

**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ ENERJİ ENSTİTÜSÜ**

**KAOTİK BİR MANYETİK ALANIN PLAZMA SINIRLANMASINA ETKİSİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Hüseyin YILDIRIM**

**Anabilim Dalı : Enerji Bilim ve Teknoloji**

**Programı : Enerji Bilim ve Teknoloji**

**HAZİRAN 2010**



**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ ENERJİ ENSTİTÜSÜ**

**KAOTİK BİR MANYETİK ALANIN PLAZMA SINIRLANMASINA ETKİSİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Hüseyin YILDIRIM  
(301061033)**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 07 Mayıs 2010**

**Tezin Savunulduğu Tarih : 10 Haziran 2010**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. Bilge ÖZGENER (İTÜ)  
Eş Danışman : Prof. Dr. Umur DAYBELGE (İTÜ)  
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Melih GEÇKİNLİ (İTÜ)  
Prof. Dr. Murat AYDIN (İTÜ)  
Yrd. Doç. Dr. Cuma YARIM (İTÜ)**

**HAZİRAN 2010**



*kuzuma..*



## ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasındaki uzun süreçte bana yol gösterdikleri için danışmanlarım Sayın Prof. Dr. Umur DAYBELGE ve Sayın Prof. Dr. Bilge ÖZGENER'e teşekkürü bir borç bilirim. Bilgelikleri bu çalışmanın en önemli kısımlarından birini oluşturdu.

Bütün yüksek lisans hayatım boyunca bana bir akademisyenden çok bir ağabey gibi yardımcı olmaya çalışan Sayın Yrd. Doç. Dr. Cuma YARIM'a ayrıca sonsuz teşekkür ederim.

Bu çalışmayı beni tüm hayatım boyunca gözü kapalı destekleyen aileme ve aramızdan çok erken yaşta ayrılan kıymetli insan Sayın Prof. Dr. Akif ATALAY'a ithaf ediyorum.

Haziran 2010

Hüseyin Yıldırım  
(Uzay Mühendisi)





## İÇİNDEKİLER

### Sayfa

ÖNSÖZ.....	v
İÇİNDEKİLER .....	vii
KISALTMALAR .....	ix
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xi
ŞEKİL LİSTESİ.....	xiii
ÖZET.....	xv
SUMMARY .....	xvii
<b>1. GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
1.1 Plazmanın Tanımı .....	1
1.2 Plazma Parametreleri.....	2
1.3 Plazma Çeşitleri.....	2
1.3.1 Füzyon dışı yeryüzü plazmaları .....	2
1.3.2 Yeryüzü füzyon plazmaları .....	2
1.3.3 Uzay plazmaları .....	3
<b>2. PLAZMANIN SINIRLANMASI .....</b>	<b>5</b>
2.1 Plazma Sınırlama Yöntemleri .....	5
2.1.1 Gravitasyonel sınırlama .....	5
2.1.2 Ataletle sınırlama .....	5
2.1.3 Manyetik sınırlama .....	5
2.2 Yüklü Parçacıkların Plazma Manyetik Alan Altında Hareketi .....	5
2.3 Manyetik Sınırlama Cihazları .....	8
2.3.1 Tokamak.....	8
2.3.2 Stelleratör .....	8
2.3.3 Spheromak .....	9
2.3.4 Reverse field pinch.....	9
2.4 Toroidal Manyetik Alan .....	10
2.5 Manyetik Alan Hamilton Mekaniği İlişkisi .....	12
2.6 Kaotik Manyetik Alan .....	13
2.6.1 Poincaré kesiti .....	13
2.7 KAM Teoremi ve Cantori .....	15
<b>3. MANYETİK ALANIN HESAPLANMASI .....</b>	<b>19</b>
3.1 Manyetik Alan Çizgisinin Takibi Yöntemi .....	19
3.2 İrrasyonel Rotasyonel Transform Yüzeyleri Yöntemi .....	23
3.3 Aksiyon İntegrali Hesabı Yöntemi.....	27
<b>4. KAOTİK MANYETİK ALANDA SICAKLIK DİFÜZYONU .....</b>	<b>33</b>
4.1 Anizotropik Isı İletim Denklemi .....	33
4.2 Anizotropik Isı İletim Denklemine Yarı Analitik Çözümü .....	33
4.3 Anizotropik Isı İletim Denklemine Sayısal Çözümü .....	34
4.3.1 Paralel difüzyon terimi.....	34
4.3.2 Dik difüzyon terimi .....	37

4.4 Clebsch Koordinatlarda Metriklerin Hesaplanması .....	37
<b>5. SONUÇ VE TARTIŞMA.....</b>	<b>41</b>
<b>KAYNAKLAR.....</b>	<b>43</b>
<b>EKLER.....</b>	<b>45</b>

## **KISALTMALAR**

**KAM** : Kolmogrov Arnold Moser  
**D** : Döteryum  
**T** : Tritiyum



## ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 1.1 : Plazma parametre tablosu.....	2
Çizelge 1.2 : Füzyon reaksiyonu tipleri.....	3



## ŞEKİL LİSTESİ

	<b>Sayfa</b>
Şekil 2.1 : Manyetik alan altında parçacık hareketi.	7
Şekil 2.2 : Tokamak [11]'den uyarlanmıştır.	8
Şekil 2.3 : Stelleratör [13].	9
Şekil 2.4 : Spheromak [15].	9
Şekil 2.5 : Reverse field pitch [16].	10
Şekil 2.6 : Toroidal geometri.	11
Şekil 2.7 : Hamiltonyen sistem, [17] den uyarlanmıştır.	12
Şekil 2.8 : Poincaré kesiti.	14
Şekil 2.9 : Stokastik deniz ve manyetik adalar.	14
Şekil 2.10 : Manyetik alan kaos geçişi.	16
Şekil 2.11 : Stokastik deniz ve manyetik adalar.	17
Şekil 3.1 : $k=0$ için Poincaré kesiti. ....	20
Şekil 3.2 : $k = 2.039 \times 10^{-3}$ için Poincaré kesiti.....	21
Şekil 3.3 : $k = 2.100 \times 10^{-3}$ için Poincaré kesiti.....	21
Şekil 3.4 : $k = 2 \times 10^{-4}$ için Poincaré kesiti.....	22
Şekil 3.5 : $k = 2 \times 10^{-4}$ için Poincaré kesiti.....	22
Şekil 3.6 : $k = 0.001$ değeri için Poincaré kesiti. ....	24
Şekil 3.7 : $k = 0.001$ için Poincaré kesiti [3]. ....	25
Şekil 3.8 : $k = 0.0021$ değeri için Poincaré kesiti. ....	25
Şekil 3.9 : $k = 0.0021$ için Poincaré kesiti [4] ....	26
Şekil 3.10 : $k = 0.0045$ değeri için Poincaré kesiti. ....	26
Şekil 3.11 : $k = 0.0045$ değeri için Poincaré kesiti [2]. ....	27
Şekil 4.1 : Clebsch sistemi.....	35
Şekil 4.2 : Toroidal manyetik alanın Poincaré kesiti.....	36
Şekil 4.3 : Screw Pinch modeli.....	38
Şekil A.1 : $-C_2^1 - C_3^1$ değerleri. ....	45
Şekil A.2 : $-C_2^2 - C_3^2$ değerleri.....	46
Şekil A.3 : $-C_2^3 - C_3^3$ değerleri.....	46
Şekil A.4 : $r$ 'nin $\phi$ ile değişimi. ....	47
Şekil A.5 : $g^{11}$ metrik elemanı. ....	47
Şekil A.6 : $g^{12}$ metrik elemanı. ....	48
Şekil A.7 : $g^{22}$ metrik elemanı. ....	48
Şekil A.8 : $g^{13}$ metrik elemanı. ....	49
Şekil A.9 : $g^{23}$ metrik elemanı. ....	49
Şekil A.10 : $g^{33}$ metrik elemanı. ....	50
Şekil A.11 : Manyetik alanın değişimi. ....	50
Şekil A.12 : Jakobiyenin değişimi. ....	51





## KAOTİK BİR MANYETİK ALANIN PLAZMA SINIRLANMASINA ETKİSİ

### ÖZET

Pek çok dinamik sistemin problem çözümlerinin sayısal araştırmaları sırasında kaotik çözümlerle karşılaşılmaktadır. Kaotik çözümler dinamik sistemlere uygulanan pertürbasyonlarla ortaya çıkmaktadır. Sistemlerin küçük bozulmalara verdiği tepkinin anlaşılması yapılacak deneyler öncesi sistem kararlılığının tespiti açısından önem taşıdığı gibi sistemdeki transport olaylarını açıklaması açısından da önem taşımaktadır. Füzyon plazmaları gibi karmaşık mekanizmaları barındıran ve manyetik alandaki küçük bozulmaların tüm plazma hacmini etkilediği sistemlerde özellikle sıcak plazmanın duvarlardan uzak tutulması çok önemlidir. Bu sebeple füzyon çalışmaları yürüten birçok ülkede yapılacak deneyler öncesinde plazmayı sınırlayan manyetik alandaki olası kaotik yapıların anlaşılması füzyon reaktörlerinin geleceği açısından önem taşımaktadır.

Bu çalışmada, Hudson ve Breslau'nun plazma içerisindeki kaotik manyetik alanların anizotropik ısı geçişine ve plazma sınırlandırılmasına yaptığı etkileri incelemek için kurdukları ve çözümü için karmaşık sayısal hesaplara gerek duyulan modele basit bazı yaklaşımlar yapılmıştır. Çeşitli değerlerle pertürbe edilerek kaosa doğru itilen plazmayı çevreleyen manyetik alanının yapısı incelenmiştir. Pertürbasyonun manyetik alanda yarattığı manyetik adalar, KAM yüzeyleri, cantorus gibi yapıların sıcaklık profillerini ve plazma içerisindeki ısı geçişini nasıl etkilediği araştırılmıştır. Kaotik manyetik alan ve sıcaklık eğrilerinin korelasyonu için anizotropik ısı geçişi denklemini manyetik alana paralel ve dik yönde ikiye ayırılmış ve hesaplamalar bu şekilde yapılmıştır. Hudson ve Breslau'nun hesaplama yaparken kullandıkları yüksek çözünürlük değerleri ve iterasyon sayıları azaltılarak çözümlerin yakınsaması incelenmiş ve yakın çözümler bulunmuştur.



# **EFFECTS OF CHAOTIC MAGNETIC FIELDS ON PLASMA CONFINEMENT**

## **SUMMARY**

During numerical solutions of many dynamical systems, chaotic solutions are observed. These chaotic solutions come from the perturbations, which are applied to dynamical systems. It is important to understand the reaction of the system for these perturbations because of the system stability and transport phenomena in the system. Systems like fusion plasmas, which are subjected to complicated mechanisms and perturbations may effect whole plasma volume, it is important to keep the hot plasma away from the plasma walls. Therefore for countries which are running fusion experiments it is important to understand the nature of chaotic structures arising in plasma magnetic fields for the future of the fusion reactors.

This study attempts to introduce a simpler approach to the problem considered by Hudson and Breslau about the effects of chaotic magnetic fields on anisotropic heat transport and confinement in toroidal plasmas. It is assumed that the regular flux surfaces in a particular plasma region are perturbed by a specific model of irregularity and thus the magnetic field is forced to become chaotic. As a result, structures like magnetic islands, KAM surfaces and cantori are created by perturbation of magnetic field and their effects on temperature profiles and heat transport are investigated. Anisotropic heat transport is divided into ones in parallel and perpendicular directions and numerical calculations are based on this splitting. Results are compared with those of Hudson and Breslau which were obtained by long iterations and expensive computation efforts to reach high resolution.



## 1. GİRİŞ

Dinamik sistemlerin çözümlerinin sayısal araştırmalarında sık sık kaotik çözümlerle karşılaşılmaktadır ve bu kaotik çözümler sistemde yapılan pertürbasyonlarla ortaya çıkmaktadırlar. Dinamik sistemlerin küçük bozulmalara verdikleri tepkinin anlaşılması yapılacak deneyler öncesi sistem kararlılığının tespiti açısından önemli olduğu kadar sistemdeki transport olaylarına getirdiği açıklamalar açısından da önem taşımaktadır.

Plazmanın manyetik olarak sınırlandırıldığı füzyon plazmalarında manyetik alandaki bozulmalar tüm plazma hacmini ve dolayısıyla sınırlandırmayı etkilediğinden tüm dünyada, özellikle füzyon konusunda çalışmalar yapan ülkelerde dikkatle incelenmektedir.

Bu çalışmada Hudson ve Breslau'nun [1] plazma içerisindeki kaotik manyetik alanların anizotropik ısı geçişine etkisini incelemek için yüksek kapasiteli bilgisayarlarla yaptıkları, yüksek çözünürlüklü gridlerdeki [2] uzun iterasyon gerektiren simülasyonlara basit yaklaşımlar yapılmıştır. Uluslararası gayretlerle ve pahalı laboratuarlarda yapılan deneylere destek olması için, yüksek kapasiteli makinelerde yapılan bu çeşit sayısal simülasyonlara, daha basit başka hesap teknikleri kullanarak ne ölçüde yaklaşılabileceğinin anlaşılması amaçlanmıştır.

### 1.1 Plazmanın Tanımı

Plazma kelimesi ilk olarak Çek fizyolojist Jan Evangelista Purkinje tarafından 19. yüzyılın ortalarında al ve akyuvarlarından temizlenmiş kan için kullanılmıştır ve Yunanca oluşmuş, erimiş anlamına gelir. Purkinje'den yarımyüzyıl sonra 1922'de Amerikalı bilim adamı Irving Langmuir iyonize olmuş gaz içindeki elektron, proton ve nötronların sıvı ortamına eklenmiş parçacıklara benzetilebileceklerini ve bu ortama da plazma denebileceğini öne sürmüştür [5]. Fakat bir miktar iyonlaşmış olsa bile her gaz plazma olarak nitelendirilemez. Plazma, kolektif davranış sergileyen yüklü ve yüksüz parçacıklardan oluşmuş “neredeysi-yüksüz” bir gaz olarak tanımlanabilir [6].

## 1.2 Plazma Parametreleri

Gerek doğada bulunan gerekse de insanoğlu tarafından Dünya üzerinde yapılmış plazmalar parçacık yoğunluğu (metreküpteki tanecik sayısı), sıcaklık (parçacık türlerinin T sıcaklığı-eV) ve manyetik alan şiddetlerine (Tesla) göre sınıflandırılırlar. Evrendeki ve dünyadaki plazmaların parametrelere göre sınıflandırılma tablosu Çizelge 1.1’de verilmiştir [7].

**Çizelge 1.1 : Plazma parametre tablosu.**

	<b>Sıcaklık</b> $T(K)$	<b>Yoğunluk</b> $n(m^3)$	<b>Manyetik Alan</b> $B(T)$
Galaksiler Arası Gaz	$10^8$	1	$10^{-10}$
Yıldızlararası Ortam	$10^4$	$10^6$	$10^{-10}$
Galaksilerdeki Gaz Bulutları	$10^4...10^6$	$10^{12}$	$10^{-8}...10^{-7}$
Füzyon Plazmaları	$10^8$	$10^{20}...10^{32}$	$10^{-3}...10$
Teknik Plazmalar	$10^3...10^5$	$10^{15}...10^{25}$	$10^{-2}$
Metallerdeki Elektron Bulutu	$10^4$	$8 \times 10^{28}$	
Yıldızların Yüzeyleri	$10^7...10^8$	$10^{22}$	$10^{-4}...10^{-1}$
Yıldızların Merkezi	$10^4$	$10^{30}$	1
Beyaz Cüce	$10^4$	$10^{36}$	$10^4$
Nötron Yıldızı	$10^8$	$10^{45}$	$10^8$

## 1.3 Plazma Çeşitleri

### 1.3.1 Füzyon dışı yeryüzü plazmaları

Dünya üzerindeki füzyon özelliği olmayan plazmalar, genel olarak bir kaç eV’luk iyon sıcaklıklarına sahiptirler. Genelde oda sıcaklığındaki iyon sıcaklıklarına sahip olan böyle plazmalar soğuk plazmalar olarak adlandırılırlar. En önemli örnekleri ise florasan lambaları, neon lambaları, proses plazmaları ve hatta şimşeklerdir. Her an karşımıza çıkan bu plazmalar önemli miktarda manyetik alan oluşturmadıkları gibi kararlı hale zorlanmış bir manyetik alana da sahip değillerdir.

### 1.3.2 Yeryüzü füzyon plazmaları

Yeryüzündeki füzyon plazmaları, araştırmacıların dikkatli bir şekilde tasarladığı, pahalı, büyük sınırlandırma kapasiteli, yüksek sıcaklıktaki hidrojen veya döteryum plazmalarından oluşur ki, plazma sıcaklıkları on eV’tan onbinlerce eV’a kadar değişmekte iken parçacık yoğunlukları da  $10^{19} - 10^{21} m^3$  arasında değişir ve 1-10

Tesla arasında manyetik alan üretirler. Döteryum plazmaları ve füzyon sonucunda açığa çıkan enerji Çizelge 1.2’de gösterilmiştir.

**Çizelge 1.2 :** Füzyon reaksiyonu tipleri.

Plazma	Ürünler	Enerji
D+T	${}^4\text{He} + \text{n}$	+ 17.6 MeV
D+D	${}^3\text{He} + \text{n}$	+ 3.3 MeV
	T+p	+ 4.0 MeV
D+ ${}^3\text{He}$	${}^4\text{He} + \text{p}$	+ 18.3 MeV

### 1.3.3 Uzay plazmaları

Bu tip plazmaların plazma parametreleri çok büyük boyutlardadır. Örnek olarak yıldızlararası uzayda parçacık yoğunluğu  $10^6 \text{ m}^3$  civarındadır. Astrofiziksel plazmaların büyük bir çoğunluğu ise 1-100 eV arasında sıcaklıklara sahip olup tam olarak iyonize olmuşlardır [5].





## **2. PLAZMANIN SINIRLANMASI**

### **2.1 Plazma Sınırlama Yöntemleri**

#### **2.1.1 Gravitasyonel sınırlama**

Plazmayı dağılmadan bir arada tutabilecek yöntemlerden ilki gravitasyonel sınırlamadır. Plazmayı bir arada tutan kuvvetin kütle çekimi olduğu bu tipte bir sınırlama için gereken kütle o kadar fazladır ki, gravitasyonel sınırlama ancak yıldızlarda olur.

