

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ BİLİŞİM ENSTİTÜSÜ

**SAYISAL TÖMLEVLEMEDE SENDELENİMSİZLİK
YAKLAŞTIRIMI VE TÖMLEV KATLAMA**

**YÖKSEK LİSANS TEZİ
Berfin KALAY**

Anabilim Dalı : BİLİŞİM

Programı : HESAPLAMALI BİLİM VE MÖHENDİSLİK

ARALIK 2007

**SAYISAL TÖMLEVLEMEDE SENDELENİMSİZLİK
YAKLAŞTIRIMI VE TÖMLEV KATLAMA**

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Berfin KALAY
(702045002)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 28 Aralık 2007
Tezin Savunulduğu Tarih : 28 Ocak 2008

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Metin DEMİRALP
Diğer Jüri Üyeleri Prof. Dr. Serdar ÇELEBİ
Doç. Dr. N. Abdalbaki BAYKARA (Marmara Üniv.)

OCAK 2008

ÖNSÖZ

Bilgi birikimi, deneyimi, anlayışı ve yol gösterimleriyle tezin her aşamasında destek olan hocam Sayın Metin DEMİRALP 'e, bilgi paylaşımında bulunan tüm bilişim enstitüsü üyelerine ve bana her zaman destek olan sevgili aileme teşekkür ederim.

Aralık 2007

Berfin KALAY

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ	iv
ŞEKİL LİSTESİ	v
SEMBOL LİSTESİ	vii
ÖZET	viii
SUMMARY	ix
1. GİRİŞ VE AMAÇ	1
1.1. Sayısal Tümlevlemede Temel Yöntemler	1
1.2. Newton Cotes Bağlantıları (Eşit Ağırlıklı Tümleme)	2
1.3. Tezin Amacı	3
2. GAUSS DÖRDÜLLEMESİ	5
2.1. Genel Giriş	5
2.2. Lagrange Çevirtimi	6
2.3. Sayısal Dördülleme	9
2.4. Gauss Dördüllemesi	10
3. İŞLEVLERİN DİZEY GÖSTERİLİMİNDE SENDELENİMSİZLİK AYRIŞTIRIMI	13
3.1. Giriş	13
3.2. İşlevlerin Dizey Gösteriliminde Sendelenimsizlik Yaklaşırımı	13
3.3. İşlevlerin Dizey Gösteriliminde Sendelenimsizlik Yaklaşırımı Sınama Uygulamaları	23
4. ÖLÇEKLEMELİ TÜMLEV KATLAMA YÖNTEMİ İLE TÜMLEV AYRIŞTIRIMI	31
4.1. Sonlu Aralık Üzerindeki Tümlevlerde Ölçünlüleştirme (Standartlaştırma)	31
4.2. Ölçeklemeli Tümlev Katlama İşlemi	34
4.3. Ortalama Değer Kestirimli, Ölçeklemeli Tümlev Katlama Dördüllemesi Uygulamaları	43
5. SENDELENİMSİZLİK YAKLAŞTIRIMLI VE KATLAMALI SAYISAL TÜMLEVLEME	60
5.1. Yöntemin Kuramsal Tabanı	60
5.2. Örnek Uygulamalar	61
KAYNAKLAR	65
ÖZGEÇMİŞ	66

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 4.1: $e^{\alpha x}$ işlevinin tümlevinin [01] aralığı üzerinde, birim ağırlık altında Ortalama Değer Kestirimli ve ölçeklemeli tümlev katlama yöntemi ile hesaplanan yaklaşık değeri.....	45

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 3.1: $e^{\alpha x}$ işlevi için kesin tümlev değeri ile ilk beş sendelenim yaklaşımlarının α 'ya göre değişimleri.....	27
Şekil 3.2: $(1 + \frac{\alpha x}{10})^{10}$ işlevi için kesin tümlev değeri ile ilk beş sendelenim yaklaşımlarının α 'ya göre değişimleri.....	28
Şekil 3.3: $(\frac{1}{(1 + \alpha x)(1 + 2\alpha x)})$ işlevi için kesin tümlev değeri ile ilk beş sendelenim yaklaşımlarının α 'ya göre değişimleri.....	29
Şekil 4.1: e^x işlevi için $f_0(x)$ (kırmızı) ve $f_1(x)$ (mavi) işlevlerinin $[0,1]$ aralığı üzerinde değişimleri	46
Şekil 4.2: e^{2x} işlevi için $f_0(x)$ (kırmızı) ve $f_1(x)$ (mavi) işlevlerinin $[0,1]$ aralığı üzerinde değişimleri	46
Şekil 4.3: e^{5x} işlevi için $f_0(x)$ (kırmızı) ve $f_1(x)$ (mavi) işlevlerinin $[0,1]$ aralığı üzerinde değişimleri	47
Şekil 4.4: e^{5x} işlevi için $f_0(x)$ (kırmızı) ve $f_1(x)$ (mavi) işlevlerinin $[0,1]$ aralığı üzerinde değişimleri	47
Şekil 4.5: e^x , e^{2x} ve de e^{3x} işlevlerinin $[0,1]$ aralığı üzerinde değişimleri.....	48
Şekil 4.6: Asıl işlevin e^{3x} alındığı durumda $f_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ ve de $\varphi_3(x)$ işlevlerinin $[0,1]$ aralığı üzerinde değişimleri	49
Şekil 4.7: Asıl işlevin $\sqrt{1+3x}$ alındığı durumda $f_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ ve de $\varphi_3(x)$ işlevlerinin $[0,1]$ aralığı üzerinde değişimleri	52
Şekil 4.8: $\sqrt{1+\alpha x}$, $\sqrt{1+2\alpha x}$ ve de $\sqrt{1+3\alpha x}$ işlevlerinin $[0,1]$ aralığı üzerinde değişimleri	52
Şekil 4.9: $\sqrt{1+x}$ işlevi için $f_0(x)$ (kırmızı) ve $f_1(x)$ (mavi) işlevlerinin $[0,1]$ aralığı üzerinde değişimleri	53
Şekil 4.10: $\sqrt{1+4x}$ işlevi için $f_0(x)$ (kırmızı) ve $f_1(x)$ (mavi) işlevlerinin $[0,1]$ aralığı üzerinde değişimleri	53
Şekil 4.11: $\sqrt{1+25x}$ işlevi için $f_0(x)$ (kırmızı) ve $f_1(x)$ (mavi) işlevlerinin $[0,1]$ aralığı üzerinde değişimleri	54
Şekil 4.12: $\sqrt{1+100x}$ işlevi için $f_0(x)$ (kırmızı) ve $f_1(x)$ (mavi) işlevlerinin $[0,1]$ aralığı üzerinde değişimleri	54

Şekil 4.13: Asıl işlevin $(1+x)^{\frac{3}{2}}$ alındığı durumda $f_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ ve de $\varphi_3(x)$ işlevlerinin $[0,1]$ aralığı üzerinde değişimleri	55
Şekil 4.14: $(1+x)^{\frac{3}{2}}$, $(1+10x)^{\frac{3}{2}}$ ve de $(1+100x)^{\frac{3}{2}}$ alındığı durumda işlevlerinin $[0,1]$ aralığı üzerinde değişimler	56
Şekil 4.15: $(1+x)^{\frac{3}{2}}$ işlevi için $f_0(x)$ (kırmızı) ve $f_1(x)$ (mavi) işlevlerinin $[0,1]$ aralığı üzerinde değişimleri	56
Şekil 4.16: $(1+x)^{\frac{3}{2}}$ işlevi için $f_0(x)$ (kırmızı) ve $f_1(x)$ (mavi) işlevlerinin $[0,1]$ aralığı üzerinde değişimleri	57
Şekil 4.17: $(1+x)^{\frac{3}{2}}$ işlevi için $f_0(x)$ (kırmızı) ve $f_1(x)$ (mavi) işlevlerinin $[0,1]$ aralığı üzerinde değişimleri	57
Şekil 4.18: $(1+x)^{\frac{3}{2}}$ işlevi için $f_0(x)$ (kırmızı) ve $f_1(x)$ (mavi) işlevlerinin $[0,1]$ aralığı üzerinde değişimleri	58

SEMBOL LİSTESİ

P	: İzdüşüm operatörü
I	: Birim matris
e	: Birim vektör
δ	: Kronecker delta fonksiyonu
L	: Laplace operatörü

SAYISAL TMLEVLEMEDE SENDELENİMSİZLİK YAKLAŞTIRIMI VE TÜMLEV KATLAMA

ÖZET

Bir tümlevin değerinin istenilen yaklaşıklıkta belirlenmesi, uygulamada pek çok disiplinin en temel problemlerinden biridir. Bir değişkenli tümlevlerin sayısal hesabında kullanılan geleneksel yöntemler Newton-Cotes bağıntıları ve Gauss Dördüllemesi bağıntıları olarak iki temel başlıkta sınıflandırılmaktadır. İşlevin açık yapısının bilinmediği, ancak belli noktalardaki değerlerinin bilindiği durumlarda Newton-Cotes bağıntıları oldukça etkin iken, işlev yapısının bilindiği ve sayısal tümlevleme hesabında kullanılacak noktaların seçimi üzerinde denetimimizin olduğu durumlarda Gauss Dördüllemesi bağıntıları daha hassas yaklaştırım sağlar.

Bu alışmada, Prof. Dr. Metin Demiralp tarafından geliştirilmiş olan ve ‘‘Sendelenimsizlik Yaklaştırımı’’ olarak adlandırılan yeni bir yöntem tanıtılmıştır. İşlevlerin dizey gösterimlerine yeni ve etkin bir yaklaştırım getiren bu olgu, dizey gösterilimini esas almasıyla bile sayısal tmlevlemede kullanılan geleneksel yöntemlerden oldukça farklı bir bakış açısı sunmaktadır ve bir işlevin dizey gösterilimine getirdiği evrensel yaklaştırım çok geniş uygulama alanlarında yer bulacak gibi görünmektedir. Burada ‘‘Sendelenimsizlik Yaklaştırımı’’ işlevin yapısının bilindiği sayısal tümlevleme problemleri için yeni bir yöntem olarak kullanılmış ve çeşitli problemlerle etkinliği sınanmıştır. Daha sonra ‘‘leklemeli tümlev katlama’’ olarak adlandırılabilcek, sayısal tmlevlemede hassasiyet artışı sağlayan yeni bir yöntem geliştirilmiştir ve sonlu aralıkta verilen çeşitli tmlevlere uygulanışı üzerinde durulmuştur. Son olarak sendelenimsizlik yaklaştırımı ile tmlev katlama yönteminin birlikte kullanıldığı ve daha hassas sonuların elde edildiği uygulamalar yapılmıştır.

FLUCTUATIONLESS APPROXIMATION AND INTEGRAL FOLDING AS A METHOD FOR NUMERICAL INTEGRATION

SUMMARY

The integration of various functions can not be performed analytically. Then the numerical integration methods to approximate the integrals are required. This appears the basic issue of many applications. Traditional methods used for univariate numerical integration can be classified as Newton-Cotes formulas and Gauss quadrature formulas. If we have the values of the function tabulated at some points but not the formula of the function, Newton-Cotes formulas work fine. If the function is given explicitly instead of simply being tabulated at any point, the best numerical method of integration is Gaussian quadrature.

In this study, a new fluctuation expansion based method that has been improved by Prof. Dr. Metin Demiralp and simply called “Fluctuationless Expansion” is introduced. This new method brings up a new and effective approximation to matrix representation of functions and also has a very different point of view as a numerical integration method when compared to traditional methods. The universal approximation to matrix representation of a function that is produced by this method seems to appear in many different application areas. Here “Fluctuationless Expansion” is used as a new method for numerical integration of functions explicitly known and the effectiveness is examined on different problems. Later a new method that can be called “Integral Folding” is improved to get better approximation and examined on functions given on a closed interval. Finally both methods are used together to increase the efficiency.

1. GİRİŞ VE AMAÇ

1.1 Sayısal Tümlenmede Temel Yöntemler

Sayısal tümlenme, uygulamada pek çok disiplinin en temel matematiksel sorunlarından biridir ve en genel durumuyla sayısal yöntemler kullanılarak bir tümlenin değerinin istenilen yaklaşıklıkta belirlenmesidir. İşlevin çözümcül (ing: analytic) olarak bilinmediği, evriktürevini almanın zor veya olanaksız olduğu durumlarda sayısal tümlenme bir zorunluluk olarak belirir ve tümleni alınacak işlevin yapısına göre yeğlenen, neredeyse, sayısız yöntem vardır. Tüm sayısal tümlenme yöntemlerinin temelinde, tümlenen işlevin verilen aralıkta seçilmiş noktalarda belirlenmiş olan değerlerini doğrusal olarak birleştirerek tümlene yaklaşım vardır. Yani hesaplamak istediğimiz tümleni

$$\mathcal{I} \equiv \int_a^b dx f(x) \quad (1.1)$$

anlatımından, n sayıda noktadaki $(x_i, \quad 1 \leq i \leq n)$ işlev değerleri ile onlara karşigelen ve ağırlık olarak adlandırılan sayıların (ing: scalar) $(\alpha_i, \quad 1 \leq i \leq n)$ çarpımının toplamı olan

$$\mathcal{I} \approx \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) \quad (1.2)$$

yapıya dönüştürür.

Bir değıskenli tümlenlerin sayısal hesabında kullanılan yöntemler, ayrık x_i noktalarının düzenli aralıklarla seçildiği Newton–Cotes bağıntıları ve elde edilebilen en yüksek yakınsamayı sağlayacak biçimde belli sayıda seçildiği Gauss Dördüllemesi bağıntıları olarak iki temel odakta toplanabilir. Bu yöntemlerin değışik durumlarda birbirlerine göre değışik üstünlükleri ve yetersizlikleri vardır. İşlevin açık yapısının bilinmediği, elimizde belli aralıklarla yapılan ölçümlerin değerlerinin olduğu durumlarda Newton–Cotes bağıntıları oldukça etkin iken, işlev hesabının zor ve karmaşık olduğu ama x_i noktalarının seçimi üzerinde denetimimizin olduğu durumlarda Gauss Dördüllemesi bağıntıları öngörünüme çıkar. Bunların dışında da, ilgilenilen aralığa, kullanılan ağırlığa, tümleni alınacak işlevin özelliklerine göre etkinliği sağlanmış

özel yöntemler de vardır. Bir anlamda, bu tezde sözü edilecek olan ve geliştirilmekte bulunan yöntemler de, en azından geliştirimlerinin ilk anlarında, bu nitelikleri taşımışlardır. Ancak, burada odaklanılacak olanlar dışındakiler üzerinde durulmasına, bu bölümde ve tezin geri kalanında, gerek duyulmamaktadır. Bu arada dışdeğerbiçime dayandırılan Romberg tümlevlemesine de burada değinilmeyecektir.

Yukarıda sözü edilen iki odaktan biri olan Newton–Cote tümlevlemesine, burada, ikinci altbölümde yer verilmektedir. Dördüllemeler ve özellikle Gauss Dördüllemesine ise tezin ikinci bölümünde yer verilmektedir.

1.2 Newton-Cotes Bağntıları (Eşit Aralıklı Tümlevleme)

Bir $[a, b]$ aralığında sürekli olarak tanımlanmış herhangi bir $f(x)$ işlevine, bu aralıkta tanımlı ve bir ölçüt altında istenilen yaklaşıklıkta, sözgelimi n dereceden, bir $P_n(x)$ çokterimlisi bulmak olanaklıdır.

$$\mathcal{I} = \int_a^b dx f(x) = \int_a^b dx P_n(x) + \int_a^b dx \delta(x) \quad (1.3)$$

Burada $\delta(x)$, $f(x)$ işlevinin $P_n(x)$ çokterimlisinden sapmasını betimlemektedir. Newton – Cotes tümlevlemesinde, verilen aralık n eşit alt aralığa bölünür ve bu noktalardan geçen n . dereceden $P_n(x)$ çok terimlisinin tümlevi, işlevin tümlevine yaklaştırım olarak alınır. Lagrange çokterimlilerinin kullanımıyla elde edilen en genel bağntı

$$\mathcal{I} = \int_a^b dx f(x) \approx \int_a^b dx P_n(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \int_a^b dx L_i(x) \quad (1.4)$$

anlatımıyla verilir. Burada

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (1.5)$$

tanımı geçerlidir.

Başlıca Newton-Cotes bağntıları n 'e özel değerler verilerek üretilirler. Bunlardan bir ikisi aşağıda sıralanmaktadır.

Yamuk (Trapez) Kuralı (n=1):

$$\mathcal{I} = \int_a^b dx f(x) = \frac{h}{2} [f(a) + f(b)] - \frac{h^3}{12} f'(\zeta), \quad h = b - a \quad (1.6)$$

Burada ve aşağıdaki bağıntılarda, ζ aralık içinde uygun seçilmiş bir noktayı simgelemektedir.

Simpson Kuralı (n=2):

$$\mathcal{I} = \int_a^b dx f(x) = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta),$$
$$h = \frac{b-a}{2} \quad (1.7)$$

Simpson 3/8 Kuralı (n=3):

$$\mathcal{I} = \int_a^b dx f(x) = \frac{3h}{8} [f(a) + 3f(a+h) + 3f(b-h) + f(b)] - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\zeta),$$
$$h = \frac{b-a}{3} \quad (1.8)$$

Boole Kuralı (n=4):

$$\mathcal{I} = \int_a^b dx f(x)$$
$$= \frac{2h}{45} \left[7f(a) + 32f(a+h) + 12f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 32f(b-a) + 7f(b) \right]$$
$$- \frac{8h^7}{945} f^{(4)}(\zeta), \quad h = \frac{b-a}{4} \quad (1.9)$$

1.3 Tezin Amacı

Tezin başlıca üç amacı bulunmaktadır. Bunlardan birincisi tez danışmanınca “Sendelenimsizlik Yaklaşımı” olarak adlandırılan ve salt tümlev belirleme değil çok daha değişik uygulama alanları da bulan bir olgunun burada ilk kez bir tez kapsamında tanıtılmasıdır. İşlevlerin düzey gösterilimlerine yeni ve etkin bir yaklaşım getiren bu görüş çok değişik uygulama alanları bulacak gibi görünmektedir. Tez danışmanın bu alanda yayınlanan ve inceleme altında bulunan yazıları, çağrılı konuşmaları ve bildirileri bulunmaktadır. Yazar, bu yapı ile ilk kez bu tez çalışması bağlamında karşılaşmış

ve danışmanın yönleğiriminde belli bir düzeyde taban oluşturmuş bulunmaktadır. Bu durum, tezin üçüncü bölümünde, salt tanıtım amaçlı olarak, verilmekte ve dördüncü ile beşinci bölümlere dayanak sağlamak amacını gütmektedir.

Tezin dördüncü bölümünde, özgün olan bir yöntem sunulmaktadır. Kısaca, tümlev katlama olarak adlandırılabilir olan bu yöntem tabanı oluşturan görüş henüz yayınlanmış değildir. Tezini ikinci ve asıl amacının bu görüşü geliştirecek oluşumları sağlayabilecek incelemeler olduğu söylenebilir. Üçüncü ve son olgu bu iki görüşün, yani, sendelenimsizlik yaklaşımla tümlev katlama yönteminin birleştirilmesi amaçlı kısa bir uygulama içermekte ve kısa bir kesim olan beşinci bölümde verilmektedir.

2. GAUSS DÖRDÜLLEMESİ

2.1 Genel Giriş

Sayısal tümlevlemede en çok kullanılan yöntemler topluluğundan birisi de dördülleme (ing: quadrature) adı altında toplanır ve, bu konuda en çok bilgi üreten ya da tabanı oluşturan bilim bireyinin anısına, Gauss Dördüllemesi olarak adlandırılır. Dördüllemedeki taban görüş tümlevi, verilen bir ağırlık altında, bir işlevin belli bir aralıktaki tümlevi olarak yazmaktır. Bu yapılırken iki konuda özen gösterilir. Bunlardan birincisi aralığın uygun seçilmesidir. Genel eğilim, sonlu olarak verilen bir aralık yerine $[0, 1]$ aralığıyla çalışmaktır ve tümlev değişkeni üzerinde uygun bir öteleme ve ölçekleme dönüşümüyle tümlevi her zaman bu aralık üzerine getirmek olanaklıdır. İkinci konu ise ağırlığın uygun seçilmesidir. Genel eğilim onu 1 değerli değişmez işlev olarak seçmekse de, özen gösterilmesi gereken yapı, tümlev aralığı için de ya da aralık dışında aralığa yakın yerlerde tümlevlenecek işlevin herhangi bir tekilliğinin (kutup, dallanma tekilliği, yaıtılmış tekil nokta) bulunmamasıdır. Eğer işlevde böyle bir tekillik yoksa ağırlık işlevini 1 değerli değişmez işlev olarak alabiliriz. Yoksa, işlevin tekilliğini yansıtacak çarpanların işlevden ayrılıp ağırlık işlevine aktarılması gerekir. Böylece, ilgileceğimiz ve sonlu bir aralıkta verildiğini öngördüğümüz tümlevi; $w(x)$ bir ağırlık işlevini yani $[0, 1]$ aralığında, sıfırlanabildiği sonlu sayıda nokta dışında, artı değer alan işlevi simgelemek üzere;

$$\mathcal{I} \int_0^1 dx w(x) f(x) \quad (2.1)$$

anlatımı ile verebiliriz. Burada $f(x)$ işlevinin aralık içinde tekilliği bulunmadığı varsayılmaktadır. Bu öngörümünden sonra yaklaşıtı için taban olarak alınacak görüş, tümlevlenecek olan işlevin bir çokterimli içdeğerbiçimi (ing: interpolation) ile anlatılmasıdır. Bu doğrultuda en yaygın eğilim Lagrange İçdeğerbiçimi olmakla birlikte, Hermite, Birkhoff, ya da Altkesimsel Çokterimli (ing: spline) gibi içdeğerbiçimler kullanılabilir. Böyle yapıldığında dik (ing: orthogonal) çokterimliler gündeme gelir ve türleri kullanılan ağırlığa göre değişir. Bunların her biri ayrı bir dördülleme olup onu ya da ilgili çokterimliyi ilk olarak gündeme getirmiş olan bilim bireyinin adının Gauss

adıyla ikincil olarak birlikte yazılmasıyla oluşan adlarla alınırlar. Yani Gauss dördülmesi diye eşsiz bir yöntem yoktur. Aynı temel görüşü kullanan ama ayrıntılarda değişimler gösteren çok sayıda yöntem vardır ve, ilke olarak, üretilebilecek yöntem sayısı da sonsuzdur. Bunlardan burada, anımsatma amaçlı olarak çok ayrıntıya inmeden söz edilecektir. Bu bağlamda bu bölüm özgün bulgulu nitelikte değil giriş amaçlı olarak düzenlenmektedir.

2.2 Lagrange İçevirtimi

Yalnızca, bir $[a, b]$ aralığında verilen $(n + 1)$ sayıda noktada aldığı değerleri verilmiş olan ve bu aralıkta sürekli olduğu öngörülen bir $f(x)$ işlevini aynı noktalarda bu işlevin değerlerini alan bir $P(x)$ çokterimlisi ile yaklaştıralım.

$$f(x) \approx P(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j, \quad x \in [0, 1] \quad (2.2)$$

Buradaki a_0, \dots, a_n katsayıları bu an için bilinmeyen büyüklükler olarak öngörülmektedirler. Bunların belirlenmesi amacıyla, x_0, \dots, x_n ile simgelenen $(n + 1)$ noktadan i . için

$$f(x_i) = P(x_i) \quad 0 \leq i \leq n \quad (2.3)$$

eşitliğini kullanabiliriz. Böylelikle $(n + 1)$ koşul getirilmiş olur ve bunlar a bilinmeyenleri için bir doğrusal denklem takımı üretir.

