

**SAYISAL TÖMLEVLEME İÇİN
TABAN TAKİMİNCA GENİŞLETİLMİŞ SENDELENİM AÇILIMLARINDA
BAZI ÖNEMLİ NOKTALAR**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Coşar GÖZÜKIRMIZI

Anabilim Dalı : BİLİŞİM

Programı : HESAPLAMALI BİLİM VE MÜHENDİSLİK

OCAK 2009

**SAYISAL TÖMLEVLEME İÇİN
TABAN TAKIMINCA GENİŞLETİLMİŞ SENDELENİM AÇILIMLARINDA
BAZI ÖNEMLİ NOKTALAR**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Coşar GÖZÜKIRMIZI

(702061012)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 29 Aralık 2008

Tezin Savunulduğu Tarih : 21 Ocak 2009

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Metin DEMİRALP

Diğer Jüri Üyeleri Prof. Dr. Ulviye BAŞER (İTÜ)

Doç. Dr. N. Abdölbaki BAYKARA (Marmara Üniversitesi)

Yrd. Doç. Dr. Lale T. ERGENE (İTÜ)

OCAK 2009

ÖNSÖZ

Türkiye’de bilim ile uğraşmanın hala olanaklı olmasını sağlayan Mustafa Kemal Atatürk’ün aydınlarına teşekkür ederim.

Ocak 2009

Coşar GÖZÜKIRMIZI

İÇİNDEKİLER

ÇİZELGE LİSTESİ	vi
ÇİZİM LİSTESİ	vii
SİMGE LİSTESİ	x
ÖZET	xi
SUMMARY	1
1. GİRİŞ	1
1.1. Sayısal Tümlenimde Temel Yöntemler	1
1.2. Gauss Dördüllemesi	4
1.3. Tezin Amacı	5
2. DİZEY GÖSTERİLİMİNDE SENDELENİMSİZLİK YAKLAŞTIRIMI	7
2.1. Giriş	7
2.2. Dizey Gösteriliminin Elde Edinimi ve Sendelenimsizlik Kanıtı	7
3. SENDELENİM TERİMLERİNİN ELDE EDİNİMİ VE KULLANIMI	13
3.1. Sendelenim Açılımında Sendelenim Terimleri	13
3.2. Sendelenim Katsayılarının Belirlenmesi	15
3.3. Sınama Uygulamaları	18
4. SENDELENİMSİZLİK VE GAUSS DÖRDÜLLEMESİ	21
4.1. Giriş	21
4.2. Altuzay içinde altuzay döndürümü	27
4.3. Sınama Uygulamaları	29
5. SONUÇ VE ÖZGÜN KATKILAR	55
KAYNAKLAR	57
EKLER	59
A. EKLER	59
ÖZGEÇMİŞ	61

ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Çizelge 3.1 Sendelenim kertesine göre tümlev değerleri	20
Çizelge 4.1 Gauss dördüllemesi ve tek döndürümlü dördüllemede tümlev sendelenimleri.	31
Çizelge 4.2 Tek döndürümlü dördüllemede doğrusal birleştirim katsayıları.	38
Çizelge A.1 İki boyutlu altuzay durumunda dördülleme düğüm noktaları.	59
Çizelge A.2 İki boyutlu altuzay durumunda dördülleme ağırlık değerleri. .	59
Çizelge A.3 Altı boyutlu altuzay durumunda dördülleme düğüm noktaları.	59
Çizelge A.4 Altı boyutlu altuzay durumunda dördülleme ağırlık değerleri.	59
Çizelge A.5 On boyutlu altuzay durumunda dördülleme düğüm noktaları.	60
Çizelge A.6 On boyutlu altuzay durumunda dördülleme ağırlık değerleri. .	60

ÇİZİM LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Çizim 4.1 : $e^{\alpha x}$ işlevi için iki boyutlu altuzay kullanılarak oluşturulan dördüllemelerin bağıl yanılıgılarının α 'ya göre değişimleri ([1,10] aralığı için)	32
Çizim 4.2 : $e^{\alpha x}$ işlevi için iki boyutlu altuzay kullanılarak oluşturulan dördüllemelerin bağıl yanılıgılarının α 'ya göre değişimleri ([10,20] aralığı için)	33
Çizim 4.3 : $e^{\alpha x}$ işlevi için iki boyutlu altuzay kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ([0,5] aralığı için)	33
Çizim 4.4 : $e^{\alpha x}$ işlevi için iki boyutlu altuzay kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ([5,10] aralığı için)	34
Çizim 4.5 : $e^{\alpha x}$ işlevi için iki boyutlu altuzay kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ([10,15] aralığı için)	34
Çizim 4.6 : $e^{\alpha x}$ işlevi için iki boyutlu altuzay kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ([15,20] aralığı için)	35
Çizim 4.7 : $e^{\alpha x}$ işlevi için altı boyutlu altuzay kullanılarak oluşturulan dördüllemelerin bağıl yanılıgılarının α 'ya göre değişimleri ([1,10] aralığı için)	36
Çizim 4.8 : $e^{\alpha x}$ işlevi için altı boyutlu altuzay kullanılarak oluşturulan dördüllemelerin bağıl yanılıgılarının α 'ya göre değişimleri ([10,20] aralığı için)	36
Çizim 4.9 : $e^{\alpha x}$ işlevi için on boyutlu altuzay kullanılarak oluşturulan dördüllemelerin bağıl yanılıgılarının α 'ya göre değişimleri ([1,10] aralığı için)	37
Çizim 4.10 : $e^{\alpha x}$ işlevi için on boyutlu altuzay kullanılarak oluşturulan dördüllemelerin bağıl yanılıgılarının α 'ya göre değişimleri ([10,20] aralığı için)	37
Çizim 4.11 : $e^{\alpha x}$ işlevi için on boyutlu altuzay kullanılarak oluşturulan dördüllemelerin bağıl yanılıgılarının α 'ya göre değişimleri ([1,10] aralığı için)	39
Çizim 4.12 : $e^{\alpha x}$ işlevi için on boyutlu altuzay kullanılarak oluşturulan dördüllemelerin bağıl yanılıgılarının α 'ya göre değişimleri ([10,20] aralığı için)	39
Çizim 4.13 : $\cos(\alpha x)$ işlevi için iki boyutlu altuzay kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ([0,5] aralığı için)	40

Çizim 4.14:	$\cos(\alpha x)$ işlevi için iki boyutlu altuzay kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[5, 10]$ aralığı için)	41
Çizim 4.15:	$\cos(\alpha x)$ işlevi için iki boyutlu altuzay kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[10, 15]$ aralığı için)	41
Çizim 4.16:	$\cos(\alpha x)$ işlevi için iki boyutlu altuzay kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[15, 20]$ aralığı için)	42
Çizim 4.17:	$\cos(\alpha x)$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[0, 5]$ aralığı için)	43
Çizim 4.18:	$\cos(\alpha x)$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[5, 10]$ aralığı için)	43
Çizim 4.19:	$\cos(\alpha x)$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[10, 15]$ aralığı için)	44
Çizim 4.20:	$\cos(\alpha x)$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[15, 20]$ aralığı için)	44
Çizim 4.21:	$\ln(1 + \alpha x)$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[0, 5]$ aralığı için)	45
Çizim 4.22:	$\ln(1 + \alpha x)$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[5, 10]$ aralığı için)	45
Çizim 4.23:	$\ln(1 + \alpha x)$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[10, 15]$ aralığı için)	46
Çizim 4.24:	$\ln(1 + \alpha x)$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[15, 20]$ aralığı için)	46
Çizim 4.25:	$\sqrt{1 + \alpha x}$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[0, 5]$ aralığı için)	47
Çizim 4.26:	$\sqrt{1 + \alpha x}$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[5, 10]$ aralığı için)	47
Çizim 4.27:	$\sqrt{1 + \alpha x}$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[10, 15]$ aralığı için)	48
Çizim 4.28:	$\sqrt{1 + \alpha x}$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[15, 20]$ aralığı için)	48
Çizim 4.29:	$\frac{1}{1 + \alpha x}$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[0, 5]$ aralığı için)	49

Çizim 4.30:	$\frac{1}{1+\alpha x}$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[5, 10]$ aralığı için)	49
Çizim 4.31:	$\frac{1}{1+\alpha x}$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[10, 15]$ aralığı için)	50
Çizim 4.32:	$\frac{1}{1+\alpha x}$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[15, 20]$ aralığı için)	50
Çizim 4.33:	$(1 + \alpha x)^{20}$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[0, 5]$ aralığı için)	51
Çizim 4.34:	$(1 + \alpha x)^{20}$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[5, 10]$ aralığı için)	52
Çizim 4.35:	$(1 + \alpha x)^{20}$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[10, 15]$ aralığı için)	52
Çizim 4.36:	$(1 + \alpha x)^{20}$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[15, 20]$ aralığı için)	53
Çizim 4.37:	$(1 + \alpha x)^{20}$ işlevi için beş boyutlu altuzay kullanılarak oluşturulan dördüllemelerin bağıl yanlıgılarının α 'ya göre değişimleri ($[1, 10]$ aralığı için)	53
Çizim 4.38:	$(1 + \alpha x)^{20}$ işlevi için beş boyutlu altuzay kullanılarak oluşturulan dördüllemelerin bağıl yanlıgılarının α 'ya göre değişimleri ($[10, 20]$ aralığı için)	54

SİMGE LİSTESİ

\mathbf{I}	: Birim dizey
\widehat{I}	: Birim işleç
$M(\widehat{I})$: Birim işlecin dizey gösterilimi
\mathcal{H}_n	: n boyutlu Hilbert uzayı
\widehat{x}	: Etkilenen işlevi bağımsız değişkeni ile çarpan işleç
\widehat{f}	: Etkilenen işlevi $f(x)$ işlevi ile çarpan işleç
\widehat{P}_n	: n sırasayılı taban işlevinin örttüğü uzaya izdüşüren işleç
$\widehat{P}^{(n)}$: İlk n taban işlevinin örttüğü uzaya izdüşüren işleç
δ_{ij}	: Tanım kümesinden i ve j işlevlerini alan Kronecker delta işlevi
$u_i(x)$: i sırasayılı taban işlevi
(u_i, u_j)	: u_i ve u_j işlevlerinin iççarpımı

SAYISAL TMLEVLEME İÇİN TABAN TAKIMINCA GENİŞLETİLMİŞ SENDELENİM AÇILIMLARINDA BAZI ÖNEMLİ NOKTALAR

ÖZET

Birçok disiplinde karŐılaŐılan sayısal tmlevleme sorununun çözümü için en çok kullanılan yöntem tümlevi alınacak tek değişkenli işlevin tmlevleme aralığındaki belirli noktalardaki değerlerinin belirli artıdeğerli katsayılar ile çarpılıp toplanmasına dayanan dördülleme yöntemleridir. Bilimsel yazında, bu yöntemlerin baŐlıcalarından biri olan Gauss dördüllemesinin J simgesi ile gösterilen Jacobi dizeyi olarak adlandırılan dizey ile ilintili olduğu gösterilmiŐtir. Jacobi dizeyinin öğeleri, tmlevleme aralığında çözümcül olan dördülü tmlevlenebilir çokterimliler uzayının taban işlevleri arasındaki özyineli ilişkinin katsayılarıdır. Bu uzayın boyutunun artırılması oluşan dördüllemenin düğüm sayısını ve dolayısıyla duyarlılığını artırmaktadır.

Bu çalışmada, sayısal tümlevlemenin yanılığını azaltmak için, uzay boyutunu artırmak yerine $n \times n$ boyutlu Jacobi dizeyinin oluşturulumunda ilgilenilen uzayı tümleyen sonsuz boyutlu uzayın etkilerini ilgilenilen uzaya yansıtılması yoluna gidilmiştir. Bu bağlamda, Metin Demiralp tarafından geliŐtirilen sendelenim açılımı yöntemini taban alan, Gauss dördüllemesinin duyarlılığını tümleyen uzayın etkilerini yansıtarak artıran yöntem geliştirilmesine yönelik adımlar atılmıŐtır.

ON THE APPLICATION OF THE FLUCTUATION EXPANSION WITH EXTENDED BASIS SET ON NUMERICAL INTEGRATION

SUMMARY

The problem of numerical integration is encountered in many areas of science and engineering. The most prominent methods for this purpose are known as quadrature methods. The approximation by these methods are formed by summing up the terms formed by the multiplication of certain positive weights with the values of the function at certain points in the integration interval. It is shown in scientific works that one of the most popular quadrature methods known as Gauss quadrature is strongly related to the Jacobi matrix symbolized by J . The elements of the Jacobi matrix are the coefficients of the recursive relation of the basis functions of an orthonormal polynomial space. Increasing the dimension of this finite space results in an increase in the number of nodes of the quadrature and therefore an increase in accuracy.

In this thesis, instead of increasing the number of nodes, the effects of the complementary space on the finite subspace under consideration are reflected to the formation of the $n \times n$ Jacobi matrix in order to decrease the error in the quadrature approximation. The fluctuation expansion method formed by Metin Demiralp is used for this end. Important steps are taken towards the formation of novel quadrature methods by reflecting the effects of the complementary space on the subspace under consideration.

1. GİRİŞ

1.1 Sayısal Tümlenmede Temel Yöntemler

Birçok mühendislik ve fen bilimi alanında ortaya çıkabilen sayısal tümlenme (ing: numerical integration) sorununun çözümü için birçok uziş (ing: algorithm) bulunmaktadır. Örneğin $[a, b]$ aralığında çözümcül (ing: analytic) olan $f(x)$ işlevinin (ing: function), yine aynı aralıkta birim ağırlık altında tümlenini bulabilmek için, işlevin aralık içerisindeki bir noktadaki Taylor açılımının tümleni alınabilir ve uygulamada istenen duyarlılığa göre sadece ilk birkaç Taylor terimi ile yetinilebilir. Bu yöntem, yapısı basit olmasına karşın, Taylor açılımının yalnızca açılım noktasının yakınında iyi yakınsamasından dolayı yeterli duyarlılıkta sonuçlar vermeyebilir. Ayrıca işlevin türevleri, işlevin yapısına bağlı olarak kolaylıkla elde edilemez bir yapıda da olabilir. Sayısal tümlenme yöntemlerinin hemen hepsi işlevin x eksenine ile arasındaki alanı belirli sayıda yamuklara ayırıp, daha sonra bu yamukların alanlarının toplamına dayanır. Tümlenecek işlevin Lagrange içdeğerbiçimi (ing: interpolation) ile yaklaşıtıımı ile oluşturulan çokterimlinin altındaki alan yamuk alanı toplamları ile belirlenir. Uygulamaya göre, Lagrange içdeğerbiçimi yerine altkesimsel yaklaşıtıım da kullanılabilir. Lagrange çokterimlisinin kaçınıcı dereceden olacağı ve içdeğerbiçimin hangi düğüm noktalarının kullanılarak yapılacağı sayısal yöntemin duyarlılığını etkileyecektir.

$$I = \int_a^b dx f(x) \quad (1.1)$$

tümleni n dereceli bir çokterimliyi betimleyen P_n işlevinin tümleni ile, Lagrange içdeğerbiçimi kullanılarak

$$P_n(x) \equiv \sum_{i=0}^n f_i L_i(x) \quad (1.2)$$

$$L_i(x) = \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (1.3)$$

denklemleri ile yaklaştırılır. Öncelikle düğüm noktalarının eşit aralıklı noktalar olarak alındığı yapı gözönünde bulundurulacaktır. Tümlev, cebirsel yapıya

$$\int_a^b dx P_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i \int_a^b dx L_i(x) \quad (1.4)$$

$$= h \sum_{i=0}^n f_i \int_0^n dt \varphi_i(t) \quad (1.5)$$

$$= h \sum_{i=0}^n f_i \alpha_i \quad (1.6)$$

adımları ile dönüştürülür. Buradaki α değerleri

$$\alpha_i = \int_0^n dt \varphi_i(t) \quad (1.7)$$

denklemleri ile n 'ye bağlı olarak bulunabilir. Örneğin $n = 2$ alınırsa,

$$\int_a^b dx P_2(x) = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2) \quad (1.8)$$

olarak elde edilir. f değerleri eşit aralıklı noktalarda verilmektedir. Bu kurala Simpson kuralı denir. n değıştirgesine değışik değerler vererek oluşturulan ve sıklıkla kullanılan tümlevleme bağıntıları aşağıda verilmiştir [1].

Yamuk Kuralı (n=1):

$$I = \int_a^b dx f(x) = \frac{h}{2} [f(a) + f(b)] - \frac{h^3}{12} f'(\zeta), \quad h = b - a \quad (1.9)$$

Simpson Kuralı (n=2):

$$I = \int_a^b dx f(x) = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta), \quad h = \frac{b-a}{2} \quad (1.10)$$

Simpson 3/8 Kuralı (n=3):

$$I = \int_a^b dx f(x) = \frac{3h}{8} [f(a) + 3f(a+h) + 3f(b-h) + f(b)] - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\zeta),$$

$$h = \frac{b-a}{3} \quad (1.11)$$

Milne Kuralı (n=4):

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b dx f(x) \\ &= \frac{2h}{45} \left[7f(a) + 32f(a+h) + 12f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 32f(b-a) + 7f(b) \right] - \frac{8h^7}{945} f^{(4)}(\zeta) \end{aligned}$$

$$h = \frac{b-a}{4} \quad (1.12)$$

Bağıntıların yapılarından da anlaşılabilceği gibi, bu bağıntıların $[a,b]$ tümlevleme aralığı yerine işlevin bu aralığın alt aralıklarında elde edilen sonuçların toplanması yaklaşımının niteliğini alt aralık sayısına bağımlı bir biçimde arttıracaktır. Eşit aralıklı düğüm noktalarından çokterimli geçirmeye dayanan bu yöntemler Newton-Cotes yöntemleri olarak adlandırılır. Bu yöntemlerle elde edilen tümlev değerleri belli birkaç h adım uzunluğu sonuçlarının dışdeğerbiçimine (ing: extrapolation) dayanan yöntemlerle iyileştirilebilir.

En genel olarak,

$$I \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (1.13)$$

yaklaşımının yapıldığı sayısal tümlevlemelere dördülleme (ing: quadrature) denir [1-12]. Dördüllemelerde w_i ağırlıklarının artıdeğerli (ing: positive), x_i düğüm noktalarının da tümlevleme aralığında olması beklenir. Tümlevi alınacak $f(x)$ işlevinin aralıkta çözümcül olması gerekir. Eğer $f(x)$ işlevinin tekilliği varsa bu tekillik, ağırlık altında tümlevleme kullanılarak işlevin yapısından çıkarılabilir.

Açık Newton-Cotes yöntemleri ise benzer bir biçimde, ama tümlevleme aralığının uç noktalarını içermeyecek yapıda oluşturulan yöntemlerdir. Bu yöntemlerin başlıcalarının bağıntıları aşağıda verilmiştir.

n=2:

$$I = \int_a^b dx f(x) = 2hf \left(\frac{b-a}{2} \right) - \frac{h^3}{24} f''(\zeta), \quad h = \frac{b-a}{2} \quad (1.14)$$

n=3:

$$I = \int_a^b dx f(x) = \frac{3h}{2} [f(a+h) + f(a+2h)] + \frac{3h^3}{4} f''(\zeta), \quad h = \frac{b-a}{3} \quad (1.15)$$

n=4:

$$I = \int_a^b dx f(x) = \frac{4h}{3} [2f(a+h) - f(a+2h) + 2f(a+3h)] + \frac{28h^5}{90} f^{(4)}(\zeta),$$

$$h = \frac{b-a}{4} \quad (1.16)$$

Açık yöntemlerde işlevin tümlevleme aralığının uç noktalarının yakınındaki tekillikler, eşit sayıda noktalı kapalı yönteme göre daha az olumsuzluk getirecektir. Tümlevleme aralığının uç noktalarının yakınında bir tekillik olduğu veya işlevin uç noktalardaki değerlerinin sorunun yapısından dolayı bilinmediği durumlarda açık yöntemler yeğlenmelidir [2].

Newton-Cotes yöntemlerindeki x_i noktalarının eşit aralıklı alınmaması Newton-Cotes yöntemlerinin ötesine geçmeyi sağlar.

1.2 Gauss Dördülmesi

Gauss dördülmesi, düğüm noktalarının çokterimli yaklaştırımının tümlevlenecek işlevin tam üzerine oturmaması nedeni ile oluşacak yanılıyı bastırarak şekilde seçilmesi mantığına dayanır. $f(x)$ işlevi, Lagrange içdeğerbiçimi ve oluşacak yanılığın toplamı olarak

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i)L_i(x) + p(x)r(x) \quad (1.17)$$

biçiminde yazılabilir. Yanılıgı teriminin tümlev altında üreteceği

$$\int_a^b dx p(x)r(x) \quad (1.18)$$

değeri ne kadar küçük olursa yaklaştırım o kadar iyi olacaktır. İçdeğerbiçimle üretilen çokterimli ve tümlevlenen işlev, düğüm noktalarında eşit değere sahip olmak zorunda olduğu için, bu noktalarda yanılıgı çokterimlisinin kökleri olması gerekir. Dolayısıyla $p(x)$, aralıkta n kökü olan ve kökleri düğüm noktaları olan bir işlev olarak alınmalıdır. $r(x)$ çözümçül olarak düşünülürse, yanılıgı terimi

$$\int_a^b dx p(x)x^i = 0, \quad i = 0, \dots, n-1 \quad (1.19)$$

seçilebilir. Böylece, $p(x)$ işlevinin derecesi kendi derecesinden küçük tüm çokterimlilerle tümlevi 0 olan n dereceli bir çokterimli olması gerektiği ortaya çıkar. Bu işlev, iççarpımın

$$(a, b) = \int_a^b dx w(x)a(x)b(x) \quad (1.20)$$

olarak tanımlandığı, öğeleri aralıkta çözümçül, dördülü tümlevlenebilir işlevler olan Hilbert uzayında, $n + 1$ sırasayılı taban işlevidir. Dördülmenin düğüm

noktaları yanılı teriminin Taylor açılımını olabildiğince bastırmak amacı ile $u_{n+1}(x)$ işlevinin kökleri olarak seçilir. Bu çokterimlinin köklerinin gerçel olduğu ve tümlev aralığında konumlandığı gösterilebilir [1]. Eğer bu uzayın birinci taban işlevi

$$u_1(x) \equiv 1 \quad (1.21)$$

olarak alınır ve taban işlevlerinin üç ardışık terimli özyineleme özelliğine sahip olduğu düşünülürse, dördülleme ağırlıklarının özyineleme katsayılarını içeren üçköşegen bir dizeyin özyöneylemelerinin ilk öğelerinin dördülü olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla J bu üçköşegen dizeyi \mathbf{j}_i bu dizeyin özyöneylemelerini, ζ_i de $u_{n+1}(x)$ işlevinin köklerini simgelemek üzere, tümlev

$$I \approx \sum_{i=1}^n (\mathbf{e}_1^T \mathbf{j}_i)^2 f(\zeta_i) \quad (1.22)$$

anlatımıyla gösterilebilir. Bu eşitlikte özyöneylemeler karşılık gelen özdeğerlerin boyuna göre küçükten büyüğe sıralandırılmıştır. Kökler de benzer biçimde küçükten büyüğe sıralandırılmıştır.