#### **2.1.2 Ataletle sınırlama**

Füzyon reaksiyonuna girecek olan yakıt paleti yüzeyine ani olarak enerji verilmesi ve bu sayede yakıtın şiddetle içeriye doğru patlaması ve yüksek sıcaklık ve yüksek basınçlara ulaşmasıyla olur. Eğer yakıt yeterli miktarda yoğun ve sıcaksa, füzyon reaksiyonu yakıtının büyük bir kısmı dağılmadan devam eder. Bu olağanüstü şartlara ulaşmak için başlangıçta yakıt patlayacak şekilde sıkıştırılır. Ataletle sınırlama ilk ateşleyicinin lazer, elektron ya da iyon olduğu kontrollü füzyon reaksiyonlarında kullanılır.

#### **2.1.3 Manyetik sınırlama**

Elektriksel olarak yüklü parçacıkların manyetik alan çizgilerini takip etme özelliğine dayanan manyetik sınırlama yönteminde, güçlü manyetik alanlar kullanılarak elektron ve iyonların sınırlanması sağlanır. Bu yöntem için çeşitli manyetik konfigürasyona sahip cihazlar kullanılır.

### **2.2 Yüklü Parçacıkların Plazma Manyetik Alan Altında Hareketi**

Her plazmanın iç basıncı dolayısıyla dağılmaya doğal bir eğilimi vardır. Plazmayı bir arada tutan bir kuvvet yoksa yüksek hızdaki parçacıklar başlangıç pozisyonlarından uzaklaşırlar ve bu da plazmanın genişleyerek soğumasına neden olur. Manyetik alanın parçacıklara uyguladığı Lorentz kuvveti plazmayı bu dağılma etkisinden koruyan kuvvettir [8].

Diğer taneciklerle çarpışmayan, elektrik ve manyetik alanlar altındaki yüklü bir parçacığın hareket denklemleri ve Lorentz kuvveti arasındaki ilişki

$$m\ddot{\vec{r}} = q(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}) \quad (2.1)$$

ile ifade edilir. Burada  $m$  parçacık kütlesini,  $r$  parçacığın konumunu,  $q$  parçacığın elektrik yükünü,  $E$  elektriksel alan vektörünü ve  $B$  ise manyetik alan vektörünü gösterir.

Düzgün sabit bir manyetik alanın xyz koordinat sisteminde  $z$  yönünde yönlendiğini ( $\vec{B} = B_z \hat{n}_z$ ) ve elektriksel alanın olmadığı ( $\vec{E} = 0$ ) düşünölsün. (2.1) ile  $\dot{\vec{r}}$  nin skaler çarpımından

$$\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = sbt = W \quad (2.2)$$

elde edilir ve  $W$  toplam kinetik enerjiyi gösterir. (2.1) hareketin  $z$  yönündeki bileşeni için

$$\ddot{z} = 0 \quad (2.3)$$

yazılmasına olanak sağlar ve çözümlünden de

$$\dot{z} \equiv v_{\parallel} = sbt \quad (2.4)$$

yazılabilir. Böylece manyetik alana paralel yöndeki kinetik enerjinin

$$W_{\parallel} \equiv \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 = sbt \quad (2.5)$$

olduğu göröölür. Manyetik alana dik yöndeki kinetik enerji

$$W_{\perp} \equiv W - W_{\parallel} = sbt \quad (2.6)$$

olarak elde edilir. Buradan da dik yöndeki hız için

$$v_{\perp} \equiv (2W_{\perp}/m)^{1/2} = sbt \quad (2.7)$$

ifadesi bulunur. Manyetik alana dik ve paralel yöndeki hız ve kinetik enerjiler hareketin sabitleri olur. (2.2)'nin  $x$  ve  $y$  yönündeki bileşenleri

$$\ddot{x} = \Omega \dot{y} \quad (2.8)$$

$$\ddot{y} = -\Omega \dot{x} \quad (2.9)$$

ile verilir ve  $\Omega$  büyüklüğüne gyro frekansı denir.

$$\Omega \equiv \frac{eB}{m} \quad (2.10)$$

(2.8) ve (2.9) denklemlerinin türevleri alınarak

$$\ddot{x} = \Omega \dot{y} = -\Omega^2 x \quad (2.11)$$

$$\ddot{y} = -\Omega \dot{x} = -\Omega^2 y \quad (2.12)$$

ifadeleri bulunur ve artık parçacık hızları için

$$\dot{z} = v_{\parallel} \quad (2.13)$$

$$\dot{x} = v_{\perp} \cos(\Omega t + \alpha) \quad (2.14)$$

$$\dot{y} = -v_{\perp} \sin(\Omega t + \alpha) \quad (2.15)$$

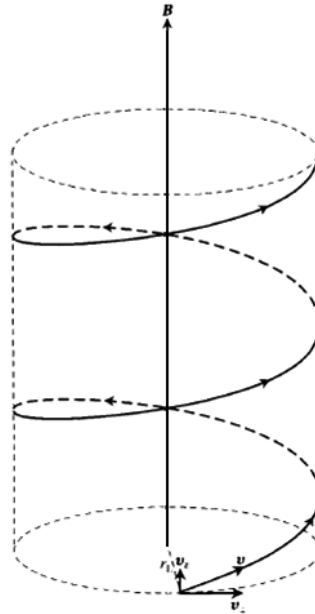
ifadeleri elde edilmiş olunur. Burada  $\alpha$  sabit faz açısıdır. (2.11) – (2.12) ifadeleri integre edilirse

$$x = \frac{v_{\perp}}{\Omega} \sin(\Omega t + \alpha) + x_0 \quad (2.16)$$

$$y = \frac{v_{\perp}}{\Omega} \cos(\Omega t + \alpha) + y_0 \quad (2.17)$$

$$z = v_{\parallel} t + z_0 \quad (2.18)$$

taneciğin manyetik alan çizgisi üzerindeki “guiding center” hareketi tanımlanmış olur [9].

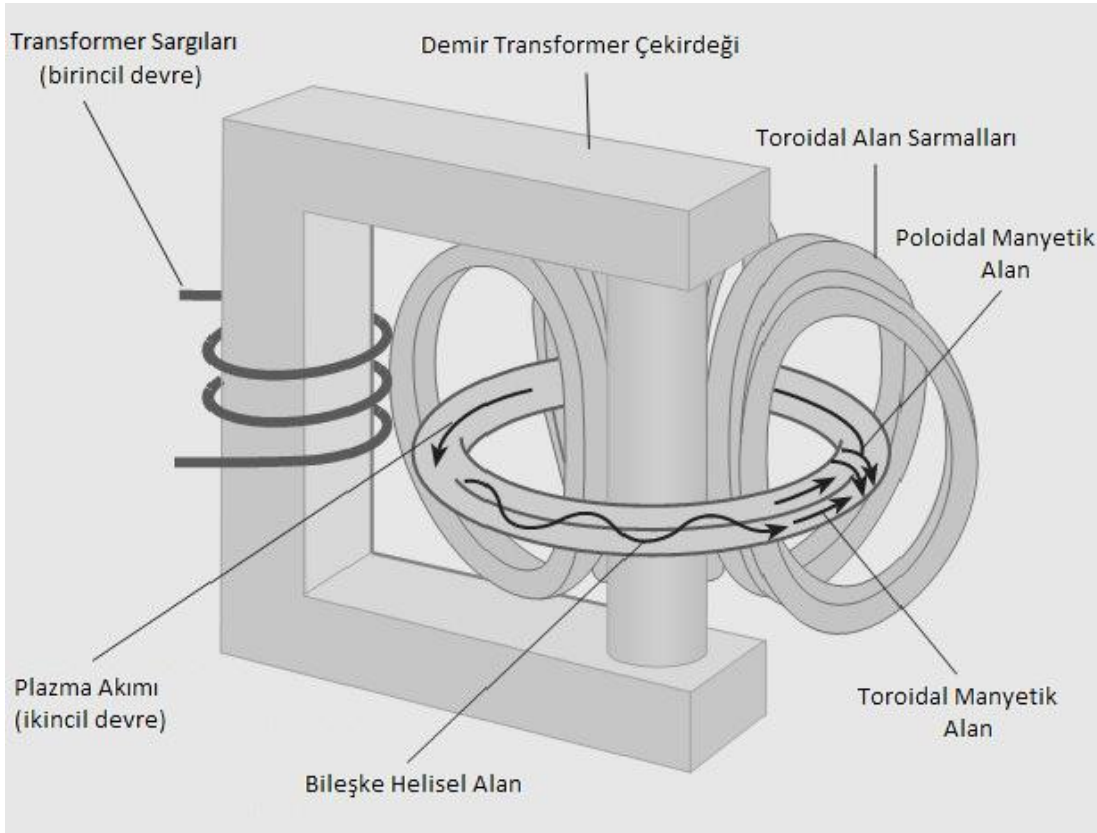


Şekil 2.1 : Manyetik alan altında parçacık hareketi.

## 2.3 Manyetik Sınırlama Cihazları

### 2.3.1 Tokamak

Tokamaklar, plazmanın manyetik alan ile torus şeklinde bir geometriyle sınırlandırıldığı makinelerdir. Plazmanın kararlı ve dengede olabilmesi için manyetik alan çizgilerinin torus etrafında helisel eğriler çizdiği bu cihazda manyetik alan, toroidal bir manyetik alana poloidal bir manyetik alanın eklenmesiyle oluşturulur [10] (Şekil 2.2).



Şekil 2.2 : Tokamak [11]'den uyarlanmıştır.

### 2.3.2 Stelleratör

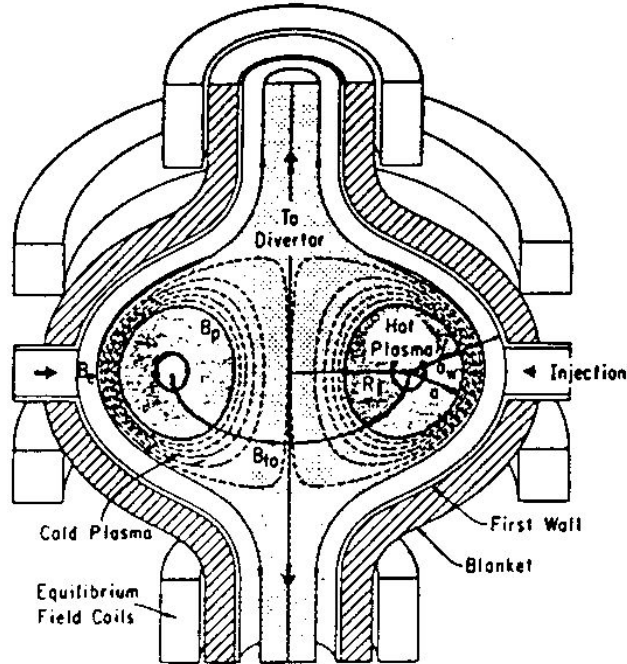
Manyetik sınırlamanın harici akım sarmalları ile yapıldığı cihazlardır. Tokamaklarda yer alan torusun dış kısmındaki sarmalların iç kısmındaki sarmallara göre az yoğun olmasından kaynaklanan sınırlama problemi bu cihazlarda (Şekil 2.3) sekiz şeklinde bükülmüş bir torus kullanılarak aşılır [12].



Şekil 2.3 : Stellaratör [13].

### 2.3.3 Spheromak

Spheromak, sınırlamayı sağlayan manyetik alanın temelde plazma akımıyla üretildiği aygıtlardır (Şekil 2.4). Denge için gereken dikey alan harici poloidal magnetlerle sağlanır. Torusa bağlı herhangi bir toroidal sarmal olmadığından reaktör tasarımlarında alternatif bir rol oynamaktadır [14].

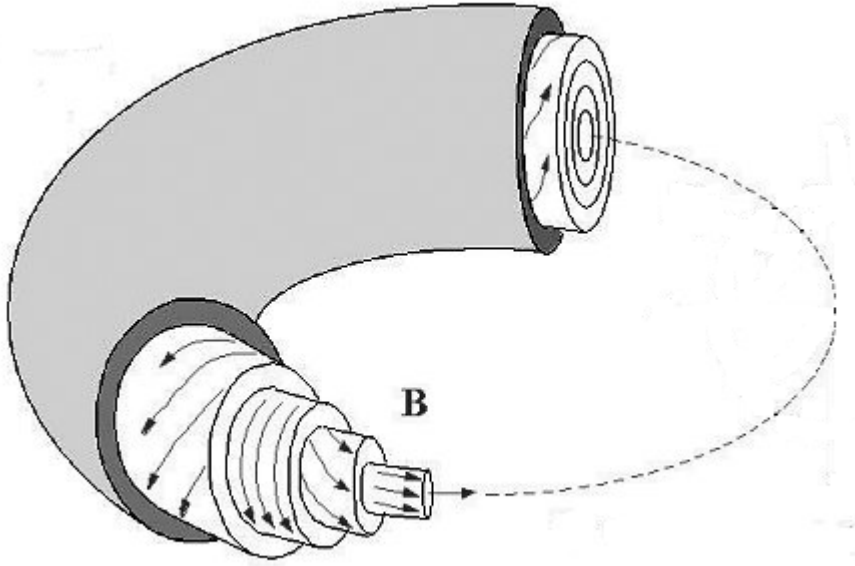


Şekil 2.4 : Spheromak [15].

### 2.3.4 Reverse field pinch

Reversed field pinch aygıtı adını torus içerisinde radyal yönde dışa doğru gidildiğinde manyetik alanın toroidal yöndeki bileşeninin yönünü değiştirmesinden

alır (Şekil 2.5). Bu aygıtta aynı güç yoğunluğuna sahip bir tokamaka göre daha az şiddette manyetik alan gerekir [16].



Şekil 2.5 : Reverse field pitch [16].

## 2.4 Toroidal Manyetik Alan

Füzyon plazmalarında parçacıklar yakın-Maxwell dağılımında bulunurlarsa plazma bir ideal gazın basıncına sahip olur.

$$p = nT \quad (2.19)$$

Burada T enerji biriminde sıcaklık ve n ise,  $n = n_e + n_i$  olmak üzere metreküpteki toplam elektron ve iyon sayılarını gösterir. Plazmanın sınırlandırılması birim hacme etkiyen bir kuvvete, yani bir basınç gradyentine ( $\vec{\nabla}p$ ) neden olur ve bu gradyent, plazma içerisindeki akım yoğunluğu ve manyetik alanın vektörel çarpımından üretilen elektromanyetik kuvvet tarafından dengelenir.

$$\vec{\nabla}p = \vec{j} \times \vec{B} \quad (2.20)$$

burada  $\vec{j}$ , manyetik akı ve  $\vec{B}$  ise manyetik alandır. (2.20) yakın-Maxwell dağılımındaki plazmalar için bir denge denklemi vermesinin yanı sıra, manyetik alan vektörü ile basınç gradyentinin birbirlerine dik olduğunu göstermesi ( $\vec{B} \cdot \vec{\nabla}p = 0$ ) açısından da önem arz eder.  $\vec{B} \cdot \vec{\nabla}p = 0$  eşitliği manyetik alan çizgilerinin uzunlukları

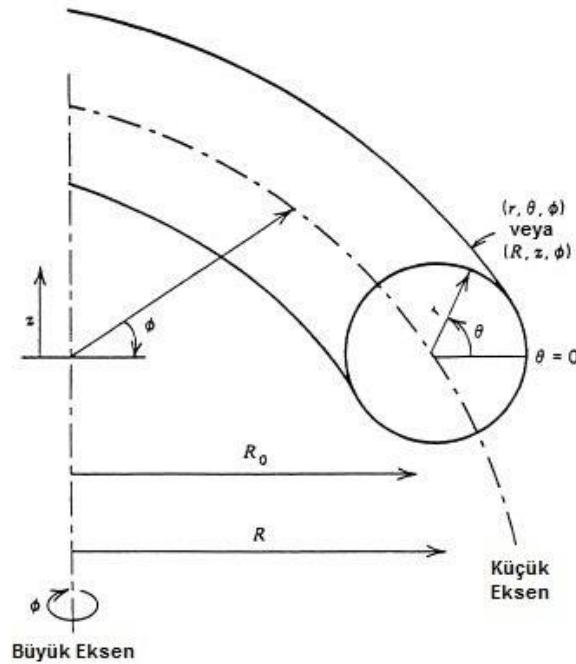
boyunca sabit-basınç yüzeyleri üzerinde kalmasını zorunlu kılar. Topoloji teoremi tekil olmayan vektör alanı  $\vec{B}(\vec{x})$ 'in uzaysal olarak sınırlanmış bir  $p(\vec{x})$  fonksiyonuna her yerde teğet olabileceği tek şeklin *torus* olabileceğini söyler.

Toroidal yüzeyler, plazmanın sınırlandırılması teorisinin temelinde olduğundan, bu yüzeyleri temel alan geometrik bir metot kullanılması gereklidir. En basit koordinat tanımını  $(R, \phi, Z)$  değişkenlerinin kullanılması ve uzaysal pozisyonun

$$\vec{x}(r, \theta, \phi) = R(r, \theta, \phi)\hat{R}(\phi) + Z(r, \theta, \phi)\hat{Z} \quad (2.21)$$

ile gösterilmesidir. Silindirik koordinatlardaki radyal birim vektör, Kartezyen birim vektörler cinsinden  $\hat{R}(\phi) = \hat{x} \cos \phi + \hat{y} \sin \phi$  ile, türevi ise  $d\hat{R}/d\phi$  ile gösterilir. Basit dairesel toroidal yüzeyler  $R = R_0 + r \cos(\theta)$  ve  $Z = -r \sin(\theta)$  ile ifade edilirler. Burada  $R_0$  sabitine büyük yarıçap (major radius),  $r$ 'ye ise küçük yarıçap (minor radius) denir. 1'den küçük olması gereken  $\varepsilon = r/R_0$  oranına da yerel ters açıklık oranı denir.

$\vec{x}(r, \theta, \phi)$  fonksiyonu gibi uzayda pozisyonu belirten bir fonksiyon,  $(r, \theta, \phi)$  koordinat sistemini tanımlar. Burada  $\phi$  toroidal açıyı,  $\theta$  poloidal açıyı,  $r$  ise radyal koordinatı tanımlar (Şekil 2.6) [17].

