

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ BİLİŞİM ENSTİTÜSÜ

**BÜTÜNLEŞTİRİLMİŞ KÜÇÜK ÖLÇEKLİ
YÜKSEK BOYUTLU MODEL GÖSTERİLİMİ
VE ÇOK DEĞİŞKENLİ İŞLEV YAKLAŞTIRIMINDA KULLANIMI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Evrin KORKMAZ

Anabilim Dalı : Bilişim

Programı : Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik

Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Metin DEMİRALP

ARALIK 2008

ÖNSÖZ

Tez çalışmamda benden bilimsel ve manevi yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Metin Demiralp'e, bilgi birikimi ve deneyimlerini benimle paylaşan değerli öğretim görevlisi Burcu Tunga'ya, tezimi hazırlamam için gerekli ortamı sağlayan Bilişim Enstitüsü Müdürlüğü'ne, BEBBYT araştırma grubu üyelerine, bana daima destek olan Serdar Özay'a, arkadaşlarıma ve sevgili annem Saher Al'a teşekkür ederim.

Aralık 2008

Evrin KORKMAZ

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KISALTMALAR	v
ÇİZELGELER LİSTESİ	vi
ŞEKİLLER LİSTESİ	vii
SEMBOL LİSTESİ	ix
ÖZET	x
SUMMARY	xi
1. GİRİŞ	1
1.1. Amaç	1
1.2. Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi	1
1.2.1. Örnek 1	7
1.2.2. Örnek 2	8
1.3. YBMG Açılımları	9
1.3.1. Çarpımsal YBMG	9
1.3.2. Melez YBMG	11
1.3.3. Genelleştirilmiş YBMG	11
2. KÜÇÜK ÖLÇEKLERDE YBMG	12
2.1. Tanımlar ve Ön bilgiler	12
2.2. Çok Değişkenli İşlevlerde Taylor Açılımı	12
2.3. Küçük Ölçeklerde YBMG Terimleri Belirlenmesi	14
2.3.1. Değişmez Bileşen Çözümlemesi	16
2.3.2. Orta Nokta Açılımı	17
2.3.3. Küçük Ölçeklerde Özyineli Tümlevler	18
3. UYGULAMA 1	22
3.1. Çok Değişkenli İşlevlerde Görselleştirme	22
3.2. Örnek 1	23
3.2.1. Köşe Noktası Açılımı	23
3.2.2. Orta Nokta Açılımı	27
3.3. Örnek 2	30
3.3.1. Köşe Noktası Açılımı	30
3.3.2. Orta Nokta Açılımı	33
3.4. Örnek 3	36
3.4.1. Köşe Noktası Açılımı	36
3.4.2. Orta Nokta Açılımı	39
3.5. Örnek 4	41
3.5.1. Köşe Noktası Açılımı	41
3.5.2. Orta Nokta Açılımı	44

3.5.3. Farklı β Değerleri İçin $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \sin(\beta(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3))$ İşlevi	46
3.5.3.1. $\beta = 0.05$ İçin	46
3.5.3.2. $\beta = 10$ İçin	49
4. UYGULAMA 2	51
4.1. Örnek 1	51
4.2. Örnek 2	53
5. SONUÇ	56
KAYNAKLAR	58
EKLER	60
A. MUPAD PROGRAMI	60
ÖZGEÇMİŞ	61

KISALTMALAR

YBMG	:	Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi
HDMR	:	High Dimensional Model Representation
ÇYBMG	:	Çarpımsallaştırılmış Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi
GYBMG	:	Genelleştirilmiş Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi
MUPAD	:	Multi Processing Algebra Data Tool



ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 3.1 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^{10}$ İçin Yanılgı Değerleri(K.N) . . .	24
Çizelge 3.2 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^{10}$ İçin Yanılgı Değerleri(O.N) . . .	28
Çizelge 3.3 $f(x_1, x_2, x_3) = e^{(x_1+x_2+x_3)}$ İçin Yanılgı Değerleri(K.N.)	31
Çizelge 3.4 $f(x_1, x_2, x_3) = e^{(x_1+x_2+x_3)}$ İçin Yanılgı Değerleri(O.N.)	33
Çizelge 3.5 $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{1+x_1+x_2+x_3}$ İçin Yanılgı Değerleri(K.N.) . .	36
Çizelge 3.6 $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{1+x_1+x_2+x_3}$ İçin Yanılgı Değerleri(O.N.) . .	39
Çizelge 3.7 $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1+x_2+x_3)$ İçin Yanılgı Değerleri(K.N.) . . .	42
Çizelge 3.8 $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1+x_2+x_3)$ İçin Yanılgı Değerleri(O.N.) . . .	44

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 3.1 : 2^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^{10}$ işlevi ve yaklaşımlar(K.N.)	25
Şekil 3.2 : 50^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^{10}$ işlevi ve yaklaşımlar(K.N.)	26
Şekil 3.3 : 500^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^{10}$ işlevi ve yaklaşımlar(K.N.)	27
Şekil 3.4 : 2^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^{10}$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)	28
Şekil 3.5 : 50^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^{10}$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)	29
Şekil 3.6 : 500^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^{10}$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)	30
Şekil 3.7 : 2^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1+x_2+x_3}$ işlevi ve yaklaşımlar(K.N.)	32
Şekil 3.8 : 20^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1+x_2+x_3}$ işlevi ve yaklaşımlar(K.N.)	32
Şekil 3.9 : 100^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1+x_2+x_3}$ işlevi ve yaklaşımlar(K.N.)	33
Şekil 3.10 : 2^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1+x_2+x_3}$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)	34
Şekil 3.11 : 20^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1+x_2+x_3}$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)	35
Şekil 3.12 : 100^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1+x_2+x_3}$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)	35
Şekil 3.13 : 2^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{1+x_1+x_2+x_3}$ işlevi ve yaklaşımlar(K.N.)	37
Şekil 3.14 : 20^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{1+x_1+x_2+x_3}$ işlevi ve yaklaşımlar(K.N.)	38
Şekil 3.15 : 100^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{1+x_1+x_2+x_3}$ işlevi ve yaklaşımlar(K.N.)	38
Şekil 3.16 : 2^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{1+x_1+x_2+x_3}$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)	40
Şekil 3.17 : 20^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{1+x_1+x_2+x_3}$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)	40
Şekil 3.18 : 100^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{1+x_1+x_2+x_3}$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)	41
Şekil 3.19 : 2^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1 + x_2 + x_3)$ işlevi ve yaklaşımlar(K.N.)	42
Şekil 3.20 : 20^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1 + x_2 + x_3)$ işlevi ve yaklaşımlar(K.N.)	43

Şekil 3.21 : 100^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1 + x_2 + x_3)$ işlevi ve yaklaşımlar(K.N.)	43
Şekil 3.22 : 2^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1 + x_2 + x_3)$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)	45
Şekil 3.23 : 20^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1 + x_2 + x_3)$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)	45
Şekil 3.24 : 100^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1 + x_2 + x_3)$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)	46
Şekil 3.25 : 2^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(0.05(x_1 + x_2 + x_3))$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)	47
Şekil 3.26 : 20^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(0.05(x_1 + x_2 + x_3))$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)	48
Şekil 3.27 : 100^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(0.05(x_1 + x_2 + x_3))$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)	48
Şekil 3.28 : 2^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(10(x_1 + x_2 + x_3))$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)	49
Şekil 3.29 : 20^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(10(x_1 + x_2 + x_3))$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)	50
Şekil 3.30 : 200^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(10(x_1 + x_2 + x_3))$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)	50
Şekil 4.1 : 2^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = e^{(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)}$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)	52
Şekil 4.2 : 20^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = e^{(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)}$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)	52
Şekil 4.3 : 200^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = e^{(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)}$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)	53
Şekil 4.4 : 2^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \cos(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)	54
Şekil 4.5 : 20^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \cos(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)	54
Şekil 4.6 : 200^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \cos(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)	55

SEMBOL LİSTESİ

P	:	İzdüşüm Operatörü
I	:	Birim Operatör
f(x₁, ..., x_N)	:	N bağımsız değişkenli işlev
W(x₁, ..., x_N)	:	N bağımsız değişkenli ağırlık fonksiyonu
f₀	:	YBMG değişmezi
r₀	:	ÇYBMG değişmezi



BÜTÜNLEŞTİRİLMİŞ KÜÇÜK ÖLÇEKLİ YÜKSEK BOYUTLU MODEL GÖSTERİLİMİ VE ÇOK DEĞİŞKENLİ İŞLEV YAKLAŞTIRIMINDA KULLANIMI

ÖZET

Günümüzde kullanımı yaygınlaşan Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi (YBMG), çok değişkenli bir işlevi bir değişmeze, tek değişkenli, çift değişkenli , vb. terimlere parçalayarak yaklaştırım yapılmasını sağlayan bir yöntemdir. Kullanım alanı yaygınlaştıkça YBMG yöntemini iyileştirmeye yönelik çalışmalar yapılmıştır. YBMG ile çok değişkenli bir işlev ile işlem yapmaktansa daha az değişkenli fakat daha çok sayıda işlevle işlem yapılacağından ,yöntemi iyileştirmek denince akla ilk gelenler terim sayısını azaltmaya çalışmak ve mümkün olduğunca az sayıda değişkene sahip işlevlerle yaklaştırım sağlamaktır.

Bu çalışmanın amacı verilen bir çok değişkenli işleve daha iyi yaklaştırım sağlayabilmek için alınan YBMG terimlerini arttırmaktansa YBMG bölgesini çok küçük bölgelere parçalayarak olabildiğince az sayıda değişkene sahip YBMG terimlerini yaklaştırıma dahil etmektir.

Çalışmada YBMG bölgesini küçülttüğçe sadece değişmez terimin hesabının yeterli olup olmadığı sınıanmıştır. Bu sınama, işlevi ve YBMG terimleri için kullanılan ağırlık işlevini saptırım açımları sayesinde yeniden yapılandırarak, YBMG terimlerininin küçük ölçeklerde yeniden yazılması ve bunların farklı işlevler üzerinde sayısal hesaplamaları ile yapılmıştır. Sayısal irdelemeler için MUPAD simgesel programlama aracı kullanılmıştır.

COMBINED SMALL SCALE HIGH DIMENSIONAL MODEL REPRESENTATION

SUMMARY

High Dimensional Model Representation (HDMR) is a method that supplies approximation to a multivariate function with other functions, which have less variables like a constant, univariates, bivariates and so on. While usage of HDMR were becoming popular in the applications, works on optimizing HDMR were increased. Optimizing HDMR means that to use components of HDMR which have less variables and approximate the given multivariate functions.

The main purpose of this work is optimizing HDMR, not with adding new terms to the approximation, but with separating HDMR geometry into the small scale sub-geometries.

It has been searched if constant term is effectual or not for the best approximation to the multivariate function while scale of sub-geometries becoming smaller. For this search HDMR components have been determined by using perturbation expansions for the multivariate functions and weight function. Theoretical findings have been tested with different multivariate function on different sub-geometry scales using a program that has written on MUPAD symbolic programming tool.

1. GİRİŞ

1.1 Amaç

Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi çok değişkenli ve karmaşık yapılı işlevler için daha az sayıda değişkenli işlevlerle sağlanan bir yaklaştırım yöntemidir [1, 2, 4, 5, 8, 10]. Bu yaklaştırımı sağlamak için verilen çok değişkenli işlev yerine bu işlevin Hilbert uzayındaki dik bileşenleri alınarak bir böl-yönet algoritması kullanılır. Yani verilen çok değişkenli işlev daha az değişkenli işlevlere parçalanır ve bu parçalardan işleve yeterli yaklaştırımı sağlayacak biçimde az değişkenli olanlar alınır.

Bu çalışmada amaçlanan YBMG yöntemini iyileştirmek ve bunu yaparken yaklaştırıma eklenen terim sayısını en aza indirmektir, bu biçimde verilen çok değişkenli bir işlev için YBMG nin daha az teriminin hesaplanmasıdır. Yanıtı aranan soru YBMG nin tanım bölgesi çok küçük ölçeklere bölündüğünde değişmez terimin yeterli olup olmayacağıdır. Bu cevabı bulmak için öncelikle çok küçük ölçekler için YBMG terimlerinin nasıl bulunabileceği irdelenerek yöntemle ilişkin bir kuramsal taban oluşturulmuştur.

Kuramsal çıkarımlar için saptırım açılımlarından faydalanılmıştır. Matematiksel yöntem için çalışmalar sonrasında elde edilen Küçük Ölçeklerde Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi (Küçük Ölçeklerde YBMG) algoritması MUPAD ile yazılan bir betikte farklı işlevler için sınanmış ve yaklaştırımın yanılı çözümlenmesi yapılmıştır. Bazı analitik işlevler için yöntem sınanmış ve bu işlevler için yanılı değerleri uygulama bölümlerinde gösterilmiştir.

1.2 Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi

Çok değişkenli ve karmaşık yapılı işlevlerin, daha az değişkene sahip işlevler ile anlatılması yöntemi olan YBMG ilk olarak Sobol tarafından tanımlansa da

yöntemin izlerine Kolmogorov' un bir çalışmasında rastlanmıştır [11]. Daha sonra yöntem Demiralp ve araştırma topluluğu ile Rabitz ve araştırma topluluğunun katkılarıyla gelişme göstermiştir.

$f(x_1, \dots, x_N)$ şeklinde gösterilen ve x_1, \dots, x_N ile simgelenen N bağımsız değişkene bağlı bir çok değişkenli işlevin dik bileşenlere ayrıştırımını sağlamak amacıyla verilen çok değişkenli işlevin aranan dik bileşenlerinin, f_0 ile gösterilecek bir değişmez terim, $f_1(x_1), \dots, f_N(x_N)$ ile gösterilecek olan tek değişkenli fonksiyonlar, $f_{12}(x_1, x_2), \dots, \dots, f_{1N}(x_1, x_N), f_{23}(x_2, x_3), \dots, f_{2N}(x_2, x_N), \dots, f_{N-1N}(x_{N-1}, x_N)$ ile simgelenen iki değişkenli işlevler, bunların dışında gittikçe artan sayıda değişkene bağlı işlevler olduğu düşünülürse, bu işlevlerin de birbirine dik olduğu gözetilmelidir [4]. İki işlevin dikliği iç çarpımlarının sıfır olması ile tanımlanmaktadır. İki işlevin iç çarpımı ise her ikisinin de karelerinin integrale tümlemlenebilir olması koşulu altında aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$(f, g) \equiv \int_{a_1}^{b_1} dx_1 W_1(x_1) \cdots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W_N(x_N) f(x_1, \dots, x_N) g(x_1, \dots, x_N) \quad (1.1)$$

Yukarıda verilen tanımda (a_i, b_i) , $i = 1, \dots, N$ ler bağımsız değişkenlerin tanım aralıkları ve $W_i(x_i)$, $i = 1, \dots, N$ fonksiyonları ise her bir bağımsız değişkene bağlı ağırlık işlevleridir ve bu ağırlık işlevlerinin ilgili aralıkta tümlemlerinin 1 olması gerekliliği anlatılmıştır [1, 10].

$$\int_{a_i}^{b_i} dx_i W_i(x_i) = 1, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.2)$$

Verilen tanımlar ve koşullar altında $f(x_1, \dots, x_N)$ işlevinin dik bileşenlerine ayrıştırımı aşağıdaki eşitlikle verilebilir.

$$f(x_1, \dots, x_N) = f_0 + \sum_{i_1}^N f_{i_1}(x_{i_1}) + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + \cdots + f_{12\dots N}(x_1, \dots, x_N) \quad (1.3)$$

Yukarıdaki eşitlikte sağ yandaki 2^N tane bilinmeyen f_0 a değişmez terim, $f_i(x_i)$ lere tek değişkenli terimler, $f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2})$ lere iki değişkenli terimler denir ve diğer terimler de benzer biçimde adlandırılır. Çok değişkenli işlev için verilen (1.3) eşitliğindeki değişmez terimden, tek değişkenli terimlerden ya da diğerlerinden kesme uygulayarak işleve yaklaştırım sağlanabilir. Bu yönüyle bir böl ve yönet algoritması da diyebileceğimiz YBMG nin bileşenlerini belirlemek için yukarıdaki

eşitliğe ek olarak bazı kurallar verilmiştir. Bunlardan ilki Sobol tarafından birim ağırlık ve $[0, 1]$ aralığı için tanımlanan tümlev altında yok olma koşuludur [11]. YBMG nin ağırlık işlevi

$$W(x_1, \dots, x_N) \equiv \prod_{i=1}^N W_i(x_i) \quad (1.4)$$

eşitliğinde olduğu gibi değişkenlerin ağırlık işlevlerinin çarpımları şeklinde tanımlanmıştır ve bu bilginin ışığı altında tümlev altında yok olma koşulu da aşağıda ki eşitlikle anlatılabilir ve aslında bu eşitlik (1.3) eşitliğinin sağ yan işlevleri için dikliği anlatır [1, 10].

$$\int_{a_j}^{b_j} dx_j W_j(x_j) f_{i_1 \dots i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = 0, \quad x_j \in \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_N}\} \quad 1 \leq j, k \leq N \quad (1.5)$$

Yukarıdaki bilgilerin ışığı altında YBMG nin dik bileşenlerinin bulunması için izdüşüm operatörlerinden yararlanılabilir. Bu amaçla bağımsız değişkenlerinin tanım aralıkları üzerinde karesi tümlevlenebilir bir $f(x_1, \dots, x_N)$ çok değişkenli işlevi için

$$P_i f(x_1, \dots, x_N) \equiv \int_{a_i}^{b_i} dx_i W_i(x_i) f(x_1, \dots, x_N), \quad i = 1, \dots, N \quad (1.6)$$

ve

$$I f(x_1, \dots, x_N) \equiv f(x_1, \dots, x_N) \quad (1.7)$$

operatörleri tanımlanırsa

$$f(x_1, \dots, x_N) = \left(\prod_{i=1}^N (P_i + [I - P_i]) \right) f(x_1, \dots, x_N) \quad (1.8)$$

özdeşliği yazılır ve yukarıdaki operatörler çarpımı da açılabilir [2].

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^N (P_i + [I - P_i]) &= \prod_{i=1}^N P_i + \sum_{i_1=1}^N \left(\prod_{i=1}^{i_1-1} P_i \right) [I - P_{i_1}] \left(\prod_{i=i_1+1}^N P_i \right) + \\ &\sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N \left(\prod_{i=1}^{i_1-1} P_i \right) [I - P_{i_1}] \left(\prod_{i=i_1+1}^{i_2-1} P_i \right) [I - P_{i_2}] \left(\prod_{i=i_2+1}^N P_i \right) + \dots \end{aligned} \quad (1.9)$$

Bu koşullarla birlikte YBMG nin değişmez, tek değişkenli, iki değişkenli bileşenleri aşağıda verilen eşitliklerle elde edilebilir. (1.9) eşitliğinde toplamsal terimler

birbirine diktir. Bu dik toplamsal açılım YBMG bileşenlerini aşağıdaki gibi yazmaya olanaklı kılar.

Değişmez Terim

$$f_0 = \left(\prod_{i=1}^N P_i \right) f(x_1, \dots, x_N) \quad (1.10)$$

Tek Değişkenli Terimler

$$f_i(x_i) = \left(\prod_{i=1}^{i_1-1} P_i \right) [I - P_{i_1}] \left(\prod_{i=i_1+1}^N P_i \right) f(x_1, \dots, x_N) \quad (1.11)$$

İki Değişkenli Terimler

$$f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) = \left(\prod_{i=1}^{i_1-1} P_i \right) [I - P_{i_1}] \left(\prod_{i=i_1+1}^{i_2-1} P_i \right) [I - P_{i_2}] \left(\prod_{i=i_2+1}^N P_i \right) f(x_1, \dots, x_N) \quad (1.12)$$

YBMG'nin diğer dik bileşenleri de benzer biçimde bulunabilir. Bu çalışmada Küçük Ölçeklerde YBMG bileşenlerinin hesapları ve gösterilimi izdüşüm operatörlerinin açık anlatımları ile gösterilecektir, dolayısıyla YBMG bileşenlerinin açık anlatımları aşağıda verilmiştir.

Değişmez Terim

$$f_0 = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \cdots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W(x_1, \dots, x_N) f(x_1, \dots, x_N) \quad (1.13)$$

Tek Değişkenli Terimler

$$f_i(x_i) = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \cdots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} dx_{i-1} \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} dx_{i+1} \cdots \times \\ \times \int_{a_N}^{b_N} dx_N W(x_1, \dots, x_N) f(x_1, \dots, x_N) - f_0 \quad 1 \leq i \leq N \quad (1.14)$$

İki Değişkenli Terimler

$$f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \cdots \int_{a_{i_1-1}}^{b_{i_1-1}} dx_{i_1-1} \int_{a_{i_1+1}}^{b_{i_1+1}} dx_{i_1+1} \cdots \int_{a_{i_2-1}}^{b_{i_2-1}} dx_{i_2-1} \int_{a_{i_2+1}}^{b_{i_2+1}} dx_{i_2+1} \cdots \times \\ \times \int_{a_N}^{b_N} dx_N W(x_1, \dots, x_N) f(x_1, \dots, x_N) - f_{i_1} - f_{i_2} - f_0, \quad 1 \leq i_1 < i_2 \leq N \quad (1.15)$$

YBMG ne uygulanan kesme sonucunda verilen çok değişkenli işleve ne denli iyi yaklaştırım sağlandığını saptamak amacıyla bazı tanımlar verilmiştir. İntegral altında sıfırlanma koşulundan yola çıkarak YBMG terimlerinin dikliği aştığıdaki eşitlikle anlatılabilir [2,4].

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \cdots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W(x_1, \dots, x_N) \times f_{i_1 i_2 \dots i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \times f_{j_1 j_2 \dots j_l}(x_{j_1}, \dots, x_{j_l}) = 0$$

$$\{i_1, \dots, i_k\} \neq \{j_1, \dots, j_l\}, 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N$$

$$1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq N, 1 \leq k, l \leq N \quad (1.16)$$

Yukarıda sözü edilen dikliğin bir iç çarpım üzerinden tanımlanması gerekmektedir, bu birbirine dik olan YBMG terimlerinin iç çarpımının sıfır olması anlamına gelir. YBMG terimleri için iç çarpım

$$(f_{i_1 i_2 \dots i_k}, f_{j_1 j_2 \dots j_l}) \equiv \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \cdots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W(x_1, \dots, x_N) \times$$

$$\times f_{i_1 i_2 \dots i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) f_{j_1 j_2 \dots j_l}(x_{j_1}, \dots, x_{j_l})$$

$$1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N, \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq N, \quad 1 \leq k, l \leq N \quad (1.17)$$

eşitliği ile ifade edilebilir. Böylece iç çarpımdan yola çıkarak norm tanımı yapılabilir.

$$\|f\|^2 = \|f_0\|^2 + \sum_{i=1}^N \|f_i\|^2 + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N \|f_{i_1 i_2}\|^2 + \dots + \|f_{12 \dots N}\|^2 \quad (1.18)$$

(1.9) eşitliği aracılığıyla YBMG terimlerine kesme uygulayarak yaklaştırım yapıldığında elde edilen sonucun ne denli iyi olduğu ölçülebilir. Bu ölçümü yapmak için tanımlanmış[metin bey] olan "toplamsallık ölçenleri" aştığıda verilen eşitliklerle belirlenebilirler. Değişmez terimden k. terime kadar olan terimlerin alınmasıyla elde edilen yaklaştırımın niteliği ölçülmek istenirse "k. basamaktan

toplamsallık ölçeni" hesaplanmalıdır [2, 4, 5].

