

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

ESNEK İDEAL TOPOLOJİK UZAYLAR  
ÜZERİNE

ELİF TURANLI

Tez Danışmanı: PROF.DR. OYA BEDRE ÖZBAKIR

Matematik Anabilim Dalı

Sunuş Tarihi: 12.08.2015

Bornova-İzmir

2015



**Elif TURANLI** tarafından YÜKSEK LİSANS tezi olarak sunulan ”**Esnek İdeal Topolojik Uzaylar Üzerine**” başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve **12.08.2015** tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri üyeleri

İmza

**Jüri Başkanı : Prof. Dr. Oya BEDRE ÖZBAKIR**

**Raportör Üye : Yrd. Doç. Dr. Ayşegül ÇAKSU GÜLER**

**Üye : Yrd. Doç. Dr. Esra DALAN YILDIRIM**



**EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**  
**ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI**

E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum **"Esnek İdeal Topolojik Uzaylar Üzerine"** başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarımı ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

12/08/2015

Elif TURANLI



## ÖZET

## ESNEK İDEAL TOPOLOJİK UZAYLAR ÜZERİNE

TURANLI, Elif

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Oya BEDRE ÖZBAKIR

Ağustos 2015, 69 sayfa

Bu tez esas olarak yedi bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tez konusu tanıtılmış, ikinci bölümde ise tezin anlaşılabilir olması için esnek kümeler ve esnek topolojik uzaylar üzerine bilgi verilmiştir.

Üçüncü bölümde esnek ideal, esnek yerel fonksiyon ve  $\star$ -esnek topoloji ile ilgili temel tanım ve teoremleri içermektedir. Ayrıca esnek topolojik uzay ile esnek idealin uyumluluğu verilerek, bu konu ile ilgili bazı karakterizasyonlar araştırılmıştır.

Dördüncü bölümde esnek  $\tilde{I}$ -kompaktlık kavramı verilmiş ve bu kavramın bazı özellikleri çalışılmıştır. Ayrıca esnek ideal topolojik uzaylarda  $\star$ -esnek bağlantılı kümeler,  $\star$ -esnek ayırık kümeler ve  $\star_s$ -esnek bağlantılı kümeler incelenmiş ve bunların birbirleriyle ilişkileri çalışılmıştır.

Beşinci bölümde esnek  $\tilde{I}$ -regüler uzaylar ve esnek  $\tilde{I}$ -normal uzaylar ele alınarak özellikleri incelenmiştir.

Son bölümde ise esnek ideal topolojik uzaylarda esnek  $\tilde{I}$ -parakompaktlık kavramı tanımlanarak bunlara ait temel teoremler ve sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca esnek  $\tilde{I}$ -parakompakt uzaylar alt uzaylarda da incelenmiştir. Son olarak bu uzaylara ait karşıt örneklerle çalışma desteklenmiştir.

**Anahtar Sözcükler:** Esnek ideal, esnek yerel fonksiyon,  $\star$ -esnek topoloji, uyumlu esnek ideal, esnek  $\tilde{I}$ -kompaktlık,  $\star$ -esnek ayırıklık,  $\star$ -esnek bağlantılılık,  $\star_s$ -esnek bağlantılılık, esnek  $\tilde{I}$ -regülerlik, esnek  $\tilde{I}$ -normallik, esnek  $\tilde{I}$ -parakompaktlık. .





## ABSTRACT

### ON SOFT IDEAL TOPOLOGICAL SPACES

TURANLI, Elif

MSc in Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Oya BEDRE ÖZBAKIR

August 2015, 69 pages

This thesis essentially consists of seven chapters.

In the first chapter, the subject of the thesis is introduced, in the second chapter, basic knowledges on soft sets and soft topological spaces are provided in order to make understandable the reading of the thesis.

In the third chapter, basic definitions and fundamental theorems related with soft ideal, soft local function and  $\star$ -soft topological spaces are included. Moreover the notion of compatibility of soft ideals with the soft topologies is introduced and some characterizations concerning this topic are investigated .

In the fourth chapter, the definition of soft  $\tilde{I}$ -compactness and some properties of this concept are studied. Besides,  $\star$ -soft connected sets,  $\star$ -soft seperated sets and  $\star_s$ -soft connected sets in soft ideal topological spaces are examined and their properties and their relations with each other are studied.

In the fifth chapter, soft  $\tilde{I}$ -regular spaces and soft  $\tilde{I}$ -normal spaces are handled and their properties are examined.

In the final chapter, the concept of soft  $\tilde{I}$ -paracompactness is defined on soft ideal topological spaces and then related fundamental theorems and results are obtained. Also, soft  $\tilde{I}$ -paracompact spaces are examined on subspaces. Finally, this work is supported by counter examples to this spaces.

**Key Words:** Soft ideal, soft local function,  $\star$ -soft topology, compatible soft ideal, soft  $\tilde{I}$ -compactness,  $\star$ -soft seperated,  $\star$ -soft connected,  $\star_s$ -soft connected, soft  $\tilde{I}$ -regularity, soft  $\tilde{I}$ -normality, soft  $\tilde{I}$ -paracompactness.