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n &= f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_1^n &= f(x_1) \\ &\vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \dots + a_n x_n^n &= f(x_n) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Bu denklemler dizey ve yöneyler üzerinden daha tıkHz biçimde yazılabilir. Bu amaçla,

$$\mathbf{X} \equiv \begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n+11} & \cdots & X_{n+1n+1} \end{bmatrix}, \quad X_{ij} = x_{i-1}^{j-1}, \quad 1 \leq i, j \leq n + 1 \quad (2.5)$$

$$\mathbf{a}^T \equiv [a_0 \dots a_n], \quad \mathbf{f}^T \equiv [f(x_0) \dots f(x_n)] \quad (2.6a, b)$$

dizey ve yöney tanımlamaları yapılırsa

$$\mathbf{Xa} = \mathbf{f} \quad (2.7)$$

yazılabilir. Bu denklemin katsayılar dizeyi Vandermond Dizeyi olarak bilinir ve veri noktalarından, yani x_0, \dots, x_n 'lerden herhangi ikisi birbirine eşit olmadıkça evrtililebilir. Veri noktalarında yineleme olmayacağı akılda tutuldukça, \mathbf{X} 'in evriği vardır ve bu gerçek (2.7)'dan eşsiz çözüm olarak

$$\mathbf{a} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{f} \quad (2.8)$$

anlatımının yazılmasına olanak sağlar. Buradan $P(x)$ çokterimlisinin açık anlatımına geçebilmek için

$$\mathbf{x}^T \equiv [1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^n] \quad (2.9)$$

yöneysel anlatımını kullanacak olursak

$$P(x) = \mathbf{a}^T \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{a} \quad (2.10)$$

yöney tabanlı sayıl (ing: scalar) eşitliklerini yazabiliriz. Burada, \mathbf{a} yöneyinin yukarıda elde edilen anlatımını kullanırsak

$$P(x) = \mathbf{f}^T [\mathbf{X}^{-1}]^T \mathbf{x} \quad (2.11)$$

arasonucuna ulaşırız. Buradaki $[\mathbf{X}^{-1}]^T \mathbf{x}$ yöneyinin her biri x 'in n . dereceden bir çokterimlisi olan öğelerden oluştuğunu kestirmek hiç de zor değildir. Dolayısıyla,

$$[\mathbf{X}^{-1}]^T \mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} L_0(x) \\ L_1(x) \\ \vdots \\ L_n(x) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

yazılabilir ve tanımından görülebileceği gibi bu çokterimliler ilgilenilen işlevden bağımsız yani evrensel nitelikli büyüklüklerdir. Bunların kullanımıyla (2.11) aşağıdaki yapıya büründürülebilir.

$$P(x) = \sum_{i=1}^n L_i(x) f(x_i) \quad (2.13)$$

Ancak, bu anlatımda $L_i(x)$ ile simgelenen büyüklüklerin, n . dereceden evrensel çokterimli olmaları dışında, yapıları açık olarak bilinmemektedir. Bilebilmek için bu eşitliğin her iki yanında x yerine x_j yerleştirerek ve $P(x_j) = f(x_j)$ öngörümünü kullanarak

$$f(x_j) = \sum_{i=1}^n L_i(x_j) f(x_i), \quad 0 \leq j \leq n \quad (2.14)$$

eşitliklerine ulaşabiliriz. Bu eşitliklerin $f(x)$ ne olursa olsun geçerli olması gerekmektedir. Bu zorunluluk sağ yandaki doğrusal birleştirmede $f(x_j)$ dışındaki tüm işlev değerlerinin katsayılarının 0, $f(x_j)$ 'nin katsayısının 1 olmasını gerektirir. Yani,

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad 0 \leq j \leq n \quad (2.15)$$

koşullamaları sağlanmalıdır. Bunlar, $L_i(x)$ çokterimlisinin x_i dışındaki veri noktalarında sıfırlanması gerektiği yani bu noktalarda kökleri bulunması gerektiği anlamına gelir. Dolayısıyla, bu çokterimli, $(x - x_0), \dots, (x - x_{i-1}), (x - x_{i+1}), \dots, (x - x_n)$ çarpanlarının çarpımından oluşmalıdır. Bu çarpım n . dereceden bir çokterimli olacağından $L_i(x_i)$ çokterimlisi bir orantı çarpanı değişmez dışında belirlenmiş olur. Orantı çarpanı ise $L_i(x_i) = 1$ eşitliğini sağlayacak biçimde saptanırsa, sonuçta,

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \quad (2.16)$$

anlatımı elde edilir. Bu çokterimliler Lagrange Çokterimlileri olarak bilinirler.

İçdeğerbiçim çokterimlisi ile gerçek işlevi ne düzeyde yaklaştırabildiğimizi görmek için $S(x)$ sapma işlevini simgelemek üzere

$$f(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x)f(x_i) + S(x) = P(x) + S(x) \quad (2.17)$$

eşitliğinden $S(x)$ için bir anlatım bulmamız yani sapma çözümlemesi (hata analizi) yapmamız gerekir. Bu amaçla,

$$w_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad (2.18)$$

ve

$$F(z) = f(z) - P(z) - [f(x) - P(x)] \frac{w_{n+1}(z)}{w_{n+1}(x)} \quad (2.19)$$

tanımlamaları yaparak yola koyulabiliriz. Özenli bir bakış $F(z)$ işlevinin z 'ye göre, en azından, x 'te ve x_0 'dan x_n 'e dek altsırasayılandırılan değerlerde yerleşik kökleri bulunduğunu gösterir. Dolayısıyla, x değişkeni $[a, b]$ aralığında gezindikçe $F(z)$ 'nin z 'ye göre aynı aralıkta, en azından, $(n + 2)$ sayıda kökü bulunacak demektir.

$F(z)$ işlevini z 'ye göre $(n + 1)$ kez türevlersek

$$F^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - P^{(n+1)}(z) - [f(x) - P(x)] \frac{(n+1)!}{w_{n+1}(x)} \quad (2.20)$$

eşitliğine ulaşırız. Ulaşılan bu yapı $[a, b]$ 'de en azından ζ ile simgelenen bir değerde sıfırlanır. n . dereceden bir çokterimli olan $P(z)$ 'nin $(n+1)$. kereden türevi özdeş olarak sıfır olacağından, (2.19) eşitliği x 'e bağımlı olacak bir $\zeta(x)$ değeri için $z = \zeta(x)$ noktasında

$$\begin{aligned} F^{(n+1)}(\zeta(x)) &= f^{(n+1)}(\zeta(x)) - [f(x) - P(x)] \frac{(n+1)!}{w_{n+1}(x)} \\ &= f^{(n+1)}(\zeta(x)) - S(x) \frac{(n+1)!}{w_{n+1}(x)} = 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

eşitliğine dönüşür. Böylelikle sapma işlevi için

$$S(x) = \frac{w_{n+1}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\zeta(x)) \quad (2.22)$$

anlatımına ulaşırız. Burada görülebildiği üzere eğer işlevin kendisi derecesi n 'i aşmayan herhangi bir çok terimli ise $S(x)$ işlevi özdeş olarak sıfırlanır. Yani, yani $f(x)$ ile $P(x)$ tam olarak örtüşür. Diğer durumlarda ise ilgilenilen işlevin $(n+1)$ kereden türevinin aralık içinde uygun seçilen ve x 'e bağımlı bir noktasındaki değeriyle orantılı bir sapmayla karşılaşılır. Burada, $\zeta(x)$ işlevini saptamanın kolay bir iş olmadığını, gerçekleştirilebilse bile evrensel nitelikte olmayacağı yani $f(x)$ işlevinin yapısına bağımlı olacağını akılda tutmak gerekir.

2.3 Sayısal Dördülleme

Bir $[a, b]$ aralığında tümlemlenebilen gerçel bir $f(x)$ işlevinin $\mathcal{I} = \int_a^b dx f(x)$ tümlevinin sayısal olarak yaklaştırmaya genel olarak "sayısal dördülleme" denir. Bu amaçla, tümlevdeki $f(x)$ işlevi yerine, ona derece artımıyla istenildiği düzeyde yaklaştırmayı sağlayan bir içdeğerbiçim $P_n(x)$ çokterimlisini yerleştirmek ve böylece onun tümlevini belirleyip asıl tümlevin bir yaklaştırmayı olarak kullanmak oldukça geçerli bir yaklaşımdır. Eğer bu eylem önceki alt bölümde anlatılan Lagrange İçdeğerbiçimi üzerinden gerçekleştirilirse, α_i değerleri

$$\alpha_i \equiv \int_a^b dx L_i(x), \quad 0 \leq i \leq n \quad (2.23)$$

özdeşlikleriyle tanımlanmak üzere,

$$\mathcal{I} = \int_a^b dx f(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i) + \int_a^b dx S(x) \quad (2.24)$$

Bu ise yukarıdaki eşitliğin sağındaki tümlev gözardı edilerek

$$\mathcal{I} \equiv \int_a^b dx f(x) \approx \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i) \quad (2.25)$$

yaklaşımına götürür. Bu bağıntı, tümlevin değerinin tümlevlenen işlevin tümlevleme aralığı içindeki uygun seçilen uygun sayıdaki noktadaki değerlerinin bir doğrusal birleşimi olarak yaklaşılabileceğini söylemektedir. Tümlevin kendisinin de sürekli bir sırasaylandırma bağlamında sonsuz terimli bir işlev değerleri doğrusal birleştirimi olduğu anımsanırsa, yukarıdaki yaklaşımın uygun sayıda ve konumda seçilmiş değerler üzerinde doğrusal birleştirim oluşturarak sonsuz terimli olması gereken doğrusal birleştirimi sonlu sayıda terimli bir doğrusal birleştirmeye indirgeceği söylenebilir. Bu indirgemeye “Dördülleme” (ing: quadrature) denir. Dolayısıyla, dördülleme, işlevin seçilmiş belli değerlerde aldığı değerlerin ağırlıklı toplamı olmaktadır. Bu yaklaşımda doğrusal birleştirim oluşturmada kullanılan seçilmiş noktalara “Dördüllemenin Düğüm Noktaları”, doğrusal birleştirmenin katsayılarına da, “Dördüllemenin Ağırlık Değiştiricileri” denir. Düğüm noktalarının nasıl seçildiğine bağlı olarak sapma teriminin tümleve olan (gözardı edilen) katkısı ve dolayısıyla yaklaşımın niteliği de değişir, verilen adı da.

Eğer f işlevi n . ya da daha küçük dereceden bir çokterimli ise, Lagrange içdeğerbiçim çokterimlisi tümlevlenen işlevle tam olarak örtüşeceğinden, dördülleme ile tümleve kesin olarak eşdeğer olan bir yaklaşım sağlanır ve yukarıda tanımlanmış olan sapma terimi $S(x)$ özdeş olarak sıfır olur. Dördüllemeye kaç nokta kullanılıyorsa, onu bir tür kerte gibi nitelendirmek olanaklı olup, n nokta durumunda “ n Noktalı Dördülleme” adı da kullanılır.

2.4 Gauss Dördüllemesi

$[a, b]$ aralığında verilmiş $(n + 1)$ tane nokta x_0, \dots, x_n ile simgelenmek üzere

$$\mathcal{I} = \int_a^b dx W(x) f(x) \quad (2.26)$$

yapısında ağırlıklı bir tümlevi göz önüne alalım. Eğer burada (2.17)’yi kullanırsak

$$\mathcal{I} = \int_a^b dx W(x) P(x) + \int_a^b dx W(x) S(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i) + \int_a^b dx W(x) S(x) \quad (2.27)$$

yazabiliriz.

Birçok dördüllemde düğüm noktaları için öngörümde bulunulur. Sözgelimi, aralığı eşit uzunluklu alt aralıklara bölen noktaların seçilmesi gibi. Gauss Dördüllemesi'nde ise bu doğrultuda bir öngörümde bulunulmaz. Onun yerine, düğüm noktaları, yaklaşıtımda oluşan ve gerçek değerden sapmayı belirleyen kalan terimi en aza indirgeyecek biçimde seçilir. Bu durumu iyice açıklayabilmek için

$$S(x) \equiv f(x) - P(x) \quad (2.28)$$

tanım eşitliğinden yola çıkabiliriz. Özenli bir inceleme, $S(x)$ 'in x_0, \dots, x_n değerlerinde kökleri olduğunu gösterir. Bu ise, $s(x)$ tümleme aralığı içinde sürekli kalan bir işlev olmak üzere,

$$S(x) \equiv \left[\prod_{i=0}^n (x - x_i) \right] s(x) \quad (2.29)$$

yazılabileceği anlamına gelir. Eğer, $s(x)$ 'in $[a, b]$ aralığı üzerinde tümlelenebilen işlevlerce örtülen doğrusal yöney uzayında bulunduğu anımsanırsa ve bu uzay için çokterimlilerden oluşan bir taban takımı oluşturulabileceği akla getirilirse, $s(x)$ 'in bir çokterimliyle yaklaşıtılabileceği anlaşılır. Bu yaklaşıtımda çokterimlisinin x 'in doğalsayı üslülerinin bir doğrusal birleştirimi olarak anlatılabileceği gerçeği, $s(x)$ için n . dereceden bir çokterimli yaklaşıtımda olarak

$$s(x) \approx \sum_{i=1}^n s_i x^i \quad (2.30)$$

yazılabileceği anlamına gelir. Buradaki, yaklaşıtımda çokterimlisinin n . dereceden seçilmesinin nedeni elimizde $(n + 1)$ belirsiz kök bulunması ve onların belirlenmesine yetecek düzeyde koşul üretmek istememizdir. s_0, \dots, s_n katsayılarının $f(x)$ değıştikçe değışebilecek büyüklükler olacağını akıldan çıkarmamak gerekir. $s(x)$ 'in buradaki yaklaşık anlatımı, (2.27)'deki $S(x)$ içeren tümlevi sıfırlayacak biçimde seçilebilir. Yani,

$$\begin{aligned} \int_a^b dx W(x) S(x) &= \int_a^b dx W(x) \left[\prod_{i=0}^n (x - x_i) \right] s(x) \\ &= \int_a^b dx W(x) \left[\prod_{i=0}^n (x - x_i) \right] \sum_{i=0}^n s_i x^i = 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

yazılabilir. Burada s_i 'lerin evrensel olmamaları, onların katsayıları olan tümlevlerin ayrı ayrı 0'a eşit kılınmaları gerektiği anlamına gelir. Yani,

$$\int_a^b dx W(x) \left[\prod_{i=0}^n (x - x_i) \right] x^i = 0, \quad 0 \leq i \leq n \quad (2.32)$$

eşitlikleri geçerli olmalıdır. Bunlar,

$$Q_{n+1}(x) \equiv \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad (2.33)$$

tanımıyla verilen $(n + 1)$. dereceden ve kökler bilinmediği için bu an bilinmeyen $Q_{n+1}(x)$ çokterimlisinin 1'den başlayıp x^n 'de son bulan tekterimlilerin tümüne dik olması gerektiği anlamına gelir. Dolayısıyla, 1, ..., x^n , ... tekterimlilerinden sıra gözetken dikleştirmeyle oluşturulacak çokterimlilerden $(n + 1)$. dereceden olanı $Q_{n+1}(x)$ olacaktır, onun kökleri de aranan düğüm noktaları.

3. İŞLEVLERİN DİZEY GÖSTERİLİMİNDE SENDELENİMSİZLİK AYRIŞTIRIMI

3.1 Giriş

Bu bölümde, tez danışmanınca geliştirilmiş ve geliştirilmekte olan sendelenim açımları kavramlarından sözedilecektir. Bu alanın tez ve tez yazarı açısından özgün bir yanı yoktur. Bu tezdeki asıl özgün görüş ve uygulamalar 4. ve 5. bölümlerde verilecektir. Özellikle, beşinci bölümdeki uygulamaların gereksinim duyduğu kadar kuramsal olgular burada verilecektir. Tez danışmanının yönlendirmeleri doğrultusunda, tez yazarına özgün olmasa da, yazarın tez çalışması sırasında yeterince olgun bir taban oluşturması açısından, kavramsal olarak özgün olmasa da uygulama yapma açısından yeni sayılabilecek betiklemeler ve onlardan alınan sonuçlar burada verilmekte beşinci bölüme sağlam taban hazırlamak istenmektedir.

3.2 İşlevlerin Dizey Gösteriliminde Sendelenimsizlik Yaklaşırımı

$[0, 1]$ aralığı üzerinde sürekli ve dördüllenebilir işlevlerin örttüğü bir Hilbert uzayını \mathcal{H} ile simgeleyelim. Bu uzayda, $g_1(x)$ ve $g_2(x)$ ile simgelenen herhangi iki işlev arasındaki iççarpımın da

$$(g_1, g_2) = \int_0^1 dx w(x) g_1(x) g_2(x) \quad (3.1)$$

eşitliğiyle verildiğini varsayalım. Böylece bu uzaydaki bir $g(x)$ işlevinin boyu da, bu iççarpım üzerinden

$$\|g\| \equiv (g, g)^{\frac{1}{2}} \quad (3.2)$$

eşitliği ile verilir. Burada, aralığın $[0, 1]$ seçilmesiyle genellikle çok az yitim olacağını söylemek olanaklıdır. Bu durum gelecek bölümde daha ayrıntılı olarak gündeme getirilecektir. Ağırlık işlevinde ise birimtümlülük arayacağız. Yani,

$$\int_0^1 dx w(x) = 1 \quad (3.3)$$

öngörümü geçerlidir. \mathcal{H} 'yı örten taban işlevlerinin 1 den başlayan bir sıralamada j . konumda olanını $u_j(x)$ ile, bunların oluşturduğu kümeyi ise \mathcal{U} ile simgelersek

$$\mathcal{U} \equiv \{u_j(x)\}_{j=1}^{\infty} \quad (3.4)$$

yazabiliriz. Bu taban takımının birimboylu ve birbirine dik öğelerden oluşması gerekmez. Ama, hangi takım olursa olsun, yeter ki doğrusal bağımsız öğelerden oluşsun, Gram–Schmidt dikleştirme işlemiyle birimboylu ve birbirine dik öğelerden oluşan bir takıma dönüştürülebilir. Biz de, burada kolaylık açısından ve genellik yitimine neden olmaksızın, bu işlemin yapıldığını ve \mathcal{U} 'nun birimboylu ve birbirine dik öğelerden oluştuğunu yani

$$(u_i, u_j) = \delta_{j,k}, \quad 1 \leq i, j < \infty \quad (3.5)$$

eşitliklerinin geçerli olduğunu varsayacağız.

Artık, \mathcal{H} içinden herhangi bir işleve olan etkisi o işlevin bağımsız değişkenle çarpımı olan bir işleve dönüştürmek olan bir işleci (ing: operator) \hat{x} gündeme getirebilir ve onun matematik dildeki tanımını

$$\hat{x}g(x) \equiv xg(x), \quad g(x) \in \mathcal{H} \quad (3.6)$$

açık anlatımıyla verebiliriz. Özenli bir bakış $xg(x)$ 'in de, $g(x)$ gibi, $[0, 1]$ aralığı üzerinde tümlemlenebilir olduğunu gösterir. Yani, $\hat{x}g(x)$ 'de \mathcal{H} içinde kalır. Bu durum soyutça bir matematik dilde

$$\hat{x} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \quad (3.7)$$

anlatımını yazmamıza olanak sağlar. Daha açık bir anlatımla ise

$$h(x) \equiv \hat{x}g(x) \equiv xg(x), \quad g(x), h(x) \in \mathcal{H} \quad (3.8)$$

yazabiliriz. Dizey gösterilimine geçmek için \mathcal{H} 'daki herhangi bir işlevin \mathcal{U} kümesinin öğeleri üzerinde bir doğrusal birleştirim olarak yazılabileceği gerçeğini akla getirmek gerekir. Yani, $g(x)$ ve $h(x)$ işlevleri için, g_i ve h_i bu an için belirsiz olan, doğrusal birleştirim katsayılarını göstermek üzere

$$g(x) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} g_i u_i(x), \quad h(x) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} h_i u_i(x) \quad (3.9a, b)$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitliklerde toplama indisi olan i j ile değiştirilirse ve her bir eşitliğin her iki yanının u_i ile iççarpımı alınırsa, iççarpımın doğrusallık özelliklerinden yararlanarak

$$(u_i, g) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j (u_i, u_j), \quad (u_i, h) = \sum_{j=1}^{\infty} h_j (u_i, u_j) \quad (3.10a, b)$$

yazılabilir. Burada taban takım öğelerinin diklik ve birim boylulukları akla getirilirse, δ_{ij} Kroenecker'in delta simgesini göstermek üzere

$$(u_i, g) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j \delta_{ij}, \quad (u_i, h) = \sum_{j=1}^{\infty} h_j \delta_{ij} \quad (3.11a, b)$$

ve buradan da

$$g_i = (u_i, g), \quad h_i = (u_i, h), \quad 1 \leq i < \infty \quad (3.12)$$

sonuçlarına ulaşılır. Böylelikle, doğrusal birleştirim katsayıları belirlenmiş olur.

h_i katsayısını $g(x)$ 'in doğrusal birleştirim katsayılarına bağlamak istersek aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$h_i = (u_i, h) = (u_i, \hat{x}g) = \left(u_i, \hat{x} \sum_{j=1}^{\infty} g_j u_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} (u_i, \hat{x}u_j) g_j, \quad 1 \leq i < \infty \quad (3.13)$$

Bu sonsuz sayıda eşitliği tek bir cebirsel anlatım olarak yazabilmek için aşağıdaki sonsuz elemanlı yöney tanımlarını yapabiliriz.

$$\mathbf{g}^T \equiv [g_1 \dots g_n \dots], \quad \mathbf{h}^T \equiv [h_1 \dots h_n \dots] \quad (3.14)$$

Cebirselliği tam olarak sağlamak için sonsuz sayıda yataysıra ile sonsuz sayıda düşeysıra olan bir \mathbf{X} dizeyi öngörüp aşağıdaki anlatımla yapısını açık olarak gösterebilir

$$\mathbf{X} \equiv \begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1n} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ X_{n1} & \cdots & X_{nn} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

ve buradaki dizey öğelerinin genel terimini de

$$X_{ij} \equiv (u_i, \hat{x}u_j) = \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x u_j(x), \quad 1 \leq i, j < \infty \quad (3.16)$$

eşitliği ile açık olarak verebiliriz.

Şimdi, sonsuz boyutlu kartezyen yöneylerin örttüğü, yani \mathbf{g} ve \mathbf{h} 'nın içinde bulunduğu uzayı, kartezyen sözcüğünü çağrıştırmak amacıyla, \mathcal{K} ile simgeleyelim. Bu uzayda bir taban takımı oluşturabilmek için salt i . konumdaki

ögesi 1 diğerleri 0 olan kartezyen yöneyi \mathbf{e}_i ile simgelersek \mathbf{g} ve \mathbf{h} büyüklükleri için

$$\mathbf{g} = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{h} = \sum_{i=1}^{\infty} h_i \mathbf{e}_i \quad (3.17a, b)$$

eşitliklerini yazabiliriz. Bunlar, aynı zamanda,

$$\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty} \quad (3.18)$$

anlatımıyla verilen kümenin \mathcal{K} için bir taban takımı oluşturacağını da belirtirler. Çünkü herhangi bir \mathbf{x} kartezyen yöneyini, (3.17a,b)'deki gibi, bu taban takımının ögeleri üzerinde bir doğrusal birleştirim olarak anlatmak olanaklıdır. \mathcal{K} uzayı aynı zamanda bir iççarpım uzayıdır ve bunu anlatmak için

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{x} \quad (3.19)$$

eşitliğini yazmak yeterlidir. Bu iççarpım tanımını \mathcal{E} takımının ögelerinin birimboylu ve birbirine dik olduğunu gösterir. Yani,

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j < \infty \quad (3.20)$$

eşitlikleri geçerlidir.

(3.13) eşitliğinin cebirsel karşılığı

$$\mathbf{h} = \mathbf{X} \mathbf{g} \quad (3.21)$$

anlatımı ile verilir. Bu ise

$$\mathbf{X} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K} \quad (3.22)$$

anlamına gelir. Bu yazılanlar, $g(x)$, $h(x)$, ve de, \hat{x} ile daha soyut olan \mathcal{H} uzayında çalışmak yerine, \mathbf{g} , \mathbf{h} , ve de, \mathbf{X} ile çok daha somut olan \mathcal{K} uzayında çalışılabileceği anlamına gelir. Bu, sayısal yöntem uygulamaları açısından çok çok önemlidir. \mathbf{g} ile \mathbf{h} kartezyen yöneylerine, sırasıyla $g(x)$ ve $h(x)$ işlevlerinin \mathcal{U} taban takımı üzerinden kartezyen yöney gösterilimi ya da daha kısa olarak “Yöney Gösterilimi” adı verilir. \mathbf{X} ise \hat{x} işlecinin \mathcal{U} takımı üzerindeki “Dizey Gösterilimi” olarak adlandırılır.

