablo 4.17 ve Tablo 4.18'de verilmiştir.

**Tablo 4.16:** Kuantum ölçek etkisi altında  $L_g \ll l_0$  durumu için 1 boyutlu Fermi ve Bose gazlarında transport katsayıları.

	D=1
$D^\varphi$	$2nL_g \frac{1}{\sqrt{2mk_bT}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}}$
$D^n$	$2L_g \frac{k_bT}{\sqrt{2\pi mk_bT}} \frac{Li_0}{Li_{-1/2}}$
$\kappa^T$	$2nL_g \frac{k_b^2T}{\sqrt{2\pi mk_bT}} \left[ \left( 2 \frac{Li_2}{Li_{1/2}} - \frac{Li_1^2}{Li_{1/2} Li_0} \right) \left( 1 + \frac{\alpha_1}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} \right) \right]$
$D^T$	$2nL_g \frac{1}{\sqrt{2\pi mk_bT}} \frac{1}{Li_{1/2}} [Li_1 - \Lambda Li_0]$
$\kappa^\varphi$	$2nL_g \frac{k_bT}{\sqrt{2\pi mk_bT}} \frac{1}{Li_{1/2}} \left[ Li_1 - \frac{3}{2} \frac{Li_{3/2} Li_0}{Li_{1/2}} \right]$
$\kappa^n$	$2L_g \frac{(k_bT)^2}{\sqrt{2\pi mk_bT}} \frac{1}{Li_{-1/2}} \left[ Li_1 - \frac{3}{2} \frac{Li_{3/2} Li_0}{Li_{1/2}} \right]$



**Tablo 4.17:** Kuantum ölçek etkisi altında  $L_g \ll l_0$  durumu için 2 boyutlu Fermi ve Bose gazlarında transport katsayıları.

	D=2
$D^\varphi$	$\frac{\pi n L_g}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi m k_b T}} \frac{Li_{1/2}}{Li_1} \left[ 1 - \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{1/2}}{Li_1} \right]$
$D^n$	$\frac{\pi L_g}{2} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi m k_b T}} \frac{Li_{1/2}}{Li_0} \left[ 1 - \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{-1/2}}{Li_0} \right]$
$\kappa^T$	$\frac{3\pi n L_g}{8} \frac{k_b^2 T}{\sqrt{2\pi m k_b T}} \left[ \begin{aligned} &5 \frac{Li_{5/2}}{Li_1} \left( 1 - \frac{32\alpha_2}{15\pi^{3/2}} \frac{Li_2}{Li_{5/2}} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{1/2}}{Li_1} \right) \\ &- 3 \frac{Li_{3/2}^2}{Li_1 Li_{1/2}} \left( 1 - \frac{16\alpha_2}{3\pi^{3/2}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} + \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{1/2}}{Li_1} \right) \end{aligned} \right]$
$D^T$	$\frac{\pi n L_g}{2\sigma_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi m k_b T}} \frac{1}{Li_1} \left[ \begin{aligned} &\frac{3}{2} Li_{3/2} \left( 1 - \frac{8\alpha_2}{3\pi^{3/2}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{1/2}}{Li_1} \right) \\ &- \Lambda Li_{1/2} \left( 1 - \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{1/2}}{Li_1} \right) \end{aligned} \right]$
$\kappa^\varphi$	$\frac{\pi n L_g}{2} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi m k_b T}} \frac{1}{Li_1} \left[ \begin{aligned} &\frac{3}{2} Li_{3/2} \left( 1 - \frac{8\alpha_2}{3\pi^{3/2}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{1/2}}{Li_1} \right) \\ &- 2 \frac{Li_{1/2} Li_2}{Li_1} \left( 1 - \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} - \frac{3\alpha_2}{4\sqrt{\pi}} \frac{Li_{3/2}}{Li_2} + 2 \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{1/2}}{Li_1} \right) \end{aligned} \right]$
$\kappa^n$	$\frac{\pi L_g}{2} \frac{(k_b T)^2}{\sqrt{2\pi m k_b T}} \frac{1}{Li_0} \left[ \begin{aligned} &\frac{3}{2} Li_{3/2} \left( 1 - \frac{8\alpha_2}{3\pi^{3/2}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{-1/2}}{Li_0} \right) \\ &- 2 \frac{Li_{1/2} Li_2}{Li_1} \left( 1 - \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} - \frac{3\alpha_2}{4\sqrt{\pi}} \frac{Li_{3/2}}{Li_2} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{1/2}}{Li_1} \right) \\ &\quad + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{-1/2}}{Li_0} \end{aligned} \right]$

Kuantum ölçek etkisi altında  $L_g \ll l_0$  durumu için 2 boyutlu Fermi ve Bose gazlarında hesaplanan ısı iletim ve iletim katsayılarına ait ifadelerin çok karmaşık uzun ifadeler olması nedeniyle, ısı iletim katsayısının iletim katsayısına oranı olarak tanımlanan Wiedemann-Franz oranlarına ait değerler tablolarda verilmemiştir.

**Tablo 4.18:** Kuantum ölçek etkisi altında  $L_g \ll l_0$  durumu için 3 boyutlu Fermi ve Bose gazlarında transport katsayıları.

	D=3
$D^\varphi$	$\frac{4nL_g}{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} \left[ 1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{8} (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{1/2}}{Li_1} + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} \right]$
$D^n$	$\frac{4L_g}{3} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \frac{Li_1}{Li_{1/2}} \left[ 1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{8} (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{1/2}}{Li_1} + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} \right]$
$\kappa^T$	$\frac{8nL_g}{3} \frac{k_b^2 T}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \left[ 3 \frac{Li_3}{Li_{3/2}} \left( 1 - \frac{15\sqrt{\pi}}{64} (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{5/2}}{Li_3} \right) + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} \right] - 2 \frac{Li_2^2}{Li_{3/2} Li_1} \left( 1 - \frac{9\sqrt{\pi}}{16} (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{3/2}}{Li_2} + \frac{3\sqrt{\pi}}{8} (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{1/2}}{Li_1} \right) + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} \right]$
$D^T$	$\frac{4nL_g}{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \frac{1}{Li_{3/2}} \left[ 2Li_2 \left( 1 - \frac{9\sqrt{\pi}}{32} (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{3/2}}{Li_2} + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} \right) - \Lambda Li_1 \left( 1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{8} (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{1/2}}{Li_1} + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} \right) \right]$
$\kappa^\varphi$	$\frac{4nL_g}{3} \frac{k_b T}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \frac{1}{Li_{3/2}} \left[ 2Li_2 \left( 1 - \frac{9\sqrt{\pi}}{32} (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{3/2}}{Li_2} + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} \right) - \frac{5}{2} \frac{Li_{5/2} Li_1}{Li_{3/2}} \left( 1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{8} (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{1/2}}{Li_1} - \frac{4}{5} \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_2}{Li_{5/2}} \right) + 2 \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} \right]$
$\kappa^n$	$\frac{4L_g}{3} \frac{(k_b T)^2}{\sqrt{2\pi mk_b T}} \frac{1}{Li_{1/2}} \left[ 2Li_2 \left( 1 - \frac{9\sqrt{\pi}}{32} (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{3/2}}{Li_2} + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} \right) - \frac{5}{2} \frac{Li_{5/2} Li_1}{Li_{3/2}} \left( 1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{8} (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{1/2}}{Li_1} - \frac{4}{5} \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_2}{Li_{5/2}} \right) + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} \right]$

Transport katsayılarında bulunan yerel yoğunluğun  $n = \eta/V$  olduğu ve  $\eta$ 'nin denklem (4.42) ile verildiği gözönüne alınırsa, yerel yoğunluğun da kuantum ölçek etkilerine maruz kaldığı ve ayrıca  $\Lambda$  değerine de bağlı olarak değiştiği unutulmamalıdır. Kuantum ölçek etkilerinin  $n$  üzerindeki etkilerini de gözönüne alarak transport katsayıları ölçek etkisiz değerlerine bölünerek boyutsuzlaştırılırlarsa 1, 2 ve 3 boyutlu Fermi ve Bose gazı için sırasıyla Tablo 4.19 ve Tablo 4.20'de verilen ifadelere ulaşılır.

**Tablo 4.19:** Kuantum ölçek etkisi altında  $L_g \ll l_0$  durumu için 1 ve 2 boyutlu Fermi ve Bose gazlarında boyutsuz transport katsayıları.

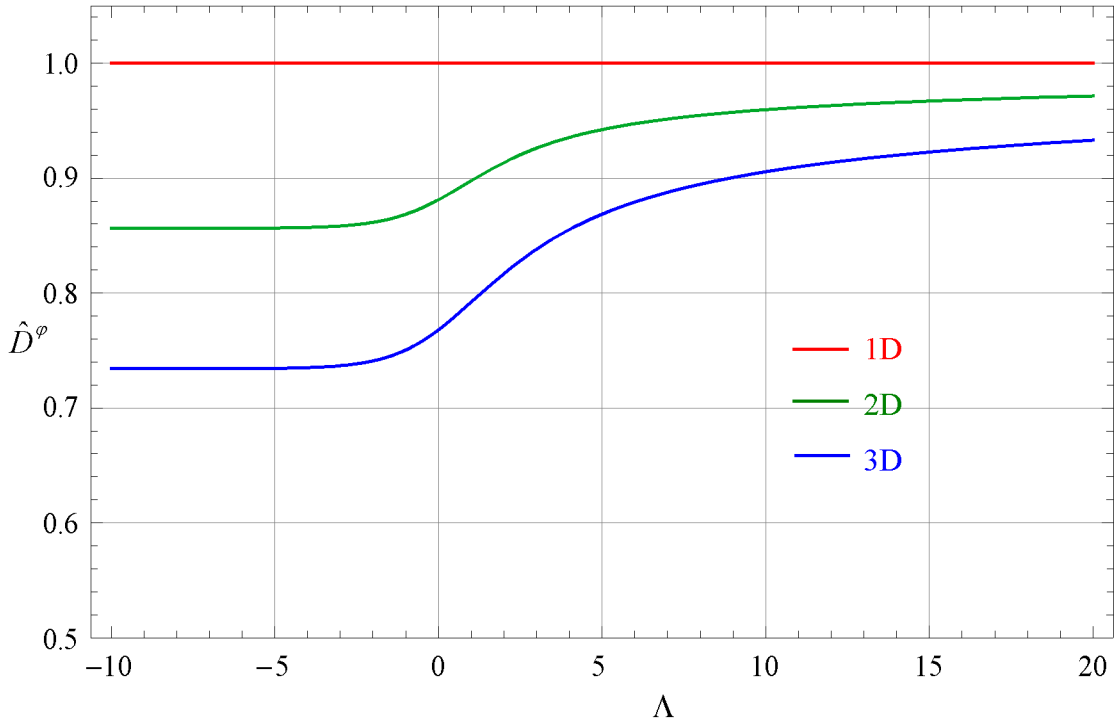
	$D = 1$	$D = 2$
$\hat{D}^\phi$	1	$1 - \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}}$
$\hat{D}^n$	1	$1 - \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{-1/2}}{Li_0}$
$\hat{\kappa}^T$	1	$\frac{5 \frac{Li_{5/2}}{Li_1} \left( 1 - \frac{32\alpha_2}{15\pi^{3/2}} \frac{Li_2}{Li_{5/2}} \right) - 3 \frac{Li_{3/2}^2}{Li_1 Li_{1/2}} \left( 1 - \frac{16\alpha_2}{3\pi^{3/2}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} + \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} \right)}{5 \frac{Li_{5/2}}{Li_1} - 3 \frac{Li_{3/2}^2}{Li_1 Li_{1/2}}}$
$\hat{D}^T$	1	$\frac{\frac{3}{2} Li_{3/2} \left( 1 - \frac{8\alpha_2}{3\pi^{3/2}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} \right) - \Lambda Li_{1/2} \left( 1 - \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} \right)}{\frac{3}{2} Li_{3/2} - \Lambda Li_{1/2}}$
$\hat{\kappa}^\phi$	1	$\frac{\frac{3}{2} Li_{3/2} \left( 1 - \frac{8\alpha_2}{3\pi^{3/2}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} \right) - 2 \frac{Li_{1/2} Li_2}{Li_1} \left( 1 - \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} - \frac{3\alpha_2}{4\sqrt{\pi}} \frac{Li_{3/2}}{Li_2} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{1/2}}{Li_1} \right)}{\frac{3}{2} Li_{3/2} - 2 \frac{Li_{1/2} Li_2}{Li_1}}$
$\hat{\kappa}^n$	1	$\frac{\frac{3}{2} Li_{3/2} \left( 1 - \frac{8\alpha_2}{3\pi^{3/2}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{-1/2}}{Li_0} \right) - 2 \frac{Li_{1/2} Li_2}{Li_1} \left( 1 - \frac{4\alpha_2}{\pi^{3/2}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} - \frac{3\alpha_2}{4\sqrt{\pi}} \frac{Li_{3/2}}{Li_2} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{1/2}}{Li_1} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_{-1/2}}{Li_0} \right)}{\frac{3}{2} Li_{3/2} - 2 \frac{Li_{1/2} Li_2}{Li_1}}$