## TEŞEKKÜR

Esnek ideal topolojik uzaylar üzerine olan yüksek lisans tez çalışmam süresince bana engin bilgi ve tecrübesi ile yardımcı olan ve bu süreci titizlikle takip ederken beni her daim cesaretlendiren çok sevdiğim, güler yüzlü, saygıdeğer danışmanım Prof. Dr. Oya BEDRE ÖZBAKIR'a çok teşekkür ederim.

Tezime değerli görüş ve önerileriyle katkı sağlayan Yrd. Doç. Dr. Ayşegül ÇAKSU GÜLER'e ve Yrd. Doç. Dr. Esra DALAN YILDIRIM'a teşekkürlerimi sunarım.

Çalıştığım konu süresince kendisine her fırsatta danışabilmeme olanak tanıyan ve mesleğine gönül vermek adına bana örnek teşkil eden Arş. Gör. İzzettin DEMİR'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca bana maddi manevi her konuda destek olan benden sevgisini esirgemeyen ve bana koşulsuz güvenen annem, babam ve hemşirelik son sınıf öğrencisi kardeşim Emel Neşe TURANLI'ya yardımları ve anlayışlarından dolayı çok teşekkür ederim.

*ELİF TURANLI*

*Ağustos 2015*



## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET . . . . .	vii
ABSTRACT . . . . .	ix
TEŞEKKÜR . . . . .	xi
SİMGELER DİZİNİ . . . . .	xv
1 GİRİŞ . . . . .	1
2 ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR . . . . .	3
2.1 Esnek Kümelere Ait Temel Kavramlar ve Özellikleri . . . . .	3
3 ESNEK İDEAL ve ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR . . . . .	12
3.1 Esnek İdeal, Esnek Yerel Fonksiyon, Genelleştirilmiş Esnek Topoloji	12
3.2 Esnek Topoloji ile Esnek İdealin Uyumluluğu . . . . .	24
4 ESNEK $\tilde{I}$ -REGÜLER VE ESNEK $\tilde{I}$ -NORMAL UZAYLAR . . . . .	28
4.1 Esnek $\tilde{I}$ -Regüler Uzaylar . . . . .	28
4.2 Esnek $\tilde{I}$ -Normal Uzaylar . . . . .	31
5 ESNEK $\tilde{I}$ -KOMPAKT UZAYLAR VE ESNEK İDEAL İLE ESNEK BAĞLANTILILIK . . . . .	36
5.1 Esnek $\tilde{I}$ -Kompakt Uzaylar . . . . .	36
5.2 Esnek $\tilde{I}$ -Bağlantılılık . . . . .	38
6 ESNEK $\tilde{I}$ -PARAKOMPAKT UZAYLAR . . . . .	43
7 SONUÇ . . . . .	47
KAYNAKLAR DİZİNİ . . . . .	49
ÖZGEÇMİŞ . . . . .	52



## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simge</u>	<u>Açıklama</u>
$SS(X)_E$	$X$ üzerinde ki tüm esnek kümelerin kümesi
$\tilde{\emptyset}$	Boş esnek küme
$\tilde{X}$	Evrensel esnek küme
$\tilde{\cup}$	Esnek birleşim
$\tilde{\cap}$	Esnek kesişim
$cl((F, E))$	$(F, E)$ Esnek kümesinin esnek kapanışı
$x_e$	Esnek nokta
$int((F, E))$	$(F, E)$ Esnek kümesinin esnek içi
$\tilde{I}$	Esnek ideal
$P(X)$	$X$ kümesinin kuvvet kümesi
$SP(X)_E$	$X$ üzerinde ki tüm esnek noktaların ailesi
$O_{x_e}$	$x_e$ esnek noktasını içeren esnek açık küme
$(F, E)^*$	$(F, E)$ esnek kümesinin $\tilde{I}$ ve $\tau$ ya göre yerel fonsiyonu
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi

<u>Simge</u>	<u>Açıklama</u>
$\mathcal{B}$	Esnek baz
$\mathcal{N}_{x_e}$	$x_e$ esnek noktasının esnek komşuluklar ailesi
$cl^*$	Esnek kapanış operatörü
$OS(X)$	$X$ üzerinde ki tüm esnek açık kümelerin kümesi
$CS(X)$	$X$ üzerinde ki tüm esnek kapalı kümelerin kümesi
$\tau$	Topolojik uzay