1.3 Tezin Amacı

Bu çalışmada sendelenim açılımı kullanılarak sayısal tümlevleme amaçlı, varolan tümlevleme yöntemlerine göre önemli olumluluklar sağlayabilecek bir dördülleme yöntemi geliştirilmesinin ilk adımlarının atılması amaçlanmıştır. Sendelenim açılımı ve sendelenimsizlik yaklaşımı Metin Demiralp tarafından geliştirilmiş, işlemlerin dizey gösteriliminin bulunması sorununu bir özikili sorununa çeviren evrensel bir yöntemdir. Sendelenimsizlik yaklaşımının sayısal tümlevleme dışında, içdeğerbiçim, türevli ve göretürevli denklem çözümü gibi uygulamaları da vardır. Başta Metin Demiralp olmak üzere, İstanbul Teknik Üniversitesi Bilişim Enstitüsünde etkinlik gösteren fakat İ.T.Ü. dışında da bileşenleri olan Bilişim Enstitüsü Bilgisayım Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu üyelerinin sendelenim açılımı, sendelenimsizlik yaklaşımı ve uygulamaları üzerine birçok bildiri ve yazıları bulunmaktadır.

Tezin ikinci bölümünde sendelenim açılımı ve sendelenimsizlik yaklaşımı hakkında, diğer bölümlere taban olacak bilgiler verilmektedir. Üçüncü bölümde

sendelenimsizlik yaklaştırımı ile elde edilen yaklaştırımın duyarlılığını sendelenim terimlerinin eklenmesi ile artırımı, bu terimlerin bulunması için gerekli ara adımlar, yaklaştırımın tümlevleme amaçlı kullanımı ve karşılaşılan sorunlar anlatılmaktadır. Dördüncü bölümde ise altuzay içinde altuzay döndürümü diye adlandırılabilir, altuzay boyutunu artırmadan taban takımını genişletmeyi, dolayısıyla tümlevlemenin duyarlılığını artırmayı sağlayan yöntem ve sınaama uygulamaları verilmiştir.

2. DİZEY GÖSTERİLİMİNDE SENDELENİMSİZLİK YAKLAŞTIRIMI

2.1 Giriş

Bu bölümde, tez danışmanınca geliştirilmiş sendelenim açılımları kavramından sözedilecektir. Bu alanın tez ve tez yazarı açısından özgün bir yanı yoktur. Bu tezdeki asıl özgün görüş ve uygulamalar 3. ve 4. bölümlerde verilecektir.

2.2 Dizey Gösteriliminin Elde Edinimi ve Sendelenimsizlik Kanıtı

$[0,1]$ aralığında çözümcül ve dördülü tümlemlenebilir tek değişkenli işlevlerin oluşturduğu Hilbert uzayını \mathcal{H} ile simgeleyelim. Bu uzayda $f(x)$ ve $g(x)$ ile simgelenen herhangi iki işlev arasındaki iççarpımın

$$(f, g) = \int_0^1 dx w(x) f(x) g(x) \quad f(x), g(x) \in \mathcal{H} \quad (2.1)$$

olarak verildiğini düşünelim. Bu yazımda tümlevin hangi değişkene göre olduğunu belirten dx simgesi tümlev çekirdeğinin soluna yazılmıştır. Bunun nedeni, tümlevleme işleminin aslında tümlev işlecinin (ing: operator) etki ettirilmesi olduğu ve işleçlerin işlenenlerden önce yazılması gerektiği olgusudur.

Aralığın $[0,1]$ olarak seçilmesi genellikle bir yitime neden olmaz, çünkü bütün sonlu aralıklar uygun öteleme ve ölçekleme yapılarak $[0,1]$ aralığına getirilebilir. \mathcal{H} ile gösterilen sonsuz uzayın taban işlevleri kümesi \mathcal{U} ile simgelenirse ve 1'den sonsuza dek sırasaylandırılırsa

$$\mathcal{U} \equiv \{u_i(x)\}_{i=1}^{\infty} \quad (2.2)$$

anlatımı yazılabilir.

Bu taban takımının dik ve birimboylu olduğu düşünülecektir. Bu olgudan söz edebilmek için gereken iççarpım işleminin tanımı

$$(f, g) \equiv \int_a^b dx w(x) f(x) g(x) \quad (2.3)$$

olarak, boy tanımını ise

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} \quad (2.4)$$

olarak yapılmalıdır. İki işlevin birbirlerine dik olması, iççarpımlarının 0 işlevini üretmesi ve bir işlevin birimboylu olması ise işlevin kendisi ile iççarpımının dördül kökünün 1 değişmez değerinde olması anlamına gelmektedir. Dik ve birimboylu olmayan bir taban takımı Gram-Schmidt yöntemi ile dikleştirildikten sonra, işlevleri boylarına bölerek birimboylu duruma getirilebilir. Bilimsel yazındaki dik çokterimli taban takımlarını kullanmak ya da Rodrigues bağıntısı ile dik taban takımı üretmek ve bu üretilen taban takımını birimboylulaştırmak da seçenekler arasındadır. Taban takımı seçiminin yaklaşıtımdaki önemine daha sonra değinilecektir. Dik ve birimboylu taban takımının bu özelliği Kronecker delta simgesi ile

$$(u_i, u_j) \equiv \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

biçiminde gösterilebilir.

Yaklaşıtımda, işleçlerin dizey gösterilimi kullanılacaktır. Bu dizey gösterilimlerinin sonlu olabilmesi için sonsuz boyutlu Hilbert uzayının n boyutlu altuzayını gözönüne almak gerekir. Bu n boyutlu altuzay \mathcal{H}_n ile simgelenirse, ve taban işlevleri 1'den itibaren sırasayılandırılırsa

$$\mathcal{U} \equiv \{u_i(x)\}_{i=1}^n \quad \mathcal{H}_n \subset \mathcal{H} \quad (2.6)$$

anlatımı yazılabilir. Sonsuz boyutlu uzaydan n boyutlu uzaya geçişi sağlayabilmek için 1 ile sırasayılandırılmış taban işlevinin örttüğü tek boyutlu uzaya izdüşüren işleçten, n ile sırasayılandırılmış taban işlevinin örttüğü tek boyutlu uzaya izdüşüren işlece dek bütün işleçlerin toplamının etkisini betimleyen $\widehat{P}^{(n)}$ işleci kullanılabilir. $\widehat{P}^{(n)}$ işlecinin sonsuz boyutlu uzaya ait herhangi $f(x)$ işlevine etkisi

$$\widehat{P}^{(n)} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_n \quad \widehat{P}^{(n)} f(x) = \sum_{i=1}^n (u_i, f) u_i(x) \quad (2.7)$$

biçiminde gösterilebilir. Uzayın boyutu arttıkça $\widehat{P}^{(n)}$ işlecinin etkisi sonsuz boyutlu uzayda tanımlı birim işlecine, yani \widehat{I} işlecine yaklaşır. Benzer bir inceleme ile sonsuz boyutlu uzaydan n boyutlu uzayın tümleyenine götüren

$\widehat{I} - \widehat{P}^{(n)}$ işlecinin sonsuz boyutlu uzaya ait herhangi $f(x)$ işlecine etkisinin

$$\widehat{I} - \widehat{P}^{(n)} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} - \mathcal{H}_n \quad \left[\widehat{I} - \widehat{P}^{(n)} \right] f(x) = \sum_{n+1}^{\infty} (u_i, f) u_i(x) \quad (2.8)$$

olduğu gösterilebilir. $\widehat{P}^{(n)}$ birbirine dik taban işlevleri tarafından örtülen bir altuzaya izdüştürdüğü için, dördülü kendine eşit bir işleçtir. Aynı olgu, $\widehat{I} - \widehat{P}^{(n)}$ için de söylenebilir. Ayrıca $\widehat{P}^{(n)}$ ve $\widehat{I} - \widehat{P}^{(n)}$ birbirine dik altuzaylara izdüştüren işleçler oldukları için $\left[\widehat{I} - \widehat{P}^{(n)} \right] \widehat{P}^{(n)}$ ve $\widehat{P}^{(n)} \left[\widehat{I} - \widehat{P}^{(n)} \right]$ yapıları, $\widehat{0}$ ile gösterilen sıfır işlecini üretir.

Etkisi, etkilenen işlevi işlevin bağımsız değişkeni ile çarpmak olan \widehat{x} işlecinin matematiksel tanımı

$$\widehat{x}f(x) \equiv xf(x) \quad \widehat{x} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad f(x) \in \mathcal{H} \quad (2.9)$$

bağıntısıyla verilebilir.

Ayrıca, Cauchy çevirge gösteriliminin işleçler kuramına uyarlanmış durumu

$$f(\widehat{x}) = -\frac{1}{2\pi i} \oint d\zeta f(\zeta) \left[\widehat{x} - \zeta \widehat{I} \right]^{-1} \quad (2.10)$$

anlatımında ζ değişkenine bağlı kapalı bir çevirge üzerinden saat yönünün tersine alınan bir tümlev olarak gösterilebilir. Bu tümlevin alınabilmesi için $\left[\widehat{x} - \zeta \widehat{I} \right]^{-1}$ yapısının incelenmesi gerekir. Bu anlatım, iki sonsuz boyutlu uzayda tanımlı işlecın farkının evriğini betimlemektedir. n boyutlu dizey yapısına geçebilmek için $\left[\widehat{x} - \zeta \widehat{I} \right]$, $\left[\widehat{x} - \zeta \widehat{I} \right]^{-1}$ ve \widehat{I} işleçlerinin tanım ve değer uzaylarına göre ayrıştırımı incelenecektir. \mathcal{H} uzayına ait herhangi bir \widehat{Y} işleci, n boyutlu altuzay gözönünde bulundurulurak

$$\widehat{Y} = \widehat{Y}_{aa} + \widehat{Y}_{at} + \widehat{Y}_{ta} + \widehat{Y}_{tt} \quad (2.11)$$

anlatımında, a simgesi n boyutlu altuzayı ve t simgesi n boyutlu altuzayı tümleyen uzayı betimlemek üzere, ve alt sağ simge tanım uzayını, alt sol simge değer uzayını gösterdiği düşünülerek eşsiz olarak ayrıştırılabilir. İşlecın alt sol simgesinin a olması, işlecın solunda $\widehat{P}^{(n)}$ işlecının, alt sol simgesinin t olması işlecın solunda $\left[\widehat{I} - \widehat{P}^{(n)} \right]$ işlecının olduğunu gösterir. Benzer biçimde, alt sağ simge işlecın sağında $\widehat{P}^{(n)}$ veya $\left[\widehat{I} - \widehat{P}^{(n)} \right]$ işlecının varlığını betimler. $\left[\widehat{x} - \zeta \widehat{I} \right]$, $\left[\widehat{x} - \zeta \widehat{I} \right]^{-1}$ ve \widehat{I} işleçleri de \mathcal{H} uzayında oldukları için değer ve tanım uzaylarına göre

ayrıştırılabilir. Evrik alma işleminin \mathcal{H} uzayında evrik alma olduğu düşünülerek ve daha derli toplu gösterilim elde edebilmek amacı ile

$$L \equiv \hat{x} - \zeta \hat{I} \ , \quad \hat{A} \equiv [\hat{x} - \zeta \hat{I}]^{-1} \quad (2.12)$$

denklikleri kullanılarak

$$\begin{bmatrix} \hat{L}_{aa} & \hat{L}_{at} \\ \hat{L}_{ta} & \hat{L}_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_{aa} & \hat{A}_{at} \\ \hat{A}_{ta} & \hat{A}_{tt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{I}_{aa} & \hat{O} \\ \hat{O} & \hat{I}_{tt} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

bağıntısıyla anlatılan, öğeleri işleçler olan dizey eşitliği elde edilir. Eşitliğin sağ yanındaki dizeyin evrik köşegen üzerindeki öğelerinin sıfır işlecine eşit olmasının nedeni, \hat{I} işlecinin \mathcal{H} uzayındaki diğer tüm işleçler ile değıştirimli olması ve $\hat{P}^{(n)}$ ile $\hat{I} - \hat{P}^{(n)}$ işleçlerinin birlikte sıra gözetmeksizin etkisinin sıfır işlecinin etkisine eşit olmasıdır. Bu eşitlikte yapısını bilmek istediğimiz terim \hat{A}_{aa} işlecidir, çünkü bu işleç $[\hat{x} - \zeta \hat{I}]^{-1}$ işlecinin n boyutlu altuzaydaki yapısını vermektedir. Dizey eşitliğini kullanarak elde edilecek, içinde \hat{A}_{aa} işlecinin olduğu bağıntılar

$$\hat{L}_{aa} \hat{A}_{aa} + \hat{L}_{at} \hat{A}_{ta} = \hat{I}_{aa} \quad (2.14)$$

$$\hat{L}_{ta} \hat{A}_{aa} + \hat{L}_{tt} \hat{A}_{ta} = \hat{O} \quad (2.15)$$

yapısındadır. Alt simgeleri bulunan işleçlerin sağında ve solunda $\hat{P}^{(n)}$ ve/veya $\hat{I} - \hat{P}^{(n)}$ işleçleri içerdiği, $\hat{P}^{(n)}$ ve $\hat{I} - \hat{P}^{(n)}$ işleçlerinin kendileri üzerine etkilerinin kendilerine, birbirleri üzerine etkilerinin sıfır işlecine eşit olduğu, \hat{I} işlecinin dördülünün kendine eşit ve \mathcal{H} uzayına ait bütün işleçlerle değıştirimli bir işleç olduğu gözönünde bulundurularak yapılacak özenli bir inceleme ile

$$\hat{A}_{aa} = [\hat{L}_{aa} - \hat{L}_{at} \hat{L}_{tt}^{-1} \hat{L}_{ta}]^{-1} \quad (2.16)$$

eşitliği elde edilebilir. İşleçlerin daha açık yapısını kullanarak inceleme sürdürülürse eşitlik

$$\hat{A}_{aa} = \left[\hat{x}_{aa} - \zeta \hat{I} - \hat{x}_{at} \left(\hat{x}_{tt} - \zeta \hat{I} \right)^{-1} \hat{x}_{ta} \right]^{-1} \quad (2.17)$$

yapısına getirilebilir. Evriğı alınacak yapının son teriminde içinde $\hat{I} - \hat{P}^{(n)}$ bulunan \hat{x}_{tt} yapısının \hat{I} birim işlecine göre boyca daha küçük olacağı düşünülürse ζ değışkeninin evriğinin kuvvetlerine göre bir seri açılımı oluşturulabilir. Oluşacak yapının derli toplu bir yapıda anlatılabilmesi için

$$\hat{\phi}_{i+1} \equiv \hat{x}_{at} \hat{x}_{tt}^i \hat{x}_{ta}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.18)$$

denkliğini kullanarak \widehat{A}_{aa} için

$$\widehat{A}_{aa} = \left[\widehat{x}_{aa} - \zeta \widehat{I} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\zeta^{i+1}} \widehat{\phi}_{i+1} \right]^{-1} \quad (2.19)$$

yapısı oluşur. $\mathcal{H} - \mathcal{H}_n$ uzayının \mathcal{H}_n uzayı üzerindeki etkilerini betimleyen $\widehat{\phi}$ işleçleri, sendelenim işleçleri olarak adlandırılır. k artıdeğerli bir tamsayı olmak üzere $\widehat{\phi}_k$ işleçlerini k . kerte (mertebe) sendelenim işleci olarak adlandıracağız. Serinin içinde $\widehat{\phi}_k$ işlecini barındıran terimi ise k . kerte sendelenim terimi diye adlandıracağız. Sendelenim terimlerini yok sayıp

$$\widehat{A}_{aa} \approx \left[\widehat{x} - \zeta \widehat{I} \right]^{-1} \quad (2.20)$$

yaklaşımını Cauchy çevirge gösterilimi ile birlikte kullanarak işlevin dizey gösterilimine yaklaşım yapılabilir. Elde edilen sonuç sendelenimsizlik kanıtı diye adlandırılır. Sendelenimsizlik kanıtına göre bir işlevin dizey gösterilimine yaklaşım olarak, \widehat{x} işlecinin dizey gösteriliminin işlev altındaki görüntüsü kullanılabilir. Matematiksel anlatım ile sendelenimsizlik bağlamında işlevin dizey gösterilimi yerine

$$M(\widehat{f}) \approx f(M(\widehat{x})) \quad (2.21)$$

bağıntısından yararlanılabilir [14–23].

\widehat{A}_{aa} anlatımında sendelenim terimlerinin bir kısmının da yaklaşıma alınması konusuna daha sonra değinilecektir.

3. SENDELENİM TERİMLERİNİN ELDE EDİNİMİ VE KULLANIMI

3.1 Sendelenim Açılımında Sendelenim Terimleri

\widehat{A}_{aa} ile simgelenen $[\widehat{x} - \zeta \widehat{I}]^{-1}$ yapısının n boyutlu Hilbert uzayındaki karşılığı olan işlecin yapısının, $\widehat{\phi}_k$ k . kerte sendelenim işleci olmak üzere,

$$\widehat{A}_{aa} = \left[\widehat{x}_{aa} - \zeta \widehat{I} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\zeta^{i+1}} \widehat{\phi}_{i+1} \right]^{-1} \quad (3.1)$$

biçiminde yazılabileceği ve $\widehat{\phi}$ ile gösterilen işlecin yapısının

$$\widehat{\phi}_{i+1} = \widehat{x}_{at} \widehat{x}_{tt}^i \widehat{x}_{ta} \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

olduğu gösterilmişti. Sendelenim işleçlerinin düzey gösterilimlerinin belirlenebilmesi için taban takımının üç ardışık terimli özyineleme sağladığı durum gözönünde bulundurulacaktır. Bu özyinelemeyi sağlayan taban takımına göre sendelenim terimlerinin bulunması önemli kolaylıklar sağlamaktadır ve yöntemin genelliğinden bir yitime neden olmamaktadır. α ve β katsayıları tümlevleme aralığı ve ağırlık işlevine bağlı olarak eşsiz olarak bulunabilmek üzere, üç ardışık terimli özyineleme

$$\widehat{x}u_i(x) = \beta_{i-1}u_{i-1}(x) + \alpha_i u_i(x) + \beta_i u_{i+1}(x) \quad (3.3)$$

biçiminde verilmektedir. Sendelenim işleçleri $[\widehat{I} - \widehat{P}^{(n)}] \widehat{x}$ yapısını sendelenim kertesini içerdiklerinden dolayı bu yapının düzey gösterilimi incelenmelidir. $[\widehat{I} - \widehat{P}^{(n)}]$ izdüşüm işlecinin $\widehat{x}u_i(x)$ üzerine etkisi, özyineleme gözönünde bulundurulduğunda, alt sırasayısı n 'den küçük olan taban işlevlerini içeren tüm terimler yok olacağından

$$[\widehat{I} - \widehat{P}^{(n)}] \widehat{x}u_i = 0, \quad i < n \quad (3.4)$$

eşitliği yazılabilir. Dolayısıyla $[\widehat{I} - \widehat{P}^{(n)}] \widehat{x}u_i$ işlecinin düzey gösteriliminin ilk $n - 1$ yatay sırasının bileşenleri 0 değerindedir. Ayrıca,

$$\left[\widehat{x} \left([\widehat{I} - \widehat{P}^{(n)}] \widehat{x} \right)^k \right]^\dagger = \left[\widehat{x} \left([\widehat{I} - \widehat{P}^{(n)}] \widehat{x} \right)^k \right] \quad (3.5)$$

eşitliğinin kısa bir inceleme ile gösterilebileceğinden dolayı, sendelenim işleçleri kendine eş (ing: self-adjoint) işleçlerdir. Dolayısıyla, sendelenim işleçlerinin dizey gösterilimi bakışıktır (ing: symmetric) ve n sırasayılı yatay sırada yalnızca köşegen üzerindeki öge 0 dışında bir değerde olabilir. Sendelenim işleçlerinin n boyutlu dizey gösterimlerinin yalnızca sağ alt köşe ögelerinin 0 dışında bir değerde olabilmesi, bu işleçlerin n sırasayılı taban işlev tarafından örtülen tek boyutlu alt uzaya izdüşüren işlecin bir katsayı ile çarpımı ile bulunabileceğini gösterir. n sırasayılı taban işlev tarafından örtülen alt uzaya izdüşüren işleç \widehat{P}_n ile simgelenmek ve φ_k bir sayıl (ing: scalar) olmak üzere

$$\widehat{\phi}_k = \varphi_k \widehat{P}_n \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

eşitliği yazılabilir. Bu bulguyu kullanarak \widehat{A}_{aa} işlecinin dizey gösterilimi incelenirse

$$\mathbf{A} = \left[\mathbf{X} - \zeta \mathbf{I} + \left(\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_{i+1} \frac{1}{\zeta^{i+1}} \right) \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^T \right]^{-1} \quad (3.7)$$

eşitliği üretilir. Sendelenim terimlerinin bir dış çarpım olarak yazılabilmesi, yapının yalınlaşmasını sağlar. \mathbf{A} dizeyi

$$\mathbf{A} = [\mathbf{X} - \zeta \mathbf{I}]^{-1} - s(\zeta) \left[\mathbf{X} - \zeta \widehat{I} \right]^{-1} \mathbf{e}_n \mathbf{e}_n^T [\mathbf{X} - \zeta \mathbf{I}]^{-1} \quad (3.8)$$

yapısında yazılabilir. Bu denklemde $s(\zeta)$,

$$s(\zeta) = \frac{\varphi(\zeta)}{1 + \varphi(\zeta) \mathbf{e}_n^T [\mathbf{X} - \zeta \mathbf{I}] \mathbf{e}_n} \quad (3.9)$$

eşitliği ile belirlenebilir. $\varphi(\zeta)$ işlevinin açık yapısı

$$\varphi(\zeta) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \frac{1}{\zeta^i} \quad (3.10)$$

ile gösterilebilir. $s(\zeta)$ islevine $\frac{\zeta}{v}$ yapısına göre açılım uygulayıp katsayılar arasında ilişki kurarak

$$\bar{s}(\zeta, v) = \frac{\phi \left(\frac{\zeta}{v} \right)}{1 + \phi \left(\frac{\zeta}{v} \right) \mathbf{e}_n^T [\mathbf{X} - \zeta \mathbf{I}] \mathbf{e}_n} \quad (3.11)$$

$$\bar{s}(\zeta, v) = \sum_{i=0}^{\infty} v^i \bar{s}_i(\zeta) \quad (3.12)$$

$$\bar{s}_i(\zeta) = \frac{1}{i!} \left(\frac{\partial^i \bar{s}(\zeta, \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}^i} \right)_{\mathbf{v}=0} \quad (3.13)$$

yapısı elde edilebilir. İlk üç sendelenim terimini oluşturan s yapıları incelenirse,

$$\mathbf{q} \equiv \mathbf{e}_n^T [\mathbf{X} - \zeta \mathbf{I}] \mathbf{e}_n \quad (3.14)$$

denkliği kullanılarak

$$s_1(\zeta) = \frac{\varphi_1}{\zeta} \quad (3.15)$$

$$s_2(\zeta) = \frac{\varphi_2}{\zeta^2} - q \frac{\varphi_1^2}{\zeta^2} \quad (3.16)$$

$$s_3(\zeta) = \frac{\varphi_3}{\zeta^3} - 2q \frac{\varphi_1 \varphi_2}{\zeta^3} + q^2 \frac{\varphi_1^3}{\zeta^3} \quad (3.17)$$

elde edilir. Bir sonraki aşama bu yapıların Cauchy çevirge gösteriliminde kullanımındır.