Kuşkusuz, sonsuz boyutlu ögelerle kesin olarak uğraşmak, çok çok özel yapılar olmadıkça olanaksızdır. Genel eğilim onlarda belli sayıda ilk ögenin alınmasıyla yaklaşıma gitmektir. Bu amaçla, bu ana dek gündeme getirilen tüm ögelerin sonlu yaklaşımlarını oluşturmak gerekir. Eğer, \mathcal{U} yerine ondan kesme ile üretilen sonlu ögeli

$$\mathcal{U}_n \equiv \{u_j(x)\}_{j=1}^n \quad (3.23)$$

taban takımını gözönüne alırsak ve \mathcal{H} 'nin bu takımın öğelerince örtülen alt uzayını \mathcal{H}_n ile simgelersek bu alt uzaydaki $g^{(n)}(x)$ ile simgelenen herhangi bir işlevi

$$g^{(n)}(x) \equiv \sum_{i=1}^n g_i^{(n)} u_i(x) \quad (3.24)$$

anlatımıyla eşsiz olarak tanımlamak olanaklıdır. Eğer, \hat{x}_{yak} ile simgeleyeceğimiz ve \hat{x} 'e \mathcal{H}_n üzerinde bir yaklaştırım olarak tanımlayacağımız bir işlevi gözönüne alırsak

$$\hat{x}_{yak} : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n \quad (3.25)$$

yazabilir ve $g^{(n)}(x)$ 'in bu işlev altındaki görüntüsünü $h^{(n)}(x)$ ile simgeleyerek

$$h^{(n)}(x) \equiv \hat{x}_{yak} g^{(n)}(x) \quad (3.26)$$

eşitliğine ulaşabiliriz. $g^{(n)}(x)$ için yukarıda yaptığımız gibi $h^{(n)}(x)$ için de

$$h^{(n)}(x) \equiv \sum_{i=1}^n h_i^{(n)} u_i(x) \quad (3.27)$$

doğrusal birleştirimini yazabiliriz. Yukarıda, daha önceden yaptığımız gibi $g^{(n)}(x)$ ile $h^{(n)}(x)$ 'nin doğrusal birleştirim katsayıları arasında aşağıdaki ilişkiyi kurabiliriz.

$$h_i^{(n)} = \sum_{j=1}^n (u_i, \hat{x}_{yak} u_j) g_j^{(n)}, \quad 1 \leq i \leq n \quad (3.28)$$

Buradan,

$$\mathbf{g}^{(n)T} \equiv [g_1 \dots g_n], \quad \mathbf{h}^{(n)T} \equiv [h_1 \dots h_n], \quad 1 \leq n < \infty \quad (3.29)$$

ile

$$\mathbf{X}^{(n)} \equiv \begin{bmatrix} X_{11}^{(n)} & \dots & X_{1n}^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{n1}^{(n)} & \dots & X_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

ve

$$X_{ij}^{(n)} \equiv (u_i, \hat{x}_{yak} u_j) = \int_0^1 dx w(x) u_i(x) \hat{x}_{yak} u_j(x), \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (3.31)$$

tanımlamalarından, $\mathbf{X}^{(n)}$ ile \mathbf{X} 'in ilk n yataysırası ile ilk n düşey sırasının arakesiti olan $n \times n$ kesiminin birebir örtüşmesi için, (3.31)'in yerine

$$X_{ij}^{(n)} \equiv \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x u_j(x), \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (3.32)$$

tanımlamasının kullanımının gerektiği ortaya çıkar. (3.29) ve (3.30)'dan

$$\mathbf{h}^{(n)} = \mathbf{X}^{(n)} \mathbf{g}^{(n)} \quad (3.33)$$

yazılabilir. Bu, \mathcal{K}_n ile simgelenen ve n ögeli kartezyen yöneylerce örtülen uzaydan aynı uzaya bir dönüşüm tanımlar. Yani,

$$\mathbf{X}^{(n)} : \mathcal{K}_n \longrightarrow \mathcal{K}_n \quad (3.34)$$

yazılabilir. (3.28), (3.31), ve de, (3.32)'nin birleştirimi

$$h_i^{(n)} = \sum_{j=1}^n \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x u_j(x) g_j^{(n)} = \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x g^{(n)}(x),$$

$$1 \leq i \leq n \quad (3.35)$$

yazılmasına olanak sağlar. Bu eşitliğin her iki yanını $u_i(x)$ ile çarpılır ve i üzerinde onun alabileceği tüm değerler için ($1 \leq i \leq n$) toplanırsa, ve de, solda oluşacak toplamın $h^{(n)}(x)$ 'e eşdeğer olacağı gözönüne alınırsa

$$h^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x) \int_0^1 dy w(y) u_i(y) y g^{(n)}(y) \quad (3.36)$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ yanını daha tıkmaz yapıya büründürmek için bir takım yeni işleçler tanımlayabiliriz. Bu bağlamda,

$$\widehat{P}_i g(x) \equiv u_i(x) (u_i, g) = u_i(x) \int_0^1 dy w(y) u_i(y) g(y),$$

$$g(x) \in \mathcal{H}, \quad 1 \leq i < \infty \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \widehat{P}_j \widehat{P}_i g(x) &\equiv u_j(x) (u_j, u_i) (u_i, g) = u_j(x) \delta_{ji} (u_i, g) = u_i(x) \delta_{ji} (u_i, g) \\ &= \delta_{ji} \widehat{P}_i g, \quad g(x) \in \mathcal{H}, \quad 1 \leq i, j < \infty \end{aligned} \quad (3.38)$$

Bu eşitlikler üzerindeki özenli bir incelemenin göstereceği gibi, $\widehat{0}$ \mathcal{H} üzerindeki sıfır işlecini göstermek üzere,

$$\widehat{P}_i \widehat{P}_j = \delta_{ij} \widehat{P}_i, \quad 1 \leq i, j < \infty \quad (3.39)$$

eşitlikleri geçerlidir. Bunlar, bu işleçlerin özünedöner (ing: idempotent) nitelik taşıdığını gösterir. Ayrıca, (3.37)'nin ilk eşitliği, $(u_i, g) = g_i$ 'den dolayı \widehat{P}_i 'nin bir izdüşüm işleci olduğunu da gösterir. Bu işleç, \mathcal{H} 'dan $u_i(x)$ 'ce örtülen uzaya dönüşüm yapar, daha doğrusu izdüşürür. Bizim, burada, 1

değil n boyutlu uzaya izdüşüren bir işlece gereksinimimiz bulunmaktadır. Bu amaçla,

$$\widehat{P}^{(n)} \equiv \sum_{i=1}^n \widehat{P}_i, \quad 1 \leq n < \infty \quad (3.40)$$

tanımlaması yapılacak olursa bu işlecin de özünedöner olduğu ve onun da ötesinde \mathcal{H}_n 'e izdüşürdüğü anlaşılır. Yani,

$$\widehat{P}^{(n)} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_n \quad (3.41)$$

yazılabilir. Özenli bir bakış $\widehat{P}^{(n)}$ 'nin \mathcal{H}_n için aynı zamanda birim işleç olduğunu da gösterir. Yani, bu uzayın birim işleci $\widehat{I}^{(n)}$ ile simgelenirse

$$\widehat{P}^{(n)} \equiv \widehat{I}^{(n)} \quad (3.42)$$

yazabiliriz. \mathcal{H}_n 'nin n sonsuza gittikçe \mathcal{H} 'ya gideceği düşünülürse, \widehat{I} \mathcal{H} 'nın birim işlecinin simgelemek üzere, n sonsuza gittikçe $\widehat{P}^{(n)}$ 'in de \widehat{I} 'ya gideceğini söylemek olanaklıdır. Yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{P}^{(n)} = \widehat{I} \quad (3.43)$$

yazılabilir. Bu durum, bir sapma işleci tanımını akla getirir. Böylece,

$$\widehat{S}^{(n)} \equiv \widehat{I} - \widehat{P}^{(n)} \quad (3.44)$$

tanımını yaparak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{S}^{(n)} = \widehat{0} \quad (3.45)$$

yazmak olanaklıdır. $\widehat{S}^{(n)}$ işlecinin bir işleve etkisi, u_i işlevlerinin, i arttıkça çok salınımlı olmasından dolayı, aralık üzerinde tekdüze gezinildiğinde çok sayıda iniş çıkışa neden olur. İngilizce'de bu olay birçok bilim alanında "fluctuation" olarak adlandırılır. Bu terimin TDK'nca öngörülen türkçe karşılıklarından biri "sendelenim" sözcüğüdür. Bu nedenle, burada, $\widehat{S}^{(n)}$ işlecinin "Sendelenim İşleci" olarak adlandıracağız.

Şimdi,

$$\mathbf{X}_2^{(n)} \equiv \begin{bmatrix} X_{2,11}^{(n)} & \cdots & X_{2,1n}^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{2,n1}^{(n)} & \cdots & X_{2,nn}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

ve

$$X_{2,ij}^{(n)} \equiv \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^2 u_j(x), \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (3.47)$$

tanımlamalarıyla verilen dizeyi gözönüne alalım. Bu dizey, aslında, \widehat{x}^2 işlecinin \mathcal{H}_n üzerindeki dizey gösterilimidir. (3.32)'deki tümlev için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned} \int_0^1 dxw(x)u_i(x)x^2u_j(x) &= \int_0^1 dxw(x)u_i(x)x\widehat{I}xu_j(x) \\ &= \int_0^1 dxw(x)u_i(x)x\widehat{P}^{(n)}xu_j(x) \\ &\quad + \int_0^1 dxw(x)u_i(x)x\widehat{S}^{(n)}xu_j(x), \quad 1 \leq i, j \leq n \end{aligned} \quad (3.48)$$

Burada, sendelenim işlecinin içeren tümlev gözardı edilirse,

$$\int_0^1 dxw(x)u_i(x)x^2u_j(x) \approx \int_0^1 dxw(x)u_i(x)x\widehat{P}^{(n)}xu_j(x), \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (3.49)$$

yaklaşımına ulaşılır. \mathcal{K}_n uzayının, kartezyen birim yöneylerinden i 'ncisi $\mathbf{e}_i^{(n)}$ ile simgelenir ve yalnızca i . ögesi 1 diğer tüm ögeleri ise 0 olarak tanımlanırsa bunların birimboylu ve birbirine dik yöneyler olacağı kolayca görülebilir. (3.34)'ün sol yanı bu yöneyleri de kullanarak

$$\int_0^1 dxw(x)u_i(x)x^2u_j(x) \equiv \mathbf{e}_i^{(n)T} \mathbf{X}_2^{(n)} \mathbf{e}_j^{(n)}, \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (3.50)$$

eşitliğinin sağındaki anlatımla yeniden yazılabilir. (3.34)'ün sağ yanındaki tümlev içinse aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned} \int_0^1 dxw(x)u_i(x)x\widehat{P}^{(n)}xu_j(x) &= \sum_{k=1}^n \int_0^1 dxw(x)u_i(x)xu_k(x) \\ &\quad \times \int_0^1 dyw(y)u_k(y)yu_j(y) = \sum_{k=1}^n (u_i, xu_k) (u_k, xu_j) \\ &= \sum_{k=1}^n X_{ik}^{(n)} X_{kj}^{(n)} = \mathbf{e}_i^{(n)T} \left[\mathbf{X}^{(n)} \right]^2 \mathbf{e}_j^{(n)}, \quad 1 \leq i, j \leq n \end{aligned} \quad (3.51)$$

Son üç eşitlik

$$\mathbf{X}_2^{(n)} \approx \left[\mathbf{X}^{(n)} \right]^2 \quad (3.52)$$

yargısına götürür. Bu yargıyı çok daha genel bir yapıya büründürmek olanaklıdır. Bu amaçla,

$$\mathbf{X}_3^{(n)} \equiv \begin{bmatrix} X_{3,11}^{(n)} & \cdots & X_{3,1n}^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{3,n1}^{(n)} & \cdots & X_{3,nn}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

ve

$$X_{3,ij}^{(n)} \equiv \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^3 u_j(x), \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (3.54)$$

tanımlamalarıyla verilen dizeyi gözönüne alabiliriz. Bu dizey de, aslında, \widehat{x}^3 işlecinin \mathcal{H}_n üzerindeki dizey gösterilimidir. Bu işleç için, (3.48)'de yaptığımız gibi,

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^3 u_j(x) &= \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^2 \widehat{T} x u_j(x) \\ &= \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^2 \widehat{P}^{(n)} x u_j(x) \\ &\quad + \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^2 \widehat{S}^{(n)} x u_j(x), \quad 1 \leq i, j \leq n \end{aligned} \quad (3.55)$$

eşitliklerini yazabiliriz. Burada sendelenim işlecinin içeren terim gözardı edilirse

$$\int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^3 u_j(x) \approx \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^2 \widehat{P}^{(n)} x u_j(x), \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (3.56)$$

yazılabilir. Bunun sol ve sağ yanları için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^3 u_j(x) \equiv \mathbf{e}_i^{(n)T} \mathbf{X}_3^{(n)} \mathbf{e}_j^{(n)}, \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^2 \widehat{P}^{(n)} x u_j(x) &= \sum_{k=1}^n \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^2 u_k(x) \\ &\quad \times \int_0^1 dy w(y) u_k(y) x u_j(y) = \sum_{k=1}^n (u_i, x^2 u_k) (u_k, x u_j) \\ &= \sum_{k=1}^n X_{2,ik}^{(n)} X_{kj}^{(n)} = \mathbf{e}_i^{(n)T} \left[\mathbf{X}_2^{(n)} \mathbf{X}^{(n)} \right] \mathbf{e}_j^{(n)}, \quad 1 \leq i, j \leq n \end{aligned} \quad (3.58)$$

Bunlar

$$\mathbf{X}^{(n)} \approx \mathbf{X}_2^{(n)} \mathbf{X}^{(n)} \quad (3.59)$$

ve (3.52)'den

$$\mathbf{X}_3^{(n)} \approx \left[\mathbf{X}^{(n)} \right]^3 \quad (3.60)$$

yazılmasına olanak sağlar. Matematiksel tümevarım ile buradan genel bir yaklaşıtırm çıkarabilmek için

$$\mathbf{X}_k^{(n)} \equiv \begin{bmatrix} X_{k,11}^{(n)} & \cdots & X_{k,1n}^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{k,n1}^{(n)} & \cdots & X_{k,nn}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

ve

$$X_{k,ij}^{(n)} \equiv \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^k u_j(x), \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (3.62)$$

tanımlamalarıyla verilen dizeyi gözönüne alabiliriz. Bu dizey de, aslında, \hat{x}^k işlecinin \mathcal{H}_n üzerindeki dizey gösterilimidir. Bu dizey için

$$\mathbf{X}_k^{(n)} \approx \left[\mathbf{X}^{(n)} \right]^k \quad (3.63)$$

anlatımının geçerli olduğu varsayılırsa genelleştirmeyi sağlamak için bunun k yerine $(k+1)$ konulduğunda da geçerli kalacağını kanıtlamak gerekir. Bu amaçla, (3.62)'nin sağ yanında k yerine $(k+1)$ yerleştirerek elde edilen yapı için, (3.48) ve (3.55)'te yaptığımız gibi,

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^{k+1} u_j(x) &= \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^k \hat{I} x u_j(x) \\ &= \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^k \hat{P}^{(n)} x u_j(x) \\ &\quad + \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^k \hat{S}^{(n)} x u_j(x), \quad 1 \leq i, j \leq n \end{aligned} \quad (3.64)$$

yazabilir ve sendelenim işleçli terimleri gözardı ederek

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^{k+1} u_j(x) &\approx \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^k \hat{P}^{(n)} x u_j(x), \\ &1 \leq i, j \leq n \end{aligned} \quad (3.65)$$

Bu yaklaşımdan, yukarıda benzerlerinde izlediğimiz yolu bu durum için uyarlayarak (3.63)'ün k yerine $(k+1)$ konulduğundaki yaklaşıma üretebiliriz. Böylece, tümevarımla kanıtlama bitirilmiş olur.

Artık, bir işlevin dizey gösterilimiyle ilgilenebiliriz. Bu amaçla,

$$\int_0^1 dx w(x) u_i(x) f(x) u_j(x) \equiv \mathbf{e}_i^{(n)T} \mathbf{F}^{(n)} \mathbf{e}_j^{(n)}, \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (3.66)$$

tanımı yapılacak olursa ve $f(x)$ işlevinin tümleme bölgesi içinde yakınsak olan aşağıdaki serisel açılıma sahip olduğu öngörülürse, yani

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k \quad (3.67)$$

yazılır ve (3.66)'da kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_i^{(n)T} \mathbf{F}^{(n)} \mathbf{e}_j^{(n)} &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k \int_0^1 dx w(x) u_i(x) x^k u_j(x) \\
&\approx \sum_{k=0}^{\infty} f_k \mathbf{e}_i^{(n)T} [\mathbf{X}^{(n)}]^k \mathbf{e}_j^{(n)} \\
&= \mathbf{e}_i^{(n)T} \sum_{k=0}^{\infty} f_k [\mathbf{X}^{(n)}]^k \mathbf{e}_j^{(n)} \\
&= \mathbf{e}_i^{(n)T} \left(\mathbf{X}^{(n)} \right) \mathbf{e}_j^{(n)}, \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (3.68)
\end{aligned}$$

ve buradan da

$$\mathbf{F}^{(n)} \approx f \left(\mathbf{X}^{(n)} \right) \quad (3.69)$$

sonucuna ulaşılır. Bu sonucun anlattığı önemli gerçek, “Sendelenim işleci içeren terimler gözardı edildiğinde, bir işlevin dizey gösterilimi, o işlevde bağımsız değişken yerine bağımsız değişkenin dizey gösteriliminin yerleştirilmesiyle elde edilen dizey işleve eşdeğerdir. Kuşkusuz, burada dizey gösterilimi derken \mathcal{H}_n üzerinde dizey gösterilimi anlatılmak istenmektedir. Buradaki alt uzay boyutu n 'in sonsuza gitmesi durumunda (3.69)'un kesin bir eşitliğe dönüşeceğini akıldan çıkarmamak gerekir. Çünkü, bu gerçek, (3.69)'daki yaklaşımda kalitesinin n arttıkça artacağı anlamına gelir ve sayısal uygulamalarda yeterince büyük n değerleri için böyle bir artış gözlenmezse bir yerlerde yanlış aramak gerektiği düşünülmelidir.

3.3 İşlevlerin Dizey Gösteriliminde Sendelenimsizlik Yaklaşımını Sınama Uygulamaları

$$\mathcal{I} \equiv \int_0^1 dx f(x) \quad (3.70)$$

Tümlevini gözönüne alalım. Buna sendelenimsizlik yaklaşımını uygulamak amacıyla \mathcal{H} uzayımızda iççarpımda ağırlık işlevi olarak 1 değişiminin alındığını varsayalım.

$$w(x) \equiv 1, \quad x \in [0, 1] \quad (3.71)$$

Bu uzay için bağımsız değişkenin, sıradan, doğalsayı üslülerini taban takımı olarak alalım.

$$\mathcal{V} \equiv \{x^{i-1}\}_{i=1}^{\infty} \quad (3.72)$$

Aynı yoldan, \mathcal{H}_n için de

$$\mathcal{V}_n \equiv \{x^{i-1}\}_{i=1}^n \quad (3.73)$$

taban takımını gözönüne getirelim. Bu taban takımları birbirine dik ve birimboylu ögelerden oluşmamaktadırlar. Dolayısıyla, bu özellikleri olan ögelerden oluşan takımlara dönüştürülmelidirler. Bu amaçla Gram–Schmidt Dikleştirme Yöntemi kullanılabilirse de, biz, burada başka bir yol izleyeceğiz ve salt \mathcal{V}_n takımına odaklanmakla yetineceğiz. Çünkü, bunun $n \rightarrow \infty$ için alacağı durum \mathcal{V} 'den başka bir şey değildir.

Şimdi,

$$G_{ij}(\mathcal{V}_n) \equiv (v_i, v_j) \equiv \int_0^1 dx v_i(x) v_j(x), \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (3.74)$$

olmak üzere

$$\mathbf{G}(\mathcal{V}_n) \equiv \begin{bmatrix} G_{11}(\mathcal{V}_n) & \cdots & G_{1n}(\mathcal{V}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1}(\mathcal{V}_n) & \cdots & G_{nn}(\mathcal{V}_n) \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

dizeyini tanımlayalım. Bu dizey, \mathcal{V}_n taban takımının Gram Dizeyi olarak da bilinir. Bu dizeyin artı tanımlı olduğunu göstermek hiç de zor değildir. Gerçekten de,

$$\mathbf{c}^T \equiv [c_1 \dots c_n] \quad (3.76)$$

ve

$$d(\mathbf{c}) \equiv \mathbf{c}^T \mathbf{G} \mathbf{c} \quad (3.77)$$

tanımlarını yaparsak

$$\begin{aligned} d(\mathbf{c}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j G_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i c_j (v_i, v_j) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n c_i v_i, \sum_{j=1}^n c_j v_j \right) = \left\| \sum_{i=1}^n c_i v_i \right\|^2 > 0 \end{aligned} \quad (3.78)$$

yargısına varabiliriz. son bağıntının en sağındaki boy dördülü, ancak ve ancak, içerdiği doğrusal birleştirmenin 0 olması durumunda sıfırlanabilir. Bu ise, ancak ve ancak, \mathcal{V}_n takımı ögelerinin aralarında doğrusal bağımlı olmaları durumunda gerçekleşebilir. Böyle bir durum ise taban takımı olmakla çelişir. Yani, (3.78)'daki $>$ simgesinin eşitliği de içerir duruma düşmesi olanaksızdır. Son eşitlik $d(\mathbf{c})$ dördül işlevinin \mathbf{c} ne olursa olsun artı kalacağını söylemektedir. Bu ise, yukarıdaki $\mathbf{G}(\mathcal{V}_n)$ dizeyinin artı tanımlı olduğu anlamına gelir.

Yukarıdaki, $\mathbf{G}(\mathcal{V}_n)$ dizeyinin bakışık olduğunu görmek kolaydır. Bakışık ve artı tanımlı bir dizeye Cholesky Ayrıştırımı uygulanabilir. Dolayısıyla, \mathbf{L} bir alt üçgen dizey olmak üzere,

$$\mathbf{G}(\mathcal{V}_n) \equiv \mathbf{L} \mathbf{L}^T \quad (3.79)$$

tanımını yazabiliriz. Eğer,

$$\mathbf{v}^T(x) \equiv [v_1(x) \dots v_n(x)] \quad (3.80)$$

yöney tanımına gidecek olursak yukarıdaki Gram Dizeyini

$$\mathbf{G}(\mathcal{V}_n) \equiv \int_0^1 dx \mathbf{v}(x) \mathbf{v}^T(x) \quad (3.81)$$

anlatımıyla da verebiliriz. Bu ise

$$\mathbf{L}\mathbf{L}^T = \int_0^1 dx \mathbf{v}(x) \mathbf{v}^T(x) \quad (3.82)$$

eşitliğine ve \mathbf{L} 'nin evirtilebilir olmasından dolayı, \mathbf{I} ($n \times n$) türünde birim dizeyi simgelemek üzere,

$$\mathbf{I} = \int_0^1 dx \mathbf{L}^{-1} \mathbf{v}(x) (\mathbf{L}^{-1} \mathbf{v}(x))^T \quad (3.83)$$

eşitliğine dönüştürülebilir. Burada,

$$\mathbf{u}(x) \equiv \mathbf{L}^{-1} \mathbf{v}(x) \quad (3.84)$$

tanımı yapılırsa,

$$\int_0^1 dx \mathbf{u}(x) \mathbf{u}^T(x) \equiv \mathbf{G}(\mathcal{U}) = \mathbf{I} \quad (3.85)$$

sonucuna ulaşılabilir. Buradan,

$$\int_0^1 dx u_i(x) u_j(x) \equiv (u_i, u_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (3.86)$$

yargısına varılabilir ki, bu da,

$$\mathcal{U}^{(n)} \equiv \left\{ \mathbf{e}_i^{(n)T} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{v}(x) \right\}_{i=1}^n \quad (3.87)$$

olarak tanımlanan $\mathcal{U}^{(n)}$ takımının birbirine dik ve birimboylu öğelerden oluştuğu anlamına gelir. Yani, $\mathcal{U}^{(n)}$ kullanmak istediğimiz takımdır. Böylelikle, Gram–Schmidt Dikleştirme eylemini Cholesky Ayrıştırımı'na dayandırarak elde etmiş olduk. MuPAD'te işlevlerin tümlevli bir iççarpım üzerinden dikleştirilmesi için bir yordam bulunmamaktadır. Dolayısıyla, bu yolun yeğlenmesinin anlamlı olduğu ortaya çıkar. Bu dikleştirme yöntemini adımlarıyla kısa yoldan vermek istersek aşağıdaki adımları salık verebiliriz:

- 1) Verilen bir iççarpım altında dikleştirilecek taban takımının Gram Dizeyi oluşturulur;

- 2) Gram Dizeyine Cholesky Ayrıştırımı uygulanarak bir alt üçgen dizey elde edilir;
- 3) Taban takımı işlevlerini aynı sırayla öge olarak alan bir kartezyen yöney oluşturulur;
- 4) Bu kartezyen yöney (2)'deki alt üçgen dizeyle soldan çarpılır. Oluşan yöneyin ögeleri, elde edilmek istenen ve ögeleri aralarında dik ve birimboylu işlevler olan taban takımını oluştururlar.

Yukarıda varılan sonuçlar salt 1 değişmezine eşit ağırlıklar için geçerli değildir. Aslında, incelemelerimizde, ağırlık işlevinin 1 değişmezi olmaması durumunda ortaya çıkabilecek bir uyumsuzluk da yoktur. Yeter ki, $w(x)$ gerçekten bir ağırlık işlevi olsun.

Buradaki uygulamalarda n değerini en çok 5 olarak seçmemiz çok yüksek sayılabilecek duyarlıklara çıkmamıza olanak sağlamaktadır. Bu nedenle, yukarıdaki dikleştirme sonrasında elde edilen işlevlerden yalnızca ilk 5'inin burada açık olarak verilmesiyle yetinilecektir.

$$\begin{aligned}
u_1(x) &\equiv 1 \\
u_2(x) &\equiv \sqrt{3}(2x - 1) \\
u_3(x) &\equiv \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1) \\
u_4(x) &\equiv \sqrt{7}(20x^3 - 30x^2 + 12x - 1) \\
u_5(x) &\equiv \sqrt{9}(70x^4 - 140x^3 + 90x^2 - 20x + 1)
\end{aligned} \tag{3.88}$$

Burada $\sqrt{9}$ terimi yerine, genel yapı daha kolay görülebilsin istendiği için, 3 yazılmamıştır. Görüldüğü gibi, taban takımı olarak çokterimliler elde edilmiştir ve bunlar bilimsel yazında Legendre çokterimlileri diye bilinenleriyle çok yakından ilişkilidir.