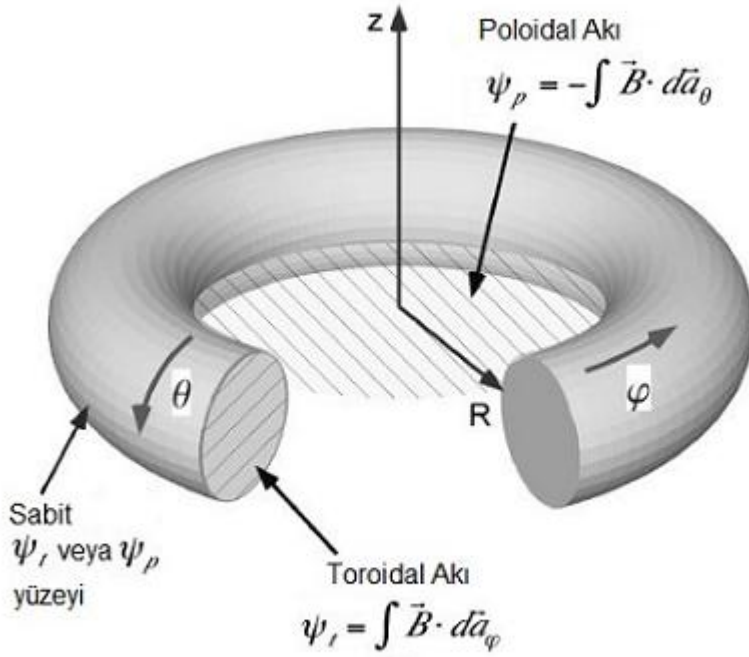


Şekil 2.6 : Toroidal geometri.

## 2.5 Manyetik Alan Hamilton Mekanığı İlişkisi

Manyetik alan gibi diverjansı sıfır olan tüm alan çizgileri bir Hamiltonyen'in yörüngeleridir [17]. Eğer  $\phi(\vec{x})$  toroidal açı olmak üzere ve  $\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \phi \neq 0$  ise manyetik alan çizgileri  $1\frac{1}{2}$  serbestlik dereceli Hamiltonyen ile ifade edilirler [18].

Poloidal manyetik akı  $\psi_p(\psi_t, \theta, \phi)$  Hamiltonyen'ini oluşturur ve burada  $(\psi_t, \theta, \phi)$  manyetik alan çizgilerinin kanonik koordinatlarıdır. Bu koordinat sisteminde kanonik momentum toroidal akı  $\psi_t$ , kanonik koordinat poloidal açı  $\theta$ , kanonik zaman ise toroidal açı  $\phi$  ile gösterilir (Şekil 2.7).



Şekil 2.7 : Hamiltonyen sistem, [17] den uyarlanmıştır.

Kanonik koordinatlarda manyetik alan çizgileri kanonik formda,

$$\frac{d\psi_t}{d\phi} = -\frac{\partial \psi_p(\psi_t, \theta, \phi)}{\partial \theta} \quad (2.22)$$



$$\frac{d\theta}{d\phi} = \frac{\partial \psi_p(\psi_i, \theta, \phi)}{\partial \psi_i} \quad (2.23)$$

halini alır [17].

## 2.6 Kaotik Manyetik Alan

Hamiltonyen sistemler kaos taşıyıcılarıdır. Keyfi olarak alınmış bir Hamiltonyen sistemin faz uzayında, hareketi oluşturan yörüngelerin karışımından oluşan bölgeler yer alır.  $N$  serbestlik dereceli bir sistem,  $N$  adet genelleştirilmiş koordinat  $(q_1, \dots, q_N)$  ve genelleştirilmiş momentum  $(p_1, \dots, p_N)$  çiftinden oluşur ve genelleştirilmiş koordinat ve genelleştirilmiş momentum çiftleri hareketin Hamiltonyen denklemlerini sağlarlar. Hamiltonyen denklemleri

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (i=1, \dots, N) \quad (2.24)$$

ile ifade edilirler ve burada

$$H(p, q) \equiv H(p_1, q_1, \dots, p_N, q_N)$$

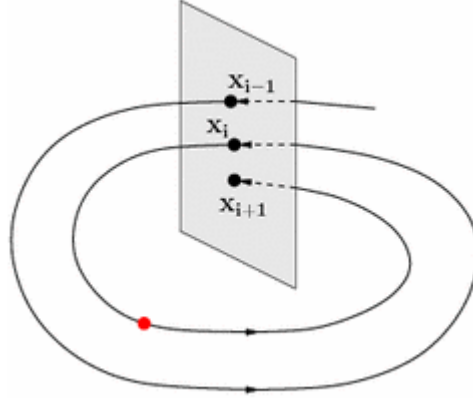
sistemin Hamiltonyen'ini oluşturur. Hamiltonyen'in zaman bağımlılığının  $T = 2\pi/\nu$  zaman periyodunda olduğu durum için

$$H(p, q; t+T) = H(p, q, t) \quad (2.25)$$

olur. (2.25)'de yer alan zaman değişkeni kanonik bir değişken olduğundan bu sistem  $N + 1/2$  serbestlik derecesine sahip bir sistem olarak tanımlanır.

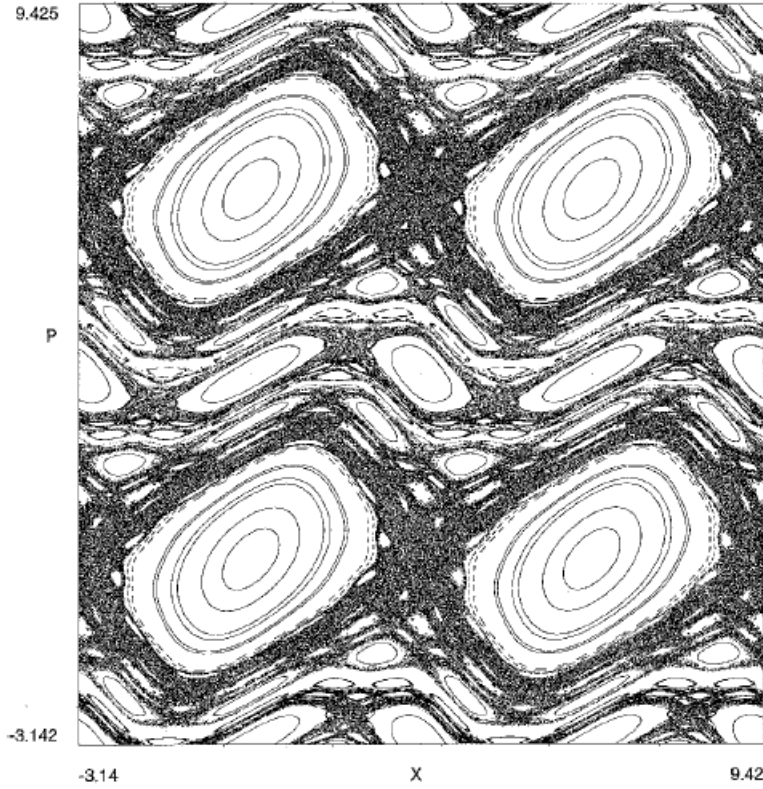
### 2.6.1 Poincaré kesiti

Kaotik yörüngeler genel olarak  $N = 1\frac{1}{2}$  serbestlik derecesine sahip sistemlerde oluşurlar. Sistem yörüngelerinin iki boyutlu bir faz yüzeyinde, yüzeyi anlık olarak  $(t_n = t_0 + nT)$  kestikleri noktalar  $(p(t_n), q(t_n))$  seti olarak temsil edilebilirler ve bu gösterim metoduna Poincaré map adı verilir. Poincaré map hareketi, değişkenlerinin bir kısmının integre edilmesiyle basitleştirmiş olur. Poincaré kesitine ait bir çizim (Şekil 2.8)'de verilmiştir [19].



**Şekil 2.8 :** Poincaré kesiti.

Dinamik sistemlerin faz uzayında yer alan kaotik yapıya stokastik deniz denir. Stokastik deniz içerisinde stabilitenin mevcut olduğu ve “ada” olarak isimlendirilen bölgeler de vardır (Şekil 2.9). Kaotik bir yörünge adaların içerisine giremezken, adanın içerisindeki düzenli bir yörünge de ada dışarısına çıkamaz [19].



**Şekil 2.9 :** Stokastik deniz ve manyetik adalar.

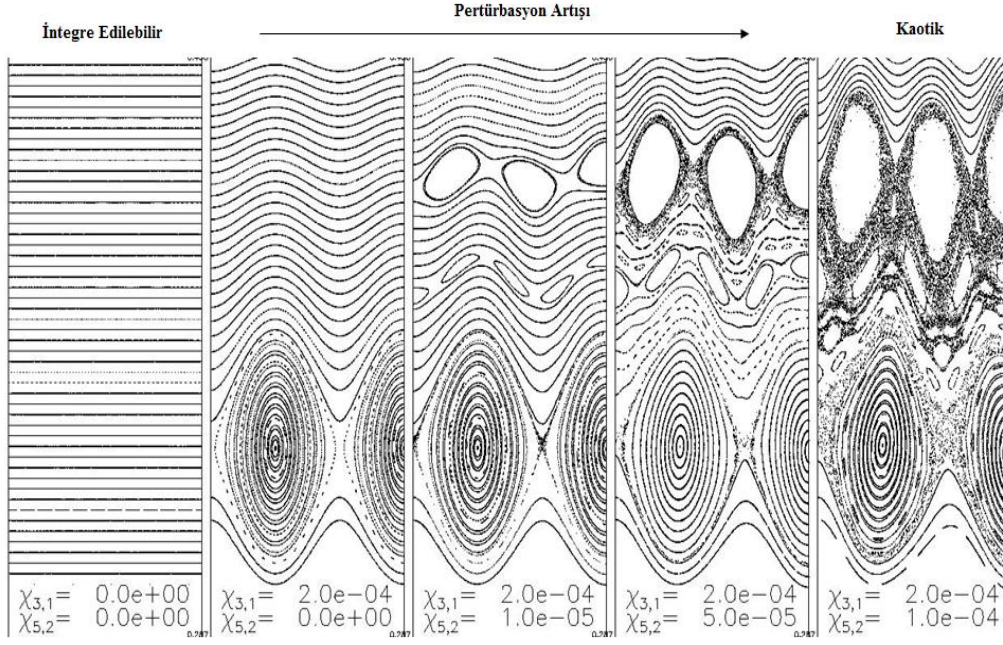
## 2.7 KAM Teoremi ve Cantori

KAM teoremi dinamik sistemlerin küçük pertürbasyonlar altındaki neredeyse-periyodik hareketlerin dayanıklılığının bir sonucudur. Teorem integre edilebilir bir Hamiltonyen sistemin faz uzayındaki yörüngeler cinsinden ifade edilir. Integre edilebilir bir sistemin hareketi invaryant bir torus şekli ile sınırlandırılmıştır ve sistemin faz uzayında alınacak farklı başlangıç şartları farklı torus şekillerine neden olacaktır. Sisteme ait konum değişkenlerinden herhangi birinin çizilmesiyle hareketin neredeyse periyodik olduğu görülebilir.

KAM teoremi, sistem zayıf bir pertürbasyon ile rahatsız edildiğinde, invaryant toruslardan bazılarının sadece deforme olurken, bazılarının ise tamamen bozulacağını, ve pertürbasyondan kurtulan torusların irrasyonel frekansa sahip olanlar olduğunu söyler. Bu da hareketin, bağımsız periyotların değişimiyle, neredeyse-periyodik yapılanmaya devam ettiğini gösterir. Teorem, hangi seviyede uygulanacak bir pertürbasyonun, niceliksel olarak bu yapılanmayı devam ettireceğini işaret eder. Sistemin boyutları arttıkça torus tarafından işgal edilen alan azalır ve pertürbasyonlar tarafından parçalanamayan KAM-toriler invaryant Cantor setleri haline gelirler ve Cantori (kırık KAM yüzeyleri) olarak adlandırılırlar [20].

Cantori gibi invaryant faz uzayı yapılarının tanımlanması dinamik sistemlerin uzun zaman davranışlarının anlaşılmasında önemli rol oynar. Eğer sistem integre edilebilirse  $\tau$  frekansının rasyonel ya da irrasyonel olmasına göre oluşan iki boyutlu invaryant yüzeyler üç boyutlu faz uzayının sürekli yapraklanmasını sağlar. Sonuç olarak sistemin davranışı, uygun koordinatlarda tüm zamanlar için bilinebilir. Aksiyon koordinatı sabit iken açı koordinatı frekans tarafından belirlenen bir zaman ile lineer olarak artar.

Küçük bir pertürbasyon bile invaryant yüzeyin sağladığı sürekli yapraklanmayı bozabilir. Periyodik yörüngelerin sürekli ailelerinden olan iki boyutlu manifoldlar ada zincirlerini oluşturmak üzere ilk kırılanlar olur. Her yüzey için iki tane periyodik yörünge ayakta kalır, bunlara Poincaré-Birkhoff periyodik yörüngeleri denir. Bu yörüngeler (i) hiperbolik olan ve stabil olmayan minimize yörüngeler, (ii) küçük pertürbasyonlar için eliptik ve stabil olan maksimize yörüngelerdir (Şekil 2.10).

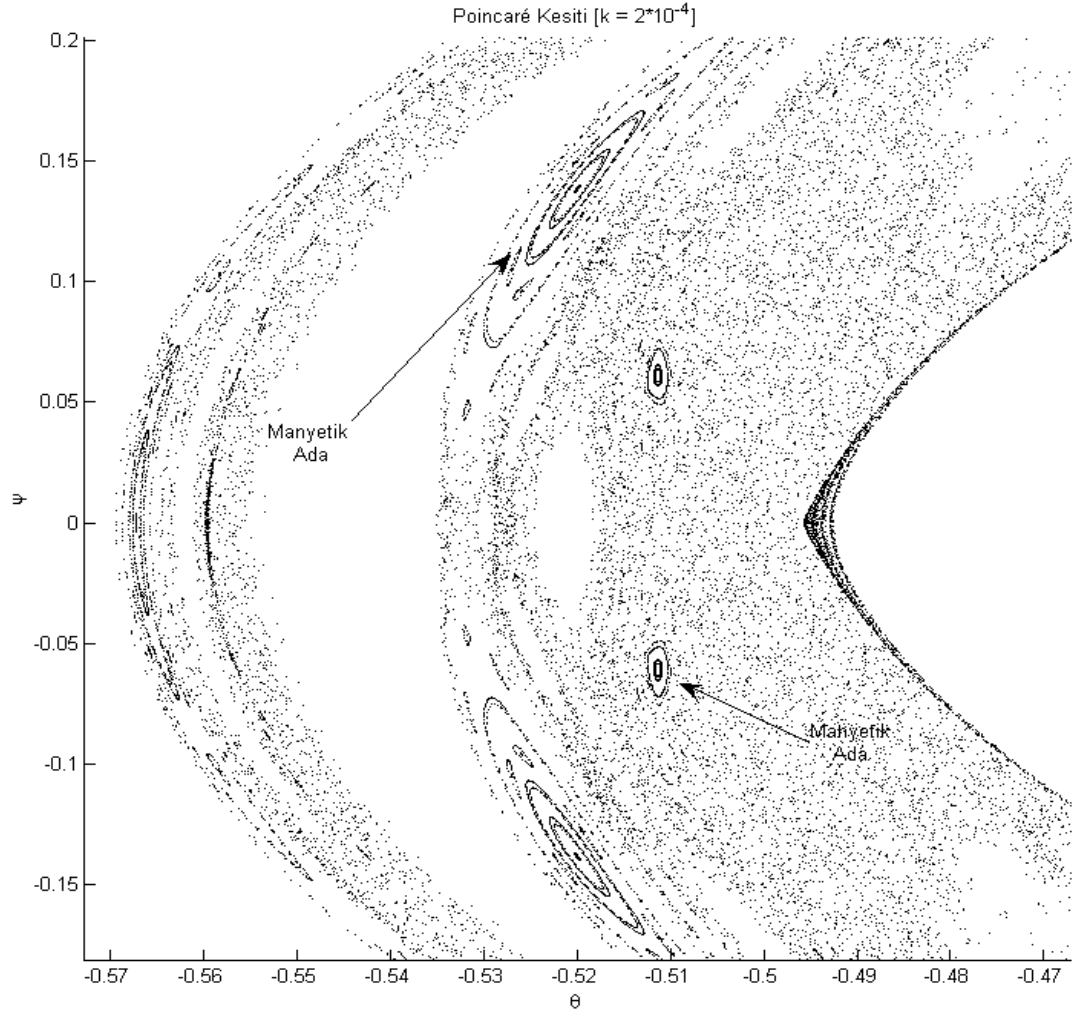


**Şekil 2.10** : Manyetik alan kaos geçişi.

İrrasyonel yüzeylerin bazıları da pertürbasyon tarafından yıkılır fakat (KAM) teoremi birçoğunun ayakta kalacağını gösterir.

Hafifçe pertürbe edilmiş bir sistemde KAM yüzeylerinin ayrık seçimleri faz uzayını farklı bölgelere ayırmak için kullanılır çünkü yörüngeler KAM yüzeylerini geçemezler. Sonlu sayıda KAM yüzeyinin koordinat yüzeyi olarak kullanılarak inşa edildiği ayrık aksiyon-açı koordinatlarının kaotik manyetik koordinatlarına eklenmesi plazma manyetik sınırlandırma teorisinde kullanılır. Bahsi edilen bu yüzeylerdeki dinamik, uygun açı koordinatının lineer olarak arttığı iki boyutlu yüzey ile kısıtlandırılmıştır. KAM yüzeyleri arasında hareket girift olabileceğinden yörüngeler faz uzayında rastgele görüntüler de çizebilirler. KAM yüzeylerinin olmadığı kaotik alanlarda dahi transportu kısıtlayan invaryant yapılar vardır.

Cantoruslar (Cantori) frekansları ile ayırt edilebilirler. Cantoruslara periyodik yörüngelerin frekanslarının (rasyonel) cantorusların frekanslarına (irrasyonel) yaklaştığı yüksek dereceden minimize periyodik yörüngelerle yaklaşılabılır [17].



Şekil 2.11 : Stokastik deniz ve manyetik adalar.



### 3. MANYETİK ALANIN HESAPLANMASI

#### 3.1 Manyetik Alan Çizgisinin Takibi Yöntemi

Bir dinamik sistem genel olarak sistemin her bir serbestlik derecesi için bir kanonik koordinat  $p_i(t)$  ve  $q_i(t)$  çifti ile tanımlanır ve bu durumda N serbestlik dereceli bir sistem p ve q'nun 2N adet vektör uzayına sahip bir faz uzayı ile ifade edilebilir. Hareket denklemleri ise, Hamiltonyen fonksiyonu  $H(p, q, t)$  ile

$$\begin{aligned}\frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i}\end{aligned}\tag{3.1}$$

şeklinde verilebilir. Burada p kanonik momentumu, q kanonik koordinatı ve t ise kanonik zamanı ifade eder.