3.2 Sendelenim Katsayılarının Belirlenmesi

Sendelenim terimlerinin, \widehat{P}_n işlecinin katları olması, sendelenim katsayılarının

$$\varphi_k = \left(u_n, \widehat{x} \left[\left[\widehat{I} - \widehat{P}^{(n)} \right] \widehat{x} \right]^k u_n \right) \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.18)$$

bağıntısıyla anlatılmasını olanaklı kılar [22]. $\left[\widehat{I} - \widehat{P}^{(n)} \right]$ işlecinin dördülü kendine eşit bir işleç olmasından dolayı,

$$\widehat{x}_{tt}^{k-1} = \left[\widehat{I} - \widehat{P}^{(n)} \right] \widehat{x}_{tt}^{k-1} \quad (3.19)$$

eşitliği geçerlidir. Bu olgunun kullanımı ve $\left[\widehat{I} - \widehat{P}^{(n)} \right]$ ile \widehat{x} işleçlerinin kendine eş işleçler olmaları

$$\varphi_k = \left(\left[\widehat{I} - \widehat{P}^{(n)} \right] \widehat{x} u_n, \widehat{x}_{tt}^{k-1} \left[\widehat{I} - \widehat{P}^{(n)} \right] \widehat{x} u_n \right), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

eşitliğinin elde edilmesine olanak sağlar. Bu iççarpımın iki işleneninde de \widehat{x} işlecinin u_n taban işlevi üzerindeki etkisinin $\mathcal{H} - \mathcal{H}_n$ uzayına izdüşümü bulunmaktadır. Dolayısıyla bu yapının incelenmesi gerekir. Taban takımının

$$\widehat{x} u_i = \alpha_i u_{i+1}(x) + \beta_i u_i(x) + \alpha_{i-1} u_{i-1}(x) \quad , u_0(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.21)$$

üç ardışık terimli özyineli ilişkisini sağlayacak biçimde seçilmesi bu işlemi kolaylaştırmaktadır. Eğer $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ kümesindeki işlevlerin $[0, 1]$ aralığında dik ve birimboylulaştırılması ile oluşturulan kaydırılmış Legendre çokterimlileri kullanılırsa, α ve β değerleri

$$\alpha_i = \frac{i}{2} \frac{1}{\sqrt{2i-1}} \frac{1}{\sqrt{2i+1}} \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.22)$$

$$\beta_i = \frac{1}{2} \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.23)$$

olarak bulunur. Bu biçimde elde edilecek olan \hat{x} işlecinin $n \times n$ boyutlu dizey gösterilimi

$$M(\hat{x}) = \begin{bmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & 0 & \dots & & \\ \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_2 & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \alpha_{n-2} & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} & \\ & & & \alpha_{n-1} & \beta_n & \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

bakışık, üç yapışik köşegen yapısındadır. Üç ardışık terimli özyineli ilişkinin kullanımı ile $[\hat{I} - \hat{P}^{(n)}]$ islecinin $\hat{x}u_n$ üzerine etkisinin

$$[\hat{I} - \hat{P}^{(n)}] \hat{x}u_n = \alpha_n u_{n+1}(x) \quad (3.25)$$

olduğu gösterilebilir. Bu bulgunun φ_k ile simgelenen sendelenim katsayılarının anlatımında kullanımı

$$\varphi_k = \alpha_n^2 \left(u_{n+1}, \hat{x}_t^{k-1} u_{n+1} \right) \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.26)$$

sonucunu verir. Birinci sendelenim katsayısını elde etmek için bulunması gereken yapı, bu eşitlikte k yerine 1 koyarak kısa bir inceleme ile

$$\begin{aligned} \hat{x}_{cc} u_{n+1} &= [\hat{I} - \hat{P}^{(n)}] \hat{x} [\hat{I} - \hat{P}^{(n)}] u_{n+1} \\ &= [\hat{I} - \hat{P}^{(n)}] \hat{x} u_{n+1} \\ &= [\hat{I} - \hat{P}^{(n)}] (\alpha_{n+1} u_{n+2} + \beta_{n+1} u_{n+1} + \alpha_n u_n) \\ &= \beta_{n+1} u_{n+1} + \alpha_{n+1} u_{n+2} \end{aligned} \quad (3.27)$$

olarak bulunur. İkinci sendelenim katsayısını elde etmek için bulunması gereken yapı ise, benzer bir inceleme ile

$$\hat{x}_{cc}^2 u_{n+1} = [\hat{I} - \hat{P}^{(n)}] \hat{x} (\beta_{n+1} u_{n+1} + \alpha_{n+1} u_{n+2}) \quad (3.28)$$

$$= (\alpha_{n+1}^2 + \beta_{n+1}^2) u_{n+1} + (\alpha_{n+1} \beta_{n+2} + \beta_{n+1} \alpha_{n+1}) u_{n+2} + (\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2}) u_{n+3} \quad (3.29)$$

yapısında elde edilir. Görülmektedir ki, kertesesi m olan sendelenim katsayısını elde etmek için ilk $m+1$ taban işlevinin bir doğrusal birleştirmesinin bulunması sözkonusudur. Bu olgu matematiksel tümevarım ile kanıtlanabilir. $C_i^{(m)}$ doğrusal birleştirim katsayılarını göstermek üzere

$$\widehat{x}_{tt}^m u_{n+1} = \sum_{i=0}^m C_i^{(m)} u_{n+1+i} \quad (3.30)$$

eşitliği yazılabilir. $\widehat{x}_{cc}^{m+1} u_{n+1}$ ile $\widehat{x}_{cc}^m u_{n+1}$ arasında ilişki kurulursa

$$\sum_{i=0}^{m+1} C_i^{(m+1)} u_{n+1+i} = \sum_{i=0}^m C_i^{(m)} \widehat{x}_{tt} u_{n+1+i} \quad (3.31)$$

eşitliği elde edilir. Doğrusal birleştirim katsayıları için bir özyineleme oluşturmak amacıyla, taban takımının özyineli ilişkisini kullanarak

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{m+1} C_i^{(m+1)} u_{n+1+i} \\ &= \sum_{i=0}^m C_i^{(m)} [\widehat{I} - \widehat{P}^{(n)}] (\alpha_{n+1+i} u_{n+2+i} + \beta_{n+1+i} u_{n+1+i} + \alpha_{n+i} u_{n+i}) \end{aligned} \quad (3.32)$$

elde edilebilir. $[\widehat{I} - \widehat{P}^{(n)}]$ izdüşüm işlecinin ayıraçlı yapıya dağıtımı sonrasında oluşacak basitleşmeler ve seri sınırlarını her terimde u_{n+1+i} oluşturacak biçimde kaydırarak

$$C_i^{(m+1)} = \alpha_{n+i} C_{i-1}^{(m)} + \beta_{n+1+i} C_i^{(m)} + \alpha_{n+1+i} C_{i+1}^{(m)} \quad (3.33)$$

eşitliği oluşur. Bu özyineli ilişki, $\widehat{x}_{tt}^m u_{n+1}$ için yapılan öngöründen dolayı oluşan $C_0^0 = 1$ başlangıç koşulu ile tüm C katsayılarının belirlenmesi için kullanılabilir. Eksi değerli alt sırasayılı ve alt sırasayısı üst sırasayısından büyük olan tüm C katsayılarının tanım olarak 0 alınması gerekir. φ ile gösterilen sendelenim katsayıları, iççarpımla gösterilen tanımlarından dolayı

$$\varphi_k = \alpha_n^2 C_0^{(k-1)} \quad (3.34)$$

denklemleri ile elde edilebilir. İlk n bağımlı 5 sendelenim katsayısı, özyinelenemeyi kullanarak

$$\varphi_1(n) = \frac{n^2}{16n^2 - 4} \quad (3.35)$$

$$\varphi_2(n) = \frac{n^2}{32n^2 - 8} \quad (3.36)$$

$$\varphi_3(n) = \frac{\frac{5n^4}{16} + \frac{5n^3}{8} + \frac{n^2}{4}}{16n^4 + 32n^3 + 8n^2 - 8n - 3} \quad (3.37)$$

$$\varphi_4(n) = \frac{\frac{7n^4}{32} + \frac{7n^3}{16} + \frac{3n^2}{16}}{16n^4 + 32n^3 + 8n^2 - 8n - 3} \quad (3.38)$$

$$\varphi_5(n) = \frac{\frac{21n^6}{32} + \frac{105n^5}{32} + \frac{343n^4}{64} + \frac{55n^3}{16} + \frac{3n^2}{4}}{64n^6 + 320n^5 + 496n^4 + 224n^3 - 68n^2 - 76n - 15} \quad (3.39)$$

olarak bulunmuştur.

3.3 Sınama Uygulamaları

Sınama uygulamalarında tümlev aralığının $[0, 1]$, ağırlık işlevinin birim ağırlık ve Hilbert altuzayı boyutunun 1 olduğu durum incelenmiştir. Tüm sonlu aralıkların uygun bir değişken dönüşümü ile $[0, 1]$ aralığına getirilebileceği, dolayısıyla \hat{x} işlecinin dizey gösterilimini değiştireceği, fakat yöntemin adımlarını değiştirmeyeceği daha önce belirtilmişti. $n = 1$ olarak seçildiğinden dolayı taban takımının tek bir ögesi vardır. Tümlev değerinde bağımsız değişkene bağıllık olmamasını sağlamak için, taban işlevinin de bağımsız değişkene bağlı olmaması gerekir. Birimboyluluk zorunluluğunu da sağlayarak

$$u_1(x) \equiv 1 \quad (3.40)$$

seçilir. \hat{x} işlecinin dizey gösteriliminin aslında bir sayı olacağı, tanım gereği

$$\mathbf{X}_{11} = (u_1, xu_1) \quad (3.41)$$

değerine sahip olacağı, bunun da iççarpımın tanımından dolayı

$$\int_0^1 dx x = \frac{1}{2} \quad (3.42)$$

biçiminde elde edileceği görülür. Bu kısıtlar altında, uziş şu aşamalardan oluşur:

1) Tek boyutlu uzayda \hat{x} işlecinin dizey gösteriliminin x ve \hat{T} işlecinin dizey gösteriliminin 1 olacağı düşünülerek, sendelenim açılımını oluşturan denklemler simgesel olarak oluşturulur. Bunlar

$$A_{aa} = (x - \zeta)^{-1} - s(\zeta)(x - \zeta)^{-2} \quad (3.43)$$

$$s(\zeta, v) = \frac{\varphi\left(\frac{\zeta}{v}\right)}{1 + \varphi\left(\frac{\zeta}{v}\right)(x - \zeta)} \quad (3.44)$$

$$\varphi\left(\frac{\zeta}{v}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i\left(\frac{\zeta}{v}\right)^i \quad (3.45)$$

denklemleridir. Sonsuz toplamda, uygulama açısından, incelenecek en büyük sendelenim kertesı sayısında terim kullanmak yeterlidir. Daha sonraki terimler tümlevleme işleminden dolayı sıfırlanacaktır.

$$s_i(\zeta) = \frac{1}{i!} \left(\frac{\partial^i s(\zeta, v)}{\partial v^i} \right)_{v=0} \quad (3.46)$$

tanımı kullanılarak simgesel işlem ile A_{aa} elde edilir.

2) Oluşturulan yapı ζ değişkenine göre yalın oranlara ayrıştırılır. Bu ayrıştırımda ayrıştırılacak yapıların

$$\frac{1}{\zeta^m \left(\frac{1}{2} - \zeta\right)^n} \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.47)$$

biçiminde olduğu olgusu kullanılır ve ayrıştırımdan oluşan terimler yapıyı tekilliği giderecek çarpan ile çarpma, ardışık türevleme ve, 0 veya 1/2 değerini oluşan yapıda ζ yerine koyma işlemi ile bulunur.

3) φ ile gösterilen sendelenim katsayıları belirlenir ve A_{aa} için oluşturulan denklemde yerine konur. Bunun için

$$C_i^{(m+1)} = \alpha_{n+i+1} C_{i+1}^{(m)} + \beta_{n+i+1} C_i^{(m)} + \alpha_{n+i} C_{i-1}^{(m)}, \quad C_0^{(0)} = 1 \quad (3.48)$$

özyinelemesi, özyineli bir işlem olarak betiklenebilir.

$$\varphi_k = \alpha_n^2 C_0^{(k-1)} \quad (3.49)$$

eşitliği ile katsayılar bulunur. α ve β değerleri

$$\alpha_n = \frac{n}{2} \frac{1}{\sqrt{n-1}} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.50)$$

$$\beta_n = \frac{1}{2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.51)$$

denklemleri ile belirlenip, sendelenim katsayıları denklemlerinde yerine yerleştirilir.

4) A_{aa} yapısının Cauchy çevirge gösterilimine yerleştirilmesi için A_{aa} , toplama ve çıkarma işlemlerine göre terimlerine ayrılır ve her terim sırayla işlenir. Eğer terimin paydasında $(x - \zeta)^m$ yapısı var ise işlevin $m - 1$ 'inci türevinin, terimin payı ve $1/(m - 1)$ ile çarpımının $1/2$ noktasındaki değeri başlangıçta sıfır olan sonuç değişkenine eklenir. Eğer terimin paydasında ζ^n yapısı var ise işlevin $n - 1$ 'inci türevinin, terimin payı ve $1/(n - 1)$ ile çarpımının 0 noktasındaki değeri başlangıçta sıfır olan sonuç değişkenine eklenir. Bu işlem her terim için yapıldığında sonuç değişkeni yaklaşık tümlev değerine sahip olur. Dört değişik işlev için yapılan sınaama uygulamalarında bir yakınsama gözlemlenmemiştir.

Çizelge 3.1: Sendelenim kertesine göre tümlev değerleri

	x^3	$\cos(x)$	$3x$	e^{10x}
Kesin değer:	0.2500000000	0.8414709848	1.5000000000	2202.5465794807
Kerte: 0	0.1250000000	0.8775825619	1.5000000000	148.4131591026
Kerte: 1	0.2916666667	1.4235391594	2.5000000000	445.5728106411
Kerte: 2	0.1666666667	1.4889973104	2.5000000000	75.6510239957
Kerte: 3	0.1175925926	1.4360672346	2.4111111111	90.2796693109
Kerte: 4	0.1373456790	1.3569121765	2.2925925926	132.6991646582
Kerte: 5	0.1659171076	1.2685258936	2.1613756614	172.1831528233
Kerte: 6	0.1944650206	1.1768990879	2.0247971781	215.4773441315
Kerte: 7	0.2183490104	1.0859066948	1.8869958848	272.3218204424
Kerte: 8	0.2351548109	0.9980024435	1.7507936508	349.5765263854
Kerte: 9	0.2437861263	0.9148442978	1.6183858970	449.9516337932
Kerte: 10	0.2439854680	0.8376330376	1.4916310969	571.8832976662
Kerte: 11	0.2360545456	0.7672767871	1.3721813402	710.0286079357
Kerte: 12	0.2206776086	0.7044806193	1.2615419073	856.1634351786
Kerte: 13	0.1988022036	0.6497979449	1.1610961038	1000.2351980851
Kerte: 14	0.1715539922	0.6036604543	1.0721118527	1131.3518726741
Kerte: 15	0.1401728314	0.5663953956	0.9957382094	1238.5868246148
Kerte: 16	0.1059627419	0.5382350683	0.9329961563	1311.5808053378
Kerte: 17	0.0702513371	0.5193214037	0.8847661890	1340.9841791233
Kerte: 18	0.0343559777	0.5097074229	0.8517742508	1318.7984549406
Kerte: 19	-0.0004450744	0.5093567481	0.8345770708	1238.6630112290
Kerte: 20	-0.0329376012	0.5181419843	0.8335476729	1096.1102700677

4. SENDELENİMSİZLİK VE GAUSS DÖRDÜLLEMESİ

4.1 Giriş

Sendelenim açılımının hızlı yakınsamayan bir açılım olduğunun görülmesi, açılımın yapısının değiştirilmesini gerektirmiştir. Bu bağlamda, sendelenim terimlerinin \hat{x} işlecinin düzey gösteriliminin k 'ıncı üssü ile \hat{x} işlecinin düzey gösterilimi arasındaki değişim ile orantılı olduğu bir çizem aşağıdaki adımlarla oluşturulmuştur. Tümleme aralığında çözümcül, dördülü tümlelenebilir bir işlem olan $f(x)$ işlevinin Maclaurin açılımı

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k \quad (4.1)$$

biçimindedir. Bu işlevin tümlevi

$$\int_a^b dx f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \int_a^b dx x^k \approx \sum_{k=0}^{\infty} f_k M(\hat{x}^k) \quad (4.2)$$

olarak yazılabilir. Eğer x yerine sendelenimsizlik bağlamında $M(\hat{x})$ kullanılırsa

$$\int_a^b dx f(x) \approx \int_a^b dx f(M(\hat{x})) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k M(\hat{x})^k \quad (4.3)$$

oluşur. Bu iki denklemi karşılaştırınca

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \left[M(\hat{x}^k) - M(\hat{x})^k \right] \quad (4.4)$$

yapısının bastırılmasının sendelenimsizlik yaklaşımının doğruluğunu artıracığı görülmektedir. Bu bağlamda, sendelenim açılımı

$$M(\hat{f}) = f(M(\hat{x})) + \sum_{k=0}^{\infty} f_k \left[M(\hat{x}^k) - M(\hat{x})^k \right] \quad (4.5)$$

olarak verilebilir. \hat{f} , işlenenini $f(x)$ işlevi ile çarpan işleci simgelemektedir. Bu denklemin sağ tarafındaki ilk terim sendelenimsizlik, sonsuz toplam ise sendelenimleri betimlemektedir.

$$R = M(\hat{x}^j) - M(\hat{x})^j \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (4.6)$$

sendelenim yapısı j 'inci kerte sendelenim terimi olarak adlandırılacaktır. Özenli bir inceleme, sıfıncı ve birinci kerte sendelenimlerin sıfır düzeyine eşit olduğunu gösterir. Aslında sendelenim terimleri, olasılık kuramı ve sayıttında (ing: statistics) sayıttımsal (ing: statistical) değışimi betimleyen değışke (ing: variance) kavramının genişletilmesidir. f_k katsayıları Taylor serileri bağlamında, tümlelenecek olan işlevin k 'ıncı türevinin belli bir noktadaki değeri içermeğtedir. Dolayısıyla sendelenimlerin katkıları işlevin yapısına bağımlıdır. Sendelenimlerin katkılarının bastırılması işleminin işlevin yapısına bağı bir uzişle gerçekleştirilmesinin, işlevin yapısına bağı olmayan bir uzişle gerçekleştirilmesine göre çok daha iyi sonuçlar vermesi beklenmektedir. Fakat evrensellikten ödün vermemek amacıyla yöntemin işlevin yapısından bağımsız olduğu durum incelenecektir.

Gauss dördüllemesi öğeleri dördülü tümlelenebilir işlevler olan Hilbert uzayları ile ilintilidir. Bu Hilbert uzayında iççarpım

$$(f, g) \equiv \int_a^b dx w(x) f(x) g(x) \quad (4.7)$$

olarak tanımlanmalıdır. Boy tanımı ise

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} \quad (4.8)$$

olarak yapılmalıdır. Hilbert uzayının taban takımı $[a, b]$ aralığında dik ve birimboylu çokterimliler olarak tanımlanmalıdır.

Taban işlevlerinin oluşturulumu için Cholesky ayrışttırımı kullanılabilir. $1, x, x^2, \dots, x^n$ çokterimli işlevlerini dik ve birimboylulaştırmak için, bu işlevlerin iççarpımlarından oluşan Gram dizeyini göz önüne almak gerekir. Gram dizeyinin yapısı

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} (u_1, u_1) & \cdots & (u_1, u_n) \\ & \ddots & \\ (u_n, u_1) & \cdots & (u_n, u_n) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

biçimindedir. u ile simgelenen işlevlerden, dik ve birimboylu v taban işlevlerinin üretilmesi gerekmektedir.

Cholesky yöntemi artıtanımlı bakışık dizeyler üzerinde uygulanabilir. Gram dizeyinin artıtanımlı olduğu, dizeyin herhangi bir yöneye göre oluşturulan dördül biçemin (ing: quadratic form) artıdeğerli olduğunun gösterilimi ile kanıtlanabilir.