Şimdi, (3.70)'i, $u_1 = 1$ gerçeğinden yararlanarak aşağıdaki biçimde yeniden yazabiliriz.

$$\mathcal{I} = \int_0^1 dx f(x) \equiv \int_0^1 dx u_1(x) f(x) u_1(x) = (u_1, f(\hat{x})u_1) = \mathbf{e}^{(n)T} \mathbf{F}^{(n)} \mathbf{e}^{(n)} \tag{3.89}$$

Burada $\mathbf{F}^{(n)}$, $f(x)$ işlevinin daha önceden sözü edilen dizey gösterilimini simgelemektedir. Eğer, burada, sendelenimsizlik yaklaştırımı gündeme getirilecek olursa

$$\mathcal{I} \approx \mathbf{e}^{(n)T} f(\mathbf{X}^{(n)}) \mathbf{e}^{(n)} \tag{3.90}$$

yazılabilir.

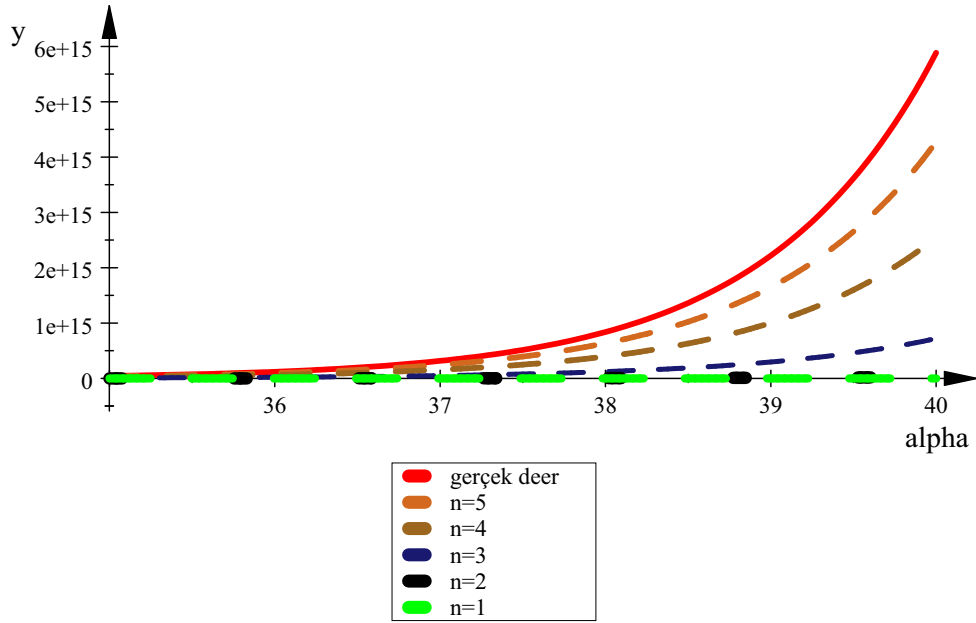
İlk olarak bu yaklaşımın

$$f(x) \equiv e^{\alpha x} \quad (3.91)$$

işlevine uygulanmasını gündeme getirebiliriz. bu işlevin tümlevi analitik olarak verilebilmektedir.

$$\int_0^1 dx f(x) \equiv \frac{e^\alpha - 1}{\alpha} \quad (3.92)$$

Bu işlev için analitik sonucun ve kerteleri 1'den başlayıp 5'te sonlanan sendelenim yaklaşımlarının α değıştirgesine göre değışimleri Şekil 3.1'de verilmektedir.



Şekil 3.1: $e^{\alpha x}$ işlevi için kesin tümlev değeri ile ilk beş sendelenim yaklaşımlarının α 'ya göre değışimleri.

Bu eğrilerden kırmızı boyalı ve sürekli olanı tümlevin analitik olarak elde edilen kesin anlatımına karşılık gelmektedir. Diğer eğrilerden yeşil olanı birinci, siyah olanı ikinci, geceyarısı mavisi olanı üçüncü, tuğla kırmızısı dördüncü, ve de, çikolata rengi olanı beşinci kertenin sendelenimsizlik yaklaşımlarına karşılık gelmektedir. Burada kerte n değerine yani kullanılan alt uzayın boyutuna karşılık gelmektedir. Kerte artışının nitelikte çok hızlı artışlara neden olduğü bu çizimdeki eğrilerden kolaylıkla anlaşılmaktadır. Gözlemlerimizde α değıştirgesinin değışim aralığı olarak $[0, 40]$ seçilmiştir. Burada açık olarak verilmemekle birlikte vurgulanmasında büyük yarar olan gerçek, $\alpha = 1$ dolaylarında, beşinci kertenin yaklaşımda kesin tümlev

değerinin elde edilen ondalık basamaklarının sayısının 9 ya 10 gibi değerler almasıdır. α arttıkça duyarlık yitimi de artmaktadır. Bu da doğaldır ve 4. ile 5. bölümlerde ayrımlarını vereceğimiz tümlev katlama teknikleriyle bu yitimi geri kazanmak olanaklıdır. Öyle yapılmazsa kerte artımına gidilmesi gerekecektir ki bu da, bugünün bilgisayar olanakları çerçevesinde, pek de zor bir eylem değildir.

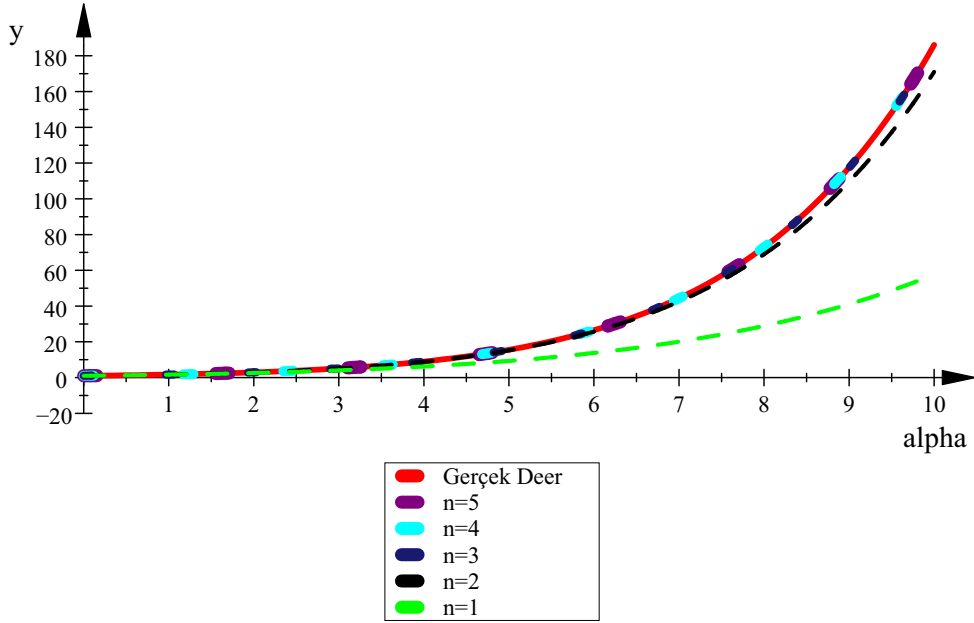
İkinci olarak sendelenimsizlik yaklaşımının

$$f(x) \equiv \left(1 + \frac{\alpha x}{10}\right)^{10} \quad (3.93)$$

işlevine uygulanmasını gündeme getirebiliriz. bu işlevin tümlevi analitik olarak verilebilmektedir.

$$\int_0^1 dx f(x) \equiv \frac{10 \left(1 + \frac{\alpha}{10}\right)^{m+1} - 1}{11\alpha} \quad (3.94)$$

Bu işlev için analitik sonucun ve kerteleri 1'den başlayıp 5'te sonlanan sendelenim yaklaşımlarının α değiştirgesine göre değişimleri Şekil 3.2'de verilmektedir.



Şekil 3.2: $\left(1 + \frac{\alpha x}{10}\right)^{10}$ işlevi için kesin tümlev değeri ile ilk beş sendelenim yaklaşımlarının α 'ya göre değişimleri.

Bu eğrilerden kırmızı boyalı ve sürekli olanı tümlevin analitik olarak elde edilen kesin anlatımına karşılık gelmektedir. Diğer eğrilerden yeşil olanı birinci, siyah olanı ikinci, geceyarısı mavisi olanı üçüncü, siyanür mavisi olanı dördüncü, ve de, mor olanı beşinci kereden sendelenimsizlik yaklaşımlarına karşılık gelmektedir. Burada da kerte n değerine yani kullanılan alt uzayın boyutuna karşılık gelmektedir. Bu çizimde de, kerte artışının nitelikte çok hızlı artışlara neden olduğ̃ bu çizimdeki eğrilerden kolaylıkla anlaşılmaktadır. Gözlemlerimizde α değıştirgesinin değışim aralığı olarak $[0, 10]$ seçilmiştir. Önceki çizim eğrileri için söylenenlere ek olarak burada tam çakışmanın gözleendiğinin de birlikte vurgulanmasında büyük yarar bulunmaktadır.

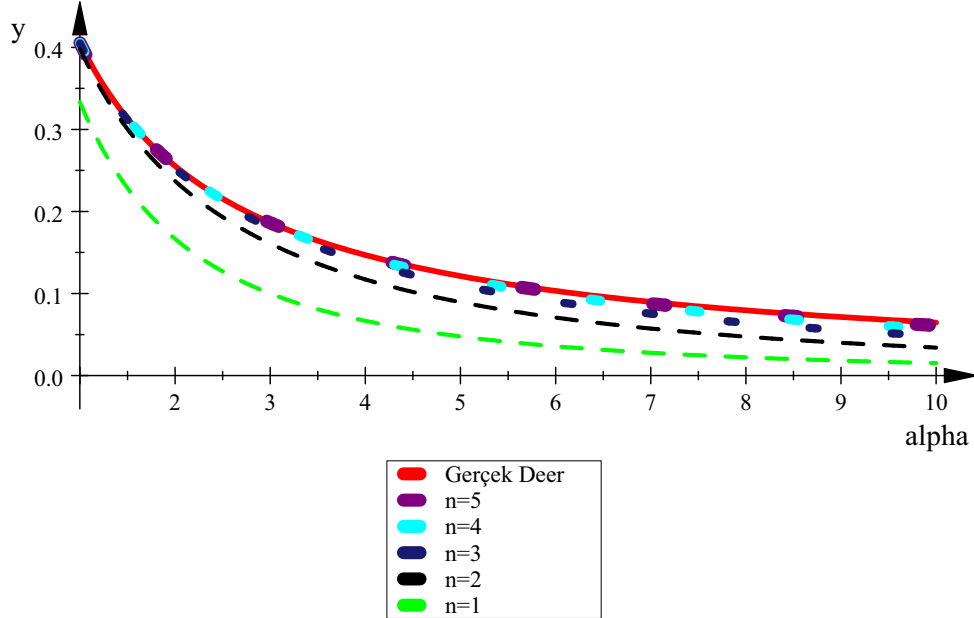
Üçüncü olarak sendelenimsizlik yaklaşımının

$$f(x) \equiv \frac{1}{(1 + \alpha x)(1 + 2\alpha x)} \quad (3.95)$$

işlevine uygulanmasını gündeme getirebiliriz. bu işlevin tümlevi analitik olarak verilebilmektedir.

$$\int_0^1 dx f(x) \equiv -\frac{1}{\alpha} \ln(1 + \alpha) + \frac{1}{\alpha} \ln(1 + 2\alpha) \quad (3.96)$$

Bu işlev için analitik sonucun ve kerteleri 1'den başlayıp 5'te sonlanan sendelenim yaklaşımlarının α değıştirgesine göre değışimleri Şekil 3.3'te verilmektedir.



Şekil 3.3: $\frac{1}{(1+\alpha x)(1+2\alpha x)}$ işlevi için kesin tümlev değeri ile ilk beş sendelenim yaklaşımlarının α 'ya göre değışimleri.

Bu eğrilerden kırmızı boyalı ve sürekli olanı tümlevin analitik olarak elde edilen kesin anlatımına karşılık gelmektedir. Diğer eğrilerden yeşil olanı birinci, siyah olanı ikinci, geceyarısı mavisi olanı üçüncü, siyanür mavisi olanı dördüncü, ve de, mor olanı beşinci kereden sendelenimsizlik yaklaşımlarına karşılık gelmektedir. Burada da kerte n değerine yani kullanılan alt uzayın boyutuna karşılık gelmektedir. Bu çizimde de, kerte artışının nitelikte çok hızlı artışlara neden olduğ^u bu çizimdeki eğrilerden kolaylıkla anlaşılmaktadır. Gözlemlerimizde α değıştirgesinin değışim aralığı olarak $[0, 10]$ seçilmiştir. Önceki çizim eğrileri için söylenenler burada da geçerliliğini korumaktadır.

Bundan önceki iki uygulamada da, $f(x)$ 'in sonlu x değerlerinde tekilliğı olmadığı açıktır. Üstelik, ikinci uygulamada işlev olarak bir çokterimli seçilmiştir. Bu uygulamada ise işlevin eksi x değerlerinde, iki, kutup türü, tekilliğı bulunmaktadır. Ancak, onların bu çizimlerden görünür bir katkıları olmadığını söylenebileceğinin akla geleceğini yadsımamak gerekir. Yine de buradaki çizimlerdeki α değerleri dışındaki α 'lar için beklenmedik gözlemlerle karşılaşılabilceğinin akılda tutulması gerekmektedir. Bu tür yaygın gözlemler, bu tez çalışmasında, gerçekleştirilmemiştir. Değışik bir iki işlev için değışik amaçlı uygulamalar gelecek iki bölümde verilecektir.

4. ÖLÇEKLEMELİ TÜMLEV KATLAMA YÖNTEMİ İLE TÜMLEV AYRIŞTIRIMI

4.1 Sonlu Aralık Üzerindeki Tümlevlerde Ölçünlüleştirme (Standartlaştırma)

Bu alt bölümde, ölçeklemeli tümlev katlama yönteminin sonlu bir aralık üzerinde tanımlanan tümlevlere uygulanışı üzerinde duracak ve öncelikle tümlevin, hangi sonlu aralık üzerinde verilmiş olursa olsun, $[0, 1]$ aralığı üzerinde bir tümleve dönüştürülmesini gerçekleştireceğiz. Bu amaçla, önce, üzerinde duracağımız tümlevi tanımlayalım.

$$\mathcal{I} \equiv \int_a^b dx w(x) f(x) \quad (4.1)$$

Burada a ve b , ikincisi birincisinden büyük olarak verilen ve sonlu değerleri olan gerçel sayılar olarak öngörülmekte $w(x)$ ile bir ağırlık işlevi, yani tümlevleme aralığı üzerinde ancak sonlu kez 0 değeri alabilen onun dışında artı değerli olan, işlev gösterilmektedir. $f(x)$ ise, x yerine z karmaşık bağımsız değişkenine bağımlı olarak düşünüldüğünde, z -karmaşık düzleminde $[a, b]$ aralığını içine alan bir bölgede çözümlü (analitik) olan bir işlevi simgelemektedir. Kuşkusuz, bu çözümlülüğün her verilen tümlevde ille de bulunması gerekmez. Sözelimi,

$$\mathcal{J} \equiv \int_a^b dx \frac{e^{-x}}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} \quad (4.2)$$

tümlevinde tümlevlenen işlevin $x = a$ ve $x = b$ 'de, yani aralık uç noktalarında, dallanma tekillikleri bulunmaktadır. Eğer bu tümlevde $w(x)$ 'i her yerde 1 olan bir işlev olarak düşünürsek, yukarıda $f(x)$ 'in analitikliği, ya da daha arı türkçe karşılığıyla çözümlülüğü, sağlanamamış olur. Yani, burada $w(x) \equiv 1$ seçilemez. Analitikliğin sağlanması için

$$w(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} \quad (4.3)$$

seçilmesi, ya da daha genel anlatımıyla, $x = a$ ve $x = b$ 'deki tekilliğin salt $w(x)$ yapısında görüneceği bir ağırlık tanımına gidilmesi gerekir. Böyle yapılırsa, daha doğrusu, (4.3) ataması benimsenirse, (4.2) yerine

$$\mathcal{J} \equiv \int_a^b dx w(x) e^{-x} \quad (4.4)$$

eşitliğine ulaşılır. Görüldüğü gibi, burada, $f(x)$ işlevi e^{-x} olarak alınmak durumundadır ve bu işlevin herhangi bir sonlu x gerçel değerinde ya da, karmaşık düzleme genelleştirildiğinde, herhangi bir sonlu karmaşık z değerinde tekilliği yoktur. Yani çözümcülük koşulu sağlanır duruma getirilmiş olmaktadır. Bu durum, neden $w(x)$ ağırlığının kullanım gereksinimi olduğunu açıkça ortaya koymaktadır.

Yukarıda, $w(x)$ üzerinde, ağırlık işlevi olma yani aralık içinde sonlu sayıda noktada 0 değeri alma dışında herhangi bir öngörümde bulunulmamıştı. Ancak, bu işlevin, tekillikleri barındırma dışında bazı özellikler taşıması, ileride kullanacağımız bazı olgulara destek verebilmesi açısından, yeğlenebilecek bir durumdur. Bunlar arasında, özellikle, iki odak noktasından söz edilebilir. Birincisi, bu işlevin geliştirilmekte olan yöntemin gereksinim duyduğu bazı tümlevlerin analitik olarak alınabilmesi ya da sayısal bile olsa sorun çıkarmadan tümlevleme olanağı sağlayacak yapıda olmasıdır. İkinci odak ise bağımsız değişkenin eksi imlenmesi durumunda da artı imli durumla eşdeğer nitelikler taşımasıdır. Yani, artıkalın (çift, ing: even) ve eksilenen (tek, ing: odd) bileşenlere ayrılabilir yapıda bulunmalıdır.

Artık, (1) ile verilen tümlevde ölçünlüleştirme yoluna gidebiliriz. Bu amaçla, tümlevde

$$y \equiv \frac{x - a}{b - a} \quad (4.5)$$

değişken dönüşümü gerçekleştirebiliriz. Bu dönüşümün evriği (tersi)

$$x \equiv (b - a)y + a \quad (4.6)$$

anlatımıyla verilir. Bu dönüşüm sonrası (1)'in elde edilecek yeni yapısı

$$\mathcal{I} \equiv (b - a) \int_0^1 dy w((b - a)y + a) f((b - a)y + a) \quad (4.7)$$

anlatımındadır. Eğer burada

$$\bar{w}(y) \equiv (b - a)w((b - a)y + a) \quad (4.8)$$

$$\bar{f}(y) \equiv f((b - a)y + a) \quad (4.9)$$

tanımlamaları yapılır ve tümlevleme değişkeni olan y yerine, başta kullanılan, x simgesi yazılacak olursa (böyle yapılması, y 'nin de x 'in de sessiz, – ing: dummy – değişken olması, yani sonuçta gözükmemesi nedeniyle, tümlevin değerini değiştirmez) aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\mathcal{I} = \int_0^1 dx \bar{w}(x) \bar{f}(x) \quad (4.10)$$

Bu yapıda, işlevlerin yapıları değişmiş olsa da özelliklerinde değişiklik olmaması nedeniyle (4.1)'de salt tümlevleme sınırlarının değişmiş olduğunu dile getirmek olanaklıdır. Yani tümlevleme aralığı ölçünlüleştirilmiştir. Böylelikle bu alt bölümün amacına ulaşılmış olunmaktadır. Ancak, yine de bir iki önemli sayılabilecek konuya değinmeden bu alt bölümü kapamak yerinde olmayacaktır.

Bunlardan birincisi, tümlevin aralığını, ölçünleştirme öncesinde, alt aralıklara ayırıp tümlevi herbiri bu alt aralıklardan biri üzerinde tanımlı tümlevlerin toplamı olan bir anlatımla yazmaktır. Bu eylemin ardından herbir alt aralık üzerinde ölçünlüleştirmeye gidilebilir. Sonuçta, toplam tümlev yine $[0, 1]$ aralığı üzerinde tek bir tümlev durumuna girecek ancak bu yeni durumda tümlevlenenlerin farklı olabilecek ağırlıklarla çarpılarak oluşturulan doğrusal birleşim tümlevlenenin yerine oturacaktır. Bu durumu çok karıştırmadan, yalın bir anlatımla verebilmek için

$$I \equiv [a, b] \equiv \bigcup_{j=1}^N I_j; \quad I_j \equiv [d_j, d_{j+1}], \quad 1 \leq j \leq N, \\ d_1 \equiv a, \quad d_{N+1} \equiv b \quad (4.11)$$

Burada tüm aralık üzerinde $N + 1$ sayıda düğüm noktası seçilmekte ve bunların ilki ile sonuncusu, sırasıyla, a ve b değerlerine eşit alınmaktadır. Düğüm noktalarının eşit aralıklarla alınması zorunlu değildir. Seçimde tümlevlenen işlevin özelliklerinin yansıtılarak sayısal yakınsamayı ivmelendirmeye olumlu katkılar getirecek bir davranış sergilemek olanaklıdır. Ancak, bu oldukça çok deneyim ve uzmanlık gerektirir. O yüzden o ayrıntılara girmeyeceğiz. Aslında, tez yazarının bu konuda deneyimi ve tabanı o ölçüde yeterli değildir.

(4.11) tanımları (4.1) tümlevinin aşağıdaki biçimde yazılabildiğini sağlar.

$$\mathcal{I} \equiv \int_a^b dx w(x) f(x) \equiv \sum_{j=1}^N \mathcal{I}_j; \quad \mathcal{I}_j \equiv \int_{d_j}^{d_{j+1}} dx w(x) f(x) \quad (4.12a, b)$$

Eğer (4.12b)'de

$$y \equiv \frac{x - a}{d_{j+1} - d_j} \quad (4.13)$$

ve onun evriği olan

$$x \equiv (d_{j+1} - d_j)y + d_j \quad (4.14)$$

dönüşümleri kullanılır ve

$$\bar{w}_j(y) \equiv (d_{j+1} - d_j)w((d_{j+1} - d_j)y + d_j) \quad (4.15)$$

$$\bar{f}_j(y) \equiv f((d_{j+1} - d_j)y + d_j) \quad (4.16)$$

tanımlamaları yapılırsa

$$\mathcal{I}_j = \int_0^1 dx \bar{w}_j(x) \bar{f}_j(x) \quad (4.17)$$

ve buradan da

$$\mathcal{I} = \int_0^1 dx \sum_{j=1}^N \bar{w}_j(x) \bar{f}_j(x) \quad (4.18)$$

sonucuna ulaşılır. Bu yapı, özellikle, sert ya da âni iniş çıkışlar gösteren işlevlerin davranışlarını daha düzleştirmekte kullanılabilir ve gelecek alt bölümde geliştireceğimiz yöntem için de yakınsama hızlandırıcı bir öge olarak gündeme getirilebilir. Buradaki N sayısını çok büyütmek buradaki geliştirilen yöntem açısından gerekli görülmemektedir. Çünkü, bu yöntemin, tümlevi sıradan yollardan bölerek değil ama davranışını değiştirerekten ve de olabildiğince az bölümlenmeyle olabildiğince yüksek duyarlılığa götürmesi istenmektedir.

Vurgulamak istediğimiz ikinci nokta ise işlevdeki analitik koşullamasının, gelecek altbölümde geliştirilecek yöntem bağlamında, uç noktalarda kaldırılıp yerine süreklilik koşulunun getirilmesidir. Çünkü, o yöntem aralık uçlarında tekillik getiren bir yapıda olacak ancak yine de, işlevin aralık uçlarında sonlu kalmasına dayandırılacaktır. Analitik çok daha bağlayıcı bir istemdir ve tüm türevlerde süreklilik ister. Halbuki, süreklilik salt işlevde istenecek türevlere zorlama getirilmeyecektir.

Artık bu yapıdan yola çıkarak “Ölçeklemeli Tümlev Katlama İşlemi”nin anlatımına geçebiliriz.

4.2 Ölçeklemeli Tümlev Katlama İşlemi

Tanım bölgesi $[0, 1]$ olan herhangi bir $g(x)$ işlevinin, aşağıdaki özdeşlikle eşsiz bir biçimde, ikili ayırtırmaya götürülmesi olanaklıdır.

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1+x}{2}\right) &\equiv \frac{1}{2} \left[g\left(\frac{1+x}{2}\right) + g\left(\frac{1-x}{2}\right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[g\left(\frac{1+x}{2}\right) - g\left(\frac{1-x}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.19)$$

Özenli bir bakış, x yerine $-x$ yerleştirildiğinde (4.19) özdeşliğinin sağ yamındaki toplamın ilk teriminin aynı kaldığını yani bir “Artıkalan İşlev” (ing: even function) olduğunu, buna karşın ikinci terimin aynı değişim altında -1 ile çarpıldığını yani bir “Eksilenen İşlev” (ing: odd function) olduğunu ortaya koyar. Bu yüzden bu özdeşlik “Artıkalan–Eksilenen Ayrıştırımı” olarak adlandırılabilir.