Manyetik alanın alan çizgilerinin takip edilerek hesaplanması için [1]'deki gibi kanonik formda bir  $\vec{A}$  vektör potansiyeli ele alınsın

$$\vec{A} = \psi \vec{\nabla} \theta - \chi \vec{\nabla} \phi\tag{3.2}$$

$\chi$  alan çizgisi Hamiltonyen'i olsun ve

$$\chi = \frac{\psi^2}{2} + \sum \chi_{m,n} \cos(m\theta - n\phi)\tag{3.3}$$

ile verilsin. Burada  $\psi^2/2$  integre edilebilir kısmı,  $\chi_{m,n}$  ise herhangi bir pertürbasyon katsayısını ifade etsin. Bu durumda manyetik alan vektörü

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}\tag{3.4}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times (\psi \vec{\nabla} \theta - \chi \vec{\nabla} \phi)\tag{3.5}$$

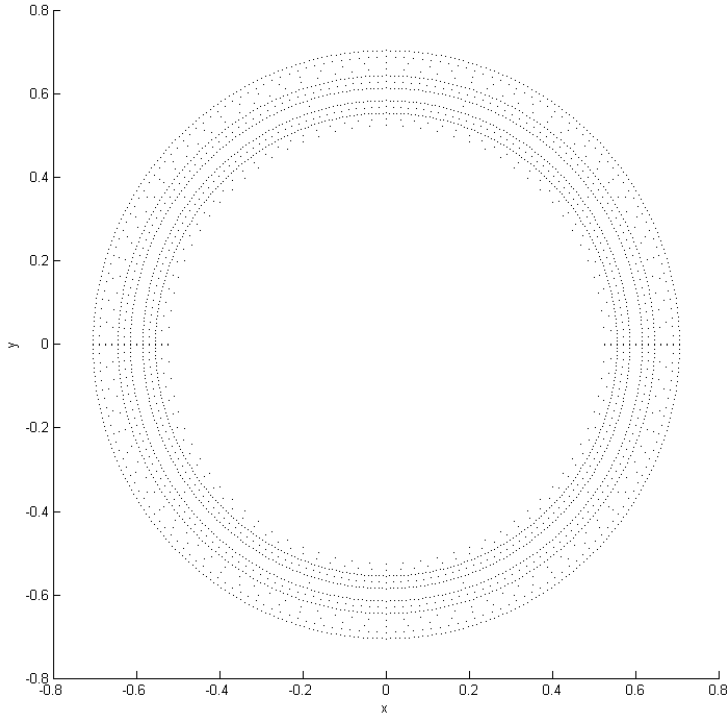
haline gelir [1].

(3.3)  $\chi$  alan çizgisi Hamiltonyen'i (3.1)'de yerine konulup,  $t \equiv \phi$ ,  $q \equiv \theta$  ve  $p \equiv \psi$  kabulüyle gerekli diferansiyel işlemler yapılırsa kanonik formdaki

$$\frac{d\psi}{d\phi} = \sum \chi_{m,n} \sin(m\theta - n\phi) m \quad (3.6)$$

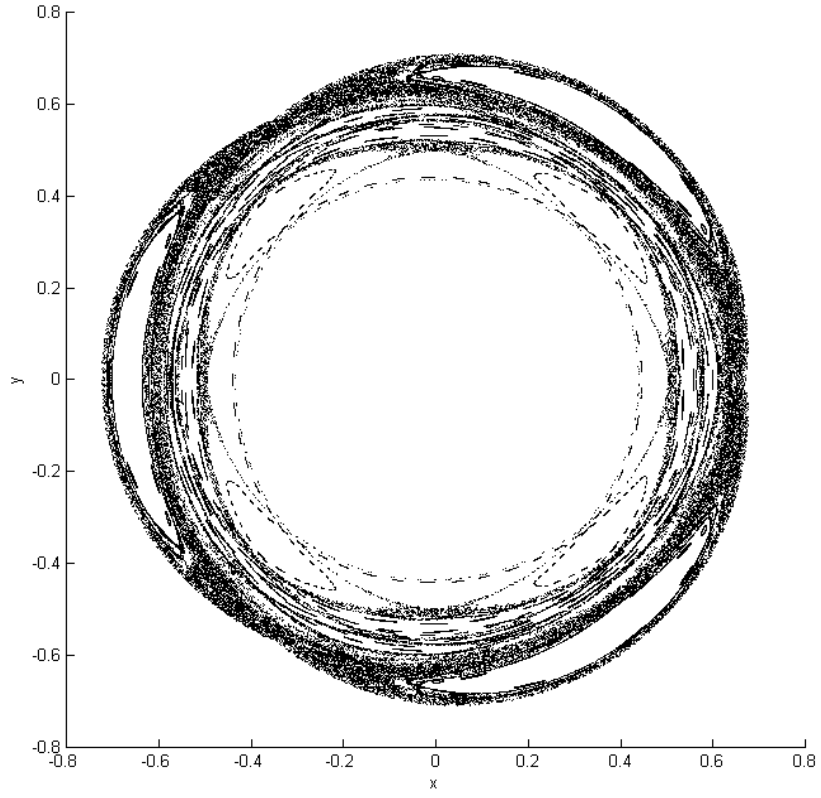
$$\frac{d\theta}{d\phi} = \psi \quad (3.7)$$

Hamiltonyen ifadeleri elde edilir. Kaotik manyetik alanı elde etmek için  $\psi = \frac{1}{2}$  ve  $\psi = \frac{2}{3}$ 'de bulunan  $(p, q) = (1, 2), (2, 3)$  adaları arasındaki bölge seçilip sistemin,  $\alpha_{2,1}$  ve  $\alpha_{3,2}$  basit rasyonel sayılar olmak üzere,  $\chi_{2,1} = k\alpha_{2,1}$  ve  $\chi_{3,2} = k\alpha_{3,2}$  pertürbasyon harmonikleri ile rahatsız edildiği düşünülün. (3.6) ve (3.7) denklemlerinin çeşitli k pertürbasyon değerleri için numerik olarak integre edilip integrasyonun bir Poincaré kesiti üzerindeki gelişimi Şekil 3.1, Şekil 3.2 ve Şekil 3.3'de verilmiştir.

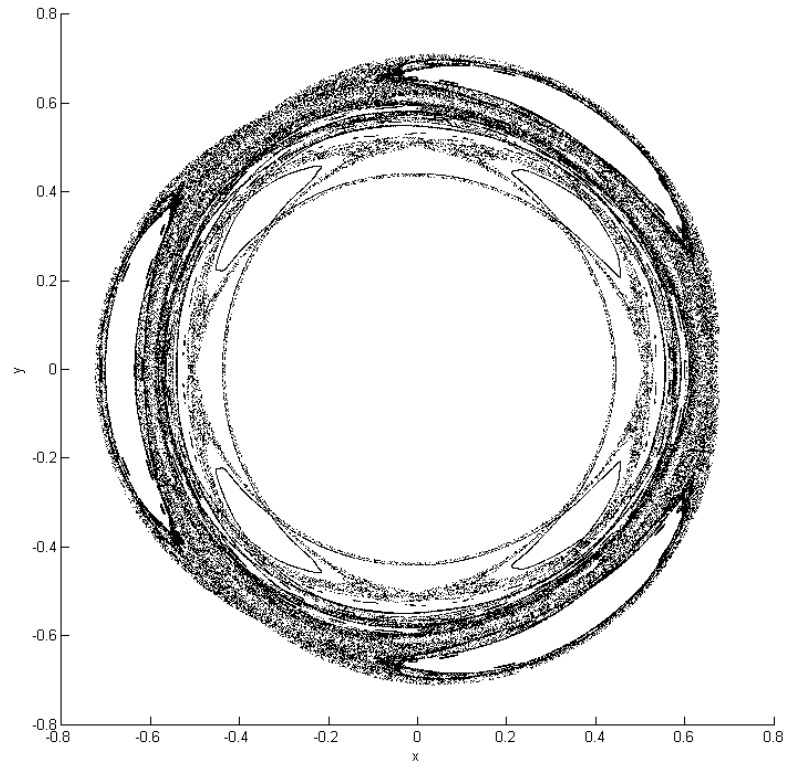


Şekil 3.1 : k=0 için Poincaré kesiti.



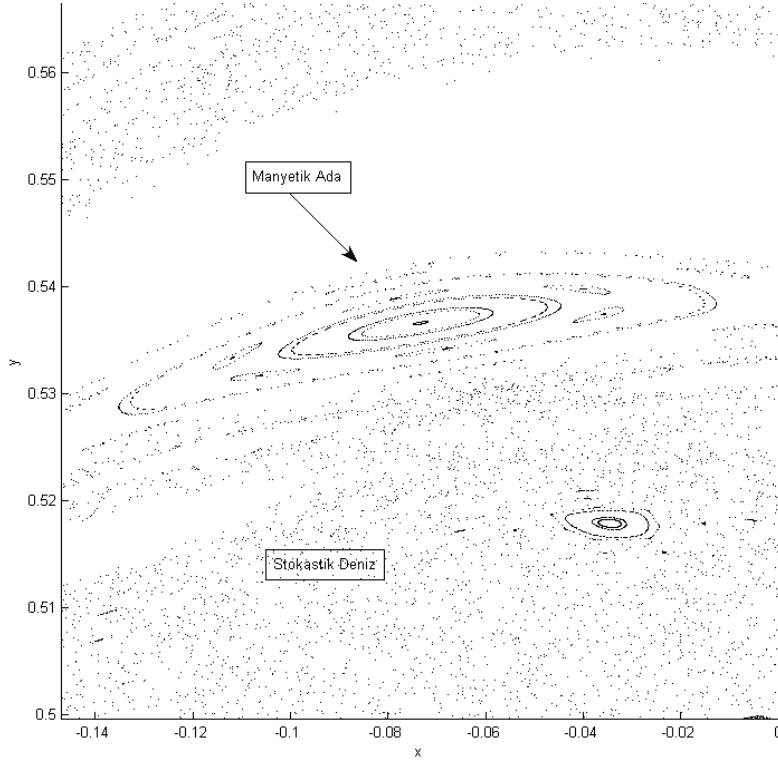


**Şekil 3.2 :**  $k = 2.039 \times 10^{-3}$  için Poincaré kesiti

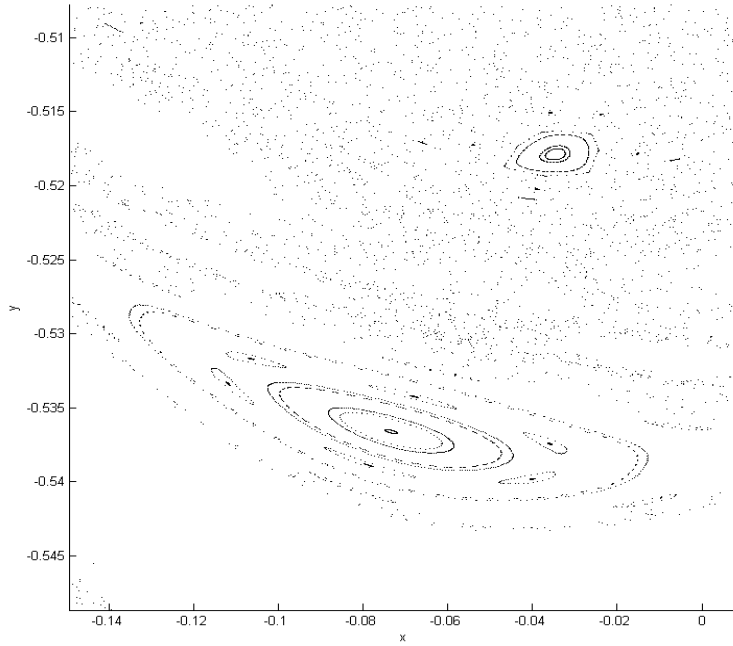


**Şekil 3.3 :**  $k = 2.100 \times 10^{-3}$  için Poincaré kesiti.

Artan  $k$  deęerleri için kaosa geište stokastik deniz ve manyetik adaların oluřumunun detaylı olarak gösterimi ise (řekil 3.4) ve (řekil 3.5)'de verilmiřtir.



şekil 3.4 :  $k = 2 \times 10^{-4}$  için Poincaré kesiti



şekil 3.5 :  $k = 2 \times 10^{-4}$  için Poincaré kesiti.

### 3.2 İrrasyonel Rotasyonel Transform Yüzeyleri Yöntemi

İntegre edilebilir alanlar için, bütün manyetik alan çizgileri akı yüzeyleri üzerinde kalırlar. Manyetik adalar rasyonel rotasyonel transform yüzeylerinde oluşur. Kaotik yörüngeler ise stabil olmayan periyodik yörüngeler etrafında ortaya çıkarlar.

KAM teoremine göre pertürbasyonun büyüklüğüyle değişmekle beraber irrasyonel rotasyonelle sahip akı yüzeyleri pertürbasyondan kurtulur ve bu yüzeylere KAM yüzeyleri denir. Eğer integre edilebilirliği bozan pertürbasyon küçükse akı yüzeyleri her yerde görülür.

Rotasyonel transform

$$\iota = \lim_{\Delta\phi \rightarrow \infty} \frac{\Delta\theta}{\Delta\phi} \quad (3.8)$$

ile tanımlanır ve burada  $\theta$  keyfi poloidal açığı,  $\phi$  ise toroidal açığı gösterir. Bu limit pozitif bir  $\delta$  sayısı için  $\Delta\phi > \Delta\phi_\delta$  ve  $|\Delta\theta/\Delta\phi - \iota| < \delta$  şartlarını sağlayan  $\Delta\phi_\delta$  varsa tanımlıdır. Kaotik bir yörünge için bu limitin varlığı kesin değildir. Kaotik bir alan çizgisi uzayda belirli ortalama bir transform değerinde keyfi bir zaman geçirdikten sonra başka bir ortalama transform değeriyle kısmi bariyerler yardımıyla başka bir alana sıkışabilir. Ergodik teoremine göre ise zaman ortalamasının erişilebilir faz uzayı ortalamasına eşit olması bir kolaylık sağlasa da pratik olarak alan çizgisinin sonsuz uzaklıktan takip edilememesi ve kaotik alanların karmaşık yapısı kaotik bölgelerde ölçülen rotasyonel transformu güvenilirmez kılar. Kaotik alanlardaki yakın yörüngeler Lyapunov eksponenti ile orantılı bir şekilde eksponansiyel olarak ıraksar. Bu rotasyonel transform limitine yapılacak herhangi sonlu bir yaklaşımın kaotik alandaki konumun monoton olmayan bir fonksiyonu olmasına benzer. Sonlu sayıda geçişten sonra kendi üzerlerine kapanan periyodik alan çizgileri sonlu bir uzaklıktan izlenerek rotasyonel transform hesaplanabilir [3].

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\psi \times \vec{\nabla}\theta + \vec{\nabla}\phi \times \vec{\nabla}\chi \quad (3.9)$$

ifadesi ele alınsın. Burada  $\chi$  alan çizgisi Hamiltonyen'i olmak üzere

$$\chi = \psi^2/2 + k \left[ \frac{1}{2} \cos(2\theta - \phi) + \frac{1}{3} \cos(3\theta - 2\phi) \right] \quad (3.10)$$

ile ifade edilir. Bu durumda alan çizgisini yöneten denklemler

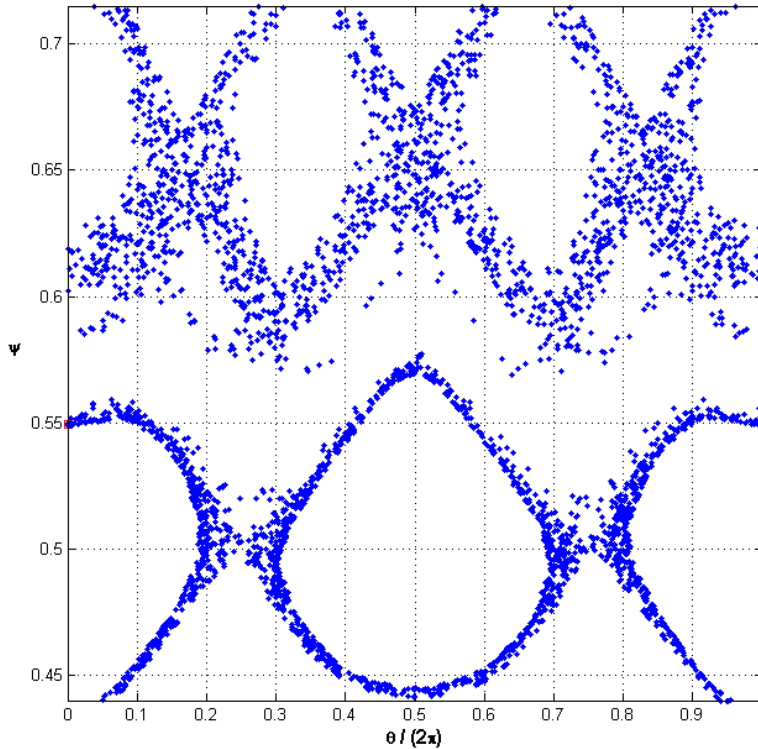
$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= k [\sin(2\theta - \phi) + \sin(3\theta - 2\phi)] \\ \dot{\theta} &= \psi\end{aligned}\tag{3.11}$$

haline gelir. Eğer pertürbasyon parametresi  $k$  sıfır alınırsa manyetik alan integre edilebilir bir alan ve  $(\psi, \theta, \phi)$  koordinatları da aksiyon açısı koordinatları olacaktır. Ayrıca bu durumda rotasyonel transform değeri  $\tau$  (3.11) ifadesinden

$$\tau = \psi\tag{3.12}$$

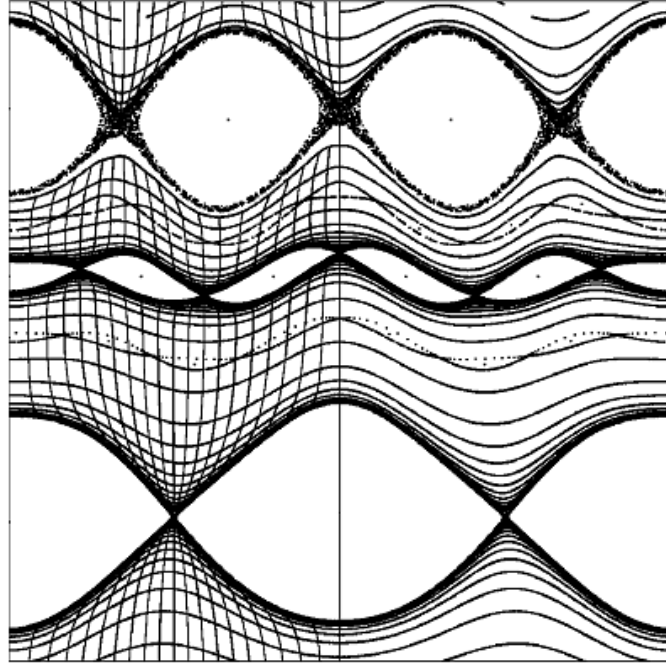
olarak elde edilir.  $k$ 'nın sıfırdan farklı olduğu durumlarda birincil adalar  $p_1/q_1 = 1/2$ ,  $p_2/q_2 = 2/3$  yüzeylerinde oluşur.  $k$  arttırıldıkça ikincil adalar  $p_1/q_1$  ve  $p_2/q_2$  tarafından oluşturulan Farey ağacındaki rasyonel değerlerde oluşurlar ve kaotik bölgeler gelişmeye başlarken invaryant yüzeyler kırılmaya başlar.