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &\equiv \frac{1}{\|f\|^2} \|f_0\|^2 \\
\sigma_1 &\equiv \frac{1}{\|f\|^2} \sum_{i=1}^N \|f_i\|^2 + \sigma_0 \\
&\vdots \\
\sigma_N &\equiv \frac{1}{\|f\|^2} \sum_{i=1}^N \|f_{12\dots N}\|^2 + \sigma_{N-1}
\end{aligned} \tag{1.19}$$

σ_0 ile ifade edilen "değişmezlik ölçeni" ya da "sıfıncı basamaktan toplamsallık ölçeni", YBMG açılımına değişmez terimde kesme uygulayarak çok değişkenli işlev için elde edilen yaklaşımda niteliğini ölçmeyi sağlar. Aynı biçimde tek değişkenli terimde kesme uygulanırsa σ_1 ile anlatılan "birinci basamaktan toplamsallık ölçeni" aracılığıyla yaklaşımda ne derece başarılı olduğu ölçülebilir. Genel olarak σ_k ile "k. dereceden toplamsallık ölçeni" simgelenir ve toplamsallık ölçenleri düzgün sıralı bir dizi yapısı gösterir.

$$0 \leq \sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_N = 1 \tag{1.20}$$

$f(x_1, \dots, x_N)$ çok değişkenli işlevi için YBMG yaklaşımına ilişkin daha genel bir yapı kurulabilir.

$$\begin{aligned}
s_0(x_1, \dots, x_N) &= f_0 \\
s_1(x_1, \dots, x_N) &= s_0(x_1, \dots, x_N) + \sum_{i_1=1}^N f_{i_1}(x_{i_1}) \\
&\vdots \\
s_k(x_1, \dots, x_N) &= s_{k-1}(x_1, \dots, x_N) + \sum_{\substack{i_1 \dots i_k=1 \\ i_1 < \dots < i_k}}^N f_{i_1 \dots i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \\
1 \leq k \leq N
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Böylece k. dereceden YBMG yaklaşımı sıralı s dizisi ile aşağıda olduğu gibi anlatılabilir.

$$f(x_1 \dots x_N) \approx s_k(x_1 \dots x_N) \tag{1.22}$$

Böylece k. basamaktan YBMG yaklaşımını aşağıdaki bağıntıyı sağlar.

$$\|s_k\| = \sigma_k \|f\| \tag{1.23}$$

1.2.1 Örnek 1

Çok değişkenli işlevi $f(x_1, \dots, x_N) = x_1 + \dots + x_N$ olarak alalım. Bu çok değişkenli işlev için bağımsız değişkenlerin tanım aralıkları $[0, 1]$ ve ağırlık fonksiyonu ise $W(x_1, \dots, x_N) = 1$ olsun.

$$\begin{aligned} f_0 &= \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_N (x_1 + \dots + x_N) \\ &= \int_0^1 dx_1 x_1 + \dots + \int_0^1 dx_N x_N \\ &= \frac{N}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{j_1}(x_{j_1}) &= \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_{j_1-1} \int_0^1 dx_{j_1+1} \cdots \int_0^1 dx_N (x_1 + \dots + x_N) \\ &= \int_0^1 dx_1 x_1 + \dots + \int_0^1 dx_{j_1-1} x_{j_1-1} + \int_0^1 dx_{j_1+1} x_{j_1+1} + \dots + \int_0^1 dx_N x_N \\ &= -\frac{N}{2} + \frac{N-1}{2} + x_{j_1} \\ &= x_{j_1} - \frac{1}{2} \\ &1 \leq j_1 \leq N \end{aligned}$$

Verilen işlevin değişmez terimi ve tek değişkenli terimleri bulunduktan sonra toplamsallık ölçenleri hesaplanarak yaklaşımda ne denli başarılı olduğu görülebilir. Bu amaçla işlevin ve değişmez terimin norm kareleri hesaplanmalıdır.

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_N (x_1 + \dots + x_N)^2 \\ &= \frac{N}{3} + \frac{N(N-1)}{4} \end{aligned}$$

$$\|f_0\|^2 = \frac{N^2}{4}$$

Ele alınan çok değişkenli işlev için sıfırcı basamaktan toplamsallık ölçeni

$$\sigma_0 = \frac{\frac{N^2}{4}}{\frac{3N^2+N}{12}}$$

$$= \frac{3N^2}{3N^2+N}$$

(1.24)

olarak bulunur. Birinci basamaktan toplamsallık ölçeni içinse tek değişkenli terimlerin norm karesi bulunmalı ve bunların norm karelerinin toplamlarının işlevin norm karesine oranı alınmalıdır.

$$\begin{aligned}\|f_{j_1}\|^2 &= \int_0^1 \left(x_{j_1} - \frac{1}{2}\right)^2 dx_{j_1} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_0 + \frac{\frac{N}{12}}{\frac{3N^2+N}{12}} \\ &= \frac{3N^2}{3N^2+N} + \frac{N}{3N^2+N} \\ &= 1\end{aligned}$$

Birinci dereceden toplamsallık ölçeninin 1 bulunması yaklaşıtlımın kesin sonucu verdiğini anlatır. Çünkü toplamsallık ölçeni 1 e ne kadar yakınsa yaklaşıtlım o kadar başarılıdır.

1.2.2 Örnek 2

$f(x_1, \dots, x_N) = x_1 \cdots x_N$ olarak alınsın. Bu çok değişkenli işlev için bağımsız değişkenlerin tanım aralıkları $[0, 1]$ ve ağırlık işlevi $W(x_1, \dots, x_N) = 1$ olsun. Bu işlev ve verilen koşullar için YBMG açılımının değişmez terimi ve tek değikenli terimleri aşığıdaki gibi hesaplanır.

$$f_0 = \prod_{j=1}^N \int dx_j x_j = \left(\frac{1}{2}\right)^N$$

$$f_{j_1}(x_{j_1}) = \frac{1}{2^{N-1}} \left(x_{j_1} - \frac{1}{2}\right)$$

Bu durumda sıfırncı basamaktan toplamsallık ölçeni

$$\sigma_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^N$$

olarak bulunur. Bu durumda $N \rightarrow \infty$ iken $\sigma_0 \rightarrow 0$ olur ve bu değışmez terimle yaklaşıtlım başarılı değildir. Birinci basamaktan toplamsallık ölçenine bakılacak olursa

$$\sigma_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^N \left[1 + \frac{N}{3}\right]$$

şeklinde bulunur ve yine $N \rightarrow \infty$ iken $\sigma_0 \rightarrow 0$ olur.YBMG açılımının yeterli olmadığı durumlar YBMG açılımında iyileştirmek amaçlı yeni çalışmalara neden olmuştur ve YBMG açılımları türleşmiştir.Bunlardan bazıları Çarpımsal YBMG, Genelleştirilmiş YBMG, Melez YBMG ve son olarak Küçük Ölçeklerde YBMG dir.

1.3 YBMG Açılımları

1.3.1 Çarpımsal YBMG

Son örnekte gösterildiği gibi YBMG yaklaşımının niteliği işlevin yapısına bağlı olmaktadır.Örneğin verilen işlev bir değişmez ise s_0 değeri gerçek işlev değerine eşit olacaktır. Eğer verilen işlev bir değişmez ve tek değişkenlilerin toplamı yapısında ise bu kez gerçek işlev s_1 ile eşleşecektir.

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^m \quad 0 \leq m < \infty \quad (1.25)$$

işlevi ele alınırsa, $m = 0$ için s_0 gerçek fonksiyonla eşleşir. $m = k$ için ise s_k nin gerçek işlevle eşleşmesi gerekir. Ancak $m \geq N$ olduğunda ancak ve ancak YBMG açılımının tamamı gerçek işlevle eşleşebilir.Bu durumda sadece değişmezle, tek değişkenlilerle ya da iki değişkenlilerle yaklaşımdan iyi bir sonuç beklenmemelidir. Bu yetersizliğin üstesinden gelmek amacıyla Çarpımsal YBMG (ÇYBMG) geliştirilmiştir [3, 14].

$$f(x_1, \dots, x_N) = \prod_{j=1}^N u_j(x_j) \quad (1.26)$$

ele alınsın.

$$\bar{u}_i \equiv \int_{a_i}^{b_i} dx_i u_i(x_i) \quad 1 \leq i \leq N \quad (1.27)$$

tanımı altında YBMG terimleri bulunabilir.

Değişmez Terim

$$f_0 = \prod_{j=1}^N \bar{u}_j \quad (1.28)$$

Tek Değişkenli Terimler

$$f_i(x_i) = f_0 \left(\frac{u_i(x_i)}{\bar{u}_i} - 1 \right), \quad 1 \leq i \leq N \quad (1.29)$$

İki Değişkenli Terimler

$$f_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) = \left(\frac{u_{i_1}(x_{i_1})}{\bar{u}_{i_1}} - 1 \right) \left(\frac{u_{i_2}(x_{i_2})}{\bar{u}_{i_2}} - 1 \right), \quad 1 \leq i_1 < i_2 \leq N \quad (1.30)$$

Diğer terimlerde benzer biçimde bulunabilir. Bu eşitlikler sayesinde yazılan

$$f_{i_1 \dots i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = \frac{1}{f_0^{k-1}} f_{i_1}(x_{i_1}) \dots f_{i_k}(x_{i_k}) \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N \quad (1.31)$$

eşitliği YBMG bileşenleri için değişmez ve tek değişkenlileri içeren çarpımsal bir formun olduğunu gösterir.

$$f(x_1, \dots, x_N) = f_0 \prod_{i=1}^N \left(1 + \frac{f_i(x_i)}{f_0} \right) \quad (1.32)$$

YBMG bileşenleri için elde edilen bu yapı ise YBMG terimlerine kesme uygulanamayacağını fakat açılımın toplamların çarpımlarla yer değiştireceği bir forma dönüştürülebileceğini anlatır. Aşağıda çok değişkenli bir işleve ilişkin çarpımsal açılım verilmiştir.

$$f(x_1, \dots, x_N) = f_0 \prod_{i=1}^N \left(1 + \left[\frac{u_i(x_i)}{\bar{u}_i} - 1 \right] \right) = f_0 \frac{\prod_{i=1}^N u_i(x_i)}{\prod_{i=1}^N \bar{u}_i} = \prod_{i=1}^N u_i(x_i) \quad (1.33)$$

Dolayısıyla r işlevleri YBMG terimlerinden elde edilebilecek biçimde çarpımsal YBMG açılımı aşağıdaki gibi gösterilebilir. Burada önemli bir nokta k değişkenli r bileşeni en fazla k değişkenli f bileşeni içerebilir. Bu demektir ki tek bağımsız değişkenlilerin çarpımları şeklinde yazılan bir çok değişkenli işlev, r_0 ve yukarıdaki ifadenin ilk N çarpanı ile bulunabilir.

$$f(x_1, \dots, x_N) = r_0 \left[\prod_{i_1=1}^N (1 + r_{i_1}(x_{i_1})) \right] \left[\prod_{\substack{i_1, i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^N (1 + r_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2})) \right] \times \dots \\ \times (1 + r_{123 \dots N}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)) \quad (1.34)$$

1.33 eşitliğine Çarpımsal Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi denmektedir. Bu eşitliğe k değişkenli çarpanlardan itibaren kesme uygulanırsa elde edilen yaklaşıma k. dereceden Çarpımsal YBMG yaklaşımı denmektedir.

1.3.2 Melez YBMG

Klasik YBMG açılımı ve çarpımsal YBMG açılımları sadece toplamsal yapıya sahip ya da sadece çarpımsal yapıya sahip fonksiyonlar için uygun yaklaştırım sağlasa da, uygulamalarda her iki yapıyada sahip işlevler kullanılmaktadır. Dolayısıyla bu tür melez yapıya sahip olan fonksiyonlar için Melez YBMG (MYBMG) açılımı geliştirilmiştir [12]. α herhangi bir karmaşık değer alabilen bir bileşim parametresi olmak üzere $f(x_1, \dots, x_N)$ çok değişkenli işlevi

$$f(x_1, \dots, x_N) \equiv \alpha f(x_1, \dots, x_N) + (1 - \alpha) f(x_1, \dots, x_N) \quad (1.35)$$

şeklinde yazılabilir. Fakat bu açılımda α için uygulamada sıklıkla kullanılan $[0, 1]$ aralığında reel sayı varsayılmaktadır. 1.34 eşitliğinin sağ tarafında iki kez görülen $f(x_1, \dots, x_N)$ işlevin ilki yerine toplamsal YBMG yaklaştırımı, ikincisi yerinde Çarpımsal YBMG yaklaştırımı yazılabilir. Böylece $f(x_1, \dots, x_N)$ çok değişkenli işlevi için melez bir yaklaştırım yapılabilir.

$$f(x_1, \dots, x_N) \approx h_{jk}, \quad 0 \leq j, k \leq N \quad (1.36)$$

Bu yaklaşımda h_{jk} değerlerine $f(x_1, \dots, x_N)$ için (j, k) . dereceden Melez YBMG yaklaştırımı denir

$$h_{jk} \equiv \alpha s_j(x_1, \dots, x_N) + (1 - \alpha) p_k(x_1, \dots, x_N), \quad 0 \leq j, k \leq N \quad (1.37)$$

1.3.3 Genelleştirilmiş YBMG

YBMG açılımında, ayrıca bölüm 1.3.1 ve *blm*1.3.2de anlatılmış olan çeşitlerinde YBMG ağırlık işlevi bağımsız değişkenlerin çarpımı şeklinde alınmıştır. Oysa YBMG bölgesinin dik olmadığı durumlarda bu yaklaşım işe yaramayacaktır. Dolayısıyla YBMG geometrisinin dik olmadığı uygulamalar için farklı bir açılım gerekmiştir. Bu durumlarda YBMG bölgesi hiperküp, hiperküre gibi dikliği olan geometrilerin içine yerleştirilir. Daha sonra klasik YBMG açılımı ile ağırlık işlevi yeniden yazılır ve çok değişkenli işlev ile ağırlık işlevinin çarpımı da YBMG ile açılır. Değişmez terimi bulabilmek için tüm değişkenlere göre tümlev alınır. Benzer biçimde tek değişkenli terimler ve diğerleri de bulunur. Elbette bu terimler hesaplanırken bağımlı olduğu değişkenlerden katkı gelmez, tümlevden dışlanırlar. Böylece Genelleştirilmiş YBMG (GYBMG) açılımının bileşenleri elde edilir [6, 14]. Bu anlatılan açılımlar dışında **Parametrik YBMG**, **Evrimsel YBMG** açılımları da vardır.

2. KÜÇÜK ÖLÇEKLERDE YBMG

2.1 Tanımlar ve Önbilgiler

Küçük Ölçeklerde Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi, YBMG tanım bölgesini altkesimlere ayırarak, küçük bölgelerin boyutlarının giderek sifıra yaklaştığını düşünerek çok değişkenli bir işlev için yaklaştırım uygulamaktır. Bu tanımla Küçük Ölçeklerde YBMG nin konusu olan problemin kurgusu aşağıdaki gibidir.

$$b_i - a_i \rightarrow 0, \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.1)$$

Burada $b_i - a_i, (i = 1, \dots, N)$ değerleri YBMG bölgesinin altkesimlere ayrılması ile elde edilen küçük ölçekli alt bölgelerin uç noktalarıdır. Bu durumda sorulması gereken soru YBMG katsayılarının nasıl hesaplanacağı ve yaklaştırımın daha iyi olup olmadığıdır. Bu soruyu yanıtlamak için verilen çok değişkenli bir $f(x_1, \dots, x_N)$ işlevi için aşağıdaki değişken dönüşümü ile problemi Sobol'un kullanmış olduğu standart $[0, 1]$ aralığına taşıyabiliriz.

$$x_i = (b_i - a_i)y_i + a_i, \quad dx_i = (b_i - a_i)dy_i \\ y_i \in [0, 1], \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.2)$$

Problemi bu şekilde yapılandırdıktan sonra elbette YBMG katsayılarının hesaplanması için, $f(x_1, \dots, x_N)$ işlevini ve $W(x_1, \dots, x_N)$ ağırlık işlevini yukarıda gösterilen değişken dönüşümünün etkisi altında yeniden yapılandırmak gerekir. Bu amaçla çok değişkenli işlevler için saptırım açılımları kullanılabilir [7, 9]. Bölüm (2.2) de çok değişkenli işlevlerin küçük ölçeklerdeki YBMG açılımı için kullanılan saptırım açılımı ve özellikleri verilmiştir.

2.2 Çok Değişkenli İşlevlerde Taylor Açılımı

$f(x_1, \dots, x_N)$ çok değişkenli işlevi $P_0(x_{1_0}, \dots, x_{N_0})$ noktası dolaylarında her kereden götürevlere sahip olsun. Bu çok değişkenli işlev için Taylor açılımı aşağıdaki

gibidir.

$$\begin{aligned}
f(x_1, \dots, x_N) &= f(x_{1_0}, \dots, x_{N_0}) \\
&+ \frac{1}{1!} \left((x_1 - x_{1_0}) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_N - x_{N_0}) \frac{\partial}{\partial x_N} \right) f(x_{1_0}, \dots, x_{N_0}) \\
&+ \frac{1}{2!} \left((x_1 - x_{1_0}) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_N - x_{N_0}) \frac{\partial}{\partial x_N} \right)^2 f(x_{1_0}, \dots, x_{N_0}) \\
&\vdots \\
&+ \frac{1}{n!} \left((x_1 - x_{1_0}) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_N - x_{N_0}) \frac{\partial}{\partial x_N} \right)^n f(x_{1_0}, \dots, x_{N_0}) + \\
&\vdots \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left((x_1 - x_{1_0}) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_N - x_{N_0}) \frac{\partial}{\partial x_N} \right)^i f(x_{1_0}, \dots, x_{N_0}) \tag{2.3}
\end{aligned}$$

Bu açılımı kullanarak çok küçük bir YBMG bölgesi için yapılan değişken dönüşümü sonrasında çok değişkenli bir işlevin anlatımını yeniden yazabiliriz. Bu yapılandırma sırasında yazım kolaylığı açısından $(b_k - a_k) = u_i \quad (i = 1, \dots, N)$, YBMG bölgesi olarak düşünülen hiperkübün sıfır noktasına en yakın köşesi olan $(a_{1_0}, \dots, a_{N_0})$ noktası için $(a_{1_0}, \dots, a_{N_0}) = \mathbf{a}$ ve $(u_1, \dots, u_N) = \mathbf{u}$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
f(x_1, \dots, x_N) &= f(u_1 y_1, \dots, u_N y_N) \\
&= f(\mathbf{a}) + \frac{1}{1!} \left[u_1 y_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + \dots + u_N y_N \frac{\partial}{\partial a_N} \right] f(\mathbf{a}) \\
&+ \frac{1}{2!} \left[u_1 y_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + \dots + u_N y_N \frac{\partial}{\partial a_N} \right]^2 f(\mathbf{a}) + \\
&\vdots \\
&+ \frac{1}{n!} \left[u_1 y_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + \dots + u_N y_N \frac{\partial}{\partial a_N} \right]^n f(\mathbf{a}) + \\
&\vdots \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left[u_1 y_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + \dots + u_N y_N \frac{\partial}{\partial a_N} \right]^i f(\mathbf{a}) \tag{2.4}
\end{aligned}$$

eşitliği ile çok değişkenli işlev \mathbf{a} noktasına göre açılabilir. Bu açılım YBMG katsayılarını bulmakta kullanılan ağırlık işlevi için de kuşkusuz aynı köşe

noktasına uygulanmalıdır.

$$\begin{aligned}
W(x_1, \dots, x_N) &= W(u_1 y_1, \dots, u_N y_N) \\
&= W(\mathbf{a}) + \frac{1}{1!} \left[u_1 y_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + \dots + u_N y_N \frac{\partial}{\partial a_N} \right] W(\mathbf{a}) \\
&+ \frac{1}{2!} \left[u_1 y_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + \dots + u_N y_N \frac{\partial}{\partial a_N} \right]^2 W(\mathbf{a}) + \\
&\vdots \\
&+ \frac{1}{n!} \left[u_1 y_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + \dots + u_N y_N \frac{\partial}{\partial a_N} \right]^n W(\mathbf{a}) + \\
&\vdots \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left[u_1 y_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + \dots + u_N y_N \frac{\partial}{\partial a_N} \right]^i W(\mathbf{a}) \tag{2.5}
\end{aligned}$$

İşlevleri Taylor açılımı ile yeniden yapılandırmanın ardından YBMG terimlerinin küçük ölçeklerde nasıl hesaplanabileceğini arama süresince bu açılımlardan faydalanılabilir. Bu amaçla yine yazım kolaylığı için açılımda var olan çoklu türev toplamları

$$\left[u_1 y_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + \dots + u_N y_N \frac{\partial}{\partial a_N} \right] = \mathcal{D}_{\mathbf{a}} \tag{2.6}$$

şeklinde yazılmıştır. Küçük ölçeklerde YBMG terimlerinin hesabı için hem söz konusu olan çok değişkenli işlevin hem de ağırlık işlevinin Taylor açılımı ele alınacağından seri açılımlarına ilişkin Cauchy çarpımından da söz etmek gerekir.

İki sonsuz serinin çarpımı

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n, \quad h_n = \sum_{k=0}^n f_k g_{n-k} \tag{2.7}$$

biçiminde anlatılabilir.