# 1 GİRİŞ

Kesinlik olmayan ve belirsizlik içeren problemlerin matematiksel olarak ifade edilmesinin, klasik mantık yaklaşımıyla mümkün olmadığı anlaşıldıktan sonra bilim insanları yeni teori arayışı içine girmişlerdir. Bilim ve teknolojiadaki gelişmeler, ekonomi, mühendislik gibi alanlarda karşılaşılan karmaşık problemler, kesinlik ilkesinin yetersiz kaldığı bilimsel tasarımlar bu arayışı zorunlu kılmıştır. Bu tür belirsizlikleri aşmak için ilk olarak 17. yüzyıl başlarında Pascal ve Fermat belirsiz bir durumu ele alarak matematiksel olarak olasılık kuramını ortaya atmışlardır. Daha sonra belirsizlik üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Yapılan çalışmalar arasında, 1965 yılında Zadeh tarafından tanıtılan modern mantık altındaki bulanık kümeler teorisi, tıbbi teşhisler, karar analizleri gibi birçok bilimde uygulama alanı bulmuştur. Bu alanda, 1982 yılında Pawlack tarafından yaklaşımli (Rough) küme teorisi, 1993 yılında Gau ve Buehrer tarafından Vague kümeler ve 1994 yılında da Atanassov tarafından aralık matematiği tanımlanmıştır. Fakat bu kavramlar yapısal zorluklara sahiptir ve bazı alanlara uygulamada yetersiz kalmışlardır. Özellikle aşırı derecede kişisel olan üyelik fonksiyonlarının oluşturulması için genel bir yöntem vermek zordur. Bu zorluğun sebebi, parametrelendirme araçlarının yetersiz kalmasından kaynaklanabilir.

Bu yapısal zorluğun üstesinden gelmek için 1999 yılında Molodtsov, esnek kümeler kavramını belirsizlik modeli olarak ortaya atmıştır ve geliştirmiştir. Molodtsov esnek küme teorisini, sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar, oyun teorisi, işlem araştırmaları, Riemann integrasyonu, Perron integrasyonu, olasılık, ölçüm teorisi gibi alanlarda başarılı şekilde kullanmıştır. Esnek küme işlemlerinin verilmesinden sonra esnek küme teorisinin uygulama alanları giderek artmıştır. Maji 2002 yılında karar verme problemleri için ilk uygulamayı, esnek kümeler teorisini kullanarak vermiştir. 2003 yılında bu çalışmasına ek olarak esnek alt küme ve bir esnek kümenin tümleyeni kavramlarını tanımlamıştır. 2005 yılında Pei ve Miao bu çalışmalar ışığı altında esnek kümeler ve bilgi sistemleri arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir.

$X$  kümesi üzerinde ki esnek kümelerin bir koleksiyonu olan  $\tau$  esnek topolojisi, 2011 yılında Shabir ve Naz tarafından tanımlanmıştır. Ayrıca esnek topolojik uzayda esnek açık ve esnek kapalı kümeler, esnek alt uzay, esnek kapanış, esnek noktanın esnek komşuluğu, esnek ayırma aksiyomları, esnek regüler ve esnek normal uzay kavramlarını oluşturmuşlardır. Bu çalışmaların ardından birçok araştırmacı genel topolojik uzayın sonuçlarını esnek topolojik uzaylara taşımaya çalışmıştır. Aynı yıl Hussain ve Ahmad esnek iç, esnek dış ve esnek sınır üzerine, Kharal ve Ahmad ise esnek sınıflar üzerinde esnek dönüşüm kavramı üzerine çalışmalarda bulunmuşlardır. Bundan sonra Aygünoğlu ve Aygün, Nazmul ve Samanta, Zorlutuna, Rong, Lin, Ali ve diğerleri esnek topolojik uzayların önemli özelliklerini çalışmaya devam etmişlerdir.

Kandil 2013 yılında esnek kümeler üzerinde sonlu toplamsallık ve kalıtımsallık özelliklerine göre kapalı bir aile olan esnek ideal kavramını ortaya atmıştır. Daha sonra H.I. Mustafa ve F.M. Sleim esnek ideal topolojik uzayların farklı modelleri üzerine çalışmışlardır. 2014 yılında S.A. El-Sheikh esnek ideal yardımıyla esnek sürekliliği incelemiştir ve yeni özellikler elde etmiştir.

Bu tezde esnek topolojik uzay, esnek ideal topolojik uzay ve esnek yerel fonksiyon kavramları tanıtıldı. Bunlara ait bazı özellikler incelendi. Ayrıca esnek yerel fonksiyonlar yardımıyla esnek topolojik uzaydan daha ince olan  $\star$ -esnek topolojik uzay elde edilerek bu yapı için temel tanım ve teoremlere yer verildi. Daha sonra esnek ideal topolojik uzaylarda regülerlik ve normallik kavramları incelenerek yine bu uzayda bağlantılılık ve kompaktlık üzerine çalışıldı. Yapılan çalışmalara ek olarak esnek ideal topolojik uzaylarda parakompaktlık kavramı tanımlanarak bu kavrama ait temel teoremler ve sonuçlar verildi.

## 2 ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde ilk olarak 1999 yılında Molodstov tarafından tanıtılan esnek küme tanımı ve bu kavrama ait bazı temel özellikler verilecektir. Daha sonra 2011 yılında Shabir ve Naz tarafından ele alınan esnek kümeler üzerindeki topolojik yapı kavramından bahsedilecek ve bu kavramı içeren bazı temel teoremlere yer verilecektir.