Bu çalışmada,  $k=0.001$  pertürbasyon değeri ile (3.11)'deki manyetik alan çizgisini yöneten denklemlerin sayısal olarak integre edilmesinin ardından  $p, q$  düzlemi üzerindeki Poincaré map çizdirilmiş ve Şekil 3.6'da gösterilmiştir.



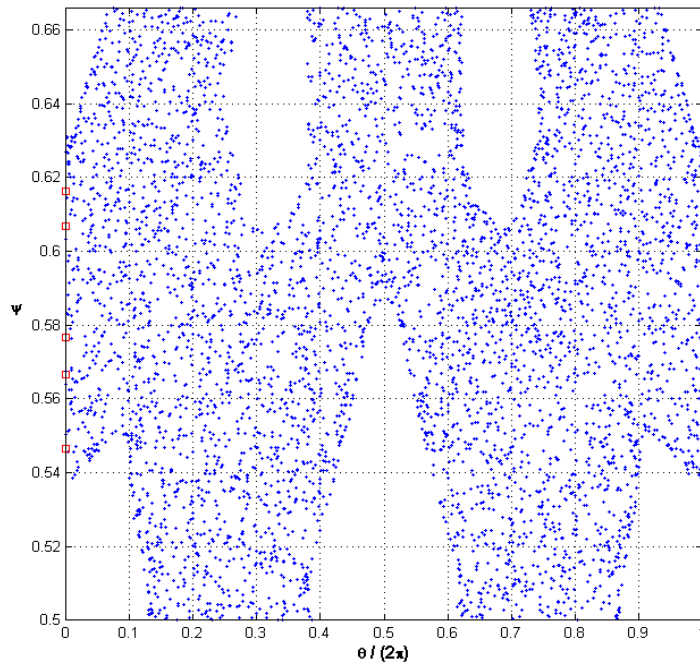
Şekil 3.6 :  $k = 0.001$  değeri için Poincaré kesiti.

Aynı çözüm, [3]'te ise Şekil 3.7'deki gibi verilmiştir.



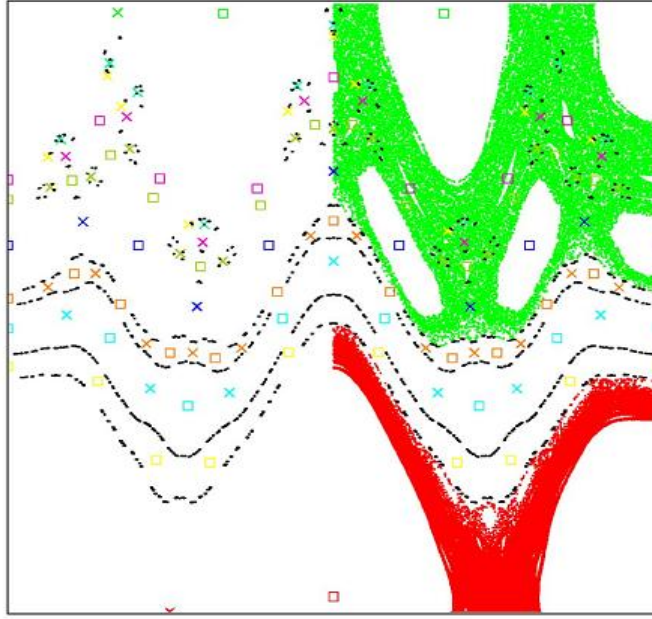
Şekil 3.7 :  $k = 0.001$  için Poincaré kesiti [3].

Benzer şekilde çalışmada  $k=0.0021$  pertürbasyon değeri (3.11)'deki manyetik alan çizgisini yöneten denklemlerin sayısal olarak integre edilmesinin ardından  $p,q$  düzlemi üzerindeki Poincaré map çizdirilmiş ve (Şekil 3.8)'de gösterilmiştir.



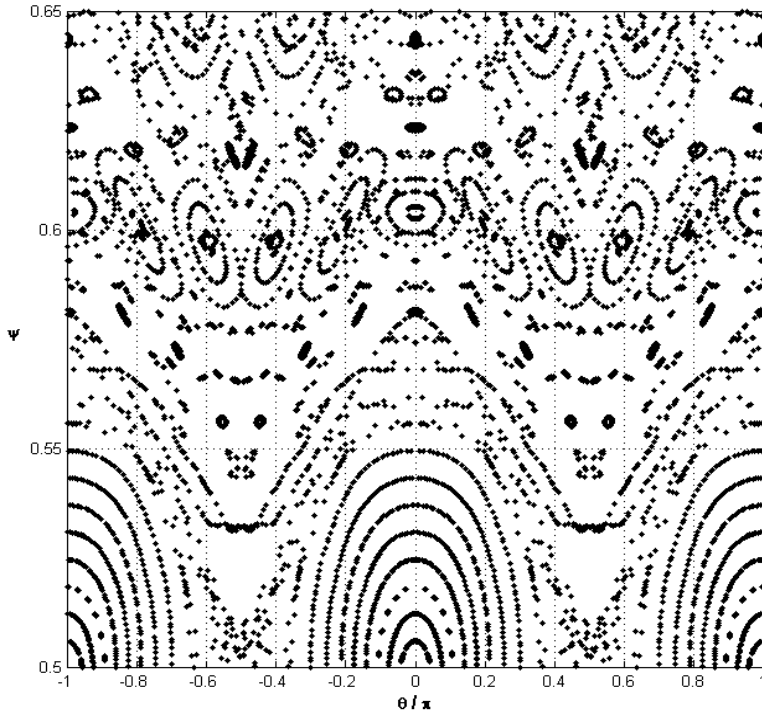
Şekil 3.8 :  $k = 0.0021$  değeri için Poincaré kesiti.

Aynı çözüm, [4]'te (Şekil 3.9)'daki gibi verilmiştir.



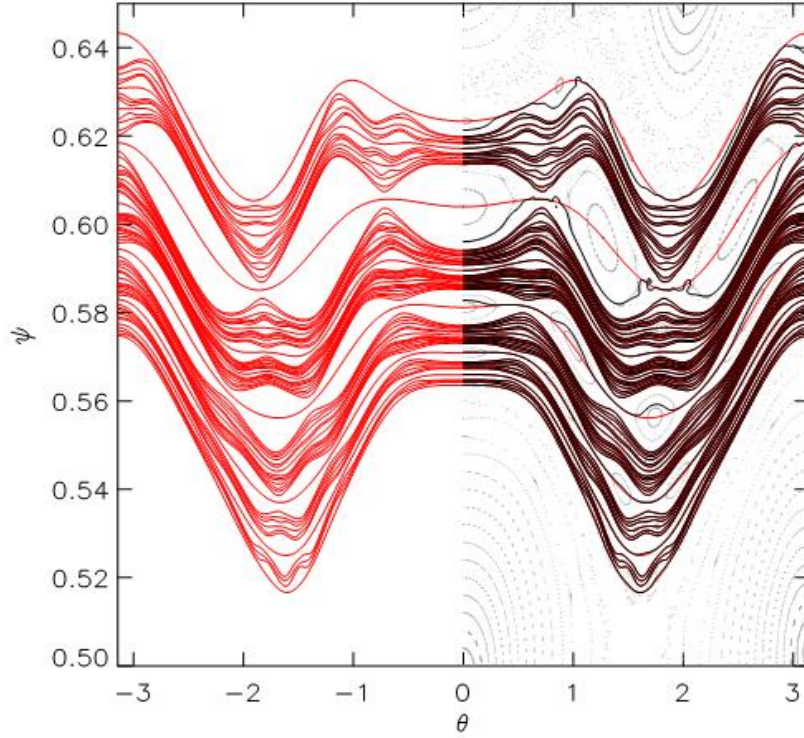
Şekil 3.9 :  $k = 0.0021$  için Poincaré kesiti [4]

$\psi = 1/2$  ve  $\psi = 2/3$  adaları çevresinde  $k = 0.0045$  pertürbasyon parametresi değeri ile yapılan sayısal integrasyon sonrası manyetik alan çizgilerinin Poincaré kesiti (Şekil 3.10)'da verilmiştir.



Şekil 3.10 :  $k = 0.0045$  değeri için Poincaré kesiti.

Aynı parametre değerleri ile yapılan çözüm, [2]'de ise (Şekil 3.11)'deki gibi verilmiştir.



Şekil 3.11 :  $k = 0.0045$  değeri için Poincaré kesiti [2].

### 3.3 Aksiyon İntegrali Hesabı Yöntemi

Toroidal manyetik alanın  $1\frac{1}{2}$  boyutlu Hamiltonyen sistem olması

$$S_c = \int_c \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (3.13)$$

aksiyon integralinin durağan C eğrileri olduğunu gösterir. Burada A vektörü Lagranjiyen'e eşit olan manyetik vektör potansiyelidir.

$$\vec{A} = \psi \vec{\nabla} \theta - \chi \vec{\nabla} \phi \quad (3.14)$$

Burada  $\chi(\psi, \theta, \phi)$  alan çizgisi Hamiltonyen'i olarak alınıp integre edilebilir ve pertürbe edilebilir iki kısımdan oluşacak şekilde

$$\chi = \frac{1}{2} \psi^2 + \sum_{m,n} \chi_{m,n}(\psi) \cos(m\theta - n\phi) \quad (3.15)$$

olarak alınabilir.

Aksiyon integralinin doğrudan sayısal çözümü için parçalı-linear yaklaşım yapmak için (3.13)

$$S = \sum_i \int_{\phi_i}^{\phi_{i+1}} (\psi \dot{\theta} - \chi) d\phi = \sum_i S_i(\theta_i, \theta_{i+1}) \quad (3.16)$$

şeklinde ifade edilsin. Burada  $\psi = \dot{\theta}(\phi)$ , ve  $\psi_i = (\theta_{i+1} - \theta_i) / \Delta\phi$  olsun. (3.16)'daki

$$S_i(\theta_i, \theta_{i+1}) = \frac{1}{2} \psi_i^2 \Delta\phi + \sum_{m,n} \chi_{m,n}(\psi_i) \frac{\sin(m\theta - n\phi)}{(m\dot{\theta} - n)} \Big|_{\phi_i}^{\phi_{i+1}} \quad (3.17)$$

ifadesi

$$S_i(\theta_i, \theta_{i+1}) = \frac{1}{2} \psi_i^2 \Delta\phi + \sum_{m,n} \chi_{m,n}(\psi_i) \left[ \frac{\sin(m\theta_{i+1} - n\phi_{i+1})}{(m\dot{\theta}_{i+1} - n)} - \frac{\sin(m\theta_i - n\phi_i)}{(m\dot{\theta}_i - n)} \right] \quad (3.18)$$

$$S_i(\theta_i, \theta_{i+1}) = \frac{1}{2} \psi_i^2 \Delta\phi + \sum_{m,n} \chi_{m,n}(\psi_i) \Delta\phi \left[ \frac{\sin(m\theta_{i+1} - n\phi_{i+1})}{(m(\theta_{i+2} - \theta_{i+1}) - n\Delta\phi)} - \frac{\sin(m\theta_i - n\phi_i)}{(m(\theta_{i+1} - \theta_i) - n\Delta\phi)} \right] \quad (3.19)$$

olarak yazılabilir. S'nin kısmi türevleri

$$\frac{\partial S}{\partial \theta_i} = \partial_2 S_{i-1}(\theta_{i-1}, \theta_i) + \partial_1 S_i(\theta_i, \theta_{i+1}) \quad (3.20)$$

olur. Burada  $\partial_1 S_i(\theta_i, \theta_{i+1})$  ve  $\partial_2 S_i(\theta_i, \theta_{i+1})$  terimleri  $S_i(\theta_i, \theta_{i+1})$ 'in sırasıyla birinci ve ikinci argümanlara göre türevini temsil eder. Dolayısıyla

$$\partial_1 S_i(\theta_i, \theta_{i+1}) = -\psi_i - \sum_{m,n} m \chi_{m,n}(\psi_i) \Delta\phi \left[ \frac{\cos(m\theta_i - n\phi_i)}{(m(\theta_{i+1} - \theta_i) - n\Delta\phi)} - \frac{\sin(m\theta_i - n\phi_i)}{(m(\theta_{i+1} - \theta_i) - n\Delta\phi)^2} \right] \quad (3.21)$$

$$= -\psi_i - \sum_{m,n} m \chi_{m,n}(\psi_i) \left[ \frac{\cos(m\theta_i - n\phi_i)}{(m\psi_i - n)} - \frac{\sin(m\theta_i - n\phi_i)}{\Delta\phi(m\psi_i - n)^2} \right] \quad (3.22)$$

olur ve  $S_{i-1}(\theta_{i-1}, \theta_i)$  için,



$$S_{i-1}(\theta_{i-1}, \theta_i) = \frac{1}{2} \psi_{i-1}^2 \Delta\phi + \sum_{m,n} \chi_{m,n}(\psi_{i-1}) \Delta\phi \left[ \frac{\sin(m\theta_i - n\phi_i)}{(m(\theta_{i+1} - \theta_i) - n\Delta\phi)} - \frac{\sin(m\theta_{i-1} - n\phi_{i-1})}{(m(\theta_i - \theta_{i-1}) - n\Delta\phi)^2} \right] \quad (3.23)$$

elde edilir. Türev alınarak

$$\partial_2 S_{i-1}(\theta_{i-1}, \theta_i) = \psi_{i-1} + \sum_{m,n} \chi_{m,n}(\psi_{i-1}) m \Delta\phi \left[ \frac{\cos(m\theta_i - n\phi_i)}{(m(\theta_{i+1} - \theta_i) - n\Delta\phi)} + \frac{\sin(m\theta_i - n\phi_i)}{(m(\theta_{i+1} - \theta_i) - n\Delta\phi)^2} + \frac{\sin(m\theta_{i-1} - n\phi_{i-1})}{(m(\theta_i - \theta_{i-1}) - n\Delta\phi)^2} \right] \quad (3.24)$$

veya

$$\partial_2 S_{i-1}(\theta_{i-1}, \theta_i) = \psi_{i-1} + \sum_{m,n} \chi_{m,n}(\psi_{i-1}) m \left[ \frac{\cos(m\theta_i - n\phi_i)}{(m\psi_i - n)} + \frac{\sin(m\theta_i - n\phi_i)}{\Delta\phi(m\psi_i - n)^2} + \frac{\sin(m\theta_{i-1} - n\phi_{i-1})}{\Delta\phi(m\psi_{i-1} - n)^2} \right] \quad (3.25)$$

elde edilir.(3.20)'deki terimler sırasıyla

$$\partial_1 S_i(\theta_i, \theta_{i+1}) = -\psi_i - \sum_{m,n} \chi_{m,n}(\psi_i) m \Delta\phi \left[ \frac{\cos(m\theta_i - n\phi_i)}{(m(\theta_{i+1} - \theta_i) - n\Delta\phi)} + \frac{\sin(m\theta_i - n\phi_i)}{(m(\theta_{i+1} - \theta_i) - n\Delta\phi)^2} \right] \quad (3.26)$$

$$= -\psi_i - \sum_{m,n} m \chi_{m,n}(\psi_i) \left[ \frac{\cos(m\theta_i - n\phi_i)}{(m\psi_i - n)} + \frac{\sin(m\theta_i - n\phi_i)}{\Delta\phi(m\psi_i - n)^2} \right] \quad (3.27)$$

ve

$$\partial_2 S_{i-1}(\theta_{i-1}, \theta_i) = \psi_{i-1} + \sum_{m,n} \chi_{m,n}(\psi_{i-1}) m \Delta\phi \left[ \frac{\cos(m\theta_i - n\phi_i)}{(m(\theta_{i+1} - \theta_i) - n\Delta\phi)} + \frac{\sin(m\theta_i - n\phi_i)}{(m(\theta_{i+1} - \theta_i) - n\Delta\phi)^2} + \frac{\sin(m\theta_{i-1} - n\phi_{i-1})}{(m(\theta_i - \theta_{i-1}) - n\Delta\phi)^2} \right] \quad (3.28)$$

$$= \psi_{i-1} + \sum_{m,n} m \chi_{m,n}(\psi_{i-1}) \left[ \frac{\cos(m\theta_i - n\phi_i)}{(m\psi_i - n)} + \frac{\sin(m\theta_i - n\phi_i)}{\Delta\phi(m\psi_i - n)^2} + \frac{\sin(m\theta_{i-1} - n\phi_{i-1})}{\Delta\phi(m\psi_{i-1} - n)^2} \right] \quad (3.29)$$

olur. Sonuç olarak gradyentin elemanları

$$\frac{\partial S}{\partial \theta_i} = \partial_2 S_{i-1}(\theta_{i-1}, \theta_i) + \partial_1 S_i(\theta_i, \theta_{i+1}) = \psi_{i-1} - \psi_i + \sum_{m,n} m \chi_{m,n} \frac{\sin(m\theta_{i-1} - n\phi_{i-1})}{\Delta\phi(m\psi_{i-1} - n)^2} \quad (3.30)$$

olur. (3.15)'deki manyetik alan Hamiltonyen'i pertürbasyon parametresi  $k$  ile birlikte

$$\chi = \frac{1}{2}\psi^2 + k \left[ \frac{1}{2} \cos(2\theta - \varphi) + \frac{1}{3} \cos(3\theta - 2\varphi) \right] \quad (3.31)$$

olarak yazılabilir [4]. (3.30) yardımı ile de

$$\frac{\partial S}{\partial \theta_i} = \psi_{i-1} - \psi_i + \sum_{m,n} m \chi_{m,n} \frac{\sin(m\theta_{i-1} - n\phi_{i-1})}{\Delta\phi(m\psi_{i-1} - n)^2} \quad (3.32)$$

$$= \psi_{i-1} - \psi_i + k \left[ \frac{\sin(2\theta_{i-1} - \phi_{i-1})}{\Delta\phi(2\psi_{i-1} - 1)^2} + \frac{\sin(3\theta_{i-1} - 2\phi_{i-1})}{\Delta\phi(3\psi_{i-1} - 2)^2} \right] \quad (3.33)$$

yazılabilir. Bu çözümün stabilite şartı  $\nabla S$ 'nin sıfıra eşit olması durumudur.

$$\begin{pmatrix} \delta \partial_0 S \\ \delta \partial_1 S \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta \partial_{N-1} S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{0,0}^2 S & \partial_{0,1}^2 S & 0 & 0 & \partial_{0,N-1}^2 S \\ \partial_{1,0}^2 S & \partial_{1,1}^2 S & \partial_{1,2}^2 S & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \partial_{N-1,0}^2 S & 0 & 0 & \partial_{N-1,N-2}^2 S & \partial_{N-1,N-1}^2 S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \theta_0 \\ \delta \theta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta \theta_{N-1} \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Sağ taraftaki matrise Hessian denir ve bu periyodik üçbantlı bir matristir.