2.3 Küçük Ölçeklerde YBMG Terimleri Belirlenmesi

YBMG açılımının değişmez terimi için yukarıda verilen bilgiler ışığında yazılan

$$\begin{aligned}
f_0 &= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \cdots \int_{a_N}^{b_N} dx_N W(x_1, \dots, x_N) f(x_1, \dots, x_N) \\
&= \prod_{k=1}^N (u_k) \int_0^1 dy_1 \cdots \int_0^1 dy_N W(u_1 y_1 + a_1, \dots, u_N y_N + a_N) \\
&\times f(u_1 y_1 + a_1, \dots, u_N y_N + a_N) \tag{2.8}
\end{aligned}$$

eşitliği daha da özelleştirilerek aşağıdaki yapıyı kazanır.

$$f_0(\mathbf{u}) = \left[\prod_{i=1}^N u_i \right] \int_0^1 dy_1 \cdots \int_0^1 dy_N \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \mathcal{D}_{\mathbf{a}}^j W(\mathbf{a}) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathcal{D}_{\mathbf{a}}^k f(\mathbf{a}) \quad (2.9)$$

(2.8) eşitliği ile değişmez u_i uzaklıkları çarpımına bağlı olan bir yapı kazandığı görülmektedir. Fakat her iki fonksiyon için sonsuz seri anlatımı hesaplamayı olanaksız kılmaktadır. (2.1) alt bölümünde verilen önbilgilerden Cauchy çarpımının kullanılması ile (2.8) eşitliği aşağıdaki biçimde yeniden yazılabilir.

$$f_0(\mathbf{u}) = \left[\prod_{i=1}^N u_i \right] \int_0^1 dy_1 \cdots \int_0^1 dy_N \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \mathcal{D}_{\mathbf{a}}^k W(\mathbf{a}) \mathcal{D}_{\mathbf{a}}^{j-k} f(\mathbf{a}) \quad (2.10)$$

(2.9) eşitliğindeki sonsuz seri çarpımına kesme uygulanırsa u_i lerin bir üslüler serisi olarak yazıldığı görülen YBMG açılımının değişmez terimi için yaklaşık bir sonuç bulunabilir. Bu yaklaşık sonuç, YBMG açılımının değişmez teriminden kesilmesiyle çok değişkenli işlev için bir yaklaştırım sağlamaktadır.

$$f_0^{(n)}(\mathbf{u}) = \left[\prod_{i=1}^N u_i \right] \int_0^1 dy_1 \cdots \int_0^1 dy_N \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \mathcal{D}_{\mathbf{a}}^k W(\mathbf{a}) \mathcal{D}_{\mathbf{a}}^{j-k} f(\mathbf{a}) \quad (2.11)$$

Şüphesiz ki (2.10) eşitliği ile bulunan değişmez terim ile alınacak sonuçtan daha iyi bir yaklaştırım istenebilir, bu durumda YBMG nin tek değişkenli terimlerini hesaplamak kaçınılmazdır. Değişmez terimin hesabında izlenen yol ve kullanılan bilgiler doğrultusunda YBMG nin tek değişkenli terimleri hesaplanabilir. Ancak tek değişkenli terim hesabında terimin bağlı olduğu değişkene ait integrali ve ağırlık çarpanı dışlanır.

$$f_l(u_l) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^N u_i \int_0^1 dy_1 \cdots \int_0^1 dy_{l-1} \int_0^1 dy_{l+1} \cdots \int_0^1 dy_N \\ \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \mathcal{D}_{\mathbf{a}}^k W(\mathbf{a}) \mathcal{D}_{\mathbf{a}}^{j-k} f(\mathbf{a}) \quad (2.12)$$

Yine n. terimde kesme ile elde edilecek tek değişkenli terim aşağıdaki gibidir.

$$f_l^{(n)}(u_l) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^N u_i \int_0^1 dy_1 \cdots \int_0^1 dy_{l-1} \int_0^1 dy_{l+1} \cdots \int_0^1 dy_N \\ \times \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \mathcal{D}_{\mathbf{a}}^k W(\mathbf{a}) \mathcal{D}_{\mathbf{a}}^{j-k} f(\mathbf{a}) \quad (2.13)$$

2.3.1 Değişmez Bileşen Çözümlemesi

(2.10) Eşitliğinde sağ yandaki Cauchy çarpımın terimlerinin $n = 0$ da kesilmesi sonucu elde edilen ilk çokterimli aşağıda verilmiştir.

$$f_0^{(0)}(\mathbf{u}) = u_1 \dots u_N W(\mathbf{a}) f(\mathbf{a}) \quad (2.14)$$

Böylece elde edilen bu çokterimli için yakınsamanın ne denli iyi olduğu çözümlenmek istenirse, toplamsallık ölçenini kullanmak amacıyla sıfırdaki kesmeye ait olan yukarıdaki eşitliğin her iki yanının norm karesini alarak bu sonucun verilen çok değişkenli fonksiyona oranı alınmalıdır.

$$\|f\|_0^2 = u_1 \dots u_N W(\mathbf{a}) f(\mathbf{a})^2 \quad (2.15)$$

Değişmez terim için sıfırda kesmede sıfırinci basamaktan toplamsallık ölçeni aşağıdaki eşitlikle hesaplanabilir. Genel olarak bu serilerin n . kesmesi ile hesaplanan değişmez terim için norm kare ise $\|f\|_n^2$ ile gösterilebilir.

$$\sigma_0^{(0)}(u_1, \dots, u_N) = u_1 \dots u_N W(a_1, \dots, a_N) \quad (2.16)$$

(2.15) eşitliği ile verilen sıfırinci dereceden toplamsallık ölçeni \mathbf{u}_i lere bağlı bir çok terimlidir. Eğer n . terimden kesme sonucu elde edilen değişmez terim ile yaklaştırım için değerlendirme yapmak istenirse $\sigma_0^{(n)}(\mathbf{u})$ belirlenebilir. Fakat bu çalışmada temel konulardan biri olan sadece değişmez terimin yaklaştırım için yeterli olduğu izlenimi $\sigma_0^{(0)}(\mathbf{u})$ incelenerek edinilebilir, bu amaçla ağırlık işlevini YBMG bölgesinde integralinin 1 olduğu anımsanmalıdır.

$$u_1 \dots u_N W(a_1, \dots, a_N) = 1 \quad (2.17)$$

Bu bilgi sıfırinci kesmede sıfırinci dereceden toplamsallık ölçeni üzerinde kullanılırsa

$$\sigma_0^{(0)}(u_1, \dots, u_N) = 1 \quad (2.18)$$

olduğu görülür. Toplamsallık ölçeni 1 e ne kadar yakın çıkarsa yaklaştırım o düzeyde başarılıdır, dolayısıyla Küçük Ölçeklerde YBMG yaklaştırımında ($n = 0$) da değişmez terim ile yapılan yaklaştırımın yeterli olacağı görülmektedir. Böylece YBMG bölgesi küçüldükçe yaklaştırımın iyileşmesinin yanında diğer terimleri belirlemeden de iyi bir yaklaştırım yapılabileceği anlaşılmaktadır.

2.3.2 Orta Nokta Açılımı

(2.3) te küçük ölçekler için belirlenen YBMG terimlerini bulmak amacıyla, verilen çok değişkenli işlev ve ağırlık işlevi YBMG bölgesinin sıfır noktasına en yakın köşesine göre saptırım açılımı ile yeniden yazılmış ve küçük alt bölgelerdeki belirlemeler bu açılımlara göre yapılmıştır. Oysa açılım noktasını YBMG bölgesinin orta noktasına göre almak yaklaşıtırmı iyileştirebilir. Dolayısıyla YBMG terimleri için kullanılan saptırım açılımının en yakın köşe noktasına göre değilde YBMG bölgesinin orta noktasına göre alınması istenirse yine değişken dönüşümü ile değişkenlerin tanım aralıklarını yaymak gerekir.

$$x_i = (b_i - a_i) \left(y_i - \frac{1}{2} \right) + \frac{b_i + a_i}{2}, \quad dx_i = (b_i - a_i) dy_i$$

$$y_i \in [0, 1], \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.19)$$

Buradaki değişken dönüşümü aslında (2.2) de verilenden farklı değildir ama orta nokta açılımı yapmak için YBMG bölgesinin kenar orta noktalarını toplama işlemi ile dışlayarak çok değişkenlilerde Taylor Açılımı uygulanırken belirginlik sağlanmaktadır. Çünkü $\frac{b_i + a_i}{2}$ ler YBMG bölgesinin kenar orta noktalarını göstermektedir. Böylece daha önce Küçük Ölçeklerde YBMG terimlerini hesaplamak için Taylor Açılımı ile gelen \mathcal{D} operatörü bu kez orta noktaya göre yapılandırılabilir. Orta nokta açılımında yazım kolaylığı için $\frac{b_i + a_i}{2} = \alpha_i$ denirse ve tüm uzayda bir yöney olarak $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ şeklinde gösterilirse Taylor açılımındaki çoklu türev operatörü aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\mathcal{D}_\alpha = \left[u_1 \left(y_1 - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \dots + u_N \left(y_N - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_N} \right] \quad (2.20)$$

Orta nokta açılımı için çoklu türev operatörünü \mathcal{D}_α ile gösterilirse sabit terim (2.8) eşitliğine benzer bir şekilde anlatılabilir. Bu belirlemedeki tek fark açılımın yapıldığı koordinattır.

$$f_0(\mathbf{u}) = \left[\prod_{i=1}^N u_i \right] \int_0^1 dy_1 \cdots \int_0^1 dy_N \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \mathcal{D}_\alpha^j W(\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathcal{D}_\alpha^k f(\alpha) \quad (2.21)$$

(2.20) eşitliğinde bulunan çok değişkenli işlevinin ve ağırlık işlevinin Taylor açılımında ki sonsuz seriler Cauchy çarpımı kullanılarak yeniden yazılabilir.

$$f_0(\mathbf{u}) = \left[\prod_{i=1}^N u_i \right] \int_0^1 dy_1 \cdots \int_0^1 dy_N \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \mathcal{D}_\alpha^k W(\alpha) \mathcal{D}_\alpha^{j-k} f(\alpha) \quad (2.22)$$

Bu yazımın sonrasında sonsuz seriye n. terimde kesme uygulanmasının ardından değişmez terim için yaklaşık bir belirlemenin anlatımı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$f_0^{(n)}(\mathbf{u}) = \left[\prod_{i=1}^N u_i \right] \int_0^1 dy_1 \cdots \int_0^1 dy_N \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \mathcal{D}_\alpha^k W(\alpha) \mathcal{D}_\alpha^{j-k} f(\alpha) \quad (2.23)$$

Bir çok değişkenli işleve uygulanacak YBMG yaklaşımını iyileştirilmek istenirse değişken sayısı fazla olan terimlerden alınır. Örneğin değişmez terimle yaklaşımdan daha başarılı bir sonuç elde edilmek istenirse değişmez terimin yanısıra YBMG açılımdaki tek değişkenli terimler toplamı da alınır. Bu da yetmezse iki değişkenli terimlerin toplamı alınmalıdır. Küçük ölçeklerde YBMG için ise yaklaşımda iyileştirme için bir kaç yöntem izlenir. Sadece değişmez terim kullanılarak aralık boyutlarının ölçeklerini daha da küçültmek ya da Cauchy çarpımından terim ekleyerek iyileştirme yapılabileceği gibi Küçük Ölçeklerde YBMG açılımdaki tek değişkenli terimler de yaklaşıma eklenebilir. Tek değişkenli terimler ise orta nokta açılımından sonra aşağıdaki gibi belirlenebilir. $1 \leq l \leq N$ için

$$f_l(u_l) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^N u_i \int_0^1 dy_1 \cdots \int_0^1 dy_{l-1} \int_0^1 dy_{l+1} \cdots \int_0^1 dy_N \\ \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \mathcal{D}_\alpha^k W(\alpha) \mathcal{D}_\alpha^{j-k} f(\alpha) \quad (2.24)$$

Yine n. kesme ile elde edilecek tek değişkenli terim aşağıdaki gibidir.

$$f_l^{(n)}(u_l) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^N u_i \int_0^1 dy_1 \cdots \int_0^1 dy_{l-1} \int_0^1 dy_{l+1} \cdots \int_0^1 dy_N \\ \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \mathcal{D}_\alpha^k W(\alpha) \mathcal{D}_\alpha^{j-k} f(\alpha) \quad (2.25)$$

2.3.3 Küçük Ölçeklerde Özyineli Tümler

Genel yapısı verilen Küçük Ölçeklerde YBMG nin değişmez terimi ve tek değişkenli terimi belirli bir işlev için incelenmiş ve çözümlenmiştir. Çünkü uygulamalarda genel yapıdan daha çok belirli yapılar üzerinde durulmaktadır. Ayrıca yaklaşım uygulanacak çok değişkenli işlevin yapısına göre YBMG terimlerinin bulunmasında kolaylıklar gözlenebilir. Bunu göstermek amacıyla

$$f(x_1, \dots, x_N) = (x_1 + \cdots + x_N)^m \quad (2.26)$$

işlevini ele alalım. $m = 1$ için toplamsal işlev olan bu yapının m doğal sayısı arttıkça toplamsallığı azalmaktadır. Bu işlev için YBMG geometrisinin bir hiperküp olduğunu ve bu hiperküpün sıfır noktasına en yakın köşe noktasının (a, \dots, a) ve en uzak köşe noktasının (b, \dots, b) olduğunu varsayalım. Bu geometride $(b - a)$ uzaklıklarının çok küçük olduğu düşünülürse YBMG terimlerini bulmak için öncelikle değişken dönüşümü yapılmalıdır.

$$x_i = (b - a)y_i + a \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.27)$$

Bu değişken dönüşümü ile fonksiyonun bağımsız değişken yapısı aşağıdaki gibi olur.

$$f((b - a)y_1 + a, \dots, (b - a)y_N + a) = [Na + (b - a)(y_1 + \dots + y_N)]^m \quad (2.28)$$

Örnek için ağırlık işlevi bir değişmez olarak alınsın.

$$W(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{(b - a)^N} \quad (2.29)$$

Değişken dönüşümü ve ağırlık işlevinin birim tümlevliliği ön koşulu altında YBMG nin değişmez terimi aşağıdaki gibi belirlenebilir.

$$\begin{aligned} f_0 &= \int_0^1 dy_1 \cdots \int_0^1 dy_N ((b - a)y_1 + a + \dots + (b - a)y_N + a)^m \\ &= \int_0^1 dy_1 \cdots \int_0^1 dy_N (Na + (b - a)(y_1 + \dots + y_N))^m \\ &= \int_0^1 dy_1 \cdots \int_0^1 dy_N \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (Na)^k (b - a)^{m-k} (y_1 + \dots + y_N)^{m-k} \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (Na)^k (b - a)^{m-k} I_{m-k, N} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Bu eşitlikteki $I_{m-k, N}$ anlatımı özyineli bir tümlevdir ve açık durumu aşağıdaki yapıda verilmektedir.

$$I_{m, N} \equiv \int_0^1 dy_1 \cdots \int_0^1 dy_N (y_1 + \dots + y_N)^m \quad (2.31)$$

Bu özyineli tümlevi belirlemek için bir çokterimli açılımı ya da yinelemeli bir yapı kullanılabilir. Birinci seçenekte çoklu terim açılımından sonra yeniden tümlevleri belirlemek temeldir. Bu çalışmada ikinci seçeneği kullanmak için

verilen işlevin değişken dönüşümü sonrasında edindiği yapı çokçok terimli üssü açılımı ile yeniden yazıldıktan sonra teker teker tümlevlerin alındığı düşünülürse özyineli bir yapı elde edilir. Bunun için değişken dönüşümü sonrasında elde edilen yapının çokçok terimli üssü açılımı

$$(y_1 + \cdots + y_N)^m = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (y_1 + \cdots + y_{N-1})^i y_N^{m-i} \quad (2.32)$$

eşitliği ile sağlanabilir. Sıralı olarak çokçok terimli üssü açılımı ve tümlev alma ile erişilen özyineli tümlev yapısı aşağıda gösterilmiştir.

$$I_{m,N} = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \frac{1}{m-i+1} I_{i,N-1} \quad (2.33)$$

Aynı özyineli yapı tek değişkenli terimin bulunması içinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} f_i(y_i) &= \int_0^1 dy_1 \cdots \int_0^1 dy_{i-1} \int_0^1 dy_{i+1} \cdots \int_0^1 dy_N [Na + (b-a)(y_1 + \cdots + y_N)]^m - f_0 \\ &= \int_0^1 dy_1 \cdots \int_0^1 dy_{i-1} \int_0^1 dy_{i+1} \cdots \int_0^1 dy_N \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (Na)^k (b-a)^{m-k} \\ &\quad \times (y_1 + \cdots + y_N)^{m-k} - f_0 \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (Na)^k (b-a)^{m-k} \int_0^1 dy_1 \cdots \int_0^1 dy_{i-1} \int_0^1 dy_{i+1} \cdots \int_0^1 dy_N \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{m-k} (y_1 + \cdots + y_{i-1} + y_{i+1} + \cdots + y_N)^j y_i^{m-k-j} - f_0 \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (Na)^k (b-a)^{m-k} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{m-k} \binom{m-k}{j} \frac{1}{m-k-j+1} I_{j,N-1} \\ &\quad - \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (Na)^k (b-a)^{m-k} \sum_{j=0}^{m-k} \binom{m-k}{j} \frac{1}{m-k-j+1} I_{j,N-1} \end{aligned} \quad (2.34)$$

eşitliği ile bu işlev için YBMG nin tek değişkenli terimleri bulunabilir. Verilen çok değişkenli işlev ve YBMG bölgesine yönelik ön koşullar bu örneği özelleştirmektedir. Burada YBMG bölgesinin en yakın köşe noktasının (a, \dots, a) olduğu varsayılarak YBMG terimlerinin yapısı oluşturulmuştur. $(b_i - a_i)$ uzaklıkları eşit olmasa da bu işlev için özel bir YBMG açılımı oluşturabilir. $(b_i - a_i) = u_i \quad 1 \leq i \leq N$ olmak üzere bu açılımın değişmez terimi ve tek değişkenli terimleri aşağıdaki biçimde anlatılabilir.

$$\begin{aligned}
f_0 &= \int_0^1 dy_1 \dots \int_0^1 dy_N \left(\sum_{k=1}^N a_k + \sum_{k=1}^N u_k y_k \right)^m \\
&= \int_0^1 dy_1 \dots \int_0^1 dy_N \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \left(\sum_{k=1}^N a_k \right)^j \left(\sum_{k=1}^N u_k y_k \right)^{m-j} \\
&= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \left(\sum_{k=1}^N a_k \right)^j \int_0^1 dy_1 \dots \int_0^1 dy_N \left(\sum_{k=1}^N u_k y_k \right)^{m-j} \\
&= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \left(\sum_{k=1}^N a_k \right)^j \int_0^1 dy_1 \dots \int_0^1 dy_N \sum_{i=0}^{m-j} (u_1 y_1 + \dots + u_{N-1} y_{N-1})^i (u_N y_N)^{m-j-i} \\
&= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \left(\sum_{k=1}^N a_k \right)^j \sum_{i=0}^{m-j} \frac{1}{m-i+1} I_{i,N-1} \tag{2.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_l(u_l) &= \int_0^1 dy_1 \dots \int_0^1 dy_{l-1} \int_0^1 dy_{l+1} \dots \int_0^1 dy_N \left(\sum_{k=1}^N a_k + \sum_{k=1}^N u_k y_k \right)^m \\
&= \int_0^1 dy_1 \dots \int_0^1 dy_{l-1} \int_0^1 dy_{l+1} \dots \int_0^1 dy_N \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \left(\sum_{k=1}^N a_k \right)^j \left(\sum_{k=1}^N u_k y_k \right)^{m-j} \\
&= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \left(\sum_{k=1}^N a_k \right)^j \int_0^1 dy_1 \dots \int_0^1 dy_{l-1} \int_0^1 dy_{l+1} \dots \int_0^1 dy_N \left(\sum_{k=1}^N u_k y_k \right)^{m-j} \\
&= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \left(\sum_{k=1}^N a_k \right)^j \int_0^1 dy_1 \dots \int_0^1 dy_{l-1} \int_0^1 dy_{l+1} \dots \int_0^1 dy_N \\
&\quad \sum_{i=0}^{m-j} (u_1 y_1 + \dots + u_{l-1} y_{l-1} + u_{l+1} y_{l+1} + \dots + u_N y_N)^i u_l y_l^{m-j-i} \\
&= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \left(\sum_{k=1}^N a_k \right)^j \sum_{\substack{i=0 \\ l \neq i}}^{m-j} \binom{m}{j} \frac{1}{m-j-i+1} I_{i,N-1} y_l^{m-j-i} \tag{2.36}
\end{aligned}$$

3. UYGULAMA 1

3.1 Çok Değişkenli İşlevlerde Görselleştirme

İkiden çok sayıda değişken içeren fonksiyonların görselleştirilmesi sıkıntı yaratır, çünkü 3 boyutlu grafiklerde bile aslında iki değişkenli işlevler görselleştirilebilir. Bu çalışmanın konusu olan çok değişkenli işlevlere uygulanan yaklaşımın sonucunu çizim üzerinde görebilmek için aşağıdaki yöntem izlenmiştir.

Her bir boyutta 3 düğümün olduğu 3 değişkenli bir örgü alınsın. Bağımsız değişkenler x_1, x_2, x_3 ile gösterilsin ve bunların alabileceği değerler 0, 1, 2 olsun. Bu durumda herhangi bir düğüm için ona karşılık gelen x_1, x_2, x_3 değerlerini sıralı bir üçlü olarak alan (x_1, x_2, x_3) gösterilimi (3-tuple) kullanılabilir. Bu durumda yukarıdaki örnek için söz konusu olan üçlü sayısı 27 olmaktadır ve bu üçlüler, sözgelimi, aşağıdaki çizelge üzerinden verilen biçimde sıralanabilir.

$$\begin{array}{lll} 1 \rightarrow (0,0,0) & 2 \rightarrow (0,1,0) & 3 \rightarrow (0,2,0) \\ 6 \rightarrow (1,0,0) & 5 \rightarrow (1,1,0) & 4 \rightarrow (1,2,0) \\ 7 \rightarrow (2,0,0) & 8 \rightarrow (2,1,0) & 9 \rightarrow (2,2,0) \\ 10 \rightarrow (0,0,1) & 11 \rightarrow (0,1,1) & 12 \rightarrow (0,2,1) \\ 15 \rightarrow (1,0,1) & 14 \rightarrow (1,1,1) & 13 \rightarrow (1,2,1) \\ 16 \rightarrow (2,0,1) & 17 \rightarrow (2,1,1) & 18 \rightarrow (2,2,1) \\ 21 \rightarrow (0,0,2) & 20 \rightarrow (0,1,2) & 19 \rightarrow (0,2,2) \\ 22 \rightarrow (1,0,2) & 23 \rightarrow (1,1,2) & 24 \rightarrow (1,2,2) \\ 27 \rightarrow (2,0,2) & 26 \rightarrow (2,1,2) & 25 \rightarrow (2,2,2) \end{array}$$

(3.1)

Çizelgede 1'den 27'ye dek değişen tamsayı değişkeni i ile simgelenirse bu değişkenin 1 ile 27 arasında kalan ve 1 ile 27 değerlerini de içeren tamsayı kümesindeki her bir i değeri bir başka düğüme karşılık gelecektir. Yani her

bir düğüm tek bir tamsayı ile simgelenmektedir. Bu düğümlerin herbirinde, bir $f(x_1, x_2, x_3)$ işlevinin, değeri verilmekteyse $1, \dots, 27$ küme'si içindeki her bir i değeri eşsiz biçimde bir f değerine karşılık gelecektir. Sözelimi yatay ekseninde $i = 11$ değeri düşey ekseninde $f(0, 1, 1)$ değerine karşılık gelecektir. Dolayısıyla, i , yatay ekseninde; karşılık gelen f_i değeri de düşey ekseninde koordinatı betimleyecek ve bu iki değer düzlemde bir noktaya karşılık gelecektir. Bu biçimde 27 nokta oluşturmak ve bunlardan her ardışık ikiliyi bir doğru parçası ile birleştirerek kırık çizgili bir çizim oluşturmak olanaklıdır. Eğer bu iş asıl işlev ile onu yaklaştıranlar için ayrı ayrı ama aynı düzlem üzerinde yapılırsa aranan çizim elde edilebilir. Düğüm noktası sayısı ne düzeyde çok olursa karşılaştırmanın o düzeyde iyi nitelikli olacağını söylemek olanaklıdır.