### 2.1 Esnek Kümelere Ait Temel Kavramlar ve Özellikleri

**Tanım 2.1. (Molodtsov, 1999)**  $X$  boştan farklı evrensel küme,  $\mathcal{P}(X)$ ,  $X$  kümesinin kuvvet kümesi,  $E$  parametre kümesi ve  $E_1$ ,  $E$  nin boştan farklı alt kümesi olmak üzere  $X$  üzerindeki esnek küme

$$F : E_1 \rightarrow \mathcal{P}(X)$$

dönüşümü ile verilir ve  $(F, E_1)$  ikilisi olarak gösterilir.

Başka bir şekilde ifade edilecek olursa,  $X$  üzerindeki bir esnek küme, evrensel  $X$  kümesinin alt kümelerinin parametrize edilmiş bir ailesidir.  $e \in E_1$  olacak şekilde  $F(e)$  kümesi  $(F, E_1)$  esnek kümesinin  $e$ -yaklaşım kümesi olarak adlandırılır.

Tez boyunca  $X$  boştan farklı evrensel küme,  $E$  parametre kümesi ve  $E_1, E_2 \subseteq E$  olacaktır. Ayrıca,  $SS(X)_E$  ile  $X$  üzerindeki tüm esnek kümelerin kümesi gösterilecektir.

**Örnek 2.2.**  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$  üniversitelerin kümesini,  $E = \{\text{yabancı dilde hazırlık programı, barınma imkanı, burs imkanı, spor salonu, mezuniyet sonrası iş istihdamı}\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  parametreler kümesinde üniversitelere gelecek olan öğrencilerin yararlanabilecekleri özellikleri gösterebilir.  $E_1 = \{e_1, e_2, e_3, e_5\} \subset E$  olmak üzere  $(F, E_1)$  esnek kümesi bu

üniversitelerin sahip olduğu özellikleri gösterir.

$$F : E_1 \rightarrow \mathcal{P}(X)$$

$$F(\text{yabancı dilde hazırlık programı}) = \{x_1, x_3, x_4\}$$

‘ $x_1, x_3, x_4$  üniversiteleri yabancı dilde eğitim programı verir.’

$$F(\text{barınma imkanı}) = \{x_3, x_4\}$$

‘ $x_3$  ve  $x_4$  üniversiteleri barınma imkanı sağlar.’

$$F(\text{burs imkanı}) = \{x_2, x_3, x_5\}$$

‘ $x_2, x_3, x_5$  üniversiteleri burs imkanı sağlar.’

$$F(\text{mezuniyet sonrası iş istihdamı}) = \{x_3\}$$

‘ $x_3$  üniversitesi mezuniyet sonrası iş istihdamı sağlar.’

Bu durumda,  $(F, E_1)$  esnek kümesi

$$(F, E_1) = \{(e_1, \{x_1, x_3, x_4\}), (e_2, \{x_3, x_4\}), (e_3, \{x_2, x_3, x_5\}), (e_5, \{x_3\})\}$$

şeklinde gösterilir.

**Tanım 2.3. (Maji et al., 2003)**  $E_1, E_2, E$  nin boştan farklı alt kümesi olacak şekilde  $(F_1, E_1), (F_2, E_2) \in SS(X)_E$  olsun. Eğer,

(i)  $E_1 \subseteq E_2$  ve

(ii) Her  $e \in E_1$  için  $F_1(e) \subseteq F_2(e)$

durumları sağlanıyorsa  $(F_1, E_1)$ ,  $(F_2, E_2)$  esnek kümesinin esnek alt kümesidir denir ve  $(F_1, E_1) \widetilde{\subseteq} (F_2, E_2)$  ile gösterilir.

**Tanım 2.4. (Maji et al., 2003)**  $(F_1, E_1), (F_2, E_2) \in SS(X)_E$  olsun. Eğer  $(F_1, E_1), (F_2, E_2)$  esnek kümesinin esnek alt kümesi ve  $(F_2, E_2), (F_1, E_1)$  esnek kümesinin esnek alt kümesi ise  $(F_1, E_1)$  eşittir  $(F_2, E_2)$  denir ve  $(F_1, E_1) = (F_2, E_2)$  ile gösterilir.

**Tanım 2.5. (Ali et al., 2009)**  $(F, E) \in SS(X)_E$  olsun.  $(F, E)$  esnek kümesinin  $(F, E)^c$  şeklinde gösterilen tümleyeni  $(F, E)^c = (F^c, E)$  ile tanımlanır. Burada,

$$\begin{aligned} F^c : E &\longrightarrow \mathcal{P}(X) \\ e &\longrightarrow F^c(e) = X - F(e) \end{aligned}$$

şeklindedir ve  $F^c, F$  dönüşümünün esnek tümleyen dönüşümü olarak adlandırılır.

Tanımdan hareketle,  $((F, E)^c)^c = (F, E)$  olduğu açıkça görülür.

**Tanım 2.6. (Shabir and Naz, 2011)** Evrensel  $X$  kümesi üzerinde  $(F_1, E)$  ve  $(F_2, E)$  esnek kümelerinin  $(F_1, E) - (F_2, E)$  ile gösterilen farkı  $(H, E)$  esnek kümesidir. Burada  $(H, E)$ , her  $e \in E$  için  $H(e) = F_1(e) - F_2(e)$  olacak şekilde tanımlanır.