Burada Artıkalan–Eksilenen Ayrıştırımı’ndan sözedilmesinin nedeni onun (4.10)’da $\bar{w}(x)$ ile $\bar{f}(x)$ üzerine uygulanmasının istenmesidir. Ölçeklemeli Tümlev Katlama İşlemi’nin tanımlanması için buna gereksinim duyulmaktadır. Kuşkusuz, yukarıda belirttiğimiz gibi, bu ayrıştırımın uygulanabilmesi için odaktaki işlevin belli nitelikte olması, daha ayrıntılısı, karmaşık düzlemde, $[0, 1]$ aralığını içeren bir bölgede analitik olarak öngörülmesi gerekir. Bu her zaman gerçekleşemeyebilir. Ağırlık işlevi olan $\bar{w}(x)$ tümlevlenenin tüm tekilliklerini yapısında barındırır da Artıkalan–Eksilenen ayrıştırımına olanak sağlayacak yapıda bulunmalıdır. Bu, bir anlamda onun, karmaşık düzlemde, $[0, 1]$ aralığının iç noktalarını içeren bir bölgede analitik olması demektir. Bunu örneklemek gerekirse

$$\mathcal{J} \equiv \int_0^1 dx \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \quad (4.20)$$

tümlevine odaklanabilir. Bu tümlevin tümlevleneninin $x = \pm 1$ sonlu noktalarında dallanma tekilliği bulunmaktadır. $x \rightarrow \infty$ için de dallanma tekillikleri bulunmakta ancak bunların tümlevin belirlenebilirliğine olumsuz etkileri söz konusu olmamaktadır. $x = \pm 1$ ’daki tekilliklerin ağırlık işlevine aktarılması gerekir. Yani (4.10) yapısında bir anlatım kullanılmak istenirse

$$\bar{w}(y) \equiv \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (4.21)$$

$$\bar{f}(y) \equiv e^{-x^2} \quad (4.22)$$

tanımlamaları yapılabilir. Bu tanımlamalarla elde edilen $\bar{w}(y)$ ağırlık işlevinin $x = \pm 1$ ’de dallanma tekillikleri bulunmaktadır. Bunun dışında, $[-1, 1]$ aralığında bir tekilliği yoktur. Ama bu durum, onun karmaşık düzlemin $[0, 1]$ kapalı aralığını değil $(0, 1)$ açık aralığını içeren bir bölgesi içinde analitik olması gerekliliğini ortaya koyar. Bu durum $\bar{f}(x)$ için de geçerlidir. Ancak orada aralık uç noktaları da içerilmektedir. Dolayısıyla, $\bar{w}(x)$ işlevi için $(0, 1)$ aralığında dallanma tekilliği bulunmaması öngörümünün salt bir yeterlilik koşulu değil gereklilik koşulu olduğu da anlaşılmış olur.

Tekillikleri yapısında barındırması gerektiği öngörülen $\bar{w}(x)$ ağırlık işlevinin $(0, 1)$ aralığında herhangi bir kutup tekilliği de bulunmamalıdır. Yoksa

tümlevin varlığı da yitirilmiş olur. Benzer durum, yalıtılmış tekillikler (ing: isolated singularities) için de geçerlidir. Dolayısıyla, biz de burada odaklanacağımız tümlevlerde ağırlık işlevinin tümlevleme aralığından uç noktaların yani $x = 0$ ile $x = 1$ 'in dışlanmasıyla elde edilen aralıkta herhangi bir tekilliği olmadığı, yani analitik olduğu; tümlevleme aralığının uç noktalarında ise tümlevlenebilen dallanma tekilliklerine izin verilebilecek yapıda olduğu öngörümünü kullanacağız. $\bar{f}(x)$ işlevinin ise, yukarıda belirttiğimiz gibi, tümlevleme aralığının tümünde çözümcül yani analitik olduğu öngörüülecektir. Artık, ölçeklemeli tümlev katlama yöntemi için yeterince araç ve gereci elimizde bulundurur duruma gelmiş bulunmaktayız.

Bundan sonraki adımlarımızda odaklanacağımız tümlevin

$$\mathcal{I}_0 = \int_0^1 dx w_0(x) f_0(x) \quad (4.23)$$

anlatımıyla verildiğini öngöreceğiz. Buradaki ağırlık işlevinin birimtümlevli olduğu yani

$$\int_0^1 dx w_0(x) = 1 \quad (4.24)$$

koşulunu sağladığı öngörülmektedir. Karmaşık düzlemde, $f_0(x)$ işlevinin $[0, 1]$ aralığını, $w_0(x)$ işlevininse $(0, 1)$ aralığını içeren bir bölgede çözümcül olduğu öngörülmektedir. Eğer, (4.10)'dan buraya gelinmek istenirse

$$w_0(x) \equiv \left[\int_0^1 dx \bar{w}(x) \right]^{-1} \bar{w}(x) \quad (4.25)$$

$$f_0(x) \equiv \left[\int_0^1 dx \bar{w}(x) \right] \bar{f}(x) \quad (4.26)$$

tanımlarının kullanılması gerekir. Burada geliştirilmekte olan yöntemlerin (4.23)'e uygulanıp sayısal sonuç elde edilmesinden sonra $\left[\int_0^1 dx \bar{w}(x) \right]$ ile sonucun çarpılmasıyla (4.10)'daki tümleve geçmek olanaklıdır.

Biraz daha ilerleyebilmek için (4.23)'te

$$y \equiv 2x - 1 \quad (4.27)$$

$$x \equiv \frac{1+y}{2} \quad (4.28)$$

dönüşümleri yapılacak olursa

$$\mathcal{I}_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx w_0 \left(\frac{1+y}{2} \right) f_0 \left(\frac{1+y}{2} \right) \quad (4.29)$$

eşitliğine ulaşılır. Burada Artıkalan–Eksilenen Ayrıştırımı yapabilmek için

$$w_0 \left(\frac{1+y}{2} \right) \equiv \frac{1}{2} \left[w_0 \left(\frac{1+y}{2} \right) + w_0 \left(\frac{1-y}{2} \right) \right] + \frac{1}{2} \left[w_0 \left(\frac{1+y}{2} \right) - w_0 \left(\frac{1-y}{2} \right) \right] \quad (4.30)$$

$$f_0 \left(\frac{1+y}{2} \right) \equiv \frac{1}{2} \left[f_0 \left(\frac{1+y}{2} \right) + f_0 \left(\frac{1-y}{2} \right) \right] + \frac{1}{2} \left[f_0 \left(\frac{1+y}{2} \right) - f_0 \left(\frac{1-y}{2} \right) \right] \quad (4.31)$$

eşitlikleri gözönüne alınabilir.

Son iki ayrıştırım (4.29)'de kullanılacak olursa

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_0 = & \frac{1}{8} \int_{-1}^1 dy \left[w_0 \left(\frac{1+y}{2} \right) + w_0 \left(\frac{1-y}{2} \right) \right] \left[f_0 \left(\frac{1+y}{2} \right) + f_0 \left(\frac{1-y}{2} \right) \right] \\ & + \frac{1}{8} \int_{-1}^1 dy \left[w_0 \left(\frac{1+y}{2} \right) + w_0 \left(\frac{1-y}{2} \right) \right] \left[f_0 \left(\frac{1+y}{2} \right) - f_0 \left(\frac{1-y}{2} \right) \right] \\ & + \frac{1}{8} \int_{-1}^1 dy \left[w_0 \left(\frac{1+y}{2} \right) - w_0 \left(\frac{1-y}{2} \right) \right] \left[f_0 \left(\frac{1+y}{2} \right) + f_0 \left(\frac{1-y}{2} \right) \right] \\ & + \frac{1}{8} \int_{-1}^1 dy \left[w_0 \left(\frac{1+y}{2} \right) - w_0 \left(\frac{1-y}{2} \right) \right] \left[f_0 \left(\frac{1+y}{2} \right) - f_0 \left(\frac{1-y}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.32)$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitliğin sağ yanındaki ilk tümlevin tümlevleneni, herbiri köşeli ayraçlarla çevrelenmiş anlatımlar içeren, iki çarpanın çarpımıdır. Çarpanların herbiri bir artıkalan işlev olduğundan çarpım da bir artıkalan işlevdir. Aynı durum son tümlev için de geçerlidir. Buna karşın, ikinci ve üçüncü tümlevlerde tümlevlenen işlev, her biri köşeli ayraçlarla çevrilmiş anlatımlar içeren, iki çarpandan oluşan bir çarpımdır. y 'ye göre, çarpanların biri artıkalan diğeri eksilenen işlev yapısında olduğundan çarpımlar da yani tümlevlenenler de birer eksilenen işlevdirler. y 'ye göre eksilenen olan bir işlevin $[-1, 1]$ aralığındaki tümlevinin 0 olduğunu kanıtlamak hiç de zor değildir. Tümlevin eksi y değerleri üzerindeki kesimi artı y değerleri üzerindeki kesimin eksi imlisi olduğundan bunlar birbirlerini giderirler ve sonuçta elde 0 kalır.

(4.32)'ün sağındaki birinci ve dördüncü tümlevler ise aynı tümlevlenenlerin $[0, 1]$ aralığı üzerindeki tümlevlerinin iki katı değerdedirler. Bunun nedeni, bu tümlevlerden herbirinin tümlevleneninin bir artıkalan işlev olması ve bu yüzden artı bir y değeri ile onun eksilisinde aynı değeri almasıdır. Bu olgu

İlgili tümlevin artı olmayan y değerleri üzerindeki kesiminin eksi olmayan y değerleri üzerindeki kesimiyle aynı olacağı, yani ilgili tümlevin, aynı tümlevlenenin $[0, 1]$ üzerindeki tümlevinin iki katı olduğu anlamına gelir. Bu yorumlamalar ışığında (4.32) aşağıdaki biçime bürünür.

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_0 = & \frac{1}{4} \int_0^1 dy \left[w_0 \left(\frac{1+y}{2} \right) + w_0 \left(\frac{1-y}{2} \right) \right] \left[f_0 \left(\frac{1+y}{2} \right) + f_0 \left(\frac{1-y}{2} \right) \right] \\ & + \frac{1}{4} \int_0^1 dy \left[w_0 \left(\frac{1+y}{2} \right) - w_0 \left(\frac{1-y}{2} \right) \right] \left[f_0 \left(\frac{1+y}{2} \right) - f_0 \left(\frac{1-y}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.33)$$

İncelemeleri bölerek kolaylaştırmak için

$$\mathcal{I}_1^{(1)} \equiv \frac{1}{4} \int_0^1 dy \left[w_0 \left(\frac{1+y}{2} \right) + w_0 \left(\frac{1-y}{2} \right) \right] \left[f_0 \left(\frac{1+y}{2} \right) + f_0 \left(\frac{1-y}{2} \right) \right] \quad (4.34)$$

$$\mathcal{I}_1^{(2)} \equiv \frac{1}{4} \int_0^1 dy \left[w_0 \left(\frac{1+y}{2} \right) - w_0 \left(\frac{1-y}{2} \right) \right] \left[f_0 \left(\frac{1+y}{2} \right) - f_0 \left(\frac{1-y}{2} \right) \right] \quad (4.35)$$

tümlev tanımlamalarını yapmakta yarar bulunmaktadır. Önce $\mathcal{I}_1^{(1)}$ ile ilgilenelim ve tümlevde y yerine \sqrt{y} yerleştirelim. (4.34) aşağıdaki yapıya bürünür.

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1^{(1)} = & \frac{1}{8} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y}} \left[w_0 \left(\frac{1+\sqrt{y}}{2} \right) + w_0 \left(\frac{1-\sqrt{y}}{2} \right) \right] \\ & \times \left[f_0 \left(\frac{1+\sqrt{y}}{2} \right) + f_0 \left(\frac{1-\sqrt{y}}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.36)$$

Bu tümlev gösteriliminde tümlevlenenin $y = 0$ değerinde, $w_0 \left(\frac{1}{2} \right)$ ile $f_0 \left(\frac{1}{2} \right)$ değerlerinden en azından biri 0 olmadıkça, $\frac{1}{\sqrt{y}}$ türü bir tekillik görünmekte ve bir biçimde dışlanması gerekmektedir. Bu amaçla, (4.36) yerine

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1^{(1)} = & \frac{1}{8} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y}} \left[w_0 \left(\frac{1+\sqrt{y}}{2} \right) + w_0 \left(\frac{1-\sqrt{y}}{2} \right) \right] \\ & \times \left[f_0 \left(\frac{1+\sqrt{y}}{2} \right) + f_0 \left(\frac{1-\sqrt{y}}{2} \right) - 2f_0 \left(\frac{1}{2} \right) \right] \\ & + \frac{f_0 \left(\frac{1}{2} \right)}{4} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y}} \left[w_0 \left(\frac{1+\sqrt{y}}{2} \right) + w_0 \left(\frac{1-\sqrt{y}}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.37)$$

yazılabilir. Buradaki tümlevde, tümlevlenin köşeli ayraçlarla çevrenmiş terimlerden oluşan ilk çarpanı ağırlık işlevinin değişik iki değerinin toplamını içermektedir. Bu değerler, sonlu sayıda olası bazı y değerleri için 0 olabileceği dışında artı değerlidir. Yani bu çarpan bir ağırlık işlevi olma niteliği taşımaktadır ama oradaki duruşuyla birim tümlevli olup olmadığını bir çırpıda kestirmek olanaklı değildir. Ama salt onu ağırlık işlevi olarak düşünmek de doğru değildir. Bunun nedeni, tümlevlenin en solunda bulunan $\frac{1}{\sqrt{y}}$ terimidir. Bu terim de ağırlık işlevinin yapısına alınabilir, ancak, bu durumda ağırlık işlevi $y = 0$ 'da tekil duruma gelir. Oysa ki, köşeli ayraçlarla çevrenmiş diğer çarpan \sqrt{y} 'nin sıfırlanması durumunda sıfır değerini almakta yani $\sqrt{y} = 0$ değerine çok yakın y 'ler için \sqrt{y} gibi davranmaktadır. Dolayısıyla, $\frac{1}{\sqrt{y}}$ terimini bu terimle çarparak elde edilecek yapıyı ağırlık altında tümlevlenen işlev olarak almak öngörülerimizle tekilliksizlik açısından tutarlı olacaktır. Ancak, bu noktada, ilk altbölümde vurguladığımız yapıyı anımsatmalıyız. Her ne kadar, orijinal işlev aralık uç noktalarında analitik varsayılıyorsa da, buradaki yöntemle katlama yapıldıktan sonra oluşan işlevin bağımsız değişkenin ve onun 1'den farkının kareköküne bağlı olmasından dolayı, çok özel bir yapılanma olmadıkça, artık bu özelliği taşıyamaz. Salt bu nedenle burada oluşan yeni tümlevlerde uç noktalarda salt süreklilikle yetinmek gerekecektir. Aslında, yöntem de o şekilde yapılandırılmaktadır. Bu konu bu anlatımla halledildikten sonra ilk adım olarak, ağırlık işlevinin birim türevlilik öngörümü için bir takım ölçeklemeler gerekebilecektir. Gerçekten de,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y}} \left[w_0 \left(\frac{1 + \sqrt{y}}{2} \right) + w_0 \left(\frac{1 - \sqrt{y}}{2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 dy \left[w_0 \left(\frac{1 + y}{2} \right) + w_0 \left(\frac{1 - y}{2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 dy w_0 \left(\frac{1 + y}{2} \right) + \frac{1}{2} \int_0^1 dy w_0 \left(\frac{1 - y}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 dy w_0 \left(\frac{1 + y}{2} \right) + \frac{1}{2} \int_{-1}^0 dy w_0 \left(\frac{1 + y}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dy w_0 \left(\frac{1 + y}{2} \right) = \int_0^1 dy w_0(x) = 1 \quad (4.38)
\end{aligned}$$

eşitliklerinden $\frac{1}{\sqrt{y}}$ 'nin ağırlık işlevine alınmaması durumunda, $w_0(x)$ çok özel bir yapı taşımadıkça, ağırlık işlevinin birim türevlilik öngörümü ile çelişki yaşanacağı anlaşılır. Böylece,

$$\begin{aligned}
\sigma_{1,1}(x) &\equiv \int_0^1 dx \left[w_0 \left(\frac{1 + \sqrt{x}}{2} \right) + w_0 \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{2} \right) \right] \\
w_1^{(1)}(x) &\equiv \frac{1}{\sigma_{1,1}} \left[w_0 \left(\frac{1 + \sqrt{x}}{2} \right) + w_0 \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{2} \right) \right] \\
f_1^{(1)}(x) &\equiv \frac{\sigma_{1,1}}{8\sqrt{x}} \left[f_0 \left(\frac{1 + \sqrt{x}}{2} \right) + f_0 \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{2} \right) - 2f_0 \left(\frac{1}{2} \right) \right] \quad (4.39)
\end{aligned}$$

tanımlarını yapmak ve

$$\mathcal{I}_1^{(1)} = \int_0^1 dx w_1^{(1)}(x) f_1^{(1)}(x) + f_0\left(\frac{1}{2}\right) \quad (4.40)$$

sonucuna ulaşmak olanaklıdır. Bu tümlev de, ögelerinin öngörülen özellikleri ve tanım aralığı açısından (4.23)'deki tümlev ile birebir aynıdır.

Bu alt bölümü sonlandırmak için $\mathcal{I}_1^{(2)}$ tümlevi ile ilgilenmek ve (4.40)'daki gibi bir yapıya ulaştırmak gerekmektedir. Bu amaçla, (4.35)'de y yerine $-y$ yerleştirerek

$$\mathcal{I}_1^{(2)} = \frac{1}{8} \int_{-1}^0 dy \left[w_0\left(\frac{1+y}{2}\right) - w_0\left(\frac{1-y}{2}\right) \right] \left[f_0\left(\frac{1+y}{2}\right) - f_0\left(\frac{1-y}{2}\right) \right] \quad (4.41)$$

ve bunun (4.35) ile bütünleştirilmesinden elde edilen

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1^{(2)} &= \frac{1}{8} \int_{-1}^1 dy \left[w_0\left(\frac{1+y}{2}\right) - w_0\left(\frac{1-y}{2}\right) \right] \\ &\quad \times \left[f_0\left(\frac{1+y}{2}\right) - f_0\left(\frac{1-y}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.42)$$

eşitliklerini yazarak yola çıkılabilir. Özenli bir inceleme

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 dy w_0\left(\frac{1-y}{2}\right) \left[f_0\left(\frac{1+y}{2}\right) - f_0\left(\frac{1-y}{2}\right) \right] \\ &= - \int_{-1}^1 dy w_0\left(\frac{1+y}{2}\right) \left[f_0\left(\frac{1+y}{2}\right) - f_0\left(\frac{1-y}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.43)$$

ve bunun (4.42)'de kullanımıyla

$$\mathcal{I}_1^{(2)} = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 dy w_0\left(\frac{1+y}{2}\right) \left[f_0\left(\frac{1+y}{2}\right) - f_0\left(\frac{1-y}{2}\right) \right] \quad (4.44)$$

eşitliğine ulaşılabileceğini gösterir. Bu eşitlikte y yerine $(2\sqrt{y}-1)$ yerleştirilecek olursa

$$\mathcal{I}_1^{(2)} = \frac{1}{4} \int_0^1 dy \frac{1}{\sqrt{y}} w_0(\sqrt{y}) [f_0(\sqrt{y}) - f_0(1-\sqrt{y})] \quad (4.45)$$

sonucuna ulaşılır. Burada, köşeli ayraçlarla çevrelenen anlatıma, anlatımı $\sqrt{y} = 0$ olduğunda 0 yapacak biçimde değişmezler ekleme ve çıkarımı gerçekleştirilirse aşağıdaki yapıya ulaşılır.

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1^{(2)} &= \frac{1}{4} \int_0^1 dy \frac{1}{\sqrt{y}} w_0(\sqrt{y}) [f_0(\sqrt{y}) - f_0(1 - \sqrt{y}) - f_0(0) + f_0(1)] \\ &\quad + \frac{1}{4} [f_0(0) - f_0(1)] \int_0^1 dy \frac{1}{\sqrt{y}} w_0(\sqrt{y}) \end{aligned} \quad (4.46)$$

Eğer,

$$\int_0^1 dy \frac{1}{2\sqrt{y}} w_0(\sqrt{y}) = \int_0^1 dy w_0(y) = 1 \quad (4.47)$$

eşitlikleri gözönüne alınacak olursa (4.46) yerine

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1^{(2)} &= \frac{1}{4} \int_0^1 dy \frac{1}{\sqrt{y}} w_0(\sqrt{y}) [f_0(\sqrt{y}) - f_0(1 - \sqrt{y}) - f_0(0) + f_0(1)] \\ &\quad + \frac{1}{2} [f_0(0) - f_0(1)] \end{aligned} \quad (4.48)$$

yazılabilir. Buradaki incelemeleri sonlandırmak için

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &\equiv \int_0^1 dx w_0(\sqrt{x}) \\ w_1^{(2)}(x) &\equiv \frac{1}{\sigma_{1,1}} w_0(\sqrt{x}) \\ f_1^{(2)}(x) &\equiv \frac{\sigma_{1,1}}{4\sqrt{x}} [f_0(\sqrt{x}) - f_0(1 - \sqrt{x}) - f_0(0) + f_0(1)] \end{aligned} \quad (4.49)$$

tanımlamaları yapılırsa

$$\mathcal{I}_1^{(2)} = \int_0^1 dx w_1^{(2)}(x) f_1^{(2)}(x) + \frac{1}{2} [f_0(0) - f_0(1)] \quad (4.50)$$

ve buradan da

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \int_0^1 dx w_1^{(1)}(x) f_1^{(1)}(x) + \int_0^1 dx w_1^{(2)}(x) f_1^{(2)}(x) \\ &\quad + f_0\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} [f_0(0) - f_0(1)] \end{aligned} \quad (4.51)$$

sonucuna ulaşılır. Böylece,

$$\mathcal{I}_0 = \int_0^1 dx w_0(x) f_0(x) \quad (4.52)$$

tümlev gösteriliminden yola çıkıp

$$\begin{aligned} \sigma_{1,1}(x) &\equiv \int_0^1 dx \left[w_0\left(\frac{1 + \sqrt{x}}{2}\right) + w_0\left(\frac{1 - \sqrt{x}}{2}\right) \right] \\ \sigma_{1,2} &\equiv \int_0^1 dx w_0(\sqrt{x}) \end{aligned} \quad (4.53)$$

ile

$$\begin{aligned} w_1^{(1)}(x) &\equiv \frac{1}{\sigma_{1,1}} \left[w_0 \left(\frac{1+\sqrt{x}}{2} \right) + w_0 \left(\frac{1-\sqrt{x}}{2} \right) \right] \\ w_1^{(2)}(x) &\equiv \frac{1}{\sigma_{1,2}} w_0(\sqrt{x}) \end{aligned} \quad (4.54)$$

ve

$$\begin{aligned} f_1^{(1)}(x) &\equiv \frac{\sigma_{1,1}}{8\sqrt{x}} \left[f_0 \left(\frac{1+\sqrt{x}}{2} \right) + f_0 \left(\frac{1-\sqrt{x}}{2} \right) - 2f_0 \left(\frac{1}{2} \right) \right] \\ f_1^{(2)}(x) &\equiv \frac{\sigma_{1,2}}{4\sqrt{x}} [f_0(\sqrt{x}) - f_0(1-\sqrt{x}) - f_0(0) + f_0(1)] \end{aligned} \quad (4.55)$$

tanımlamaları üzerinden

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \int_0^1 dx w_1^{(1)}(x) f_1^{(1)}(x) + \int_0^1 dx w_1^{(2)}(x) f_1^{(2)}(x) \\ &\quad + f_0 \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} [f_0(0) - f_0(1)] \end{aligned} \quad (4.56)$$

tümlev gösterilimine ulaşılmış olur. Bu gösterilimin üreteceği değer ile \mathcal{I}_0 tümlev gösteriliminin üreteceği değer aynı olmak zorundadır. Yani,

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2 \quad (4.57)$$

eşitliği geçerlidir. \mathcal{I}_0 tümlev gösteriliminden \mathcal{I}_1 tümlev gösteriliminin üretilmesi için kullanılan (4.52)'ten başlayıp (4.56)'e ulaşan eşitliklerle kurulan ilişkilerle gerçekleştirilen bu eyleme “Ölçeklemeli Tümlev Katlama İşlemi” adını vereceğiz. Bu adın neden verildiğini açıklamak için bu eylemlerde $y = 2x - 1$ türünde bir dönüşüm kullanıldığını anımsatmak gerekir. Bu dönüşümle $[0, 1]$ aralığı üzerindeki tümlevleme bölgesi $[-1, 1]$ aralığı üzerindeki tümlevleme bölgesine götürülmektedir. Yani tümlevleme aralığının uzunluğu iki katına çıkarılmakta, diğer bir deyişle, ölçeklenmektedir. Addaki “Ölçeklemeli” sözcüğü bu nedenle kullanılmaktadır. Öte yandan, $[-1, 1]$ aralığının eksi değerler içeren kesimi yani $[-1, 0]$ aralığı üzerindeki tümlevleme, ek-sileme dönüşümü üzerinden, $[0, 1]$ aralığı üzerindeki tümlevlemeye dönüştürülmekte yani tümlevleme bölgesi bir anlamda katlanarak yarı uzunluğa indirgenmektedir. “Tümlev Katlama” deyimi bu nedenle kullanılmaktadır. Bu arada bu eylem sonucunda x 'e bağımlı işlevler \sqrt{x} 'e bağımlı işlevlere dönüşmektedir. Bunun işlev davranışlarına sendelenim açılımı açısından bazı olumluluklar getireceğini kestirmek olanaklıdır. Bu konuya beşinci bölümde değineceğiz.

