EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

GRAFLAR VE SCATTERING SAYISI

Burak Kaval

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Alpay KIRLANGIÇ

Matematik Anabilim Dalı

Sunuş Tarihi: 13.08.2015

Bornova-İZMİR

2015

Burak KAVAL tarafından **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak sunulan **"GRAFLAR VE SCATTERING SAYISI"** başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve ....tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:		**İmza**
Jüri Başkanı	**: ....**	**.................................**
Raportör Üye	**: ....**	**.................................**
Üye	**: ....**	**.................................**

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Graflar ve Scattering Sayısı” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

13 / 08 / 2015

Burak KAVAL

ÖZET

GRAFLAR VE SCATTERING SAYISI

KAVAL, Burak

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Alpay KIRLANGIÇ
Ağustos 2015, 43 sayfa

Bir iletişim ağının zedelenebilirlik değeri, "*iletişim ağındaki bazı merkezlerin ya da bağlantı hatlarının zarar görmesinden sonra geriye kalan ağda iletişim kesilene kadar geçen süredeki ağın dayanma gücüdür*". Bir iletişim ağı, merkezleri bir G grafının tepelerine ve bağlantı hatları grafın ayrıtlarına karşılık getirilecek şekilde bir G grafı ile modellenebilir. İletişim ağlarının zedelenebilirlik değerini ölçmek için, graflar üzerinde tanımlanan Bağlantılılık Sayısı (Connectivity), Sertlik Değeri (Toughness), Saçılma Sayısı (Scattering Number), Bütünlük Değeri (Integrity), Kopma Derecesi (Rupture Degree) gibi ölçümler kullanılmaktadır.

Birinci bölümde, öncelikle zedelenebilirlik kavramı ele alındıktan sonra, tez çalışması için gerekli olan temel tanımlar verilmiştir. Sonra, yukarıda bahsedilen zedelenebilirlik ölçümlerinin tanımları ve bu ölçümler ile ilgili literatürde yer alan bazı sonuçlar verilmiştir. Ardından, tez konusu olan saçılma sayısı için bir örnek verilerek, saçılma sayısı ile ilgili literatürde yer alan sonuçlardan bazıları listelenmiştir.

İkinci bölümde, bazı özel grafların kartezyen çarpımlarının saçılma sayısı incelenmiştir. İlk olarak $K_{1,m}$ x $K_{1,n}$ ($m\geq 2$, $n\geq 2$) grafı ele alınmış ve bu grafın saçılma sayısı hesaplanmıştır. Ardından $K_{1,m}$ x P_n ve $K_{1,m}$ x C_n ($m\geq 2$, $n\geq 2$) grafları incelenmiş ve bu grafların saçılma sayıları elde edilmiştir. Son olarak, K_2 x C_n grafının saçılma sayısı hesaplanmıştır.

Son bölümde ise ikinci bölümde elde edilen sonuçların, bağımsızlık sayısı ve örtü sayısı ile arasındaki ilişkisi incelenmiştir.

Anahtar sözcükler: Zedelenebilirlik, Saçılma Sayısı, Kartezyen Çarpım.

ABSTRACT

GRAPHS AND SCATTERING NUMBER

KAVAL, Burak

MSc in Mathematics
Supervisor: Prof. Alpay KIRLANGIÇ
August 2015, 43 pages

In a communication network, the vulnerability is the resistance of the network to disruption of operation after the failure of certain stations or communication links. A communication network can be modelled by a graph as stations corresponding to the vertices of the graph and communication links corresponding to the edges of the graph. There are many measurement such as Connectivity, Toughness, Scattering Number, Integrity, Rupture Degree defined over graphs to measure the vulnerability of networks.

In the first section, firstly the concept of vulnerability is considered, then some basic definitions needed for the thesis are given. Then, the definitions of vulnerability measurements mentioned above and some results in the literature related these measurments are given. After, an example is given about the scattering number and some results in the literature are listed.

In the second section, the scattering number of some proper graph products is studied. Firstly, the graph of $K_{1,m}$ x $K_{1,n}$ ($m \geq 2$, $n \geq 2$) is examined and the scattering number of this graph is given. After, the graphs $K_{1,m}$ x P_n and $K_{1,m}$ x C_n ($m \geq 2$, $n \geq 2$) are investigated and scattering numbers of these graphs are obtained. Finally, the scattering number of graph K_2 x C_n is calculated.

In the last section, the results obtained in the second section are compared and the relationship between scattering number and independence number and covering number is studied.

Keywords: Vulnerability, Scattering Number, Cartesian Product.

TEŞEKKÜR

Başta canım annem olmak üzere bu dönemde maddi-manevi desteğini esirgemeyen biricik aileme ve her zaman yanımda olan müstakbel nişanlım Sedef AKSÖZ ‘e teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca çalışmanın oluşmasında en büyük paya sahip, tüm samimiyetiyle bana destek olan, deneyimini ve bilgi birikimini en ince detayına kadar paylaşan, yönlendirmelerinden ve tecrübelerinden faydalandığım, çalışma ortamımızı bir öğrenci-hoca ilişkisinden daha samimi hale getiren çok değerli tez danışmanı hocam Sayın Prof. Dr. Alpay KIRLANGIÇ ‘a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (DEVAM)

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
V(G)	G grafının tepeler kümesi
E(G)	G grafının ayrıtlar kümesi
$\delta(G)$	G grafının minimum tepe derecesi
$\Delta(G)$	G grafının maksimum tepe derecesi
$\kappa(G)$	G grafının tepe bağlantılılık sayısı
$\lambda(G)$	G grafının ayrıt bağlantılılık sayısı
$\alpha(G)$	G grafının bağımsızlık sayısı
$\beta(G)$	G grafının örtü sayısı
$\tau(G)$	G grafının sertlik değeri
I(G)	G grafının bütünlük değeri
r(G)	G grafının kopma derecesi
$\omega(G-S)$	G-S grafının bileşen sayısı
m(G-S)	G-S grafının en büyük boyutlu bileşeninin eleman sayısı
G_1 x G_2	G_1 ve G_2 graflarının Kartezyen çarpımı
$\pi_0(G)$	G grafının tüm tepelerini içeren ayrık yolların sayısı

1. GİRİŞ

1.1 İletişim Ağları Ve Zedelenebilirlik

Bir iletişim ağı, iletişim içerisinde olan merkezler ve bu merkezler arasındaki iletişimi sağlayan bağlantı hatlarından meydana gelmektedir. Günümüzde iletişim ve iletişim ağlarının güvenilirliği büyük önem taşımaktadır. Bu nedenle iletişim ağları tasarlanırken, iletişimin devamlılığını sağlamak için ağın yapısında meydana gelebilecek bozulmalara karşı, ağın göstereceği dayanma gücünün bilinmesi önemlidir. Dayanma gücü daha fazla olan bir ağ modeli diğerlerine göre daha çok tercih edilir. Böylece iletişimde yaşanabilecek aksaklıklara karşı önceden önlem alınabilir.

Bir iletişim ağının dayanma gücü, bu ağın istenmeyen bazı olay/olaylar karşısında ne kadar zedelendiği (zarar gördüğü) ile ilişkilidir. Diğer bir deyişle, bir iletişim ağının **zedelenebilirlik** değeri, "*bir iletişim ağındaki bazı merkezlerin ya da bağlantı hatlarının zarar görmesinden sonra geriye kalan ağda iletişim kesilene kadar geçen süredeki ağın dayanma gücüdür*" (Barefoot et al., 1987).

Bir iletişim ağının bazı merkezleri veya bağlantı hatları zarar gördüğünde, aşağıdaki soruların yanıtları aranır (Bu sorular daha da arttırılabilir).

(1) Ağda, zarar gören merkezlerin veya bağlantı hatlarının sayısı,
(2) Ağdan, geriye kalan alt ağların (halen kendi içerisinde haberleşmenin sürdüğü) sayısı,
(3) Ağdan geriye kalan ve en çok merkeze veya bağlantı hattına sahip alt ağların merkezlerinin sayısı,
(4) Ağda, zarar gören bazı merkezlere komşu olan merkezlerin de zarar görmesiyle oluşan alt ağların sayısı ve bu ağların merkezlerinin sayısı,

Bu soruların yanıtları, bize iletişim ağının zedelenebilirlik değerini bulmak için yardımcı olur.

Bir iletişim ağının merkezleri bir grafın tepelerine ve bağlantı hatları ise grafın ayrıtlarına karşılık getirilerek bir G grafı ile modellenebilir. Bu durumda, bir iletişim ağının zedelenebilirlik değeri yerine o ağa karşılık gelen bir G grafının zedelenebilirlik değeri araştırılabilir.

Bir G grafın zedelenebilirlik değerini belirlemek için kullanılan çeşitli ölçümler tanımlanmıştır. Bu ölçümlerden bazıları Bağlantılılık Sayısı (Connectivity), Sertlik Değeri (Toughness), Saçılma Sayısı (Scattering Number), Bütünlük Değeri (Integrity), Kopma Derecesi (Rupture Degree) gibi ölçümlerdir.

Bu tezde tanımlanmamış olan notasyon ve terminoloji, Bondy ve Murty (1976)' nin *"Graph Theory With Applications"* kitabında bulunabilir. Ayrıca ele alınan graflar basit graflardır. Tezde kullanılacak olan bazı tanımlar aşağıda verilmiştir.

Tanım 1.1.1 (Harary, 1969)**:** G bir graf ve G nin tepeler kümesi V(G) olsun. $S \subset V(G)$ olmak üzere S kümesindeki hiçbir tepe çifti G grafında bir ayrıt ile birleştirilmemiş ise S kümesine G nin **bağımsız kümesi** denir. Bir G grafının birden fazla bağımsız kümesi olabilir. Bu kümeler içersinde en çok elemana sahip kümenin eleman sayısına G nin **bağımsızlık sayısı** denir ve **α(G)** ile gösterilir.

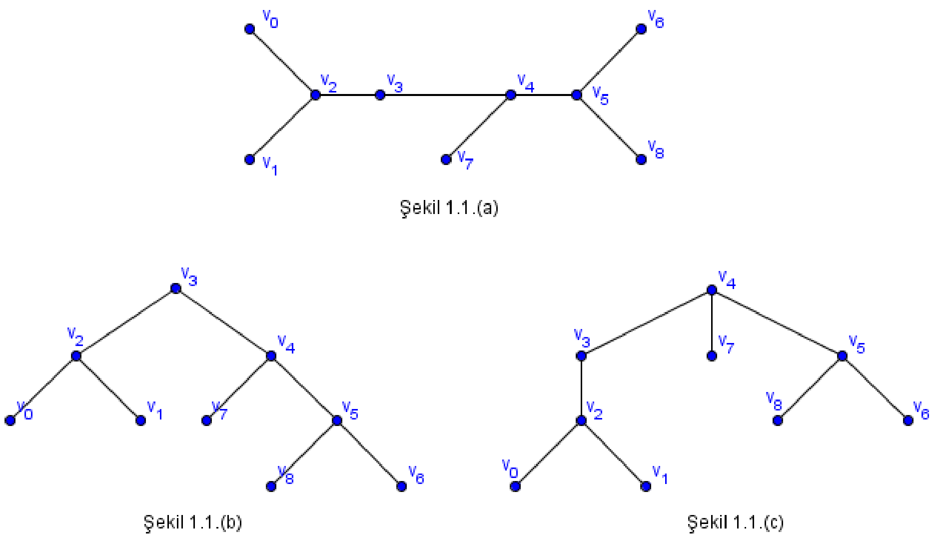
Tanım 1.1.2 (Harary, 1969)**:** G bir graf ve G grafının tepeler kümesi V(G) olsun. V(G)' nin herhangi bir alt kümesi S olsun. G grafının her bir ayrıtının en az bir uç noktası S kümesinde ise S' ye grafın **örtü kümesi** denir. Bir grafın birden fazla örtü kümesi olabilir. Bu kümeler içersinde en az elemana sahip olan kümenin eleman sayısına G nin **örtü sayısı** denir ve **β(G)** ile gösterilir.

Tanım 1.1.3 (Harary, 1969)**:** Bir G grafının bazı tepe veya tepelerini graftan çıkardığımızda grafın bileşenlerinin sayısı artıyorsa bu kümeye grafın **kesim kümesi** denir.

Tanım 1.1.4 (Anderson, 2001)**:** Şekil 1.1.(a)' daki ağaç grafı, tepe noktalarından bükülebilen somut bir obje olarak düşünelim. Eğer grafı, herhangi bir tepesi, ağacın geri kalanını taşıyacak biçimde (Şekil 1.1.(b) veya Şekil 1.1.(c)' deki gibi) yeniden düzenlersek, en üstteki tepeye (v_3 veya v_4) ağacın **kökü** (root) denir. Kökü belirlenen bir ağaç grafa **köklü ağaç** (rooted tree) denir. Aşağıda verilen tanımlar köklü ağaçlar üzerinde tanımlanmıştır:

- Bir v_i tepesinin **seviyesi** (level), bu tepeden köke olan yegane yolun uzunluğudur. Şekil 1.1.(b)' de v_3 tepesinin seviyesi 0, v_2 tepesinin seviyesi 1, v_0 tepesinin seviyesi 2 ve v_6 tepesinin seviyesi ise 3 olarak görülmektedir.

- Derecesi 1 olan tepelere **yaprak** (leaf) denir. Şekil 1.1.(b)' de v_0,v_1,v_6,v_7,v_8 tepeleri yapraktır.
- Köklü bir ağacın **yüksekliği** (height) ise kökten bir yaprağa olan en uzun yolun uzunluğudur. Şekil 1.1.(b)' deki ağacın yüksekliği 3 tür.
- Köklü bir ağacın iki tepesi u ve v olmak üzere u tepesinin seviyesi v tepesinin seviyesinden büyük olsun. Eğer ağaçta u' dan v' ye bir ayrıt bulunuyosa, u' ya v' nin **kaynağı/ebeveyni** (parent), v' ye ise u' nun **ürünü/çocuğu** (child) denir. Şekil 1.1.(b)' de v_2 tepesi v_0 tepesinin kaynağı/ebeveyni iken v_0 tepesi de v_2 tepesinin ürünü/çocuğudur.



Şekil 1.1 Bir ağaç graf

Tanım 1.1.5 (Cormen, 2009): B_n ($n \geq 0$) binomial (ikili) ağacı, birbirini tekrarlayan (rekürsif) adımlardan oluşan bir ağaç yapısıdır.