**Tanım 2.7. (Maji et al., 2003)**  $(F, E)$ ,  $X$  üzerinde bir esnek küme olsun. Her  $e \in E$  için  $F(e) = \emptyset$  oluyorsa  $(F, E)$  ye boş esnek küme denir ve  $\widetilde{\emptyset}$  ile gösterilir.

**Tanım 2.8. (Shabir and Naz, 2011)**  $Y$ ,  $X$  kümesinin boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere her  $e \in E$  için  $Y(e) = Y$  sağlanıyorsa  $(Y, E)$  esnek kümesi  $\widetilde{Y}$  ile gösterilir.

Benzer şekilde  $(X, E)$  esnek kümesi  $\tilde{X}$  ile gösterilecektir.  $\tilde{X}$  esnek kümesine mutlak esnek küme denir.

Yukarıdaki tanımlar dikkate alındığında  $(\tilde{X})^c = \tilde{\emptyset}$  ve  $(\tilde{\emptyset})^c = \tilde{X}$  olduğu açıktır.

**Tanım 2.9. (Maji et al., 2003)**  $(F_1, E_1)$  ve  $(F_2, E_2)$ ,  $X$  üzerinde iki esnek küme olsun.  $(F_1, E_1)$  ve  $(F_2, E_2)$  esnek kümelerinin birleşimi olan  $(H, A)$  bir esnek kümedir.  $A = E_1 \cup E_2$  olmak üzere  $(H, A)$  esnek birleşim kümesi her  $e \in A$  için,

$$H(e) = \begin{cases} F_1(e), & e \in (E_1 - E_2) \\ F_2(e), & e \in (E_2 - E_1) \\ F_1(e) \cup F_2(e), & e \in (E_1 \cup E_2) \end{cases}$$

şeklindedir ve  $(H, A) = (F_1, E_1) \tilde{\cup} (F_2, E_2)$  ile gösterilir.

**Tanım 2.10. (Feng et al., 2008)**  $(F_1, E_1)$  ve  $(F_2, E_2)$ ,  $X$  üzerinde iki esnek küme olsun.  $(F_1, E_1)$  ve  $(F_2, E_2)$  esnek kümelerinin kesişimi olan  $(K, B)$  bir esnek kümedir. Burada  $B = E_1 \cap E_2$  olmak üzere  $(K, B)$  esnek kesişim kümesi her  $e \in B$  için,

$$K(e) = F_1(e) \cap F_2(e)$$

şeklindedir ve  $(K, B) = (F_1, E_1) \tilde{\cap} (F_2, E_2)$  ile gösterilir.

**Önerme 2.11. (Shabir and Naz, 2011)**  $(F_1, E)$  ve  $(F_2, E)$ ,  $X$  üzerinde iki esnek küme olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(i)  $((F_1, E) \tilde{\cup} (F_2, E))^c = (F_1, E)^c \tilde{\cap} (F_2, E)^c$ .

(ii)  $((F_1, E) \tilde{\cap} (F_2, E))^c = (F_1, E)^c \tilde{\cup} (F_2, E)^c$ .

**Tanım 2.12. (Zorlutuna et al., 2012)**  $I$  sabit indeks kümesi olmak üzere  $SS(X)_E$  nin boştan farklı bir alt ailesi  $L = \{(F_i, E) : i \in I\}$  olsun.

(i)  $L$  nin birleşimi olan  $(H, A)$  bir esnek kümedir. Burada  $(H, A)$ , her  $e \in E$  için  $H(e) = \bigcup_{i \in I} F_i(e)$  şeklindedir.

(ii)  $L$  nin kesişimi olan  $(K, B)$  bir esnek kümedir. Burada  $(K, B)$ , her  $e \in E$  için  $K(e) = \bigcap_{i \in I} F_i(e)$  şeklindedir.

**Tanım 2.13. (Shabir and Naz, 2011)**  $\tau$ , evrensel  $X$  üzerinde, sabit  $E$  parametreler kümesi ile birlikte esnek kümelerin bir koleksiyonu olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan  $\tau \subseteq SS(X)_E$  ailesine  $X$  üzerinde bir esnek topoloji denir.

(i)  $\tilde{X}, \tilde{\emptyset} \in \tau$ .

(ii)  $\tau$  ailesine ait her sayıda esnek kümenin birleşimi  $\tau$  ailesine aittir.

(iii)  $\tau$  ailesine ait her sonlu sayıda esnek kümenin kesişimi  $\tau$  ailesine aittir.

$(X, \tau, E)$  üçlüsü  $X$  üzerinde bir esnek topolojik uzay olarak adlandırılır.

**Önerme 2.14. (Shabir and Naz, 2011)**  $(X, \tau, E)$ ,  $X$  üzerinde esnek topolojik uzay olsun. O zaman, her  $e \in E$  için  $\tau_e = \{F(e) : (F, E) \in \tau\}$ ,  $X$  üzerinde bir topoloji tanımlar.

**Tanım 2.15. (Shabir and Naz, 2011)**  $(X, \tau, E)$  esnek topolojik uzay olsun.  $\tau$  ailesinin üyeleri  $X$  üzerinde esnek  $\tau$ -açık veya kısaca esnek açık küme olarak adlandırılır.