3.2 Örnek 1

3.2.1 Köşe Noktası Açılımı

Küçük Ölçeklerde YBMG açılımı ile bir çok değişkenli işleve yapılan yaklaşımın iyileştirilmesi için algoritmada açılım noktasında değişiklik yapılabileceği gibi YBMG bölgesinin alt küçük ölçekli bölgelerinin sayısını arttırılarak altkesimlerin ölçeği azaltılabilir. Algoritmanın bu yapısının işlerliğini göstermek amacıyla bağımsız değişkenlerinin tanım aralıklarında analitik olan işlevler üzerinde denemeler yapılmış, yanılgı değerleri çizelgelerde gösterilmiş ve elde edilen yaklaşımın başarısı şekillerle görselleştirilmiştir. İlk denemeler ve gözlemler için $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^{10}$ işlevini ele alalım. Bu işlevin içerdiği çarpımsal yapı nedeniyle klasik YBMG açılımına uygulanan kesme ile yaklaşımın Bölüm 1.1.2 de verilen örnekte olduğu gibi pek başarılı bir sonuç vermeyeceği kuşku götürmez, fakat Küçük Ölçeklerde YBMG ile yaklaşımın hangi alt aralık sayısı için başarılı olacağını gözlemlemek gerekir. Bu amaçla işlevin değişkenlerinin tanım aralıkları tüm değişkenler için $[0, 1]$ ve ağırlık işlevi $W(u_1, u_2, u_3) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{u_i}$, $1 \leq i \leq N$ olsun. Bu durumda değişmez terim ile yaklaşım ve değişmezlere tek değişkenlilerin eklenmesiyle uygulanan yaklaşım belirlenmeli, ayrıca elbette ki saptırım açılımlarından gelen terimlerden de ilk terim eklenirse, ikinci terimler eklenirse bu yaklaşımlara etkilerinin nasıl olacağı sayısal sonuçlar bağlamında

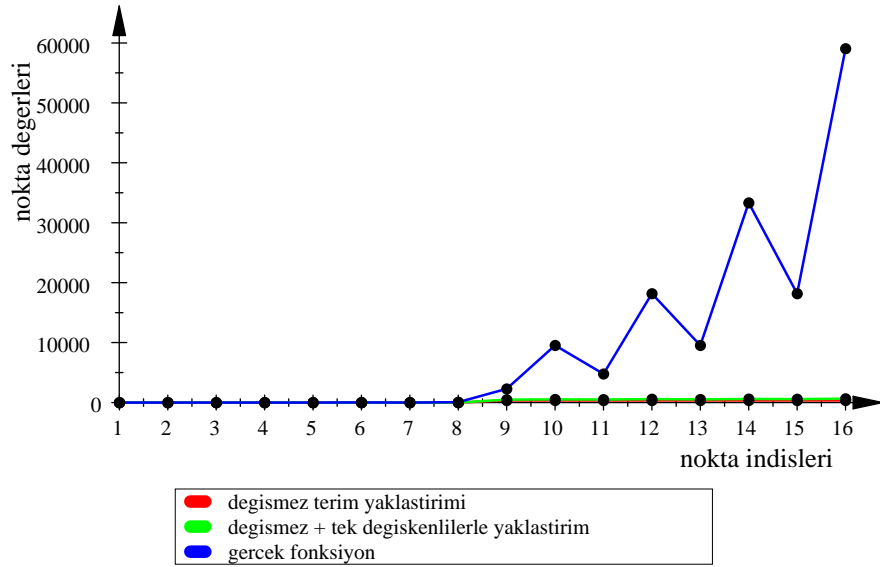
incelenmelidir. Çizelge 3.1 de, ele alınan çok değişkenli işlev için belirlenen Küçük Ölçeklerde YBMG açılımında farklı bileşenlere uygulanan kesme ile elde edilen yaklaşımların yanlgı değerleri verilmiştir. Çizelgelerde Küçük Ölçeklerde YBMG nin sadece değişmez terimi alınarak elde edilen yaklaştırım için f_0 , değişmez terim ve tek değişkenli terimlerden başlayan açılımda uygulanacak olan kesme ile yaklaştırım için ise $f_0 + \sum_{i=1}^N f_i(x_i)$ kullanılacaktır.

Çizelge 3.1: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^{10}$ İçin Yanlgı Değerleri(K.N)

	Yanlgı (f_0) ($n = 0$)	Yanlgı (f_0) ($n = 1$)	Yanlgı $\left(f_0 + \sum_{i=1}^N f_i(x_i) \right)$ ($n = 1$)
2^3 altkesim	$8,4 \cdot 10^6$	$8,0 \cdot 10^6$	$7,8 \cdot 10^6$
10^3 altkesim	$3,1 \cdot 10^5$	$6,3 \cdot 10^4$	$2,4 \cdot 10^4$
50^3 altkesim	752,5	83,03	2,55
100^3 altkesim	49,02	5,12	$4,2 \cdot 10^{-2}$
500^3 altkesim	1,781	$8,2 \cdot 10^{-3}$	$2,8 \cdot 10^{-6}$
1000^3 altkesim	$2,3 \cdot 10^{-3}$	$5,1 \cdot 10^{-4}$	$4,4 \cdot 10^{-8}$
2000^3 altkesim	$6,1 \cdot 10^{-4}$	$3,2 \cdot 10^{-5}$	$6,9 \cdot 10^{-10}$
3000^3 altkesim	$1,31 \cdot 10^{-5}$	$6,3 \cdot 10^{-6}$	$6,03 \cdot e^{-11}$

Çizelge 3.1 Küçük Ölçeklerde YBMG açılımının $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^{10}$ işlevi için YBMG bölgesi olan $[0, 1]$ aralığında kenarları yerleşmiş küpü, alt küplere parçalayarak elde edilen YBMG terimleri ile yaklaştırımın sonucunda bulunan yanlgı değerlerini vermektedir. YBMG terimleri altkesimlerde elde edilirken kullanılan saptırım açılımı sıfır noktasına en yakın köşe noktasına göre alınmıştır. Çizelge 3.1 ilk düşey sırada altkesim sayısı ile anlatılan YBMG bölgesinin sayısı arttıkça ölçeği sıfıra yaklaşan alt bölge sayısıdır. Altkesim sayısı düşey sırasının yanında yer alan ilk düşey sırada Küçük Ölçeklerde YBMG nin değişmez terimi ile yaklaştırım uygulanınca elde edilen yanlgı değerleri verilmiştir ve Cauchy çarpımında sadece ilk terim ($n = 0$) alınmıştır. İkinci sütunda ise yine değişmez terim ile yaklaştırım uygulanması sonucunda yanlgı değerleri saptanmıştır ve bu yaklaştırıma eklenen Cauchy çarpımından gelen birinci ve ikinci terimler verilmektedir ($n = 1$). Son düşey sıra ise tek değişkenli terimlerinde katılımıyla elde edilen yaklaştırımdır ve yine Cauchy çarpımının ($n = 1$) de kesilmesi ile elde edilen terimler açılım terimleri olarak

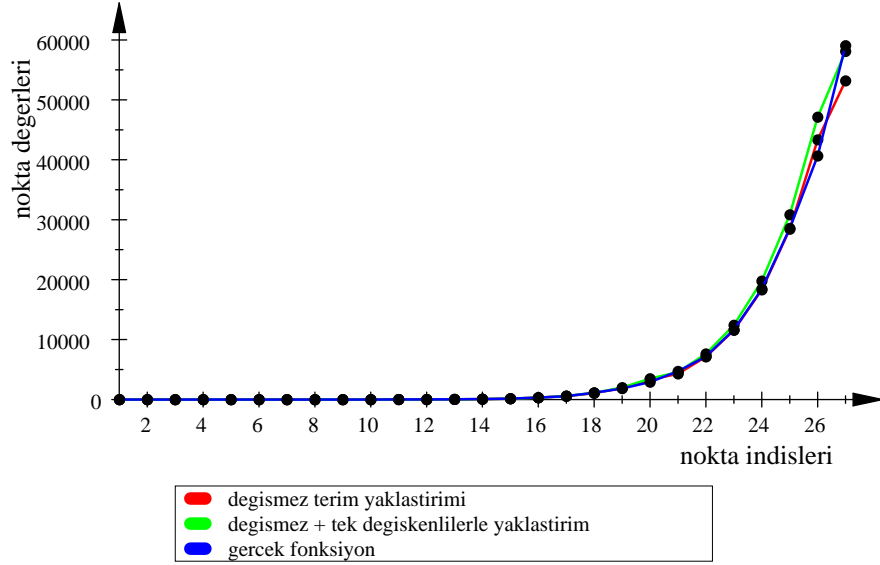
eklenmiştir. Çizelge 3.1 de verilen yanılığ değerleri üzerinde çözümleme yapılacak olursa olanaklı olan en az sayıda alt aralıkla yaklaştırım yapabilmek için YBMG açılımının tek değişkenli terimlerinin de yaklaştırıma eklenmesi ve saptırım açılımlarından gelen ikinci terimlerin de alınması gerekmektedir. YBMG açılımının tek değişkenli terimlerinin hesaplanması ve yaklaştırıma eklenmesi istenmezse, alt aralık sayısı arttırılarak sadece değişmez terimle yaklaştırım uygulanabilir. Algoritmanın bu özelliği değişmez terim çözümlemesinde de ortaya çıkmaktadır. Yapılan denemeler bu düşüncüyü desteklemiş ve alt bölge sayısı arttıkça yanılığ değerlerinin azaldığı gözlenmiştir. Küçük Ölçeklerde YBMG açılımının değişmez terimi ile yaklaştırımı iyileştirilmek istenildiğinde saptırım açılımına terim eklenebilir. Şekilde 3.1 de 16 düğüm noktası için işlevin gerçek değerleri ve yaklaşımların değerleri görselleştirilmiştir. Yaklaşımlar YBMG geometrisinin her bir kenarı 2 altkesime bölünerek, yani $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^{10}$ 3 değişkenli işlevi için tanım bölgesini $2^3 = 8$ alt bölgeye ayırmakla elde edilmiştir. Ayrıca her bir alt bölgede saptırımın açılımın birli terimleri eklenerek, yani $n = 1$ den sonraki terimler kesilerek elde edilen YBMG bileşenleri bütünleştirilerek şekilde görülen çizimler elde edilmiştir.



Şekil 3.1: 2^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^{10}$ işlevi ve yaklaşımlar(K.N.)

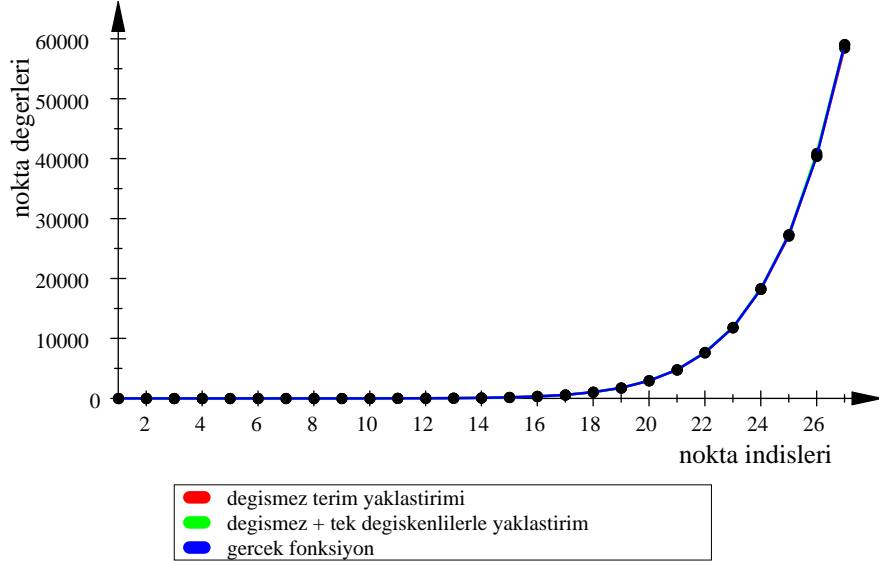
Şekil 3.1 den açıkça görüldüğü gibi YBMG bölgesini 8 parçaya ayırarak uygun yaklaştırım elde edilememektedir. Mavi ile gösterilmiş olan $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^{10}$ işlevine ait değerler ve değişmez terimle ya da değişmeze tek

değişkenli terimlerin eklenmesiyle uygulanan yaklaştırım sonucu elde edilen değerler arasındaki açık fark alt bölge sayısını arttırarak ölçek küçültmek gerektiğini anlatmaktadır. Bir sonraki yaklaştırım uygulaması için seçilen YBMG bölgesinin kenar aralığı olan $[0, 1]$ aralığı 50 altkesime ayrılırsa ve yine saptırım açılımlarının Cauchy çarpımına ($n = 1$) de kesme uygulandırsa elde edilen değişmez ile yaklaştırımın, değişmeze tek değişkenliler eklenerek elde edilen yaklaştırımın ve gerçek işlev değerleri 27 adet düğüm noktası için şekil 3.2 de görüntülenmektedir.



Şekil 3.2: 50^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^{10}$ işlevi ve yaklaşımlar(K.N.)

Her ne kadar bağımsız değişkenlerin aralıklarını 50 altkesime bölerek yapılan denemelerde görsel sonuçlar Şekil 3.1 dekinden daha iyi bir yaklaştırım sağlandığını gösterse de, işlev ve yaklaştırım arasındaki sapmalar hala gözle görülebilir niteliktedir. Alt bölge sayısını daha da arttırarak Küçük Ölçeklerde YBMG terimlerini bütünleştirip gerçek fonksiyon değerlerine yaklaştırım yapılabilir. Örneğin aralıklar 500 alt aralıklara bölünürse YBMG bölgesi 500^3 altkesime ayrılmış olur. Bu durumda yaklaştırımın başarı grafiği şekil 3.3 te verilmiştir. Şekil 3.3 te mavi renkte olan eğri gerçek işlev değerlerinin çizgi ile birleştirilmesi, kırmızı renkte olan çok değişkenli işleve Küçük Ölçeklerde YBMG nin değişmez terimi ile yaklaştırımı , yeşil renkteki değişmez ve tek değişkenlilerin toplanmasıyla elde edilen yaklaştırımıdır. Şekilde çok küçük yanlıgılarda olsa nokta değerleri neredeyse birebir örtüşmektedir. Algoritmanın genel niteliği sayesinde sadece $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^{10}$ çok değişkenli fonksiyonu için



Şekil 3.3: 500^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^{10}$ işlevi ve yaklaşımlar(K.N.)

değil, bağımsız değişkenlerin toplamının belirli bir üssü şeklinde bir yapıya sahip bütün işlevler için yaklaşımın uygun alt bölge ölçeğinde başarılı olacağı öngörülebilir..

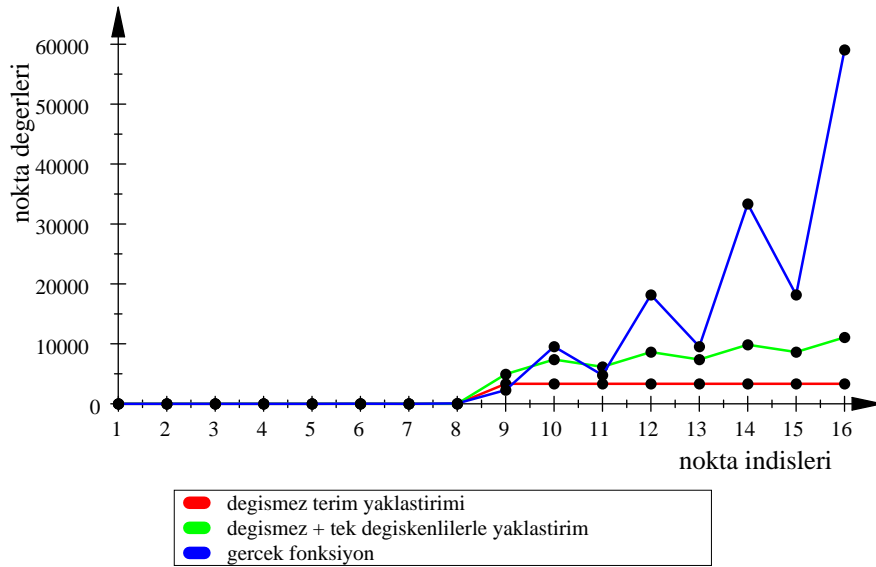
3.2.2 Orta Nokta Açılımı

Yaklaşımı iyileştirmenin diğer bir yolunda saptırım açılımının uygulandığı koordinatı değiştirmek olabileceği kuramsal olarak Bölüm 2.3.3 de açıklanmıştı .Bu kuramsal açıklamanın sonuçlarla desteklendiği yine $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^{10}$ işlevi için gösterilebilir.Çizelge 3.2 de $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^{10}$ için Küçük Ölçeklerde YBMG terimleri orta nokta açılımına göre belirlendiğinde elde edilen yaklaşımın yanılığ değerleri görülmektedir. Çizelge 3.2 de verilen yanılığ değerleri Taylor açılımının YBMG bölgesinin orta noktasına göre uygulanması ve serinin ($n = 1$) de kesilmesiyle elde edilen YBMG terimlerinin yaklaşımı ile elde edilmiştir. Bu çizelgeye ($n = 0$) da yapılan kesme ile elde edilen terimlerin yaklaşım yanılığları eklenmemiştir, çünkü orta nokta açılımında sadece değişmez terim hesabında ($n = 0$) daki ve ($n = 1$) deki değişmez terim anlatımları aynı çıkmış ve değişmez terim hesaplandığında da yaklaşım sonucuda eşit çıkmıştır. Dolayısıyla ($n = 1$) kesmesi sonucu bulunan değişmez terim ile yaklaşımdaki yanılığ değeri ile ($n = 0$) kesmesi sonucu değişmez terim

Çizelge 3.2: $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^{10}$ için Yanılgı Değerleri(O.N)

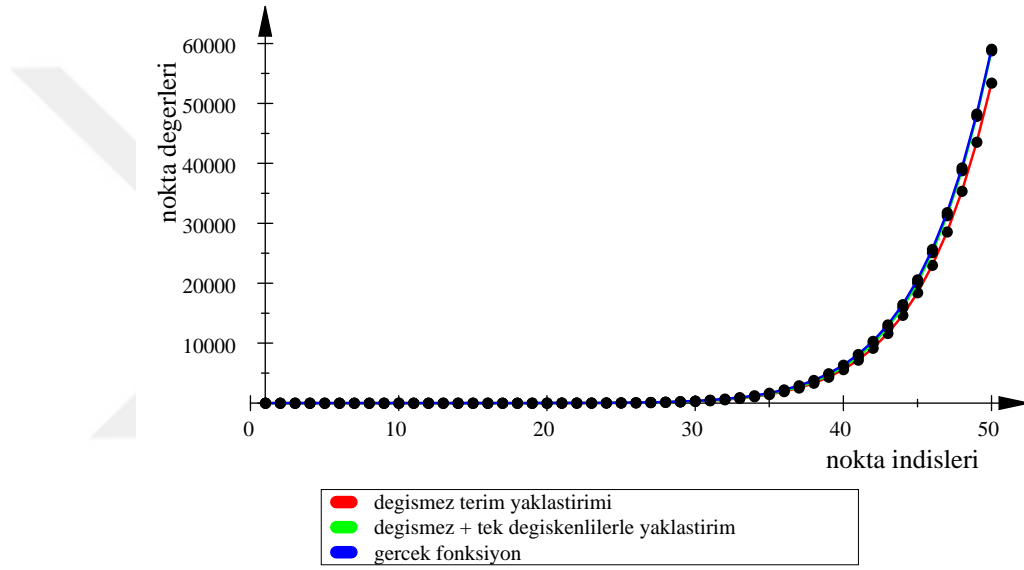
	Yanılgı (f_0) ($n = 1$)	Yanılgı $\left(f_0 + \sum_{i=1}^N f_i(x_i) \right)$ ($n = 1$)
2^3 altkesim	$5,3 \cdot 10^6$	$2,1 \cdot 10^6$
10^3 altkesim	$4,5 \cdot 10^4$	759,3
50^3 altkesim	81,21	0,053
100^3 altkesim	5,092	$8,3 \cdot 10^{-4}$
500^3 altkesim	$8,1 \cdot 10^{-3}$	$5,3 \cdot 10^{-8}$
1000^3 altkesim	$5,1 \cdot 10^{-4}$	$8,2 \cdot 10^{-10}$
2000^3 altkesim	$2,98 \cdot 10^{-5}$	$3,7 \cdot e^{-10}$
3000^3 altkesim	$6,01 \cdot 10^{-6}$	$6,7 \cdot e^{-13}$

ile yaklaşıtımdaki yanılgı değerleri aynıdır. Bu çizelgede asıl özen gösterilmesi gereken, orta nokta açılımı ile hesaplanan yaklaşıtımdan köşe noktasına göre oluşturulandan daha üstün yakınsama niteliğidir. Örneğin 100^3 alt çokyüzlü ile elde edilen yaklaşıtıma ele alalım. Bu alt bölge sayısında köşe nokta açılımı ile elde edilen değişmez terimin işleve yaklaşıtımdan yanılgısı 5,12 iken orta nokta açılımı ile bu sonuç 5,09 olmaktadır, tek değişkenlilerinde eklendiği yaklaşıtımdan iyileşmesi ise çok daha belirgindir. Bu üstünlüğü görselleştirmek amacıyla, saptırım açılımlarını YBMG bölgesinin sıfır noktasına en yakın köşe noktasına göre değilde bölgenin orta noktasına göre alındığında hesaplanan yaklaşıtımdan değerleri ve gerçek işlev değerleri, 2^3 alt bölge için şekil 3.4 te verilmiştir.



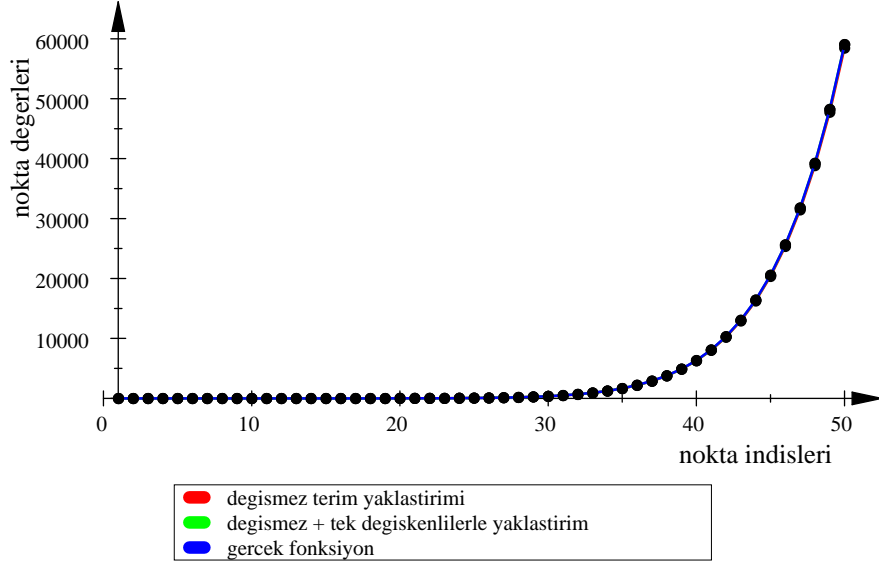
Şekil 3.4: 2^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^{10}$ işlevi ve yaklaşıtımlar(O.N.)

Şekil 3.4 ile şekil 3.1 deki kırmızı (değişmez ile yaklaştırım) ve yeşil (değişmez ve tek terimlerle yaklaştırım) çizgilere bakılacak olursa, şekil 3.4 te orta noktaya göre açılımla oluşturulan terimlerin köşe açılımı ile oluşturulanlardan işlev değerlerine (mavi çizgiler) çok daha iyi yakınsadığı görülebilmektedir. Alt bölgelerin eşit ölçekliğinde oluşturulan yamılgılardan da bu anlaşılmıştır, ancak işlev değerleri ve yaklaştırım değerleri görselleştirdiğinde orta nokta açılımının bu fonksiyon için üstünlüğü çok daha net şekilde görülmektedir. Orta nokta açılımı şekil 3.2 için kullanılan alt bölge sayısında da denenmek ve görselleştirilmek istenilirse yaklaştırımın başarı grafiği şekil 3.5 teki gibi olacaktır.



Şekil 3.5: 50^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^{10}$ işlevi ve yaklaştırımlar(O.N.)