Gelecek altbölüme geçmeden önce burada geliştirilen tümlev katlama yöntemi tam bir dördülleme (kuvadratür) yapısına getirmek için tümlevler için

ortalama değer kanıtını (teorem) kullanmak olanaklıdır. Bu yapılırsa, $[0, 1]$ aralığında, $x_o^{(1)}$ ile $x_o^{(2)}$ ile simgeleyeceğimiz, iki uygun iç noktayı bu kanıtsavda (4.56)'deki her bir tümlev için kullanarak yani ağırlık altında tümlevlenen her bir işlev yerine bu iki noktadan ilgisinde işlev değerine eşit bir değişmez işlevi alarak aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$\int_0^1 dx w_1^{(1)} f_1^{(1)}(x) = f_1^{(1)}(x_o^{(1)}), \quad \int_0^1 dx w_1^{(2)} f_1^{(2)}(x) = f_1^{(2)}(x_o^{(2)}) \quad (4.58)$$

Ancak, bu eşitlikleri sağlayacak kesin $x_o^{(1)}$ ve $x_o^{(2)}$ değerini saptamak en az tümlev belirlemek kadar zor bir iştir. Bu nedenle bunların yerine yaklaşık değer kullanmak daha akılcıdır. Biz de öyle yapacağız ve bunları bir şekilde tahmin edecek bir yol izleyeceğiz. En kolay olgu birim ağırlık durumudur ve $x_o^{(1)} = x_o^{(2)} = 1/2$ almak hiç de akıl dışı değildir. Gelecek alt bölümdeki uygulamalarımızda da bu durum ve yaklaşıtırmı kullanacağız. Şimdi, $x_o^{(1)}$ ve $x_o^{(2)}$ ile simgelenen değerlerin birer tahmini değer olduğunu varsayarak kesin sonuç değil ama yaklaşık bir sonuç olarak

$$\mathcal{I}_{yak} = f_1^{(1)}(x_o^{(1)}) + f_1^{(2)}(x_o^{(2)}) + f_0 \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} [f_0(0) - f_0(1)] \quad (4.59)$$

yazabiliriz. Bu yaklaşıtıma “Ortalama Değer Kestirimli, Ölçeklemeli Tümlev Katlama Dördüllemesi” adını vereceğiz. Gelecek alt bölümde bunun uygulamaları üzerinde duracağız.

4.3 Ortalama Değer Kestirimli, Ölçeklemeli Tümlev Katlama Dördüllemesi Uygulamaları

Burada ilk önce üstel işlev üzerine yoğunlaşacağız ve incelemelerimizde işlevin değişiminin tümlevlemeyi nasıl etkileyeceğini görebilmek için α ile simgelenen bir değiştirgeyi devreye sokarak

$$f_0(x) \equiv e^{\alpha x} \quad (4.60)$$

tanımını kullanacağız. Ağırlık işlevimiz, önceki altbölümde sözü edildiği gibi,

$$w_0(x) \equiv 1 \quad (4.61)$$

olarak seçilecek ve bu seçim tüm altbölüm boyunca geçerliliğini koruyacaktır. Bu durumda ilgileneceğimiz tümlev

$$\mathcal{I} \equiv \int_0^1 dx e^{\alpha x} \quad (4.62)$$

olarak verilecektir. Bu tümlev, yapısının çok kolay nitelikler taşımasından dolayı analitik olarak belirlenebilir ve sonuç

$$\mathcal{I} = \frac{e^{\alpha x} - 1}{\alpha} \quad (4.63)$$

anlatımıyla verilir. Bunlar (4.53), (4.54), ve de, (4.55) eşitliklerinin aşağıdaki yapıya bürünmesine neden olur.

$$\sigma_{1,1} = 2, \quad \sigma_{1,2} = 1, \quad w_1^{(1)} \equiv 1, \quad w_1^{(2)} \equiv 1 \quad (4.64a, b, c, d)$$

$$f_1^{(1)}(x) \equiv \frac{1}{4\sqrt{x}} \left[e^{\alpha\left(\frac{1+\sqrt{x}}{2}\right)} + e^{\alpha\left(\frac{1-\sqrt{x}}{2}\right)} - 2e^{\frac{\alpha}{2}} \right] \quad (4.65)$$

$$f_1^{(2)}(x) \equiv \frac{1}{4\sqrt{x}} \left[e^{\alpha\sqrt{x}} - e^{\alpha-\alpha\sqrt{x}} - 1 + e^{\alpha} \right] \quad (4.66)$$

(4.57)'un gündeme getirilmesi için ortalama değer seçiminin yapılması gerekir. Ağırlıkların 1 olması nedeniyle $x_o^{(1)}$ ve $x_o^{(2)}$ değerlerini $[0, 1]$ aralığının orta noktası yani $1/2$ seçmek akla ilk gelen şeydir. Biz de öyle yapacağız. Bu durumda (4.66)'dan

$$f_1^{(1)}\left(\frac{1}{2}\right) \equiv \frac{\sqrt{2}}{4} \left[e^{\alpha\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\right)} + e^{\alpha\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)} - 2e^{\frac{\alpha}{2}} \right] \quad (4.67)$$

$$f_1^{(2)}\left(\frac{1}{2}\right) \equiv \frac{\sqrt{2}}{4} \left[e^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}} - e^{\alpha\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} - 1 + e^{\alpha} \right] \quad (4.68)$$

ve (4.60)'den

$$f_0\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} [f_0(0) - f_0(1)] = e^{\frac{\alpha}{2}} + \frac{1 - e^{\alpha}}{2} \quad (4.69)$$

yazılabilir. Son iki eşitliğin (4.57)'de kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{yak} \equiv & \frac{\sqrt{2}}{4} \left[e^{\alpha\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}\right)} + e^{\alpha\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}\right)} - 2e^{\frac{\alpha}{2}} \right] + \frac{\sqrt{2}}{4} \left[e^{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}} - e^{\alpha\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} - 1 + e^{\alpha} \right] \\ & + e^{\frac{\alpha}{2}} + \frac{1 - e^{\alpha}}{2} \end{aligned} \quad (4.70)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu yaklaşımın çeşitli α değerleri için hesaplanmasıyla üretilen değerler aşağıdaki çizelgede verilmektedir. Çizelgedeki değerlerin son ondalık basamakları yuvarlama ile elde edilmiştir. Bu çizelgeden görüldüğü gibi α değiştirgesinin mutlak değeri arttıkça yaklaşımın niteliği düşmekte ve yeterince büyük α değerlerinde, deyim yerindeyse, sapıtmaktadır. Ama bazı küçük α değerlerinde çok yüksek denilebilecek duyarlık elde edildiği de bir gerçektir.

Tablo 4.1: $e^{\alpha x}$ işlevinin tümlevinin $[0, 1]$ aralığı üzerinde, birim ağırlık altında, Ortalama Değer Kestirimli ve Ölçeklemeli Tümlev Katlama Yöntemi ile hesaplanan yaklaşık değerleri.

α	Kesin Değer	Yaklaş. Değer	Bağlı Hata
-2.0	0.432332358	0.451437345	-0.044190508
-1.0	0.632120558	0.636727364	-0.007287859
-0.5	0.786938681	0.787921876	-0.001249219
0.5	1.297442541	1.297434689	0.000006052
1.0	1.718281828	1.713890203	0.002555824
2.0	3.194528049	3.102643017	0.028763257
5.0	29.482631820	18.548010992	0.370883471
10.0	2202.546579480	-970.406925986	1.440584065

Yaklaşımın niteliğinin α arttıkça düşmesinin nedenini iyice anlayabilmek için (4.56)'ya dönelim ve onu

$$f_1(x) \equiv \frac{1}{4\sqrt{x}} \left[e^{\alpha\left(\frac{1+\sqrt{x}}{2}\right)} + e^{\alpha\left(\frac{1-\sqrt{x}}{2}\right)} - 2e^{\frac{\alpha}{2}} \right] + \frac{1}{4\sqrt{x}} \left[e^{\alpha\sqrt{x}} - e^{\alpha-\alpha\sqrt{x}} - 1 + e^{\alpha} \right] \quad (4.71)$$

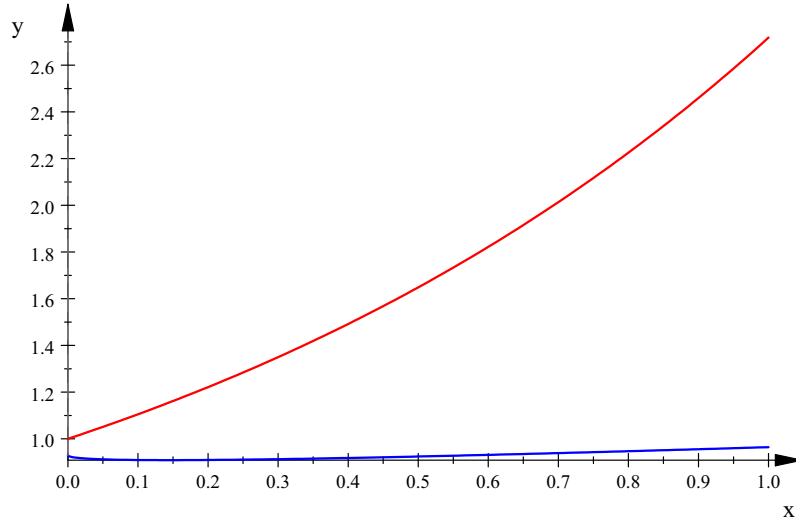
tanımı üzerinden

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^1 dx f_1(x) + f_0\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} [f_0(0) - f_0(1)] \quad (4.72)$$

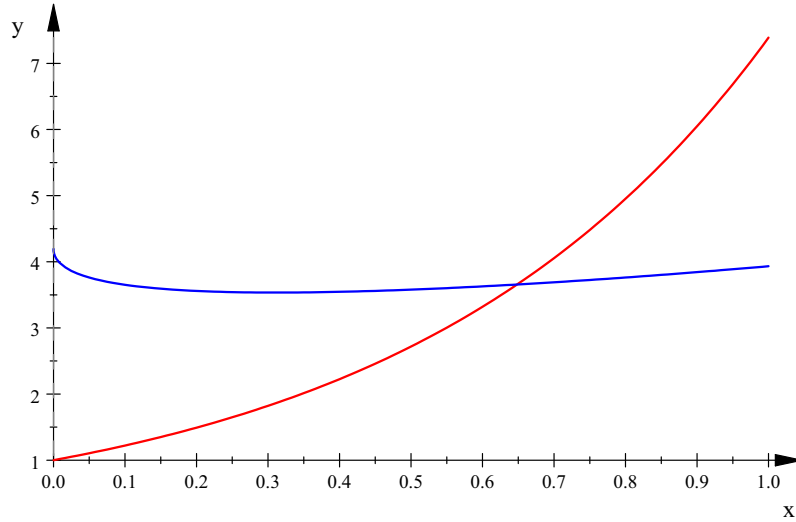
yapısında yeniden yazalım. Son eşitliğin dile getirdiği şey olası hatanın, $f_1(x)$ işlevi yerine $f\left(\frac{1}{2}\right)$ değerli değişmez işlevin kullanılmasından, kaynaklanmıştır. α arttıkça yaklaşım niteliğinin azalması bu işlevin yapısındaki değişmezlikten uzaklaşması olarak yorumlanabilir. Bu durumu görsel olarak incelemek için, burada, dört ayrı çizim verilmektedir. Her bir çizimde kırmızı eğri asıl işlevin yani $f_0(x)$ 'in değişimini, mavi eğri ise tümlev katlama sonrasında elde edilen $f_1(x)$ işlevinin değişimini yansıtmaktadır. Değişim aralığı olarak tümlevleme aralığı yani $[0, 1]$ alınmaktadır. Birinci çizimde $\alpha = 1$ durumu verilirken ikinci, üçüncü, ve de, dördüncü çizimlerde, sırasıyla, $\alpha = 2$ ve $\alpha = 5$ durumları sergilenmektedir. Şekil 4.1'de $f_1(0)$ işlevinin tüm aralıkta hemen hemen tam değişmez kaldığı ve asıl işlev olan $f_0(x)$ 'e göre, yine tüm aralıkta, neredeyse gözardı edilebilecek düzeyde küçük kaldığı gözlenmektedir. Bu durum, sapma değerinin çok küçük bir değerde olduğunu da görsel olarak, bir anlamda kanıtlamaktadır.

İkinci çizimde $f_1(x)$ işlevinin neredeyse değişmez kalma özelliği sürmekte, $x = 0$ dolaylarında değişmezlikten biraz sapma gözlenmektedir. Ama, çok daha

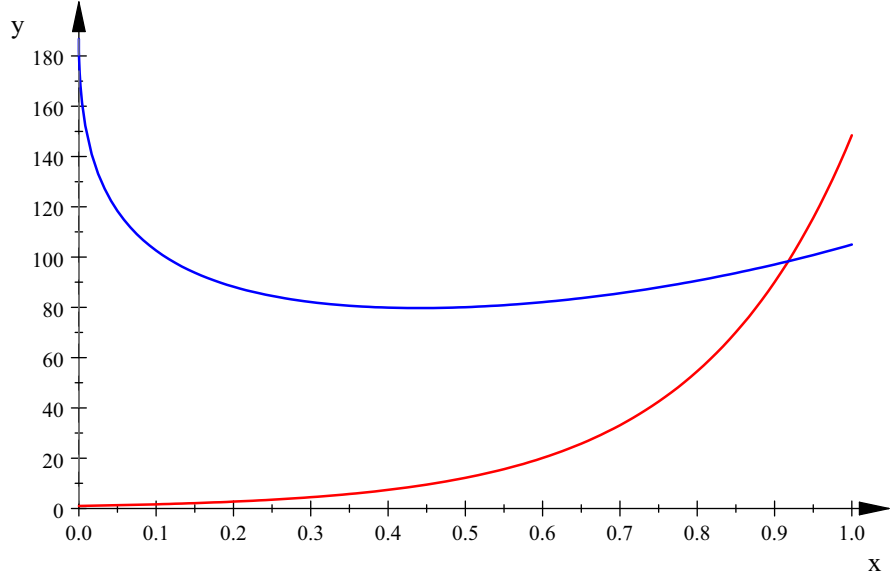
önemlisi, $f_1(x)$ 'in hemen hemen değişmez değeri asıl işlevin ortalama değeri dolaylarına dek çıkabilmektedir. Bu ortalama değer kestirimi kullanımında tümlevden gelen hatayı büyütmektedir. Bu durum üçüncü çizimde çok daha dramatik olarak ortaya çıkmaktadır. Orada $f_1(x)$ 'de, hem değişmezlik bozulmasındaki hem de değerdeki artış daha abartılı düzeye çıkmakta ve baskınlasmaktadır. Dördüncü çizimde ise $f_1(x)$ asıl işleve neredeyse baskın duruma girmekte ve bu da çok büyük sapmaya neden olmaktadır.



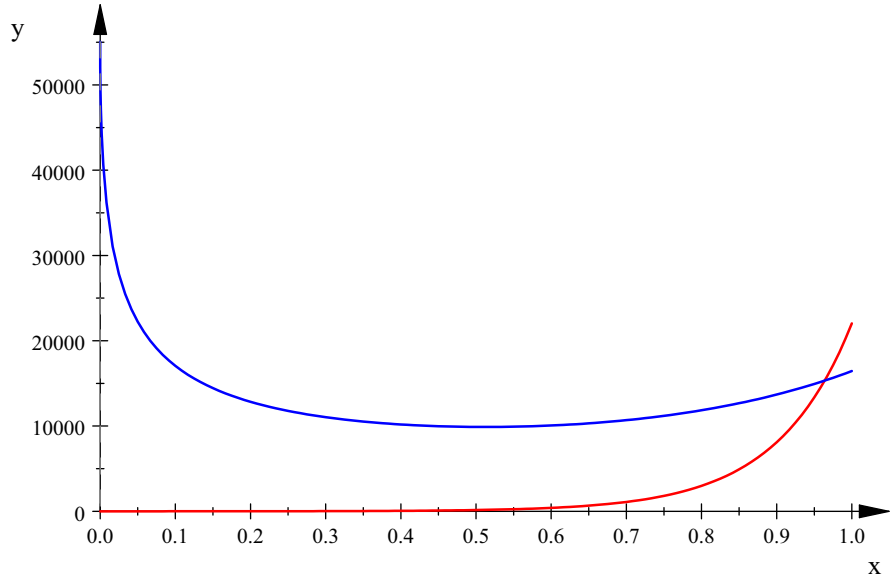
Şekil 4.1: e^x işlevi için $f_0(x)$ (kırmızı) ve $f_1(x)$ (mavi) işlevlerinin $[0, 1]$ aralığı üzerinde, değişimleri.



Şekil 4.2: e^{2x} işlevi için $f_0(x)$ (kırmızı) ve $f_1(x)$ (mavi) işlevlerinin $[0, 1]$ aralığı üzerinde, değişimleri.

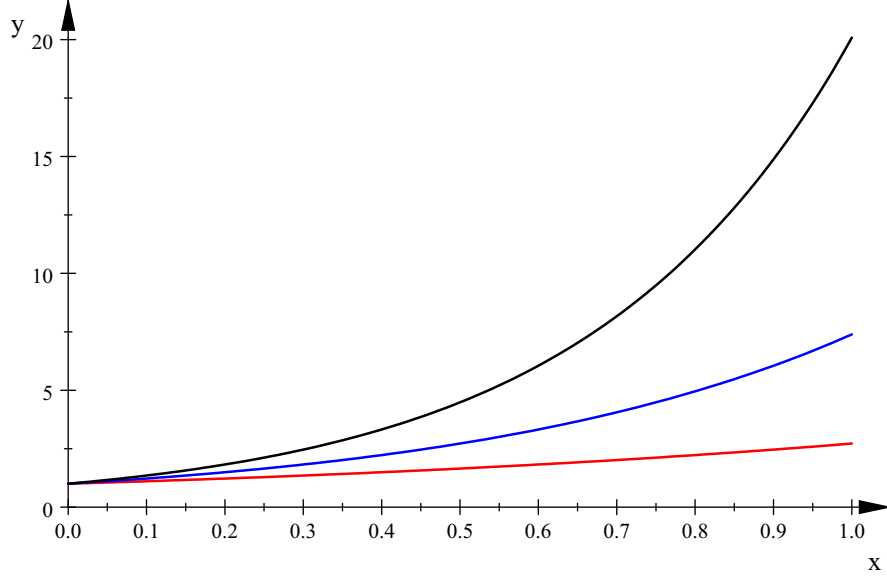


Şekil 4.3: e^{5x} işlevi için $f_0(x)$ (kırmızı) ve $f_1(x)$ (mavi) işlevlerinin $[0, 1]$ aralığı üzerinde, değişimleri.



Şekil 4.4: e^{5x} işlevi için $f_0(x)$ (kırmızı) ve $f_1(x)$ (mavi) işlevlerinin $[0, 1]$ aralığı üzerinde, değişimleri.

Yukarıdaki inceleme ve gözlemlerde üstel bir işlevi, e^x 'i gözönüne aldık. Bu işlev için α artı olarak arttıkça işlevdeki artış tekdüze olarak hızlanmaktadır. Bu durum görsel olarak Şekil 4.5'te verilmektedir. Orada kırmızı, mavi, ve de, siyah boyalı eğriler, sırasıyla, $\alpha = 1$, $\alpha = 2$, ve de, $\alpha = 3$ değerlerine karşılık olarak oluşturulmuşlardır.



Şekil 4.5: e^x , e^{2x} , ve de, e^{3x} işlevlerinin $[0, 1]$ aralığı üzerinde, değişimleri.

$f_0(x)$ yani asıl işlevdeki değer değişimi hızının artmasının tümlev katlama yöntemimize olumsuz etkilerinin tam olarak giderilmese bile azaltılması için daha önceden sözünü ettiğimiz aralık bölümlene işlemi kullanabiliriz. Bu amaçla, aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_0^1 dx e^{\alpha x} = \int_0^{\frac{1}{2}} dx e^{\alpha x} + \int_{\frac{1}{2}}^1 dx e^{\alpha x} = \int_0^{\frac{1}{2}} dx e^{\alpha x} + \int_0^{\frac{1}{2}} dx e^{\alpha x + \frac{\alpha}{2}} \\ &= (1 + e^{\frac{\alpha}{2}}) \int_0^{\frac{1}{2}} dx e^{\alpha x} = \frac{1 + e^{\frac{\alpha}{2}}}{2} \int_0^1 dx e^{\frac{\alpha}{2} x} = \int_0^1 dx \varphi_1(x) \end{aligned} \quad (4.73)$$

Burada kısaltma amaçlı kullanılan $\varphi_1(x)$ simgesi

$$\varphi_1(x) \equiv \frac{1 + e^{\frac{\alpha}{2}}}{2} e^{\frac{\alpha}{2} x} \quad (4.74)$$

anlatımı ile verilen işlevi göstermektedir. Böylelikle tümlevleme aralığını yarılamanın etkisi $f_0(x)$ yerine $\varphi_1(x)$ işlevinin devreye sokulması olarak ortaya çıkmaktadır. Eğer, aralık yarılama işlemi bu kez $\varphi_1(x)$ çekirdekli tümleve uygulanacak olursa, ara aşamalar verilmeksizin, aşağıdaki eşitliğin yazılmasına olanak sağlar

$$\mathcal{I} = \int_0^1 dx \varphi_2(x) \quad (4.75)$$

Burada

$$\varphi_2(x) \equiv \frac{1 + e^{\frac{\alpha}{2}}}{2} \frac{1 + e^{\frac{\alpha}{4}}}{2} e^{\frac{\alpha}{4}x} \quad (4.76)$$

tanımlaması kullanılmaktadır. Bir yarılama aşamasına daha girilirse

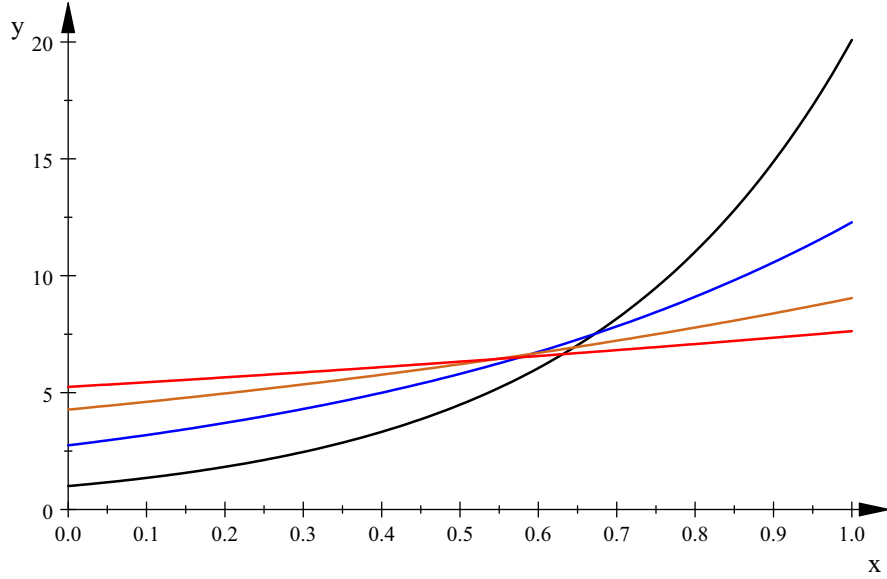
$$\mathcal{I} = \int_0^1 dx \varphi_3(x) \quad (4.77)$$

elde edilir. Burada

$$\varphi_2(x) \equiv \frac{1 + e^{\frac{\alpha}{2}}}{2} \frac{1 + e^{\frac{\alpha}{4}}}{2} \frac{1 + e^{\frac{\alpha}{8}}}{2} e^{\frac{\alpha}{8}x} \quad (4.78)$$

tanımlaması geçerlidir.

$f_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ve de, $\varphi_3(x)$ işlevlerinin çizimleri Çizim 6'da verilmektedir. Orada, $f_0(x)$ siyah, $\varphi_1(x)$ mavi, $\varphi_2(x)$ çikolata rengi, ve de, $\varphi_3(x)$ kırmızı boyalı eğrilere karşılık gelmektedir. Görüldüğü gibi, yarılama arttırıldıkça oluşan tümlev çekirdeği hem doğrusallaşmakta hem de değişmez yapıya doğru gitmektedir. Yani aralık yarılama, gerçekten, tümlev çekirdeğindeki değişim hızını düşürmektedir.