**Tablo 4.20:** Kuantum ölçek etkisi altında  $L_g \ll l_0$  durumu için 3 boyutlu Fermi ve Bose gazlarında Boyutsuz transport katsayıları.

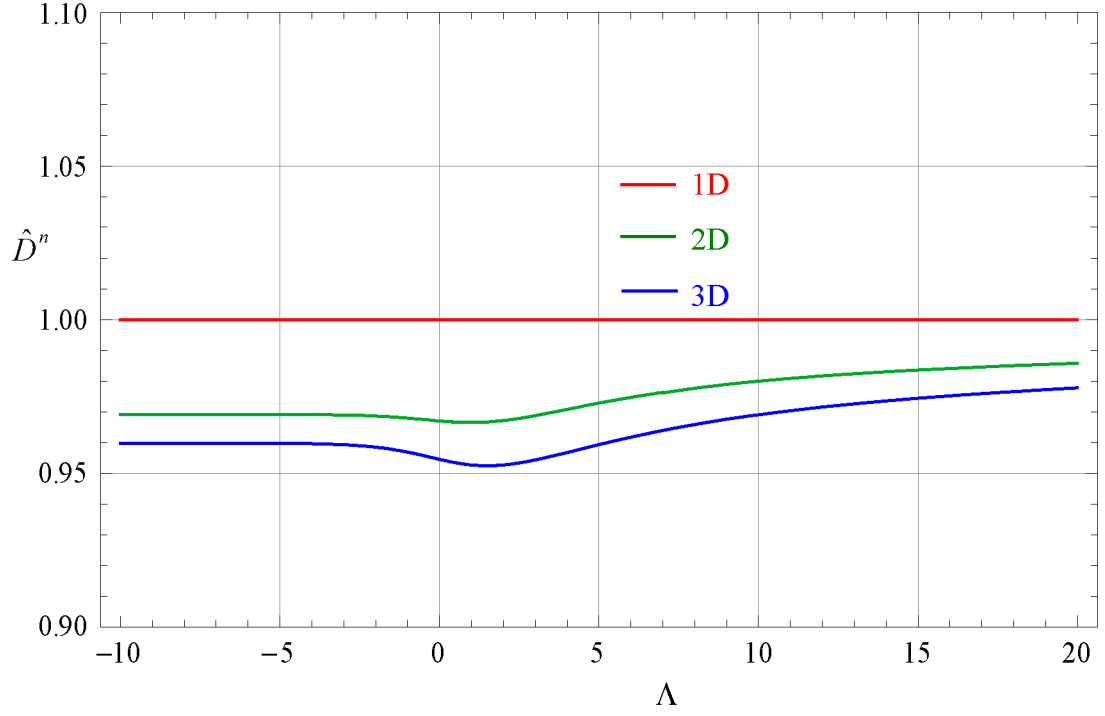
	D=3
$\hat{D}^\varphi$	$1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{8}(\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{1/2}}{Li_1}$
$\hat{D}^n$	$1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{8}(\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{1/2}}{Li_1} + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}}$
$\hat{\kappa}^T$	$\frac{3 \frac{Li_3}{Li_{3/2}} \left( 1 - \frac{15\sqrt{\pi}}{64} (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{5/2}}{Li_3} \right) - 2 \frac{Li_2^2}{Li_{3/2} Li_1} \left( 1 - \frac{9\sqrt{\pi}}{16} (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{3/2}}{Li_2} + \frac{3\sqrt{\pi}}{8} (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{1/2}}{Li_1} \right)}{3 \frac{Li_3}{Li_{3/2}} - 2 \frac{Li_2^2}{Li_{3/2} Li_1}}$
$\hat{D}^T$	$\frac{2Li_2 \left( 1 - \frac{9\sqrt{\pi}}{32} (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{3/2}}{Li_2} \right) - \Lambda Li_1 \left( 1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{8} (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{1/2}}{Li_1} \right)}{2Li_2 - \Lambda Li_1}$
$\hat{\kappa}^\varphi$	$\frac{2Li_2 \left( 1 - \frac{9\sqrt{\pi}}{32} (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{3/2}}{Li_2} \right) - \frac{5}{2} \frac{Li_{5/2} Li_1}{Li_{3/2}} \left( 1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{8} (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{1/2}}{Li_1} - \frac{4}{5} \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_2}{Li_{5/2}} + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} \right)}{2Li_2 - \frac{5}{2} \frac{Li_{5/2} Li_1}{Li_{3/2}}}$
$\hat{\kappa}^n$	$\frac{2Li_2 \left( 1 - \frac{9\sqrt{\pi}}{32} (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{3/2}}{Li_2} + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} \right) - \frac{5}{2} \frac{Li_{5/2} Li_1}{Li_{3/2}} \left( 1 - \frac{3\sqrt{\pi}}{8} (\alpha_2 + \alpha_3) \frac{Li_{1/2}}{Li_1} - \frac{4}{5} \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_2}{Li_{5/2}} + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_0}{Li_{1/2}} + \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\sqrt{\pi}} \frac{Li_1}{Li_{3/2}} \right)}{2Li_2 - \frac{5}{2} \frac{Li_{5/2} Li_1}{Li_{3/2}}}$

#### 4.3.2.1 Fermi Gazında Kuantum Ölçek Etkilerinin Dejenerasyonla Değişimi

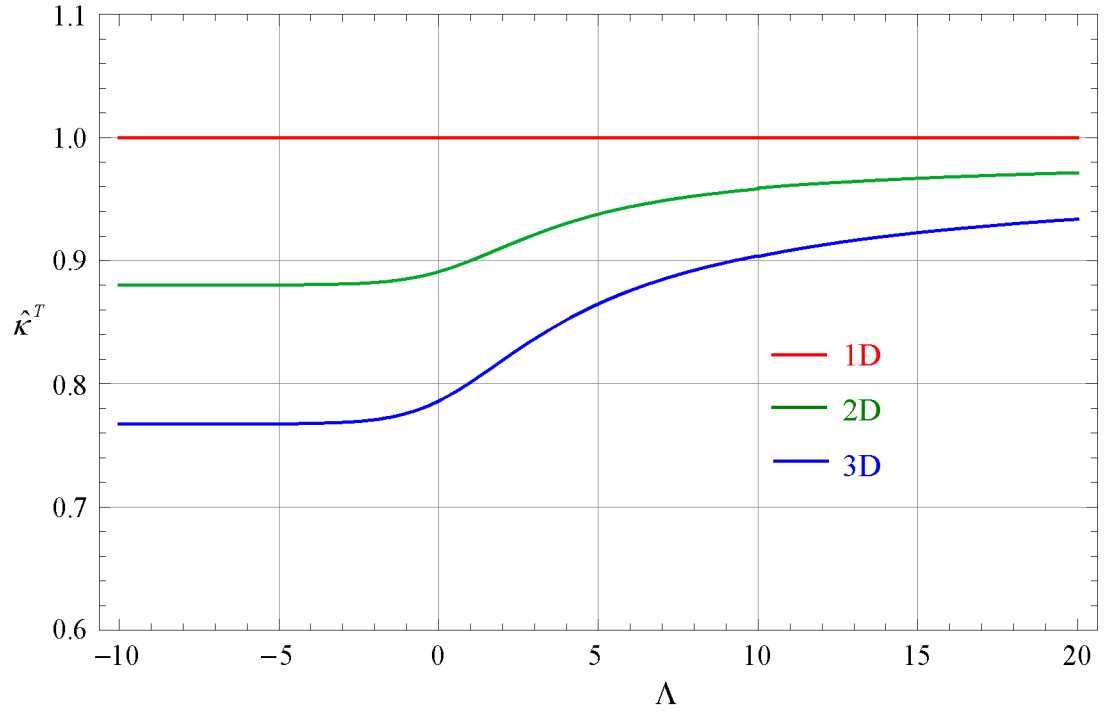
(4.44)-(4.46) ve (4.48)-(4.50) eşitliklerinde  $\sigma_0 = 1/nL_g$  kullanılarak ve yerel yoğunluğa gelen ölçek etkileri gözönüne alınarak elde edilen iletim, difüzyon, ısı iletim, Soret, Peltier ve Dufour katsayılarının dejenerasyonla değişimleri incelenmiştir. Şekil 4.18, Şekil 4.19 ve Şekil 4.20'de sırasıyla iletim, difüzyon ve ısı iletim katsayılarının dejenerasyonla değişimlerini veren grafiklerden de görüldüğü gibi artan dejenerasyonla kuantum ölçek etkileri azalmaktadır. Bunun sebebi artan dejenerasyonla parçacıkların de Broglie dalga boyunun azalmasıdır. Öte yandan klasik limitte gelen düzeltmelerin, difüzyon katsayısı hariç,  $L_g \gg l_0$  rejimi için verilen Şekil 4.6, Şekil 4.7 ve Şekil 4.8 ile karşılaştırıldığında arttığı görülmektedir. İletim, difüzyon ve ısı iletim transport katsayılarının dejenere Fermi gazı için asimptotik ifadeleri ise Tablo 4.21'de verilmiştir. Böylece Tablo 4.12 ve Tablo 4.21 karşılaştırılarak bu durumun dejenere limite de devam ettiği açık olarak görülebilir. Bazı katsayılarda  $L_g \ll l_0$  rejiminde doğrudan ölçek etkisi düzeltme getirirken  $L_g \gg l_0$  rejiminde daha küçük olan termoölçek etkisi düzeltme getirmektedir. Bu durum örneğin iletkenlikte açık olarak görülmekte ve neden  $L_g \ll l_0$  rejiminde daha büyük bir kuantum ölçek etkisi olduğunu açıklamaktadır.