Şekil 3.5 te değişmez ve tek değişkenlilerin toplanmasıyla elde edilen yaklaştırım gerçek fonksiyon değerleri ile örtüştüğü için yeşil olan yaklaştırım eğrisi görünmektedir. Sadece değişmezlerle elde edilen yaklaştırım değerlerini gösteren kırmızı eğrinin ise gerçek fonksiyon değerlerinden sapmalar gösterdiği açıktır, bu sapmaların giderilmesi ve sadece değişmez terimle yaklaştırım uygulanması istenilirse alt bölge sayısı arttırılarak istenilen sağlanabilir.Şekil 3.6 da gösterilen eğriler tek bir eğriymiş gibi görünmektedir. Mavi eğri seçilen noktalarda gerçek fonksiyon değerlerinin görselleştirilmesiyle oluşturulmuştur, ayrıca yeşil(değişmez ve tek değişkenliler) ve kırmızı(değişmezler) eğrilerle gösterilen yaklaştırımlarla neredeyse eşit denilebilecek bir yakınsama nedeniyle mavi eğriyle çakışmıştır. Dolayısıyla 500^3 alt bölgede bile fonksiyona yeteri kadar yaklaştırım sağlanmıştır.



Şekil 3.6: 500^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^{10}$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)

3.3 Örnek 2

3.3.1 Köşe Noktası Açılımı

Farklı işlevlerde, üretilen algoritma ile oluşturulan yaklaşımın başarısını sınamak amacıyla üstel ve çarpımsal yapıya sahip olan olan $f(x_1, x_2, x_3) = e^{(x_1+x_2+x_3)}$ işlevini ele alalım. İşlevin bağımsız değişkenlerinin tanım aralıkları için yine $[0, 1]$ aralığını göz önüne alırsak, bu işlev için yapılacak olan ölçümler YBMG bölgesi olan çokyüzlünün hem köşe noktasına göre hem de orta noktasına göre, işlevin ve ağırlık işlevinin açılımlarıyla elde edilen Küçük Ölçeklerde YBMG terimleri hesabı ile yaklaşımların sonucu olarak ortaya çıkmaktadır. Bu işleve Küçük Ölçeklerde YBMG açılımının değişmez terimi ile, değişmez ve tek değişkenli terimlerinin toplamı ile yaklaşım uygulanmıştır. Bu amaçla önce ele alınan çok değişkenli işlev ve ağırlık işlevinin açılımlarından gelen ilk terimleri (Cauchy çarpımında ($n = 0$) de kesme), daha sonra ikinci terimleri(Cauchy çarpımında ($n = 1$) de kesme) alınarak Küçük Ölçeklerde YBMG terimleri belirlenmiştir. Çizelge 3.3 te verilen yanılığ değerleri $f(x_1, x_2, x_3) = e^{(x_1+x_2+x_3)}$ ve ağırlık işlevi olarak seçilen $W(\mathbf{u}) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{u_i}$ işlevinin YBMG bölgesinin sıfır noktasına en yakın köşe noktasına göre açılımı ile belirlenen Küçük Ölçeklerde

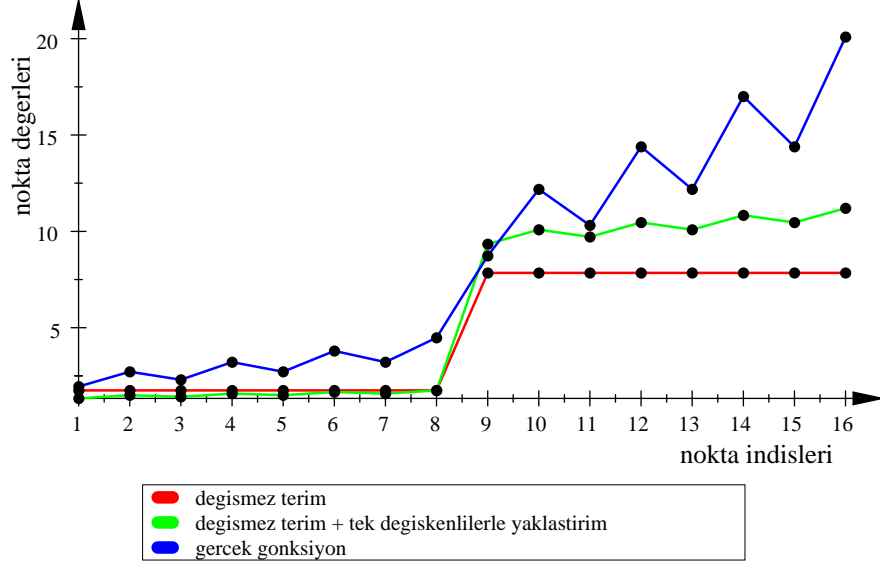
YBMG terimlerinin yaklaştırımı ile elde edilmiştir. Bu işlev için en iyi yaklaştırım sadece değişmez terimle yapılmak istenirse 1000^3 alt bölgeye, tek değişkenlilerde katılmak istenirse 500^3 alt bölgeye ayrılırsa elde edilebilir.

Çizelge 3.3: $f(x_1, x_2, x_3) = e^{(x_1+x_2+x_3)}$ İçin Yanılığ Değerleri(K.N.)

	Yanılgı (f_0) ($n = 0$)	Yanılgı (f_0) ($n = 1$)	Yanılgı ($f_0 + \sum_{i=1}^N f_i(x_i)$) ($n = 1$)
2^3 altkesim	4,49	1.295	0.744
10^3 altkesim	$1,4 \cdot 10^{-3}$	$1,7 \cdot 10^{-3}$	$1,2 \cdot 10^{-4}$
50^3 altkesim	$2,6 \cdot 10^{-5}$	$2,7 \cdot 10^{-6}$	$8,9 \cdot 10^{-9}$
100^3 altkesim	$1,6 \cdot 10^{-6}$	$1,6 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^{-10}$
500^3 altkesim	$2,6 \cdot 10^{-9}$	$2,6 \cdot 10^{-10}$	$9,19 \cdot e^{-15}$
1000^3 altkesim	$1,3 \cdot e^{-10}$	$1,6 \cdot e^{-11}$	$1,4 \cdot e^{-16}$

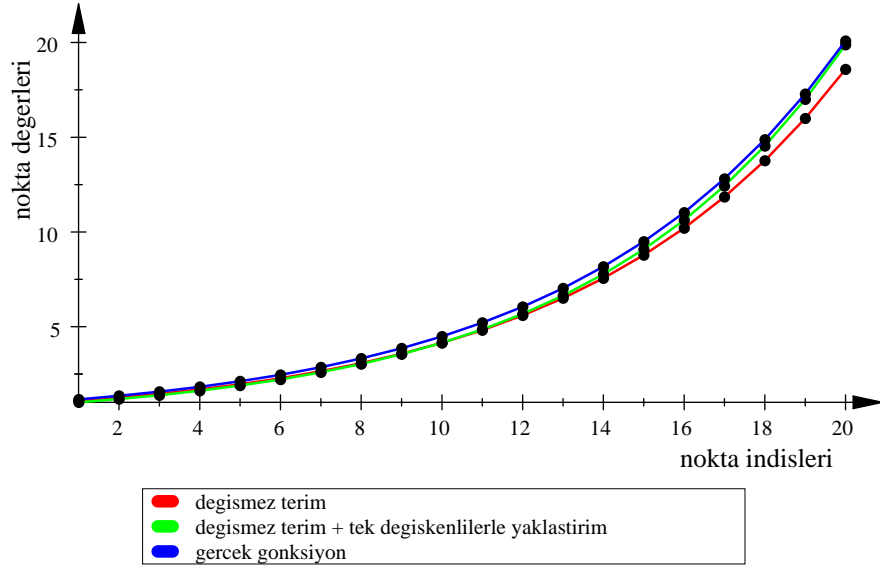
$f(x_1, x_2, x_3) = e^{(x_1+x_2+x_3)}$ işlevine uygulanan yaklaştırım için verilen yanılgı değerleri ile her ne kadar sınamalar 1000^3 altkesime kadar yapılsa da, 500^3 altkesimde de yeterince yaklaştırım sağlandığı görülmektedir. Sadece değişmez terimle yaklaştırım uygulananırsa, bu durumda altkesim sayısını arttırmak daha başarılı bir yaklaştırım sağlayacaktır. Uygulanan yaklaştırmaların gerçek işlev değerlerine ne kadar yaklaşabildiği 3 farklı altkesim sayısı ve iki farklı açılım için görselleştirilmiştir. İlk açılım izelge 3.3 te yanılgı değerleri verilen YBMG bölgesinin sıfır noktasına en yakın köşe noktasına göre açılımla elde edilmiş Küçük leklerde YBMG terimleri ile yaklaştırmalardır. 2^3 altkesimde köşe noktasına göre açılım ile elde edilen Küçük leklerde YBMG terimlerinden değişmez ile, değişmez ve tek değişkenlilerin toplamı ile sağlanan yaklaştırmalar Şekil 3.7 de gösterilmiştir. Şekil 3.7 den görüldüğü gibi, YBMG bölgesinin her bir kenarının iki altkesime ayrıldığında, ilk altkesimi gösteren kısımda bu işlev için değişmez ile yaklaştırımın, değişmez ve tek değişkenlilerle edinilen yaklaştırmadan pek bir farkı yoktur. İkinci bölgede ise tek değişkenlilerin yaklaştırıma sağladığı katkı daha net bir Şekilde görülebilmektedir.

Alt bölge sayısının 20^3 e çıkarılmasıyla yaklaştırmada edinilen başarının arttığı Şekil 3.8 de gözlemlenebilir. Bu altkesim sayısı ile birebir sayısal örtüşme olmasa da değişmez terime tek değişkenlilerin eklenmesiyle elde edinilen yaklaştırım,



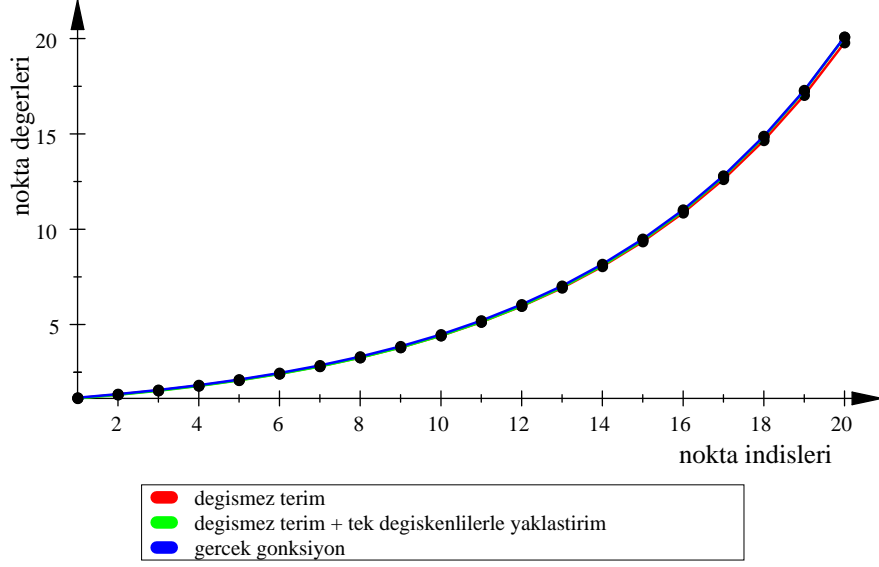
Şekil 3.7: 2^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1+x_2+x_3}$ işlevi ve yaklaşımlar(K.N.)

değişmez terimle yaklaşımdan daha üstündür. Değişmez terimle yaklaşımları daha da iyi hale getirmek için altkesim sayısı arttırılabilir.



Şekil 3.8: 20^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1+x_2+x_3}$ işlevi ve yaklaşımlar(K.N.)

Altkesim sayısı 100^3 e çıkarıldığında elde edilen yaklaşım şekil 3.9 ile görselleştirilmiştir. Burada yeşil çizgilerle birleştirilmiş noktalar değişmezlere tek değişkenlilerin eklenmesiyle elde edilne yaklaşımdır ve şekilde gerçek işlev değerleriyle neredeyse bütünüyle örtüştüğünden görünmez durumdadır. Sadece değişmez terimlerle yaklaşım uygulandığında ise çok olmasa da hala belirgin yanlıgılar olduğu gözlenmektedir.



Şekil 3.9: 100^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1+x_2+x_3}$ işlevi ve yaklaşımlar(K.N.)

3.3.2 Orta Nokta Açılımı

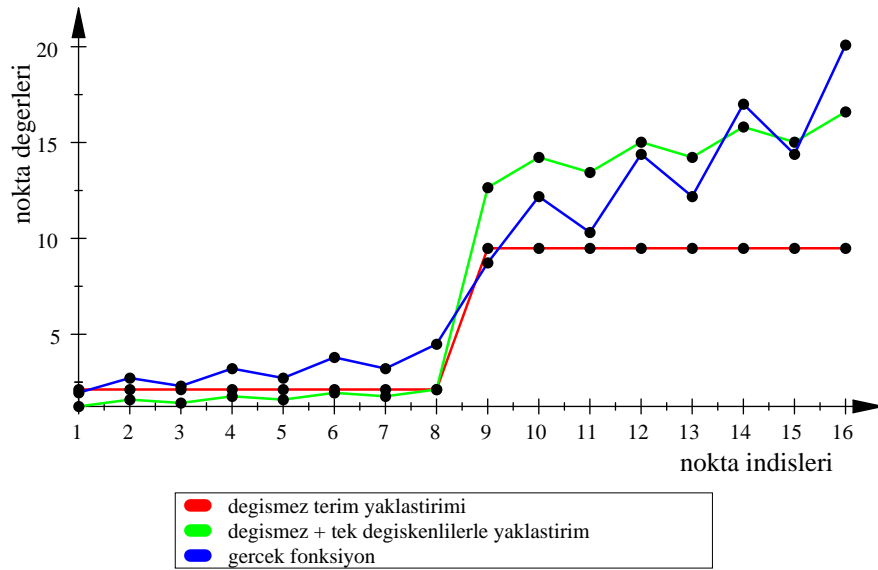
Ele alınan çok değişkenli işlevin ve ağırlık işlevinin Taylor açılımını YBMG bölgesinin orta noktasına göre yapıldığında elde edilecek YBMG terimleri ile yaklaşımın yanılığın değerleri çizelge 3.4 te verilmiştir.

Çizelge 3.4: $f(x_1, x_2, x_3) = e^{(x_1+x_2+x_3)}$ İçin Yanılığın Değerleri(O.N.)

	Yanılığın (f_0) ($n = 1$)	Yanılığın ($f_0 + \sum_{i=1}^N f_i(x_i)$) ($n = 1$)
2^3 altkesim	0.811	0.032
10^3 altkesim	$1,6 \cdot 10^{-3}$	$2,6 \cdot 10^{-4}$
50^3 altkesim	$2,6 \cdot 10^{-6}$	$1,7 \cdot 10^{-9}$
100^3 altkesim	$1,6 \cdot 10^{-7}$	$2,7 \cdot e^{-12}$
500^3 altkesim	$2,6 \cdot 10^{-10}$	$1,7 \cdot e^{-15}$
1000^3 altkesim	$1,6 \cdot e^{-11}$	$2,7 \cdot e^{-18}$

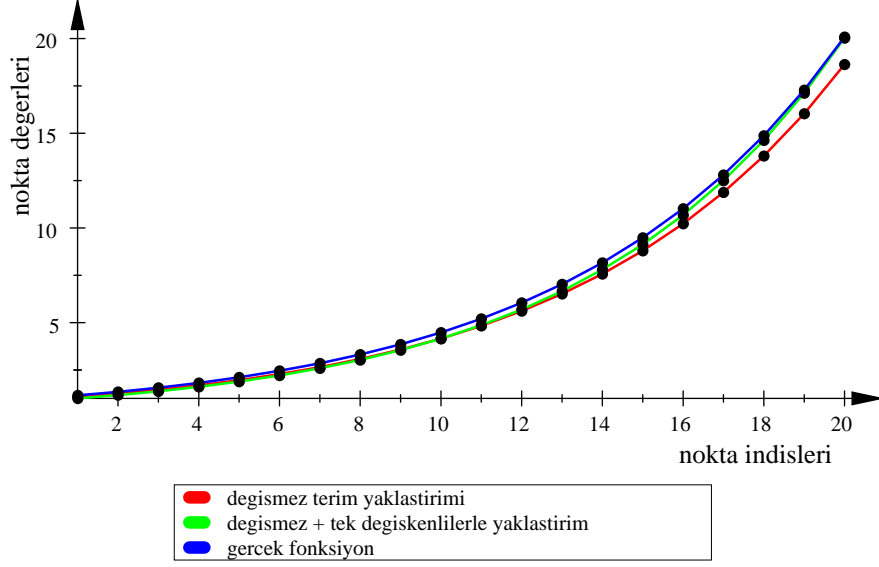
Çizelge 3.4 te verilen değerler çizelge 3.3 teki yanılığın değerleri ile karşılaştırıldığında her iki tablodaki ($n = 1$) de yapılan değişmez terim ile yaklaşımda orta nokta açılımının yaklaşıma kattığı iyileştirme açıkça görülmektedir. Çarpımsal bir yapıya sahip olan bu işleve hem temel YBMG açılımını hemde ÇYBMG açılımını ile bu denli iyi bir yaklaşımlar sağlanamayacağı

açıktır. Oysa Küçük Ölçeklerde YBMG ile yaklaşımda altkesimlerin uygun ölçekliğinde işlev için en iyi yaklaşım saptanabilir. Küçük ölçeklerde orta noktaya göre saptırım açılımları ile elde edilen yapıya YBMG uygulaması sonrasında yaklaşımların başarısı **3.10 – 3.11 – 3.12** numaralı şekillerde verilmiştir. Şekil 3.10 da YBMG bölgesi 2^3 altkesime ayrılmış ve altkesimin orta noktasına göre Taylor açılımlarının Cauchy çarpımı ($n = 1$) de kesilmiştir. Aslında bağımsız değişkenlerin herbirinin tanım aralığını 2 altkesime bölerek çok iyi bir yakınsama zaten beklenmemelidir. Çünkü altkesim sayısı betiğe 1 olarak verildiğinde uygulanan klasik YBMG açılımıdır. Dolayısıyla 1 altkesim yerine 2 altkesim olmasından ötürü sonuçlar, YBMG açılımı ile elde edilen yaklaşımdan daha iyi de olsa, YBMG açılımı ile elde edilene yakın çıkacaktır. Dolayısıyla şekil 3.10 da iyi bir yaklaşım gözlenmemektedir. Fakat orta nokta açılımı ile uygulanan bu yaklaşımın şekli ile şekil 3.7 karşılaştırıldığında, tek değişkenlilerin eklendiği yaklaşımın (yeşil çizgilerin birleştirdiği noktalar) orta nokta açılımda kısmende olsa daha başarılı olduğu gözlemlenir.



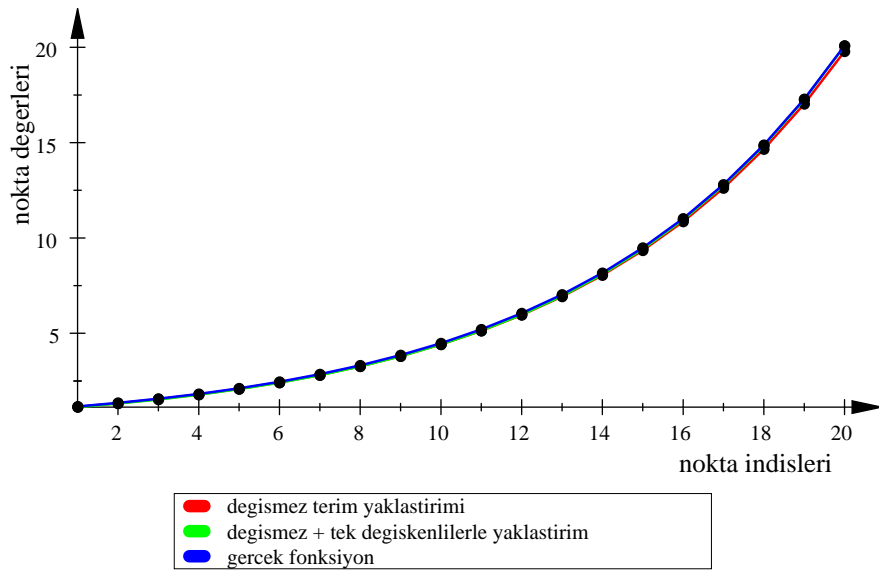
Şekil 3.10: 2^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1+x_2+x_3}$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N)

Bu açılımla elde edilmiş Küçük Ölçeklerde YBMG terimleri ile yaklaşımda altkesim sayısı arttırılarak herbir altkesimin ölçekleri daha da küçültülürse, örneğin YBMG geometrisi 20^3 altkesime ayrılırsa yaklaşımdaki başarı grafiği şekil 3.11 de gözlemlenebilir.



Şekil 3.11: 20^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1+x_2+x_3}$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)

Şekil 3.11 de gösterilen yaklaşımların yanlıgı değerleri bu altkesim altında oldukça küçük olduğundan, şekil 3.8 ile pek bir fark görünmemektedir. Yine de tek değişkenlilerin de eklendiğı yaklaşım (yeşil çizgilerin birleştirdiğı noktalar) orta nokta açılımının da etkisiyle gerçek işlev değerleriyle hemen hemen örtüşmektedir. Değişmez terimle yaklaşımı da iyileştirmek için altkesim sayısı daha da arttırılmış ve 100^3 e çıkarılmıştır. Şekil 3.12 de $f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1+x_2+x_3}$ işlevinin tanım bölgesi 100^3 altkesime ayrılarak, işleve uygulanan yaklaşımın başarısı görselleştirilmiştir.



Şekil 3.12: 100^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1+x_2+x_3}$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)

Şekil 3.9 ile karşılaştırıldığında yanılığın değerleri her iki açılım içinde çok küçük olduğundan fark çok net gözlemlenmemektedir.

3.4 Örnek 3

3.4.1 Köşe Noktası Açılımı

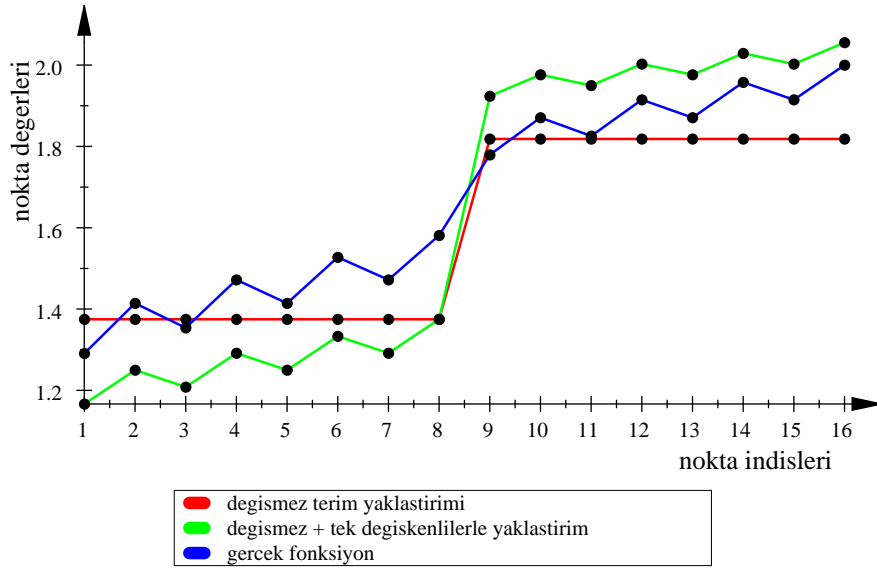
Farklı bir işlev uygulaması için $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{1 + x_1 + x_2 + x_3}$ işlevini ele alalım. Bu işlev için değişkenlerin tanım aralıkları $[0, 1]$ olsun. Ağırlık fonksiyonu ise yine $W(\mathbf{u}) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{u_i}$ seçilsin. Bu durumda hem YBMG bölgesinin sıfır noktasına en yakın köşe noktasına, hemde orta noktasına göre oluşturulan açılımlarla elde edilen YBMG terimlerinin yaklaşımlarının yanılığın değerleri çizelge 3.5 ve çizelge 3.6 da gösterilmiştir. Çizelge 3.5 te verilen yanılığın değerleri Taylor açılımını YBMG bölgesinin sıfır noktasına en yakın köşe noktasına göre açmakla elde edilen YBMG terimlerinin farklı alt bölge sayıları ile yaklaşımlarında edinilen yanılığlardır. En iyi yaklaşım için uygun kesim sayısını belirlemek, Taylor açılımının hangi noktaya göre açıldığı dışında fonksiyonun genel yapısında bağlıdır. Örneğin $f(x_1, x_2, x_3) = e^{(x_1 + x_2 + x_3)}$ çok değişkenli işlevi için saptırım açılımları ($n = 1$) de kesilerek belirlenen Küçük Ölçeklerde YBMG terimlerinin değişmez ve tek değişkenlilerin toplamı ile elde edilen yaklaşım için en uygun alt bölge sayısı 500^3 iken $\sqrt{1 + x_1 + x_2 + x_3}$ işlevi içinse 50^3 parça yeterlidir. Orta nokta açılımı kullanılırsa uygun alt aralık sayısı 20 ye kadar düşebilmektedir.