Bu bağlamda

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{y}^T \mathbf{G} \mathbf{y} \quad (4.10)$$

yapısı artıdeğerli olmalıdır. Bu yapı daha açık bir biçimde yazılırsa

$$\mathbf{y}^T \mathbf{G} \mathbf{y} = (y_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + y_n \mathbf{u}_n, y_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + y_n \mathbf{u}_n) \quad (4.11)$$

anlatımı elde edilir. Bu anlatım uzayın boy ve iççarpım tanımlarının kullanımı ile

$$\mathbf{y}^T \mathbf{G} \mathbf{y} = ||y_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + y_n \mathbf{u}_n||^2 \quad (4.12)$$

olduğu görülür. Dördülleme olgusu artıdeğerlilik sağlamaktadır. Bu yapının sıfır değerinde olmadığı \mathbf{u} işlevlerinin doğrusal bağımsızlığının kullanımı ile gösterilebilir. Dolayısıyla, doğrusal bağımsız işlevlerden oluşturulan Gram dizeyi artıdeğerlidir. Bu olgu, dizeyin bir altüçgensel dizey ve bu altüçgensel dizeyin devriğinin çarpımı olarak ayrıştırılabilmesini sağlar.

$$\mathbf{G} = \mathbf{L} \mathbf{L}^T \quad (4.13)$$

eşitliği, sağ yanda birim dizey oluşacak biçimde soldan altüçgensel dizeyin evriği ve sağdan altüçgensel dizeyin devriğinin evriği ile çarparak

$$\mathbf{L}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{L}^{T^{-1}} = \mathbf{I} \quad (4.14)$$

olarak yazılabilir. \mathbf{u} yöneyi n adet u işlevini içerecek biçimde

$$\mathbf{u} \equiv \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

yazılabilir. Eğer \mathbf{G} dizeyi için

$$\mathbf{G} = (\mathbf{u}, \mathbf{u}^T) \quad (4.16)$$

olgusundan yararlanılırsa,

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{L}^{T-1} = \left(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{u}, (\mathbf{L}^{-1}\mathbf{u})^T\right) \quad (4.17)$$

yapısı elde edilir. Bu yapının birim dizeye eşit olduğu gösterilmişti. Birim dizeye eşit olmak demek, $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{u}$ yöneyleri üzerinden oluşturulan Gram dizeyinin köşegen üzerindeki öğelerinin 1, diğer öğelerinin de 0 olması demektir. Bu da aslında dik ve birimboylu olmanın tanımıdır. Dolayısıyla $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{u}$ bağıntısı ile oluşturulan taban işlevleri dik ve birimboyluluk koşulunu sağlamaktadır. Bu noktadan sonra, dik ve birimboylu taban takımı \mathbf{u} ile gösterilecektir. MuPAD betikleme dilinde Cholesky ayırtımını kolaylıkla yapmak olanaklı olduğu için bu dikleştirme yöntemi seçilmiştir [24]. Eğer Gram-Schmidt yöntemi kullanılarak $1, x, x^2, \dots, x^n$ işlevleri yükselen derece sırası ile dikleştirilip, oluşan işlevler boylarına bölünürse de aynı sonuç elde edilebilir.

Bu uzaydaki bir işlevi, işlevin bağımsız değişkeni ile çarpan \hat{x} işleci etki ettiği çokterimlinin derecesini bir derece artırır. Dolayısıyla,

$$xu_n(x) = \sum_{i=1}^{n+1} c_i u_i(x) \quad (4.18)$$

bağıntısı yazılabilir. Bağıntının her iki yanının soldan u_j ile iççarpımı belirlenirse

$$c_j = (u_j, xu_n), \quad j = 1, \dots, n+1 \quad (4.19)$$

elde edilir. x ile çarpan işlecin kendine eş bir işleç olduğu ve iççarpımın ilk ögesine veya ikinci ögesine etki ettirilmesinin aynı sonucu üreteceği, iççarpımın tümlev tanımını kullanarak gösterilebilir. Dolayısıyla, eşitlik

$$c_j = (u_n, xu_j) \quad (4.20)$$

olarak da yazılabilir. u_n tanımı gereği $n-1$ dereceli bir çokterimlidir. xu_j ise $j-1$ dereceli bir çokterimlinin bağımsız değişkeni ile çarpımını betimlediği için j dereceli bir çokterimlidir. Bir çokterimli derecesi kendinden küçük tüm çokterimlilere dik olacağından dolayı

$$c_j = (u_n, xu_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n-2 \quad (4.21)$$

yazılabilir. Bu olgunun $xu_n(x)$ yapısının toplamsal gösteriliminde kullanımı, toplamın $i = n-1$ durumundan önceki tüm katkıların 0 olduğunu gösterir.

yapısı oluşur. En sağdaki terim w_i ağırlık katsayısının tanımı idi. Eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim ise u_{n+1} işlevinin kendisinden küçük dereceli bir çokterimli ile çarpımını içerdiğinden dolayı düşer.

Dolayısıyla ağırlıklar için tümlevsel bir gösterilim elde edilmiş olunur. Bu tümlevin çekirdeği artı değerli olduğundan dolayı, ağırlıkların da, istendiği biçimde artı değerli olduğu ortaya çıkar. Tümlevleme işlemi sendelenimsizlik bağlamında, u_1 taban işlevinin 1 değişmez işlevine eşit olduğu göz önünde bulundurulur,

$$I \approx \mathbf{e}_1^T f(\mathbf{X}) \mathbf{e}_1 \quad (4.28)$$

olarak verilebilir. İççarpımın tümlev tanımı bu yazımı olanaklı kılar. \mathbf{X} dizeyinin izgesel gösterilimi,

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^n \xi_k \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T \quad (4.29)$$

yapısı kullanılırsa

$$f(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T \quad (4.30)$$

bağıntısı elde edilir. İzgesel gösterilimin yaklaşıtımda yerine konulması

$$I \approx \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (\mathbf{e}_1^T \mathbf{x}_k)^2 \quad (4.31)$$

dördülmesini üretir. İşlev değerlerinin çarpanlarının, başka bir deyişle ağırlıkların artı değerli olacağı bu bağıntıda açıkça görülmektedir. \mathbf{X} dizeyinin oluşturulumunda üç terimli özyineleme kullanılırsa, aslında dizey gösteriliminde olmayan u_{n+1} işlevi oluşacaktır. Özdeğerler belirlenirken $n \times n$ dizey gözönüne alındığı için, u_{n+1} işlevinin sıfırlanması gereklidir. u_{n+1} işlevinin \mathbf{X} dizeyinin özdenklemleri olması Gauss dördülmesi ile sendelenimsizlik kuramı ile oluşturulan dördülme arasındaki birebir örtüşmeyi sağlamaktadır. Bu örtüşme, taban takımının belirtilen biçimde olduğu ve Hilbert uzayında birim ağırlık kullanıldığı durum için geçerlidir. Taban takımında yapılacak değişiklikler dördüllemeyi etkileyecektir. İlk taban işlevi 1 değişmez işlevi alınmak üzere başka taban takımları kullanımında da Gauss dördülmesinde olduğu gibi ağırlıkların artı değerli ve düğümlerin tümlevleme aralığı içinde kaldığı gösterilebilir. \mathbf{X} dizeyi

üzerinden \mathbf{u} yöneyine göre oluşturulacak dördüsel işlevde \mathbf{X} dizeyi yerine dizeyin izgesel gösterilimi kullanılarak, düğüm noktalarının aralık içerisinde konumlanacağı gösterilebilir.

\mathbf{X} dizeyinin boyutu artırıldıkça, Gauss dördülmesinde kullanılan düğüm sayısı artacaktır ve uygulamada elde edilen tümlev değeri kesin değere yaklaşacaktır. Belirtilen adımlarla oluşturulmuş olan \mathbf{X} dizeyi, Gauss dördülmesi bağlamında Jacobi dizeyi olarak isimlendirilir.

\mathbf{X} dizeyinin boyutu artırılmadan, $\mathcal{H} - \mathcal{H}_n$ ile simgelenebilecek tümleyici uzayın ilgilenilen \mathcal{H}_n uzayı üzerindeki etkileri taban takımı genişletilerek yansıtılabilir.

4.2 Altuzay içinde altuzay döndürümü

\mathbf{X} dizeyinin oluşturulumunda kullanılan n sırasayılı taban işlevi yerine n sırasayılı taban işlevi ve $n + 1$ sırasayılı taban işlevinin doğrusal birleştirmesi kullanılabilir. Böylelikle $\mathcal{H} - \mathcal{H}_n$ uzayını örten taban işlevlerinden biri \mathcal{H}_n uzayını örten taban işlevi haline getirilmiş, \mathcal{H}_n , boyutu arttırılmadan, bir anlamda, taban takımınca genişletilmiş olur. Taban takımınca genişletilmiş Hilbert uzayında tanımlı olan işlevleri bağımsız değişkenleri ile çarpan \hat{x} işlecinin dizey gösterilimi kullanılarak oluşturulan dördüllemenin düğüm sayısını artırmadan yalnızca düğüm ve ağırlıkları değiştirerek yaklaşımın yanılığını azaltması beklenmelidir. En genel durumda, taban takımınca genişletilmiş Hilbert uzayının n sırasayılı taban işlevi $g_1 u_n + g_2 u_{n+1} + \dots + g_{k+1} u_{n+k}$ yapısında bir doğrusal birleştirim olacaktır. Sendelenim açılımının oluşturulumunda birim işlecini dizey gösteriliminin birim dizey olduğu olgusu kullanılmıştır. Bu koşulun sağlanabilmesi için

$$\left(u_i, \hat{I}u_j \right) = \delta_{ij} \quad (4.32)$$

eşitliğinin sağlanması gerekmektedir. Taban takımınca genişletilmiş Hilbert uzayı için de bu olgunun geçerli olması gerektiğinden dolayı, birleştirim katsayıları diklik ve birimboyluluğu bozmayacak biçimde seçilmelidir. Birimboyluluk için

$$\sqrt{g_1 u_n(x) + \dots + g_{k+1} u_{n+k}(x), g_1 u_n(x) + \dots + g_{k+1} u_{n+k}(x)} = 1 \quad (4.33)$$

olmalıdır. Bunun için gerek ve yeter koşul,

$$\sqrt{g_1^2 + g_2^2 + \dots + g_{k+1}^2} = 1 \quad (4.34)$$

olmasıdır. Bu yeni taban işlevi, $u_n(x)$ işlevinden daha küçük dereceli işlevler içermediği için, diklik koşulunu zaten sağlamaktadır.

\mathbf{X} dizeyinin \hat{x} işlecinin yapısını daha iyi betimleyebilmesini sağlayabilmek için yapılması gereken, sendelenimlerin bastırılmasıdır. \mathbf{X} dizeyinin sayısal tümlevleme açısından belirleyici ögesi sol üst köşedeki ögesidir. Çünkü dördüllemenin oluşturulmasında

$$\int_a^b dx f(x) = \int_a^b dx u_1(x) f(x) \quad u_1(x) = (u_1, \hat{f}u_1) \approx f((u_1, \hat{x}u_1)) \quad (4.35)$$

olgusu kullanılmıştır. Dolayısıyla, sayısal tümlevlemenin doğruluğunu artırmak için,

$$M(\hat{x}^j) - M(\hat{x})^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (4.36)$$

sendelenim dizeylerini boyca küçültmek yerine bu dizeylerin \mathbf{X}_{11} öğelerini mutlak değerce küçültmek yeterlidir.

$$\mathbf{e}_1^T (M(\hat{x}^j) - M(\hat{x})^j) \mathbf{e}_1, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (4.37)$$

tümlev sendelenimlerini tüm j değerleri sıfırlanacak hale getiren \mathbf{X} dizeyini oluşturmak, işlev ne olursa olsun kesin sonucu üretecek dördüllemeyi oluşturmak anlamına gelir. Bunun yolunun \mathbf{X} dizeyinin sonsuz sayıda taban ögesini barındıracak biçimde oluşturulması olduğu gösterilebilir ve bilgisayar açısından olanaklı değildir. Gauss dördüllemesini diğer dördüllemelerden daha güçlü yapan $2n - 1$ 'inci kerte ve daha küçük kerteli tüm tümlev sendelenimlerini sıfırlamasıdır. Bu, dördüllemenin, derecesi $2n$ 'den küçük olan tüm çokterimlileri sıfır yanlığı ile tümlevleyebilmesini sağlar. Bu olgular ışığında, sayısal tümlevleme bağlamında sendelenim açılımı

$$(u_1, \hat{f}u_1) = \mathbf{e}_1^T f(M(\hat{x})) \mathbf{e}_1 + \sum_{k=2n}^{\infty} f_k \mathbf{e}_1^T (M(\hat{x}^k) - M(\hat{x})^k) \mathbf{e}_1 \quad (4.38)$$

biçimindedir.

Yani Gauss dördüllemesi sıfır yanlığı ile tümlevlenebilecek çokterimli derecesini enbüyükleyecek biçimde yapılmıştır. Ama, Gauss dördüllemesinin diğer dördüllemelere göre her durumda daha iyi sonuç verecek diye bir durum da söz konusu değildir. Açılımda, tümlev sendelenimlerinin yanında işlevin

türevlerinin bir noktadaki değerleri çarpan olarak bulunduğu için, görece büyük işlev değerlerini bastıran dördülleme daha iyi sonuç verecektir. Bilimsel yazında bir dördüllemenin oluşturacağı yanılgıyı belirleme üzerine birçok çalışma vardır [1, 3, 9, 10]. Bu yanılgı hakkında tümlevlenen işlevden bağımsız olarak bir yaklaştırım elde etmek için tümlev sendelenimleri önemli bir araç olarak karşımıza çıkmaktadır. Altuzay döndürümünün açısını belirleyen ve g ile gösterilen değişkenlerin Gauss dördüllemesinin sıfırladığı tümlev sendelenimlerini sıfırlayacak şekilde seçilmesi gerekmektedir. Gauss dördüllemesinin gücünün kertesini $2n$ 'den küçük tümlev sendelenimlerini sıfırlama olduğu olgusundan esinlenerek, yeni oluşturulacak dördüllemede $2n - 2$ 'inci kerteden itibaren sendelenimlerin sıfırlanması yoluna gidilecek, döndürme açıları buna göre seçilecektir. Yapılan sınaama uygulamalarında $2n - 2$ 'inci kerte tümlev sendeleniminin sıfırlanmasının Gauss dördüllemesi oluşturduğu ve bir eniyilemeye olanak vermediği görülmüştür. Bunun yerine Gauss dördüllemesinin sıfırladığı $2n - 2$ 'inci kerte tümlev sendelenimini sıfırlamayı, onun yerine altuzay döndürümleri ile $2n - 2$ 'den sonra gelen döndürüm eksenini sayısı kadar tümlev sendelenimi sıfırlanmasına gidilmiştir. Yani, işlevin tümlevini belirlerken işlevin $2n - 2$ 'inci türevinin tümlev değeri üzerine etkisini kesin olarak elde edebilmek yerine, $2n - 2$ 'den hemen sonra gelen birkaç türevin etkisi kesin olarak elde edilmiştir.

İşlevin Taylor açılımında bir türevli terimin mutlak değerce büyük olması, işlevin o türeve karşılık gelen eğriliğinin yüksek olması anlamına gelir. Eğriliği yüksek olan işlevlerde yüksek türevli terimleri enküçükleme yarar sağlayacaktır. Gauss dördüllemesinin sıfırladığı ama uzay döndürümlü dördüllemenin sıfırlamadığı tümlev sendeleniminden dolayı oluşan olumsuzluk, tümlevlenecek olan işlevden ilgili Taylor teriminin çıkarımı ve Taylor teriminin tümlevinin kesin olarak alınıp daha sonra eklenmesi ile giderilebilir. Böylece, işlevin $2n - 2$ 'inci türevindeki değerini de içeren bir dördülleme oluşturulabilir. Ama bu durumda da tümlevlenecek işlevin bazı türev değerlerine gereksinim duyulacaktır.

4.3 Sınama Uygulamaları

Oluşturulan uziş şu adımlardan oluşmaktadır.

- 1) Ağırlığın birim ağırlık, tümlevleme aralığının $[0, 1]$ olduğu durum göz önüne alınmıştır. $1, x, x^2, \dots, x^k$ işlevleri Cholesky yöntemi ile dik ve birimboylulaştırılır.
- 2) İncelenecek altuzayın en yüksek dereceli taban işlevi, kendisi ve kendisinden sonra gelen döndürme sayısı kadar taban işlevinin doğrusal birleştirimi olarak simgesel biçimde betiklenir.
- 3) Tümlev sendelenimleri gerek döndürümsüz (Gauss dördüllemesi) gerekse döndürümlü durum için simgesel olarak belirlenir. Bunun için j sendelenim kertesini betimlemek üzere $M(\hat{x}^j)$ ile $M(\hat{x})^j$ dizeylerinin ilk öğeleri üzerinden değişimleri belirlenir.
- 4) n altuzayı örten taban işlevi sayısını betimlemek üzere, $2n - 1$ 'inci tümlev sendeleniminden başlamak üzere döndürüm sayısı kadar tümlev sendelenimindeki doğrusal birleştirim katsayıları belirlenmelidir. Bu tümlev sendelenimlerinin sıfıra eşitlenip katsayıların belirlenmesi sözkonusudur. Bu bağlamda, katsayıların dördüllerinin toplamının 1'e eşit kılınarak birimboyluluk koşulunu sağlayan denklem ile tümlev sendelenimlerinin sıfıra eşitlenmesi ile oluşan döndürüm sayısı kadar denklemin bir araya getirilmesi ile oluşan denklem kümesi, katsayıların bulunması için sayısal olarak çözülür.
- 5) Katsayı değerleri çözüm kümesinden gerçel değerli çözüm seçilir ve doğrusal birleştirimde yerine konur.
- 6) Hem döndürümlü hem döndürümsüz durum için ağırlık ve düğüm değerleri belirlenir. Düğümler ilgili \mathbf{X} dizeyinin özdeğerlerine, ağırlıklar ise karşılık gelen özyöneğin ilk öğelerinin dördüllerine denk gelmektedir.
- 7) Bu aşamadan önceki adımlar işlevin yapısından bağımsızdır. Dolayısıyla tümlevlenecek her işlev için yeniden yapılması gerekmez. Hem döndürümlü hem döndürümsüz durum için, tümlevlenecek işlevin düğüm noktalarındaki değerleri ilgili ağırlıklarla çarpılıp toplanarak tümlev değerine yaklaştırım elde edilir.
- 8) Tümlevlenecek işlevin Maclaurin açılımından $2n - 2$ 'inci terim çıkarılır. Bu yeni işlev için hem döndürümlü durumun dördüllemesi, hem de döndürümsüz durumun dördüllemesi kullanılarak tümlev yaklaştırımı yapılır. $2n - 2$ 'inci

terimin tümlevi kesin olarak belirlenip bu yaklaşıma eklenerek türev çıkartımlı dördülleme yaklaşımları elde edilmiş olur.

9) Her durum için bağıl yanlgılar belirlenir.

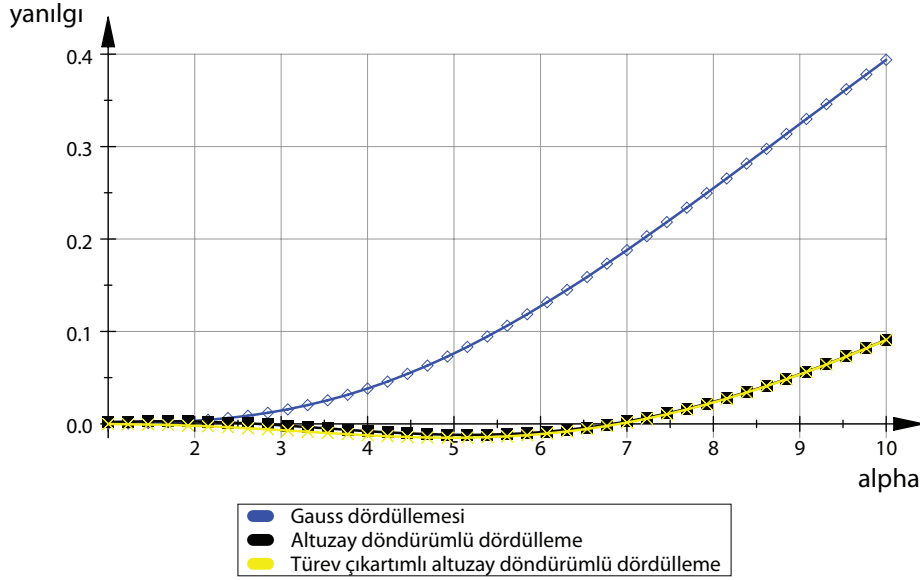
Dördüllemenin yanlgısını azaltan olgunun tümlev sendelenimlerinin bastırılması olduğu belirtilmişti. 2 altuzay boyutlu, dolayısıyla iki dördülleme düğümlü durumda, tümlev sendelenimleri

Çizelge 4.1: Gauss dördüllemesi ve tek döndürümlü dördüllemede tümlev sendelenimleri.

Kerte	Gauss Dördüllemesi	Altuzay Döndürümlü Dördülleme
0	0	0
1	0	0
2	0	0.00745572136232276607
3	0	0
4	0.00555555555555555556	-0.00608933937163555924
5	0.01388888888888888889	-0.00784381292504874334
6	0.02248677248677248677	-0.00630189646845533413
7	0.03009259259259259259	-0.00289684324391366781
8	0.03626543209876543210	0.00132776914883161872
9	0.04097222222222222222	0.00573076448467790617
10	0.04435559296670407782	0.00995174378158873263

olarak elde edilmiştir. Bu çizelgede tek açılı altuzay döndürümü kullanılmıştır. Yüksek kerteli tümlev sendelenimlerinde döndürümlü dördüllemenin Gauss dördüllemesine göre mutlak değerce küçük değer ürettiği dolayısıyla önemli bir olumluluk getirebileceği görülmüştür. Bu olguyla, n altuzay boyutunu betimlemek üzere, değişik n değerleri için de karşılaşılmıştır. Çizelgede görülen bir başka olgu da ikinci kerte tümlev sendeleniminden gelen olumsuzluktur. Uzay döndürümü bu tümlev sendelenimini Gauss durumuna göre mutlak değerce büyütüştür. Yapılan uygulamalarda, tekdöndürümlü durum için, $2n - 2$ 'inci kerte tümlev sendeleniminin Gauss durumuna göre mutlak değerce daha büyük olduğu gözlemlenmiştir. İşlevin yapısından $2n - 2$ 'inci Taylor terimini çıkarma yoluna gidilmesinin nedeni bu olgudur. Hızla artan yapısı nedeni ile $e^{\alpha x}$ işlevi üzerinde uygulamalar yapılmıştır. α değerinin artmasının işlevin sağlıklı yapısını bozacağı, dolayısıyla sayısal yöntemlerle tümlevlenmesini zorlaştıracağı olgusu vardır ve bu olgunun tümlevleme üzerindeki etkileri incelenmiştir. α değıştirgesinin (ing: parameter) sayısal tümlevleme üzerindeki etkisini

betimleyen bağıl yanlgı çizimlerinde, Gauss dördülmesi ile türev çıkartımlı Gauss dördülmesi eğrileri birbirinin üstüne oturmuştur. Bunun nedeni Gauss dördülmesinde $2n - 2$ 'inci tümlev sendeleniminin 0 olmasıdır. Başka bir deyimle, Gauss dördülmesi, o türeve karşılık gelen çarpanı sıfırlamaktadır.