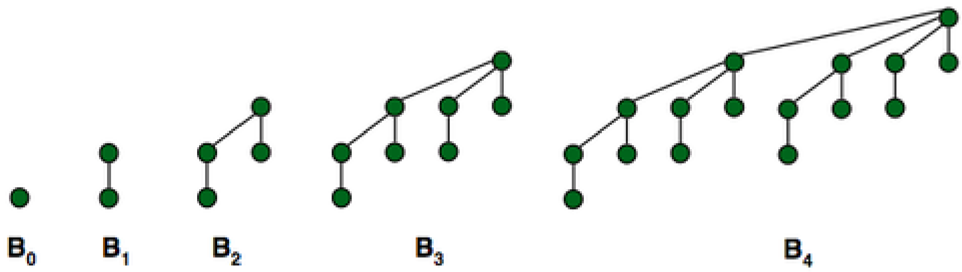
- B_0 grafı tek bir izole tepeden oluşur.
- B_1 grafı, iki adet B_0 grafının tepelerinin bir ayrıtla bağlanmasıyla oluşur.
- Benzer şekilde devam edilerek, B_n grafı iki adet B_{n-1} grafının, birinin kökü, diğerinin sol taraftaki en büyük seviyeli çocuğu olacak şekilde bir ayrıt ile bağlanmasıyla oluşur.

Bir B_n ikili ağacının,

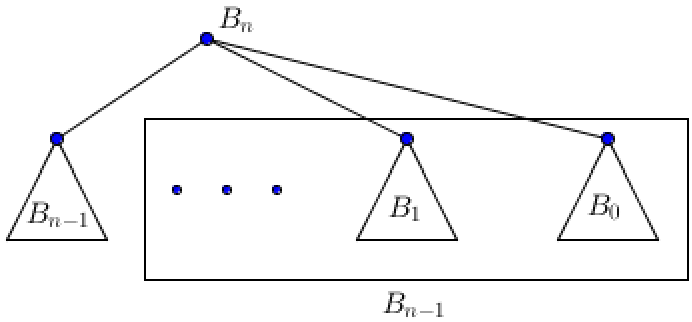
○ 2^n adet tepesi vardır.

- Yüksekliği n dir.
- i. seviyede tam olarak $\binom{n}{i}$ adet tepe vardır (i=0,1,…,n).
- Kök olan tepe, ağacın en büyük dereceli tepesidir ve derecesi n dir.

Şekil 1.2.(a)' da B_5 e kadar olan ikili ağaçlar ve Şekil 1.2.(b)' de B_n grafının genel hali verilmiştir.



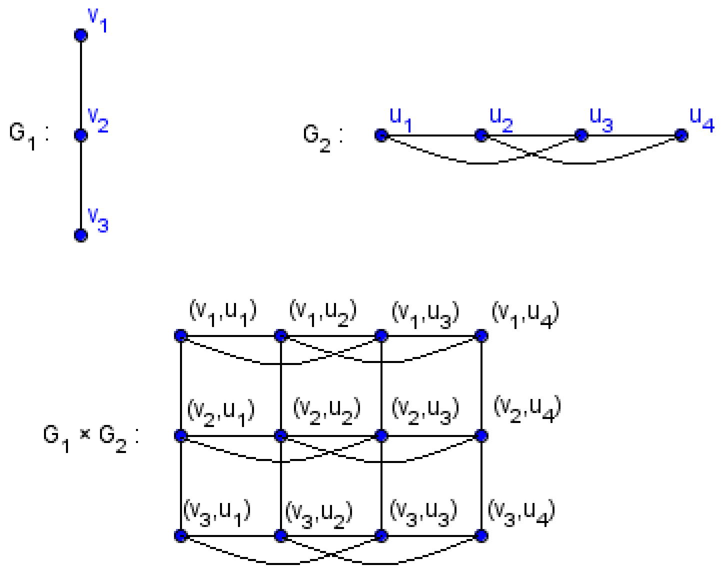
Şekil 1.2.(a) B_5' e kadar olan ikili ağaçlar



Şekil 1.2.(b) Bn grafı

Tanım 1.1.6 (Harary, 1969)**:** Bir G grafının tüm tepelerini içeren alt grafa **dallanmış alt graf** denir. Eğer bu alt graf ağaç ise bu ağaca **dallanmış ağaç** adı verilir.

Tanım 1.1.7 (Harary, 1969)**:** G_1 ve G_2 iki graf olsun. Bu iki grafın Kartezyen Çarpımı (Cartesian Product) G_1 x G_2 ile gösterilir ve çarpım grafının tepe kümesi $V(G_1)$ x $V(G_2)$ dir. $(u_1,v_1) \in V(G_1)$ ve $(u_2,v_2) \in V(G_2)$ olmak üzere çarpım grafında (u_1,u_2) tepesinin (v_1,v_2) tepesine bitişik olması için ya $u_1=v_1$ ve u_2 ile v_2 G_2 grafında bitişik olmalı ***ya da*** $u_2=v_2$ ve u_1 ile v_1, G_1 grafında bitişik olmalıdır.



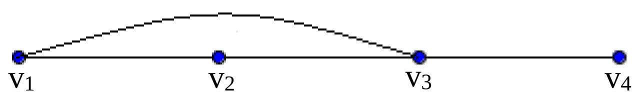
Şekil 1.3 Kartezyen Çarpım

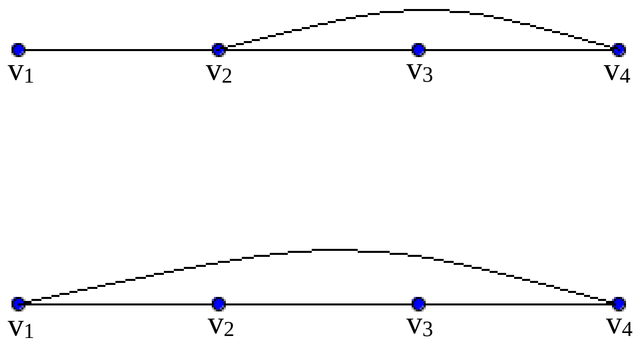
Şekil 1.3 de görüldüğü gibi G_1 x G_2 grafı, dikey olarak $|V(G_2)|$ adet G_1 kopyasını, yatay olarak ise $|V(G_1)|$ adet G_2 kopyasını içermektedir.

Tanım 1.1.8 (Bondy and Murty, 1976)**:** Bir grafın tüm tepelerini içeren yola **Hamiltonian yol (Hamiltonian Path)** denir. Benzer olarak bir grafın bütün tepelerini içeren çevreye de **Hamiltonian çevre (Hamiltonian Cycle)** denir. Hamiltonian çevre içeren graflara **Hamiltonian graf (Hamiltonian Graph)** denir. Ayrıca, bir G grafının tüm tepe çiftleri arasında bir hamiltonian yol var ise bu grafa **Hamiltonian-Bağlantılı (Hamiltonian-Connected)** graf adı verilir.

Tanım 1.1.9 (Jung, 1978)**:** G bir graf olsun. G grafının (v_1,v_2), (v_2,v_3), (v_3,v_4) ayrıtlarını içeren her yolu aynı zamanda (v_1,v_3) veya (v_2,v_4) veya (v_1,v_4) ayrıtlarını da içeriyorsa G grafına **D*- graf** denir.

Şekil 1.4' de P_4 grafının D*-grafları görülmektedir.





Şekil 1.4 P_4 grafının D*-grafları

1.2 Zedelenebilirlik Ölçümleri

Zedelenebilirlik ölçümleri, graflar ile modellenen iletişim ağlarının yapısını incelememizi sağlar. Yukarıdaki sorularda da var olduğu gibi, bir G grafının bazı tepelerinin veya ayrıtlarının çıkarılmasıyla bağlantısız graf olduğunda akla gelen ilk soru "*graftan çıkarılan tepe veya ayrıtların en az sayısı nedir?*" sorusudur. Bu sorunun yanıtı bize bağlantılılık sayısı (connectivity) veya ayrıt bağlantılılık sayısı (line connectivity) tanımını verir.

Tanım 1.2.1 (Whitney, 1932): Birleştirilmiş bir G grafını bağlantısız bir graf ya da izole tepelerden oluşan bir graf haline getirmek için graftan çıkarılması gereken en az tepe sayısına grafın **bağlantılılık sayısı** denir ve **κ(G)** ile gösterilir. Bağlantılılık sayısı,

$$\kappa(G)= \min_{S\subset V(G)} \{|S|: \omega(G-S) >1\}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Tanım 1.2.2 (Whitney, 1932): Birleştirilmiş bir G grafını bağlantısız bir graf ya da izole tepelerden oluşan bir graf haline getirmek için graftan çıkarılması gereken en az ayrıt sayısına grafın **ayrıt bağlantılılık sayısı** denir ve **λ(G)** ile gösterilir. Ayrıt bağlantılılık sayısı,

$$\lambda(G)= \min_{S\subseteq E(G)} \{|S|: \omega(G-S) >1\}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Bağlantılılık sayısı yukarıda sorulan sorulardan sadece (1) nolu soruya yanıt verebilmektedir. Bu durumda, geriye kalan ağın yapısı (yani ağın ne kadar zarara uğradığı) hakkında daha çok bilgi edinebilmek için başka sorulara da gereksinimimiz vardır. Diğer bir deyişle, ağın zedelenebilirlik değerini elde edebilmek için yukarıdaki diğer soruların da yanıtlarının aranması gerekmektedir. Bu nedenle, yukarıdaki soruların iki veya daha fazlasının bir arada ele alınmasıyla aşağıdaki gibi başka ölçümler tanımlanmıştır.

1973' te Chvatal, yukarıdaki (1) ve (2) numaralı soruları ele alarak, bir G grafının sertlik değerini tanımlamıştır.

Tanım 1.2.3 (Chvátal, 1973**):** G bir graf ve $S \subset V(G)$, G grafının bir kesim kümesi olsun. G-S grafının bileşen sayısı $\omega(G\text{-}S)$ olmak üzere G grafının sertlik değeri $\tau(G)$ ile gösterilir ve

$$\tau(G) = \max_{S \subset V(G)} \left\{ \frac{|S|}{\omega(G-S)} : \omega(G\text{-}S) > 1 \right\}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Teorem 1.2.1 (Chvátal, 1973**):** G bir graf olsun. Bu durumda,

$$\tau(G) \leq \frac{\kappa(G)}{2} \qquad \text{dir.}$$

Teorem 1.2.2 (Goddard and Swart, 1990**):** G bir graf olsun. G grafının en büyük tepe derecesi $\Delta(G)$ olmak üzere,

$$\tau(G) \geq \frac{\kappa(G)}{\Delta(G)} \qquad \text{dir.}$$

Sertlik değeri tanımından yola çıkarak Jung, 1978 yılında saçılma sayısı ölçümünü aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

Tanım 1.2.4 (Jung, 1978**):** G bir graf ve $S \subset V(G)$, G grafının bir kesim kümesi olsun. G-S grafının bileşen sayısı $\omega(G\text{-}S)$ olmak üzere G grafının saçılma sayısı sc(G) ile gösterilir ve

$$sc(G) = \max_{S \subset V(G)} \{\omega(G\text{-}S) - |S| : \omega(G\text{-}S) > 1\}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

1987 yılında, Barefoot, Entringer and Swart, yukarıdaki (1) ve (3) nolu soruları ele alarak, bir G grafının bütünlük değerini tanımlamışlardır.

Tanım 1.2.5 (Barefoot et al., 1987)**:** G bir graf ve $S \subset V(G)$ olsun. G-S grafının en büyük boyutlu bileşeninin tepe sayısı m(G-S) olmak üzere, G grafının tepe bütünlük değeri I(G) ile gösterilir ve

$$I(G)= \min_{S\subset V(G)} \{|S|+m(G-S)\}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Teorem 1.2.3 (Goddard and Swart, 1990**):** G bir graf olsun. Bu durumda,

$$\delta(G) + 1 \leq I(G) \leq \alpha(G) + 1 \qquad \text{dir.}$$

Teorem 1.2.4 (Goddard and Swart, 1990**):** G bir graf olsun. Bu durumda,

$$I(G) = \kappa(G) + 1 \Leftrightarrow \kappa(G) = \alpha(G) \qquad \text{dir.}$$

2005 yılında, Li ve arkadaşları (Li et al., 2005), (1), (2) ve (3) sorularının tümünü ele alarak, bir başka zedelenebilirlik ölçümü olarak kopma derecesini tanımlamışlardır.

Tanım 1.2.6 (Li et al., 2005)**:** G bir graf ve $S \subset V(G)$, G grafının bir kesim kümesi olsun. G-S grafının en büyük boyutlu bileşeninin tepe sayısı m(G-S) ve G-S grafının bileşen sayısı ω(G-S) olmak üzere, G grafının kopma derecesi r(G) ile gösterilir ve

$$r(G)= \max_{S\subset V(G)} \{\omega(G-S) - |S| - m(G-S) : \omega(G-S)>1\}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Teorem 1.2.5 (Li et al., 2005)**:** G, n tepeli tam olmayan birleştirilmiş bir graf olsun. Bu durumda,

$$r(G) \leq n - 2\delta(G) - 1 \qquad \text{dir.}$$

Teorem 1.2.6 (Kırlangıç, 2009)**:** G, n tepeli bir graf olsun. Bu durumda,

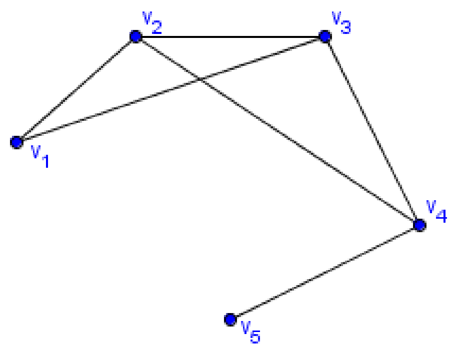
$$r(G) \leq \frac{\beta(G)}{\tau(G)} - \kappa(G) - 1 \qquad \text{dir.}$$

Yukarıdaki ölçümlerin hiçbirisi, bize tüm G graflarının zedelenebilirlik değeri için kesin bir sonuç vermemektedir. Ancak, her ölçümün gerçekçi sonuçlara yaklaştığı çeşitli graf aileleri bulunmaktadır. Bu tezde, yukarıdaki ölçümlerden saçılma sayısı ele alınmış ve bazı grafların saçılma sayısı hesaplanmıştır.

1.3 Saçılma Sayısı ve Karmaşıklık

Bu kısımda, öncelikle bir G grafının saçılma sayısının nasıl hesaplandığına ait bir örnek verilerek, bu ölçümün karmaşıklığı ele alınmıştır.

Örnek 1.1: Aşağıdaki G grafının saçılma sayısını hesaplayalım.



Şekil 1.5 Bir G grafı

Graftan atılan tepelerin kümesi S olsun. S kümesinin eleman sayısı, grafın parçalara ayrılması için en az 1, saçılma sayısının tanımında $S \subset V(G)$ olduğu için en çok 4 olmalıdır. 5 tepeli bir grafın tüm alt kümelerinin sayısı $2^5=32$ dir. Ancak 0 elemanlı küme (boş küme) ve 5 elemanlı küme (V(G)) göz ardı edileceğinden toplam 30 adet S kümesi ele alınacaktır. Şimdi bu kümeleri adım adım inceleyelim:

1) $|S|=1$ olsun. Bu durumda S kümesinin seçimi 5 farklı şekilde yapılabilir.