Çizelge 3.5: $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{1 + x_1 + x_2 + x_3}$ İçin Yanılığın Değerleri(K.N.)

	Yanılığın (f_0) ($n = 0$)	Yanılığın (f_0) ($n = 1$)	Yanılığın ($f_0 + \sum_{i=1}^N f_i(x_i)$) ($n = 1$)
2 altkesim	0,02	$2,16 \cdot 10^{-3}$	$5,5 \cdot 10^{-4}$
10 altkesim	$2,9 \cdot 10^{-5}$	$2,9 \cdot 10^{-6}$	$2,4 \cdot 10^{-8}$
50 altkesim	$4,6 \cdot 10^{-8}$	$4,6 \cdot 10^{-9}$	$1,3 \cdot e^{-12}$
100 altkesim	$2,8 \cdot 10^{-9}$	$2,9 \cdot 10^{-10}$	$2,13 \cdot e^{-14}$
500 altkesim	$4,6 \cdot 10^{-12}$	$4,6 \cdot e^{-13}$	$1,3 \cdot e^{-18}$

Çizelge 3.5 te farklı altkesim sayıları için yanılığın değerleri verilen yaklaşımların, gerçek işlev değerlerine olan yakınlığı yine 3 farklı altkesim sayısı için görselleştirilmiştir. Şekil 3.13 te $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{1 + x_1 + x_2 + x_3}$ çok değişkenli

işlevi için 2^3 altkesimde saptırım açılımlarının köşe noktasına göre uygulanmasıyla elde edilen yaklaşımların başarısı görselleştirilmiştir. Değişmez terim ile yaklaşım (kırmızı çizgilerle birleştirilen noktalar) her ne kadar düğüm noktalarında işlev değerlerine daha yakın görünse de tek değişkenlilerin katılımıyla elde edilen yaklaşım (yeşil çizgilerle birleştirilen noktalar) işlevin gerçek değerlerinin birleştirilmiş yapısına daha yakın bir oluşum sergilemektedir.

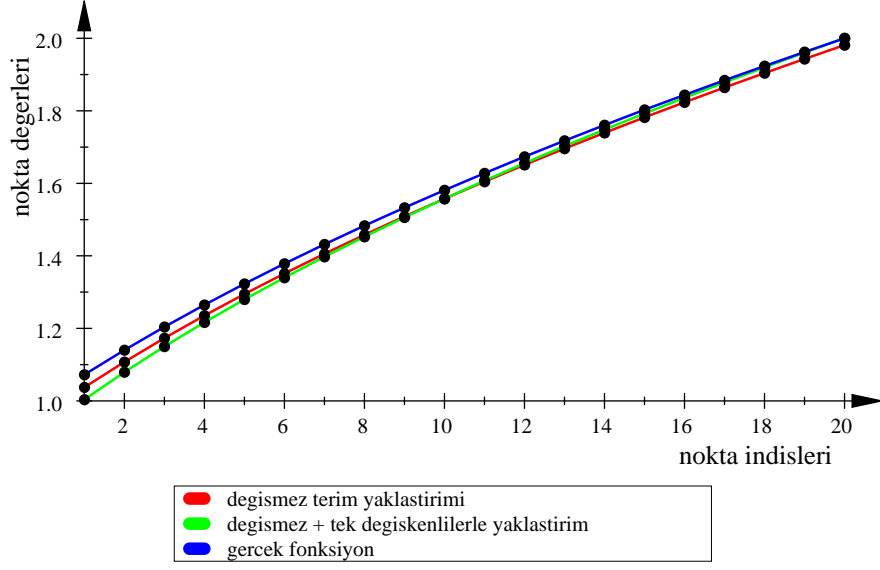


Şekil 3.13: 2^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{1 + x_1 + x_2 + x_3}$ işlevi ve yaklaşımlar(K.N.)

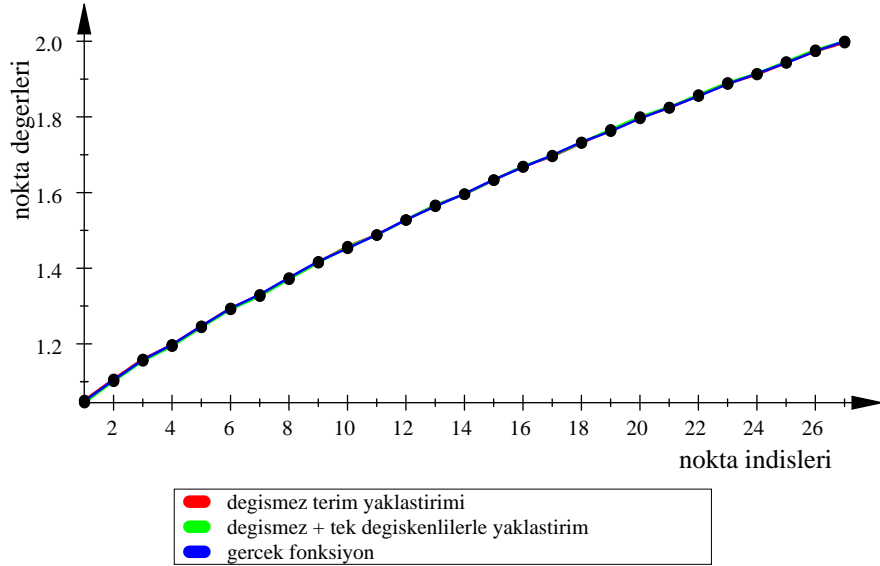
Bu örnek için köşe noktası açılımı altında altkesim sayısı 20^3 e çıkarıldığında elde edilen yaklaşım şekil 3.14 ile görselleştirilmiştir. Ele alınan düğüm noktalarında değişmezle ya da değişmez ve tek değişkenlilerin toplamıyla elde edilen yaklaşımların farklı sapmaları gözlemlenmektedir. Bu işlev için 20^3 altkesimle sadece değişmez terimle yaklaşım uygulayarak bile bazı noktalarda iyi yaklaşım sağlanabilmektedir.

Altkesim sayısı 100^3 e çıkarıldığında her iki yaklaşımda gerçek işlev değerleriyle grafik üzerinde örtüşmektedir. Çizelge 3.5 te verilen yanılığ değerleri şekil 3.15 ile görsel olarakta desteklenmektedir.

3.4.2 Orta Nokta Açılımı



Şekil 3.14: 20^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{1 + x_1 + x_2 + x_3}$ işlevi ve yaklaşımlar(K.N)



Şekil 3.15: 100^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{1 + x_1 + x_2 + x_3}$ işlevi ve yaklaşımlar(K.N)

Çizelge 3.6 da orta nokta açılımının ($n = 1$) de kesilmesi ile elde edilen terimlerle hesaplanan yanılğı değerleri verilmiştir.Çizelge 3.5 ile karşılaştırıldığında,değişmezlere tek değişkenlilerin eklendiği yaklaşıtıının yanılğı değerlerinden, çizelge 3.6 daki yaklaşıtıımlarda 20^3 alt bölgede yeterli yaklaşıtıım elde edilirken çizelge 3.5 de YBMG bölgesi 50^3 altkesime bölünürse yeterince iyi bir yaklaşıtıım elde edileceği gözlemlenir.

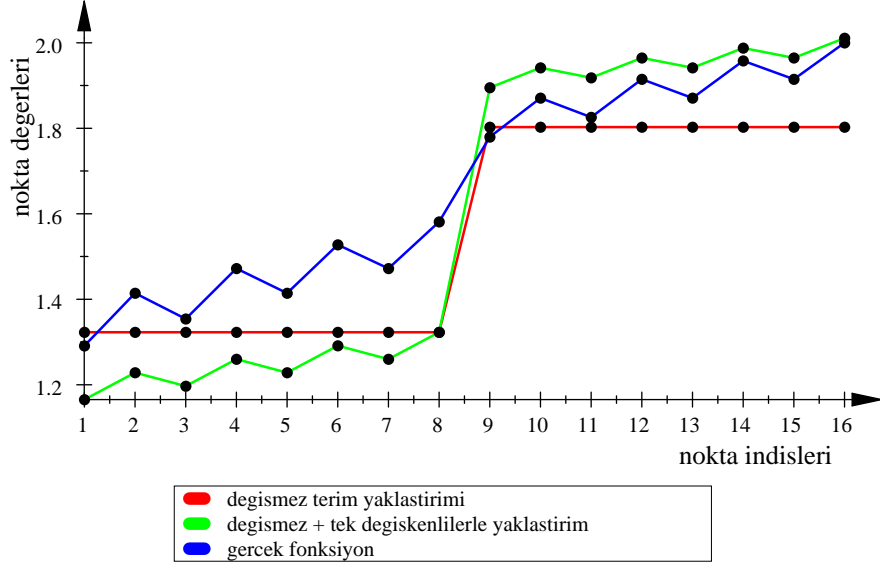
Çizelge 3.6: $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{1 + x_1 + x_2 + x_3}$ İçin Yanılğı Değerleri(O.N.)

	Yanılğı (f_0) ($n = 1$)	Yanılğı ($f_0 + \sum_{i=1}^N f_i(x_i)$) ($n = 1$)
2 altkesim	$1,7.10^{-3}$	$4,5.10^{-6}$
10 altkesim	$2,9.10^{-6}$	$3,8.10^{-10}$
20 altkesim	$1,8.10^{-7}$	$6,16.e^{-12}$
50 altkesim	$4,6.10^{-9}$	$2,5.e^{-14}$
100 altkesim	$2,9.10^{-10}$	$3,9.e^{-16}$
500 altkesim	$4,6.e^{-13}$	$2,5.e^{-12}$

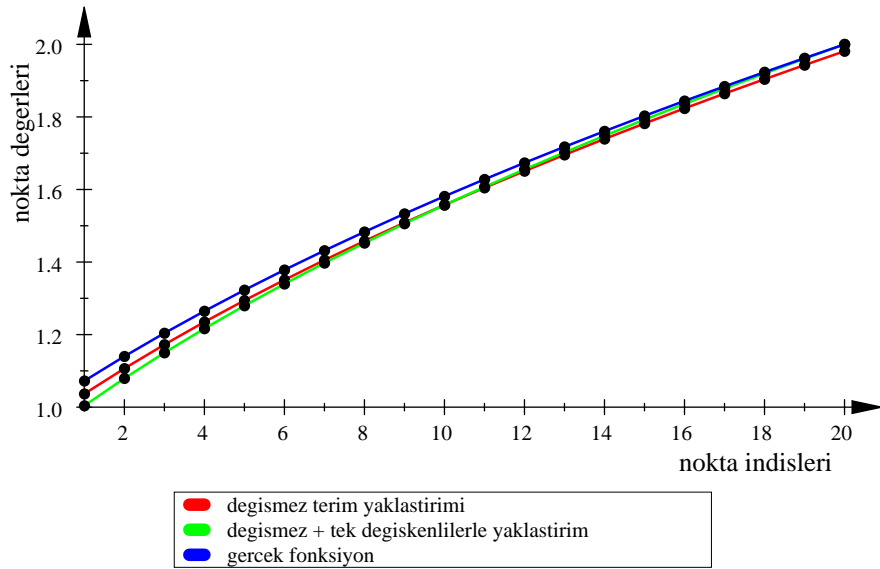
Bağımsız değişkenler için verilen aralıklarda ($[0, 1]$) karekök işlevi küçük değerler aldığından, yanılğı değerlerindeki 2^3 altkesimden başlayarak oldukça küçük çıkması her iki açılım içinde beklenen bir sonuçtur. Bu durumda orta nokta açılımı için yaklaşıtıının kalitesini görmek amacıyla gerçek işlevin ve işleve uygulanan yaklaşıtıımların niteliği şekillerle gösterilmiştir. İlk olarak orta nokta açılımı ile 2^3 altkesimde elde edilen Küçük Ölçeklerde YBMG terimleri ile yaklaşıtıım şekil 3.16 da gösterilmiştir. Değişmez terim ile yaklaşıtıımdan değilse bile, yeşil renk ile gösterilmiş olan değişmez ve tek değişkenlilerin toplamıyla yaklaşıtıım orta nokta açılımıyla iyileştirme göstermiştir.

$f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{1 + x_1 + x_2 + x_3}$ çok değişkenli işlevi için orta nokta açılımı kullanılarak elde edilen Küçük Ölçeklerde YBMG yaklaşıtıımında YBMG bölgesi 20^3 altkesime sayısında yaklaşıtıının başarısının gerçek işlevle karşılaştırılması için şekil 3.17 de görselleştirilmiştir. Bu işlevin verilen aralıklarda aldığı değerler ve yaklaşıtıımların yanılğı değerleride gittikçe küçüldüğünden şekil 3.14 ile önemli bir fark gözlenmemektedir.

Şekil 3.18 de $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{1 + x_1 + x_2 + x_3}$ işlevine 100^3 altkesimde yaklaşıtıımlar uygulanmıştır. Bu altkesim sayısında yaklaşıtıının başarısı gerçek

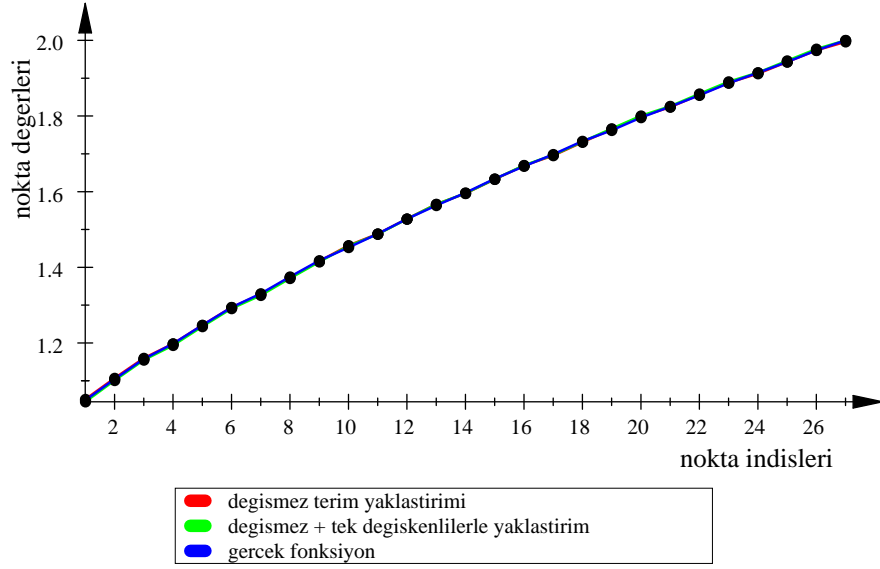


Şekil 3.16: 2^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{1 + x_1 + x_2 + x_3}$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)



Şekil 3.17: 20^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{1 + x_1 + x_2 + x_3}$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)

işlev değerleri ile yaklaştırım değerlerini gösteren noktaların örtüşmesinden anlaşılmaktadır.



Şekil 3.18: 100^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{1 + x_1 + x_2 + x_3}$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)

3.5 Örnek 4

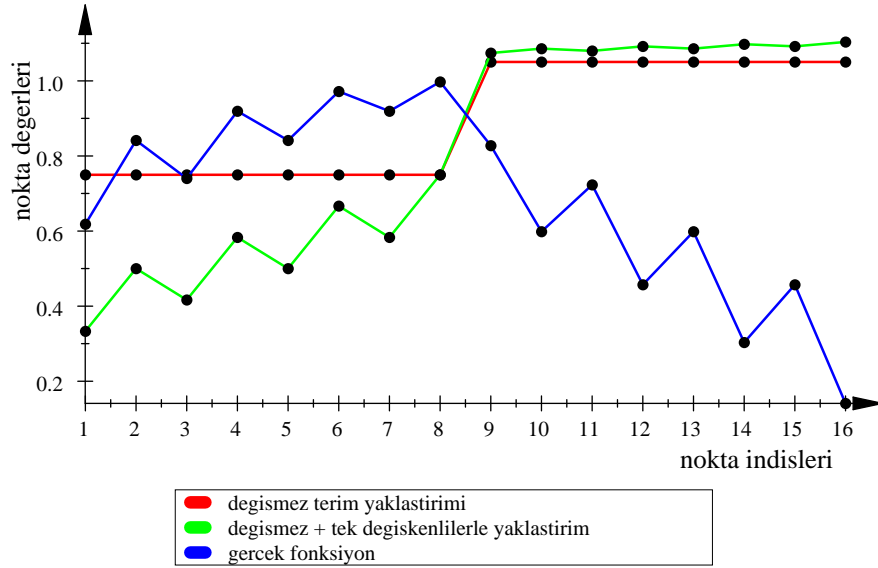
3.5.1 Köşe Noktası Açılımı

Bu örnekte Küçük Ölçeklerde YBMG algoritmasının devirli bir işleve olan yaklaştırımının başarısını görebilmek için $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(\beta(x_1 + x_2 + x_3))$ işlevini ele alalım. İşlevin değişkenlerinin aralıkları $[0, 1]$ olsun. Ağırlık işlevi YBMG koşulları altında $W(\mathbf{u}) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{u_i}$ olarak alınsın. Farklı β değerleri için işlevin frekans aralığı değişecektir. Dolayısıyla bu işleve Küçük Ölçeklerde YBMG açılımının bileşenleri ile yapılan yaklaştırımın bu frekans değişimine de bağlı olacağı tahmin edilebilir. Bu durumu gözlemleyebilmek için farklı β değerleri için işlevin tanım bölgesi alt bölgelere ayrılacak ve elde edilen YBMG terimleri ile işleve uygulanan yaklaştırımın yanlgı değerlerine bakılacaktır. Çizelge 3.7 de $\beta = 1$ değeri için yapılan köşe noktasına göre açılan saptırım açılımları ile bulunan Küçük Ölçeklerde YBMG terimleri ile yaklaşımların sonucunda edinilen yanlgı değerleri gösterilmektedir.

Çizelge 3.7: $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1 + x_2 + x_3)$ için Yanılgı Değerleri(K.N.)

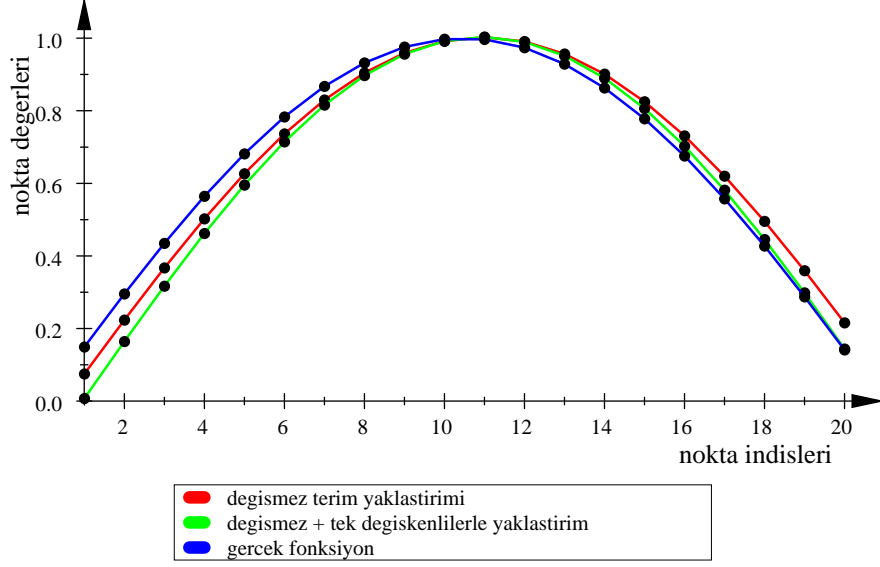
	Yanılgı (f_0) ($n = 0$)	Yanılgı (f_0) ($n = 1$)	Yanılgı ($f_0 + \sum_{i=1}^N f_i(x_i)$) ($n = 1$)
2^3 altkesim	0,069	0,019	0,016
10^3 altkesim	$1,2 \cdot 10^{-4}$	$1,27 \cdot 10^{-5}$	$1,12 \cdot 10^{-7}$
50^3 altkesim	$1,9 \cdot 10^{-7}$	$1,9 \cdot 10^{-8}$	$7,1 \cdot e^{-11}$
100^3 altkesim	$1,2 \cdot 10^{-8}$	$1,19 \cdot 10^{-9}$	$1,12 \cdot e^{-12}$
500^3 altkesim	$1,9 \cdot e^{-11}$	$1,9 \cdot e^{-12}$	$7,2 \cdot e^{-17}$

Bir önceki örnekte olduğu gibi verilen aralıklarda $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1 + x_2 + x_3)$ işlevi oldukça küçük değerler almaktadır, bu da yaklaşıtlardaki yanılgıların en küçük altkesim ayrıştırmalarından itibaren küçük çıkmasına neden olmaktadır. 2^3 altkesim sayısı için $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1 + x_2 + x_3)$ işlevi için uygulanan yaklaşıtların görsel değerlendirmesi için şekil 3.19 çizilmiştir. Görüldüğü gibi yaklaşıtlarda belirgin bir başarı yakalanamamıştır. Bu nedenle altkesim sayısı 20^3 e çıkarıldığında elde edilen yaklaşıtların başarısı şekil 3.20 de görselleştirilmiştir.



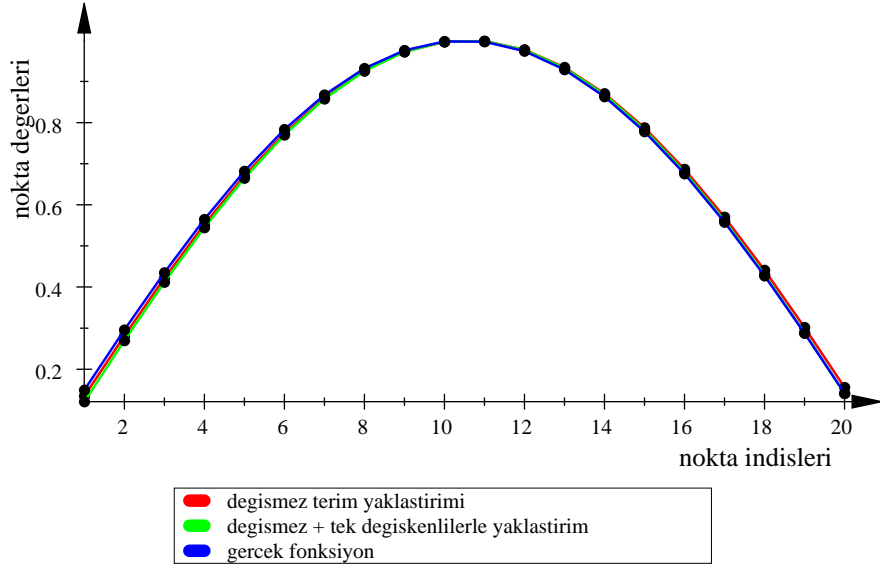
Şekil 3.19: 2^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1 + x_2 + x_3)$ işlevi ve yaklaşıtlar(K.N)

Şekil 3.20 de aralıkların ilk 10 altkesiminde değişmez ile yaklaşıtlar oldukça başarılı iken diğer altkesimlerde tek değişkenlilerle yaklaşıtların başarısı gözlemlenmektedir.