**Şekil 4.18:** Kuantum ölçek etkileri altında  $L_g \ll l_0$  durumu için Fermi gazında boyutsuz iletim katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.



**Şekil 4.19:** Kuantum ölçek etkileri altında  $L_g \ll l_0$  durumu için Fermi gazında boyutsuz difüzyon katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.

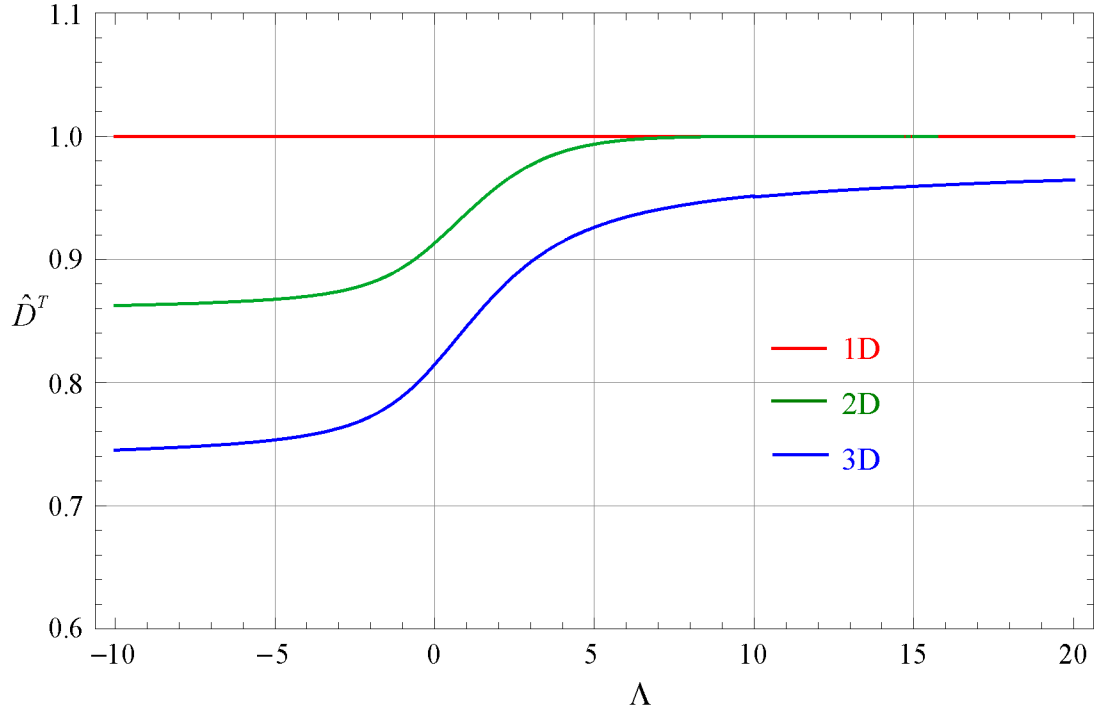


**Şekil 4.20:** Kuantum ölçek etkileri altında  $L_g \ll l_0$  durumu için Fermi gazında boyutsuz ısı iletim katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.

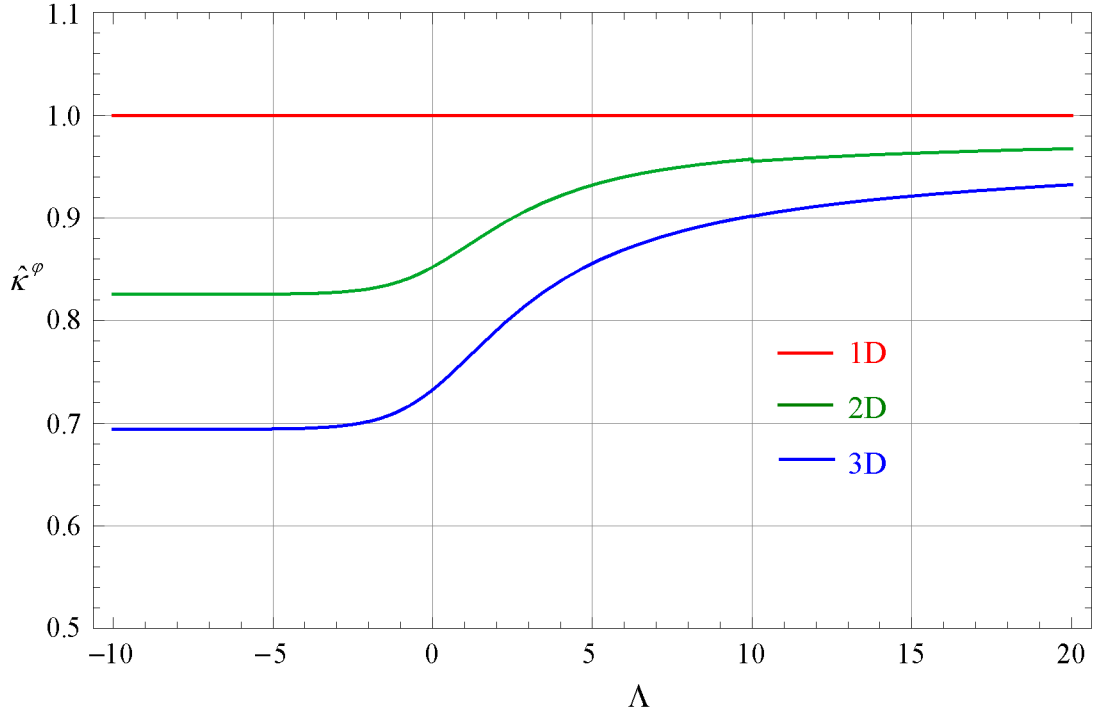
**Tablo 4.21:** Dejenere limitte  $L_g \ll l_0$  durumu için 1, 2 ve 3-boyutlu Fermi gazının kuantum ölçek etkisi altında boyutsuz iletim, difüzyon ve ısı iletim katsayılarının asimptotik ifadeleri.

	$D=1$	$D=2$	$D=3$
$\hat{D}_{11}^o$	1	$1 - \frac{2\alpha_2}{\pi\sqrt{\Lambda}} - \frac{\pi\alpha_2}{12\Lambda^{5/2}}$	$1 - \frac{3(\alpha_2 + \alpha_3)}{4} \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} + \frac{\pi^2(\alpha_2 + \alpha_3)}{32} \frac{1}{\Lambda^{5/2}}$
$\hat{D}_{11}^n$	1	$1 - \frac{\alpha_2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} + \frac{\pi^2\alpha_2}{24} \frac{1}{\Lambda^{5/2}}$	$1 - \frac{(\alpha_2 + \alpha_3)}{4} \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} + \frac{5\pi^2(\alpha_2 + \alpha_3)}{96} \frac{1}{\Lambda^{5/2}}$
$\hat{K}_{11}^T$	1	$1 - \frac{2\alpha_2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} - \frac{\pi\alpha_2}{3} \frac{1}{\Lambda^{5/2}}$	$1 - \frac{3(\alpha_2 + \alpha_3)}{4} \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} - \frac{\pi^2(\alpha_2 + \alpha_3)}{4} \frac{1}{\Lambda^{5/2}}$

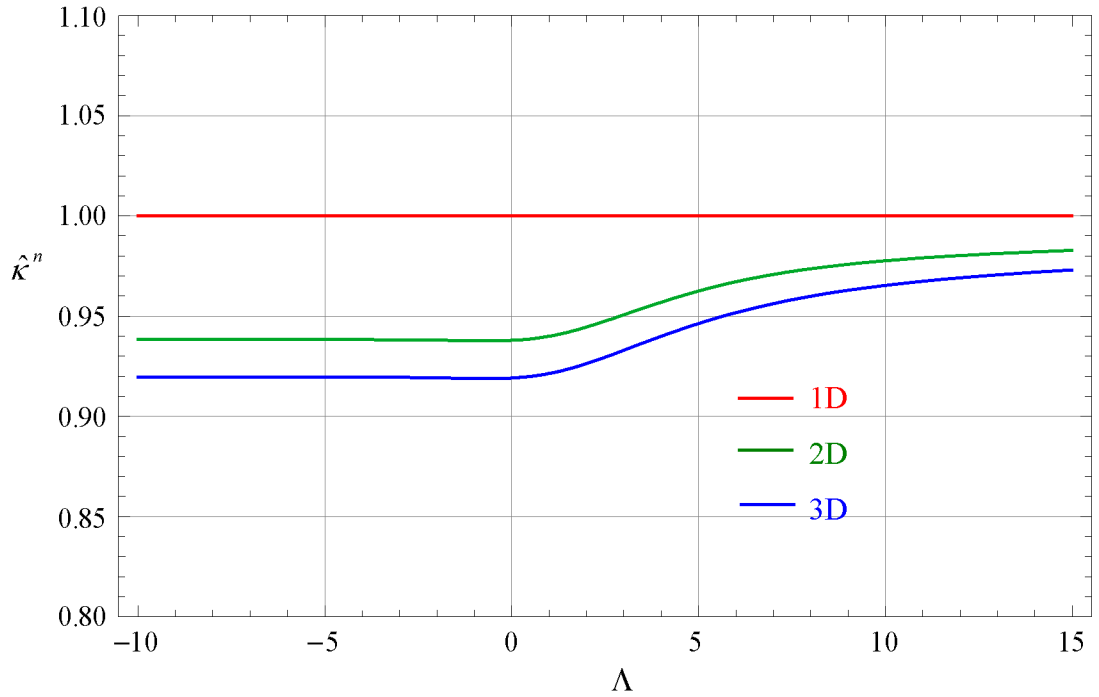
Çapraz etkiler olan Sorét, Peltier ve Dufour katsayılarının dejenereasyonla değişimleri de sırasıyla Şekil 4.21, Şekil 4.22 ve Şekil 4.23’de verilmiştir. Çapraz etkilere ait transport katsayılarının grafiklerinden de görüldüğü gibi, direkt etkilere benzer olarak artan dejenereasyonla kuantum ölçek etkileri etkinliklerini yitirmektedir. Çapraz etkilere ait transport katsayılarının dejenere durumdaki asimptotik ifadeleri Tablo 4.22’de verilmiştir. Direkt etkilere olduğu gibi bu rejimde ölçek etkilerinin gerek klasik gerekse dejenere limitte daha büyük olduğu anlaşılmaktadır.



**Şekil 4.21:** Kuantum ölçek etkileri altında  $L_g \ll l_0$  durumu için Fermi gazında boyutsuz Sorét katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.



**Şekil 4.22:** Kuantum ölçek etkileri altında  $L_g \ll l_0$  durumu için Fermi gazında boyutsuz Peltier katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.



**Şekil 4.23:** Kuantum ölçek etkileri altında  $L_g \ll l_0$  durumu için Fermi gazında boyutsuz Dufour katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.