- $S=\{v_1\}$, $S=\{v_2\}$, $S=\{v_3\}$, $S=\{v_5\}$ ise $\omega(G-S)=1$ olur. Saçılma sayısının tanımında $\omega(G-S)>1$ olduğundan bu kümeler göz ardı edilir.

- $S=\{v_4\}$ ise $\omega(G-S)=2$ olup, $sc(G)=2-1=1$ dir.

2) $|S|=2$ olsun. Bu durumda S kümesinin seçimi 10 farklı şekilde yapılabilir.

- $S=\{v_1,v_2\}$, $S=\{v_1,v_3\}$, $S=\{v_1,v_5\}$, $S=\{v_2,v_5\}$, $S=\{v_3,v_5\}$, $S=\{v_4,v_5\}$ ise $\omega(G-S)=1$ olur. Saçılma sayısının tanımında $\omega(G-S)>1$ olduğundan bu kümeler göz ardı edilir.

- $S=\{v_1,v_4\}$, $S=\{v_2,v_3\}$, $S=\{v_2,v_4\}$, $S=\{v_3,v_4\}$ ise $\omega(G-S)=2$ olup, $sc(G)=2-2=0$ dır.

3) |S|=3 olsun. Bu durumda S kümesinin seçimi 10 farklı şekilde yapılabilir.

- $S=\{v_1,v_2,v_3\}$, $S=\{v_1,v_2,v_5\}$, $S=\{v_1,v_3,v_5\}$, $S=\{v_1,v_4,v_5\}$, $S=\{v_2,v_4,v_5\}$, $S=\{v_3,v_4,v_5\}$ ise $\omega(G-S)=1$ olur. Saçılma sayısının tanımında $\omega(G-S)>1$ olduğundan bu kümeler göz ardı edilir.

- $S=\{v_1,v_2,v_4\}$, $S=\{v_2,v_3,v_4\}$, $S=\{v_2,v_3,v_5\}$, $S=\{v_1,v_3,v_4\}$ ise $\omega(G-S)=2$ olup, $sc(G)=2-3=-1$ dir.

4) |S|=4 olsun. Bu durumda S kümesinin seçimi 5 farklı şekilde yapılabilir.

- $S=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$, $S=\{v_1,v_2,v_4,v_5\}$, $S=\{v_1,v_2,v_3,v_5\}$, $S=\{v_1,v_3,v_4,v_5\}$, $S=\{v_2,v_3,v_4,v_5\}$ ise ise $\omega(G-S)=1$ olur. Saçılma sayısının tanımında $\omega(G-S)>1$ olduğundan bu kümeler göz ardı edilir.

Sonuç olarak **tüm $S \subset V(G)$ alt kümeleri incelendiğinde** saçılma sayısı en büyük değerini $S=\{v_4\}$ seçildiğinde almaktadır. Bu durumda $sc(G)=1$ dir.

Saçılma sayısının tanımından, S kümesi olarak, grafın tepe kümesinin tüm alt kümelerinin tek tek ele alınması gerektiği açıkça görülmektedir. G grafı n tepeli bir graf ise, tepe kümesinin tüm alt kümelerinin sayısı 2^n dir. Ancak birleştirilmiş bir grafı parçalara ayırmak için en az 1 tepe, en çok n-1 tepe atılmalıdır. Bu nedenle hiç tepe atılmayan durum ile birlikte tüm tepelerin atıldığı durumu çıkarırsak, S' nin toplamda alabileceği 2^n-2 farklı küme vardır.

Yani saçılma sayısını veren S kümesinin/kümelerinin bulunması için 2^n-2 adet işlem yapılması gerekmektedir. 2^n-2, n değişkenine bağlı üstel bir fonksiyon olduğu için ($f(n)= 2^n-2$), n sayısına bağlı olarak ele alınacak S kümelerinin sayısı üstel olarak artmaktadır. Örnek olarak aşağıdaki tabloda fonksiyonun n=16' ya kadar olan değerleri verilmiştir.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
f(n)	0	2	6	14	30	62	126	254

n	9	10	11	12	13	14	15	16
f(n)	510	1022	2046	4094	8190	16382	32766	65534

Tablo 1.3.1 Tepe sayısı ile S kümelerinin sayısı arasındaki ilişki

Tablo 1.3.1' de görüldüğü üzere 16 tepeli bir grafın saçılma sayısını bulmak için 65534 adet S kümesini incelemeliyiz. İnsan gücüyle uzun zaman alacak bu işlemi acaba bilgisayar yapabilir mi? Eğer yapabiliyorsa ne kadar sürede işlemi tamamlayabilir?

Örnek olarak n=50 alalım. Bu, bilgisayarın 2^{50}-2 adet işlemi yapması demektir. Bilgisayarın işlemcisinin hızını 2ghz olarak ele alalım. 2ghz hızlı işlemciye sahip bir bilgisayar saniyede 2 milyar (2.000.000.000 = 2.10^9) işlem yapabilmektedir. Kolay işlem yapabilmek adına işlem sayısını 10 un kuvveti biçiminde şu şekilde yazabiliriz (Burada çok büyük sayılarla işlem yapıldığından (-2) lik işlem göz ardı edilmiştir.):

$$2^{50} = (2^{10}) = (1024)^5 > (1000)^5 = (10^3)^5 = 10^{15}$$

Bilgisayarımızın 2^{50} işlemi yaklaşık kaç saniyede yapacağını bulursak;

$$\frac{10^{15}}{2.10^9} = 500.000$$

500.000 saniye $\cong$ 8.333 dakika $\cong$ 138 saat $\cong$ 6 gün

Yani 2^{50} adet işlem, 2ghz hızlı işlemciye sahip bir bilgisayar yardımıyla yaklaşık **6 günde** tamamlanacaktır. Benzer şekilde, 1ghz hızlı işlemciye sahip olan bir bilgisayar 2^{50} adet işlemi yaklaşık **12 günde** tamamlayacaktı. Diğer bir deyişle, problemin çözümü için gerekli olan 2^{50} tane işlem sayısı her zaman aynı olup, bu işlemler için gerekli olan süre, bilgisayarın işlemci hızına bağlı olarak değişmektedir. Ancak bu durum, işlem sayısının üstel bir fonksiyonla ifade edildiği gerçeğini asla değiştirmez.

Bu şekilde, büyük değerler için hesaplanması yıllar hatta asırlar alan problemlere (yani, işlem sayısı polinomial olmayan fonksiyona sahip problemlere) polinomial zamanda çözülemeyen problemler denir. Bu problemlerin ait olduğu sınıfa NP (Non-Polinomial) sınıfı problemler denilmektedir. NP sınıfına ait bir A problemi için, bu sınıfa ait diğer tüm NP problemler eğer A problemine indirgenebiliyorsa, o zaman A problemi NP-Tam **(**NP-Complete**)** sınıfı problemlerdendir denir (Nabiyev, 2003).

2002 yılında Zhang ve arkadaşları (Zhang et al., 2002), "*Computing the scattering number of graphs*" isimli makalesinde saçılma sayısının hesaplanması problemini ele almış ve problemin NP sınıfına ait NP-Tam problemlerden biri olduğunu göstermişlerdir.

Saçılma sayısı ile ilgili literatürde bulunan çalışmalardan bazıları aşağıda listelenmiştir.

1.4 Saçılma Sayısı İçin Literatürde Yer Alan Bazı Sonuçlar

1978 yılında Jung, çalışmalarında D*-grafların saçılma sayısını araştırmış ve şu sonuçları elde etmiştir:

Teorem 1.4.1 (Jung, 1978)**:** G=(V,E) bir D*-graf olsun. Bu durumda,

- G hamiltonian yol içerir $\Leftrightarrow sc(G)\leq 1$
- G hamiltoniandır $\Leftrightarrow sc(G)\leq 1$ ve $|V(G)|\geq 3$
- G hamiltonian-bağlantılıdır $\Leftrightarrow sc(G)<0$ dir.

Teorem 1.4.2 (Jung, 1978)**:** G bir D*-graf olsun. $\pi_0(G)$, G grafının tüm tepelerini içeren ayrık yolların sayısı olmak üzere,

$$\pi_0(G)=\max\{1,sc(G)\}$$ dir.

2001 yılında Zhang ve Wang, saçılma sayısı için bağımsızlık sayısını ve tepe sayısını kullanarak bir alt sınır bulmuştur.

Teorem 1.4.3 (Zhang and Wang, 2001)**:** G, n tepeli, bağımsızlık sayısı $\alpha(G)$ ve bağlantılılık sayısı $\kappa(G)$ olan bir graf olsun. Bu durumda,

- $sc(G) \geq 2\alpha(G) - n = 2\alpha(G) - (\alpha(G)+\beta(G)) = \alpha(G)-\beta(G)$
- $sc(G) \leq \alpha(G) - \kappa(G)$ dir.

Yine aynı makalede bağlantılılık sayısı, ayrıt bağlantılılık sayısı ve minimum tepe derecesi kullanılarak saçılma sayısı için aşağıdaki alt ve üst sınırlar verilmiştir.

Teorem 1.4.4 (Zhang and Wang, 2001)**:** G grafı tam olmayan n ($n\geq 3$) tepeli bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda,

- $2-\kappa(G) \leq sc(G) \leq n-2\kappa(G)$
- $2-\lambda(G) \leq sc(G) \leq n-2\lambda(G)$
- $2-\delta(G) \leq sc(G) \leq n-2\delta(G)$ dir.

Zhang ve Wang, bir G grafının en uzun yolunu kullanarak saçılma sayısı için bir başka üst sınır daha elde etmişlerdir.

Teorem 1.4.5 (Zhang and Wang, 2001)**:** G grafı tam olmayan n ($n\geq 4$) tepeli bağlantılı bir graf ve en uzun yol uzunluğu p olan bir graf olmak üzere, $sc(G) \leq n-p$ dir.

2002 yılında Kırlangic, B_n ikili ağacının saçılma sayısının değerini hesaplamıştır.

Teorem 1.4.6 (Kırlangıç, 2002)**:** $n\geq 3$ olmak üzere $sc(B_n)=2^{n-2}$ dir.

Aşağıdaki teoremde, bir G grafının saçılma sayısı ile G grafının dallanmış alt grafının saçılma sayısı arasındaki bağıntı verilmiştir.

Teorem 1.4.7 (Zhang et al., 2002)**:** G tam olmayan birleştirilmiş bir graf ve H, G grafının bir dallanmış alt grafı olsun. O zaman $sc(H)\geq sc(G)$ dir.

Aşağıdaki teoremde ise yol grafların kartezyen çarpımlarının saçılma sayıları verilmiştir.

Teorem 1.4.8 (Zhang et al., 2002)**:** $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$, 2 den küçük olmayan k tane tamsayı olsun. Bu durumda,

- Tüm n_i sayıları tek ise $sc(P_{n1}xP_{n2}xP_{n3}x\ldots xP_{nk})=1$,
- Bazı n_i sayıları çift ise $sc(P_{n1}xP_{n2}xP_{n3}x\ldots xP_{nk})=0$ dır.

Zhang ve Peng, 2004 yılında yazdıkları makalede saçılma sayısı ile diğer zedelenebilirlik ölçümleri arasındaki ilişkiyi araştırmıştır. Bağlantılılık sayısı kullanılarak sertlik değeri ve saçılma sayısı arasında aşağıdaki ilişki elde edilmiştir.

Teorem 1.4.9 (Zhang and Peng, 2004)**:** G tam olmayan birleştirilmiş bir graf olmak üzere,

$$\tau(G) \geq \frac{\kappa(G)}{\kappa(G) + sc(G)} \qquad \text{dir.}$$

Yine aynı makalede bir başka zedelenebilirlik ölçümü olan bütünlük değeri ile saçılma sayısı arasındaki ilişki ise şu şekilde verilmiştir:

Teorem 1.4.10 (Zhang and Peng, 2004)**:** G tam olmayan birleştirilmiş bir graf olmak üzere,

$$I(G) \geq 2\sqrt{n - sc(G)} - (sc(G) + 1) \qquad \text{dir.}$$

Graf işlemleri, küçük grafların yanı sıra, büyük grafların da tanımlanması ve ayrıştırılması için kullanışlı olan yeni grafların oluşturulmasında önemlidir. Bu nedenle, dört adet standart graf çarpımı tanımlanmıştır. Bu çarpımlar, Kartezyen çarpım, Kronecker çarpım, Güçlü çarpım ve Lexicographic çarpım olup, kartezyen çarpım kullanılarak elde edilen grafların saçılma sayıları oldukça az araştırılmıştır. Diğer yandan, literatürde zedelenebilirlik ölçümleri için verilen sonuçlar incelendiğinde, saçılma sayısı için oldukça az sayıda sonuç elde edildiği görülmektedir. Bu durum bizi, kartezyen çarpım kullanarak elde edilen daha büyük grafların saçılma sayılarını araştırmaya motive etti. Bu nedenle, gelecek bölümde seçilen iki grafın kartezyen çarpımının saçılma sayısının elde edilmesi amaçlanmıştır.

2. SAÇILMA SAYISI VE KARTEZYEN ÇARPIM

Bu bölümde, yapısı bilinen iki grafın kartezyen çarpımının saçılma sayısı araştırılacaktır.

2.1 $K_{1,m}$ x $K_{1,n}$ Grafının Saçılma Sayısı

Bu kısımda, $K_{1,m}$ x $K_{1,n}$ grafının saçılma sayısı için aşağıdaki Teorem verilmiştir. $K_{1,m}$ x $K_{1,n}$ grafı için, $\alpha(K_{1,m} \times K_{1,n}) = mn+1$ ve $\beta(K_{1,m} \times K_{1,n}) = m+n$ dir.

Teorem 2.1.1: $m,n \in Z^+$ $(m \geq 2,\ n \geq 2)$ ve $m \leq n$ olmak üzere,

$$sc(K_{1,m} \times K_{1,n}) = \alpha(K_{1,m} \times K_{1,n}) - \beta(K_{1,m} \times K_{1,n}) = mn+1 - (m+n) \qquad \text{dir.}$$

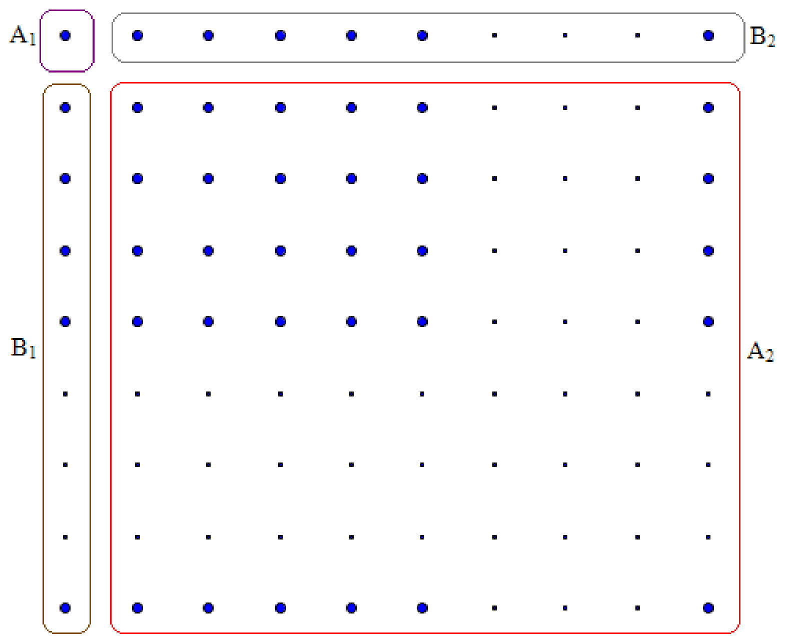
İspat: Teorem 1.4.3' den

$$sc(K_{1,m} \times K_{1,n}) \geq \alpha(K_{1,m} \times K_{1,n}) - \beta(K_{1,m} \times K_{1,n}) = mn+1-(m+n) \qquad (2.1.1)$$

olduğu görülür.