$(\delta\theta_0 \ \delta\theta_1 \ \delta\theta_2 \ \dots \ \delta\theta_{N-1})^T$  vektörü keyfi seçilmiş bir vektör olduğundan Hessian matrisinin determinantı sıfıra eşit olmalıdır. Hessian matrisinin sıfırdan farklı elemanları

$$\partial_{i,i-1}^2 S = -\frac{1}{\Delta\phi} + \sum_{m,n} m^2 \chi_{m,n} \Delta\phi \left\{ \frac{\cos(m\theta_{i-1} - n\phi_{i-1})}{[m(\theta_i - \theta_{i-1}) - n\Delta\phi]^2} + \frac{2\sin(m\theta_{i-1} - n\phi_{i-1})}{[m(\theta_i - \theta_{i-1}) - n\Delta\phi]^3} \right\} \quad (3.35)$$

$$\partial_{i,i}^2 S = \frac{2}{\Delta\phi} - 2 \sum_{m,n} m^2 \chi_{m,n} \Delta\phi \frac{\sin(m\theta_{i-1} - n\phi_{i-1})}{[m(\theta_i - \theta_{i-1}) - n\Delta\phi]^3} \quad (3.36)$$

ve

$$\partial_{i,i+1}^2 S = -\frac{1}{\Delta\phi} \quad (3.37)$$

Eğer [4]'deki gibi  $2\chi_{2,1} = 3\chi_{3,2} = k$  bir pertürbasyon katsayısı kullanılırsa Hessian matrisinin sıfırdan farklı elemanları

$$\begin{aligned} \partial_{i,i-1}^2 S = & -\frac{1}{\Delta\phi} + k\Delta\phi \left\{ \frac{2\cos(2\theta_{i-1} - \phi_{i-1})}{[2(\theta_i - \theta_{i-1}) - \Delta\phi]^2} + \frac{2^2 \sin(2\theta_{i-1} - \phi_{i-1})}{[2(\theta_i - \theta_{i-1}) - \Delta\phi]^3} + \right. \\ & \left. + \frac{3\cos(3\theta_{i-1} - 2\phi_{i-1})}{[3(\theta_i - \theta_{i-1}) - 2\Delta\phi]^2} + \frac{3^2 \sin(3\theta_{i-1} - 2\phi_{i-1})}{[3(\theta_i - \theta_{i-1}) - 2\Delta\phi]^3} \right\} \quad (3.38) \end{aligned}$$

$$\partial_{i,i}^2 S = \frac{2}{\Delta\phi} - 2k\Delta\phi \left\{ \frac{2\sin(2\theta_{i-1} - \phi_{i-1})}{[2(\theta_i - \theta_{i-1}) - \Delta\phi]^3} + \frac{3\sin(3\theta_{i-1} - 2\phi_{i-1})}{[3(\theta_i - \theta_{i-1}) - 2\Delta\phi]^3} \right\} \quad (3.39)$$

$$\partial_{i,i+1}^2 S = -\frac{1}{\Delta\phi} \quad (3.40)$$

olur.



## 4. KAOTİK MANYETİK ALANDA SICAKLIK DİFÜZYONU

### 4.1 Anizotropik Isı İletim Denklemi

Manyetik olarak sınırlandırılmış plazmalardaki transportun birçok çeşidi manyetik alan  $\vec{B}$ 'ye paralel yönde daha kuvvetli olurken, dik yöndeki transport paralele nazaran daha zayıftır. Manyetik alanın yapısına eklenmiş manyetik koordinatlar plazma dinamiğinde kolaylaştırıcı bir teorik yaklaşım sağlar [1].

Kaotik manyetik alan içerisindeki anizotropik ısı iletim denklemi

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\kappa_{\parallel} \vec{\nabla}_{\parallel} T + \kappa_{\perp} \vec{\nabla}_{\perp} T) + Q \quad (4.1)$$

ile verilir. Burada T sıcaklık, t zaman,  $\kappa_{\parallel}$ ,  $\kappa_{\perp}$  sırasıyla sabit, paralel ve dik difüzyon katsayılarıdır.

Füzyon plazmalarında  $\kappa_{\perp} / \kappa_{\parallel} \approx 0$  olduğunda ısı transportu yüksek oranda anizotropiktir. Güçlü anizotropinin, manyetik alan çizgilerinin akı yüzeylerinde olmasına, alan çizgilerinin hafif kaotik olmasına ve yine alan çizgilerinin yüksek oranda kaotik olmasına göre çeşitli sonuçları vardır. İlk durumda sıcaklık yüzeyin bir fonksiyonudur  $T = T(\psi)$  ve burada  $\psi$  akı yüzeylerini belirtir. Tam tersi olan yüksek kaos durumunda ki, bu durumda manyetik alan çizgileri bir hacim üzerinde rastgele dağılmış bir görüntü çizerler, güçlü paralel transport sıcaklığı sabitler,  $T = sbt$ . Bu noktadan sonra sıcaklık kaotik manyetik alanın fraktal yapısı tarafından domine edilir.

### 4.2 Anizotropik Isı İletim Denkleminin Yarı Analitik Çözümü

Akı yüzeyleri ile eşsıcaklık eğrileri arasındaki korelasyonu göstermek için  $T = T(s)$  yaklaşımı yapılsın ve s akı yüzeyini gösterecektir.

Sıcaklık gradyentini elde etmek için sabit bir s yüzeyiyle çevrilmiş hacim üzerinde aşağıdaki integral ele alınsın

$$\frac{d}{ds} \int_V \nabla \cdot \vec{q} dV \equiv \frac{d}{ds} \int_{\partial V} \vec{q} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (4.2)$$

burada  $d\vec{S} = \sqrt{g} \nabla s d\theta d\phi$  değerini alır. (4.1)'in yardımıyla

$$\frac{dT}{ds} = \frac{c}{\kappa_{\parallel} \varphi + \kappa_{\perp} G} \quad (4.3)$$

ifadesi bulunur. Burada  $\varphi$  alan çizgisi akısının karesi olmak üzere

$$\varphi = \iint d\theta d\phi \sqrt{g} B_n^2 \quad (4.4)$$

ile G ise ortalama metrik miktarı olmak üzere

$$G = \iint d\theta d\phi \sqrt{g} g^{ss} \quad (4.5)$$

ile ifade edilir ve  $B_n \equiv \vec{B} \cdot \vec{\nabla}_s / |B|$  ve  $g^{ss} = \vec{\nabla}_s \cdot \vec{\nabla}_s$  olurlar. T(s) 'i bulmak için (4.3) integre edilirken ortaya çıkan c integrasyon sabiti ve bir diğer integrasyon sabiti, sayısal çözümdeki T(a) ve T(b)'nin ortalaması kullanılarak bulunur.

### 4.3 Anizotropik Isı İletim Denkleminin Sayısal Çözümü

#### 4.3.1 Paralel difüzyon terimi

(4.1) denklemindeki paralel türev  $\vec{\nabla}_{\parallel} T$ ,

$$\vec{\nabla}_{\parallel} T = \vec{b} \vec{b} \cdot \vec{\nabla} T \quad (4.6)$$

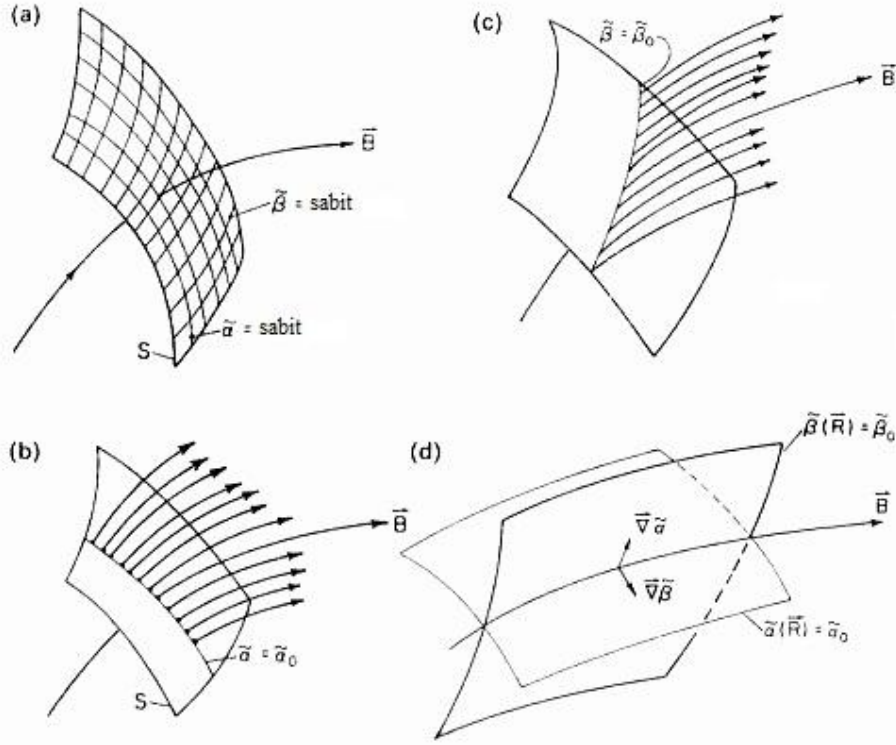
ile ifade edilir ve burada  $\vec{b} = \vec{B} / |\vec{B}|$  dir. Dik türev ise,

$$\vec{\nabla}_{\perp} T = \vec{\nabla} T - \vec{\nabla}_{\parallel} T \quad (4.7)$$

ile ifade edilir. Q kaynak veya kuyu terimini gösterir. Homojen olmayan sınır koşullarının ve kaynak veya kuyu teriminin sıfır alınmasıyla durgun halde ısı geçişi denklemi,

$$\vec{\nabla} \cdot (\kappa_{\parallel} \vec{\nabla}_{\parallel} T + \kappa_{\perp} \vec{\nabla}_{\perp} T) = 0 \quad (4.8)$$

haline gelir. Paralel difüzyon terimi  $\nabla_{\parallel}^2 T$ 'yi bulmak için manyetik alan üzerine yerleştirilmiş ve Şekil 4.1'de gösterilmiş Clebsch koordinat sistemi  $(\alpha, \beta, \phi)$  ele alınsın



Şekil 4.1 : Clebsch sistemi.

Bu koordinat sisteminde  $\alpha$  ve  $\beta$  manyetik alan çizgisini,  $\phi$  ise manyetik alan çizgisi üzerindeki uzaklığı ölçüyor olsun ve manyetik alana enlemesine uzanan ve hiçbir yerde teğet olmayan Poincaré yüzey kesitleri düşünölsün (Şekil 4.2).  $\alpha$  ve  $\beta$  bu iki boyutlu yüzeydeki herhangi iki koordinat olarak düşünölebilir. Bu durumda da üçüncü koordinat  $\phi$ , Poincaré yüzey kesitinde bu iki koordinat tarafından belirlenen bir noktadan başlayan manyetik alan çizgisi boyunca uzaklığı belirtecektir. Sonuç olarak manyetik alan çizgisi boyunca  $\alpha$  ve  $\beta$  sabit kalır ve paralel türevi basitleştirir.  $\alpha$  ve  $\beta$ 'nin sabitliği sonucunda

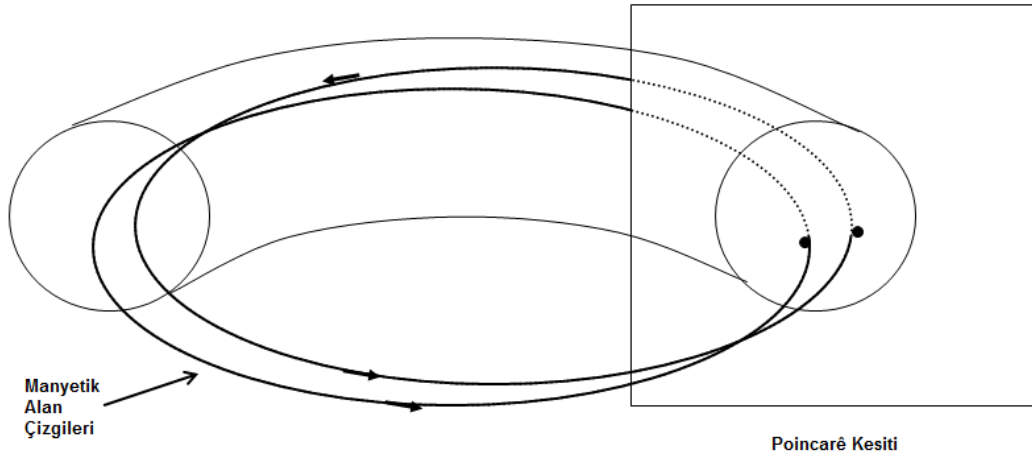
$$\vec{B} \cdot \vec{\nabla}\alpha = 0 \quad (4.9)$$

$$\vec{B} \cdot \vec{\nabla}\beta = 0 \quad (4.10)$$

olur ve manyetik alan için Clebsch gösterimi olan

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\alpha \times \vec{\nabla}\beta \quad (4.11)$$

ifadesi yazılır.



**Şekil 4.2 :** Toroidal manyetik alanın Poincaré kesiti.

Eğrisel koordinat sistemleri için paralel Laplace operatörü,

$$\nabla_{\parallel}^2 T = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u_3} \left\{ \left[ \sqrt{g} \left( g^{13} \frac{\partial T}{\partial u^1} + g^{23} \frac{\partial T}{\partial u^2} + g^{33} \frac{\partial T}{\partial u^3} \right) \right] \right\} \quad (4.12)$$

halini alır. Burada g

$$g^{ij} \equiv \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \quad (4.13)$$

ile verilir. (4.12)'deki g bileşenleri hesaplanıp yerine yazıldığında Laplace operatörü

$$\nabla_{\parallel}^2 T = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \sqrt{g} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) \quad (4.14)$$

halini alır.  $\sqrt{g}$  değeri Eğrisel koordinatlarda Jakobiyen  $J$ 'ye eşittir,  $\sqrt{g} = J$ . Clebsch sisteminin Jakobiyeni ise,

$$J = \vec{\nabla}\alpha \times \vec{\nabla}\beta \cdot \vec{\nabla}\phi \quad (4.15)$$

$$J = \vec{B} \cdot \vec{\nabla}\phi \quad (4.16)$$



halini alır. (4.16)'de Gradyent operatörü  $\nabla$  yerine yazılırsa Jakobiyen

$$J = B^\phi = \frac{1}{B} \quad (4.17)$$

halini alır. Burada  $B^\phi$ ,  $\vec{B}$  vektörünün contravariant bileşenidir. (4.14) tekrar düzenlendiğinde

$$\nabla_{\parallel}^2 T = B \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) \quad (4.18)$$

halini alır.

### 4.3.2 Dik difüzyon terimi

$\vec{B}$ 'ye dik difüzyon için  $\phi$ 'ye dik difüzyon yaklaşımı yapılmıştır. Bu yaklaşım manyetik alan baskın olarak toroidal olup  $\kappa_{\perp} / \kappa_{\parallel} \approx 0$  olduğundan ihmal edilebilir bir hata getirirse de Clebsch koordinatlarının  $(\alpha, \beta, \phi)$  metrik elemanlarının hesaplanması zorluğunu ortadan kaldıracaktır ve Kartezyen metrikler kullanılabilir [1]. Bu durumda dik yöndeki Laplace operatörü

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \partial u_1 \left[ \sqrt{g} \left( g^{11} \frac{\partial T}{\partial u_1} + g^{12} \frac{\partial T}{\partial u_2} \right) \right] + \partial u_2 \left[ \sqrt{g} \left( g^{21} \frac{\partial T}{\partial u_1} + g^{22} \frac{\partial T}{\partial u_2} \right) \right] \right\} \quad (4.19)$$

olur. g değerleri hesaplanıp yerine yazılırlarsa dik yöndeki Laplacian için

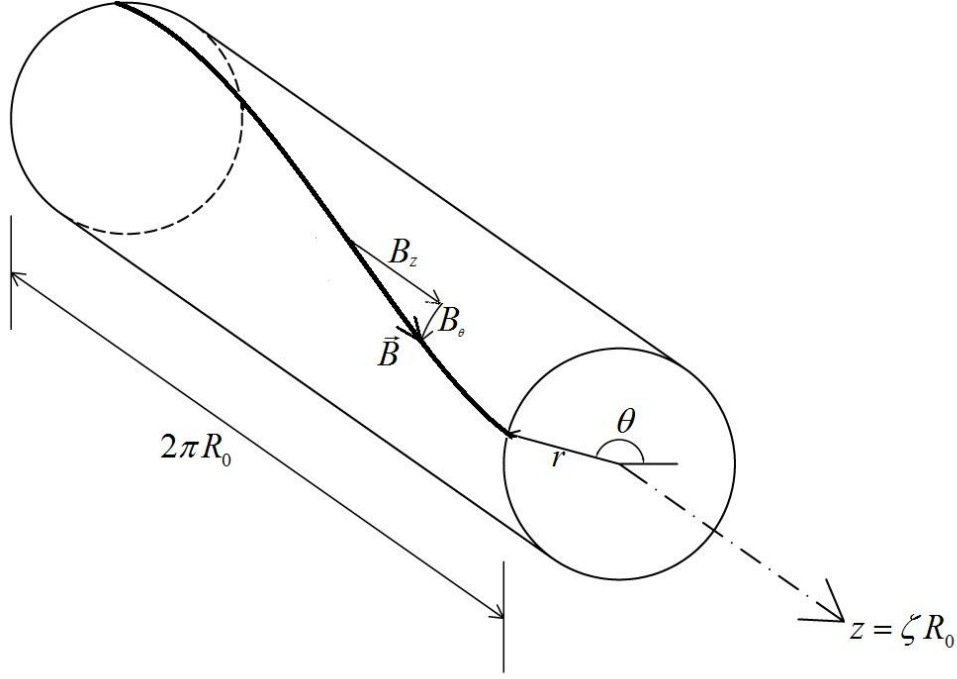
$$\nabla_{\perp}^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \quad (4.20)$$

ifadesi elde edilmiş olur.

### 4.4 Clebsch Koordinatlarda Metriklerin Hesaplanması

Bu kısımda Xanthopoulos ve Jenko'nun [21] makalesine ve Callen'ın [22] kitabındaki Screw Pinch bölümüne dayanarak tokamaklarda metriklerin hesabı ayrıntılı ve sayısal olarak gösterilmiştir.