Şekil 3.20: 20^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1 + x_2 + x_3)$ işlevi ve yaklaşımlar(K.N.)

Eğer $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1 + x_2 + x_3)$ işlevi için 100^3 altkesimde yaklaşım uygulanırsa gerçek işlev değerleri ile yaklaşımlar için görselleştirilen düğüm noktası değerleri şekil 3.21 de görüldüğü gibi örtüşmektedir. Bu altkesim sayısında yaklaşımın başarısını yanlış değer çizelgesinde verilen değerler de desteklemektedir.



Şekil 3.21: 100^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1 + x_2 + x_3)$ işlevi ve yaklaşımlar(K.N.)

Devirli bir işlev olan $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1 + x_2 + x_3)$ işlevi için orta nokta açılımı kullanarak ve tanım bölgesini alt bölgelere ayırarak elde edilen Küçük Ölçeklerde YBMG açılımına kesme uygulanarak elde edilen yaklaşımlardan, değişmez terimden itibaren kesme uygulanması ve tek değişkenlilerden itibaren kesme uygulanmasıyla elde edilen yanılığ değerleri çizelge 3.8 de verilmiştir. Çizelge 3.7 deki yanılığ değerleri ile karşılaştırıldığında orta nokta açılımının yanılığ değerleri daha küçüktür. Fakat her iki çizelgede de yanılığ değerlerinin oldukça küçük olması görselleştirmelerde belirgin bir fark ortaya koymamaktadır.

3.5.2 Orta Nokta Açılımı

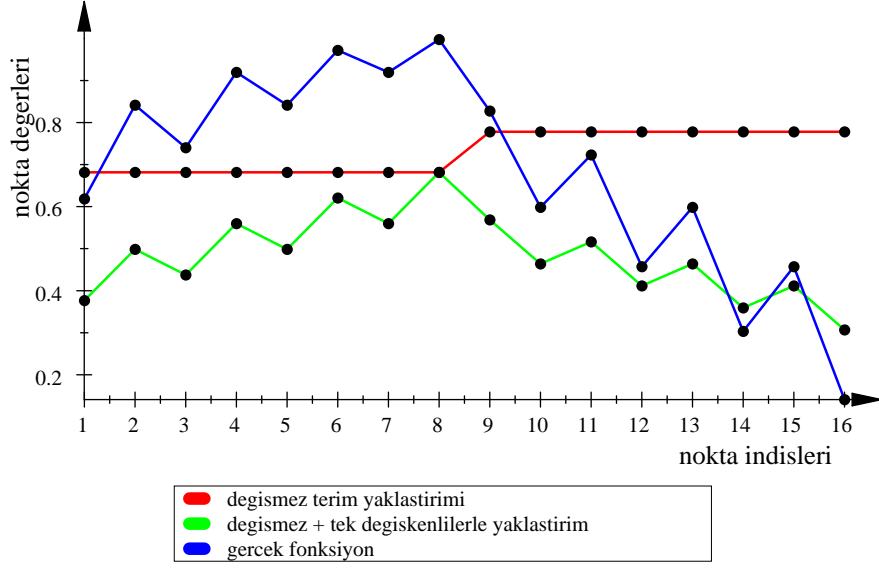
Çizelge 3.8: $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1 + x_2 + x_3)$ İçin Yanılığ Değerleri(O.N.)

	Yanılığ (f_0) ($n = 1$)	Yanılığ ($f_0 + \sum_{i=1}^N f_i(x_i)$) ($n = 1$)
2^3 altkesim	$7,2.10^{-3}$	$3,3.10^{-4}$
10^3 altkesim	$1,9.10^{-8}$	$1,36.e^{-12}$
50^3 altkesim	$1,2.10^{-9}$	$2,12.e^{-14}$
100^3 altkesim	$6,5.e^{-10}$	$3,2.e^{-16}$
500^3 altkesim	$1,9.e^{-12}$	$1,3.e^{-18}$

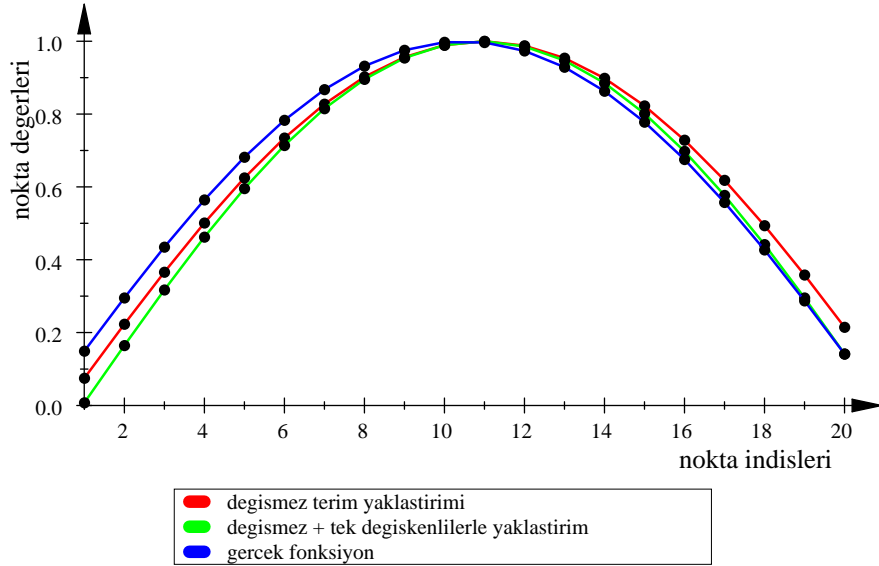
Şekil 3.22 de $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1 + x_2 + x_3)$ işlevi için orta nokta açılımı ile bulunan yaklaşımların yeterliliği 3 farklı altkesim sayısında sınanmıştır. İlk olarak 2^3 altkesim alınmış ve bulunan yaklaşım değerlerinin gerçek işlev değerleriyle karşılaştırılması şekil 3.22 de görselleştirilmiştir. Yaklaşım yeterince başarılı olmamakla beraber şekil 3.19 ile karşılaştırıldığında, tek değişkenlilerinde eklendiği yaklaşım değerlerinin oluşturduğu gerçek işlev yapısına benzerlik göstermektedir.

Verilen çok değişkenli işlev için altkesim sayısı orta nokta açılımının etkisi altında 20^3 e çıkarıldığında elde edilen bileşenlerin yaklaşımı şekil 3.23 de verilmiştir. Bu altkesim sayısında yaklaşım, yanılığ değerlerinin çok küçük olmasından da anlaşılacağı gibi görsel açıdan köşe noktası açılımında ki aynı altkesim sayısında edinilen yaklaşımdan çok farklı değildir.

$f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1 + x_2 + x_3)$ işlevi için son olarak orta nokta açılımı altında elde edilen Küçük Ölçeklerde YBMG terimleri ile yaklaşım 100^3 altkesim sayısında

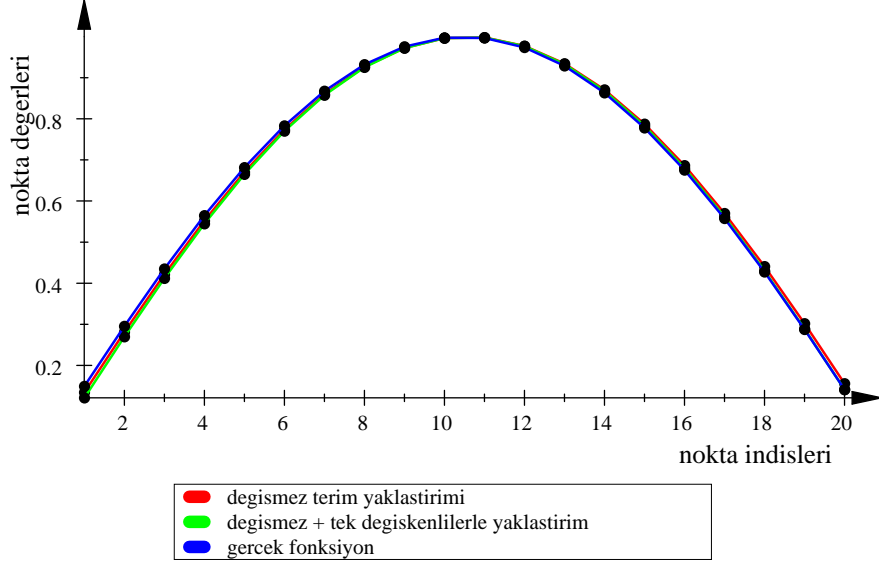


Şekil 3.22: 2^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1 + x_2 + x_3)$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)



Şekil 3.23: 20^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1 + x_2 + x_3)$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)

sınanmıştır. Gerçek işlev değerlerine oldukça iyi bir yaklaştırım uygulandığı şekil 3.24 te açıkça görülmektedir. Kuşkusuz ki altkesim sayısı artırılarak tam örtüşmeyen değerlerin örtüşmesi sağlanabilir.



Şekil 3.24: 100^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1 + x_2 + x_3)$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N)

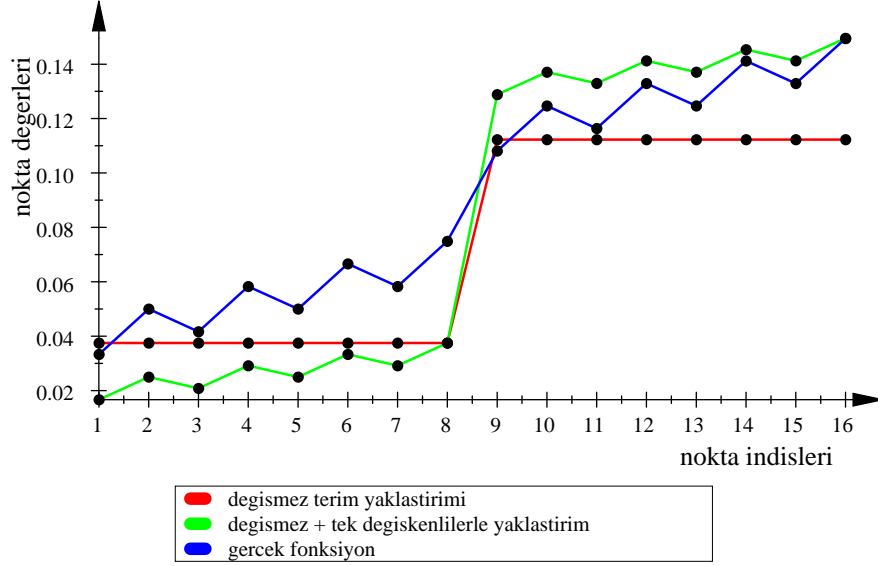
3.5.3 Farklı β Değerleri İçin $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \sin(\beta(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3))$ İşlevi

$f(x_1, x_2, x_3) = \sin(x_1 + x_2 + x_3)$ çok değişkenli işlevi devirli bir işlevdir, ve alınan işlev yapısında devirin frekansı β ya farklı değerler verilerek değiştirilebilir. Farklı frekans aralıklarında bu işleve geliştirilen algoritma ile ne denli iyi yaklaştırım uygulandığını görebilmek için $\beta = 1$ dışında, $\beta = 0.05$ ve $\beta = 10$ değerleri içinde sinama yapılmıştır. Ancak bu değerler için yanılğı değer çizelgeleri yerine, sadece yaklaştırım değerleri ve gerçek işlev değerlerinin görselleştirildiği şekiller çalışmaya eklenmiştir.

3.5.3.1 $\beta = 0.05$ İçin

Bundan önceki 4 farklı örnekte orta nokta açılımı ile elde edilen terimlerin yaklaştırımı köşe noktası açılımı ile elde edilenlerle yakın başarıda ya da üstün çıkmıştır. Ayrıca devirli fonksiyonlarda frekans aralığı büyüdükçe orta nokta açılımı ve köşe noktası açılımı arasında net bir fark olmadığı gözlenmiştir. Dolayısıyla $\beta = 0.05$ ve $\beta = 10$ değerleri için yapılan bu sinamalarda iki açılımdan sadece orta nokta açılımı kullanılacaktır. Frekans aralığının algoritmanın

başarısını ne denli etkilediğini görmek amacıyla $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(0.05(x_1 + x_2 + x_3))$ işlevini ele alalım. İlk yaklaşıtırm 2^3 altkesim sayısında uygulandıında, şekil 3.25 te orta nokta açılımı ile elde edilen Küçük Ölçeklerde YBMG bileşenlerinin sağladığı yaklaşıtırmalar, gösterilmiştir. Saptırım açılımlarının birli terimleri eklenmiş yani Cauchy çarpımı ($n = 1$) de kesilmiştir.

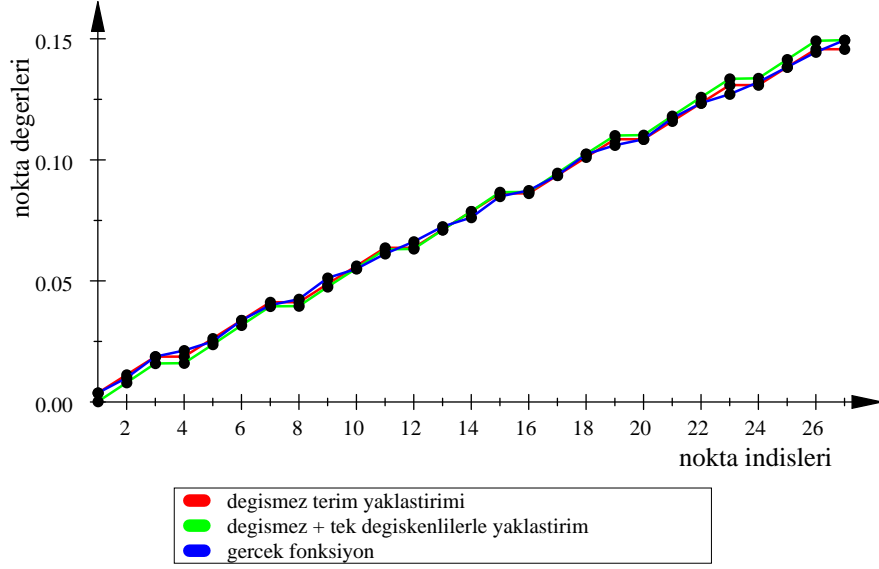


Şekil 3.25: 2^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(0.05(x_1 + x_2 + x_3))$ işlevi ve yaklaşıtırmalar(O.N.)

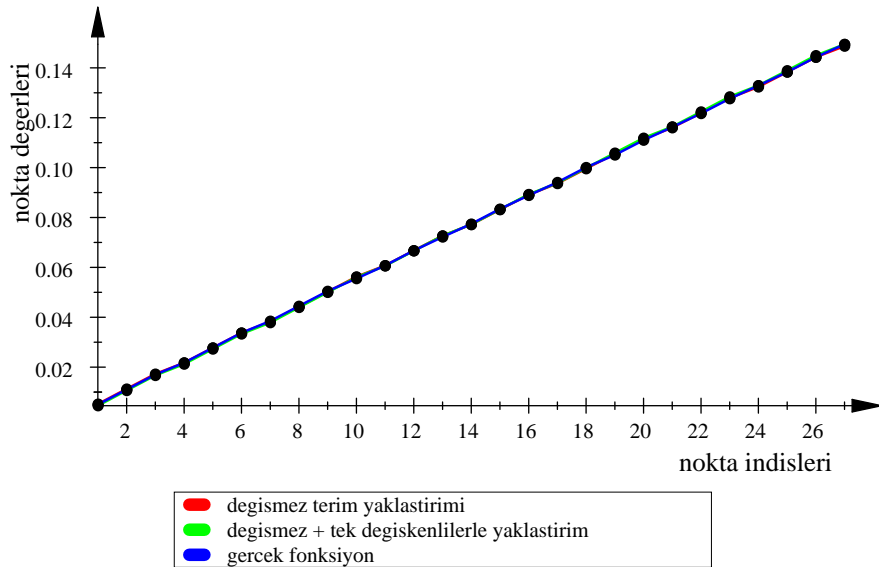
Şekil 3.25 incelenecek olursa değişmez ile yaklaşıtırmı ifade eden kırmızı çizgideki noktalar her ne kadar ilk aralık için gerçek işlev değerlerine (mavi çizgi) yakın görünse de, işlev yapısına yaklaşan tek değişkenlilerle yaklaşıtırmıdır. Şekil 3.26 da ise altkesim sayısı 20^3 e çıkarılmış ve yaklaşıtırm değerleri, gerçek işlev değerleriyle birlikte görselleştirilmiştir.

İşlevin bağımsız değişkenlerinin tanım aralığı olarak belirlenen $[0, 1]$ aralığında işlevin aldığı değerler çok küçük olduğundan, yaklaşıtırmıda tek değişkenlilerin etkisi şekilde belirgin bir biçimde gözlenememektir. Ancak yaklaşıtırmaların yeterince iyi olmadığı da aynı indisli noktaların örtüşmemesinden anlaşılmaktadır. Bu nedenle altkesim sayısı 100^3 e çıkarılarak yaklaşıtırmı uygulandıında şekil 3.27 de görselleştirilmiş sonuçlar elde edilir.

Şekil 3.27 de gerçek işlev değerleri ile yaklaşıtırmı değerleri tam olarak örtüşmektedir. Bu altkesim sayısı altında $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(0.05(x_1 + x_2 + x_3))$



Şekil 3.26: 20^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(0.05(x_1 + x_2 + x_3))$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N)

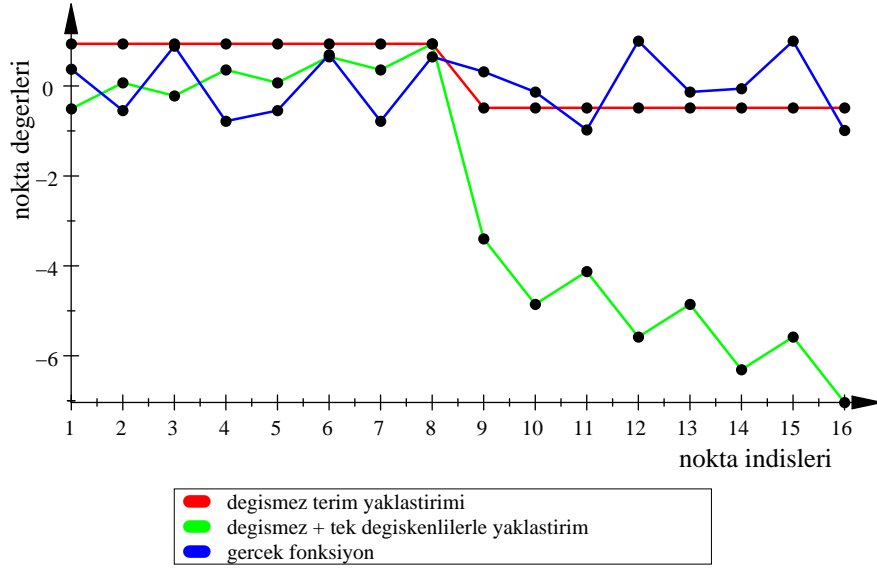


Şekil 3.27: 100^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(0.05(x_1 + x_2 + x_3))$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)

işlevinin Küçük Ölçeklerde YBMG açılımı ile her iki yaklaşımda yeterince başarılıdır.

3.5.3.2 $\beta = 10$ için

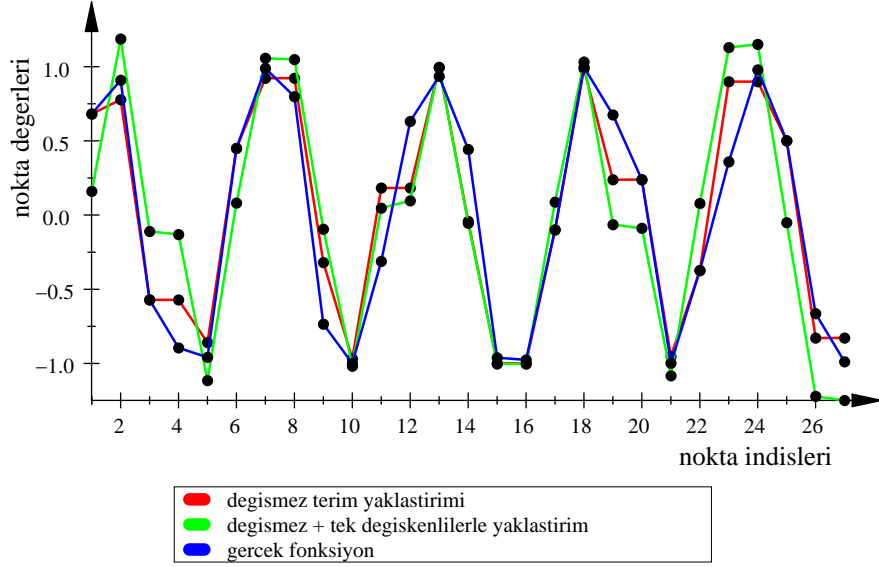
$f(x_1, x_2, x_3) = \sin(10(x_1 + x_2 + x_3))$ çok değişkenli işlevi için 3 farklı altkesim sayısında orta nokta açılımı ile elde edilen Küçük Ölçeklerde YBMG terimleri ile yaklaşım uygulandığında, yaklaşımın başarısının ne derece iyi olduğu çizilen şekillerle gözlemlenmiştir. Şekil 3.28 de altkesim sayısı 2^3 olarak alınmıştır ve yaklaşım sonuçlarının bu altkesim sayısında gerçek işlev değerlerine yaklaşmadığı görülmektedir. Bu nedenle altkesim sayısı 20^3 e çıkarılmıştır ve bu



Şekil 3.28: 2^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(10(x_1 + x_2 + x_3))$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)

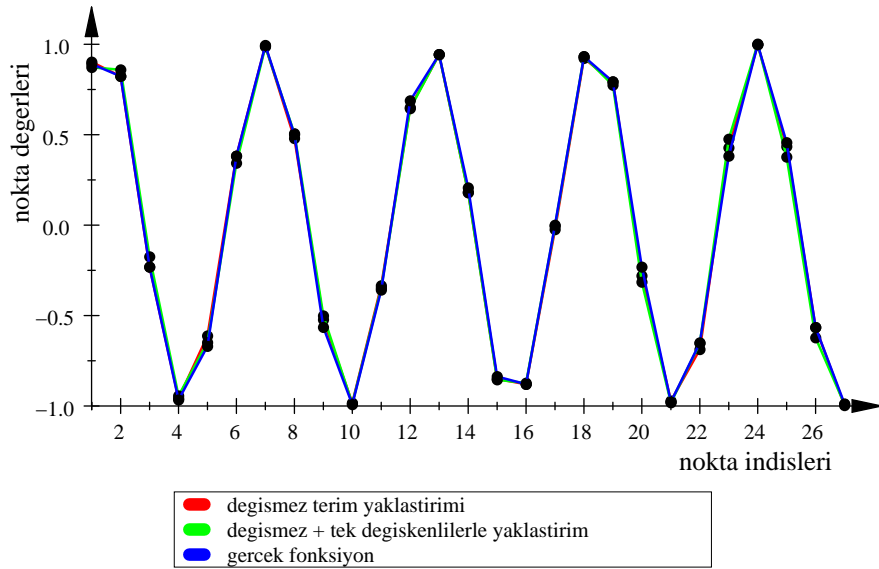
altkesim sayısında yaklaşım sonuçlarındaki iyileşme şekil 3.29 da görülmektedir. Fakat yine bir çok noktada gerçek işlev değerlerine uzak sonuçlar elde edilmiştir. Altkesim sayısı arttırılarak her bir alt bölgenin ölçekliği daha da küçültülmelidir.