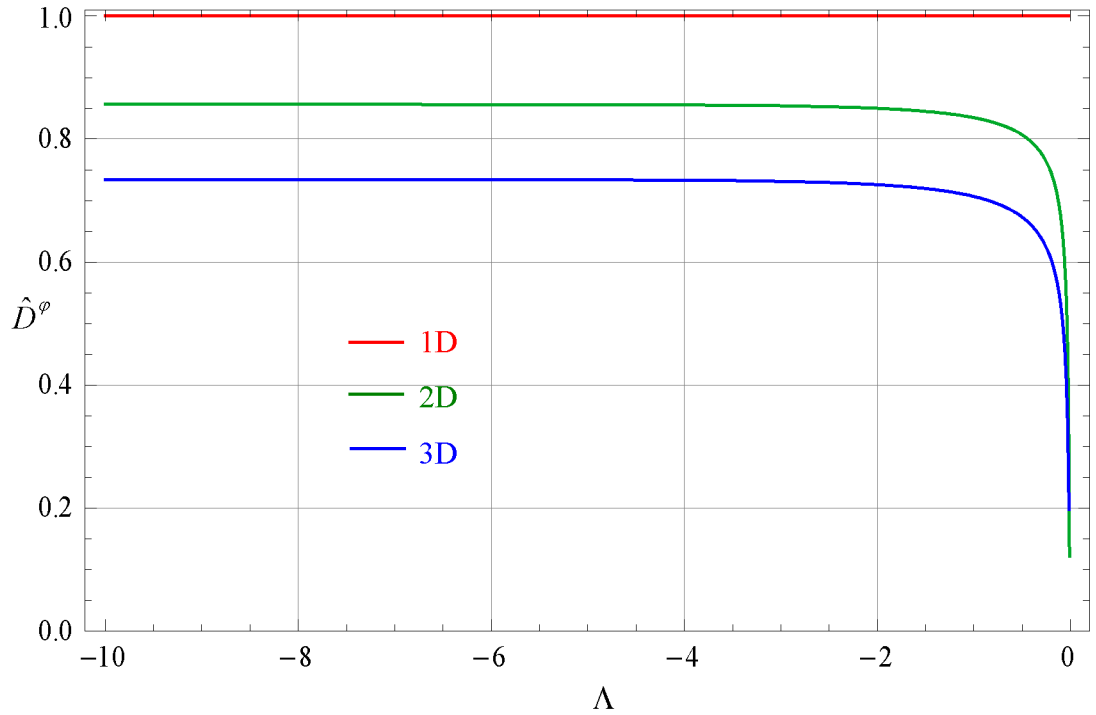


**Tablo 4.22:** Dejenere limitte  $L_g \ll l_0$  durumu için 1, 2 ve 3-boyutlu Fermi gazının kuantum ölçek etkisi altında boyutsuz Soret, Peltier ve Dufour katsayılarının asimptotik ifadeleri.

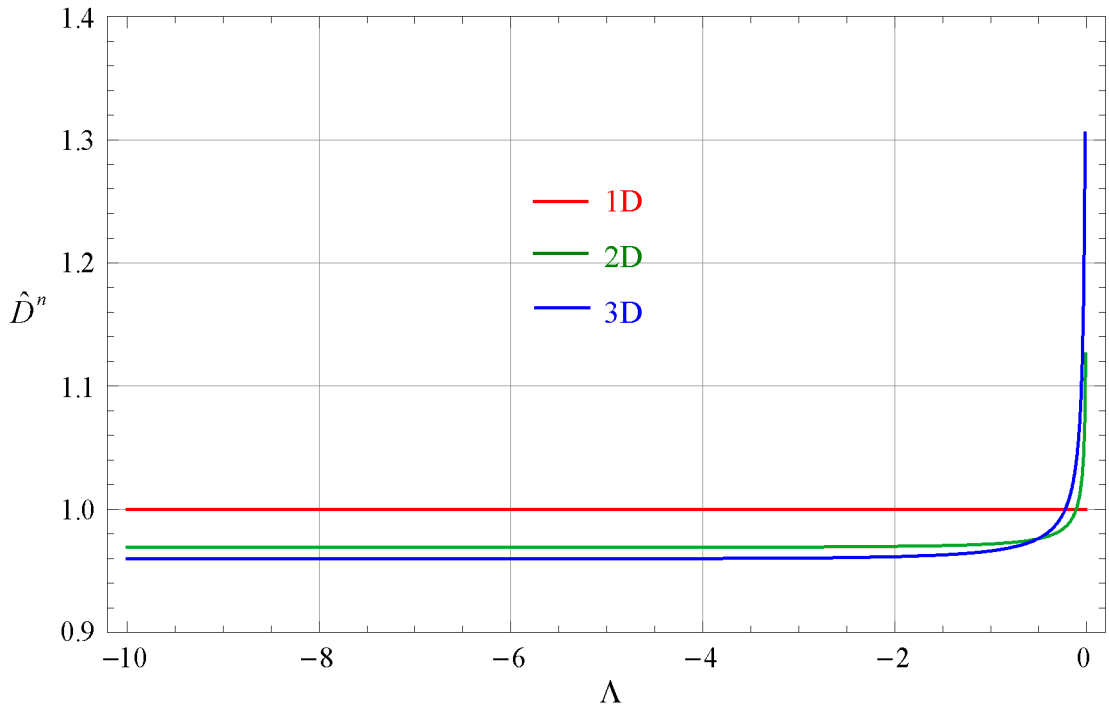
	$D=1$	$D=2$	$D=3$
$\hat{D}_{11}^T$	1	1	$1 - \frac{3(\alpha_2 + \alpha_3)}{8} \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$
$\hat{\kappa}_{11}^\varphi$	1	$1 - \frac{2\alpha_2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} - \frac{5\pi\alpha_2}{12} \frac{1}{\Lambda^{5/2}}$	$1 - \frac{3(\alpha_2 + \alpha_3)}{4} \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} + \frac{9\pi^2(\alpha_2 + \alpha_3)}{32} \frac{1}{\Lambda^{5/2}}$
$\hat{\kappa}_{11}^n$	1	$1 - \frac{\alpha_2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} - \frac{7\pi\alpha_2}{24} \frac{1}{\Lambda^{5/2}}$	$1 - \frac{(\alpha_2 + \alpha_3)}{4} \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} - \frac{25\pi^2(\alpha_2 + \alpha_3)}{96} \frac{1}{\Lambda^{5/2}}$

#### 4.3.2.2 Bose Gazında Kuantum Ölçek Etkilerinin Dejenersasyonla Değişimi

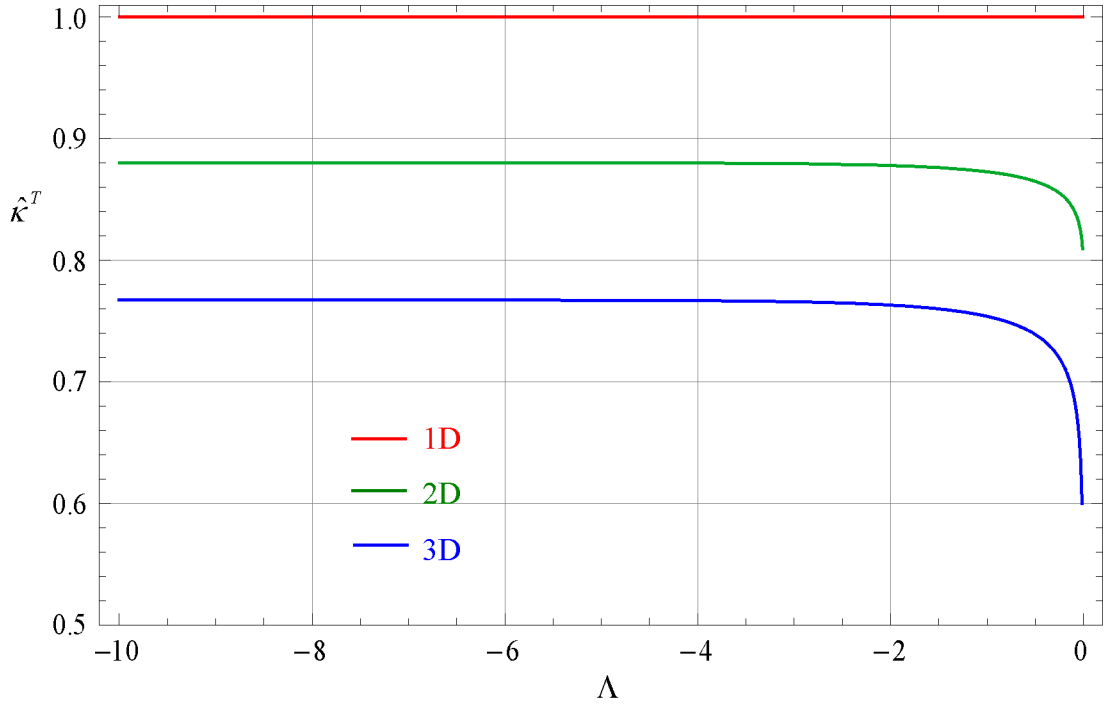
Bu bölümde (4.44)-(4.46) ve (4.48)-(4.50) eşitliklerinde  $\sigma_0 = 1/nL_g$  kullanılarak ve yerel yoğunluğa gelen ölçek etkileri gözönüne alınarak elde edilen transport katsayılarının dejenersasyonla değişimi incelenmiştir. Direkt etkiler olan iletim, difüzyon ve ısı iletim katsayılarının dejenersasyonla değişimleri sırasıyla Şekil 4.24, Şekil 4.25 ve Şekil 4.26'da verilmiştir. Görüldüğü gibi yüksek dejenersasyonla kuantum ölçek etkilerinin bu transport katsayılar üzerindeki etkileri de artmaktadır.



**Şekil 4.24:** Kuantum ölçek etkileri altında  $L_g \ll l_0$  durumu için Bose gazında boyutsuz iletim katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.