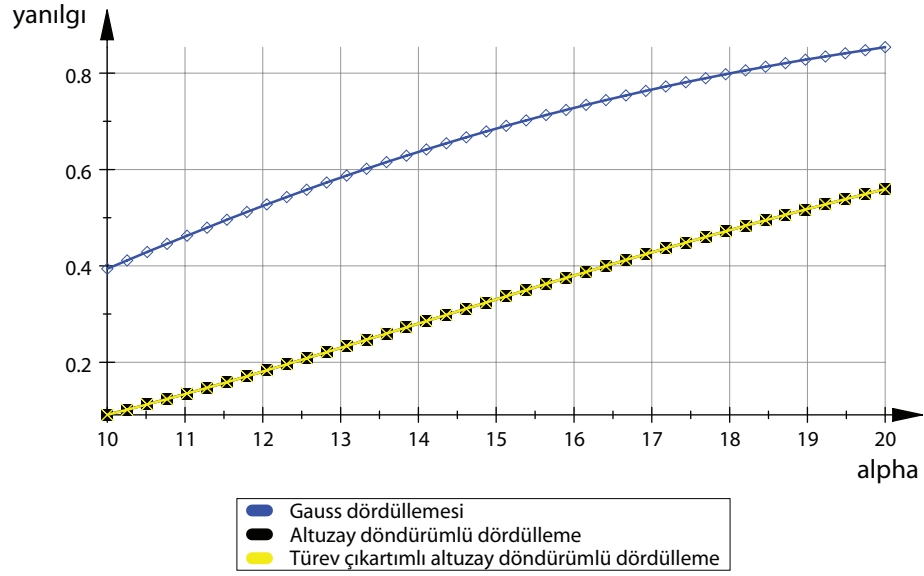


Çizim 4.1: $e^{\alpha x}$ işlevi için iki boyutlu altuzay kullanılarak oluşturulan dördüllemelerin bağıl yanlgılarının α 'ya göre değişimleri ($[1, 10]$ aralığı için)

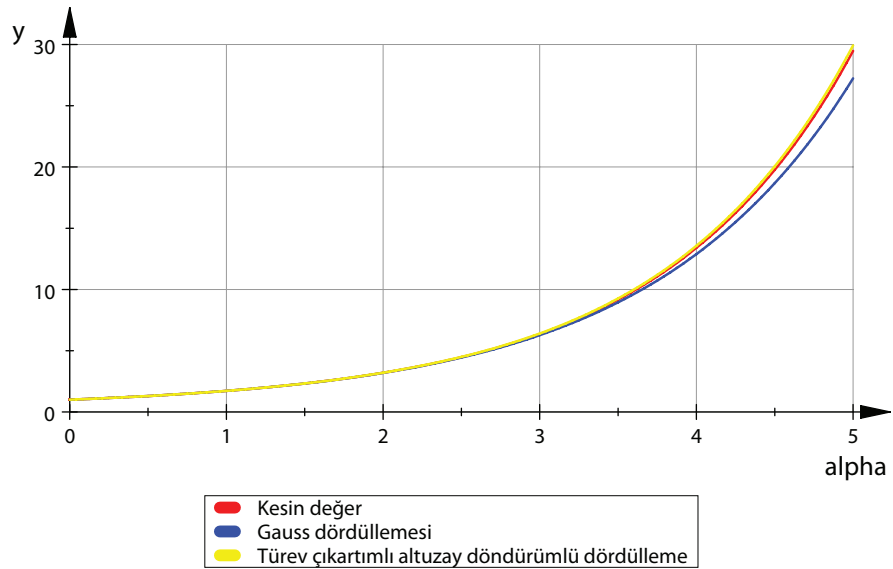
Bu bağıl yanlgı çiziminde iki taban işlevi ile örtülen altuzay incelendiğinde türev çıkartımının etkisinin yöntemin getirdiği olumluluğa göre oldukça küçük kaldığı görülmektedir. Gauss dördülmesi ile türev çıkartımlı Gauss dördülmesi bağıl yanlgıları tam olarak, altuzay döndürümlü dördülleme ile türev çıkartımlı altuzay döndürümlü dördülleme bağıl yanlgı eğrileri büyük ölçüde çakışmıştır. Beklendiği gibi, işlevin eğriliğinin artması hem Gauss dördülmesinin hem altuzay döndürümlü dördüllemenin işlevi yüksek duyarlılıkta tümlevleyebilmesini zorlaştırmıştır.

Bu bağıl yanlgı çizimlerine denk gelen tümlev değerleri çizimleri de bu olguları açıkça göstermektedir.

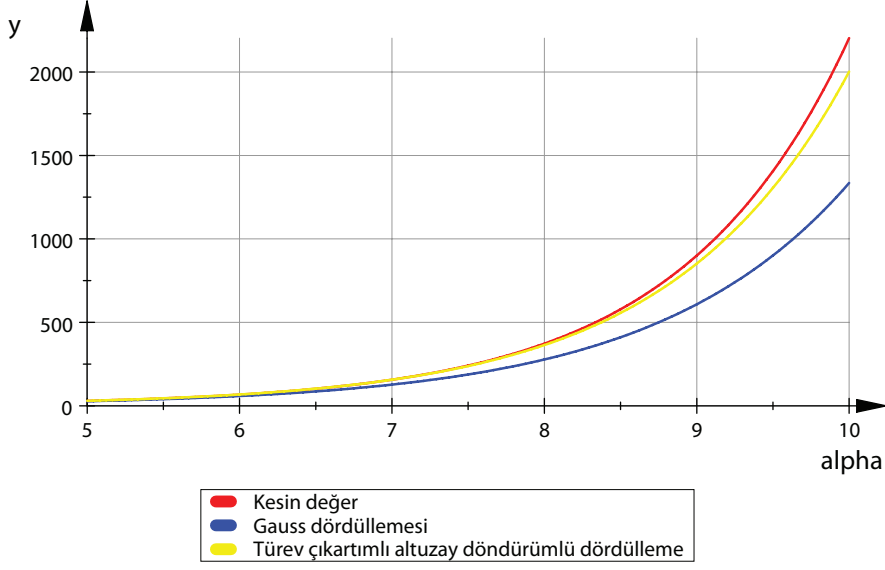
Bu çizimler α değiştirgesine göre tümlev değerlerini betimlemektedir. Üç değişik yöntem ile elde edilen tümlev değerleri ayrıık noktalar olarak konumlandırılarak oluşturulmuştur. Bu yöntemler simgesel olarak elde edilen kesin değer, döndürümsüz dördülleme karşılık gelen Gauss dördülmesi ve tek açılı türev çıkartımlı altuzay döndürümü dördüllemidir. Eğriliği yüksek olan işlevlerde,



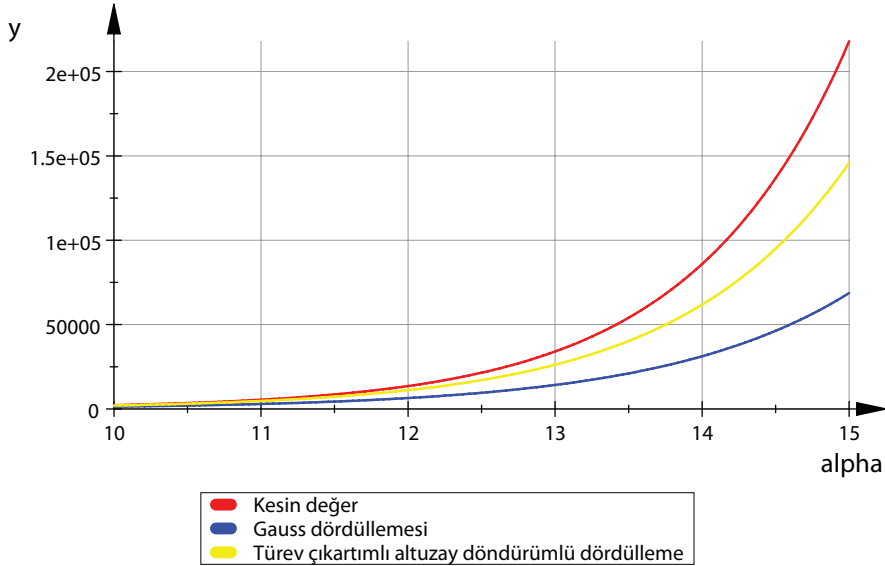
Çizim 4.2: $e^{\alpha x}$ işlevi için iki boyutlu altuzay kullanılarak oluşturulan dördüllemelerin bağıl yanılgılarının α 'ya göre değişimleri ($[10, 20]$ aralığı için)



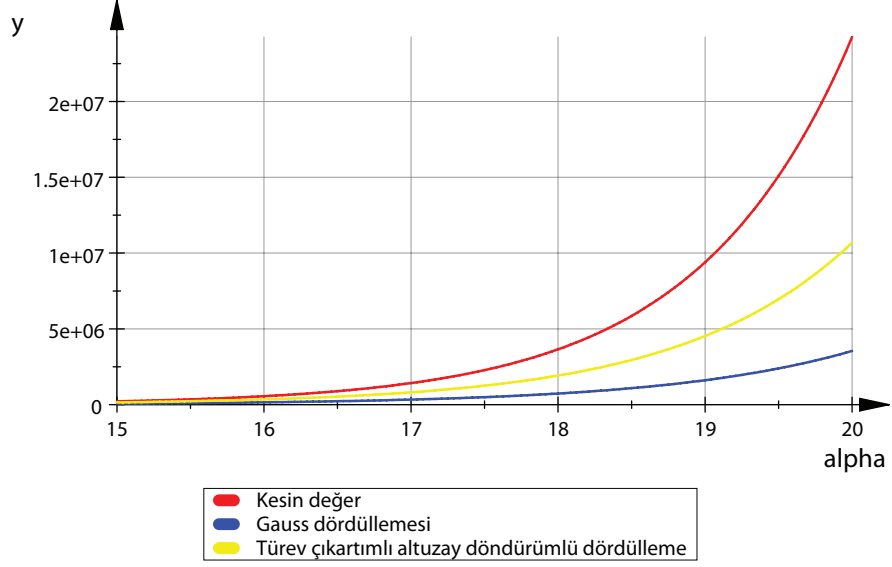
Çizim 4.3: $e^{\alpha x}$ işlevi için iki boyutlu altuzay kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[0, 5]$ aralığı için)



Çizim 4.4: $e^{\alpha x}$ işlevi için iki boyutlu altuzay kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[5, 10]$ aralığı için)



Çizim 4.5: $e^{\alpha x}$ işlevi için iki boyutlu altuzay kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[10, 15]$ aralığı için)



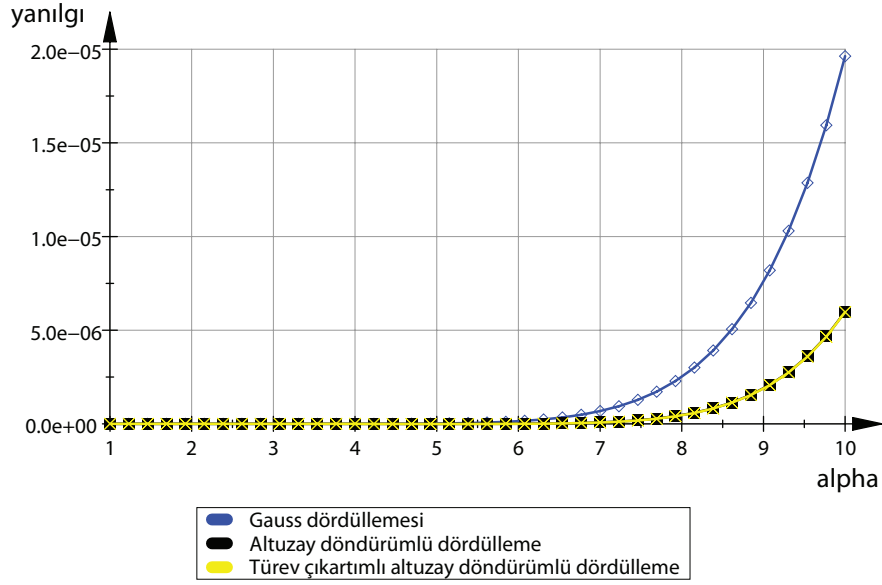
Çizim 4.6: $e^{\alpha x}$ işlevi için iki boyutlu altuzay kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[15, 20]$ aralığı için)

bu uygulamada başka bir deyimle büyük α değerlerinde, altuzay döndürümlü dördülleme Gauss dördüllemesine göre önemli olumluluk sağlamaktadır. Altuzay döndürümünün tümlev sendelenimlerinin mutlak değerce küçültmesinden dolayı oluşan bu olumluluk tüm yüksek eğrilipli işlevlerde beklenmelidir.

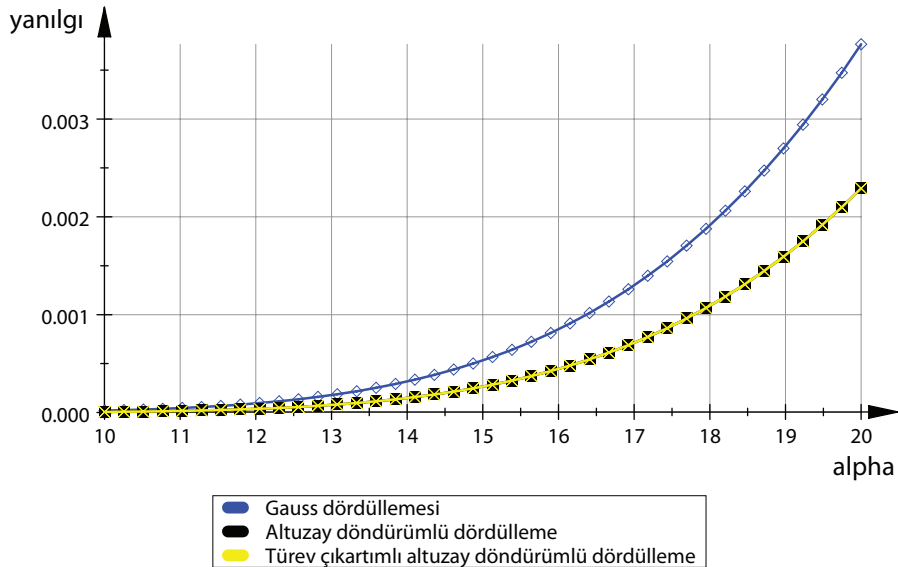
Aynı işlev kullanılarak, n artırılarak uzayın genişletilmesinin tümlevleme üzerine etkisi incelenmiştir. Altı taban işlevi ile örtülen altuzay ele alındığında, incelenen tüm α değerleri için altuzay döndürümlü dördüllemenin Gauss dördüllemesine göre daha olumlu sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir. Taban işlevi sayısının 6 olduğu durum için bağlı yanılığ çizimleri verilmiştir.

Görüldüğü gibi n sayısının altı olduğu durum n 'nin iki olduğu duruma göre hem Gauss dördüllemesinin hem altuzay döndürümlü dördüllemenin çok daha yüksek duyarlılıkta sonuçlar vermesini sağlamıştır. Bunun nedeni, dördüllemede alınan düğüm noktası sayısının artmasıdır. Bu olguyu belirtmenin başka bir yolu da, daha çok taban işlevi ile oluşturulan doğrusal birleştirimin tümlevlenecek işlevin yapısını daha iyi yansıtmasıdır.

Bir sonraki aşamada, on taban işlevi ile örtülen altuzay, dolayısıyla on düğüm noktalı dördülleme incelenmiştir. Düşük α değerleri için bağlı yanılığının 10^{-12} düzeyine dek düştüğü gözlemlenmiştir. Bu çizimlerde, altuzay döndürümlü dördülleme ile türev çıkartımlı altuzay döndürümlü dördülleme bağlı yanılığı

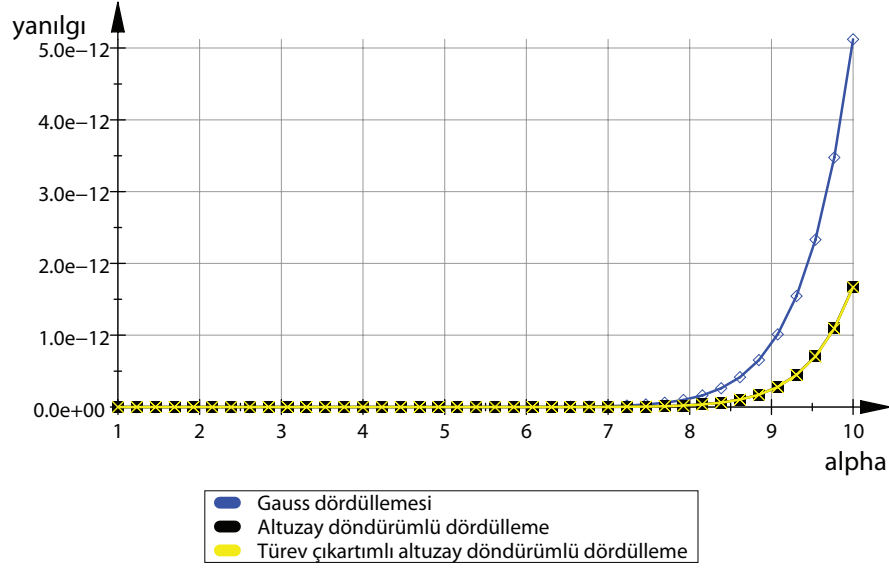


Çizim 4.7: $e^{\alpha x}$ işlevi için altı boyutlu altuzay kullanılarak oluşturulan dördüllemelerin bağıl yanılıklarının α 'ya göre değişimleri ($[1, 10]$ aralığı için)

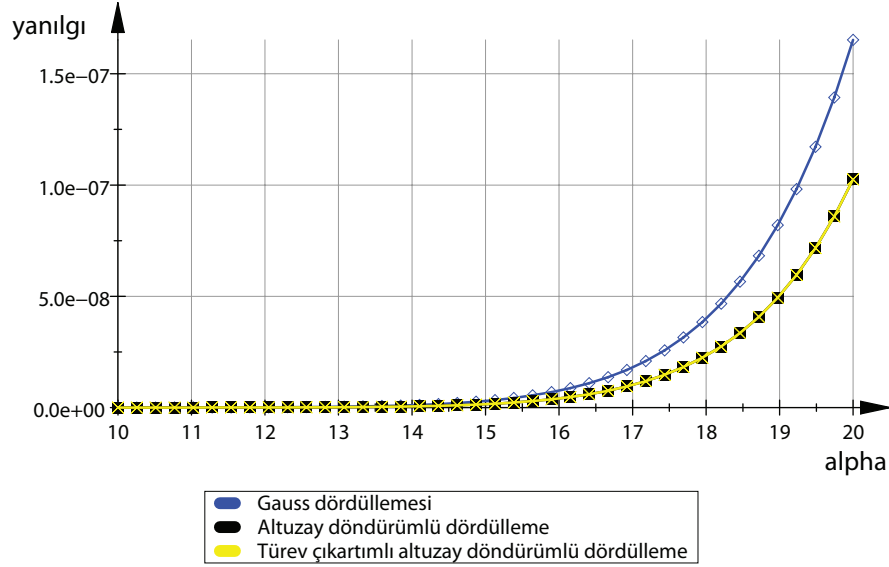


Çizim 4.8: $e^{\alpha x}$ işlevi için altı boyutlu altuzay kullanılarak oluşturulan dördüllemelerin bağıl yanılıklarının α 'ya göre değişimleri ($[10, 20]$ aralığı için)

eğrileri büyük ölçüde çakışmıştır. n 'nin iki, altı ve on olduğu durum ilgili



Çizim 4.9: $e^{\alpha x}$ işlevi için on boyutlu altuzay kullanılarak oluşturulan dördüllemelerin bağıl yanılgılarının α 'ya göre değişimleri ($[1, 10]$ aralığı için)



Çizim 4.10: $e^{\alpha x}$ işlevi için on boyutlu altuzay kullanılarak oluşturulan dördüllemelerin bağıl yanılgılarının α 'ya göre değişimleri ($[10, 20]$ aralığı için)

çizimlerle birlikte verilmiş olundu. Oluşturulan dördüllemelerin düğüm noktaları ve ağırlık değerleri ekler bölümünde verilmiştir.

Yaklaşım ile ilgili ipuçları verebilecek bir başka olgu da altuzay döndürümü ile elde edilen doğrusal birleştirim katsayılarıdır. Altuzay döndürümü için taban

takımı olarak

$$\mathcal{U} \equiv \{u_i(x)\}_{i=1}^{n-1} \cup \{g_1 u_n(x) + g_2 u_{n+1}(x) + \dots + g_{k+1} u_{n+k}(x)\} \quad (4.39)$$

kullanılmıştı. g_1 katsayısının 1 diğer bütün g katsayılarının 0 olduğu durumun Gauss dördüllemesinin taban takımı olan Gauss-Legendre çokterimlilerini oluşturduğu belirtilmişti. Tek açılı altuzay döndürümü durumu g_1 ve g_2 'nin $(0, 1)$ aralığında değer alacağı, diğer bütün g katsayılarının 0 olacağı durumdur. Çizelgede tek döndürüm durumu için n 'ye göre g_1 ve g_2 doğrusal birleştirim katsayıları verilmiştir.

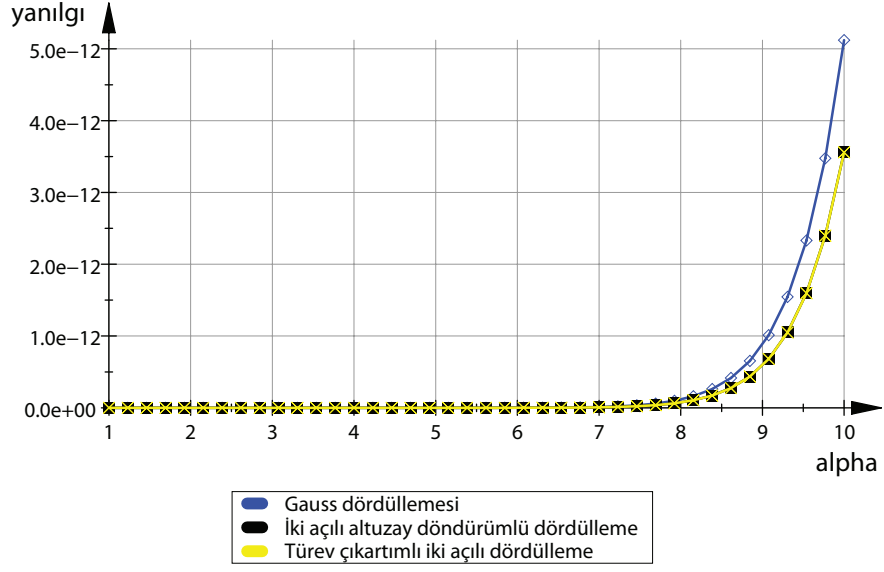
Çizelge 4.2: Tek döndürümlü dördüllemede doğrusal birleştirim katsayıları.