İşlev için uygulanan yaklaşımı daha etkin bir hale getirmek için sırasıyla 100^3 ve 200^3 altkesim sayısında yapılan sınamalarda 200^3 altkesim sayısında şekil 3.30 da olduğu gibi yeterli yaklaşım sağlanabileceği gözlemlenmiştir. Küçük sayısal sapmaların bir sonucu olarak örtüşmeyen noktalar ise altkesim sayısını daha da arttırarak aynı sonucun elde edilmesiyle örtüşebilir. Bu durum aslında



Şekil 3.29: 20^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(10(x_1 + x_2 + x_3))$ işlevi ve yaklaşımları (O.N.)

altkesimlerin uygun ölçekliğinin ya da sayısının işlevin yapısı ile birebir ilişkili olduğunu anlatır. Çünkü sinüs işlevi çalışmalarında $\beta = 0.05$ için 100^3 altkesim sayısı yeterli yaklaşım için uygun iken, $\beta = 10$ katsayısı için yeterli yaklaşım 200^3 altkesim sayısını da arttırarak elde edilebilir.



Şekil 3.30: 200^3 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3) = \sin(10(x_1 + x_2 + x_3))$ işlevi ve yaklaşımları (O.N.)

4. UYGULAMA 2

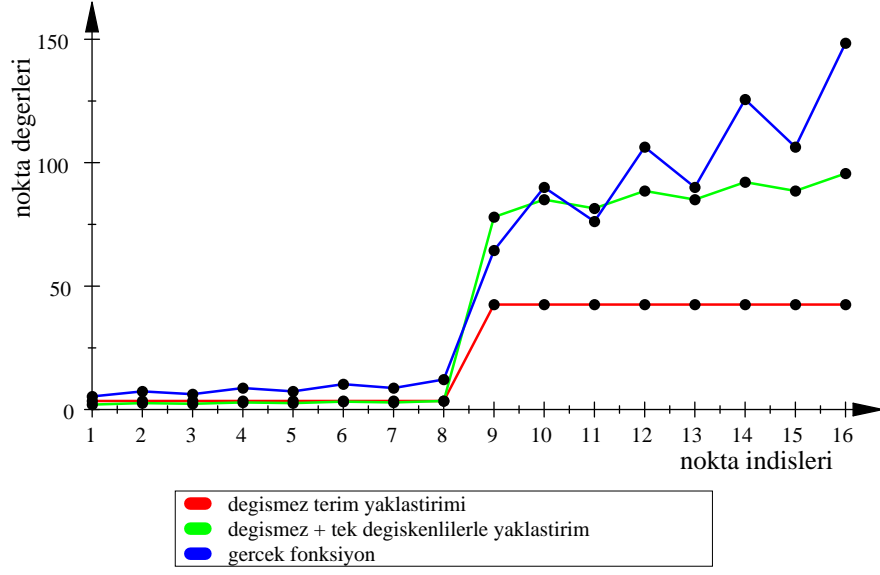
Çok değişkenli işlevler için Küçük Ölçeklerde YBMG açılımı ile yaklaştırım UYGULAMA 1 de 3 değişkenli işlevler için denenmiş ve yaklaştırımın başarısı incelenmiştir. Bu bölümde ise 5 değişkenli 2 farklı işlev için yeterli yaklaştırım bulunana kadar altkesim sayısı arttırılarak incelenecektir.

4.1 Örnek 1

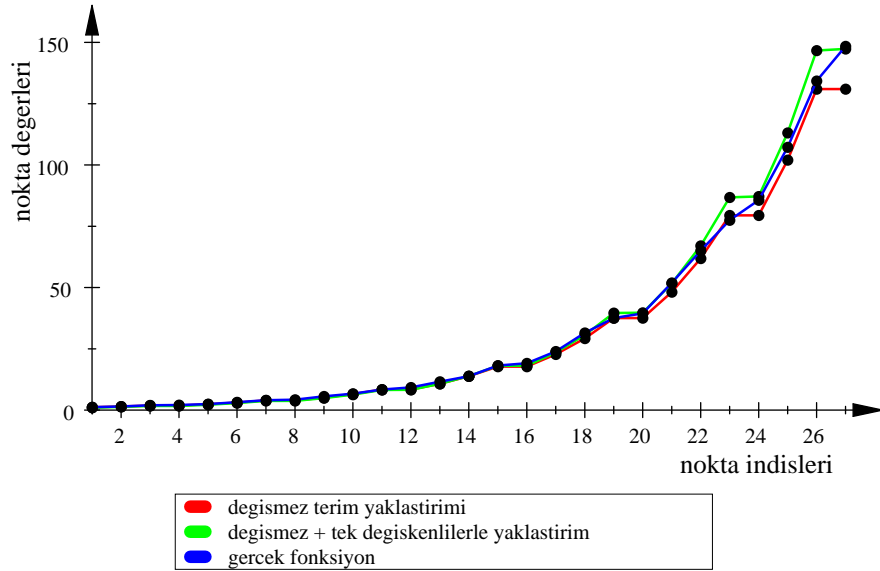
Daha önce 3 değişkenli işlevler ele alınmış ve üretilen algoritma ile yaklaştırımın başarısı yanlgı çizelgelerinde ve şekillerde gözlemlenmiştir, fakat daha fazla değişkene sahip işlevlerle de aynıbaşarıelde edilebilir. Aslında N doğal sayısına olursa olsun, algoritmanın uygulandığı sistem kısıtlarıyla verilen aralıklarda analitik olan tüm işlevler için yöntem başarılıdır. Bu genel yapı 5 değişkenli işlev örnekleriyle de gösterilebilir. $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = e^{(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)}$ işlevi ele alınsın. Daha önceki uygulamada çıkan sonuçlarla orta nokta açılımının köşe nokta açılımına göre aynı ya da daha fazla yaklaştırım sağladığı görülmüştür. Dolayısıyla bu uygulamada orta noktaya göre alınmış saptırım açılımları ile elde edilen Küçük Ölçeklerde YBMG açılımının terimleri ile yaklaştırım sonuçları verilecektir. Ele alınan işlev için değişkenlerin tanım aralıkları $[0, 1]$ ve YBMG ağırlık işlevi $W(\mathbf{u}) = \prod_{i=1}^5 u_i$ olsun. Bu durumda YBMG bölgesi öncelikle 2^5 altkesime ayrılsın. Şekil 4.1 de yatayda eksende indisleri verilen noktalarda hesaplanan işlevin gerçek değerleri ve uygulanan yaklaştırım değerleri görselleştirilmiştir.

Şekil 4.1 de tek değişkenlilerle yaklaştırım gerçek işlev değerlerine yakın olsa da yeterli yaklaştırım sağlanamadığı görülmektedir. Bu durumda altkesim sayısı 20^5 e çıkarıldığında elde edilen sonuçlar şekil 4.2 de görülebilir.

Yaklaştırımın iyileştiği şekil 4.2 de görülmektedir, fakat aynı indisli noktalarda gerçek işlev değerleriyle yaklaştırım değerleri hala yeterince yakın değildir. 200^5

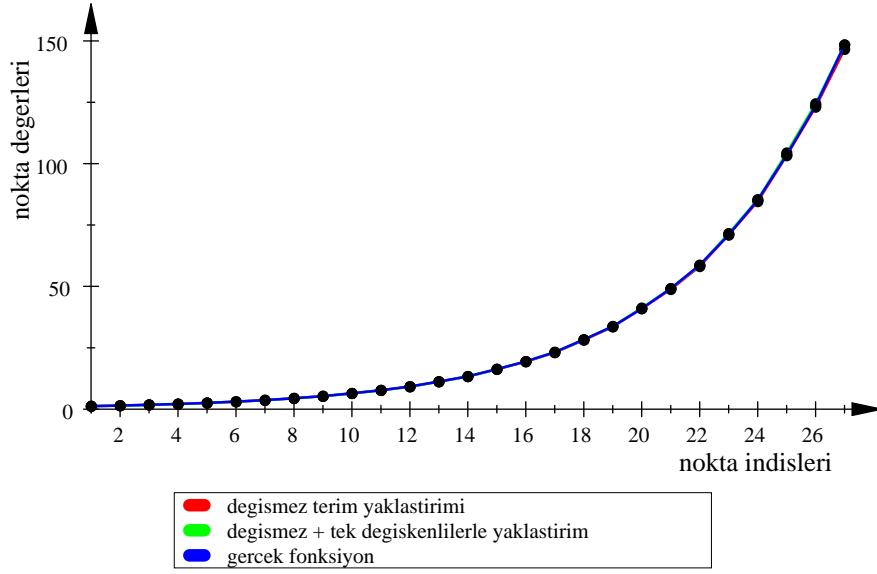


Şekil 4.1: 2^5 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = e^{(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)}$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)



Şekil 4.2: 2^5 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = e^{(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)}$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)

altkesim sayısında uygulanan Küçük Ölçeklerde YBMG yaklaşımı ile sonuçlar şekil 4.3 te verilmiştir.



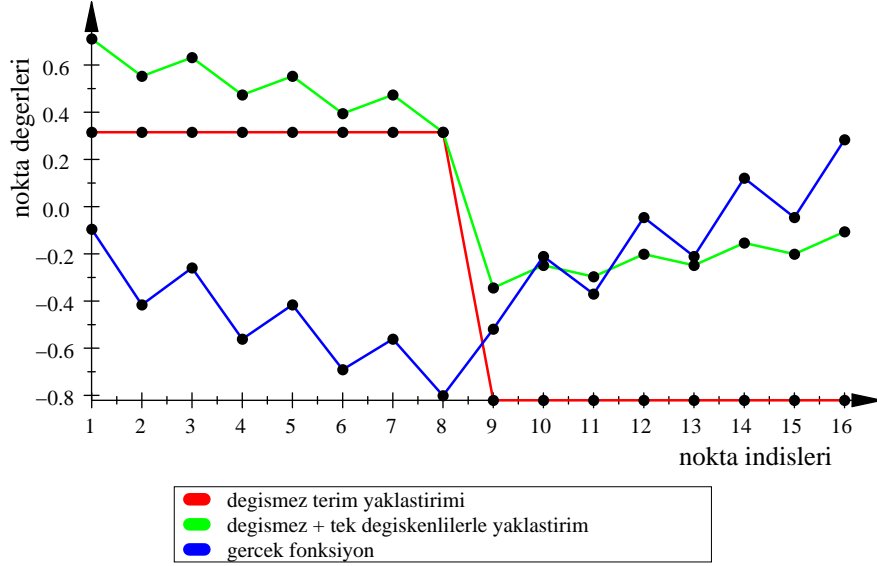
Şekil 4.3: 200^5 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = e^{(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)}$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N.)

5 değişkenli $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = e^{(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)}$ işlevi için 200^5 altkesimin oldukça başarılı bir yaklaşım için uygun bir altkesim sayısı olduğu şekil 4.3 te görülmektedir. Bu uygulamadaki örnekler için yanlış çizelgesi verilmemiştir, ancak çok küçük yanlışlar (sıfıra yakın) olacağı tahmin edilebilir. Böylelikle 5 değişkenli bir işlev için de algoritma ile uygulanan yaklaşımın başarısı görsel öğelerle anlatılmıştır.

4.2 Örnek 2

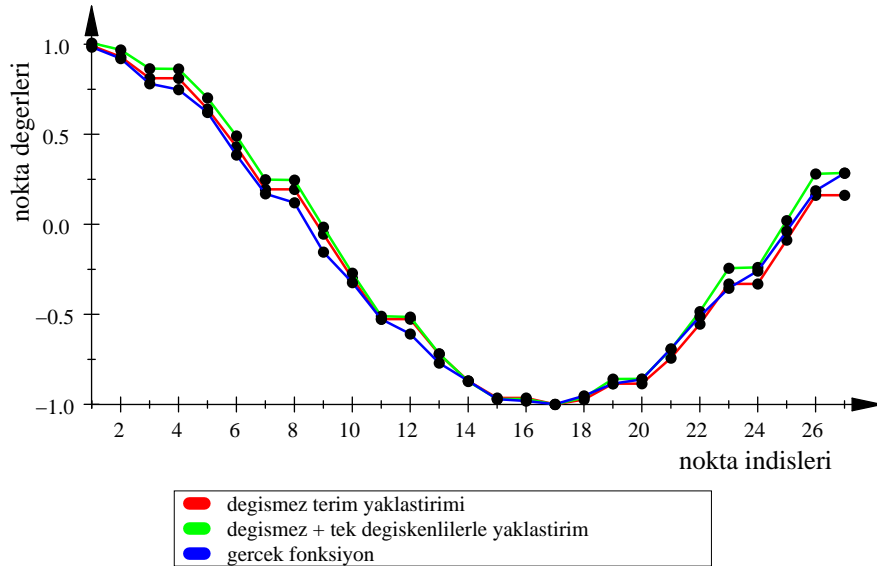
İlk örnekte 5 değişkenli işlev olarak çarpımsal ve üstel bir yapıya sahip olan $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = e^{(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)}$ işlevi için uygulanan yaklaşımların niteliği ve başarısı incelenmiştir. Ele alınan ikinci işlev devirli bir işlev olan $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \cos(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$ olsun. Bu işlev için YBMG bölgesinde (tüm değişkenler için $[0,1]$ tanım aralığı alınmıştır) yeterli yaklaşım sağlanana dek altkesim sayısı artırılmış ve elde edilen yaklaşım sonuçları görselleştirilmiştir. İlk olarak YBMG bölgesinin bütünü dışında en küçük alt kesim sayısı olan 2^5 ü ele alalım. Bu altkesim sayısında elde edilen yaklaşım değerleri ve gerçek işlev değerleri belirlenen noktalarda hesaplanmış ve

şekil 4.4 te verilmiştir. Ele alınan işlev için 2^5 altkesim sayısında hem değişmez ile yaklaşım, hemde tek değişkenlilerin eklenmesiyle elde edilen yaklaşım yeterli olmamıştır. Altkesim sayısı 20^5 e çıkarılarak elde edilen yaklaşım sonuçları ise



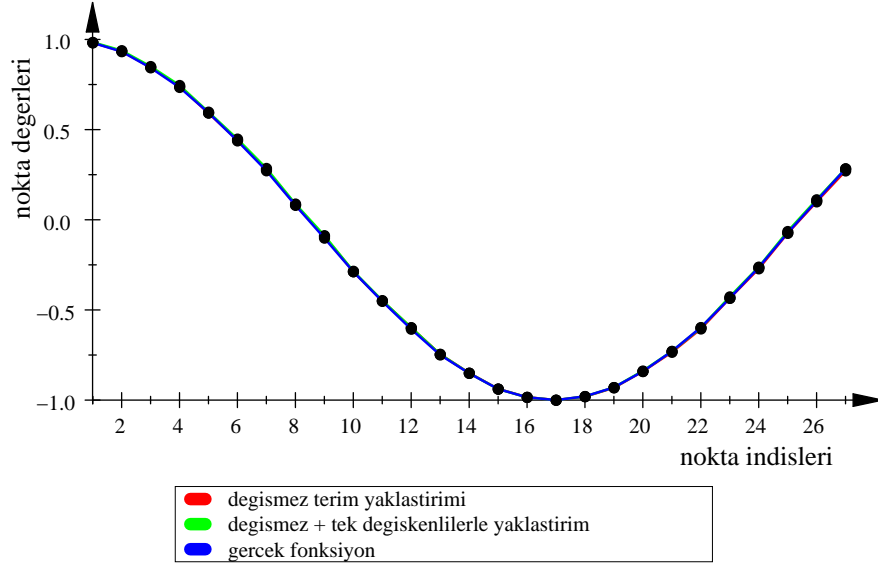
Şekil 4.4: 2^5 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \cos(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$ işlevi ve yaklaşımları(O.N.)

şekil 4.5 te görüldüğü gibi gerçek işlev değerlerine oldukça yakındır, fakat yine de yaklaşım iyileştirilebilir.



Şekil 4.5: 20^5 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \cos(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$ işlevi ve yaklaşımları(O.N.)

Şekil 4.6 da $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \cos(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$ işlevi için 200^5 altkesimde uygulanan yaklaşımların belirli noktalardaki değerleri ve gerçek işlev değerleri görülmektedir. Böylece bu işlev için YBMG bölgesi 200^5 altkesime bölündüğünde yeterli yaklaşım sağlandığı şekil 4.6 dan görülebilmektedir.



Şekil 4.6: 200^5 alt bölgede $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \cos(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$ işlevi ve yaklaşımlar(O.N)

5. SONUÇ

Çalışmanın temel amacı YBMG tanım bölgesinin ölçeği küçüldüğünde bir çok değişkenli işleve yaklaştırımın niteliğini incelemektir. Bu amaç doğrultusunda YBMG tanım bölgesi ölçeği gittikçe küçülen altkesimlere ayrılarak incelemeler yapılmış, her bir altkesimde çok değişkenli işlevin ve ağırlık işlevinin anlatımları için saptırım açılımları kullanılarak YBMG açılımının bileşenleri yeniden belirlenmiştir. Bu biçimde oluşturulan açılımda "Küçük Ölçeklerde YBMG" olarak isimlendirilmiştir.

Çalışma süresince iki farklı açılım kullanılmıştır. Küçük Ölçeklerde YBMG bileşenleri belirlenirken ilk olarak çok değişkenli işlev ve ağırlık işlevi için YBMG tanım bölgesinin sıfır noktasına en yakın köşe noktasına göre saptırım açılımı kullanılmıştır. Daha sonra yapılan irdelemelerde sıfır noktasına göre açılımın daha başarılı olduğu düşünülmüş ve çalışmaya Küçük Ölçeklerde YBMG bileşenlerinin bu saptırım açılımını kullanarak belirlenmesi de eklenmiştir. YBMG tanım bölgesi daha küçük altkesimlere ayrıldıktan sonra herbir altkesimde bulunan YBMG bileşenlerine uygulanan kesmeler birleştirilmiş ve "Bütünleştirilmiş Küçük Ölçekli YBMG" yaklaştırımı elde edilmiştir.

Bütünleştirilmiş Küçük Ölçekli YBMG farklı yapıya sahip işlevler 3 değişkenli ve 5 değişkenli üzerinde sınanmıştır. Uygulama-1 deki örneklerde her iki saptırım açılımının kullanılmasıyla elde edilen bileşenlerin yaklaştırımları incelenmiş ve orta nokta açılımının üstünlüğü gözlenmiştir. Bu çalışma için değişmezle, değişmez ve tek değişkenli terimlerin toplamlarıyla elde edilen yaklaştırımlar belirlenmiştir. Bu yaklaştırımların değerleri işlevlerin gerçek değerleriyle karşılaştırılmış, yanılı çizelgelerinde de alt kesim sayısı arttıkça yanılı değerlerinin azaldığı görülmüştür. Çizilen şekiller doğrultusunda yalnızca değişmezle yaklaştırım uygulanabilmesinin Bütünleştirilmiş Küçük Ölçekli YBMG ile mümkün olacağı anlaşılmıştır. Bu verilen çok değişkenli işlevin

tanım bölgesinde analitik olma koşulu altında YBMG bölgesinin uygun sayıda altkesime ayrılmasıyla sağlanabilir ve YBMG açılımı için çok önemli bir bulgudur. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar ışığında, YBMG açılımına sonlu farklar yöntemi gibi bir yön verilmiştir ve bir sayısal yöntem olarakta işlerliği gösterilmiştir. Yapılan bu çalışmaların ardından Bütünleştirilmiş Küçük Ölçekli YBMG bir yaklaştırım yöntemi olarak ortaya çıkmış ve bundan sonraki çalışmalarda da yönteme katkı sağlayacak ya da yöntemin katkı sağlayacağı bilgiler ve bulgular üzerinde çalışılacaktır.



KAYNAKLAR

- [1] **Alış, Ö. and Rabitz, H.**, 2001. Efficient Implementation of High Dimensional Model Representations, *J. Math. Chem.*, **29**, 127–142.
- [2] **Demiralp, M.**, 2001. Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi Değişmezlik ve Toplamsallık Ölçenleri, *XII. Ulusal Mekanik Kongresi*.
- [3] **Demiralp, M.**, 2001. Çarpımsallaştırılmış Yüksek Boyutlu Model Gösterilimi: Gösterilim Çarpanlarının Belirlenmesi, *XII. Ulusal Mekanik Kongresi*.
- [4] **Demiralp, M.**, 2003. High Dimensional Model Representation and its Applications, *Tools For Mathematical Modelling*, **9**, 146–159.
- [5] **Demiralp, M.**, 2006. Weight Parameters Optimization to Get Maximum Constancy in High Dimensional Model Representation, *WSEAS Transaction on Mathematics*, **5**, 1177–1181.
- [6] **Kanmaz, A. A. and Demiralp, M.**, 2003. Symbolic Computer Programming for Generalized High Dimensional Model Representation, The Fourth International Conference on Tools For Mathematical Modelling, *The Fourth International Conference on Tools For Mathematical Modelling*, St. Petersburg, Russia
- [7] **Kunz, S. K.** , 1957. Numerical Analysis, McGraw-Hill, New York
- [8] **Li, G., Rosenthal , C., Rabitz, H.**, 2003. High Dimensional Model Representation, *J. Phys. Chem. A*, **105**, 7765–7777.
- [9] **Neidinger, R. D.**, 2005. Directions for Computing Truncated Multivariate Taylor Series , *Math. Comp*, **74**, 321–340.
- [10] **Rabitz, H. and Alış, Ö.**, 1999. General Foundations of High Dimensional Model Representation, *J. Math. Chem.*, **25**, 197–233.
- [11] **Sobol, I. M.**, 1993. Sensivity Estimates from Nonlinear Mathematical Models, *MMCE*, **1**, 407.
- [12] **Tunga, B. and Demiralp, M.**, 2003. Hybrid High Dimensional Model Representation Approximants And Their Utilization in Applications, *The Fourth International Conference on Tools For Mathematical Modelling*, St. Petersburg, Russia

- [13] **Tunga, A. and Demiralp, M.**, 2003. Data Partitioning via Generalized High Dimensional Model Representation (GHDMR) And Multivariate Interpolative Applications, *The Fourth International Conference on Tools For Mathematical Modelling*, St. Petersburg, Russia
- [14] **Tunga, M. A. and Demiralp, M.**, 2003. A Factorized High Dimensional Model Representation on the Partitioned Random Discrete Data, *ANACM, WILEY VCH*, **1**, 233–243.



A. MUPAD PROGRAMI



ÖZGEÇMİŞ

Evrin KORKMAZ 1980 yılında Malatya'da dünyaya geldi.2005 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun oldu.2006 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Bilişim Enstitüsü Hesaplamalı Bilim ve Mühendislik programında yüksek lisansa başladı.Halen aynı programda çalışmalarını sürdürmektedir.