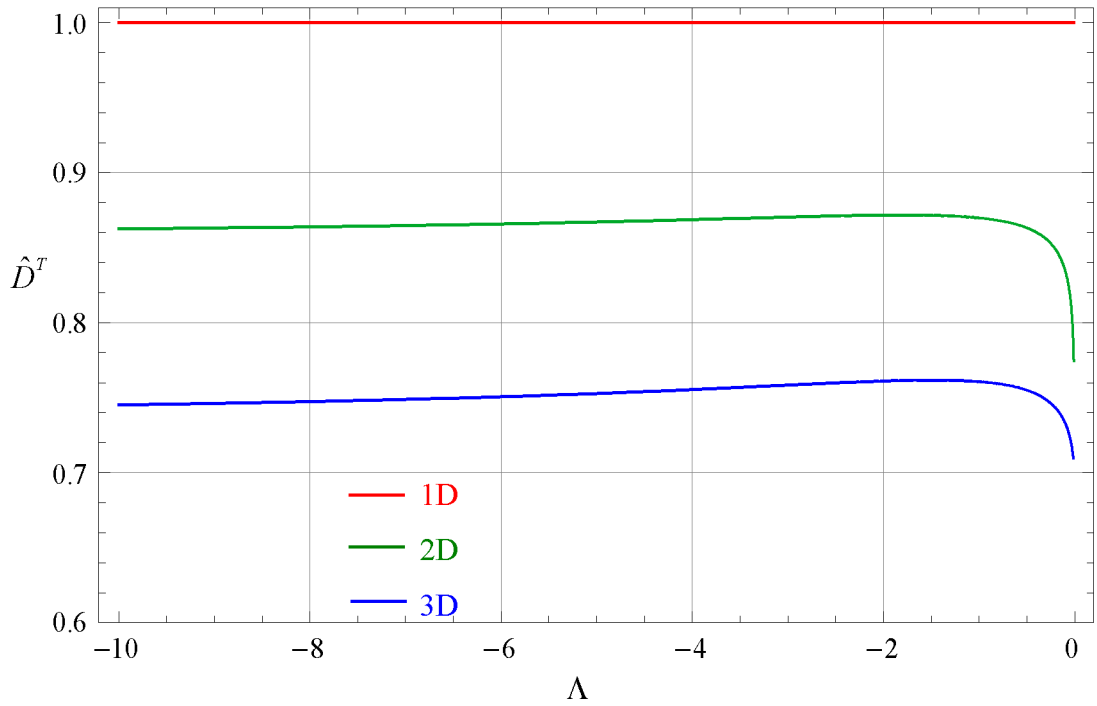
**Şekil 4.25:** Kuantum ölçek etkileri altında  $L_g \ll l_0$  durumu için Bose gazında boyutsuz difüzyon katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.



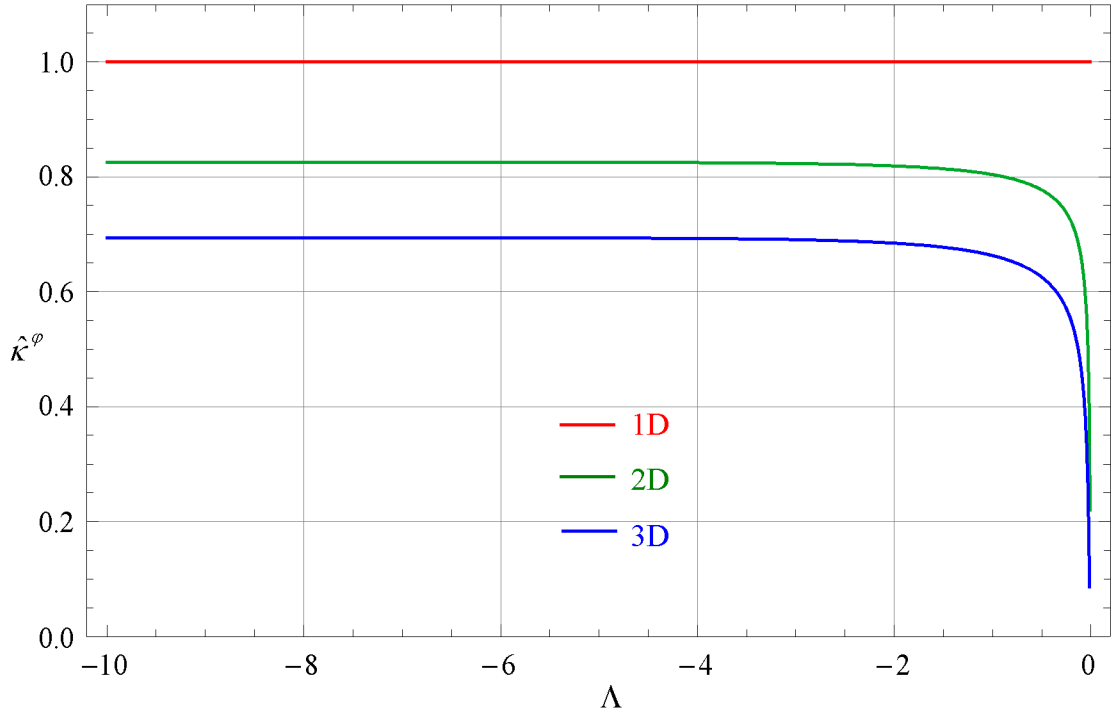
**Şekil 4.26:** Kuantum ölçek etkileri altında  $L_g \ll l_0$  durumu için Bose gazında boyutsuz ısı iletim katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.

Şekil 4.24, Şekil 4.25 ve Şekil 4.26 gerek klasik gerekse dejenere limitte kuantum ölçek etkilerinin  $L_g \ll l_0$  rejiminde Fermi de olduğu gibi difüzyon katsayısı hariç daha kuvvetli olduğunu göstermektedir. Bu durum Şekil 4.12 Şekil 4.13 ve Şekil 4.14 ile karşılaştırma yapılarak görülebilir. Ayrıca dejenere limit için Bose gazının transport katsayılarının asimptotik ifadelerinin özetlendiği Tablo 4.23 ve Tablo 4.24 ile  $L_g \gg l_0$  rejimi için benzer özetlemenin yapıldığı Tablo 4.14 ve Tablo 4.15'in karşılaştırması da bu sonucu desteklemektedir.

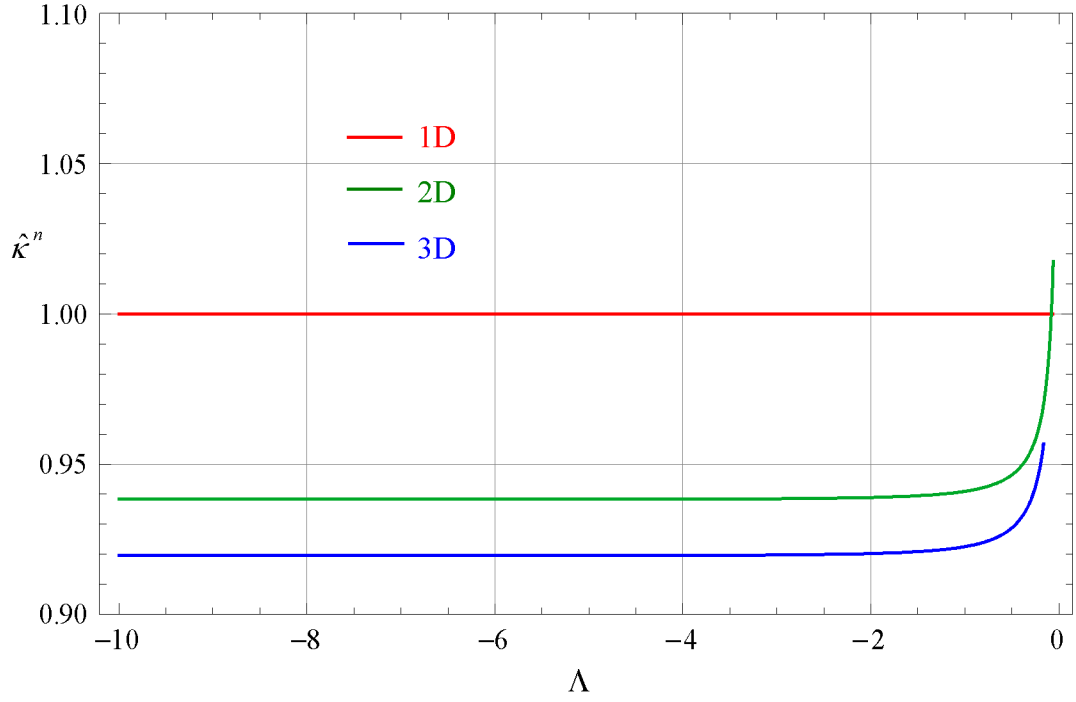
Şekil 4.27, Şekil 4.28 ve Şekil 4.29 ise Soret, Peltier ve Dufour katsayıları için benzer incelemeyi içermektedir.



**Şekil 4.27:** Kuantum ölçek etkileri altında  $L_g \ll l_0$  durumu için Bose gazında boyutsuz Soret katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.



**Şekil 4.28:** Kuantum ölçek etkileri altında  $L_g \ll l_0$  durumu için Bose gazında boyutsuz Peltier katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.



**Şekil 4.29:** Kuantum ölçek etkileri altında  $L_g \ll l_0$  durumu için Bose gazında boyutsuz Dufour katsayısının  $\Lambda$  ile değişimi.

**Tablo 4.23:** Dejenere limitte  $L_g \ll l_0$  durumu için 1, 2 ve 3-boyutlu Bose gazının kuantum ölçek etkisi altında boyutsuz iletim, difüzyon ve ısı iletim katsayılarının asimptotik ifadeleri.

	$D=1$	$D=2$	$D=3$
$\hat{D}^\varphi$	1	$1 - \frac{4\alpha_2}{\pi^2 \sqrt{-\Lambda}} + \frac{4\alpha_2 \zeta(1/2)}{\pi^{5/2}}$	$1 + \frac{3(\alpha_2 + \alpha_3)}{8\sqrt{-\Lambda} \ln(-\Lambda)} + \frac{3\sqrt{\pi}(\alpha_2 + \alpha_3)\zeta(1/2)}{8\ln(-\Lambda)}$
$\hat{D}^n$	1	$1 + \frac{\alpha_2}{2\sqrt{-\Lambda}} - \frac{4\alpha_2}{\pi^2 \sqrt{-\Lambda}} + \frac{4\alpha_2 \zeta(1/2)}{\pi^{5/2}}$	$1 + \frac{(\alpha_2 + \alpha_3)}{\pi\sqrt{-\Lambda}} + \frac{3\pi(\alpha_2 + \alpha_3)}{8\sqrt{-\Lambda} \ln(-\Lambda)} + \frac{3\sqrt{\pi}(\alpha_2 + \alpha_3)\zeta(1/2)}{8\ln(-\Lambda)}$
$\hat{K}^T$	1	$1 - \frac{16\alpha_2 \sqrt{\pi}}{45\zeta(5/2)} - \frac{12\alpha_2 \zeta(3/2)^2}{5\pi^{5/2} \zeta(5/2)}$	$1 - \frac{\pi^5}{144\zeta(3/2)} \frac{1}{\sqrt{-\Lambda} \ln(-\Lambda)^2}$

**Tablo 4.24:** Dejenere limitte  $L_g \ll l_0$  durumu için 1, 2 ve 3-boyutlu Bose gazının kuantum ölçek etkisi altında boyutsuz Soret, Peltier ve Dufour katsayıları katsayılarının asimptotik ifadeleri..

	$D=1$	$D=2$	$D=3$
$\hat{D}^T$	1	$1 + \frac{8\alpha_2 \ln(-\Lambda)}{3\pi^{3/2} \zeta(3/2)}$	$1 - \frac{27(\alpha_2 + \alpha_3)\zeta(3/2)}{16\pi^{3/2}}$
$\hat{K}^\varphi$	1	$1 - \frac{4\alpha_2}{\pi^2 \sqrt{-\Lambda}} - \frac{\alpha_2}{\sqrt{-\Lambda} \ln(-\Lambda)}$	$1 + \frac{3\pi(\alpha_2 + \alpha_3)}{8\sqrt{-\Lambda} \ln(-\Lambda)}$
$\hat{K}^n$	1	$1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\right) \frac{\alpha_2}{\sqrt{-\Lambda}} - \frac{\alpha_2}{\sqrt{-\Lambda} \ln(-\Lambda)}$	$1 + \frac{(\alpha_2 + \alpha_3)}{\pi\sqrt{-\Lambda} \left(1 + \frac{2\pi^2 \zeta(3/2)}{15\ln(-\Lambda)\zeta(5/2)}\right)}$

## 5. SONUÇ ve TARTIŞMA

Bu çalışmada; Maxwellian, Fermi ve Bose gazlarında direkt etkilere ait iletim, difüzyon ve ısı iletim ile çapraz etkilere ait Soret, Peltier ve Dufour transport katsayılarının hem kuantum dejenerasyonu hem de kuantum ölçek etkileri ile değişimleri farklı transport rejimleri için incelenmiştir.