**Tanım 2.16. (Shabir and Naz, 2011)**  $(X, \tau, E)$  esnek topolojik uzay olsun.  $X$  üzerinde  $(F, E)$  esnek kümesinin relatif tümleyeni  $(F, E)^c$ , esnek açık küme ise  $(F, E)$  esnek kapalı kümedir denir.

Tez boyunca,  $X$  üzerinde tüm esnek açık ve esnek kapalı kümelerin kümesi sırasıyla  $OS(X)$  ve  $CS(X)$  ile gösterilecektir.

**Tanım 2.17. (Shabir and Naz, 2011)**  $(X, \tau, E)$  esnek topolojik uzay ve  $(F, E) \in SS(X)_E$  olsun.  $(F, E)$  esnek kümesini içeren, esnek kapalı kümelerin esnek kesişimi  $(F, E)$  nin esnek kapanışı olarak adlandırılır, yani;

$$cl((F, E)) = \bigcap \{(H, E) : (H, E) \text{ esnek kapalı ve } (F, E) \subseteq (H, E)\} \text{ dir.}$$

**Tanım 2.18.** (Zorlutuna et al., 2012)  $(X, \tau, E)$  esnek topolojik uzay ve  $(G, E) \in SS(X)_E$  olsun.  $(G, E)$  esnek kümesinin içerdiği, esnek açık kümelerin esnek birleşimi  $(G, E)$  nin esnek içi olarak adlandırılır, yani;

$$\text{int}((G, E)) = \tilde{\bigcup}\{(H, E) : (H, E) \text{ esnek açık ve } (H, E) \tilde{\subseteq}(G, E)\} \text{ dir.}$$

**Tanım 2.19.** (Aygünoğlu and Aygün, 2012; Nazmul and Samanta, 2013)  $(X, \tau, E)$  esnek topolojik uzay ve  $\tau$  nun bir alt ailesi  $\mathcal{B}$  olsun. Eğer  $\tau$  nun her bir elemanı  $\mathcal{B}$  nin elemanlarının esnek birleşimi şeklinde ifade edilebiliyorsa  $\mathcal{B}$  sınıfına  $\tau$  esnek topolojisi için bir esnek bazdır denir.

**Önerme 2.20.** (Demir and Özbakır, 2014)  $\mathcal{B} \subseteq SS(X)_E$  olsun. Eğer aşağıdaki özellikler mevcutsa  $\mathcal{B}$  ailesine  $X$  üzerinde bir esnek topoloji için esnek bazdır denir.

(i)  $\tilde{X}$ ,  $\mathcal{B}$  nin elemanlarının esnek birleşimidir.

(ii)  $(F, E), (G, E) \in \mathcal{B}$  ve  $x_e \tilde{\in}(F, E) \tilde{\cap}(G, E)$  için  $x_e \tilde{\in}(H, E) \tilde{\subseteq}(F, E) \tilde{\cap}(G, E)$  olacak şekilde  $(H, E) \in \mathcal{B}$  vardır.

**Tanım 2.21.** (Das and Samanta, 2013; Lin, 2013)  $(F, E) \in SS(X)_E$  olsun.  $F(e) = \{x\}$  ve her bir  $e' \in E - \{e\}$  için  $F(e') = \emptyset$  olacak şekilde  $x \in X$  ve  $e \in E$  oluyorsa  $\tilde{X}$  kümesine ait  $(F, E)$  esnek kümesi, esnek nokta olarak adlandırılır ve  $(F, E)$  esnek kümesi  $x_e$  ile gösterilir.

Tez boyunca,  $X$  üzerindeki tüm esnek noktaların ailesi ve  $x_e$  esnek noktasını içeren esnek açık küme sırasıyla,  $SP(X)_E$  ve  $O_{x_e}$  ile gösterilecektir.

**Tanım 2.22.** (Das and Samanta, 2013)  $x_e$  esnek noktasını  $(F, E)$  esnek kümesi olacak şekilde alalım.  $e \in E$  parametresi için,  $F(e) \subseteq G(e)$  ise  $x_e$  esnek noktası  $(G, E)$  esnek kümesine aittir denir ve  $x_e \tilde{\in}(G, E)$  ile gösterilir.

**Önerme 2.23.** (Das and Samanta, 2013)  $X$  üzerindeki her  $(F, E)$  esnek kümesi kendisine ait tüm esnek noktaların esnek birleşimi şeklinde yazılır, yani;

$$(F, E) = \tilde{\bigcup}_{x_e \tilde{\in}(F, E)} x_e$$



**Önerme 2.24. (Das and Samanta, 2013)**  $(F_1, E), (F_2, E) \in SS(X)_E$  ve  $x_e \in SP(X)_E$  olsun. O zaman bir  $x_e$  esnek noktası için aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- (i)  $x_e \tilde{\in}(F_1, E)$  olması için gerek ve yeter koşul  $x_e \tilde{\notin}(F_1, E)^c$  olmasıdır.
- (ii)  $x_e \tilde{\in}(F_1, E) \tilde{\cup}(F_2, E)$  olması için gerek ve yeter koşul  $x_e \tilde{\in}(F_1, E)$  veya  $x_e \tilde{\in}(F_2, E)$  olmasıdır.
- (iii)  $x_e \tilde{\in}(F_1, E) \tilde{\cap}(F_2, E)$  olması için gerek ve yeter koşul  $x_e \tilde{\in}(F_1, E)$  ve  $x_e \tilde{\in}(F_2, E)$  olmasıdır.