Bu durumda, $sc(K_{1,m} \times K_{1,n}) \leq \alpha(K_{1,m} \times K_{1,n}) - \beta(K_{1,m} \times K_{1,n})$ olduğunu göstermeliyiz.

$K_{1,m}$ x $K_{1,n}$ grafının bağımsızlık kümesi ve örtü kümesi, sırasıyla A_α ve B_β ve $K_{1,m}$ x $K_{1,n}$ grafının tepeleri, $A_\alpha = A_1 \cup A_2$ ve $B_\beta = B_1 \cup B_2$ şeklinde olsun (Şekil 2.1.1).



Şekil 2.1.1 $K_{1,m}$ x $K_{1,n}$ grafının tepeleri

$K_{1,m}$ x $K_{1,n}$ grafından S={XUY|X⊆A_α ve/veya Y⊆B_β} olmak üzere |S|=r tane tepe atılırsa, geriye kalan bileşenlerin sayısı $\omega((K_{1,m}$ x $K_{1,n})$–S) olsun.

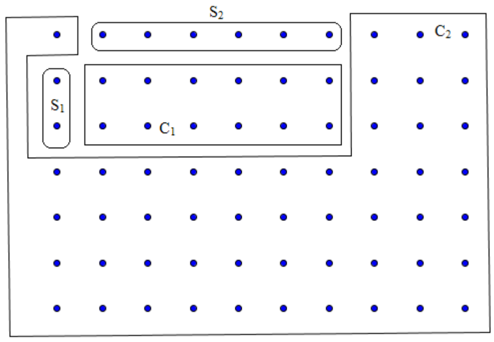
Durum 1: $1 \leq |S| = r \leq \alpha(K_{1,m}xK_{1.n})$ olmak üzere $S \subseteq X$ olsun. Bu durumda, Şekil 2.1.1' deki, A_2 kümesine ait bazı/tüm tepeler $K_{1,m}$ x $K_{1,n}$ grafından atılırsa, kalan graf bağlantılıdır.

Benzer şekilde, sadece A_1 kümesine ait olan tek tepenin graftan atılması durumunda da graf yine bağlantılı olacaktır. Ancak hem A_1 kümesindeki tek tepe, hem de grafın herhangi bir $K_{1,m}$ (veya $K_{1,n}$) kopyasındaki A_2 kümesine ait bazı/tüm tepeler atılırsa geriye kalan graf bağlantısız olup, $\omega((K_{1,m}$ x $K_{1,n})$–S) ≤ m+n dir. Bu durumda, $m+1 \leq r \leq \alpha(K_{1,m}xK_{1.n})$ olmak üzere,

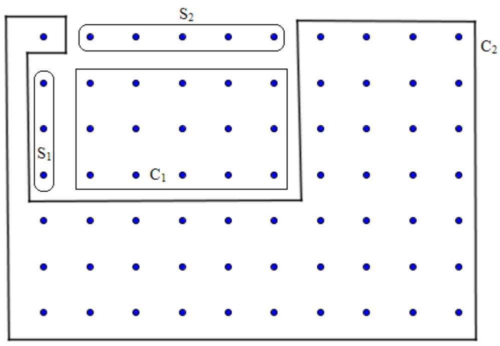
$$sc(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) \leq \max\{m+n-(m+1)\} = n-1 \leq \alpha(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) - \beta(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) \quad (2.1.2)$$

dir.

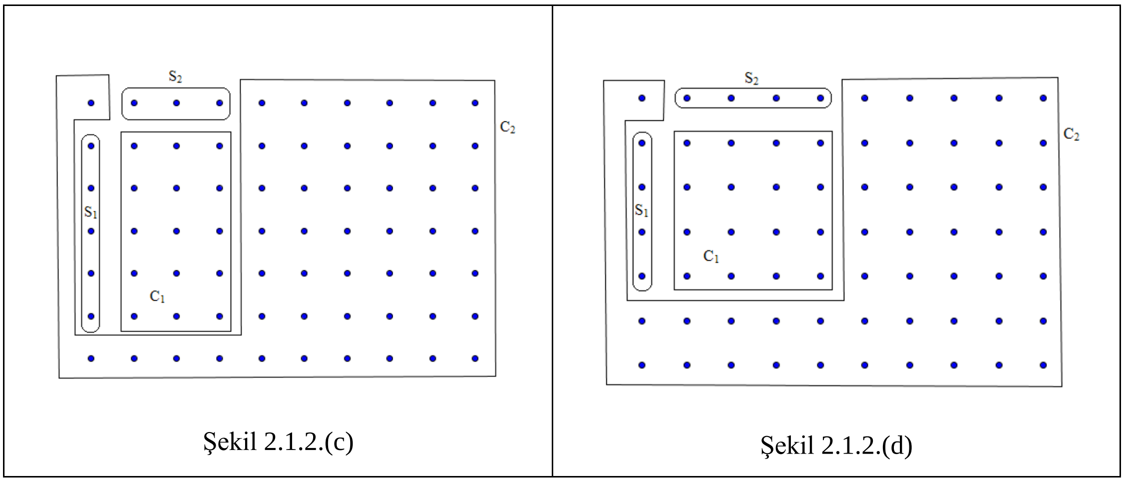
Durum 2: $1 \leq |S| = r \leq \beta(K_{1,m}xK_{1.n})$ olmak üzere $S \subseteq X$ olsun. Geriye kalan grafın, bileşen sayısının maksimum olması için, atılan r adet tepenin Şekil 2.1.1' deki B_1 ve B_2 kümelerinden seçilmesi ve her iki kümeden atılan tepe sayılarının eşit olması veya birbirine oldukça yakın olması gerekmektedir. Bu durumu, örnek olarak $K_{1,6}$ x $K_{1,9}$ grafını inceleyerek (Şekil 2.1.2.(a), Şekil 2.1.2.(b), Şekil 2.1.2.(c), Şekil 2.1.2.(d)) gözlemleyebiliriz. Bu şekillerde, $K_{1,6}$ x $K_{1,9}$ grafından 8 tepe atıldığında, atılan tepeler S_1 ve S_2 ile geriye kalan bileşenler de C_1 ve C_2 ile gösterilmiştir. C_1 bileşenindeki tepelerin her biri izole tepe iken C_2 birleştirilmiş bir bileşendir.



Şekil 2.1.2.(a)



Şekil 2.1.2.(b)



Şekil 2.1.2 $K_{1,6}$ x $K_{1,9}$ grafından atılan tepeler

Bu durumda, Şekil 2.1.2.(a)' da 13 bileşen, Şekil 2.1.2.(b)' de 16 bileşen, Şekil 2.1.2.(c)' de 16 bileşen ve Şekil 2.1.2.(d)' de 17 bileşen bulunmaktadır. Dolayısıyla, maksimum sayıda bileşeni elde etmek için B_1 ve B_2 kümesinden atılacak tepelerin seçimi Şekil 2.1.2.(d)' de olduğu gibi yapılmalıdır.

Bu düşünceye göre hareket ederek, $K_{1,m}$ x $K_{1,n}$ grafından |S|=r adet tepe atılırsa, iki farklı durum oluşur.

Alt Durum1: Eğer $\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor < m$ ise o zaman $\omega((K_{1,m} \text{ x } K_{1,n})-S) \leq \begin{cases} \frac{r^2}{4}+1, & r \text{ çift ise} \\ \frac{r^2+3}{4}, & r \text{ tek ise} \end{cases}$

- r çift olsun.

  $\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor < m \Rightarrow \frac{r}{2} < m \Rightarrow r < 2m$ dir.

$$sc(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) = \max\{\omega((K_{1,m} \text{ x } K_{1,n})- S) - |S|\} \leq \max\left\{\frac{r^2}{4}+1-r\right\}$$

$$< \max\left\{\frac{(2m-2)^2}{4}\right\} = (m-1)^2 .$$

Burada, $(m-1)^2 \leq \alpha(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) - \beta(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n})$ olduğunu göstermeliyiz.

$m \leq n \Rightarrow m(m-1) \leq n(m-1) \Rightarrow m^2\text{-}m \leq mn\text{-}n \Rightarrow m^2\text{-}2m \leq mn\text{-}n\text{-}m$

$\Rightarrow m^2\text{-}2m+1 \leq mn+1\text{-}n\text{-}m$

$\Rightarrow (m-1)^2 \leq \alpha(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) - \beta(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n})$

$\Rightarrow sc(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) < \alpha(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) - \beta(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n})$ (2.1.3)

- r tek olsun.

$\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor < m \Rightarrow \frac{r-1}{2} < m \Rightarrow r < 2m+1$ dir.

$$sc(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) \leq \max\left\{\frac{r^2+3}{4} - r\right\} \leq \max\left\{\frac{(2m)^2 - 4(2m) + 3}{4}\right\}$$
$$\leq \max\left\{m^2 - 2m + \frac{3}{4}\right\} = m^2 - 2m + \frac{3}{4}.$$

Burada, $m^2 - 2m + \frac{3}{4} \leq \alpha(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) - \beta(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n})$ olduğunu göstermeliyiz.

$$m \leq n \Rightarrow m(m-1) \leq n(m-1) \Rightarrow m^2\text{-}m \leq mn\text{-}n \Rightarrow m^2\text{-}2m \leq mn\text{-}n\text{-}m$$
$$\Rightarrow m^2\text{-}2m+\frac{3}{4} \leq mn+1\text{-}n\text{-}m$$
$$\Rightarrow m^2\text{-}2m+\frac{3}{4} \leq \alpha(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) - \beta(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n})$$
$$\Rightarrow sc(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) \leq \alpha(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) - \beta(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}). \quad (2.1.4)$$

Bu durumda, (2.1.3) ve (2.1.4)' den,

$$sc(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) \leq \alpha(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) - \beta(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) \quad (2.1.5)$$

elde edilir.

Alt Durum 2: Eğer $\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor \geq m$ ise o zaman $\omega((K_{1,m} \text{ x } K_{1,n})\text{-}S) \leq mr - m^2+1$ dir.

$$sc(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) \leq \max\{mr\text{-}m^2+1\text{–}r\} = \max\{r(m\text{-}1)+1\text{-}m^2\}$$
$$= \max\{r(m\text{-}1)+(1\text{-}m)(1+m)\} = \max\{(m\text{-}1)(r\text{-}1\text{-}m)\}$$
$$= (m\text{-}1)(r\text{-}1\text{-}m)$$

$r \leq \beta(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) = m+n$ olduğundan,

$$sc(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) \leq (m\text{-}1)(m+n\text{-}1\text{-}m) \Rightarrow sc(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) \leq (m\text{-}1)(n\text{-}1)$$
$$\Rightarrow sc(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) \leq mn+1\text{-}n\text{-}m$$
$$\Rightarrow sc(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) \leq \alpha(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) - \beta(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) \quad \text{dir.} \quad (2.1.6)$$

Bu durumda, (2.1.5) ve (2.1.6)' dan,

$$sc(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) \leq \alpha(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) - \beta(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) \quad \text{dir.} \quad (2.1.7)$$

Durum 3: $K_{1,m}$ x $K_{1,n}$ grafından, hem A_α kümesinden hem de B_β kümesinden $|S|$ = r tane tepenin atıldığını kabul edelim. Bu durumda, $K_{1,m}$ x $K_{1,n}$ grafından $|S|$ = r tane tepe atılırsa iki farklı durum ortaya çıkar.

Alt Durum 1: Eğer $\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor$< m ise o zaman $\omega((K_{1,m} \text{ x } K_{1,n})\text{-}S) < \begin{cases} \frac{r^2}{4}+1, & \text{r çift ise} \\ \frac{r^2+3}{4}, & \text{r tek ise} \end{cases}$

- r çift olsun.

  $\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor < m \Rightarrow \frac{r}{2} < m \Rightarrow r < 2m$ dir.

$$sc(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) < \max\left\{\frac{r^2}{4}+1-r\right\} < \max\left\{\frac{r^2-4r+4}{4}\right\}$$

$$< \max\left\{\frac{(2m-2)^2}{4}\right\} = (m-1)^2.$$

Burada, $(m-1)^2 \leq \alpha(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) - \beta(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n})$ olduğunu göstermeliyiz.

$m \leq n \Rightarrow m(m-1) \leq n(m-1) \Rightarrow m^2\text{-}m \leq mn\text{-}n \Rightarrow m^2\text{-}2m \leq mn\text{-}n\text{-}m$

$\Rightarrow m^2\text{-}2m+1 \leq mn+1\text{-}n\text{-}m$

$\Rightarrow (m-1)^2 \leq \alpha(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) - \beta(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n})$

$\Rightarrow sc(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) < \alpha(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) - \beta(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n})$ (2.1.8)

- r tek olsun.

  $\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor < m \Rightarrow \frac{r-1}{2} < m \Rightarrow r < 2m+1$ dir.

$$sc(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) < \max\left\{\frac{r^2+3}{4}-r\right\} < \max\left\{\frac{(2m)^2-4(2m)+3}{4}\right\}$$

$$< \max\left\{m^2-2m+\frac{3}{4}\right\} = m^2 - 2m + \frac{3}{4}.$$

Burada, $m^2 - 2m + \frac{3}{4} \leq \alpha(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) - \beta(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n})$ olduğunu göstermeliyiz.

$m \leq n \Rightarrow m(m-1) \leq n(m-1) \Rightarrow m^2\text{-}m \leq mn\text{-}n \Rightarrow m^2\text{-}2m \leq mn\text{-}n\text{-}m$

$\Rightarrow m^2\text{-}2m + \frac{3}{4} \leq mn+1\text{-}n\text{-}m$

$\Rightarrow m^2\text{-}2m + \frac{3}{4} \leq \alpha(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) - \beta(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n})$

$\Rightarrow sc(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) < \alpha(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n}) - \beta(K_{1,m} \text{ x } K_{1,n})$. (2.1.9)

Bu durumda, (2.1.8) ve (2.1.9)’ dan,

$$sc(K_{1,m} \times K_{1,n}) < \alpha(K_{1,m} \times K_{1,n}) - \beta(K_{1,m} \times K_{1,n}) \qquad (2.1.10)$$

elde edilir.