Transport katsayılarını analitik olarak ifade edebilmek ve özellikle kuantum ölçek etkilerinin transport katsayıları üzerindeki etki mekanizmalarını ve bu etkilerin sıcaklık ve yoğunluk gibi kontrol parametrelerine olan fonksiyonel bağımlılıklarını ortaya koyabilmek amacıyla parçacıklar arası çarpışma frekansı için mutlak hızlar esas alınmıştır. Maxwellian, Fermi ve Bose gazlarının hem direkt hem de çapraz transport katsayılarının türetiminde parçacık-parçacık ve parçacık-duvar çarpışmalarına ait transport rejimleri relaksasyon zamanı yaklaşımı kullanılarak incelenmiştir.

Yerel yoğunluk üzerinde kuantum ölçek etkileri, etkin kuantum potansiyel yardımıyla temsil edilmiş ve klasik dağılım fonksiyonu etkin kuantum potansiyel ilavesiyle kuantum dağılım fonksiyonu yerine kullanılmıştır. Böylece, parçacık yoğunluğu üzerindeki kuantum etkiler parçacıklar üzerine etki eden kuantum potansiyel ile temsil edilmiştir.

Direkt ve çapraz etkilere ait transport katsayıları, kuantum ölçek etkileri göz önüne alınarak D boyutlu dikdörtgen bir transport domeninde bulunan Maxwellian, Fermi ve Bose gazları için türetilmiştir. Transport katsayıları 1, 2 ve 3 boyut için çalışılmıştır. Transport katsayıları üzerinde sadece kuantum ölçek etkilerinin katkısını inceleyebilmek amacıyla, ölçek etkisi göz önüne alınarak elde edilmiş olan transport katsayıları ölçek etkisiz ifadelerine bölünerek boyutsuzlaştırılmıştır. Boyutsuz katsayıların dejenerasyonla değişimleri incelenmiştir. Ölçek etkisiz transport katsayıları üzerinde sadece dejenerasyonun etkisi de ayrıca incelenmiştir.

Analitik olarak elde edilen transport katsayılarının asimptotik ifadeleri incelendiğinde; dejenerasyonun Fermi gazının transport katsayıları üzerindeki kuantum ölçek etkilerini azaltırken, Bose gazında bunun tam tersi şekilde arttırdığı

görülmüştür. Ayrıca transport katsayılarında kuantum ölçek düzeltmeleri ile termal düzeltmelerin yanı sıra bileşik bir düzeltme olarak termo-ölçek düzeltmelerinin de ortaya çıktığı görülmüştür.

Evrensel bir yasa olan Wiedemann-Franz yasasının kuantum ölçek etkileri nedeniyle nano sistemlerde evrenselliğini kaybettiği görülmüştür.

Hem direkt hem de çapraz etkilere ait transport katsayılarının kuantum ölçek etkileri nedeniyle transport domeninin ölçek ve geometrisine bağlı olduğu bulunmuştur. Böylece domenin şekli ve ölçeği transport süreçleri üzerinde ilave bir kontrol parametresi olmaktadır.

Kuantum potansiyel gradyanın transport için sürücü bir kuvvet olabileceği görülmüştür. Sıcaklık gradyanı altında Maxwellian veya Bose gazıyla dolu bir domende kuantum potansiyelin sıcaklık bağımlılığı ikinci bir sürücü kuvvet olarak kuantum potansiyel gradyanına neden olmaktadır. Her iki sürücü kuvvetin birlikte varlığının sıcaklık gradyanına bağımlı kuantum konveksiyon olarak adlandırılacak bir konveksiyon akımı meydana getirmesi beklenmektedir. Benzer olarak yoğunluk gradyanı altında dejenere Fermi gazıyla dolu bir domende, kuantum potansiyelin yoğunluk bağımlılığı ikinci bir sürücü kuvvet olarak davranmaktadır. Yine bu her iki kuvvetin birlikte varlığı yoğunluk gradyanına bağımlı bir konveksiyon akımı oluşturabilecektir. Kuantum potansiyelden kaynaklanan bu konveksiyonlar makro sistemlerde gözlenemez.

Kuantum ölçek etkilerinin transport katsayıları üzerindeki etkileri üzerine yapılan bu çalışma, nano sistemlerde transport baskın olarak parçacık-duvar çarpışmaları ile gerçekleştiğinden, özellikle parçacıklarla duvar arasındaki potansiyel etkileşmelerin de (Lennard-Jones potansiyeli gibi) modellenmesi ile geliştirilebilir. Ayrıca, nano sistemlerde termo-ölçek etkilerinin transport katsayıları üzerinde yapacağı etkilerin de incelenmesi, ölçek etkileri ve termo-ölçek etkilerine dayanan mikro ve nano makinaların tasarlanması amaçlanabilir.

## KAYNAKLAR

- Akis, R., Shifren, L., Ferry, D.K. and Vasileska, D.**, 2001. The effective potential and its use in simulation, *Phys. Stat. Sol.*, **226**, 1-8.
- Alexeev, B.V.**, 2004. Generalized Boltzmann Physical Kinetics, Elsevier, Netherlands.
- Ancona, M.G. and Iafrate, G.J.**, 1989. Quantum correction to the equation of state of an electron gas in semiconductors, *Physical Review B*, **39**, 9536-9540.
- Angell, J. B., Terry, S. C. and Barth, P. W.**, 1983. Silicon micromechanical devices, *Faraday Transactions I*, **68**, 744-748.
- Arkılıç, E.B. and Schmit, A.M.**, 1997. Gaseous slip flow in long microchannels, *Journal of Microelectromechanical Systems*, **6**, 167-178.
- Arora, V.K. and Awad, F.G.**, 1981. Quantum size effects in semiconductor transport, *Physical Review B*, **23**, 5570-5575.
- Bellac, M.**, 2004. Equilibrium and Non-Equilibrium Statistical Thermodynamics, Cambridge University Press, New York.
- Bhatnagar, P.L., Gross, E.P. and Krook, M.**, 1954. A Model for collision processes in gases. I.: Small amplitude processes in charged and neutral one component systems, *Physical Review*, **94**, 511-525.
- Blatt, M.J. and Opie, A.H.**, 1974. Non-Equilibrium Statistical Mechanics I. The Boltzmann Transport Equation, *Journal of Physics A: Mathematical, Nuclear and General*, **7**, 1895-1906.
- Bohm, D.**, 1951. A Suggested interpretation of the quantum theory in terms of hidden variables I, *Physical Review*, **85**, 166-179.
- Bohm, D.**, A 1952. Suggested Interpretation of the quantum theory in terms of hidden variables II, *Physical Review*, **85**, 180-193.
- Bordone, P., Bertoni, A., Brunetti, R. and Jacobani, C.**, 2003. Monte carlo simulation of quantum electron transport based on Wigner paths, *Mathematics and Computer in Simulation*, **62**, 307-314.
- Callen, H.B.**, 1948. The Application of Onsager's reciprocal relations to thermoelectric, thermomagnetic and galvanometric Effects, *Physical Review*, **73**, 1349-1358.
- Casimir, H.B.G.**, 1945. On Onsager's Principle of microscopic reversibility, *Review of Modern Physics*, **17**, 343-350.
- Charles, C.S., Sugihara, S. and Nowotny, J.**, 2005. Materials for Energy Conversion Devices, Cambridge University Press, New York.



- Chen, G.**, 2005. *Nanoscale Energy Transport and Conversion*, Oxford University Press, New York.
- Cowling, T.G.**, 1970. Approximate theories of thermal diffusion, *Journal of Physics: Gen. Physics*, **3**, 774-782.
- Dai, W., Xie, M.**, 2003. Quantum statistics of ideal gases in confined space, *Physics Letters A*, **311**, 340-346.
- Dai, W., Xie, M.**, 2004. Geometry Effects in Confined Space, *Physical Review E*, **70**, 016103.
- Dastoor, P.C. and Allison, W.**, 2003. Geometric contrast mechanism in helium atom scattering: The growth of the Fe/Cu(100) system, *Physical Review B*, **63**, 245403.
- Epstein, A. H. and Senturia, S. D.**, 1997. Macro power from micro machinery, *Science*, **276**, 1211.
- Epstein, A. H., Senturia, S.D., Al-Midani, O., Anathasuresh, G., Ayon, A., Breuer, K., Chen, K. S., Ehrich, F.F., Esteve, E., Frechette, L., Gauba, G., Ghodssi, R., Groshenry, C., Jacobsen, S.A., Kerebrock, L.L., Lang, J.H., Lin, C-C., London, A., Lopata, J., Mehra, A., Mur Miranda, J.O., Nagle, S., Orr, D.J., Piekos, E., Schmith, M.A., Shirley, G., Spearing, S.M., Tan, C.S., Tzeng, Y-S. and Waitz, I.A.**, 1997. Micro heat engines, gas turbines, and rocket engines, *The MIT Microengine Project*, AIAA, Reston, 1773.
- Farias, D. and Reider, K.H.**, 1998. Atomic beam diffraction from solid surfaces, *Reports on Progress in Physics*, **61**, 1575-1664
- Ferry, D.**, 2000. Effective potential and the onset of quantization in ultrasmall MOSFET's, *Superlattice and Microstructures*, **28**, 419-423.
- Ferry, D.K. and Zhou, J.R.**, 1993. Form of the quantum potential for use in hydrodynamic equations for semiconductor device modelling, *Physical Review B*, **48**, 7944-7950.
- Feynman, R.P.**, 1992. There is plenty of rooms at the bottom, *Journal of Micromechanical Systems*, **1**, 60-66.
- Freeman, W.L. and Gettys, E.W.**, 1978. Quantum Size Effects and Electric Field Effect in Thin Bi Films, *Physical Review B*, **17**, 529-534.
- Gabriel, K.J.**, 1995. Engineering microscopic machines, *Scientific American*, **260**, 150-153.
- Gad-el-Hak, M.**, 1999. The Fluid mechanics of microdevices, The freeman scholar lecture, *Journal of Fluids Engineering*, **121**, 5-33.
- Gardner, C.L. and Ringofer, C.**, 1996. Smooth quantum potential for the hydrodynamic model, *Physical Review E*, **53**, 157-167.
- Gnedin, O. and Ostiker, J.**, 2001. Limits of Collisional dark matter from elliptical galaxies in clusters, *The Astronomical Journal*, **561**, 61-68.
- Gravesen, P., Branbjerg, J. and Jensen, O. S.**, 1993. Microfluidics-A Review, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, **3**, 168-182.