Screw Pinch modelinde manyetik alan Clebsch koordinatlarda şu şekilde ifade edilir (Şekil 4.3) [22].



Şekil 4.3 : Screw pinch modeli.

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \psi_p \times \vec{\nabla} (q(\rho) \vartheta - \phi) \quad (4.21)$$

Burada  $\psi_p$ , polidal akı fonksiyonu olup,  $\vec{\nabla} \psi$  plazma silindirin yüzeyine dik radyal yöndedir ve

$$r(\theta) = R_0 + \rho \cos \theta \quad (4.22)$$

olduğu görülür.  $g^{kl}$  metrikleri

$$g^{kl} = \sum g_c^{ij} C_i^k C_j^l \quad (4.23)$$

ifadesine dayanılarak bulunur.

$$\frac{d}{d\tau} C_j^l = - \sum_{k=1}^3 \frac{C_k^l}{B^\phi} \frac{\partial B_c^k}{\partial y^i} \quad (l=1,2; j=1,2,3) \quad (4.24)$$

ifadesindeki [21] 9 denklemden oluşan sistem çözülerek (4.23)'de yerine koyulur.

Bunun için (4.21) yeniden düzenlenerek [22]

$$\vec{B} = B_\phi(\rho) \left[ \vec{e}_\phi + \frac{\rho}{R_0 q(\rho)} \vec{e}_\theta \right] \quad (4.25)$$

haline gelir. Buna göre  $B^p = 0$  olur ve

$$\partial B^p / \partial \rho = 0, \quad \partial B^p / \partial \theta = 0, \quad \partial B^p / \partial \phi = 0, \quad (4.26)$$

ifadeleri bulunur. Diğer bileşenler  $B_\theta(\rho)$  ve  $B_\phi(\rho)$ 'nin  $\rho$ 'ya nasıl bağlı oldukları [22]'deki gibi alınabilir. B bileşenlerinin sıfırdan farklı olan türevleri sadece,

$$\partial B^\theta / \partial \rho = f(\rho), \quad \partial B^\phi / \partial \rho = g(\rho) \quad (4.27)$$

den ibarettir. Burada f ve g fonksiyonları [21]'deki grafiklerde türev alınarak belirlenebilir. Bu yaklaşımlarla yapılan hesaplar sonucu ilgili şekiller EK A.1'de verilmiştir.



## 5. SONUÇ VE TARTIŞMA

Her ne kadar ülkemizde plazma ve plazma fiziği üzerine çalışmalar yok denecek kadar az olsa da, füzyon çalışmalarının ve özellikle plazmanın sınırlandırılmasında kullanılacak yöntemlerin hem teorik hem de nümerik olarak anlaşılması ve mevcut çalışmalara bir çeşitlilik katılmasının amaçlandığı çalışmada Hudson'ın 2004, 2006 ve 2009 yıllarında, gerek plazma içerisindeki manyetik alanın kaosa geçişi gerekse de bu geçiş sırasında ve sonrasında manyetik alanın sıcaklık difüzyonu üzerine etkilerini araştırdığı büyük bütçeli ve uzun iterasyon zamanlı karmaşık hesaplar içeren çalışmalarının özetlenmesine ve imkân olduğu ölçüde nümerik olarak izlenmesine çalışılmıştır. Elde edilen sonuçlarda plazma manyetik alanına uygulanan pertürbasyonların hangi parametrik değerlerde manyetik alanı kaosa sürüklediği manyetik alan çizgisinin nümerik integrasyonu ile çizilen Poincaré kesitleri üzerinden gözlemlenmiştir.



## KAYNAKLAR

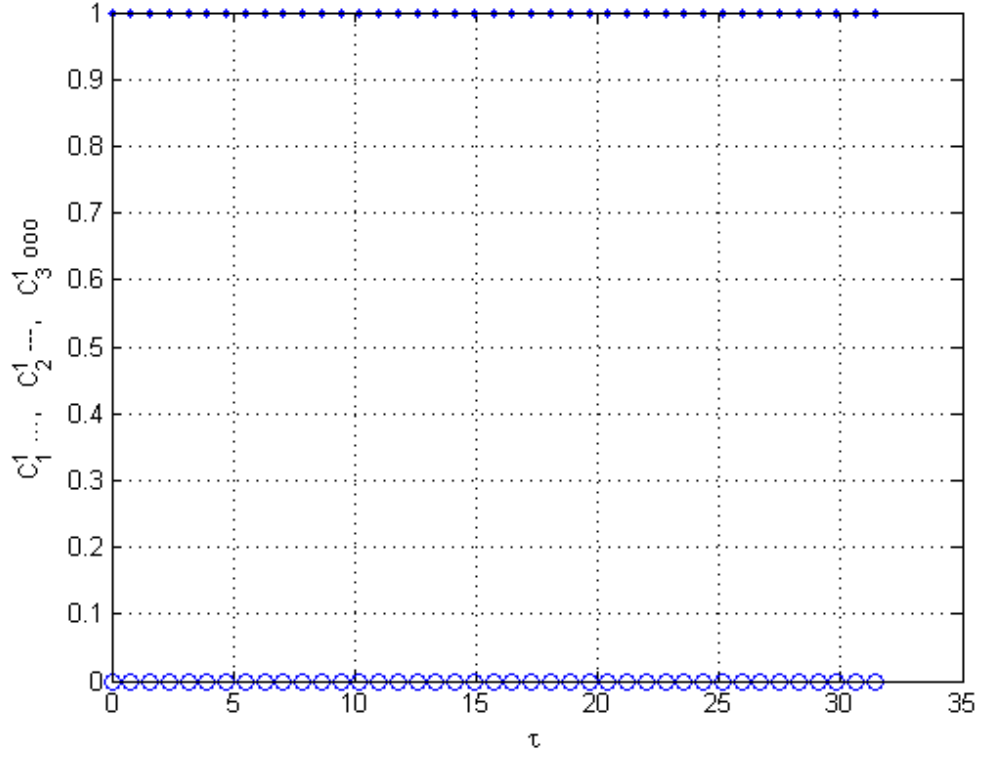
- [1] **Hudson, S. R., and Breslau, J.**, 2008. Temperature Contours and Ghost Surfaces for Chaotic Magnetic Fields, *Physical Review Letters*. Vol **100**, Iss 9,
- [2] **Hudson, S. R.**, 2009. An expression for the temperature gradient in chaotic fields, *Physics of Plasmas*, Vol 16 Iss 1.
- [3] **Hudson, S.R.**, 2004. Destruction of invariant surfaces and magnetic coordinates for perturbed magnetic fields, *Physics of Plasmas*, Vol 11, Iss 2.
- [4] **Hudson, S.R.**, 2006. Calculation of Cantori for Hamiltonian flows, *Physical Review*, E 74, 056203
- [5] **Bellan, P. M.**, 2006. Fundamentals of Plasma Physics. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [6] **Chen, F. F.**, 2006. Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion. Springer, USA
- [7] **Dinklage A., Klinger T., Marx G., Schweikhard L.**, 2005. Plasma Physics Confinement, Transport and Collective Effects. Springer, Berlin Heidelberg, Netherlands.
- [8] **Dendy R. O.**, 2002. Plasma Dynamics. Oxford University Press, New York, USA.
- [9] **Miyamoto K.**, 2005. Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion. Springer Berlin Heidelberg, Germany.
- [10] **Braams, C.M., Stott, P.E.**, 2002. Nuclear Fusion: Half a Century of Magnetic Confinement Research. Institute of Physics Publishing.
- [11] **Nuttal W.J.**, 2008. Fusion as an Energy Source: Challenges and Opportunities, Institute of Physics Report
- [12] **Harris, J. H.; J. L. Cantrell, T. C. Hender, B. A. Carreras, and R. N. Morris**, 1985. A flexible heliac configuration. *Nuc. Fusion* 25, 623
- [13] <<http://www.ipp.mpg.de>> Alındığı tarih 05.03.2010
- [14] <<http://www-ferp.ucsd.edu>> Alındığı tarih 05.03.2010
- [15] <<http://www.fti.wisc.edu>> Alındığı tarih 05.03.2010
- [16] <<http://fusionenergy.lanl.gov>> Alındığı tarih 05.03.2010

- [17] **Boozer A. H.**, 2004. Physics of magnetically confined plasmas, *Reviews of Modern Physics*, Vol. 76, 1070-1138.
- [18] **Horton W., Ichikawa Y-H.**, 1996. Chaos and Structures in Nonlinear Plasmas. World Scientific Publishing, Singapore.
- [19] **Zaslavsky G. M.**, 2007. Physics of Chaos in Hamiltonian Systems, Imperial College Press, London, UK
- [20] **Ivancevic V. G., Inancevic T. T.**, 2007. High Dimensional Chaotic and Attractor Systems A comprehensive Introduction. Springer Press, Netherlands.
- [21] **Xanthopoulos P., Jenko F.**, 2006. Clebsch-type coordinates for nonlinear gyrokinetics in generic toroidal coordinates, *Physics of Plasmas*, Vol. 13.
- [22] **Callen J. D.**, Structure of Magnetic Fields, Fundamentals of Plasma Physics, 1-50. Alındığı tarih 19.12.2009  
<http://homepages.cae.wisc.edu/~callen/chap3.pdf>

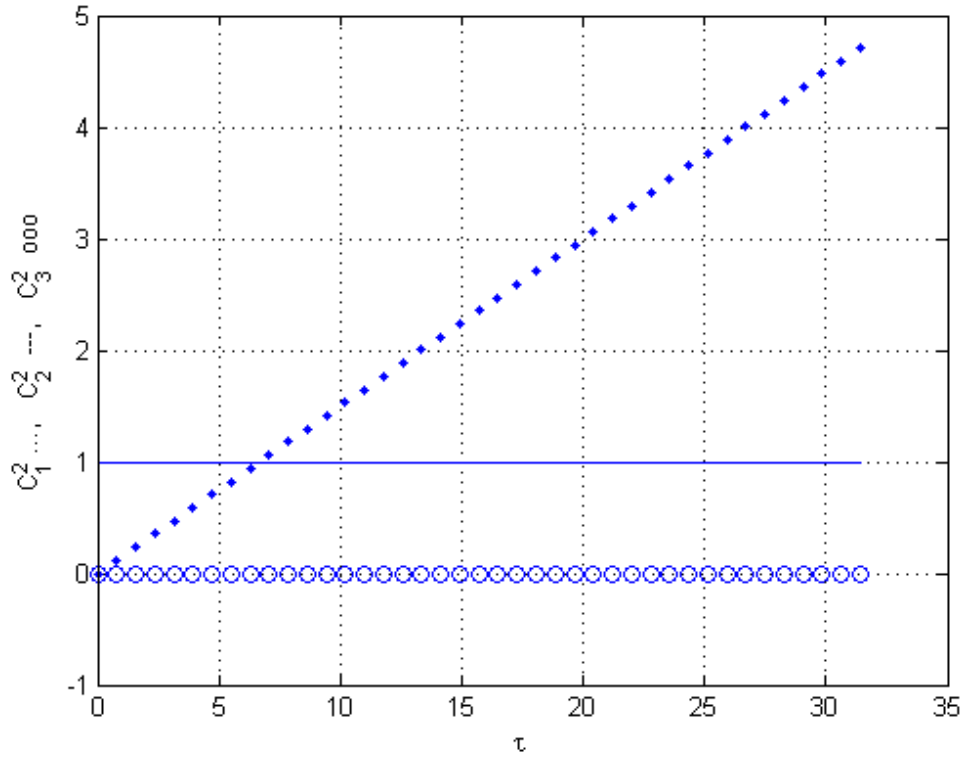


## EKLER

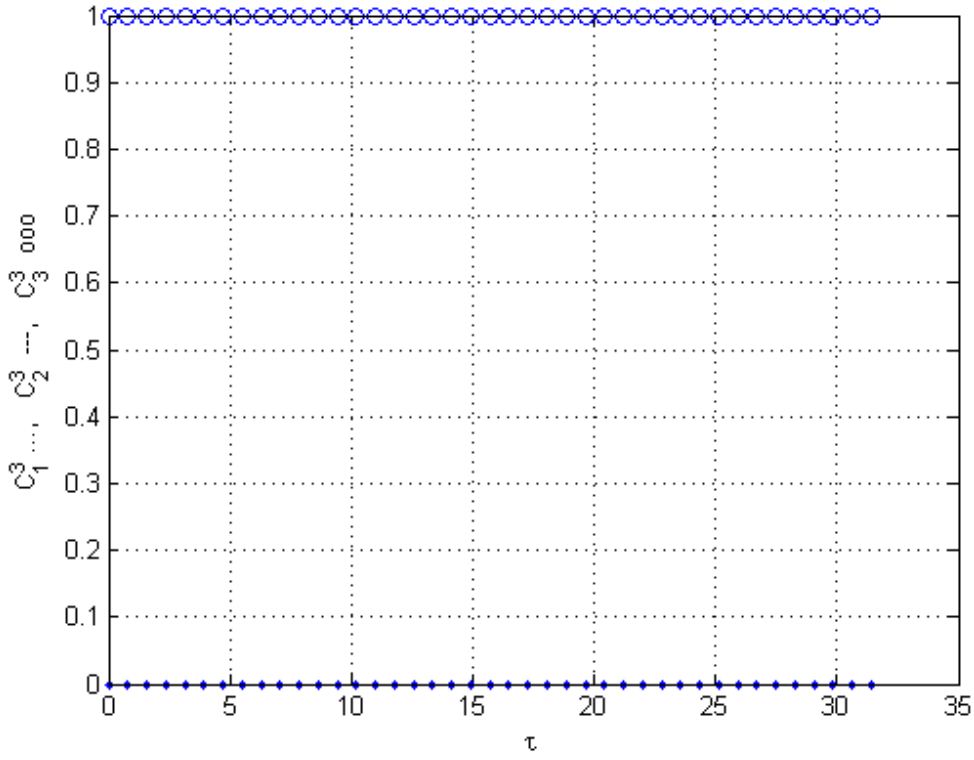
### EK A.1 : Clebsch Metrikleri



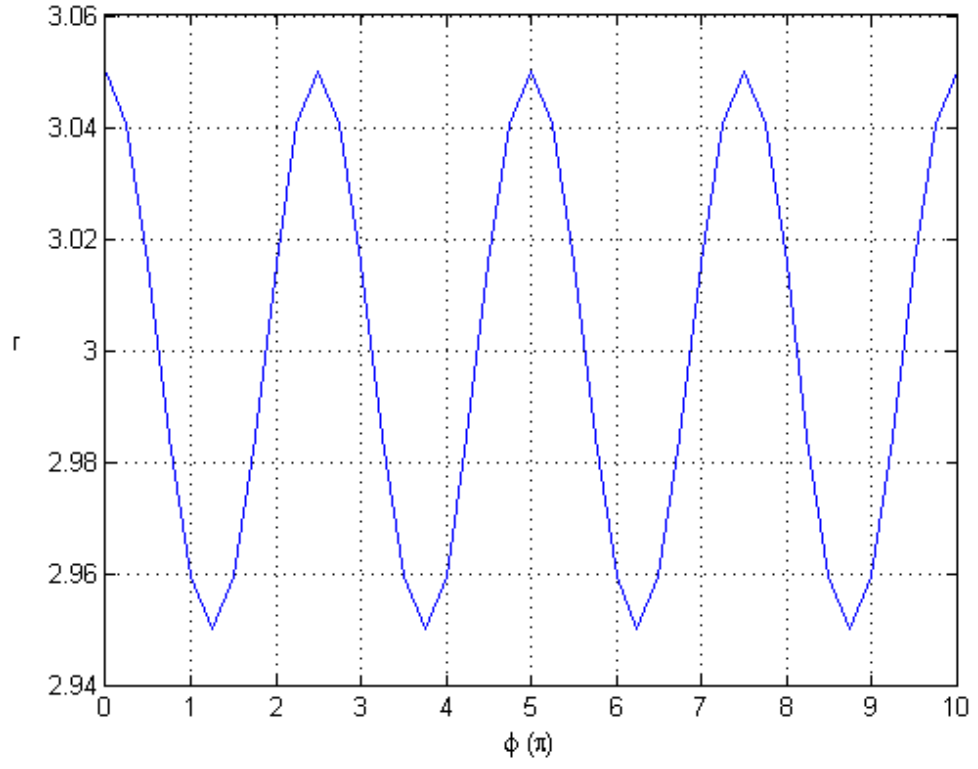
Şekil A.1 :  $C_1^1 - C_2^1 - C_3^1$  değerleri.



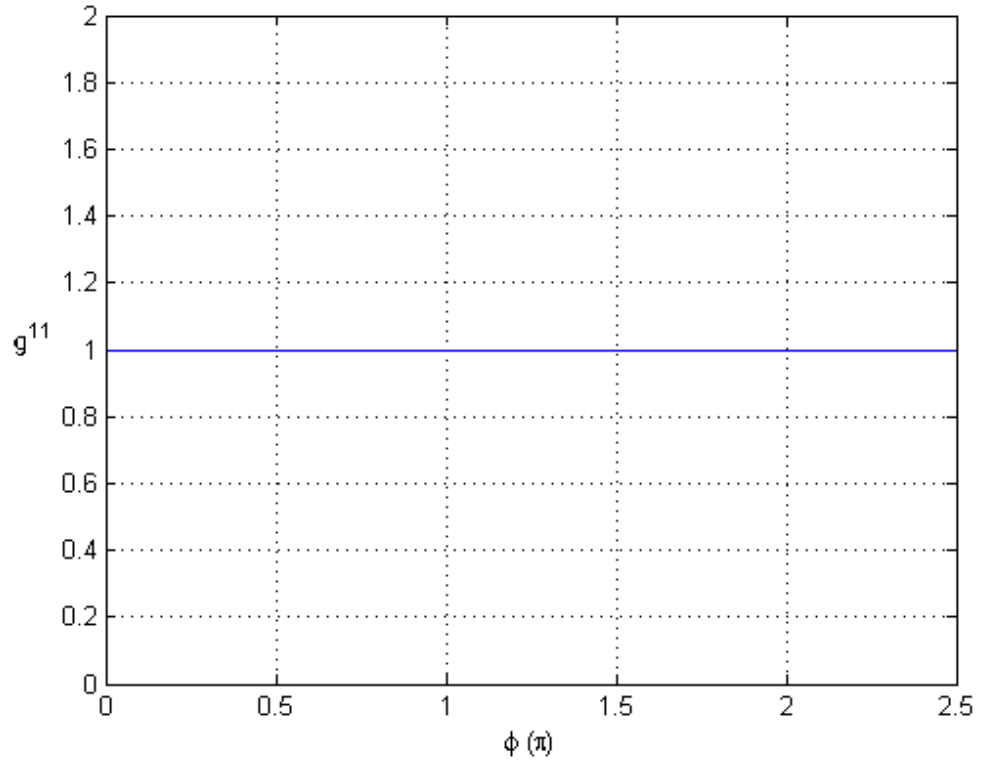
Şekil A.2 :  $C_1^2 - C_2^2 - C_3^2$  değerleri.