Altuzay boyutu	g_1	g_2
2	0.95421766052202513567	0.29911311630865202312
3	0.98144317077150177279	0.19175323346942759785
4	0.99018162084886458858	0.13978682961250452626
5	0.99396887778150356373	0.10966252779221547370
6	0.99593115233435641871	0.09011736686100492900
7	0.99707379693478079701	0.07644503558805835049
8	0.99779597448427588999	0.06635656186824523157
9	0.99828088612355325076	0.05861119688569161707
10	0.99862197861943099908	0.05247993729238533072

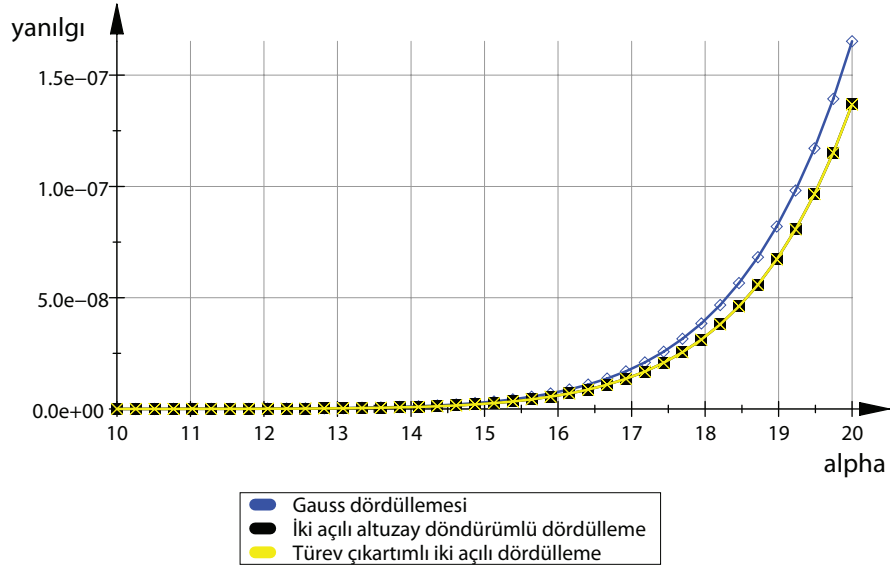
Sınama uygulamalarında gözlemlenmiştir ki, uzayın genişletilmesi g_1 katsayısını 1 değerine, g_2 katsayısını 0 değerine götürmektedir. Başka bir deyişle, uzay genişledikçe tek açılı altuzay döndürümü ile oluşturulan dördülleme Gauss dördüllemesine yaklaşmaktadır. n değıştirgesinin artırımı döndürümün getirdiği olumluluğu aynı boyutla oluşturulan Gauss dördüllemesine göre azaltmaktadır. Bunun nedeni, taban işlevi sayısı arttıkça bir doğrusal birleştirim ile yeni bir taban işlevinin yapacağı görece katkının azalıyor olmasıdır. Birçok uygulamada dördüllemede kullanılan düğüm sayısının yüzler kertesinde olduğu göz önüne alınırsa, tek döndürümün yapacağı katkının çok küçük olacağı belirtilebilir.

Bu olumsuzluğu gidermek için döndürüm sayısının artırılması yoluna gidilebilir. $e^{\alpha x}$ işlevi için iki döndürümlü durum da incelenmiştir.

α değıştirgesine göre tümlev değerlerindeki bağıl yanılığın betimleyen bu çizimleri aynı uzay boyutu için tek döndürümlü durumu betimleyen çizimlerle karşılaştırdırınca ikinci döndürümün bir olumluluk değil, olumsuzluk getirdiği



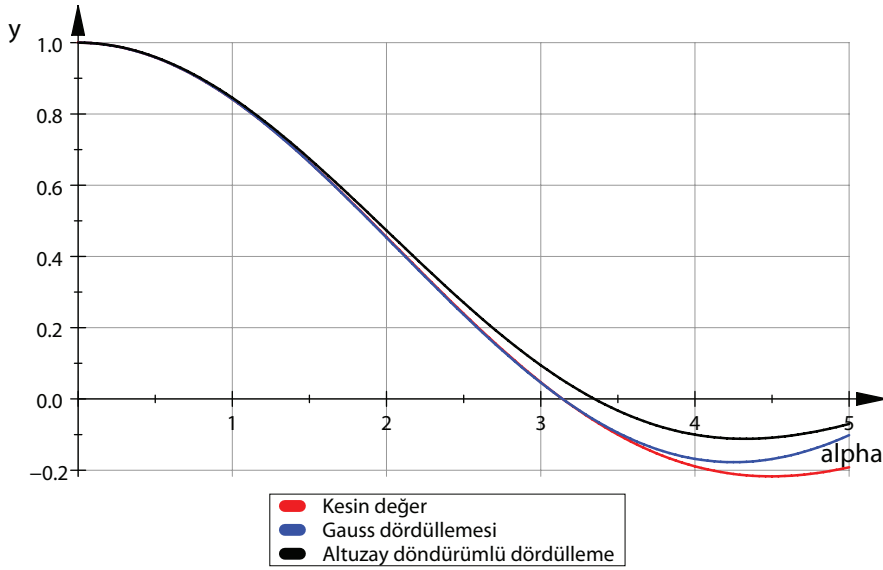
Çizim 4.11: $e^{\alpha x}$ işlevi için on boyutlu altuzay kullanılarak oluşturulan dördüllemelerin bağıl yanlıklarının α 'ya göre değişimleri ($[1, 10]$ aralığı için)



Çizim 4.12: $e^{\alpha x}$ işlevi için on boyutlu altuzay kullanılarak oluşturulan dördüllemelerin bağıl yanlıklarının α 'ya göre değişimleri ($[10, 20]$ aralığı için)

görülmektedir. Bunun bir nedeni katsayıların bulunması için çözülen denklem kümesinin sayısal olarak çözüldüğü olgusudur. Doğrusal olmayan bu üç değişkenli üç denklemin çözümünden gelecek yanlıgı yönteme yansıyacaktır. MuPAD, değiştirgeler için sonuç vermekte ama sonuçların istenilen duyarlılıkta olmayabileceği uyarısında bulunmaktadır. Çok açılı döndürümde doğrusal birleştirim katsayılarının bulunması için yeni yöntem geliştirilimi gereklidir.

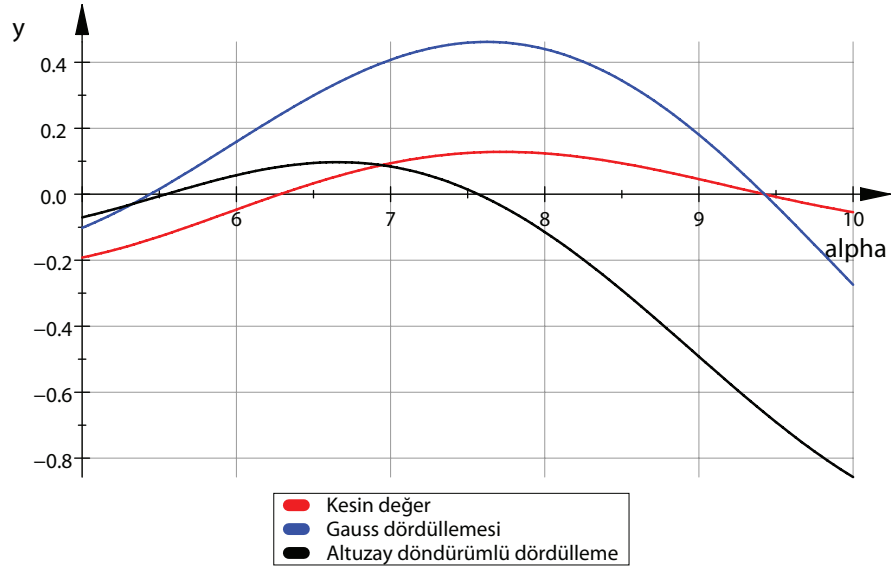
Bir sonraki aşamada, altuzay döndürümlü dördüllemenin değişik işlevler üzerindeki etkisi incelenmiştir. $\cos(\alpha x)$ işlevinin tümlevlenebilmesi için Gauss dördüllemesi ve altuzay döndürümlü dördülleme kullanılmıştır.



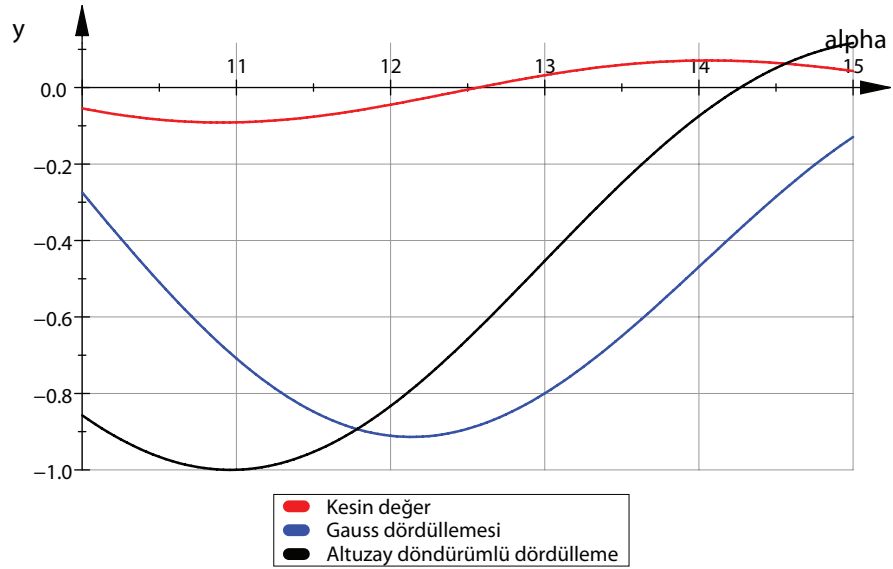
Çizim 4.13: $\cos(\alpha x)$ işlevi için iki boyutlu altuzay kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[0, 5]$ aralığı için)

Çizimlerde α değiştirgesine göre kesin tümlev değerleri, Gauss dördüllemesi ile elde edilen tümlev değerleri ve tek açılı altuzay döndürümlü dördülleme ile elde edilen tümlev değerleri verilmiştir. Altuzay döndürümünün Gauss dördüllemesine göre bir olumluluk sağlamadığı gözlemlenmiştir.

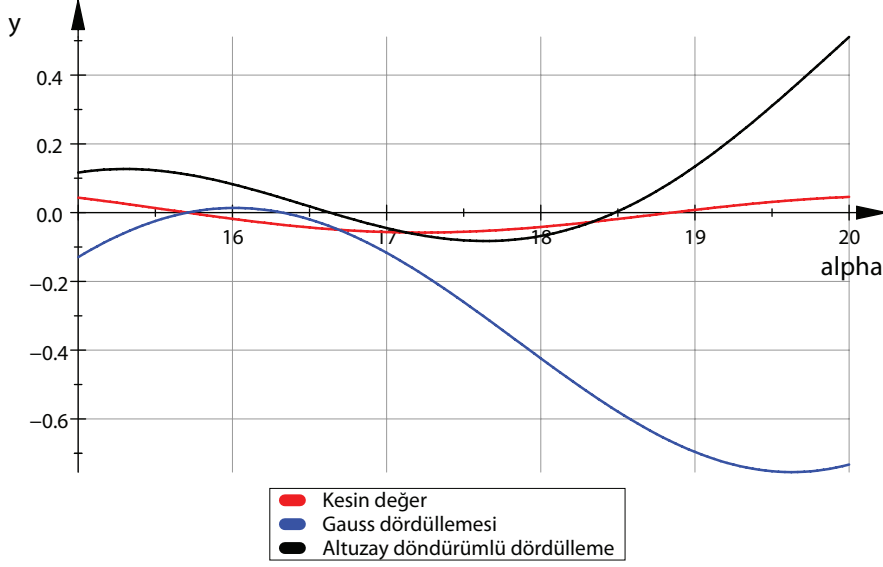
Bunun önemli nedenlerinden biri, çokterimli taban takımının salınımlı işlev yapısını iyi yansıtamayışdır. Çokterimli taban takımı yerine Fourier taban takımı kullanımının daha iyi bir yaklaştırım vereceği, altuzay döndürümünün de Fourier taban takımına göre yapılabileceği göz önünde bulundurulmalıdır. Böyle bir



Çizim 4.14: $\cos(\alpha x)$ işlevi için iki boyutlu altuzay kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[5, 10]$ aralığı için)



Çizim 4.15: $\cos(\alpha x)$ işlevi için iki boyutlu altuzay kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[10, 15]$ aralığı için)



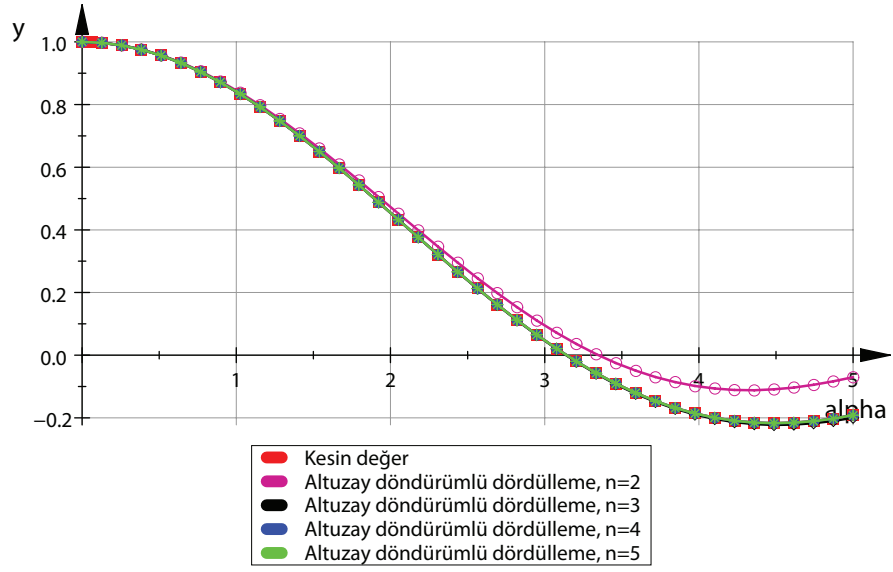
Çizim 4.16: $\cos(\alpha x)$ işlevi için iki boyutlu altuzay kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ([15,20] aralığı için)

yaklaşım tümlevlenecek işlevin yapısına bağımlılığa neden olacağından dolayı bu çalışmada incelenmemiştir.

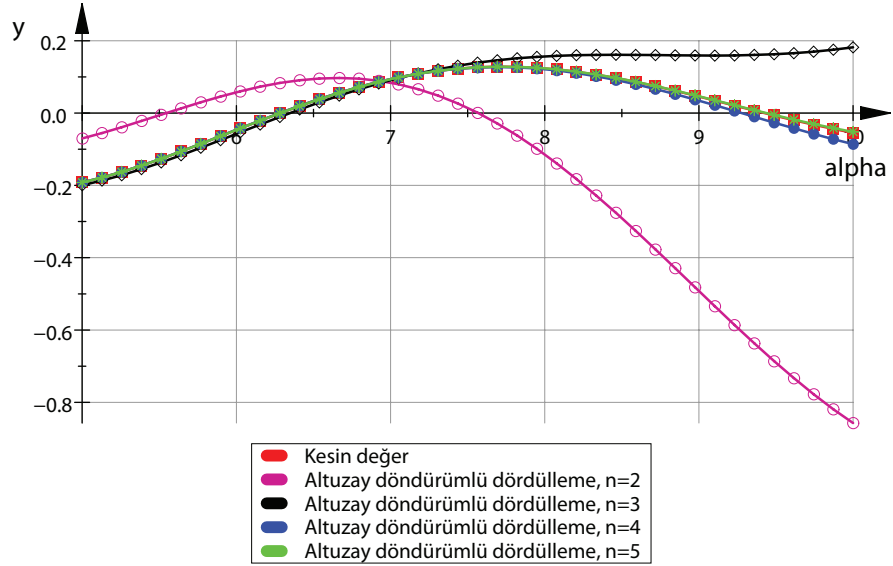
Aşağıdaki çizimler altuzay boyutu artırımının $\cos(\alpha x)$ işlevinin tümlevlenmesine etkisini betimlemektedir. Boyutun iki, altı ve on olduğu durum için elde edilmiş bulgulara koşul olarak, α değiştirgesinin artışının sayısal tümlevlemenin duyarlılığında azalmaya neden olduğu görülmektedir.

Altuzay boyutu artırıldıkça, dördüllemenin duyarlılığının arttığı açıkça görülmektedir. Yalnız, iki boyutlu altuzay durumunda α değiştirgesinin 20'ye yakın olduğu durumda, beklenenden daha iyi sonuç alındığı görülmüştür. Bir dördülleme işlemi için, eğer yeterince yüksek duyarlılıkta işlem yapılıyorsa, düğüm noktası sayısındaki artışın elde edilen yaklaşıımı kesin değere yaklaştırması beklenir. Yapılan işlemlerde 100 basamak işlem duyarlılığı kullanılmıştır ve bu 100 basamak duyarlılığın yeterli olduğu gözlemlenmiştir. Dolayısıyla buradan bir olumsuzluk kaynaklanmamaktadır.

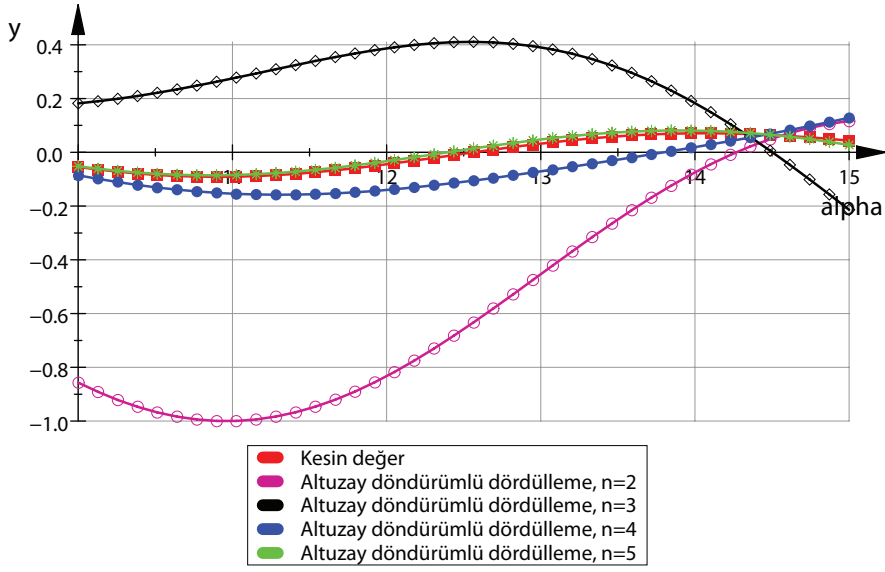
$n = 2$ durumunda belirli bir α aralığında beklenenden daha iyi sonuç elde edilmesinin rastlantısal bir durum olduğu düşünülmektedir. Yöntem, işlevi iyi betimleyen ağırlık ve düğüm noktaları üretmiştir. Buna karşın, boyut arttıkça beklenen iyileşme gözlemlenmiştir.



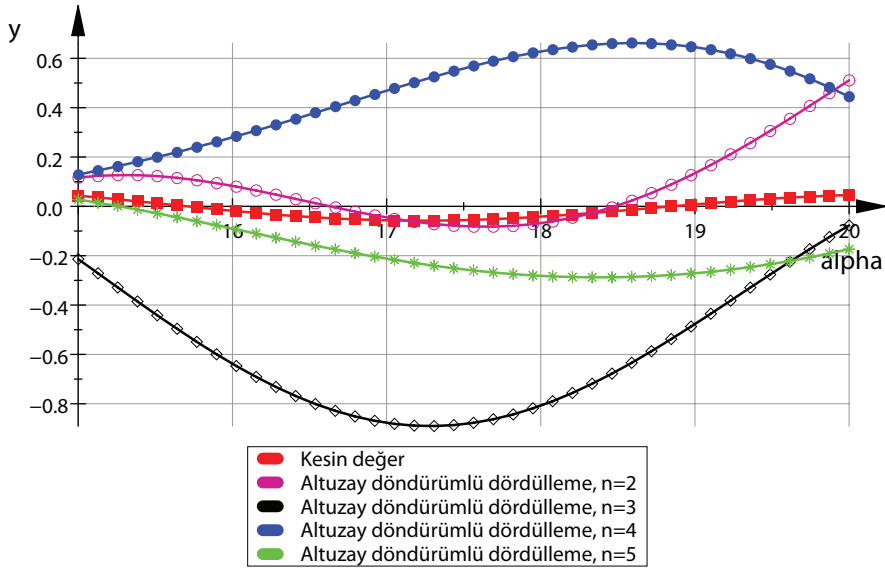
Çizim 4.17: $\cos(\alpha x)$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[0, 5]$ aralığı için)



Çizim 4.18: $\cos(\alpha x)$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[5, 10]$ aralığı için)

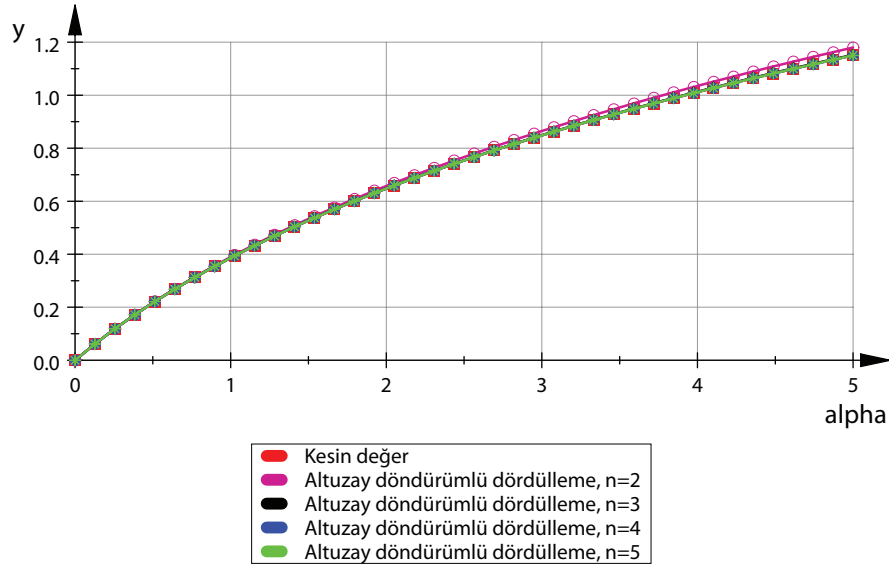


Çizim 4.19: $\cos(\alpha x)$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan drdllemelemlerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ([10, 15] aralığı için)

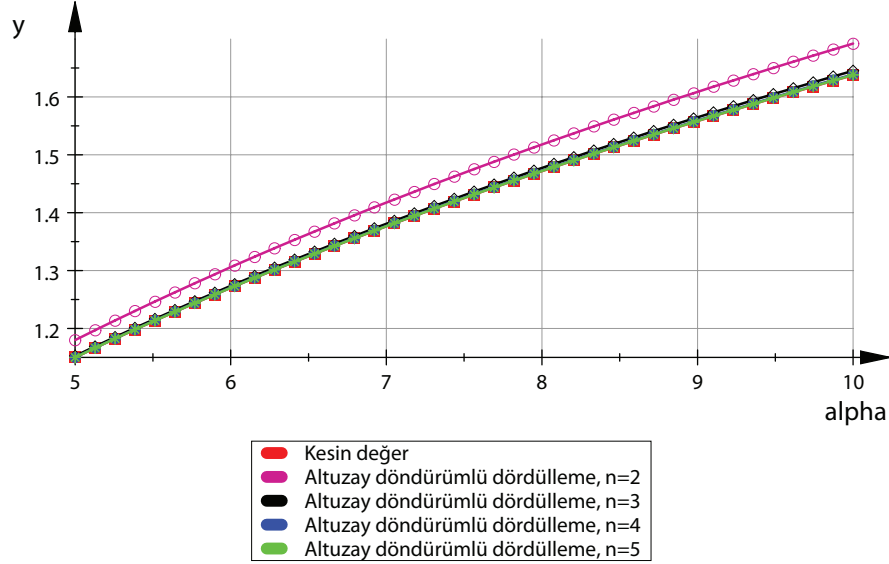


Çizim 4.20: $\cos(\alpha x)$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan drdllemelemlerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ([15, 20] aralığı için)

Bir sonraki aşamada altuzay döndürümlü dördüllemenin, $\ln(1 + \alpha x)$ işlevinin tümlelenmesi için kullanımı incelenmiştir.