- Groot, S.R. and Mazur, P.**, 1954a. Extension of Onsager's theory of reciprocal relations I, *Physical Review*, **94**, 218-224.
- Groot, S.R. and Mazur, P.**, 1954b. Extension of Onsager's theory of reciprocal relations II, *Physical Review*, **94**, 224-226.
- Groot, S.R. and Mazur, P.**, 1961. Non-Equilibrium Thermodynamics, Inter Science Publishers, New York.
- Hillery, M., O'Connell, R.F., Scully, M.O. and Wigner, E.P.**, 1984. Distribution Functions in Physics: Fundamentals, *Physics Reports*, **106**, 121-167.
- Hirschfelder, O.J., Curtiss, C.F. and Bird, R.B.**, 1964. Molecular Theory of Gases and Liquids, John Wiley & Sons, New York.
- Ho, C.M., and Tai, Y.C.**, 1998. Micro-Electro-Mechanical systems (MEMS) and fluid flows, *Annual. Review of Fluid Mechanics*. **30**, 579-612.
- Hogan, H.**, 1996. Invasion of the micromachines, *New Scientist*. **29**, 28-33.
- Horseman, S.T., Higgo, J.J.W., Alexander, J. and Harrington, J.F.**, 1996. Water, Gas and Solute Movement Through Argillaceous Media, NEA-OECD Report cc-96/1.
- Huang, K.**, 1987. Statistical Mechanics, John Wiley&Sons, New York.
- Jacobani, C. and Bordone, P.**, 2004. The Wigner-Function Approach to Non-Equilibrium Electron Transport, *Reports on Progress in Physics*, **67**, 1033-1071.
- Jalochowski, M. and Bauer, E.**, 1988. Quantum size and surface effects in the electrical resistivity and high-energy electron reflectivity of ultrathin lead films, *Physical Reviews*, **38**, 5272-5280.
- Jou, D., Casas-Vasquez, J., Lebon, G.**, 1988. Extended Irreversible Thermodynamics, *Reports on Progress in Physics*, **51**, 1105-1179.
- Jou, D., Casas-Vazquez, J. and Lebon, G.**, 1996. Extended Irreversible Thermodynamics, Springer-Verlag.
- Karniadakis, G. and Beskok, A.**, 2002. Micro flows: Fundamentals and simulation, Springer, New York.
- Loyalka, S:K.**, 1971. Kinetic theory of thermal transpiration and mechanocaloric effects I, *The Journal of Chemical Physics*, **55**, 4497-4503.
- Loyalka, S:K. and Hickey, K.A.**, 1991. Kinetic theory of thermal transpiration and mechanocaloric effects: planar flow of a rigid sphere gas with arbitrary accommodation at the surface, *Journal of Vacuum Science and Technology A*, **9**, 158-163.
- Ludstorm, M.**, 2000. Fundamentals of Carrier Transport, Cambridge University Press, Cambridge.
- Mehra, A., Zhang, X., Ayon, A., Waitz, I., Schmidt, M. and Spadaccini, C.**, 2000. A six-wafer combustion system for a silicon micro gas turbine engine, *Journal of Microelectromechanical Systems*, **9**, 517-527.
- Meixner, J.**, 1941. The Thermodynamics of thermal diffusion, *Ann. d. Physik*, **39**, 333-356.

- Middleton, A.E. and Scanlon, W.W.**, 1953. Measurement of the thermoelectric power of germanium at temperature above 78 K, *Physical Review*, **92**, 219-226.
- Pertaya, N.**, 2004. The  $\alpha$ -Ga(010) Surface Investigated by Room and Low Temperature Scanning Tunneling Microscopy and Helium Atom Scattering, *PhD Thesis*, Free University of Berlin, Berlin.
- O'Connor, L.**, 1992. MEMS: MicroMechanical systems, *Mechanical Engineering*, **114**, 40-77.
- Onsager, L.**, 1931. Reciprocal relations in irreversible processes I, *Physical Review*, **37**, 405-426.
- Prigogine, I.**, 1967. Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes, Interscience Publishers, New York.
- Reith, M.**, 2003. Nano-Engineering in Science and Technology, World Scientific, New Jersey.
- Sano, N. and Hiroki, A.**, 2002. Device modelling and simulations toward sub-10 nm semiconductor devices, *IEEE Transactions on Nanotechnology*, **1**, 63-71.
- Shaikh, S., Vasileska, D., Heitzinger, C. and Ringpfer, C.**, 2005. Quantum potential approach to modeling nanoscale MOSFETs, *Journal of Computational Electronics*, **4**, 57-61.
- Sharipov, F.**, 1994. Onsager-Casimir reciprocity relations for open gaseous systems at arbitrary rarefaction I: General theory for single gas, *Physica A*, **203**, 437-456.
- Sharipov, F.**, 1999. Onsager-Casimir reciprocity relation for the geothermal effects with polyatomic gases, *Physical Review*, **59**, 5128-5132.
- Sheng, L. and Xing, D.Y.**, Wang, Z.D., 1995. Transport theory in metallic films: Crossover from the classical to the quantum regime, *Physical Review B*, **51**, 7325-7328.
- Sisman, A.**, 2004. Surface dependence in thermodynamics of ideal gases, *Journal of Physics A: Math. Gen*, **37**, 11353-11361.
- Sisman, A. and Muller, I.**, 2004. The Casimir-Like Size Effects in Ideal Gases, *Physics Letters A*, **320**, 360-366.
- Sisman, A., Ozturk, Z.F. and Firat, C.** 2007. Quantum boundary layer: a non uniform density distribution of an ideal gas in thermodynamic equilibrium, *Physics Letters A*, **362**, 16-20.
- Sondheimer, E.H.**, 1950. The influence of transverse magnetic field on the conductivity of thin metallic films, *Physical Review*, **80**, 401-406.
- Sorrell, C.C. and Sugihara, S.**, 2005. Materials For Energy Conversion Devices, Taylor&Francis CRC.
- Spadaccini, C.M., Mehra, A., Lee, J., Zhang, X., Lukachko, S. and Waitz, I.A.**, 2003. High power density silicon combustion systems for micro gas turbine engines, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **125**, 709-719.

- Sullivan, S., Zhang, X., Ayon, A. and Brisson, J.G.**, 2001. Demonstration of a microscale heat exchanger for a silicon micro gas turbine engine, *The 11<sup>th</sup> International Conference on Solid State Sensors and Actuators*, Germany, 10-14 July, 1606-1609.
- Tesanovic, Z., Jaric, M.V. and Maekawa, S.**, 1986. Quantum transport and surface scattering, *Physical Review Letters*, **57**, 2760-2763.
- Tien, C., Majumdar, A. and Gerner, F.M.**, 1998. *Microscale Energy Transport*, Taylor&Francis, Washington.
- Timp, G.**, 1999. *Nanotechnology*, Springer Verlag. New York.
- Trivedi, N. and Ashcroft, N.W.**, 1988. Quantum size effects in transport properties of metallic films, *Physical Review B*, **38**, 12298-12309.
- Tsuchiya, H. and Ravaioli, U.**, 2001. Particle monte carlo simulation of quantum phenomena in semiconductor nanostructures, *Journal of Applied Physics*, **89**, 4023-4029.
- Vavruch, I.**, 2002. Conceptual problems of modern irreversible thermodynamics, *Chemicke Listy*, **96**, 271-275.
- Whalen, S., Thomson, M., Bahr, D., Richards, C. and Richards, R.**, 2003. Design fabrication and testing of the <sup>3</sup>P micro heat engine, *Sensors and Actuators A*, **104**, 290-298.
- Wigner, E.**, 1932. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium, *Physical Review*, **40**, 749-759.
- Winstead, B., Tsuchia, H. and Ravaioli, U.**, 2001. An Approach to quantum correction in monte carlo device simulation, *Technical Proceedings of the 2001 International Conference on Modeling and Simulation of Microsystems*, USA, March 19-21, 566-569.

## EK-A: TEZ İÇERSİNDE KULLANILAN BAZI BAĞINTILAR VE FONKSİYONLAR

Toplamların hassas bir şekilde hesaplanabilmesi için Poisson, Abel-Plana ve Euler-Maclaurin toplam formülleri sırasıyla

$$f(i) = f(-i) \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} f(i) = \int_0^{\infty} f(i) di - \frac{f(0)}{2} + 2 \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f(i) \cos(2\pi si) \quad (\text{A.1})$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(i) = \int_0^{\infty} f(i) - \frac{f(0)}{2} + I \int_0^{\infty} \frac{f(Ix) - f(-Ix)}{\exp(2\pi Ix) - 1} dx \quad (\text{A.2})$$

$$\sum_{i=1}^n f(i) = \int_0^n f(i) di + \frac{1}{2} [f(n) - f(0)] + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{B_{2s}}{(2s)!} [f^{(2s-1)}(n) - f^{(2s-1)}(0)] \quad (\text{A.3})$$

olarak tanımlanır. Burada,  $B$  değerleri Bernoulli sayıları olup  $B_2 = 1/6$ ,  $B_4 = -1/30$ ,  $B_6 = 1/42$  şeklinde değerler alır.

Tez çerçevesinde karşılaşılan polilogaritmik fonksiyonların tanımı ve türev ilişkileri,

$$Li_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n} \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{d}{dz} Li_n(z) = \frac{Li_{n-1}(z)}{z} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{d}{dz} Li_n(e^z) = Li_{n-1}(e^z) \quad (\text{A.6})$$

şeklinde verilir. Polilogaritmik fonksiyonların  $\Lambda \gg 1$  için asimptotik açılımları,

$$\Lambda \gg 1 \Rightarrow Li_{m+1}[-\exp(\Lambda)] \cong -\frac{\Lambda^{m+1}}{\Gamma(m+2)} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{\Lambda^2} (m+1)m + \frac{7\pi^4}{360} \frac{1}{\Lambda^4} (m+1)m(m-1)(m-2) + O(6) \right] \quad (\text{A.7})$$

şeklinde verilir. Aşağıda, tezde Fermi gazları için karşılaşılan exponansiyel argümanlı polilogaritmik fonksiyonlara ait asimptotik açılımlar (A.7) bağıntısı kullanılarak verilmiştir,

$$Li_3[-\exp(\Lambda)] \cong -\frac{\Lambda^3}{6} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{\Lambda^2} \right], \quad (\text{A.8})$$

$$Li_{5/2}[-\exp(\Lambda)] \cong -\frac{8\Lambda^{5/2}}{15\sqrt{\pi}} \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{8} \frac{1}{\Lambda^2} \right], \quad (\text{A.9})$$

$$Li_2[-\exp(\Lambda)] \cong -\frac{\Lambda^2}{2} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{3} \frac{1}{\Lambda^2} \right], \quad (\text{A.10})$$

$$Li_{3/2}[-\exp(\Lambda)] \cong -\frac{4\Lambda^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} \frac{1}{\Lambda^2} \right], \quad (\text{A.11})$$

$$Li_1[-\exp(\Lambda)] \cong -\Lambda - \exp(-\Lambda) \cong -\Lambda, \quad (\text{A.12})$$

$$Li_{1/2}[-\exp(\Lambda)] \cong -\frac{2\Lambda^{1/2}}{\sqrt{\pi}} \left[ 1 - \frac{\pi^2}{24} \frac{1}{\Lambda^2} \right], \quad (\text{A.13})$$

$$Li_0[-\exp(\Lambda)] \cong -1 - \exp(-\Lambda) \cong -1, \quad (\text{A.14})$$

$$Li_{-1/2}[-\exp(\Lambda)] \cong -\frac{2\Lambda^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} \frac{1}{\Lambda^2} \right]. \quad (\text{A.15})$$