Alt Durum 2: Eğer $\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor \geq m$ ise o zaman $\omega((K_{1,m} \times K_{1,n})\text{-}S) < mr - m^2+1$ dir.

$sc(K_{1,m} \times K_{1,n}) < \max\{mr\text{-}m^2+1 - r\} < \max\{r(m\text{-}1)+1\text{-}m^2\}$

$< \max\{(m\text{-}1)(r\text{-}1\text{-}m)\} = (m\text{-}1)(r\text{-}1\text{-}m)$

$r \leq \beta(K_{1,m} \times K_{1,n}) = m+n$ olduğundan,

$sc(K_{1,m} \times K_{1,n}) < (m\text{-}1)(m+n\text{-}1\text{-}m) \Rightarrow sc(K_{1,m} \times K_{1,n}) < (m\text{-}1)(n\text{-}1)$

$\Rightarrow sc(K_{1,m} \times K_{1,n}) < mn+1\text{-}n\text{-}m$

$\Rightarrow sc(K_{1,m} \times K_{1,n}) < \alpha(K_{1,m} \times K_{1,n}) - \beta(K_{1,m} \times K_{1,n}) \qquad (2.1.11)$

elde edilir.

Bu durumda, (2.1.10) ve (2.1.11)’ den,

$$sc(K_{1,m} \times K_{1,n}) < \alpha(K_{1,m} \times K_{1,n}) - \beta(K_{1,m} \times K_{1,n}) \qquad (2.1.12)$$

elde edilir.

Tüm durumlar ele alındığında, (2.1.2), (2.1.7) ve (2.1.12)’ den,

$$sc(K_{1,m} \times K_{1,n}) \leq \alpha(K_{1,m} \times K_{1,n}) - \beta(K_{1,m} \times K_{1,n}) \quad \text{dir.} \qquad (2.1.13)$$

Sonuç olarak, (2.1.1) ve (2.1.13)’ den,

$$sc(K_{1,m} \times K_{1,n}) = \alpha(K_{1,m} \times K_{1,n}) - \beta(K_{1,m} \times K_{1,n}) = mn+1\text{-}(m+n) \ \text{ dir.}$$

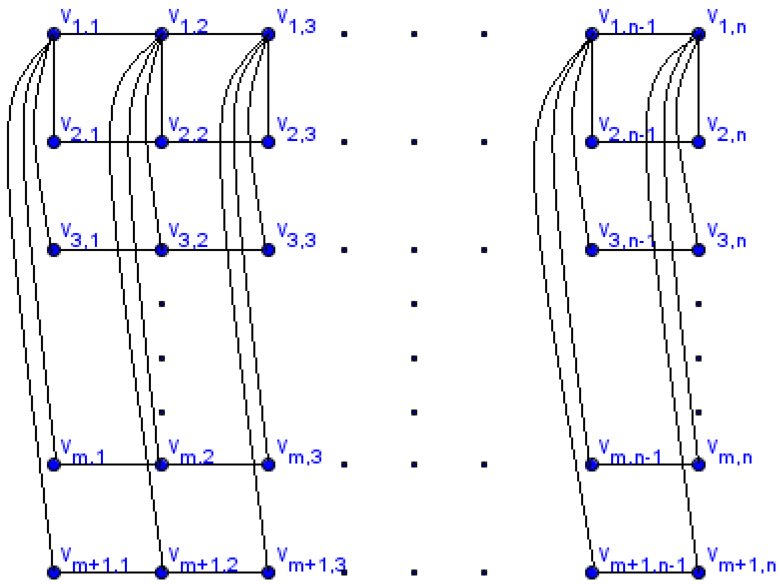
2.2 $K_{1,m}$ x P_n Grafının Saçılma Sayısı

İki yıldız grafın kartezyen çarpımından elde edilen yeni grafın saçılma sayısı elde edildikten sonra, bu kez $K_{1,m}$ yıldız grafı ile P_n yol grafının kartezyen çarpımının saçılma sayısı araştırılmış ve aşağıdaki Teorem elde edilmiştir.

Teorem 2.2.1: $m,n \in Z^+$ $(m \geq 2,\ n \geq 2)$ olmak üzere,

$$sc(K_{1,m} \times P_n) = \begin{cases} m-1, & n \text{ tek ise} \\ m-2, & n \text{ çift ise} \end{cases} \quad \text{dir.}$$

İspat: Graftan atılan tepelerin kümesi S olsun. Herhangi bir grafı için, örtü kümesindeki tüm tepeler atıldıktan sonra, geriye kalan izole tepelerden tepe atmaya devam edilirse, geriye kalan bileşen sayısı atılan tepe sayısı kadar azalacağından, $2 \leq |S| = r \leq \beta(K_{1,m} \times P_n) = \dfrac{n.(m+1)}{2} + 1 - m$ olmalıdır.



Şekil 2.2.1 $K_{1,m} \times P_n$ grafı

Durum 1: m>n ve n tek olsun.

- $2 \leq r \leq n-1$ ise, $\forall\, S \subseteq V(K_{1,m} \times P_n)$ olmak üzere $\omega((K_{1,m} \times P_n)-S)-|S|$' nin maksimum değeri alabilmesi için S kümesi,
    - $v_{1,1}$ tepesi ile $v_{i,2}$ $(i=2,\ldots,m+1)$ tepelerinin en az bir tanesini (Şekil 2.2.2),

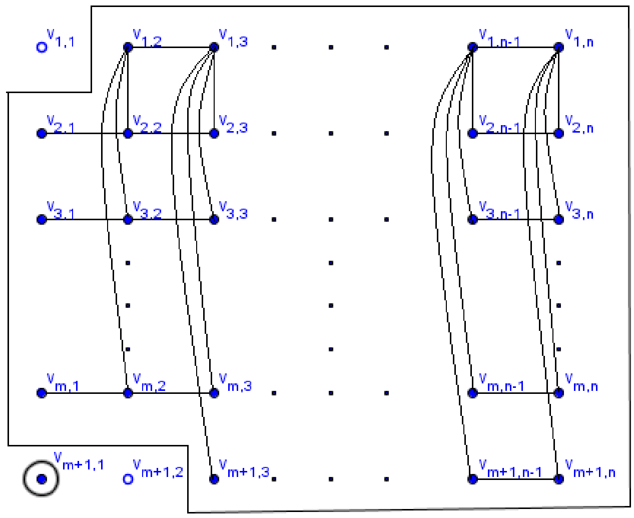
      veya
    - $v_{1,n}$ tepesi ile $v_{i,n-1}$ $(i=2,\ldots,m+1)$ tepelerinin en az bir tanesini (Şekil 2.2.3),

  içermelidir.

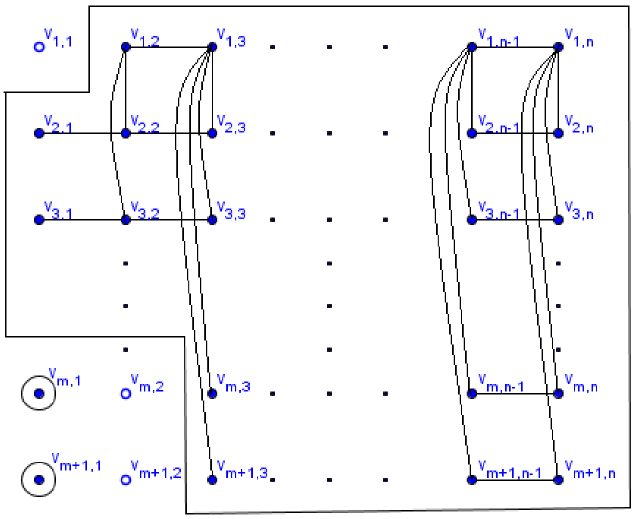
Bu durumda, $\omega((K_{1,m} \times P_n)-S) \leq r$ dir. Öyleyse,

$$sc(K_{1,m} \times P_n) = \max\{\omega((K_{1,m} \times P_n)-S) - |S|\} \leq \max\{r - r\} = 0 \qquad (2.2.1)$$

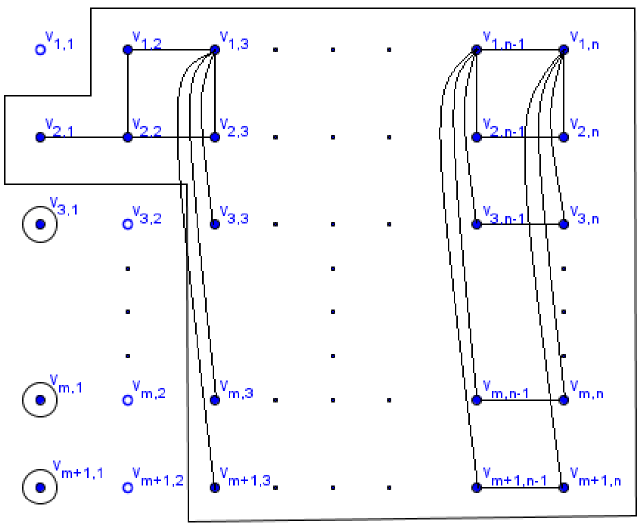
elde edilir.



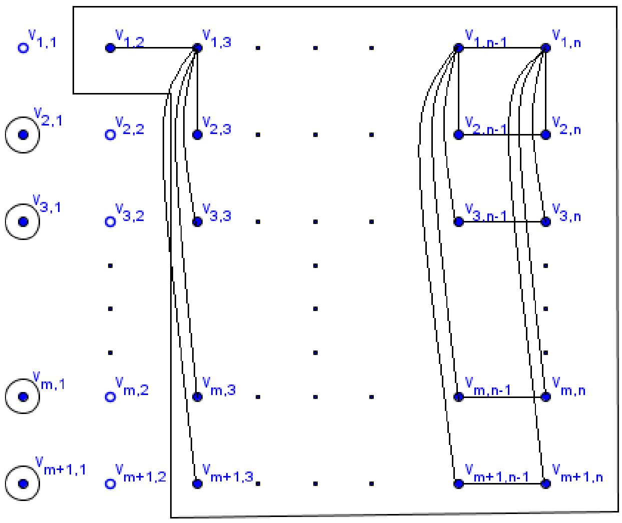
Şekil 2.2.2.(a)



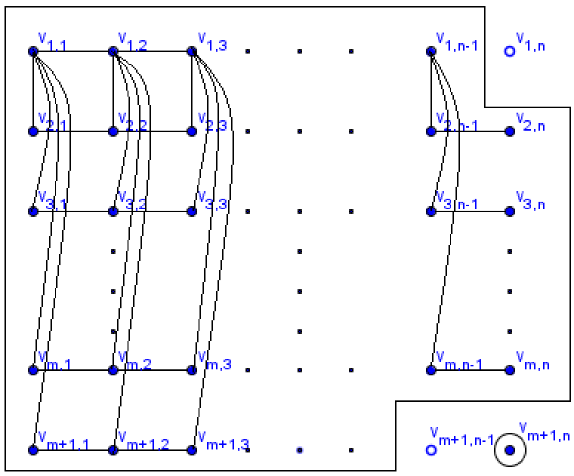
Şekil 2.2.2.(b)



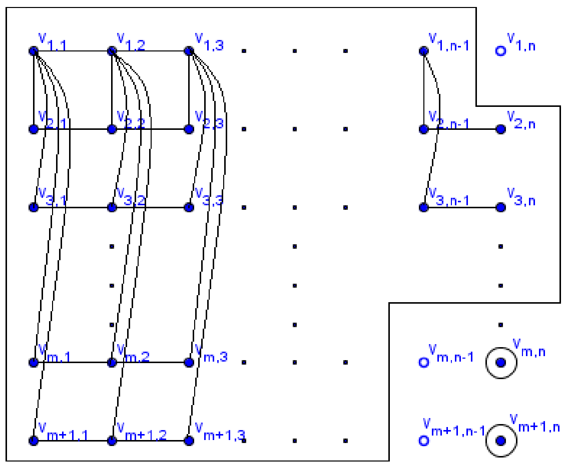
Şekil 2.2.2.(c)



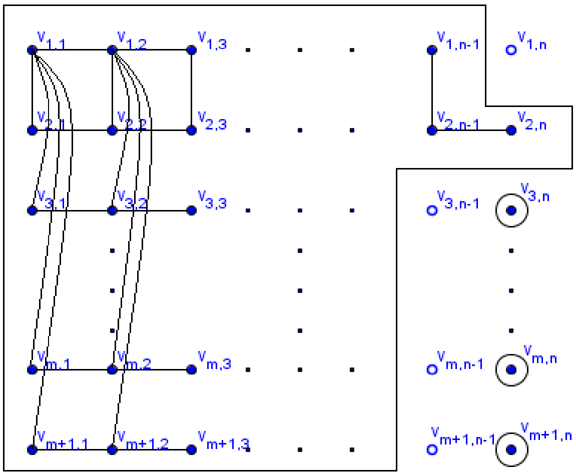
Şekil 2.2.2.(d)



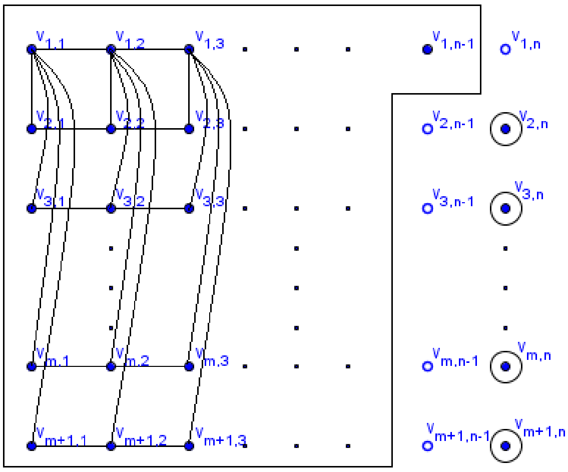
Şekil 2.2.3.(a)



Şekil 2.2.3.(b)



Şekil 2.2.3.(c)



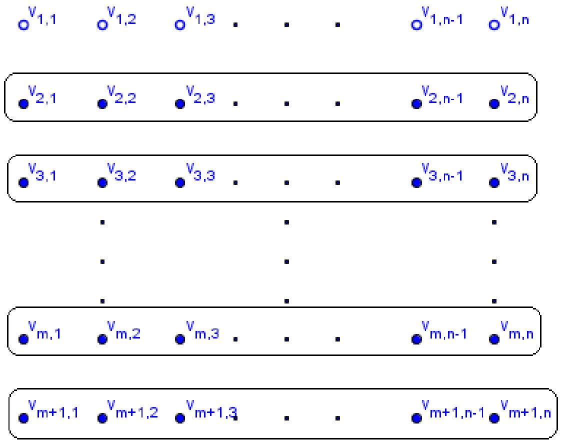
Şekil 2.2.3.(d)

- $n \leq r \leq \beta(K_{1,m} \times P_n)-1$ ise, $\forall\, S \subseteq V(K_{1,m} \times P_n)$ olmak üzere $\omega((K_{1,m} \times P_n)-S)-|S|$' nin maksimum değeri alabilmesi için S kümesi,
  - $v_{1,i}$ (i=1,…,n) tepelerinin tümünü

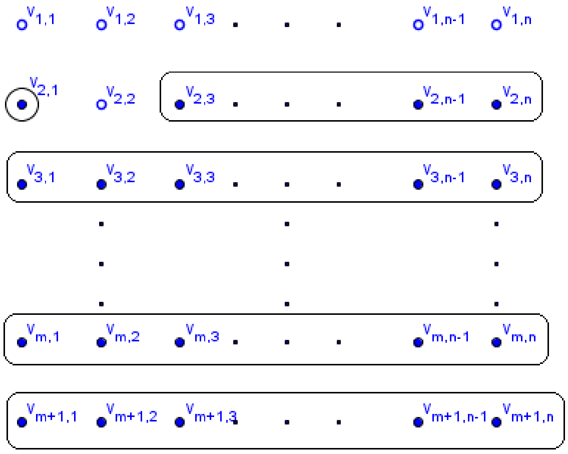
    veya
  - $v_{1,i}$ (i=1,…,n) tepelerinin tümü ile birlikte $S_1=\{v_{j,k} | (j,k) \in I \times J,\ I=\{2,\ldots,m+1\}$ ve $J=\{2,4,6,\ldots,n-2\}\}$ kümesinin elemanlarının en az bir tanesini içermelidir (Şekil 2.2.4).