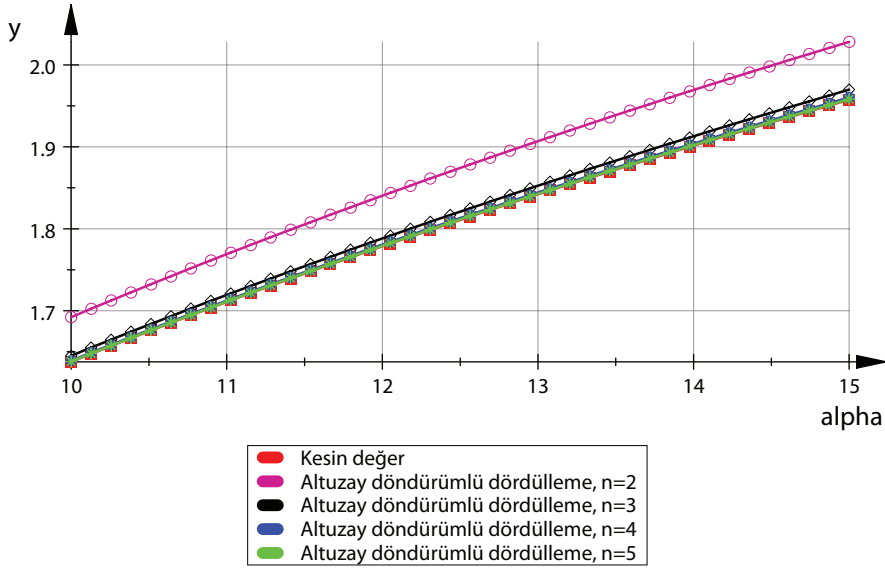


Çizim 4.21: $\ln(1 + \alpha x)$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[0, 5]$ aralığı için)

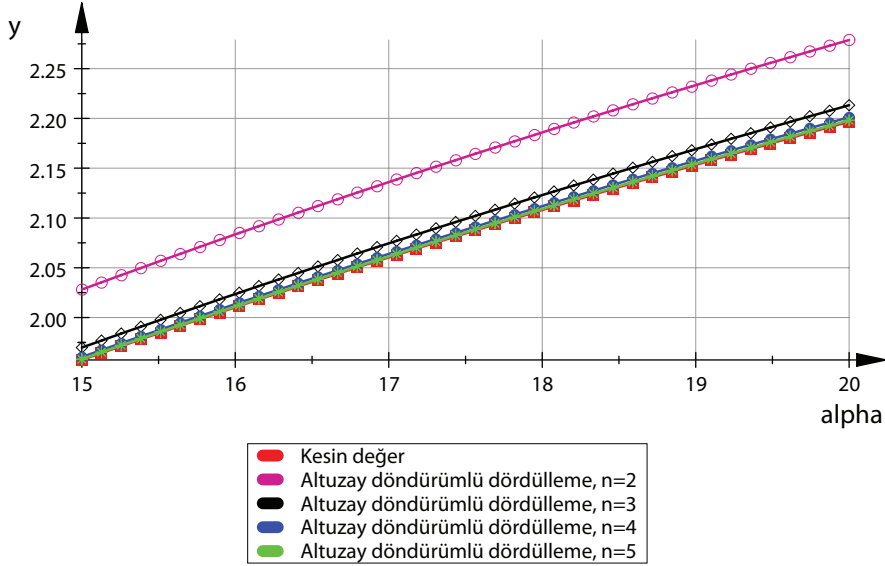


Çizim 4.22: $\ln(1 + \alpha x)$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[5, 10]$ aralığı için)

$\ln(1 + \alpha x)$ işlevi için altuzay boyutu artırımının duyarlılığı arttırdığı gözlemlenmiştir. Bu işlevin $x = -\frac{1}{\alpha}$ noktasındaki tekilliğinin dördüllemenin duyarlılığına olumsuz yansımalar yapabilemesi beklenebilir. Ama bu olgu, boyut

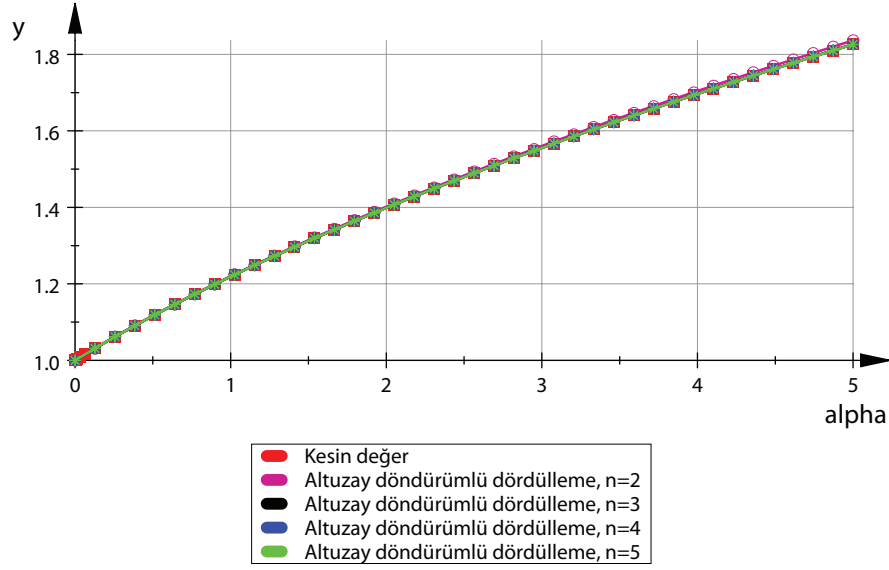


Çizim 4.23: $\ln(1 + \alpha x)$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ([10, 15] aralığı için)

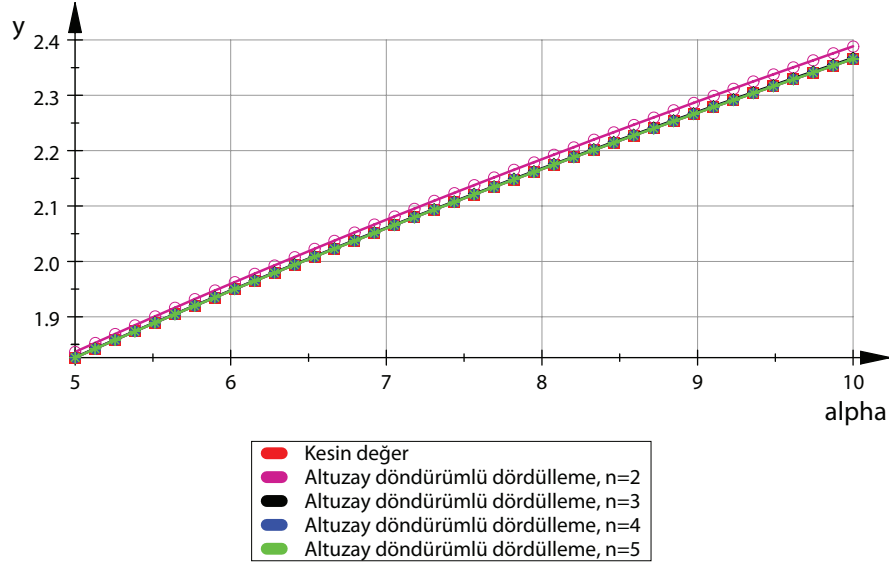


Çizim 4.24: $\ln(1 + \alpha x)$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ([15, 20] aralığı için)

arttıkça dördüllemenin duyarlılığının arttığı olgusunu gölgelemektedir.



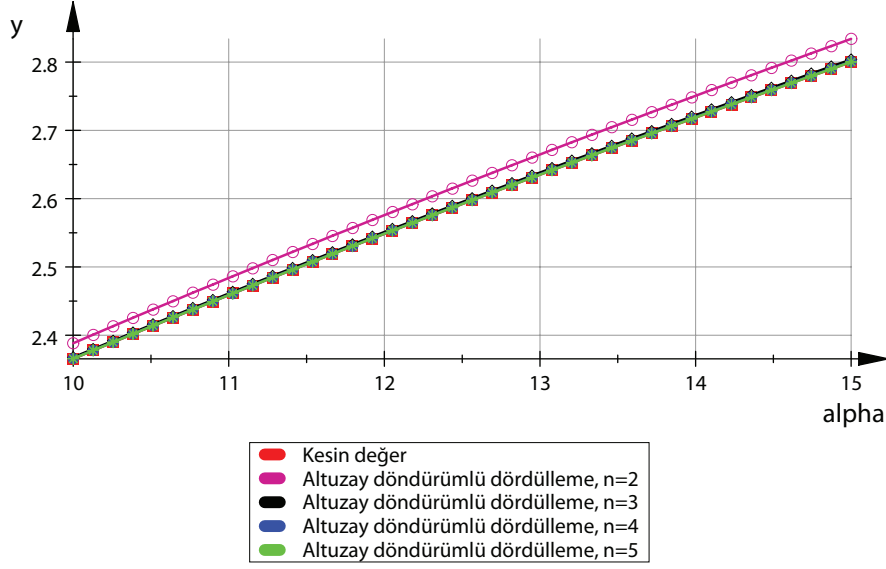
Çizim 4.25: $\sqrt{1 + \alpha x}$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[0, 5]$ aralığı için)



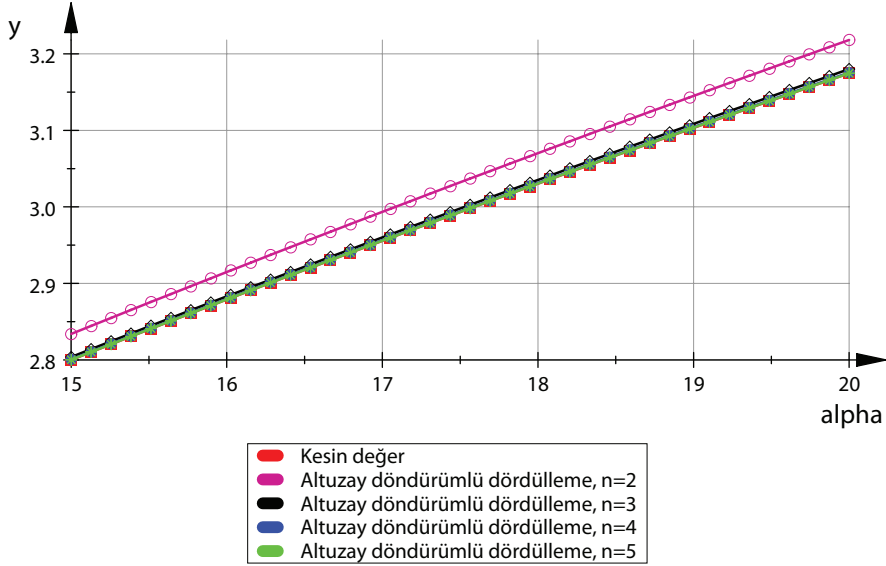
Çizim 4.26: $\sqrt{1 + \alpha x}$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[5, 10]$ aralığı için)

Bir sonraki aşamada $-\frac{1}{\alpha}$ noktasında dallanma tekiliği olan $\sqrt{1 + \alpha x}$ işlevi incelenmiştir.

Bu işlevin daha önce verilen işlevlere göre daha büyük yanlıklar ürettiği bu çizimlerden görülmektedir. Bunun nedeni işlevin daha önce verilen işlevlere göre



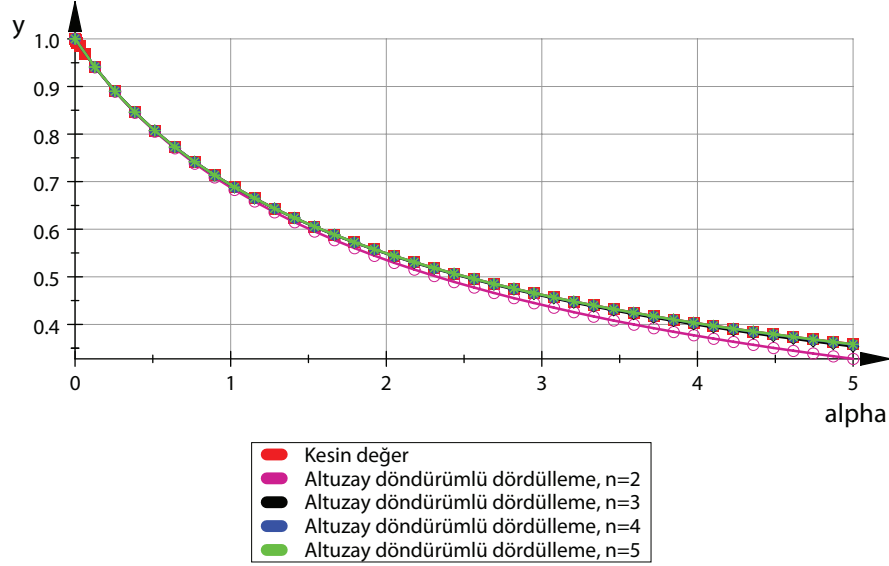
Çizim 4.27: $\sqrt{1 + \alpha x}$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan drdllemelemlerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ([10, 15] aralığı için)



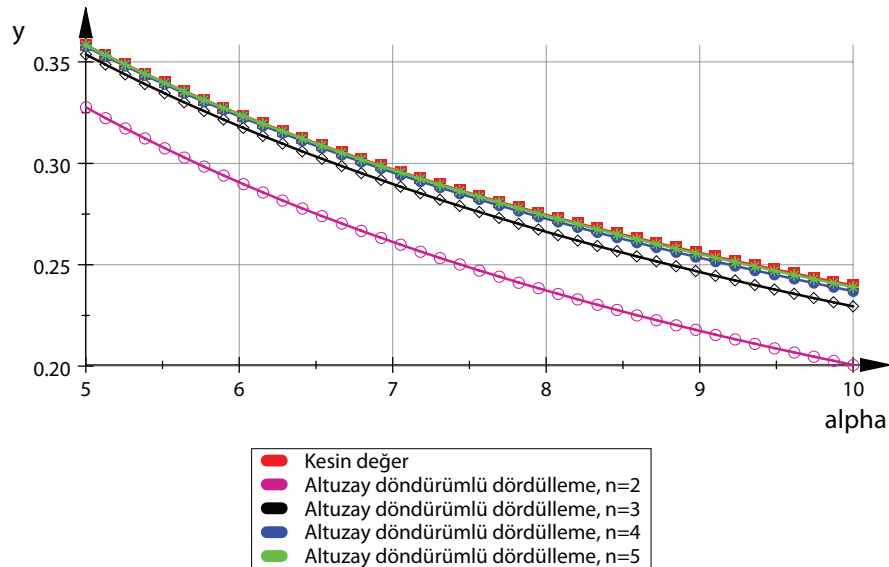
Çizim 4.28: $\sqrt{1 + \alpha x}$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan drdllemelemlerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ([15, 20] aralığı için)

daha sağlıksız yapıda oluşudur. Bu olgunun duyarlılığa olumsuz yansımına karşın, uzay boyutu artırımının duyarlılığı artırdığı gözlemlenmiştir.

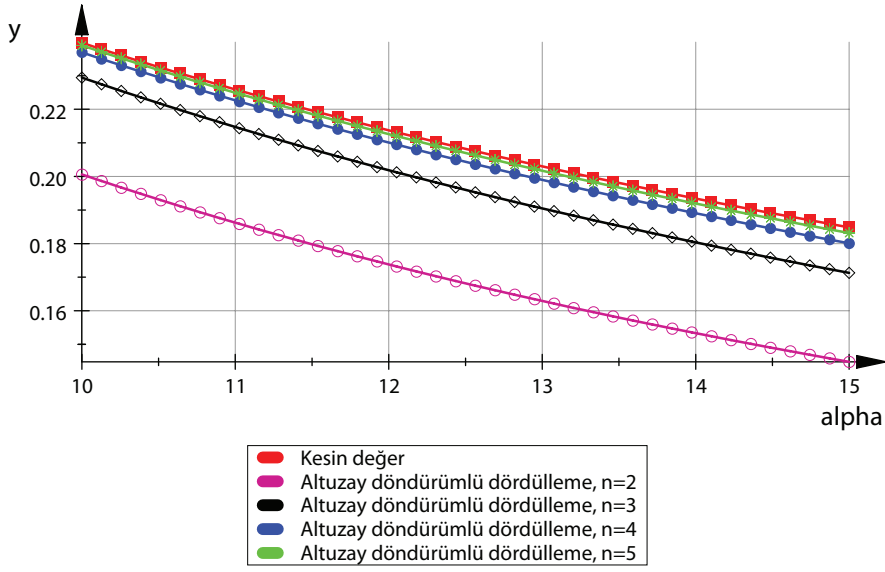
İncelemelerde, yine $-\frac{1}{\alpha}$ noktasında tekilliği olan $\frac{1}{1+\alpha x}$ işlevi de göz önüne alınmıştır.



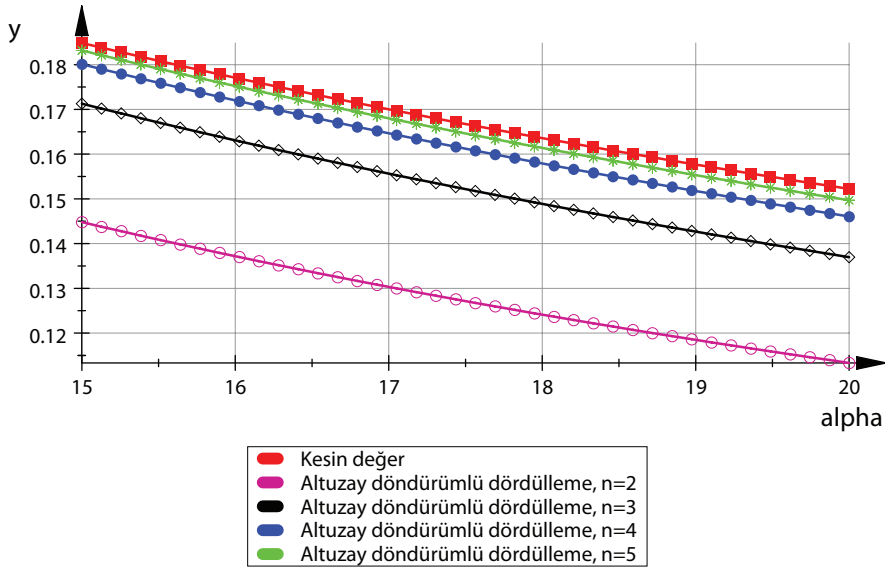
Çizim 4.29: $\frac{1}{1+\alpha x}$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan döndüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[0, 5]$ aralığı için)



Çizim 4.30: $\frac{1}{1+\alpha x}$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan döndüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[5, 10]$ aralığı için)



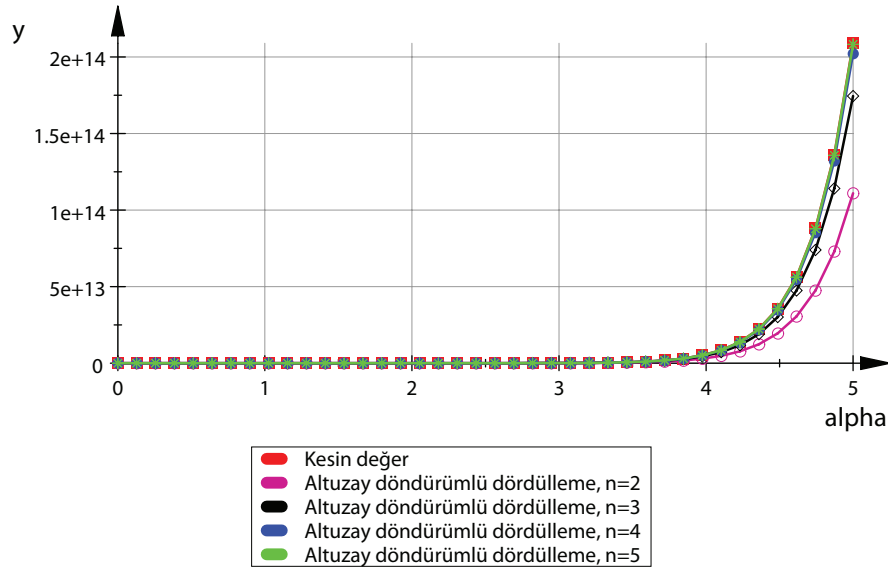
Çizim 4.31: $\frac{1}{1+\alpha x}$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ([10,15] aralığı için)



Çizim 4.32: $\frac{1}{1+\alpha x}$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ([15,20] aralığı için)

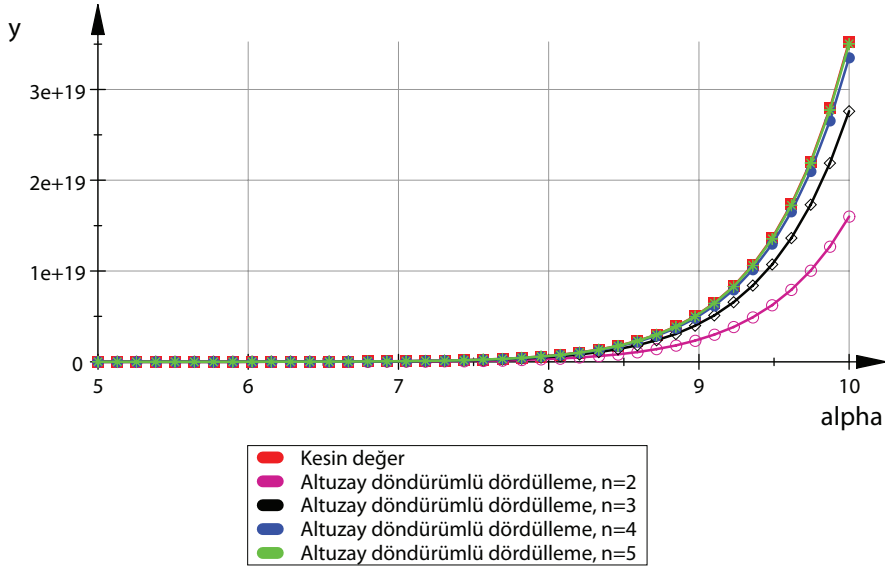
Yöntemin $\frac{1}{1+\alpha x}$ işlevini de tümlevleyebildiği görülmüştür. Kutup tekillikleri dallanma tekilliklerine göre daha az olumsuzluğa neden olmaktadır. Dolayısıyla dördüllemenin ürettiği yanlgılar daha küçüktür.