Şekil 4.6: *asil işlevin e^{3x} alındığı durumda $f_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ve de, $\varphi_3(x)$ işlevlerinin $[0, 1]$ aralığı üzerinde, değişimleri.*

Burada üstel işlevin çok özel yapısını kullandığımız için kolay işlemler ve yalın sonuçlar elde ettik. Şimdi incelemelerimizi daha genişletelim ve işlevi genel tutalım. Ama, bir yandan da genellikle bir yitime yolaçmayacak varsayımlar arayışına da girelim. Bu yolda, ilk olarak, $f_0(x)$ işlevinin eksileşmeyen yapıda alınmasında bir genellik yitimine yol açmayacağını belirtelim. Bunu şöyle

açıklayabiliriz: $f_0(x)$ işlevi, $[0, 1]$ aralığının tüm noktalarında analitik varsayıldığından, aynı zamanda süreklidir de. Süreklilik, bir yandan da sonluluk demektir. Bu ise, $f_0(x)$ işlevinin $[0, 1]$ aralığında en küçük bir değerinin olmasını gerektirir. Bu en küçük değer artı ya da sıfır ise zaten eksilenmeme varsayımımızla örtüşecektir. Buna karşın, o en küçük değer eksisi olması durumunda, bu eksisi işlevden çıkararak elde edeceğimiz işlev eksilenmeyen bir yapı taşıyacaktır. Asıl işlev yerine bu işlev üzerinde tümlev hesabına girebiliriz. Asıl işlevle bu işlev arasındaki fark bir sabit olduğundan asıl işlev üzerindeki tümlev ile bu işlev üzerindeki tümlev arasındaki fark da bir sabitin tümlevi olacağından fazla bir zorluk getirmez. Yani, sonuç olarak $f_0(x)$ 'in eksilenmeyen bir işlev olduğunu varsaymak bir genellik yitimine neden olmaz.

Genellik yitimsiz bir başka öngörüm de $f_0(x)$ işlevinin tekdüze (monoton) artan yapıda olduğunun varsayımıdır. Bunu da şöyle açıklayabiliriz: $f_0(x)$ 'in sürekli oluşu, onun aralık üzerinde, olsa olsa sonlu sayıda salınım yapacağını yani birbirini dönüşümlü olarak izleyen en küçük ve en büyük değerleri arasında ya tekdüze artacak ya da tekdüze azalacak biçimde değişeceğini gösterir. Tüm aralığı, herbirinde işlevimizin tekdüze değişim göstereceği alt aralıklara bölmek ve tümlevi de her biri bu aralıklardan biri üzerinde tanımlanan tümlevlerin toplamı olarak düşünmek olanaklıdır. Bu tümlevlerden her birinin sanki \mathcal{I} olarak verilmiş gibi ayrı ayrı işlenmesi bize tekdüzeliği sağlamış olacaktır. Ancak, böyle de olsa iki seçenekle karşı karşıya kalmamız söz konusudur. Bunlar tekdüze artma ve tekdüze azalma durumlarıdır. Tekdüze artış zaten öngörümün tabanıdır. Tekdüze azalma ise işlev yerine işlevin, o alt aralığın başlangıç noktasında kendisinin aldığı değerden çıkarılmasıyla oluşturulan işlevle çalışarak tekdüze azalma tek düze artma durumuna dönüştürülebilir. Bu durumda işlev değiştirilmesinden kaynaklanan fark bir sabitin tümlevidir ve sorun yaratmaz. Böylelikle öngörümümüzün geçerli olduğu kanıtlanmış olur.

Burada, olası büküm noktası varlığı yoksayılmıştır. Bu yoksayım yapılmasaydı incelemeler gereğinden çok karmaşıklaşacaktı. Buradaki amaç da gereğinden çok ayrıntıyla ulaşmak değildir. Tez danışmanı bu yolda yönlendirim yapmıştır.

Artık $f_0(x)$ için eksilenmeyen ve tekdüze artan varsayımını kullanarak aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \int_0^1 dx f_0(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} dx f_0(x) + \int_{\frac{1}{2}}^1 dx f_0(x) \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \left[f_0(x) + f_0\left(x + \frac{1}{2}\right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[f_0\left(\frac{x}{2}\right) + f_0\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) \right] \tag{4.79}
\end{aligned}$$

Eğer burada,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \left[f_0 \left(\frac{x}{2} \right) + f_0 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (4.80)$$

tanımı yapılacak olursa, (4.79) yerine

$$\mathcal{I} = \int_0^1 dx \varphi(x) \quad (4.81)$$

yazılabilir. (4.80) eşitliğinde türevlemeyle

$$\varphi'(x) = \frac{1}{4} \left[f_0' \left(\frac{x}{2} \right) + f_0' \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (4.82)$$

yazılabilir. $f_0(x)$ 'in eksilenmeyen ve tekdüze artan bir işlev olması nedeniyle bu eşitliğin sağ yanı eksi değer alamaz. Üstelik tekdüzelik ve bükümsüzlük nedeniyle f_0 türevlerinin alacağı bir en küçük değer varolmalıdır. $\varphi'(x)$ bu değer yarısından büyük olmalıdır. yani aralık yarılama ile türev değeri yarısına indirgenmektedir. Yani işlev düzleştirilmektedir.

Biraz önce $e^{\alpha x}$ için bu doğrultuda başka işlevler için de gerçekleştirilebilir. Burada bu işlevden sonraki ikinci örnek olarak

$$f_0(x) \equiv \sqrt{1 + \alpha x} \quad (4.83)$$

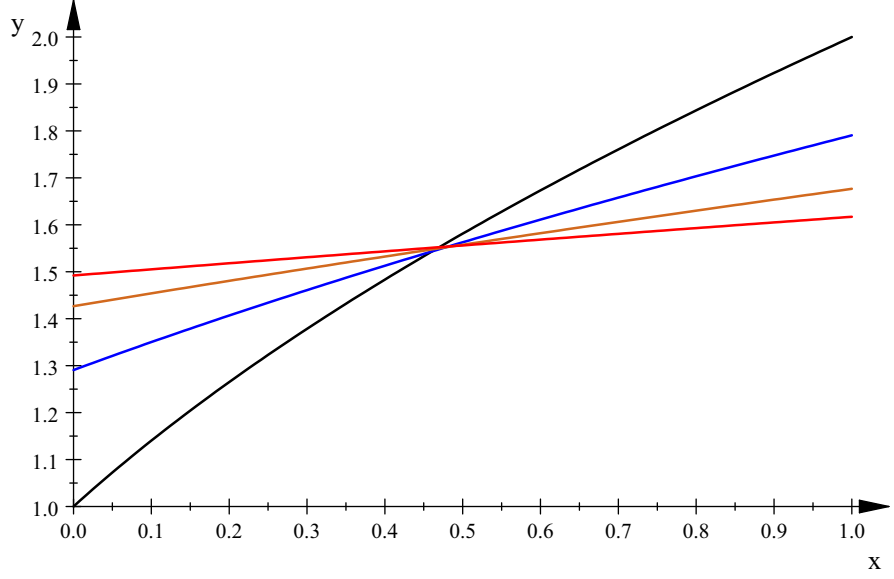
işlevini alacağız. Bu durumda ardışık aralık yarılama yoluyla elde edilen işlevler açık yapılarıyla aşağıda verilmektedir.

$$\varphi_1(x) \equiv \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{\alpha}{2}x} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\alpha}{2}x} \quad (4.84)$$

$$\varphi_2(x) \equiv \frac{1}{2} \varphi_1 \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \varphi_1 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) \quad (4.85)$$

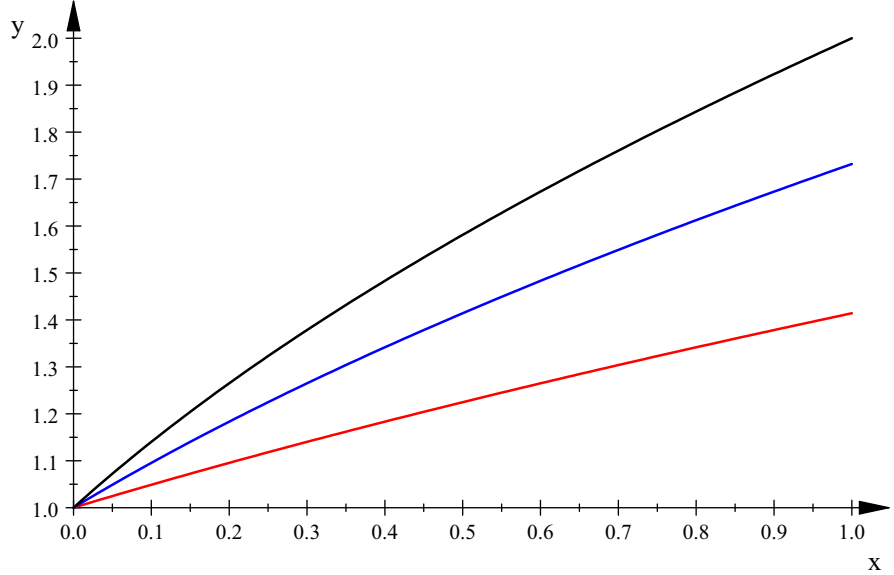
$$\varphi_3(x) \equiv \frac{1}{2} \varphi_2 \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{1}{2} \varphi_2 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) \quad (4.86)$$

$f_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ve de, $\varphi_3(x)$ işlevlerinin çizimleri Şekil 4.7'de verilmektedir. Orada, $f_0(x)$ siyah, $\varphi_1(x)$ mavi, $\varphi_2(x)$ çikolata rengi, ve de, $\varphi_3(x)$ kırmızı boyalı eğrilere karşılık gelmektedir. Görüldüğü gibi, yarılama arttırıldıkça oluşan tümlev çekirdeği hem doğrusallaşmakta hem de değişmez yapıya doğru gitmektedir. Yani aralık yarılama, gerçekten, tümlev çekirdeğindeki değişim hızını düşürmektedir.



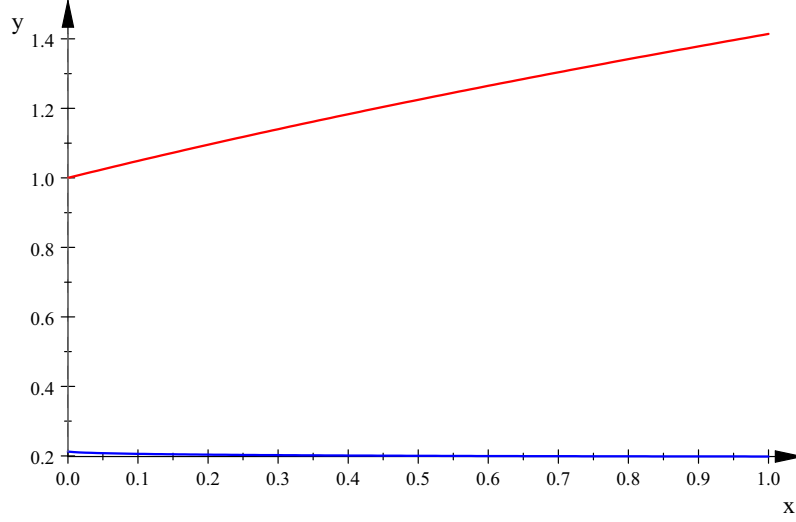
Şekil 4.7: *asıl işlevin $\sqrt{1+3x}$ alındığı durumda $f_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ve de, $\varphi_3(x)$ işlevlerinin $[0, 1]$ aralığı üzerinde, değişimleri.*

bu çizim de Şekil 4.6'ya çok benzeyen bir görünüm vermektedir. Bu arada, bu ikinci örnekteki işlev için α artı olarak arttıkça işlevdeki artış tekdüze olarak hızlanmaktadır. Bu durum görsel olarak Şekil 4.8'de verilmektedir. Orada kırmızı, mavi, ve de, siyah boyalı eğriler, sırasıyla, $\alpha = 1$, $\alpha = 2$, ve de, $\alpha = 3$ değerlerine karşılık olarak oluşturulmuşlardır.

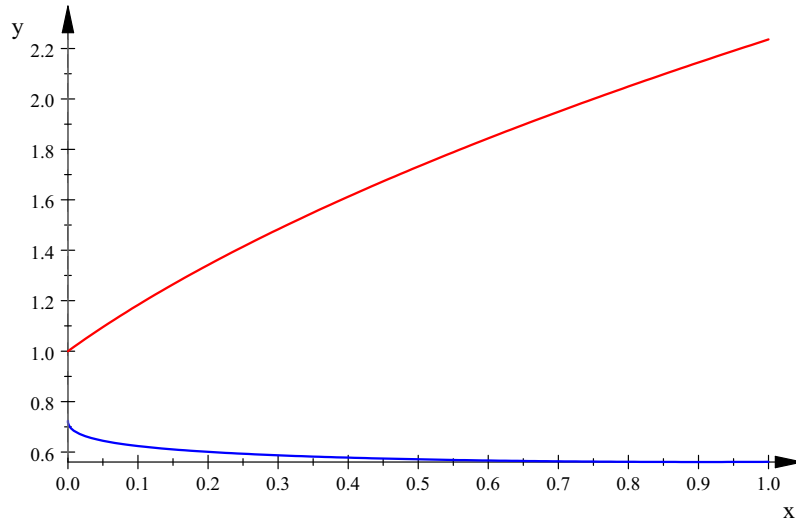


Şekil 4.8: *$\sqrt{1+\alpha x}$, $\sqrt{1+2\alpha x}$, ve de, $\sqrt{1+3\alpha x}$, işlevlerinin $[0, 1]$ aralığı üzerinde, değişimleri.*

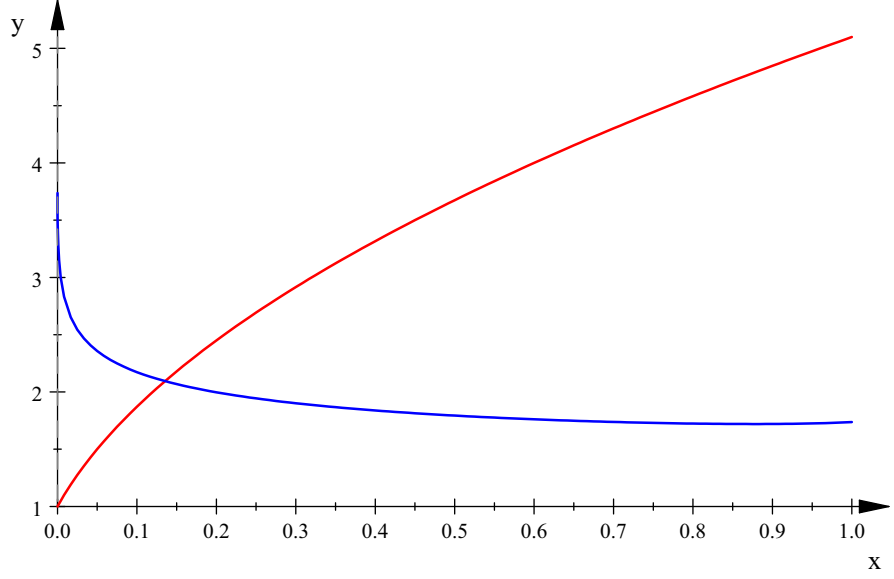
Bu çizim de daha önceden $e^{\alpha x}$ için verilen çizime çok benzer bir yapı göstermektedir. Ancak $\sqrt{1 + \alpha x}$ işlevinin ilgili aralığımızda aldığı en yüksek değer olan $\sqrt{1 + \alpha}$ değeri, artı olan büyük α değerleri için, $e^{\alpha x}$ 'in aynı aralıktaki en yüksek değeri olan e^{α} 'dan çok küçüktür. Bu yüzden, daha önceden $\alpha = 10$ için karşılaşılan olumsuzluk burada çok daha büyük α değerlerinde ortaya çıkacaktır.



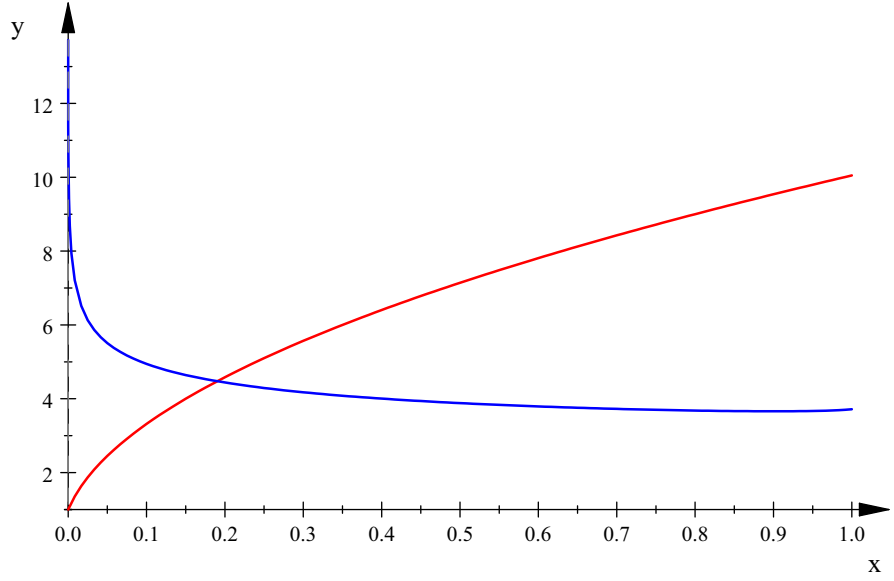
Şekil 4.9: $\sqrt{1 + x}$ işlevi için $f_0(x)$ (kırmızı) ve $f_1(x)$ (mavi) işlevlerinin $[0, 1]$ aralığı üzerinde, değişimleri.



Şekil 4.10: $\sqrt{1 + 4x}$ işlevi için $f_0(x)$ (kırmızı) ve $f_1(x)$ (mavi) işlevlerinin $[0, 1]$ aralığı üzerinde, değişimleri.



Şekil 4.11: $\sqrt{1 + 25x}$ işlevi için $f_0(x)$ (kırmızı) ve $f_1(x)$ (mavi) işlevlerinin $[0, 1]$ aralığı üzerinde, değişimleri.



Şekil 4.12: $\sqrt{1 + 100x}$ işlevi için $f_0(x)$ (kırmızı) ve $f_1(x)$ (mavi) işlevlerinin $[0, 1]$ aralığı üzerinde, değişimleri.

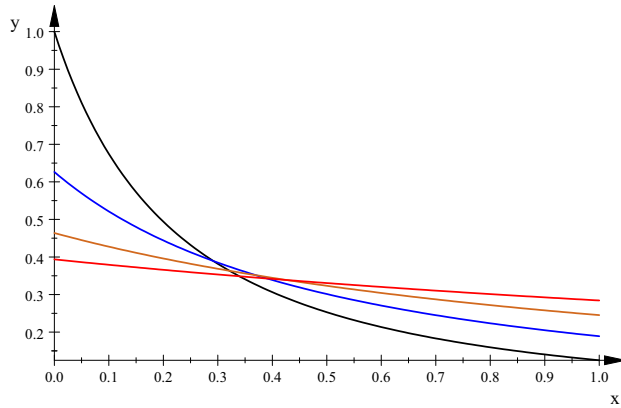
Bu örnekte karekök işlevi üzerinde durduk. $\sqrt{1 + \alpha x}$ işlevi α eksilenmedikçe $[0, 1]$ aralığında bir tekillik üretmez. Ama $x = -\frac{1}{\alpha}$ değerinde bir tekilliği vardır ve bu dallanma tekilliği türündedir. Eğer incelemeleri karmaşık (kompleks) düzleme taşımak istersek, karmaşık değerliliği vurgulamak için x yerine

z simgesini kullanabilir ve bu değişkenin değer alacağı düzlemi de z -karmaşık düzlemi olarak adlandırabiliriz. bu durumda gerçel eksenin $z_t = (\frac{1}{\alpha}, 0)$ ile gösterilen noktası bir dallanma tekilliğine karşılık gelir ve bu noktanın solunda işlevimiz gerçel değer üretmez. Ayrıca, tek değerlilik de, gerçekte, yoktur. İşlevimizin sonsuzda da dallanma tekilliği vardır. Aslında, dallanma tekillikleri hep çiftler olarak bulunur ve düzlemin bu noktaları birleştiren doğru kesimleriyle kesilerek Riemann yapraklarına ayrılması gerekir. Bizim durumumuzda, gerçel eksenin z_t 'nin solunda kalan kesimi kesme olarak düşünülebilir. Bir Riemann yaprağından diğerine geçişlerle tek değerlilik de sağlanır. Tekil noktanın bizim aralığımızdan uzak olmasının yöntemimize olumlu etkileri olacağını beklemek çok da yanlış değildir. Ancak, z_t 'nin tanımı α ne kadar büyürse tekillik de o kadar orijine yaklaşır anlamına gelir. α 'nın sonsuz limiti için ise tekillik orijine yerleşecektir. Bu durumda, tümlemlenen işlevimiz tekillik noktasında 0 değer alacaktır. Yani tekillikten sonsuza büyüme şeklinde bir etki görülmemektedir. Bu işlevin türevi ile çalışılırdı sonsuz büyüme ile karşılaşılacak ancak yine de tümlemlenebilirlik yitimi söz konusu olmayacaktı. Halbuki, ikinci türevde hem sonsuzluk hem de tümlemlenememezlik söz konusu olacaktı. Bütün bunlar, üçüncü örnek olarak

$$f_0 \equiv (1 + \alpha x)^{-\frac{3}{2}} \quad (4.87)$$

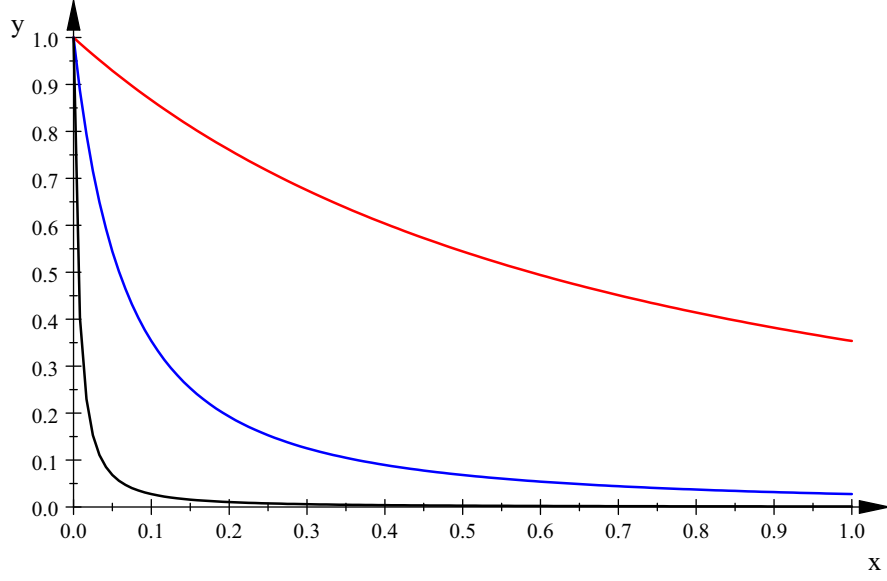
seçimini anlamlı kılar.

Bu işlev için $\alpha = 3$ $f_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ve de, $\varphi_3(x)$ işlevlerinin çizimleri Şekil 4.13'te verilmektedir. Orada, $f_0(x)$ siyah, $\varphi_1(x)$ mavi, $\varphi_2(x)$ çikolata rengi, ve de, $\varphi_3(x)$ kırmızı boyalı eğrilere karşılık gelmektedir. Gözlemler daha öncekilerle tam bir uyum içindedirler. Yani aralık yarılama, gerçekten, tümlev çekirdeğindeki değişim hızını düşürmektedir.



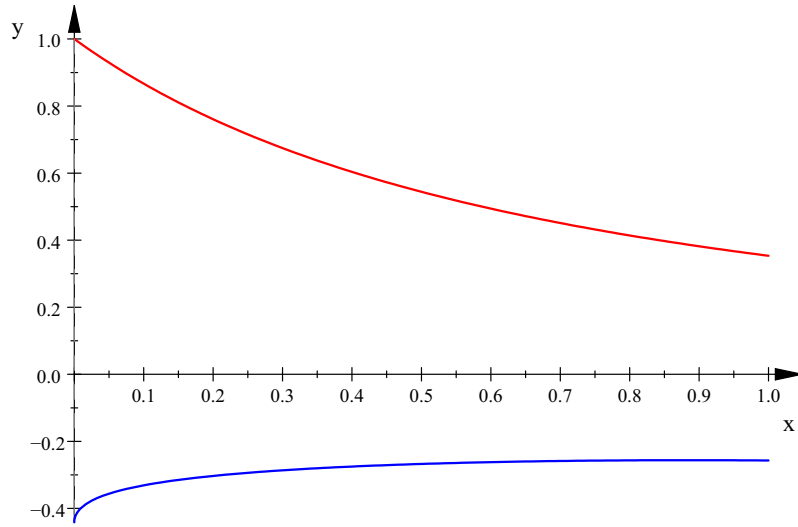
Şekil 4.13: *asıl işlevin $(1 + x)^{-\frac{3}{2}}$ alındığı durumda $f_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ve de, $\varphi_3(x)$ işlevlerinin $[0, 1]$ aralığı üzerinde, değişimleri.*

Şekil 4.14'te kırmızı, mavi, ve de, siyah boyalı eğriler, sırasıyla, $\alpha = 1$, $\alpha = 10$, ve de, $\alpha = 100$ değerlerine karşılık olarak oluşturulmuşlardır.