O halde, $\omega((K_{1,m} \times P_n)-S) \leq r+m-n$ dir. Bu durumda,

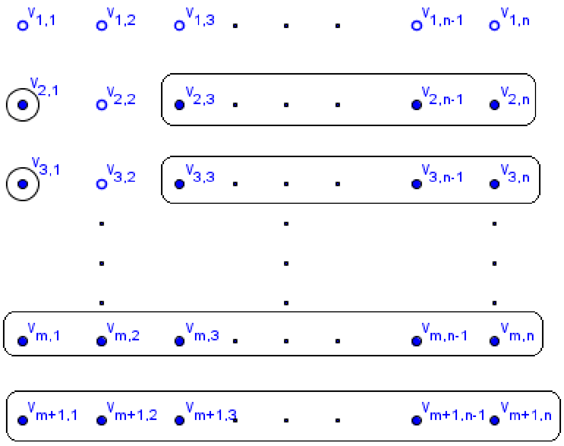
$$sc(K_{1,m} \times P_n) \leq \max\{r+m-n-r\} = m - n \quad \text{dir.} \qquad (2.2.2)$$



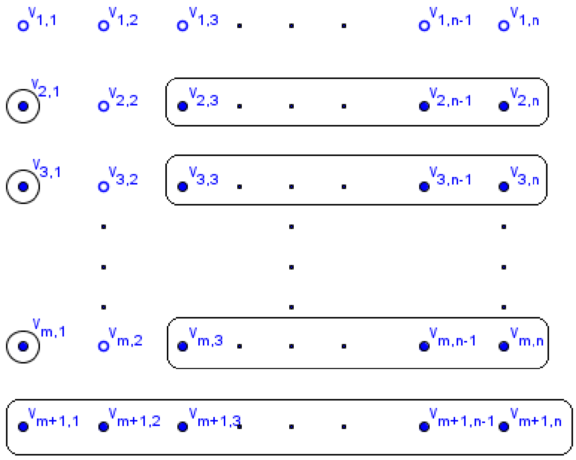
Şekil 2.2.4.(a)



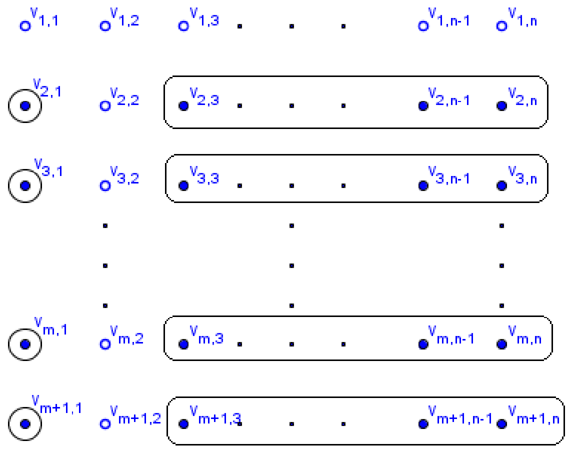
Şekil 2.2.4.(b)



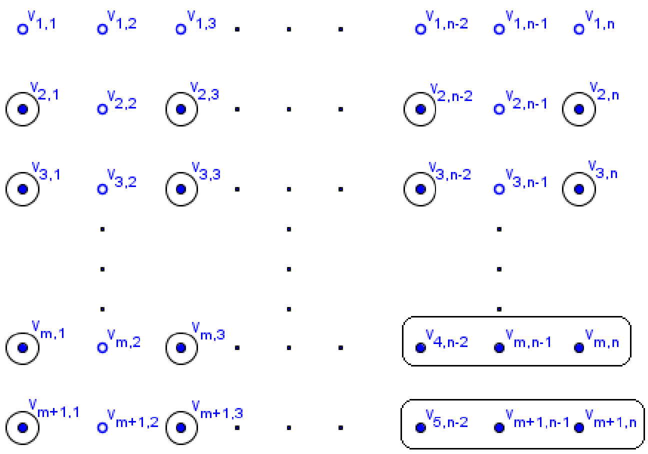
Şekil 2.2.4.(c)



Şekil 2.2.4.(d)



Şekil 2.2.4.(e)



Şekil 2.2.4.(f)

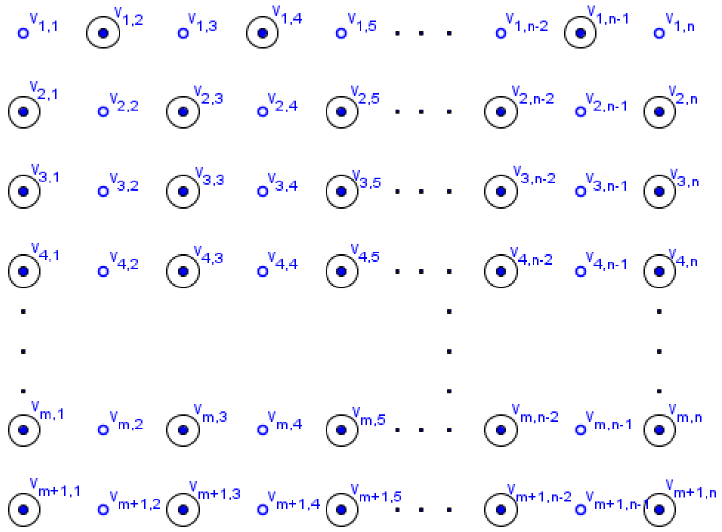
- $r=\beta(K_{1,m} \times P_n)$ olsun. Eğer S kümesi, $K_{1,m} \times P_n$ grafının minimum elemanlı örtü kümesi ise (Şekil 2.2.5) geriye kalan grafın bileşenlerinin sayısı $\omega((K_{1,m} \times P_n)-S)=\alpha(K_{1,m} \times P_n)$ dir.

Bu durumda,

$$sc(K_{1,m} \times P_n) = \max\{\alpha(K_{1,m} \times P_n) - \beta(K_{1,m} \times P_n)\} = m-1 \quad \text{dir.} \qquad (2.2.3)$$

Aksi halde $\omega((K_{1,m} \times P_n)-S) < \alpha(K_{1,m} \times P_n)$ olup,

$$sc(K_{1,m} \times P_n) < \max\{\alpha(K_{1,m} \times P_n)-\beta(K_{1,m} \times P_n) = m-1 \quad \text{dir.} \qquad (2.2.4)$$



Şekil 2.2.5

Böylece m>n ve n tek iken, (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3) ve (2.2.4)' den

$$sc(K_{1,m} \times P_n) = m-1 \qquad (2.2.5)$$

elde edilir.

Durum 2: m>n ve n çift olsun.

- $2 \leq r \leq n-1$ ise, $\forall S \subseteq V(K_{1,m} \times P_n)$ olmak üzere $\omega((K_{1,m} \times P_n)-S)-|S|$' nin maksimum değeri alabilmesi için S kümesi,
    - $v_{1,1}$ tepesi ile $v_{i,2}$ (i=2,…,m+1) tepelerinin en az bir tanesini (Şekil 2.2.2),

      veya
    - $v_{1,n}$ tepesi ile $v_{i,n-1}$ (i=2,…,m+1) tepelerinin en az bir tanesini (Şekil 2.2.3),

  içermelidir.

Bu durumda, $\omega((K_{1,m} \times P_n) - S) \leq r$ dir. Öyleyse,

$$sc(K_{1,m} \times P_n) = \max\{\omega((K_{1,m} \times P_n) - S) - |S|\} = \max\{r - r\} = 0 \qquad (2.2.6)$$

elde edilir.

- $n \leq r < \frac{n.(m+1)}{2} + 1 - m$ ise $\forall S \subseteq V(K_{1,m} \times P_n)$ olmak üzere $\omega((K_{1,m} \times P_n) - S) - |S|$' nin maksimum değeri alabilmesi için S kümesi,

  - $v_{1,i}$ (i=1,…,n) tepelerinin tümünü

    veya

  - $v_{1,i}$ (i=1,…,n) tepelerinin tümü ile birlikte $S_1=\{v_{j,k} | (j,k) \in I \times J, I=\{2,\ldots,m+1\}$ ve $J=\{2,4,6,\ldots,n-2\}\}$ kümesinin elemanlarının en az bir tanesini (Şekil 2.2.4) içermelidir.

Bu durumda, $\omega((K_{1,m} \times P_n) - S) \leq r+m-n$ dir. Öyleyse,

$$sc(K_{1,m} \times P_n) = \max\{\omega((K_{1,m} \times P_n) - S) - |S|\} \leq \max\{r+m-n-r\} = m - n \qquad (2.2.7)$$

elde edilir.

- $\frac{n.(m+1)}{2} + 1 - m \leq r \leq \beta(K_{1,m} \times P_n) - 1$ ise $\forall S \subseteq V(K_{1,m} \times P_n)$ olmak üzere $\omega(K_{1,m} \times P_n - S) - |S|$' nin maksimum değeri alabilmesi için S kümesi,

  - $v_{1,i}$ (i=1,…,n) tepelerinin tümünü

    ve

  - $S_1=\{v_{j,k} | (j,k) \in I \times J, I=\{2,\ldots,m+1\}$ ve $J=\{2,4,6,\ldots,n-2\}\}$ kümesinin tüm elemanlarını

    ve

  - $v_{1,n}$ tepesini içersin (Şekil 2.2.6).

Bu durumda, $\omega(K_{1,m} \times P_n) = \frac{n.(m+1)}{2} - 1$ dir. Buradan,

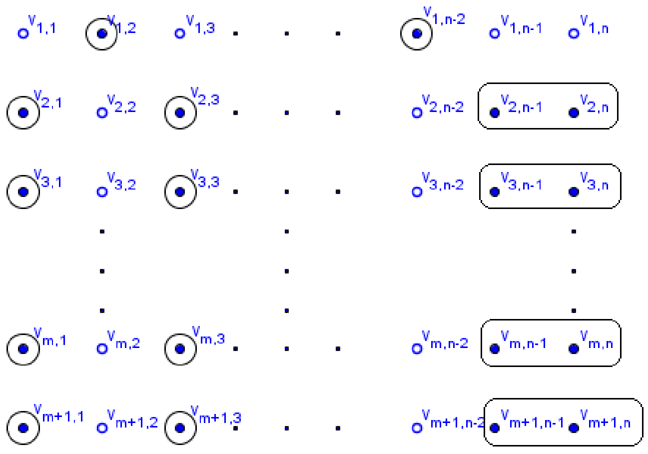
$$sc(K_{1,m} \times P_n) \leq \max\left\{\frac{n.(m+1)}{2} - 1 - \left(\frac{n.(m+1)}{2} + 1 - m\right)\right\} = m - 2 \qquad (2.2.8)$$

elde edilir.

Aksi halde, S kümesi nasıl seçilirse seçilsin $\omega((K_{1,m} \times P_n) - S) < \frac{n.(m+1)}{2} - 1$ olup,

$$sc(K_{1,m} x\, P_n) < \max\left\{\frac{n.(m+1)}{2} - 1 - \left(\frac{n.(m+1)}{2} + 1 - m\right)\right\} = m - 2 \qquad (2.2.9)$$

elde edilir.



Şekil 2.2.6

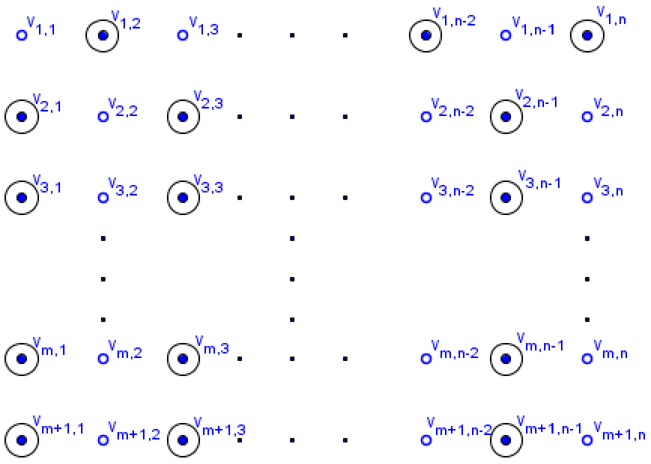
- r = $\beta(K_{1,m} \times P_n)$ olsun. Eğer atılan S kümesi, $K_{1,m} \times P_n$ grafının minimum elemanlı örtü kümesi ise $\omega(K_{1,m} \times P_n\text{-}S) = \alpha(K_{1,m} \times P_n)$ dir (Şekil 2.2.7).

Bu durumda,

$$sc(K_{1,m} \times P_n) = \max\{\alpha(K_{1,m} \times P_n) - \beta(K_{1,m} \times P_n)\} = 0 \quad \text{dır.} \quad (2.2.10)$$

Aksi halde $\omega(K_{1,m} \times P_n) < \alpha(K_{1,m} \times P_n)$ olup,

$$sc(K_{1,m} \times P_n) < \max\{\alpha(K_{1,m} \times P_n) - \beta(K_{1,m} \times P_n)\} < 0 \qquad \text{dır.} \qquad (2.2.11)$$



Şekil 2.2.7

Böylece m>n ve n çift iken, (2.2.6), (2.2.7), (2.2.8), (2.2.9), (2.2.10) ve (2.2.11)' den

$$sc(K_{1,m} \times P_n) = m-2 \qquad (2.2.12)$$

elde edilir.