Bose gazı için tezde karşılaşılan exponansiyel argümanlı polilogaritmik fonksiyonların asimptotik açılımları  $\Lambda \rightarrow 0$  durumunda

$$\Lambda \rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$Li_{m+1}[\exp(\Lambda)] \cong (-\Lambda)^m \Gamma(-m) + \zeta(m+1) + \zeta(m)\Lambda + \frac{1}{2}\zeta(m-1)\Lambda^2 + O(\Lambda^{m+1}) \quad (\text{A.16})$$

şeklinde ifade edilir. Aşağıdaki verilen limitler,

$$\lim_{m \rightarrow 1} [(-\Lambda)^m \Gamma(-m) + \Lambda \zeta(m)] \rightarrow \Lambda - \Lambda \ln(-\Lambda) \quad (\text{A.17})$$

$$\lim_{m \rightarrow 0} [(-\Lambda)^m \Gamma(-m) + \zeta(m+1)] \rightarrow -\Lambda \ln(-\Lambda) \quad (\text{A.18})$$

ve (A.16) eşitliği kullanılarak elde edilen bazı polilogaritmik fonksiyonlara ait asimptotik sonuçlar,

$$Li_3[\exp(\Lambda)] \cong \zeta(3) + \zeta(2)\Lambda, \quad (\text{A.19})$$

$$Li_{5/2}[\exp(\Lambda)] \cong \zeta\left(\frac{5}{2}\right) + \zeta\left(\frac{3}{2}\right)\Lambda + \frac{4\sqrt{\pi}}{3}(-\Lambda)^{3/2} + \frac{1}{2}\zeta\left(\frac{1}{2}\right)\Lambda^2, \quad (\text{A.20})$$

$$Li_2[\exp(\Lambda)] \cong \frac{\pi^2}{6} - \Lambda \ln(-\Lambda) + \Lambda - \frac{\Lambda^2}{4}, \quad (\text{A.21})$$

$$Li_{3/2}[\exp(\Lambda)] \cong \zeta\left(\frac{3}{2}\right) - 2\sqrt{\pi}\sqrt{-\Lambda} + \zeta\left(\frac{1}{2}\right)\Lambda + \frac{1}{2}\zeta\left(-\frac{1}{2}\right)\Lambda^2, \quad (\text{A.22})$$

$$Li_1[\exp(\Lambda)] = -\ln[1 - \exp(\Lambda)] \cong -\ln(-\Lambda) - \frac{\Lambda}{2} - \frac{\Lambda^2}{24}, \quad (\text{A.23})$$

$$Li_{1/2}[\exp(\Lambda)] \cong \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-\Lambda}} + \zeta\left(\frac{1}{2}\right) + \zeta\left(-\frac{1}{2}\right)\Lambda + \frac{1}{2}\zeta\left(-\frac{3}{2}\right)\Lambda^2, \quad (\text{A.24})$$

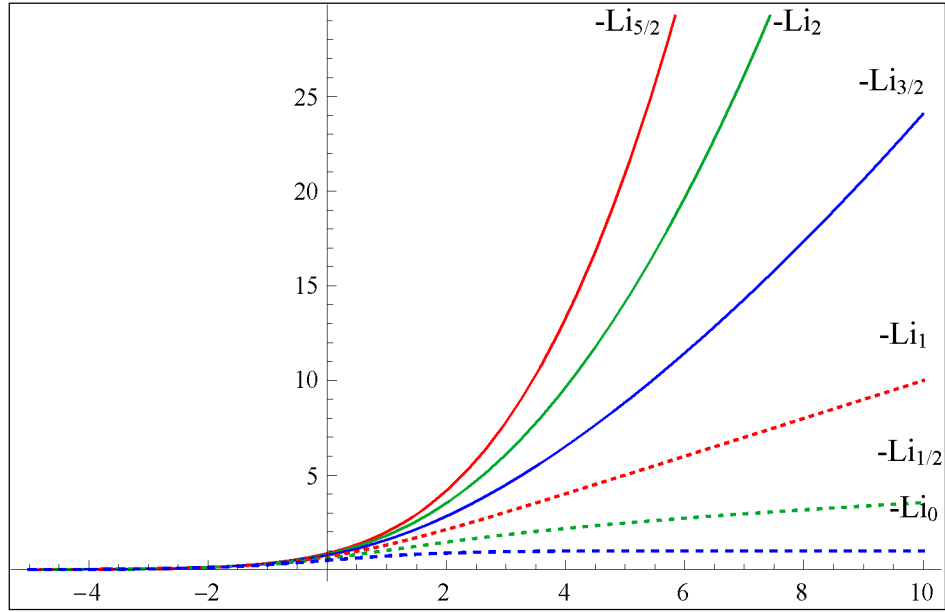
$$Li_0[\exp(\Lambda)] \cong -\frac{1}{\Lambda} - \frac{1}{2} - \frac{\Lambda}{12}, \quad (\text{A.25})$$

$$Li_{-1/2}[\exp(\Lambda)] \cong \zeta\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{2(-\Lambda)^{3/2}}, \quad (\text{A.26})$$

$$Li_{-1}[\exp(\Lambda)] \cong \zeta(-1) + \frac{1}{(-\Lambda)^2}, \quad (\text{A.27})$$

şeklinde elde edilir.

Fermi gazı durumunda karşılaşılan biçimdeki polilogaritmik ifadelerin  $-5 < \Lambda < 10$  aralığındaki değişimleri Şekil A.1'de verilmiştir. Benzer şekilde Bose gazı durumunda karşılaşılan polilogaritmik fonksiyonların  $-3 < \Lambda < 0$  aralığındaki değişimleri de Şekil A.2'de görülebilir.

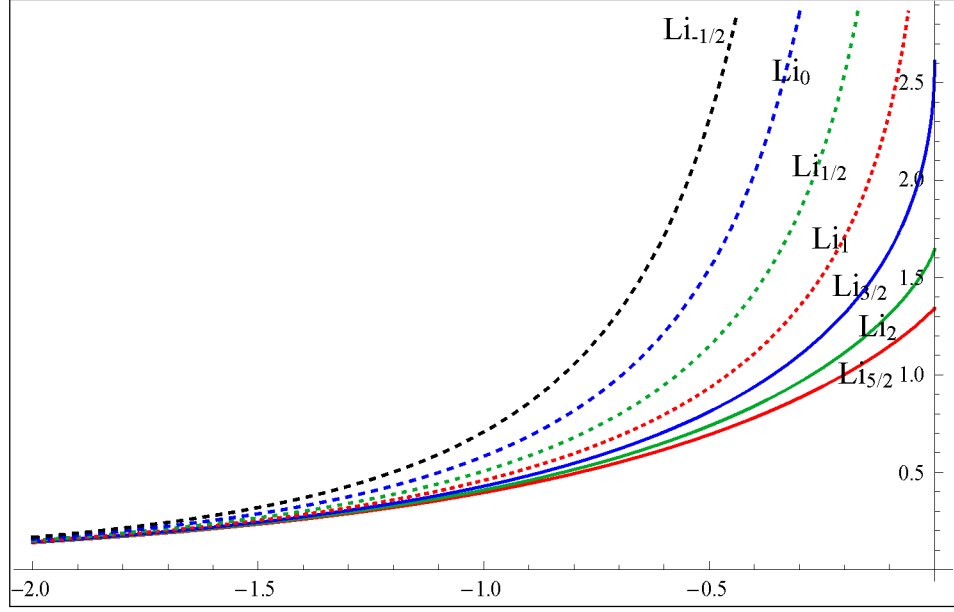


Şekil A.1:  $Li_n = Li_n[-\exp(\Lambda)]$  ifadelerinin  $\Lambda$  ile değişimi.

Polilogaritmik fonksiyonların hesabında yer alan Zeta fonksiyonu  $s$  kompleks sayı olmak üzere,

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \quad (\text{A.28})$$

şeklinde verilir. Zeta fonksiyonuna ait bazı değerler Tablo A.1'de verilmiştir.



**Şekil A.2:**  $Li_n = Li_n[\exp(\Lambda)]$  ifadelerinin  $\Lambda$  ile değışimi.

**Tablo A.1:** Zeta fonksiyonuna ait bazı değerler.

$\zeta(4)$	$\frac{\pi^4}{90}$	$\zeta(1)$	$\infty$
$\zeta(7/2)$	1.12673	$\zeta(1/2)$	-1.46035
$\zeta(3)$	1.20206	$\zeta(0)$	-0.5
$\zeta(5/2)$	1.34149	$\zeta\left(-\frac{1}{2}\right)$	-0.20789
$\zeta(2)$	$\frac{\pi^2}{6}$	$\zeta(-1)$	-1/12
$\zeta(3/2)$	2.61238		

İntegrallerin hesaplanmasında karşılaşılan diğer bir fonksiyon gama fonksiyonu olup tam sayılar için,

$$\Gamma(m) = (m-1)!, \quad (\text{A.29})$$

şeklinde basitleşir. Reel sayılar için ise

$$\Gamma(m+1) = m\Gamma(m) \quad (\text{A.30})$$

bağıntısı geçerlidir. Gama fonksiyonuna ait bazı değerler Tablo A.2'de verilmiştir.



**Tablo A.2 :** Gama fonksiyonuna ait bazı değerler.

$\Gamma(7/2)$	$\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$		$\Gamma(1/2)$	$\sqrt{\pi}$
$\Gamma(3)$	2		$\Gamma(0)$	$\infty$
$\Gamma(5/2)$	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$		$\Gamma(-1/2)$	$-2\sqrt{\pi}$
$\Gamma(2)$	1		$\Gamma(-3/2)$	$\frac{4\sqrt{\pi}}{3}$
$\Gamma(3/2)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$		$\Gamma(-5/2)$	$\frac{-8\sqrt{\pi}}{15}$
$\Gamma(1)$	1			

Tez çerçevesinde karşılaşılan integrallerin hesaplanması sırasında yararlanılan bazı seri açılımlar,

$$x < 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k \quad (\text{A.31})$$

$$x > 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(-x)^k} \quad (\text{A.32})$$

$$x < 1 \Rightarrow \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \quad (\text{A.33})$$

şeklinde tanımlanır.

## ÖZGEÇMİŞ

1971 yılında İstanbul'da doğdu. İlk öğretimini Kanlıca Sedat Simavi İlk Öğretim Okulu, orta ve lise öğretimini Haydarpaşa Lisesi'nde tamamladı. 1993 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü'nden mezun oldu. 1997 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Nükleer Enerji Enstitüsü'nde yüksek lisansını tamamladı. 1996 yılından beri İstanbul Teknik Üniversitesi Enerji Enstitüsü'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır. Uluslararası bilimsel dergilerde yayınlanmış 2 adet makalesi, yurt dışı kongrelerde sunulmuş 7, yurt içi kongrelerde sunulmuş 4 adet bildirisi bulunmaktadır. Evli ve 1 çocuk babasıdır.