**Tanım 2.25. (Das and Samanta, 2013)**  $x_e, y_{e'} \in SP(X)_E$  olsun.  $e = e'$  ve  $x = y$  ise  $x_e$  eşit  $y_{e'}$  dir. O zaman,  $x_e \neq y_{e'}$  ise  $x \neq y$  veya  $e \neq e'$  sağlanır.

**Tanım 2.26. (Zorlutuna et al., 2012)**  $(X, \tau, E)$  esnek topolojik uzay ve  $(G, E) \in SS(X)_E$  olsun.  $x_e \tilde{\in}(H, E) \tilde{\subseteq}(G, E)$  olacak şekilde bir  $(H, E)$  esnek açık kümesi varsa  $(G, E)$  esnek kümesine  $x_e \tilde{\in} SP(X)_E$  esnek noktasının esnek komşuluğu denir.

**Tanım 2.27. (Zorlutuna et al., 2012)**  $(X, \tau, E)$  esnek topolojik uzay ve  $(G, E) \in SS(X)_E$  olsun.  $(F, E) \tilde{\subseteq}(H, E) \tilde{\subseteq}(G, E)$  olacak şekilde bir  $(H, E)$  esnek açık kümesi varsa  $(G, E)$  esnek kümesine,  $(F, E)$  esnek kümesinin esnek komşuluğu denir.  $x_e$  esnek noktasının esnek komşuluk sistemi  $\mathcal{N}_\tau(x_e)$ ,  $x_e$  esnek noktasının tüm esnek komşuluklarının bir ailesidir.

**Teorem 2.28. (Rong, 2012)**  $(X, \tau, E)$  esnek topolojik uzay ve  $x_e \in SP(X)_E$  olsun.  $x_e \tilde{\in} cl((F, E))$  olması için gerek ve yeter koşul  $x_e$  esnek noktasının her esnek komşuluğunun  $(F, E)$  ile kesişiminin boş esnek kümeden farklı olmasıdır.

**Tanım 2.29. (Shabir and Naz, 2011)**  $(F, E) \in SS(X)_E$  ve  $Y, X$  kümesinin boştan farklı alt kümesi olsun. O zaman  $Y$  üzerindeki  $(F, E)$  esnek kümesi, her  $e \in E$  için,  $F_Y(e) = Y \cap F(e)$  ile tanımlanır ve  $(F_Y, E)$  ile gösterilir. Başka bir şekilde ifade edilecek olursa  $(F_Y, E) = \tilde{Y} \tilde{\cap}(F, E)$  şeklindedir.

**Tanım 2.30.** (Nazmual and Samanta, 2012)  $X$  üzerinde  $(X, \tau, E)$  esnek topolojik uzay ve  $(F, E) \in SS(X)_E$  olsun. O zaman,

$$\tau_{(F,E)} = \{(G, E) \tilde{\cap} (F, E) : (G, E) \in \tau\}$$

$(F, E)$  üzerinde  $\tau$  topolojisinin esnek relatif topolojisi olarak adlandırılır ve  $((F, E), \tau_{(F,E)}, E)$ ,  $(X, \tau, E)$  uzayının esnek alt uzayıdır denir.

**Teorem 2.31.** (Shabir and Naz, 2011)  $(Y, \tau_Y, E)$ ,  $(X, \tau, E)$  esnek topolojik uzayının esnek alt uzayı ve  $(F, E) \in SS(X)_E$  olsun. Bu durumda aşağıdakiler vardır.

- (i)  $(F, E)$ ,  $Y$  de esnek açık küme ve  $\tilde{Y} \in \tau$  ise  $(F, E) \in \tau$ .
- (ii)  $(F, E)$  esnek kümesinin  $Y$  de esnek açık olması için gerek ve yeter koşul bir  $(G, E) \in \tau$  için  $(F, E) = \tilde{Y} \tilde{\cap} (G, E)$  olmasıdır.
- (iii)  $(F, E)$  esnek kümesinin  $Y$  de esnek kapalı olması için gerek ve yeter koşul bir  $(H, E)$  esnek kapalı kümesi için  $(F, E) = \tilde{Y} \tilde{\cap} (H, E)$  olmasıdır.

**Tanım 2.32.** (Aygünoğlu and Aygün, 2012)  $(X, \tau, E)$  esnek topolojik uzay olsun.  $(X, \tau, E)$  uzayının esnek açık kümelerinden oluşan  $\mathcal{U} = \{(U_i, E) : i \in \Lambda\}$  ailesi  $\bigcup_{i \in \Lambda} \tilde{U}_i = \tilde{X}$  koşulunu sağlıyorsa  $\mathcal{U}$  ailesine  $\tilde{X}$  in esnek açık örtüsü denir.