Durum 3: m≤n ve n tek olsun.

- $2 \le r \le \beta(K_{1,m} \times P_n)-1$ ise, $\forall\, S \subseteq V(K_{1,m} \times P_n)$ olmak üzere $\omega((K_{1,m} \times P_n)-S)-|S|$' nin maksimum değeri alabilmesi için S kümesi,
  - $v_{1,1}$ tepesi ile $v_{i,2}$(i=2,m+1) tepelerinin en az bir tanesini (Şekil 2.2.2) veya
  - $v_{1,n}$ tepesi ile $v_{i,n-1}$(i=2,m+1)tepelerinin en az bir tanesini (Şekil 2.2.3)

içermelidir.

Bu durumda, $\omega((K_{1,m} \times P_n)- S) \le r$ dir. Öyleyse,

$$sc(K_{1,m} \times P_n) \le \max\{r-r\} = 0 \qquad (2.2.13)$$

elde edilir.

- $r=\beta(K_{1,m} \times P_n)$ olsun. Eğer atılan S kümesi, $K_{1,m} \times P_n$ grafının minimum elemanlı örtü kümesi ise $\omega(K_{1,m} \times P_n-S)=\alpha(K_{1,m} \times P_n)$ dir (Şekil 2.2.5).

Bu durumda,

$$sc(K_{1,m} \times P_n) = \max\{\alpha(K_{1,m} \times P_n) - \beta(K_{1,m} \times P_n)\} = m-1 \quad \text{dir.} \qquad (2.2.14)$$

Aksi halde $\omega((K_{1,m} \times P_n)-S) < \alpha(K_{1,m} \times P_n)$ olup,

$$sc(K_{1,m} \times P_n) < \max\{\alpha(K_{1,m} \times P_n) - \beta(K_{1,m} \times P_n)\} = m-1 \quad \text{dir.} \qquad (2.2.15)$$

Böylece m≤n ve n tek iken, (2.2.13), (2.2.14) ve (2.2.15)' den,

$$sc(K_{1,m} \times P_n) = m-1 \qquad (2.2.16)$$

elde edilir.

Durum 4: m≤ n ve n çift olsun.

- $2 \le r < \frac{n.(m+1)}{2} + 1 - m$ ise $\forall\, S \subseteq V(K_{1,m} \times P_n)$ olmak üzere $\omega((K_{1,m} \times P_n)-S)-|S|$ nin maksimum değeri alabilmesi için S kümesi,
  - $v_{1,1}$ tepesi ile $v_{i,2}$(i=2,…,m+1) tepelerinin en az bir tanesini (Şekil 2.2.2), veya

- ○ $v_{1,n}$ tepesi ile $v_{i,n-1}$(i=2,…,m+1) tepelerinin en az bir tanesini (Şekil 2.2.3),

içermelidir.

Bu durumda, $\omega((K_{1,m} \times P_n) - S) \leq r$ dir. Öyleyse,

$$sc(K_{1,m} \times P_n) \leq \max\{r-r\} = 0 \qquad (2.2.17)$$

elde edilir.

- $\frac{n.(m+1)}{2} + 1 - m \leq r \leq \beta(K_{1,m} \times P_n)-1$ ise $\forall\, S \subseteq V(K_{1,m} \times P_n)$ olmak üzere $\omega((K_{1,m} \times P_n)-S)-|S|$' nin maksimum değeri alabilmesi için S kümesi,
  - ○ $v_{1,i}$ (i=1,…,n) tepelerinin tümünü
    ve
  - ○ $S_1=\{v_{j,k} | (j,k) \in I \times J,\ I=\{2,\dots,m+1\}$ ve $J=\{2,4,6,\dots,n-2\}\}$ kümesinin tüm elemanlarını
    ve
  - ○ $v_{1,n}$ tepesini içersin (Şekil 2.2.6).

Bu durumda, $\omega((K_{1,m} \times P_n)-S) = \frac{n.(m+1)}{2} - 1$ dir. Buradan,

$$sc(K_{1,m} \times P_n) \leq \max\left\{\frac{n.(m+1)}{2} - 1 - \left(\frac{n.(m+1)}{2} + 1 - m\right)\right\} = m - 2 \qquad (2.2.18)$$

elde edilir.

Aksi halde, $\frac{n.(m+1)}{2} + 1 - m \leq r \leq \beta(K_{1,m} \times P_n)-1$ iken S kümesi nasıl seçilirse seçilsin $\omega((K_{1,m} \times P_n) - S) < \frac{n.(m+1)}{2} - 1$ olup,

$$sc(K_{1,m} \times P_n) < \max\left\{\frac{n.(m+1)}{2} - 1 - \left(\frac{n.(m+1)}{2} + 1 - m\right)\right\} = m - 2 \qquad (2.2.19)$$

elde edilir.

- $r = \beta(K_{1,m} \times P_n)$ olsun. Eğer S kümesi, $K_{1,m} \times P_n$ grafının minimum elemanlı örtü kümesi ise (Şekil 2.2.7) geriye kalan grafın bileşenlerinin sayısı $\omega((K_{1,m} \times P_n)-S) = \alpha(K_{1,m} \times P_n)$ dir.

Bu durumda,

$$sc(K_{1,m} \times P_n) = \max\{\alpha(K_{1,m} \times P_n) - \beta(K_{1,m} \times P_n)\} = 0 \quad \text{dır.} \qquad (2.2.20)$$

Aksi halde, r = $\beta(K_{1,m} \times P_n)$ iken S kümesi nasıl seçilirse seçilsin $\omega((K_{1,m} \times P_n)-S) < \alpha(K_{1,m} \times P_n)$ olup,

$$sc(K_{1,m} \times P_n) < \max\{\alpha(K_{1,m} \times P_n)-\beta(K_{1,m} \times P_n)\} < 0 \quad \text{dır.} \qquad (2.2.21)$$

Böylece $m \leq n$ ve n çift iken, (2.2.17),(2.2.18),(2.2.19), (2.2.20) ve (2.2.21)' den

$$sc(K_{1,m} \times P_n) = m-2 \qquad (2.2.22)$$

elde edilir.

Sonuç olarak tüm durumlar ele alındığında, (2.2.5), (2.2.12), (2.2.16) ve (2.2.22)' den,

$$sc(K_{1,m} \times P_n) = \begin{cases} m-1 & , n \ tek \ ise \\ m-2 & , n \ çift \ ise \end{cases} \quad \text{dir.}$$

2.3 $K_{1,m}$ x C_n Grafının Saçılma Sayısı

$K_{1,m}$ ve P_n graflarının kartezyen çarpımlarının saçılma sayısı elde edildikten sonra ele aldığımız diğer graflar $K_{1,m}$ ve C_n graflarıdır. $K_{1,m}$ ve C_n graflarının kartezyen çarpımlarının saçılma sayısı araştırılmış ve aşağıdaki Teorem elde edilmiştir. İspat yaparken kullanılan teoremler aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.3.1 (Batagelj and Pisanski, 1982): G=T x C_n, bir T ağaç grafı ile C_n çevre grafının kartezyen çarpımı olsun ve T ağacının maksimum derecesi $\Delta(T) \geq 2$ olsun. Bu durumda,

$$G \text{ hamiltonian çevre içerir } \Leftrightarrow \Delta(T) \leq n \quad \text{dir.}$$

Teorem 2.3.2 (Chvátal, 1973): G bir graf olsun. Eğer G grafı hamiltonian graf ise $\tau(G) \geq 1$ dir.

Teorem 2.3.3 (Goddard, 2013): G bir graf olsun. Eğer $\tau(G) \geq 1$ ise $sc(G) \leq 0$ dir.

Teorem 2.3.4: $m,n \in Z^+$ $(m \geq 2, n \geq 2)$ olmak üzere,

$$sc(K_{1,m} \times C_n) = \begin{cases} 0, & m \leq n \text{ ve } n \text{ çift ise} \\ -1, & m < n \text{ ve } n \text{ tek ise} \\ m-n, & m \geq n \text{ ise} \end{cases} \quad \text{dir.}$$

İspat: İspatı m ve n ye bağlı olarak 3 adımda tamamlayacağız.

Durum 1: $m \leq n$ ve n çift olsun.

Teorem 1.4.3' de $G \cong K_{1,m} \times C_n$ seçildiğinde, $\alpha(K_{1,m} \times C_n) = \beta(K_{1,m} \times C_n) = \frac{n.(m+1)}{2}$ olduğundan,

$$sc(K_{1,m} \times C_n) \geq 0 \qquad (2.3.1)$$

elde edilir.

Şimdi $sc(K_{1,m} \times C_n) \leq 0$ olduğunu göstermeliyiz.

Teorem 2.3.1' de $T \cong K_{1,m}$ ve $G \cong K_{1,m} \times C_n$ seçildiğinde, $\Delta(T) = \Delta(K_{1,m}) = m$ olduğu görülür. Ayrıca $m \geq 2$ ve $m \leq n$ olduğundan, $K_{1,m} \times C_n$ grafı hamiltonian graftır. Bu durumda Teorem 2.3.2' den $\tau(K_{1,m} \times C_n) \geq 1$ ve Teorem 2.3.3' den,

$$sc(K_{1,m} \times C_n) \leq 0 \quad \text{dır.} \qquad (2.3.2)$$

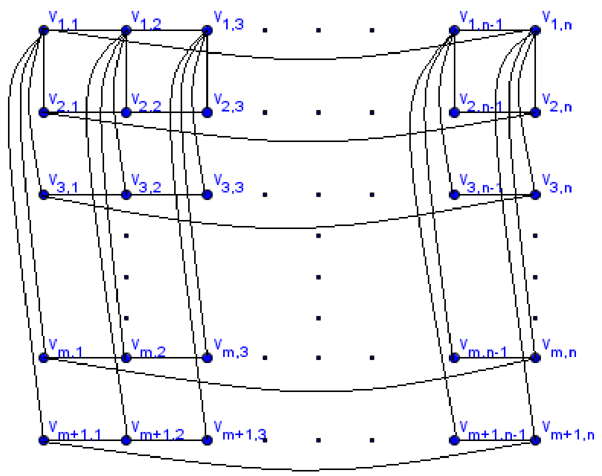
Böylece (2.3.1) ve (2.3.2)' den,

$$sc(K_{1,m} \times C_n) = 0 \qquad (2.3.3)$$

elde edilir.

Durum 2: $m<n$ ve n tek olsun.

$K_{1,m} \times C_n$ grafı (m+1) tane C_n kopyası ve n tane $K_{1,m}$ kopyası içerir (Şekil 2.3.1).



Şekil 2.3.1 $K_{1,m} \times C_n$ grafı

Burada, $A=\{v_{1,1}, v_{1,2}, v_{1,3}, \ldots, v_{1,n}\}$ ve $B=V(K_{1,m} \times C_n)\backslash A$ olsun. $S \subset V(K_{1,m} \times C_n)$ alt kümesi $S_0 \subseteq A$ ve $S_1 \subseteq B$ olmak üzere $S=S_0 \cup S_1$ şeklinde olsun. S kümesinin bir kesim kümesi olması için,

- $|S_0| \geq 1$ ve $|S_1| \geq 2$ olmalı

  veya

- $S_0=A$ ve $|S_1| \geq 0$ olmalıdır.

Alt Durum 1: $|S_0| \geq 1$ ve $|S_1| \geq 2$ olsun. $\delta(K_{1,m} \times C_n)=\kappa(K_{1,m} \times C_n)=3$ ve B kümesindeki $\forall v \in V(K_{1,m} \times C_n)$ için deg(v)=3 tür. Bu durumda A kümesinden v' ye bitişik olan tepe ile B kümesinden v' ye bitişik olan 2 tepe atılırsa, geriye kesinlikle birisi izole tepe (C_0) diğeri birleştirilmiş (C_1) olan iki bileşen kalır. Bu durumda $|S|= 3$ ve $\omega((K_{1,m} \times C_n)-S) = 2$ dir.

Şimdi C_1 bileşenini düşünelim. $\forall v \in C_1$ için $deg(v) \geq 2$ dir. $deg(v_1)=2$ koşulunu sağlayan bir $v_1 \in C_1$ tepesini alalım. Bu tepeye bitişik olan 2 tepe atılırsa, geriye 2 izole tepe ve birleştirilmiş bir C_2 bileşeni kalır. Bu durumda $|S|=5$ ve $\omega((K_{1,m} \times C_n)-S) = 3$ tür.

Şimdi C_2 bileşenini düşünelim. $\forall v \in C_2$ için $deg(v) \geq 2$ dir. $deg(v_2)=2$ koşulunu sağlayan bir $v_2 \in C_2$ tepesini alalım. Bu tepeye bitişik olan 2 tepe atılırsa, geriye 3 izole tepe ve birleştirilmiş bir C_3 bileşeni kalır. Bu durumda $|S|=7$ ve $\omega((K_{1,m} \times C_n)-S) = 4$ tür.

Benzer şekilde her adımda $\forall C_n (n \geq 4)$ bileşeninden tepe atmaya devam edildiğinde, $\forall S \subset V(K_{1,m} \times C_n)$ için $|S|= r$ iken $\omega((K_{1,m} \times C_n)-S) \leq r-1$ olduğu gözlemlenmiştir.

Böylece,

$$\begin{aligned} sc(K_{1,m} \times C_n) &= \max\{\omega((K_{1,m} \times C_n)-S) - |S|\} \\ &\leq \max\{ r - 1 - r \} = -1 \qquad \text{dir.} \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Alt Durum 2: $S_0=A$ ve $|S_1| \geq 0$ olsun. Bu durumda, $|S| \geq n+k$ ve $\omega((K_{1,m} \times C_n)-S) \leq m+k$ $(k \in Z^+)$ olup,

$$\begin{aligned} sc(K_{1,m} \times C_n) &= \max\{ \omega((K_{1,m} \times C_n)-S) - |S|\} \\ &\leq \max\{ m+k - (n+k) \} = m-n \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Öte yandan,

$$m<n \text{ ise } m-n<0 \text{ ve } m-n \leq -1 \qquad \text{dir.} \qquad (2.3.6)$$

Burada, (2.3.3), (2.3.4) ve (2.3.5)’ den,

$$sc(K_{1,m} \times C_n) \leq -1 \qquad (2.3.7)$$

elde edilir.

Ayrıca, Teorem 1.4.4’ de $G \cong K_{1,m} \times C_n$ seçildiğinde,

$$sc(K_{1,m} \times C_n) \geq 2- \kappa(K_{1,m} \times C_n) = 2 – 3 = -1 \qquad (2.3.8)$$

elde edilir. Böylece (2.3.6) ve (2.3.7)’ den,

$$sc(K_{1,m} \times C_n) = -1 \qquad (2.3.9)$$

elde edilir.

Durum 3: $m \geq n$ olsun.