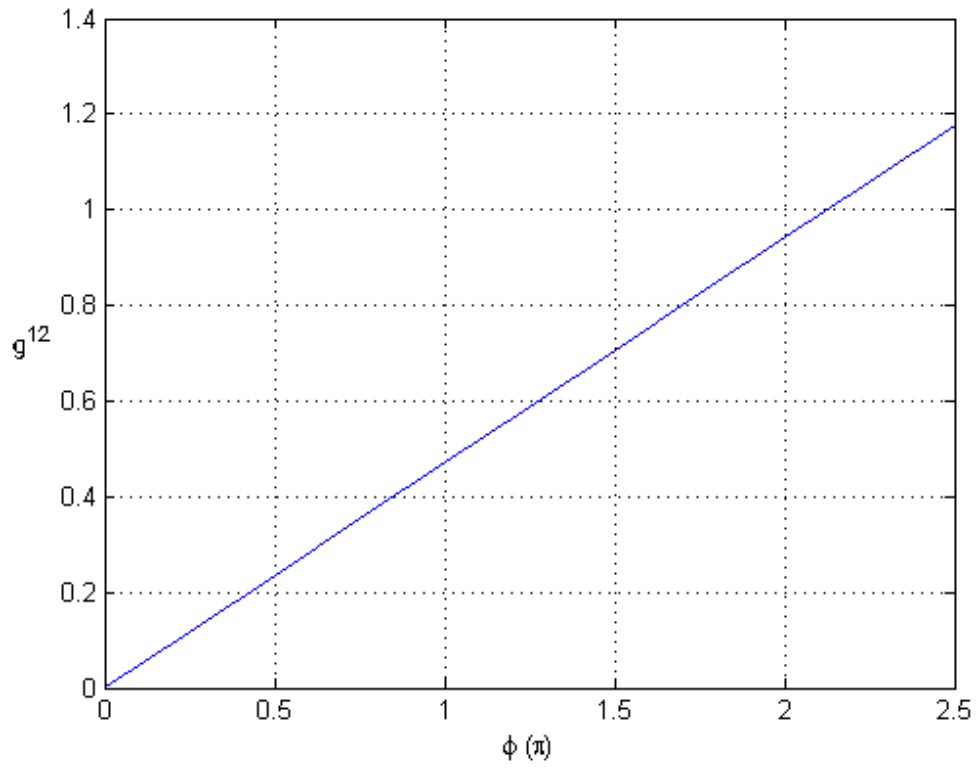
Şekil A.3 :  $C_1^3 - C_2^3 - C_3^3$  değerleri.



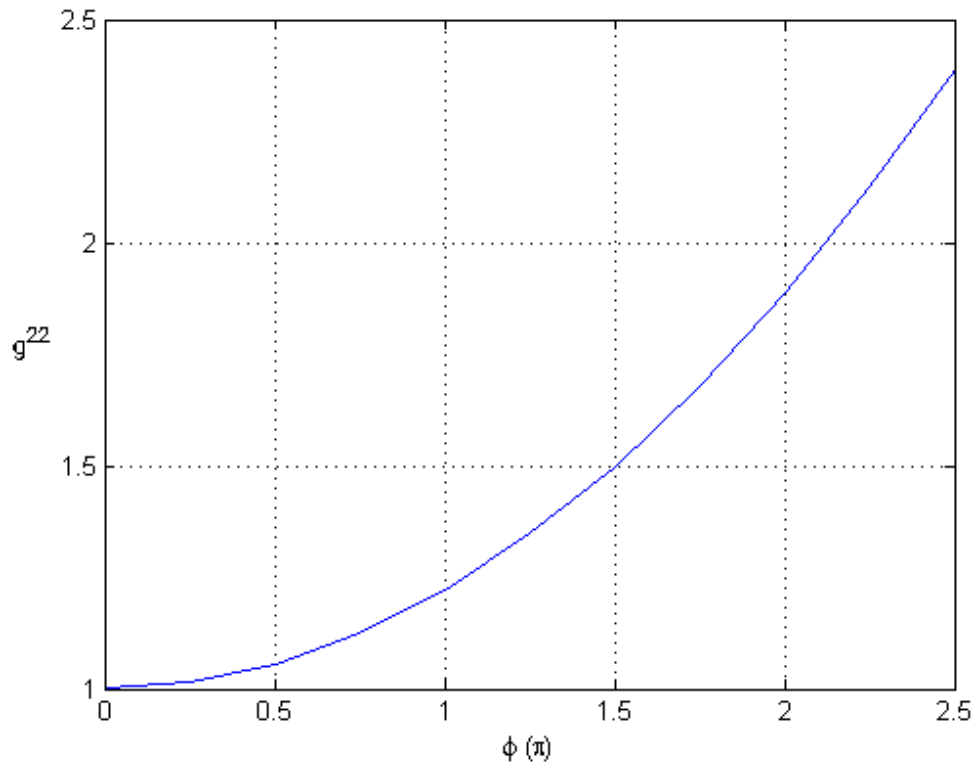
Şekil A.4 :  $r$ 'nin  $\phi$  ile değişimi.



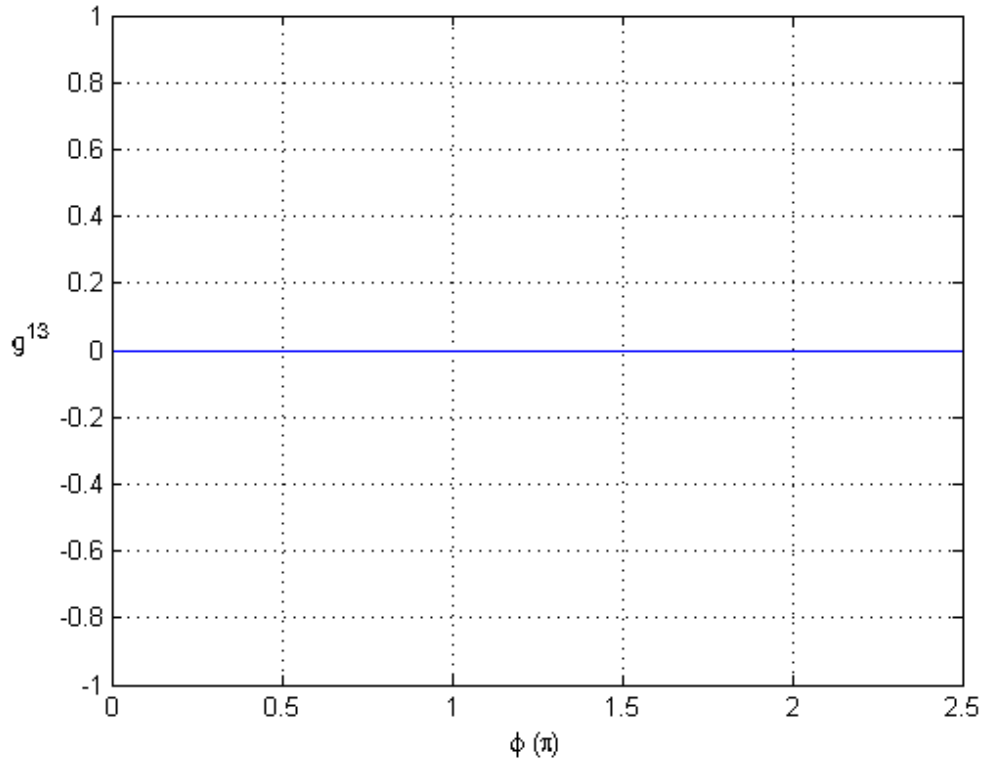
Şekil A.5 :  $g^{11}$  metrik elemanı.



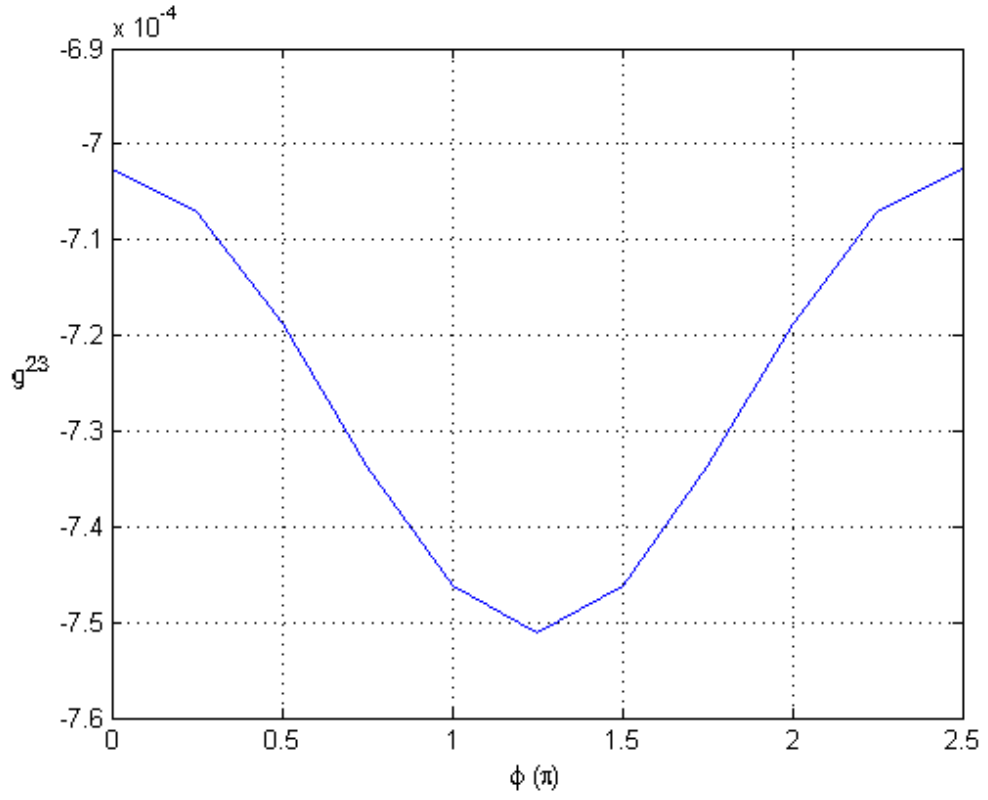
Şekil A.6 :  $g^{12}$  metrik elemanı.



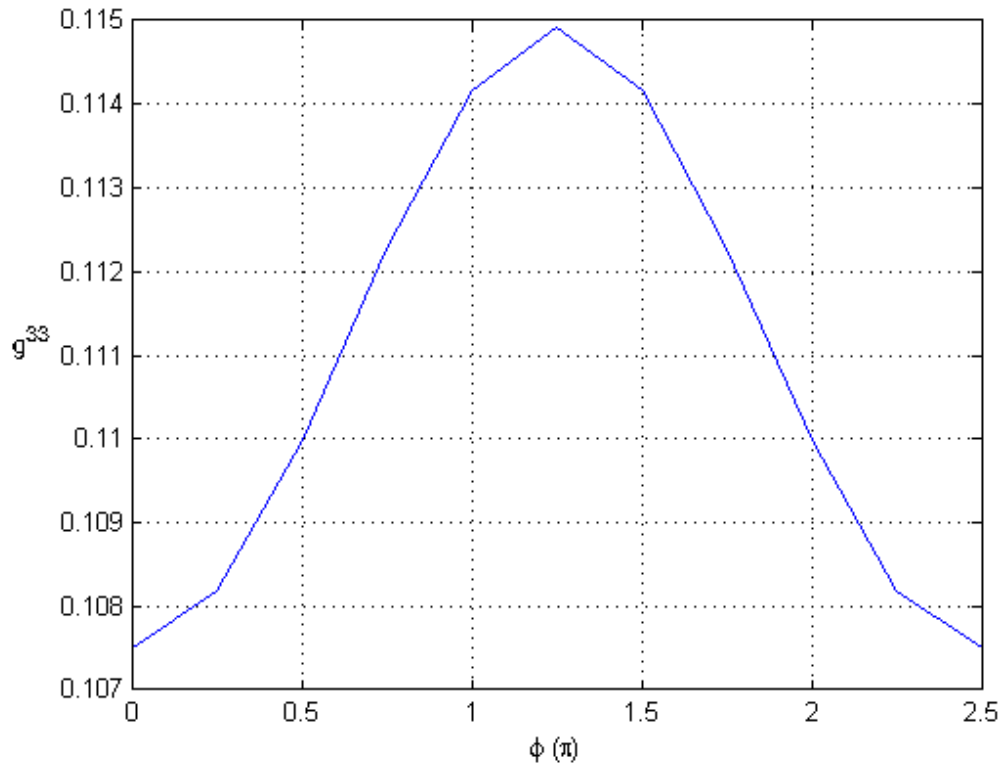
Şekil A.7 :  $g^{22}$  metrik elemanı.



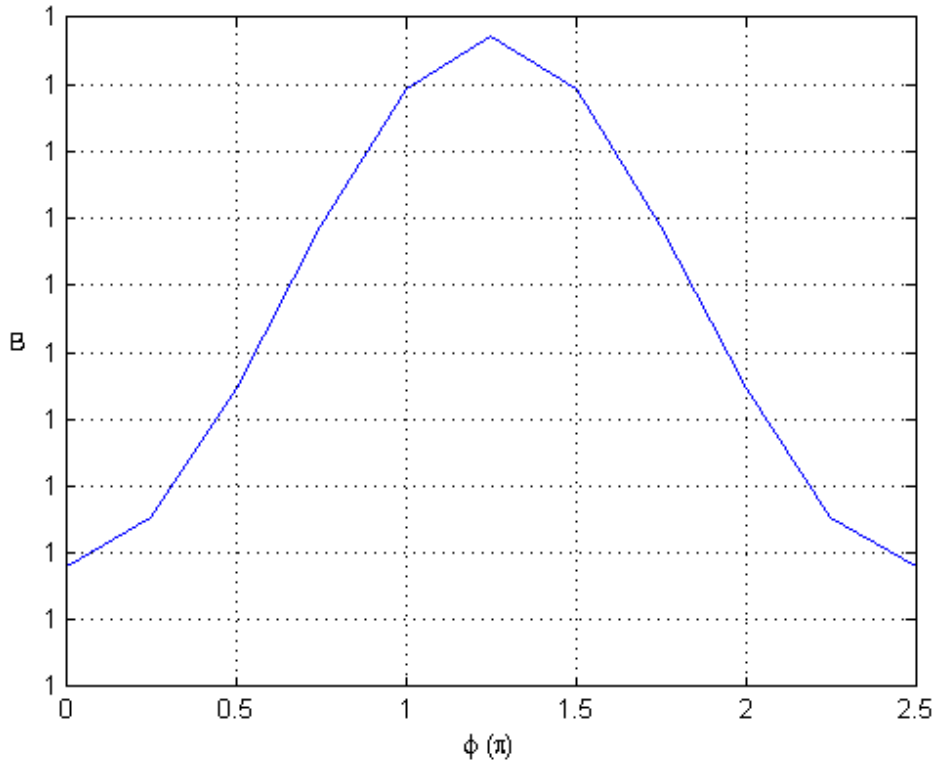
Şekil A.8 :  $g^{13}$  metrik elemanı.



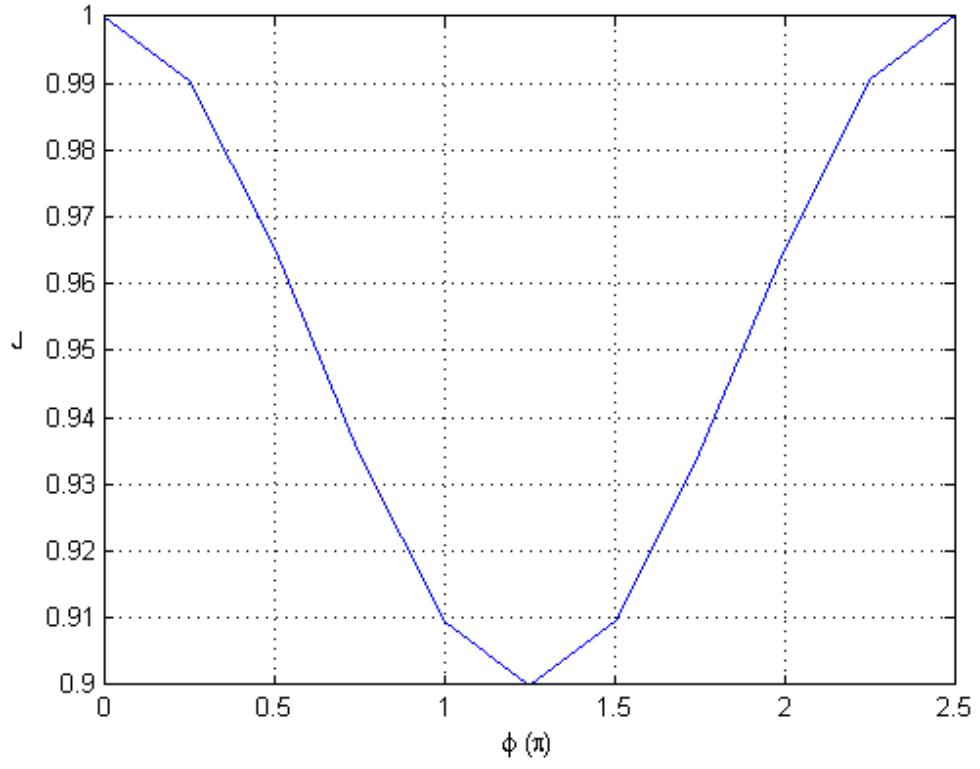
Şekil A.9 :  $g^{23}$  metrik elemanı.



Şekil A.10 :  $g^{33}$  metrik elemanı.



Şekil A.11 : Manyetik alanın değişimi.



**Şekil A.12** : Jakobiyenin değışimi.

## **EK A.2 : Matlab Kodları**

Bu çalışmada kullanılan MATLAB programı kodları ayrı bir CD'de ek olarak verilmiştir.



## **ÖZGEÇMİŞ**

**Ad Soyad:** Hüseyin Yıldırım

**Doğum Yeri ve Tarihi:** Gaziantep 19.11.1981

**Lisans Üniversitesi:** İTÜ Uzay Müh.

### **Yayın Listesi:**

- Mercimek M., Yıldırım H., Miguel A.F., Aydın M., 2009. Investigation of T Shape Geometry for the Collection of Pollution Particles, Global Conference on Global Warming, Istanbul, Turkey, July 5-9.