Son olarak, çokterimlilerin tümlevlenmesi incelenmiştir. Gauss dördüllemesinin, $2n - 1$ ve daha küçük tüm sendelenimleri sıfırladığından dolayı derecesi $2n$ 'den küçük tüm çokterimlileri kesin olarak tümlevleyebildiği daha önce belirtilmişti. Altuzay döndürümlü dördüllemelerde ise $2n - 2$ ve daha küçük tüm sendelenimler sıfırlanmakta olduğundan dolayı, derecesi $2n - 1$ 'den küçük tüm çokterimlilerin sıfır yanlgı ile tümlevlenebilmesi söz konusudur. Bu bağlamda, eğer bir yanlgıdan söz edilecekse, en az $2n - 1$ dereceli bir çokterimlinin tümlevlenmesi örneklendirilmelidir. Ayrıca, altuzay döndürümünün kertesı büyük sendelenimleri bastırmasından dolayı yüksek eğrilikli işlevlerde önemli olumluluklar sağlayacağı bilinmektedir. Bu bağlamda $(1 + \alpha x)^{20}$ işlevinin tümlevlenmesi incelenmiştir.

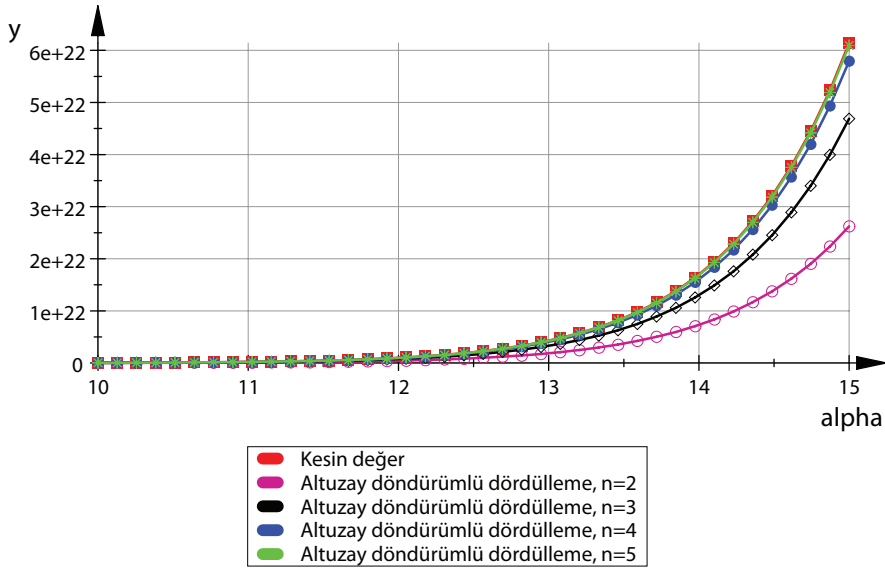


Çizim 4.33: $(1 + \alpha x)^{20}$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri $([0, 5]$ aralığı için)

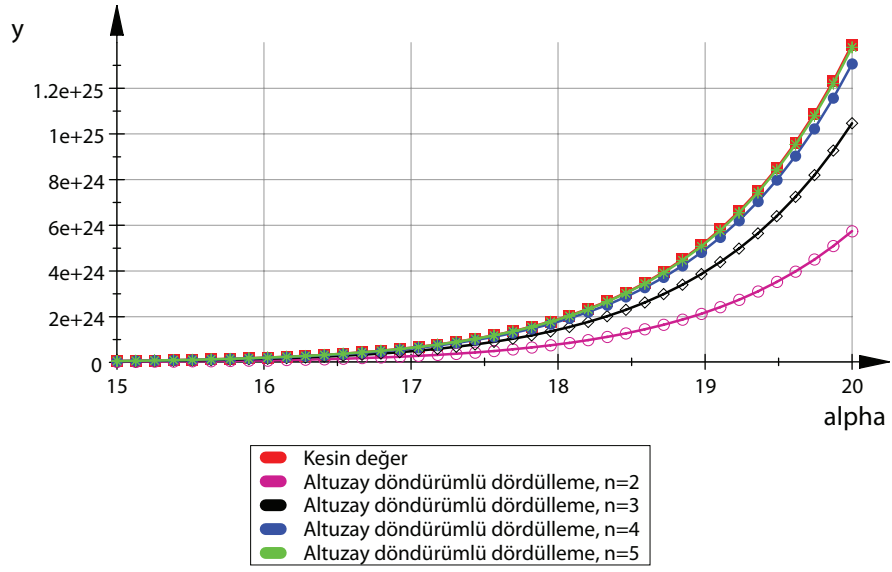
Bu yüksek eğrilikli işlevde de boyut artırımının kesin değere yakınsamayı sağladığı gözlemlenmiştir. Bu çokterimlinin altuzay döndürümlü dördülleme ile tümlevlenmesinin Gauss dördüllemesi ile tümlevlenmesine göre sağlayacağı olumluluğu betimleyebilmek için, bu iki yöntemin oluşturduğu bağıl yanlgı beş düğüm noktalı dördülleme durumu göz önünde bulundurularak incelenmiştir.



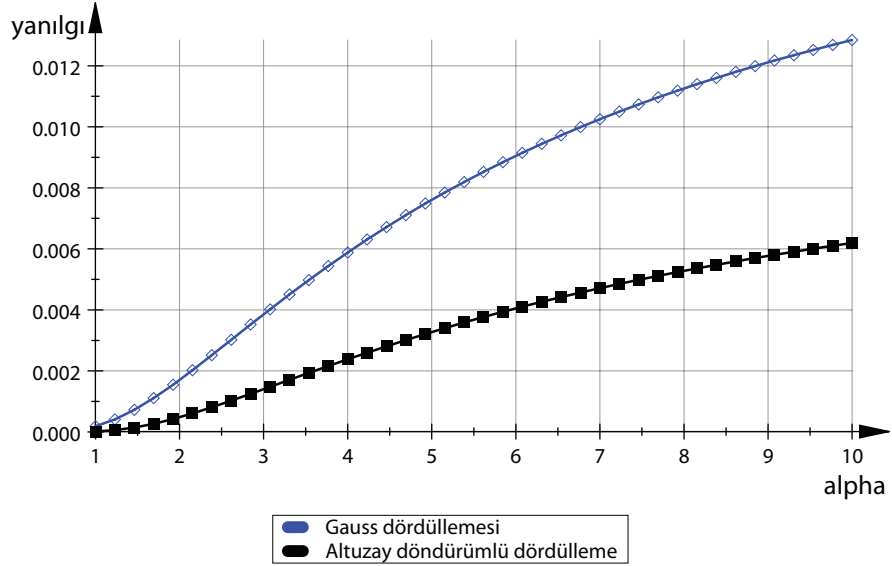
Çizim 4.34: $(1 + \alpha x)^{20}$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ([5, 10] aralığı için)



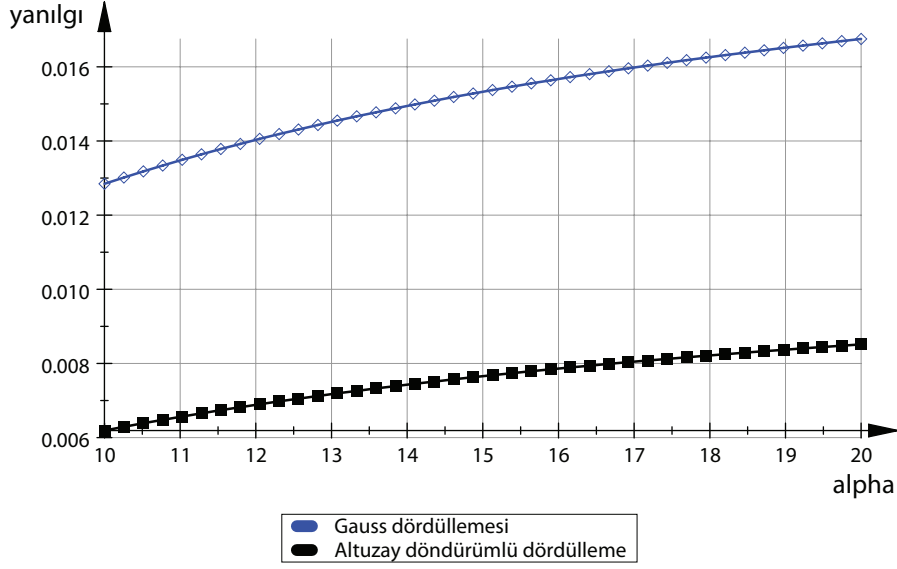
Çizim 4.35: $(1 + \alpha x)^{20}$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan dördüllemelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ([10, 15] aralığı için)



Çizim 4.36: $(1 + \alpha x)^{20}$ işlevi için değişik altuzay boyutları kullanılarak oluşturulan dördülmelerle elde edilen tümlev değerlerinin α 'ya göre değişimleri ($[15, 20]$ aralığı için)



Çizim 4.37: $(1 + \alpha x)^{20}$ işlevi için beş boyutlu altuzay kullanılarak oluşturulan dördülmelerin bağıl yanılığlarının α 'ya göre değişimleri ($[1, 10]$ aralığı için)



Çizim 4.38: $(1 + \alpha x)^{20}$ işlevi için beş boyutlu altuzay kullanılarak oluşturulan dördüllemelerin bağıl yanılıklarının α 'ya göre değişimleri ($[10,20]$ aralığı için)

Bu işlev için, özellikle α 'nın büyük olduğu yüksek eğrilikli durumda altuzay döndürümünün bağıl yanılığını Gauss dördüllemesine göre mutlak değerce oldukça küçülttüğü çizimlerde görülmektedir.

5. SONUÇ VE ÖZGÜN KATKILAR

Bu çalışmada sendelenim açılımlarının taban takımınca genişletilmesinin sayısal tümlevlemeye olan etkileri incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar ve yapılan özgün katkılar aşağıda kısaca belirtilmiştir.

- Gauss dördüllemesinin düğüm ve ağırlıklarının belirlenmesinde kullanılan Jacobi dizeyinin \hat{x} işlecinin dizey gösterilimi olduğu gözlemlenmiştir. \hat{x} işlecinin dizey gösteriliminin oluşturulurunda kullanılan iççarpım tanımı ve seçilen taban takımının değiştirilmesi yeni dördüllemeler oluşturacaktır. Bu biçimde yeni dördüllemeler oluşturulurunda dikkat edilmesi gereken iççarpımın tümlev olarak tanımlanması ve alınan dik ve birimboylu taban takımının ilk işlevinin $u_1(x) \equiv 1$ biçiminde kullanılmasıdır.
- Belirlenşi tümlevlenecek işlevin yapısından bağımsız olan \hat{x} işlecinin dizey gösteriliminin k 'ıncı üssü ile \hat{x}^k işlecinin dizey gösteriliminin en sol üst öğelerinin çıkarımının mutlak değerce küçük olması dördüllemenin duyarlılığını arttırmaktadır. Dolayısıyla tümlev sendelenimleri olarak adlandırılan bu büyüklükler dördüllemenin niteliği hakkında önemli bilgiler içermektedir.
- \hat{x} işlecinin $n \times n$ dizey gösteriliminin oluşturulurunda kullanılan en büyük sırasayılı taban işlevinin kendisi ve başka bir işlevin doğrusal birleştirimi olarak diklik ve birimboyluluk koşulunu bozmayacak biçimde seçilmesi dördüllemenin yapısını değiştirmektedir. Bu yolla genişletilen taban takımları ile oluşturulan dördüllemeler duyarlılık arttırımında önemli kazanımlar sağlayabilecek yapıdadır.
- Taban takımı artan dereceli çokterimliler olarak alındığı ve en büyük sırasayılı taban işlevinin kendisi ve kendisinden sonra gelen taban işlevinin doğrusal birleştirimi olarak değiştirildiği durum ayrıntılı olarak incelenmiştir. Bu yapıda doğrusal birleştirim katsayıları ilk sıfırlanmayan sendelenim olan $2n -$

2'inci sendelenimi sıfırlayacak biçimde seçildiğinde yine Gauss dördüllemesinin taban takımı oluşmakta, dolayısıyla bir eniyileme yapılamamaktadır. Bundan bir sonraki sendelenimin sıfırlanması ise daha büyük sendelenimleri mutlak değerce küçültmektedir. Bu olgunun özellikle eğriliği büyük olan işlevlerin tümlevlenmesinde önemli sayılabilecek olumlu katkılar sağladığı gözlemlenmiştir.

- Sonraki aşamada yapılması öngörülenler şu biçimde maddelendirilebilir:
 - Değişik tümlevleme aralıkları, ağırlık işlevleri ve Hilbert uzayı taban işlevleri için sınama uygulamaları yapılmalıdır.
 - Altuzay döndürümü sayısı arttırıldığında oluşan doğrusal olmayan denklem kümesinin yüksek duyarlıkta sayısal çözümü ve bu biçimde oluşturulan çok döndürümlü dördüllemelerin getireceği olumlulukların incelenmesi gerekmektedir.
 - Yöntem, çokdeğişkenli bir işlevin katlı tümlevinin belirlenebilmesi için genişletilmelidir.

Bu olguların ayrıntılı olarak incelenmesinin dördülleme olgusunun daha iyi anlaşılabilmesine ve varolan dördülleme yöntemlerine göre önemli olumluluklar getirecek yeni dördülleme yöntemlerinin geliştirilmesine yol açacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] **Stoer, J. ve Bulirsch, R.**, 2002. Introduction to numerical analysis, Springer-Verlag, New York.
- [2] **Hildebrand, F. B.**, 1987. Introduction to numerical analysis, Dover, New York.
- [3] **Gautschi, W.**, 1983. How and how not to check Gaussian quadrature formulae, *BIT Numerical Mathematics*, **23**, 209–216.
- [4] **Gauss, C.F.**, 1886. Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi, Gesellschaft Wissenschaft, Göttingen.
- [5] **Golub, G.H. ve Welsch, J.H.**, 1969. Calculation of Gauss quadrature rules, *Mathematics of Computation*, **23**, 221–230.
- [6] **Ma, J., Rokhlin, V. ve Wandzura, S.**, 1996. Generalized Gaussian quadrature rules for systems of arbitrary functions, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **33**, 971–996.
- [7] **Maucher, R.**, 1996. A symbolic computation procedure for the generation of Gauss quadrature rules with a user-defined weight function, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, **12**, 141–145.
- [8] **Laurie, D.P.**, 2001. Computation of Gauss-type quadrature formulas, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **127**, 201–217.
- [9] **Trefethen, L.N.**, 2008. Is Gauss quadrature better than Clenshaw-Curtis, *Siam Review*, **50**, 67–87.
- [10] **Laurie, D.P.**, 1996. Anti-Gaussian quadrature formulae, *Mathematics of Computation*, **65**, 739–747.
- [11] **Patterson, T.N.L.**, 1992. Modified optimal quadrature extensions, *Numerische-Mathematik*, **64**, 511–520.
- [12] **Milovanović, G.V. ve Cvetković, A.S.**, 2005. Orthogonal polynomials and Gaussian quadrature rules related to oscillatory weight functions, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **179**, 263–287.
- [13] **Gautschi, W.**, 1970. On the construction of Gaussian quadrature rules from modified moments, *Mathematics of Computation*, **24**, 245–260.

- [14] **Demiralp, M.**, 2005. A fluctuation expansion method for the evaluation of a function's expectation value, *Int. Conf. on Numer. Anal. and Appl. Math., Wiley, Rodos, Yunanistan*, **4A**, 141–145.
- [15] **Demiralp, M.**, 2005. Determination of quantum expectation values via fluctuation expansion, *Lecture Series on Computer and Computational Sciences, Selected Papers from Int. Conf. of Comput. Methods in Sci. and Eng.*, **4A**, 146–149.
- [16] **Baykara, N.A. ve Demiralp, M.**, 2005. Fluctuation expansion in the quantum optimal control of one dimensional perturbed harmonic oscillator, *Lecture Series on Computer and Computational Sciences, Selected Papers from Int. Conf. of Comput. Methods in Sci. and Eng.*, 56–59.
- [17] **Kalay, B. ve Demiralp, M.**, 2008. Smoothing the integrands to increase the quality of fluctuationlessness approximation in numerical integration, *Proceedings of the 1st WSEAS Int. Conf. on Multivariate Analysis and its Application in Science and Engineering*, 204–208.
- [18] **Gözükırmızı, C. ve Demiralp, M.**, 2008. Introductory steps for the design of an algorithm for finding the higher order fluctuation terms via symbolic simplifications, *Proceedings of the 1st WSEAS Int. Conf. on Multivariate Analysis and its Application in Science and Engineering*, 189–192.
- [19] **Demiralp, M.**, 2008. Finite subspace matrix representation of the multiplication operator's resolvent in terms of fluctuation matrices, *International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics*, 159–162.
- [20] **Gözükırmızı, C. ve Demiralp, M.**, 2008. Evaluation of fluctuation coefficients for three consecutive term recursive basis functions, *International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics*, 231–234.
- [21] **Üsküplü, S. ve Demiralp, M.**, 2008. Univariate integration via space extension based no fluctuation approximation, *International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics*, 566–569.
- [22] **Demiralp, M.**, 2008. Approximation of the independent variable's resolvent via Hilbert Space folding on its constant subspace, *ICCMSE 2008 (baskıda)*.
- [23] **Kalay, B.**, 2007. Sayısal tümlevlemede sendelenimsizlik yaklaşıtıımı ve tümlev katlama, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi.
- [24] **Creutzig, C. ve Oevel, W.**, 2004. MuPAD Tutorial, Second Edition, Springer, New York.

A. EKLER

Çizelge A.1: İki boyutlu altuzay durumunda dördülleme düğüm noktaları.

Tek döndürümlü dördülleme	Gauss dördüllemesi
0.85884140847539691141	0.7886751345948128823
0.28854833868423818982	0.2113248654051871177

Çizelge A.2: İki boyutlu altuzay durumunda dördülleme ağırlık değerleri.

Tek döndürümlü dördülleme	Gauss dördüllemesi
0.37077718898670010550	0.50000000000000000000
0.62922281101329989450	0.50000000000000000000

Çizelge A.3: Altı boyutlu altuzay durumunda dördülleme düğüm noktaları.

Tek döndürümlü dördülleme	Gauss dördüllemesi
0.96811285020330721047	0.96623475710157601391
0.83859534566858963320	0.83060469323313225683
0.63242584434739698362	0.61930959304159845432
0.39351326479312319103	0.38069040695840154568
0.17690031724926752368	0.16939530676686774317
0.03548435769827486959	0.03376524289842398609

Çizelge A.4: Altı boyutlu altuzay durumunda dördülleme ağırlık değerleri.

Tek döndürümlü dördülleme	Gauss dördüllemesi
0.08108023051113049617	0.08566224618958517252
0.17374984397856060316	0.18038078652406930378
0.23114663111833650647	0.23395696728634552369
0.23727331888690379239	0.23395696728634552369
0.18686561062274388891	0.18038078652406930378
0.08988436488232471289	0.08566224618958517252

Çizelge A.5: On boyutlu altuzay durumunda dördülleme düğüm noktaları.

Tek döndürümlü dördülleme	Gauss dördüllemesi
0.98721966724063513834	0.98695326425858586003
0.93382779669869065946	0.93253168334449225537
0.84245762649826730151	0.83970478414951220312
0.72081116073051266073	0.71669769706462359540
0.57933662692350510122	0.57443716949081560544
0.43040829846022914523	0.42556283050918439456
0.28728516951542761817	0.28330230293537640460
0.16291224576888979128	0.16029521585048779688
0.06868354203341177430	0.06746831665550774463
0.01329449184397113442	0.01304673574141414001

Çizelge A.6: On boyutlu altuzay durumunda dördülleme ağırlık değerleri.

Tek döndürümlü dördülleme	Gauss dördüllemesi
0.03266468658212468359	0.03333567215434406880
0.07340160306041551145	0.07472567457529029657
0.10804444519568265015	0.10954318125799102200
0.13349356086343618146	0.13463335965499817755
0.14737559333497680652	0.14776211235737643509
0.14825095720692358008	0.14776211235737643509
0.13581684363079119900	0.13463335965499817755
0.11101071870983001040	0.10954318125799102200
0.07598066585551156622	0.07472567457529029657
0.03396092556030781126	0.03333567215434406880

ÖZGEÇMİŞ



Ad Soyad: Coşar Gözükırmızı

Doğum Yeri ve Tarihi: İstanbul, 1982

Adres: İstanbul Teknik Üniversitesi, Bilişim Enstitüsü
İTÜ Ayazağa Kampüsü, Bilişim Enstitüsü Binası
Maslak-34469, İstanbul

Lisans Üniversitesi: Işık Üniversitesi Bilgisayar Mühendisliği

Yayın Listesi:

- Gözükırmızı C. ve Demiralp M., 2008: Introductory Steps for the Design of An Algorithm for Finding the Higher Order Fluctuation Terms via Symbolic Simplifications. *International Conference on Multivariate Analysis and its Application in Science and Engineering*, Mayıs 27-30, 2008 İstanbul, Türkiye.
- Gözükırmızı C. ve Demiralp M., 2008: Evaluation of Fluctuation Coefficients for Three Consecutive Term Recursive Basis Functions. *International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics*, Eylül 15-19, 2008 İstanköy, Yunanistan.