$K_{1,m} \times C_n$ grafı (m+1) tane C_n kopyası ve n tane $K_{1,m}$ kopyası içerir (Şekil 2.3.1).

Burada, $A=\{v_{1,1}, v_{1,2}, v_{1,3}, \ldots, v_{1,n}\}$ ve $B=V(K_{1,m} \times C_n)\backslash A$ olsun. $S \subset V(K_{1,m} \times C_n)$ alt kümesi $S_0 \subseteq A$ ve $S_1 \subseteq B$ olmak üzere $S=S_0 \cup S_1$ şeklinde olsun. S kümesinin bir kesim kümesi olması için,

- $|S_0| \geq 1$ ve $|S_1| \geq 2$ olmalı
  veya
- $S_0=A$ ve $|S_1| \geq 0$ olmalıdır.

Alt Durum 1: $|S_0| \geq 1$ ve $|S_1| \geq 2$ olsun. $\delta(K_{1,m} \times C_n)=\kappa(K_{1,m} \times C_n)=3$ ve B kümesindeki $\forall v \in V(K_{1,m} \times C_n)$ için deg(v)=3 tür. Bu durumda A kümesinden v ye bitişik olan tepe ile B kümesinden v’ ye bitişik olan 2 tepe atılırsa, geriye kesinlikle birisi izole tepe (C_0) diğeri birleştirilmiş (C_1) olan iki bileşen kalır. Bu durumda $|S|= 3$ ve $\omega((K_{1,m} \times C_n)-S) = 2$ dir.

Şimdi C_1 bileşenini düşünelim. $\forall v \in C_1$ için $deg(v) \geq 2$ dir. $deg(v_1)=2$ koşulunu sağlayan bir $v_1 \in C_1$ tepesini alalım. Bu tepeye bitişik olan 2 tepe atılırsa, geriye 2 izole tepe ve birleştirilmiş bir C_2 bileşeni kalır. Bu durumda $|S|=5$ ve $\omega((K_{1,m} \times C_n)-S) = 3$ tür.

Şimdi C_2 bileşenini düşünelim. $\forall v \in C_2$ için $deg(v) \geq 2$ dir. $deg(v_2)=2$ koşulunu sağlayan bir $v_2 \in C_2$ tepesini alalım. Bu tepeye bitişik olan 2 tepe atılırsa, geriye 3 izole tepe ve birleştirilmiş bir C_3 bileşeni kalır. Bu durumda $|S|=7$ ve $\omega((K_{1,m} \times C_n)-S) = 4$ tür.

Benzer şekilde her adımda $\forall C_n (n \geq 4)$ bileşeninden tepe atmaya devam edildiğinde, $\forall S \subset V(K_{1,m} \times C_n)$ için $|S|= r$ iken $\omega((K_{1,m} \times C_n)-S) \leq r-1$ olduğundan,

$$sc(K_{1,m} \times C_n) \leq \max\{ r - 1 - r \} = -1 \quad \text{dir.} \qquad (2.3.10)$$

Alt Durum 2: $S_0=A$ ve $|S_1| \geq 0$ olsun. Bu durumda, $|S| \geq n+k$ ve $\omega((K_{1,m} \times C_n)-S) \leq m+k$ $(k \in Z^+)$ olup,

$$sc(K_{1,m} \times C_n) \leq \max\{ n+k - (m+k) \} = m - n \quad \text{dir.} \qquad (2.3.11)$$

Öte yandan,

$$m \geq n \text{ ise } m-n \geq 0 \text{ ve } m-n \geq -1 \quad \text{dir.} \qquad (2.3.12)$$

Burada, (2.3.10), (2.3.11) ve (2.3.12)' dan,

$$sc(K_{1,m} \times C_n) \leq m-n \qquad (2.3.13)$$

elde edilir.

$\exists S \subset V(K_{1,m} \times C_n)$ olmak üzere $S=A$ seçebiliriz ki, $|S|=n$ iken $\omega((K_{1,m} \times C_n)-S)=m$ dir. Bu durumda,

$$sc(K_{1,m} \times C_n) = \max\{ w((K_{1,m} \times C_n)-S) - |S|\} = m - n \quad \text{dir.} \qquad (2.3.14)$$

Böylece (2.3.13) ve (2.3.14)' den,

$$sc(K_{1,m} \times C_n) = m - n \quad \text{dir.} \qquad (2.3.15)$$

Tüm durumlar ele alındığında, (2.3.3), (2.3.9) ve (2.3.15)' den ispat tamamlanır.

2.4 $K_2 \times P_n$ ve $K_2 \times C_n$ Graflarının Saçılma Sayısı

Aşağıdaki teoremde elde edilen sonuç Teorem 1.4.8' de k=2 ve $P_{n1} \cong K_2$ ve $P_{n2} \cong P_n$ seçildiğinde de elde edilmektedir. Biz burada kanıtı daha farklı biçimde yaptık.

Teorem 2.4.1: $sc(K_2 \times P_n) = 0$ dır.

İspat: $K_2 \times P_n$ grafının en uzun yolu p=2n dir. Bu durumda Teorem 1.4.5' den,

$$sc(K_2 \times P_n) \leq 2n - p = 2n - 2n = 0 \qquad (2.4.1)$$

elde edilir.

Diğer yandan, Teorem 1.4.4' de $G \cong K_2 \text{ x } P_n$ seçildiğinde,

$$sc(K_2 \text{ x } P_n) \geq 2 - \delta(K_2 \text{ x } P_n) = 2 - 2 = 0 \qquad (2.4.2)$$

elde edilir.

Böylece (2.4.1) ve (2.4.2)' den,

$$sc(K_2 \text{ x } P_n) = 0 \qquad \text{dir.}$$

Yukarıdaki teoremden yola çıkarak aşağıdaki Teorem verilmiştir.

Teorem 2.4.2: $sc(K_2 \text{ x } C_n) = \begin{cases} 0, & n \text{ çift ise} \\ -1, & n \text{ tek ise} \end{cases}$ dir.

İspat: Teorem 1.4.7' de $G \cong K_2xC_n$ ve $H \cong K_2xP_n$ seçildiğinde, H grafı G grafının dallanmış alt grafı olduğundan,

$$sc(K_2 \text{ x } P_n) \geq sc(K_2 \text{ x } C_n)$$

elde edilir.

Öte yandan, $sc(K_2 \text{ x } P_n) = 0$ olduğundan (Teorem 2.4.1),

$$sc(K_2 \text{ x } C_n) \leq 0 \qquad \text{dır.} \qquad (2.4.3)$$

İspatın geri kalanı n' nin tek veya çift olmasına göre iki farklı durumda tamamlanacaktır.

Durum 1: n çift olsun. Bu durumda $\alpha(K_2 \text{ x } C_n) = \beta(K_2 \text{ x } C_n) = n$ dir.

Teorem 1.4.3' den,

$$sc(K_2 \text{ x } C_n) \geq 2\alpha(K_2 \text{ x } C_n) - 2n = 2n - 2n = 0 \qquad \text{dır.} \qquad (2.4.4)$$

Böylece n çift iken, (2.4.3) ve (2.4.4)' den,

$$sc(K_2 \text{ x } C_n) = 0$$

elde edilir.

Durum 2: n tek olsun. Bu durumda graftan r adet tepe atılırsa $\omega((K_2 \text{ x } C_n)\text{-}S) \leq r\text{-}1$ dir.

Buradan,

$$sc(K_2 \times C_n) = \max\{\omega((K_2 \times C_n)\text{-}S) - |S|\} \leq \max\{r - 1 - r\} = -1 \qquad (2.4.5)$$

elde edilir.

Diğer yandan, Teorem 1.4.4' den,

$$sc(K_2 \times C_n) \geq 2 - \delta(K_2 \times C_n) = 2 - 3 = -1 \qquad (2.4.6)$$

elde edilir.

Böylece (2.4.5) ve (2.4.6)' dan n tek iken,

$$sc(K_2 \times C_n) = -1$$

elde edilir.

3. SONUÇ

Bu tezde zedelenebilirlik ölçümlerinden saçılma sayısı ele alınmıştır. Saçılma sayısı ile ilgili literatürde bulunan teoremlerden bazıları verilmiştir. Herhangi bir grafın saçılma sayısının hesaplanması için bir örnek verilmiş ve buradan hareketle saçılma sayısının karmaşıklığı ele alınmıştır.

Ayrıca küçük graf yapılarının yanı sıra, büyük graf yapılarını da incelememize olanak sağlayan graf işlemlerinden, kartezyen çarpımı ele alınmıştır. İki grafın kartezyen çarpımları sonucunda oluşan yeni grafların saçılma sayısı araştırılmış ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

- $sc(K_{1,m} \times K_{1,n}) = \alpha(K_{1,m} \times K_{1,n}) - \beta(K_{1,m} \times K_{1,n}) = mn+1 - (m+n)$ dir.
- $sc(K_{1,m} \times P_n) = \begin{cases} m-1, & n \text{ tek ise} \\ m-2, & n \text{ çift ise} \end{cases}$ dir.
- $sc(K_{1,m} \times C_n) = \begin{cases} 0, & m \leq n \text{ ve } n \text{ çift ise} \\ -1, & m < n \text{ ve } n \text{ tek ise} \\ m-n, & m \geq n \text{ ise} \end{cases}$ dir.
- $sc(K_2 \times P_n) = 0$ dır.
- $sc(K_2 \times C_n) = \begin{cases} 0, & n \text{ çift ise} \\ -1, & n \text{ tek ise} \end{cases}$ dir.

Elde edilen bu sonuçlar incelendiğinde, Teorem 1.4.3' de verilen $sc(G) \geq \alpha(G) - \beta(G)$ eşitsizliğindeki "eşitlik durumunun" sağlandığı birçok graf olduğu gözlemlenmiştir. İlk olarak $K_{1,m} \times K_{1,n}$ ve $K_2 \times P_n$ graflarının saçılma sayısının $\alpha - \beta$ ya eşit olduğu görülmektedir. Ayrıca, $K_{1,m} \times P_n$ grafında n tek iken, $K_{1,m} \times C_n$ grafında m<n ve n çift iken ve $K_2 \times C_n$ grafında n çift iken yine saçılma sayısının $\alpha - \beta$ olduğu görülmektedir. Son olarak, $K_2 \times C_n$ grafında n tek iken saçılma sayısı -1 olup $\alpha - \beta = -2$ dir. Buradan yola çıkarak, G herhangi bir graf olmak üzere, $K_{1,m} \times G$ grafının saçılma sayısının $\alpha - \beta$ ya eşit olabileceği veya bu değere çok yakın bir değer olabileceği öngörülebilir. Ancak $K_{1,m} \times P_n$ grafında n çift iken ve $K_{1,m}$ x

C_n grafında $m<n$ ve n tek iken (veya $m \geq n$ iken) saçılma sayısı ile $\alpha - \beta$ arasındaki fark, $K_{1,m}$ grafının tepe sayısına bağlı olarak (m değerine göre) artmaktadır/azalmaktadır. Bir başka deyişle, m sayısı azalırken saçılma sayısı Teorem 1.4.3' deki alt sınıra yaklaşmakta (bazı durumlarda eşitliği sağlamakta) iken, m sayısı arttıkça saçılma sayısı bu sınırdan uzaklaşmaktadır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Anderson, J., 2001, *Discrete mathematics with combinatorics*. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall.

Barefoot, C.A., Entringer, R.C. and Swart, H., 1987, Vulnerability in graphs- A comparative survey. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinational Computing*, pp 13-22.

Batagelj, V. and Pisanski, T., 1982, Hamiltonian cycles in the cartesian product of a tree and a cycle. *Discrete Mathematics*, 38(2-3), pp.311-312.

Bauer, D., Hakimi, S. and Schmeichel, E., 1990, Recognizing tough graphs is NP-hard. *Discrete Applied Mathematics*, 28(3), pp.191-195.

Bondy, J. and Murty, U., 1976, Graph theory with applications. *New York: American Elsevier Pub. Co.*

Chvátal, V., 1973, Tough graphs and Hamiltonian circuits, *Discrete Math*. 5, 215–228.

Cormen, T., 2009, *Introduction to algorithms*. Cambridge, Mass.: MIT Press.

Goddard, W., 2013, A note on extremal values of the scattering number. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 17(5).

Goddard, W. and Swart, H.C., 1990, Integrity in graphs: Bounds and basics, *J. Combin. Math.Corn&. Comput.* 7, 139-151.

Goddard, W. and Swart, H.C., 1990, On the toughness of a graph, *Quaestiones Mathematicae* 13, 217-232

Harary, F., 1969, *Graph theory*. Reading, Mass.: Addison-Wesley Pub. Co.

Jung H. A., 1978, On a class of posets and the corresponding comparability graphs, *J. Combinatorial Theory Ser. B*, 24, 125-133.

Kirlangic¸ A., 2002, A measure of graph vulnerability: scattering number, *Int. J. Math.Sci*., 30, 1-8.

Kirlangic, A., 2009, The rupture degree and gear graphs, *Bull. Malays.Math.Sci*. Soc.(2) 32(1), 31-36.

Li, Y., Zhang, S. and Li, X., 2005, Rupture degree of graphs. *International Journal of Computer Mathematics*, 82(7), pp.793-803.

KAYNAKLAR DİZİNİ (DEVAM)

Nabiyev, V., 2003, *Yapay zeka*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Whitney, H., 1932, Congruent graphs and the connectivity of graphs, *Amer. J. Math.* 54, 150-168.

Zhang, S. and Wang, Z., 2001, Scattering number in graphs, *Networks*, 37, 102-106.

Zhang, S. and Peng, S., (2004). Relationships between scattering number and other vulnerability parameters. *International Journal of Computer Mathematics*, 81(3), pp.291-298.

Zhang, S., Li, X. and Han, X., 2002, Computing the scattering number of graphs, *Int. J. Comput.Math.*, 79, 179-187.

ÖZGEÇMİŞ

03.07.1990 tarihinde Ankara-Yenimahalle‘ de doğdu. 2007 yılında Buca Fatma Saygın Anadolu Lisesinden mezun oldu. 2008 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü İkinci Öğretim programını kazandı. 2008-2009 döneminde İngilizce hazırlık sınıfını okudu. Lisans öğrenimi boyunca Kredi ve Yurtlar Kurumundan karşılıksız burs aldı. Yine lisans öğrenimi boyunca toplamda 5 dönem %10 luk başarı dilimine girdi. 2013 yılında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Bilgisayar Bilimleri Bilim Dalından mezun oldu. 2013-2014 dönemi Güz Döneminde Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Bilgisayar Bilimleri Bilim Dalında Yüksek Lisans eğitimine başladı. Yüksek Lisans eğitimi boyunca Ege Üniversitesi Mezunlar Derneği Aliye Üster Vakfı bursu aldı. 2014-2015 döneminde Çiğli Zirve Dershanesinde Matematik Öğretmeni ve Ortaokul Grubu Matematik Zümre Başkanı olarak çalıştı.