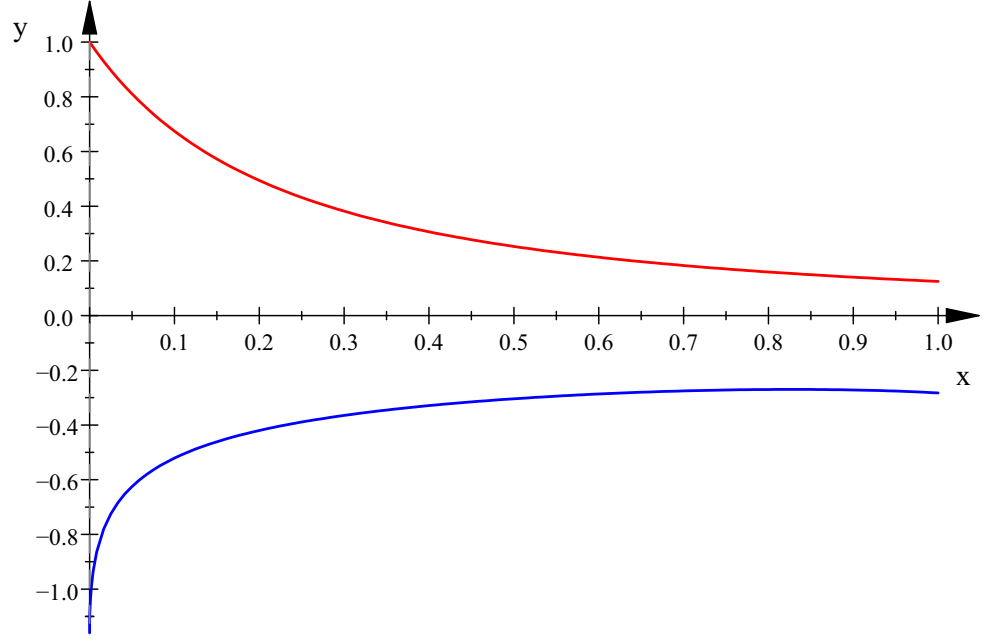


Şekil 4.14: $(1+x)^{-\frac{3}{2}}$, $(1+10x)^{-\frac{3}{2}}$, ve de, $(1+100x)^{-\frac{3}{2}}$ işlevlerinin $[0, 1]$ aralığı üzerinde, değişimleri.

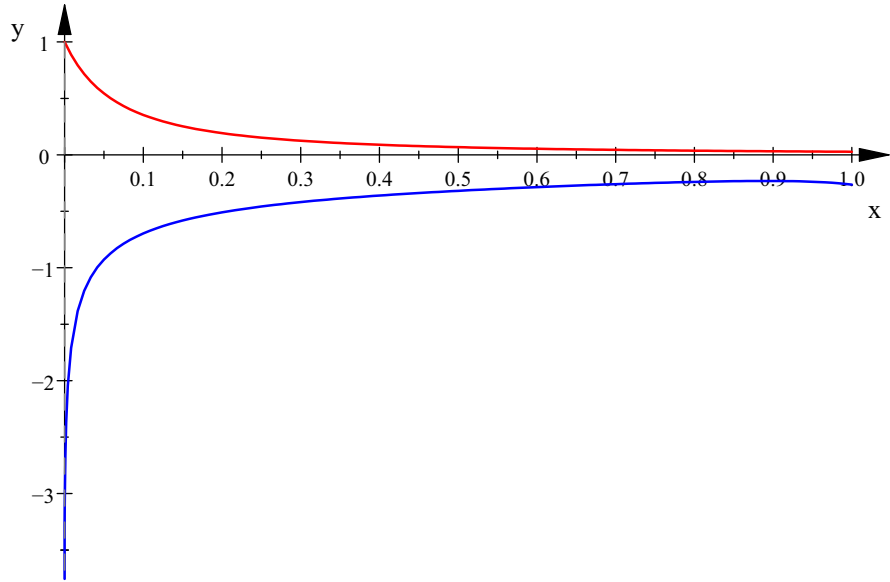
Bu çizim de daha önceden elde edilen karşılıklarıyla uyum içindedir. Hemen hemen aynı yorumlamaları yapmak olanaklıdır. Ancak, burada, α sonsuza giderken işlev de $\frac{1}{x\sqrt{x}}$ işleviyle orantılı bir davranış gösterecek yani sonsuza gidecektir. Bu durum çizimde de açık olarak gözlenmektedir.



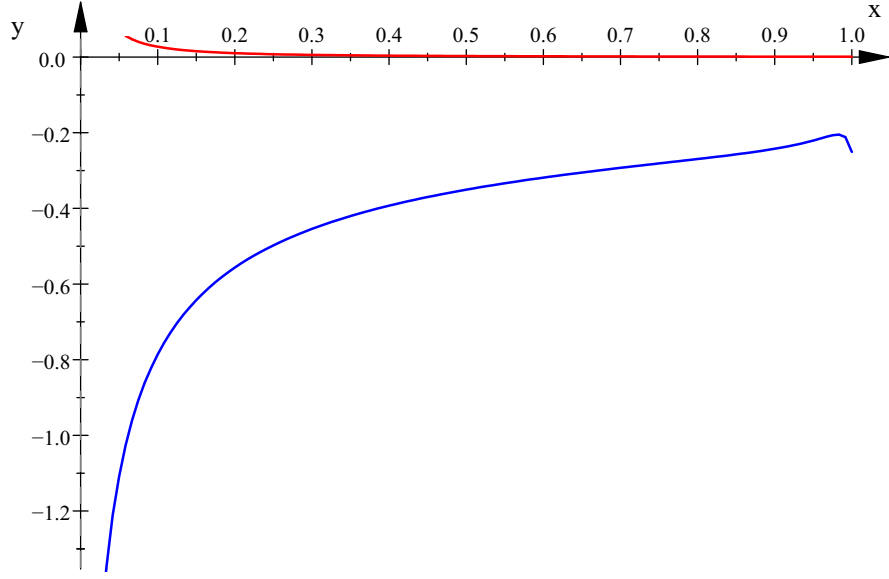
Şekil 4.15: $(1+x)^{-\frac{3}{2}}$ işlevi için $f_0(x)$ (kırmızı) ve $f_1(x)$ (mavi) işlevlerinin $[0, 1]$ aralığı üzerinde, değişimleri.



Şekil 4.16: $(1+x)^{-\frac{3}{2}}$ işlevi için $f_0(x)$ (kırmızı) ve $f_1(x)$ (mavi) işlevlerinin $[0, 1]$ aralığı üzerinde, değişimleri.



Şekil 4.17: $(1+x)^{-\frac{3}{2}}$ işlevi için $f_0(x)$ (kırmızı) ve $f_1(x)$ (mavi) işlevlerinin $[0, 1]$ aralığı üzerinde, değişimleri.



Şekil 4.18: $(1+x)^{-\frac{3}{2}}$ işlevi için $f_0(x)$ (kırmızı) ve $f_1(x)$ (mavi) işlevlerinin $[0, 1]$ aralığı üzerinde, değişimleri.

Bu örneklemeler daha zenginleştirilebilir. Sözelimi, yalıtılmış tekillikler ya da çok daha özel yapılarla ilgilenilebilir. Ancak, tez danışmanının yönlendirmesi doğrultusunda, bu konu üzerinde bu kadar içerikle yetinilecektir.

4.4 Diğer Bir İki Nokta

Son alt bölümde verilen Ölçeklemeli Tümlev Katlama İşlemlerini özyinelemeli (ing: recursive) olarak gerçekleştirmek de olanaklıdır. Tez danışmanı bu konuda da çalışmalar sürdürmekte ve gelecekte başka tezlerde ya da bilimsel araştırmalarda bu konunun çeşitli yönlerine salt kendisi olarak ya da öğrencileri veya çalışma arkadaşlarıyla odaklanmak istemektedir. Ancak, bu tezde, bu tür bir çalışmaya yönelmeyi gereğinden çok olarak görmekte olduğundan bu doğrultuya giilmemiştir. Aynı durum sonsuz ya da yarı sonsuz aralıklar durumu için de geçerlidir.

5. SENDELENİMSİZLİK YAKLAŞTIRIMLI VE KATLAMALI SAYISAL TÜMLEVLEME

5.1 Yöntemin Kuramsal Tabanı

Bu bölümde, 3. Bölüm'de sunulan sendelenimsizlik yaklaşımını ile 4. Bölüm'de sözü edilen tümlev katlama düşüncesi birleştirilmekte böylelikle iki etkin yapı, bir anlamda, birleştirilmektedir. Sendelenimsizlik yaklaşımının etkinliğinden 3. Bölüm'de sözedilmiş ve değişik işlevsel yapıları üç örnekteki incelemeler sunulmuştur. Bu arada, çalışılan altuzayın boyutunun arttırılmasıyla nitelik artımı sağlanacağı da vurgulanmıştır. Öte yandan, tümlev katlama diye adlandırılan ve aralığın alt aralıklara bölünüp bunların üzerindeki tümlevlerin bütünleştirilmesiyle tümlevlenen işlevin daha düzgün bir işleve dönüştürülebileceği de 4. Bölüm de vurgulanmıştır. Burada bu iki gücün birleştirilmesi sağlanmaktadır. Yapı oldukça yalın olmakla birlikte ardışık katlamalarla yakınsama gücünü daha da arttırmak olanaklıdır. Ancak, burada tek bir katlamanın gerçekleştirildiği durum gündeme getirilecektir. Bu kesim de tezin özgün içerikli katmanlarından birini oluşturmaktadır. Yalınlık açısından ağırlık işlevi olarak değeri 1 olan değişmez işlev seçilmektedir.

Kuramı anlatabilmek için aşağıdaki işlevi gözönüne alalım.

$$\mathcal{I} \equiv \int_0^1 dx f(x) \quad (5.1)$$

Buna aralık yarılama tabanlı katlama işlemi uygulanırsa

$$f_1(x) \equiv \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) \quad (5.2)$$

olmak üzere

$$\mathcal{I} \equiv \int_0^1 dx f_1(x) \quad (5.3)$$

yazılabilir. Buna sendelenimsizlik yaklaşımını uygulanacak olursa

$$\mathcal{I} \approx f_1\left(\mathbf{X}^{(n)}\right) \quad (5.4)$$

elde edilir. Bu bölümde kullanılacak yaklaşım bağıntısı ya da kuramsal taban budur.

5.2 Örnek uygulamalar

Bu altbölümde 3.3 alt bölümündeki örneklere bu yeni yaklaşım uygulanmaktadır. Aynı işlevler, aynı görsel nitelikli çizimlerle sunulmaktadır. Oradaki anlatımlar da neredeyse olduğu gibi buraya alınmaktadır. Yöntem değişiminden kaynaklanan belirtilmesi gereken öğeler devreye alınmaktadır.

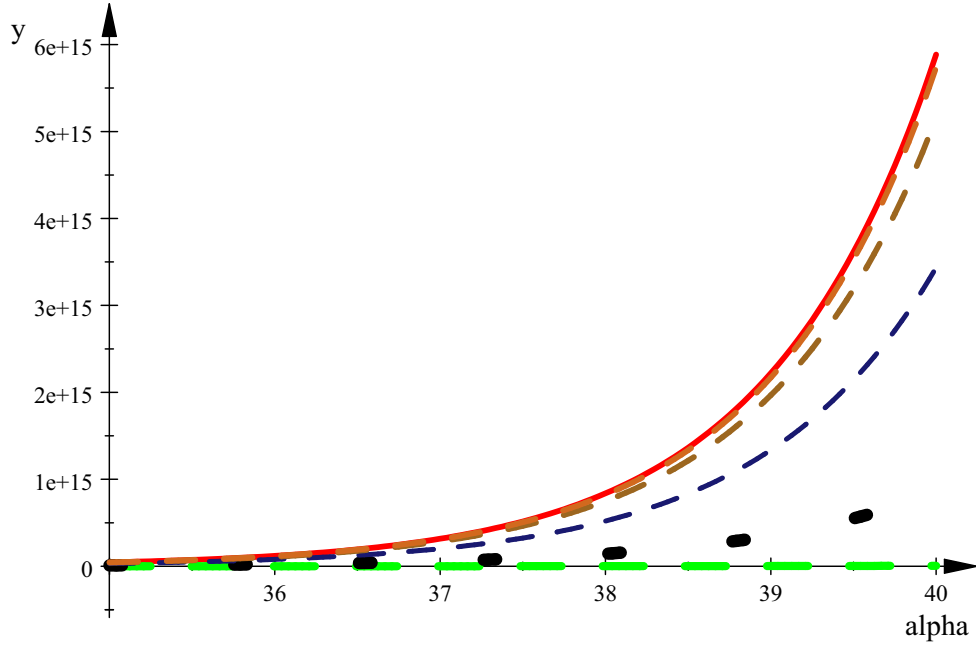
İlk olarak bu yaklaşımın

$$f(x) \equiv e^{\alpha x} \quad (5.5)$$

işlevine uygulanmasını gündeme getirebiliriz. Bu işlevin tümlevi analitik olarak verilebilmektedir.

$$\int_0^1 dx f(x) \equiv \frac{e^{\alpha} - 1}{\alpha} \quad (5.6)$$

Bu işlev için analitik sonucun ve kerteleri 1'den başlayıp 5'te sonlanan sendelenim yaklaşımlarının α değiştirgesine göre değişimleri Çizim 5.2.1'de verilmektedir.



Şekil 5.1: $e^{\alpha x}$ işlevi için kesin tümlev değeri ile ilk beş sendelenim yaklaşımlarının α 'ya göre değişimleri.

Bu eğrilerden kırmızı boyalı ve sürekli olanı tümlevin analitik olarak elde edilen kesin anlatımına karşılık gelmektedir. Diğer eğrilerden yeşil olanı birinci, siyah olanı ikinci, geceyarısı mavisi olanı üçüncü, tuğla kırmızısı dördüncü, ve de, çikolata rengi olanı beşinci kereden sendelenimsizlik yaklaşımlarına karşılık gelmektedir. Burada kerte n değerine yani kullanılan

alt uzayın boyutuna karşılık gelmektedir. Kerte artışının nitelikte çok hızlı artışlara neden olduğ~ bu çizimdeki eğrilerden kolaylıkla anlaşılacaktır. Gözlemlerimizde α değıştirgesinin değışim aralığı olarak $[0, 40]$ seçilmiştir. Burada açık olarak verilmemekle birlikte vurgulanmasında büyük yarar olan gerçek, $\alpha = 1$ dolaylarında, beşinci kereden yaklaştırmada kesin tümlev değerininde elde edilen ondalık basamaklarının sayısının 9 ya 10 gibi değerler almasıdır. α arttıkça duyarlık yitimi de artmaktadır. Bu da doğaldır ve 4. ile 5. bölümlerde ayrımlarını vereceğimiz tümlev katlama teknikleriyle bu yitimi geri kazanmak olanaklıdır. Öyle yapılmazsa kerte artımına gidilmesi gerekecektir ki bu da, bugünün bilgisayar olanakları çerçevesinde, pek de zor bir eylem değildir.

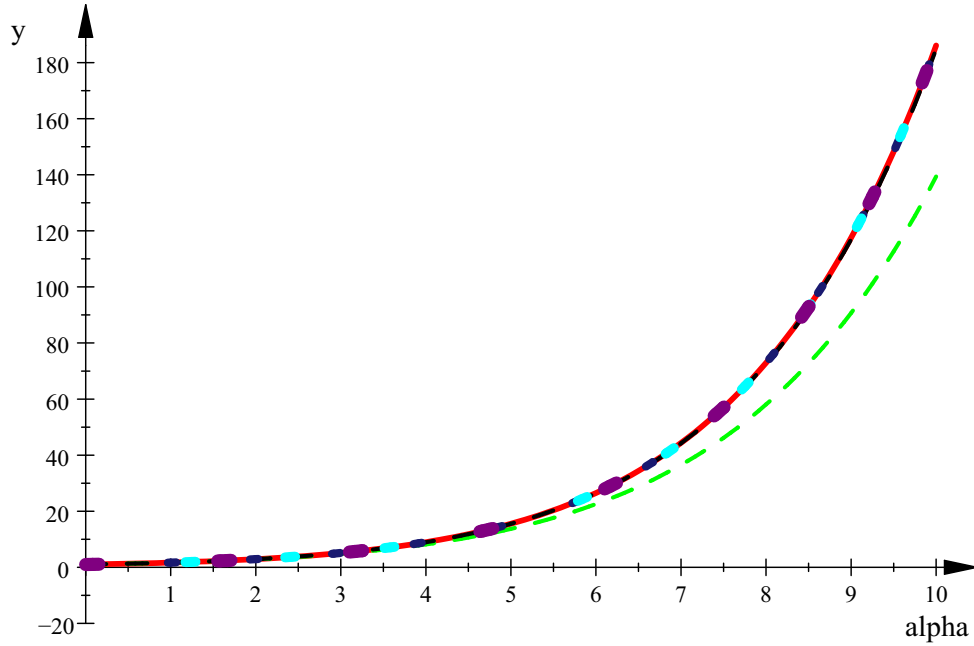
İkinci olarak sendelenimsizlik yaklaştırımın

$$f(x) \equiv \left(1 + \frac{\alpha x}{10}\right)^{10} \quad (5.7)$$

işlevine uygulanmasını gündeme getirebiliriz. bu işlevin tümlevi analitik olarak verilebilmektedir.

$$\int_0^1 dx f(x) \equiv \frac{10 \left(1 + \frac{\alpha}{10}\right)^{m+1} - 1}{11\alpha} \quad (5.8)$$

Bu işlev için analitik sonucun ve kerteleri 1'den başlayıp 5'te sonlanan sendelenim yaklaştırımlarının α değıştirgesine göre değışimleri Şekil 5.2'de verilmektedir.



Şekil 5.2: $\left(1 + \frac{\alpha x}{10}\right)^{10}$ işlevi için kesin tümlev değeri ile ilk beş sendelenim yaklaştırımlarının α 'ya göre değışimleri.

Bu eğrilerden kırmızı boyalı ve sürekli olanı tümlevin analitik olarak elde edilen kesin anlatımına karşılık gelmektedir. Diğer eğrilerden yeşil olanı birinci, siyah olanı ikinci, geceyarısı mavisi olanı üçüncü, siyanür mavisi olanı dördüncü, ve de, mor olanı beşinci kereden sendelenimsizlik yaklaşımlarına karşılık gelmektedir. Burada da kerte n değerine yani kullanılan alt uzayın boyutuna karşılık gelmektedir. Bu çizimde de, kerte artışının nitelikte çok hızlı artışlara neden olduğ^u bu çizimdeki eğrilerden kolaylıkla anlaşılmaktadır. Gözlemlerimizde α değıştirgesinin değışim aralığı olarak $[0, 10]$ seçilmiştir. Önceki çizim eğrileri için söylenenlere ek olarak burada tam çakışmanın gözleendiğinin de birlikte vurgulanmasında büyük yarar bulunmaktadır.

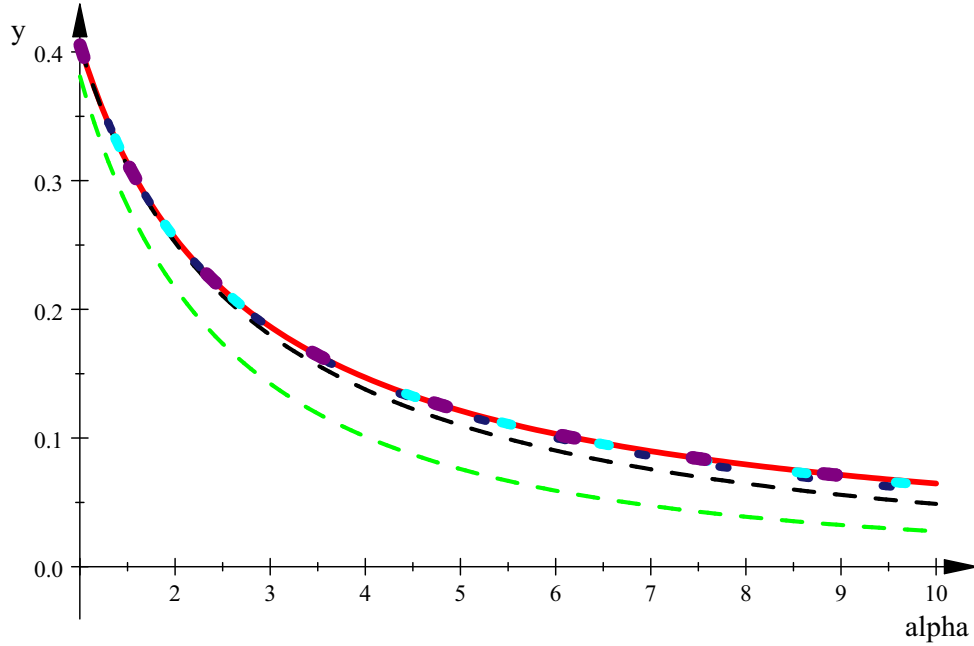
Üçüncü olarak sendelenimsizlik yaklaşımının

$$f(x) \equiv \frac{1}{(1 + \alpha x)(1 + 2\alpha x)} \quad (5.9)$$

işlevine uygulanmasını gündeme getirebiliriz. bu işlevin tümlevi analitik olarak verilebilmektedir.

$$\int_0^1 dx f(x) \equiv -\frac{1}{\alpha} \ln(1 + \alpha) + \frac{1}{\alpha} \ln(1 + 2\alpha) \quad (5.9)$$

Bu işlev için analitik sonucun ve kerteleri 1'den başlayıp 5'te sonlanan sendelenim yaklaşımlarının α değıştirgesine göre değışimleri Şekil 5.3'te verilmektedir.



Şekil 5.3: $\frac{1}{(1+\alpha x)(1+2\alpha x)}$ işlevi için kesin tümlev değeri ile ilk beş sendelenim yaklaşımlarının α 'ya göre değışimleri.

Bu eğrilerden kırmızı boyalı ve sürekli olanı tümlevin analitik olarak elde edilen kesin anlatımına karşılık gelmektedir. Diğer eğrilerden yeşil olanı birinci, siyah olanı ikinci, geceyarısı mavisi olanı üçüncü, siyanür mavisi olanı dördüncü, ve de, mor olanı beşinci kereden sendelenimsizlik yaklaşımlarına karşılık gelmektedir. Burada da kerte n değerine yani kullanılan alt uzayın boyutuna karşılık gelmektedir. Bu çizimde de, kerte artışının nitelikte çok hızlı artışlara neden olduğ^u bu çizimdeki eğrilerden kolaylıkla anlaşılmaktadır. Gözlemlerimizde α değıştirgesinin değışim aralığı olarak $[0, 10]$ seçilmiştir. Önceki çizim eğrileri için söylenenler burada da geçerliliğini korumaktadır.

Bundan önceki iki uygulamada da, $f(x)$ 'in sonlu x değerlerinde tekilliğı olmadığı açıktır. Üstelik, ikinci uygulamada işlev olarak bir çokterimli seçilmiştir. Bu uygulamada ise işlevin eksi x değerlerinde, iki, kutup türü, tekilliğı bulunmaktadır. Ancak, onların bu çizimlerden görünür bir katkıları olmadığını söylenebileceğinin akla geleceğini yadsımamak gerekir. Yine de buradaki çizimlerdeki α değerleri dışındaki α 'lar için beklenmedik gözlemlerle karşılaşılabilceğinin akılda tutulması gerekmektedir. Bu tür yaygın gözlemler, bu tez çalışmasında, gerçekleştirilmemiştir. Değışik bir iki işlev için değışik amaçlı uygulamalar gelecek iki bölümde verilecektir.

KAYNAKLAR

- [1] **Davis, P. and Robinowitz, P.**, 1984. *Methods of Numerical Integration*, Academic Press, New York.
- [2] **Quarteroni, A., Sacco, R., Saleri, F.**, 2000. *Numerical Mathematics*, Springer, New York.
- [3] **Raltson, P. and Rabinowitz, P.**, 2001. *A First Course in Numerical Analysis*, Dover Publications, New York.
- [4] **Demiralp, M.**, 2005. A new fluctuation expansion based method for the univariate numerical integration under gaussian weights, *WSEAS*, Tenerife.
- [5] **Demiralp, M.**, 2005. A new fluctuation expansion based method for the univariate numerical integration under gaussian weights, *WSEAS*, Tenerife.
- [6] **Gauss, C.F.**, 1986. *Disquisitiones Arithmeticae*, Springer, New York.
- [7] **Laurie, D.P.**, 2001. Computation of Gauss-type quadrature formulas, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **127**, 201-217.
- [8] **Whittaker, E.T. and Robinson, G.**, 1967. The calculus of observations: A treatise on numerical mathematics, in *Gauss's Formula of Numerical Integration*, 152-163, Fourth Ed. Dover, New York.
- [9] **Gautschi, W.**, 2004. *Orthogonal Polynomials: Computation and Approximation*, Oxford University Press, Oxford, UK.
- [10] **Aptekarev, A.I.**, 1998. Multiple orthogonal polynomials, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **99**, 423-447.

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Ordu'da doğdu. Aralık 2003'te Ankara Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümünden mezun oldu. Eylül 2004'te İTÜ Bilişim Enstitüsü, Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik yüksek lisans programına kabul edildi.