$\tilde{X}$  in  $\mathcal{U}$  esnek açık örtüsünün  $\mathcal{V}$  alt ailesi de  $\tilde{X}$  in bir esnek açık örtüsü oluyorsa  $\mathcal{V}$  ailesine  $\mathcal{U}$  ailesinin bir esnek alt örtüsü denir.

**Tanım 2.33.** (Zorlutuna et al., 2012)  $(X, \tau, E)$  esnek topolojik uzay olsun.  $\tilde{X}$  in her  $\mathcal{U}$  esnek açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa  $(X, \tau, E)$  ye esnek kompakt uzay denir.

**Tanım 2.34.** (Rong, 2012)  $(X, \tau, E)$  esnek topolojik uzay,  $(K, E)$  esnek kapalı küme ve  $x_e \tilde{\notin} (K, E)$  olsun.  $x_e \tilde{\in} (F_1, E)$ ,  $(K, E) \tilde{\subseteq} (F_2, E)$  ve  $(F_1, E) \tilde{\cap} (F_2, E) = \tilde{\emptyset}$  olacak şekilde  $(F_1, E)$ ,  $(F_2, E)$  esnek açık kümeleri varsa  $(X, \tau, E)$  ye esnek regüler uzay denir.

**Tanım 2.35. (Rong, 2012)**  $(X, \tau, E)$  esnek topolojik uzay,  $(K_1, E) \tilde{\cap} (K_2, E) = \tilde{\emptyset}$  olacak şekilde  $(K_1, E)$  ve  $(K_2, E)$  esnek kapalı kümeler olsun.  $(K_1, E) \tilde{\subseteq} (F_1, E)$ ,  $(K_2, E) \tilde{\subseteq} (F_2, E)$  ve  $(F_1, E) \tilde{\cap} (F_2, E) = \tilde{\emptyset}$  olacak şekilde  $(F_1, E)$  ve  $(F_2, E)$  esnek açık kümeleri varsa  $(X, \tau, E)$  uzayına esnek normal uzay denir.

**Tanım 2.36. (Rong, 2012)**  $(X, \tau, E)$  esnek topolojik uzay olsun.  $\tilde{X}$  in her  $\mathcal{U}$  esnek açık örtüsünün sayılabilir alt örtüsü varsa  $(X, \tau, E)$  uzayına esnek Lindelöf uzay denir.

**Tanım 2.37. (Kandil et al., 2014c)**  $(X, \tau, E)$  bir esnek topolojik uzay olsun. Her  $e \in E$  için  $F(e) \cap G(e) = \emptyset$  ise  $(F, E)$  ve  $(G, E)$  ayrıktır denir.

**Tanım 2.38. (Lin, 2013)**  $(X, \tau, E)$  esnek topolojik uzay olsun.  $\tilde{X}$  üzerinde bir esnek ayrışım,  $(F, E) \tilde{\cap} (G, E) = \tilde{\emptyset}$  ve  $\tilde{X} = (F, E) \tilde{\cup} (G, E)$  olacak şekilde boş esnek kümeden farklı esnek açık küme çiftidir.

**Tanım 2.39. (Lin, 2013)**  $(X, \tau, E)$  esnek topolojik uzay ve  $(F, E)$ ,  $(G, E)$  boş esnek kümeden farklı esnek alt kümeler olsun. Bu durumda  $cl((F, E) \tilde{\cap} (G, E)) = (F, E) \tilde{\cap} cl((G, E)) = \tilde{\emptyset}$  ise  $(F, E)$  ve  $(G, E)$  esnek kümelerine esnek ayrılmış kümeler denir.

**Tanım 2.40. (Lin, 2013)**  $\tilde{X}$ , esnek ayrılmış iki kümenin esnek birleşimi şeklinde ifade edilemiyorsa  $(X, \tau, E)$  esnek topolojik uzayına esnek bağlantılıdır denir. Aksi halde  $(X, \tau, E)$  esnek topolojik uzayı esnek bağlantısızdır.

**Tanım 2.41. (Kuratowski, 1933)**  $X$  boştan farklı bir küme ve  $\emptyset \neq I \subseteq P(X)$  olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan  $I$  ailesine  $X$  üzerinde bir idealdir denir.

- (i)  $A \in I$  ve  $B \subseteq A$  ise  $B \in I$ .
- (ii)  $A, B \in I$  ise  $A \cup B \in I$ .

### 3 ESNEK İDEAL ve ESNEK TOPOLOJİK UZAYLAR

#### 3.1 Esnek İdeal, Esnek Yerel Fonksiyon, Genelleştirilmiş Esnek Topoloji

Bu bölümde esnek ideal ile esnek topolojik uzaylar kavramı incelenecektir. Bunun yanısıra esnek yerel fonksiyon ve esnek topolojik uzay kavramlarından faydalanılarak bu yapı üzerindeki esnek ideal ile birlikte yeni bir topolojik yapı kurmamıza yardımcı olan tanımlar verilecek ve bazı teoremler ispatlarıyla birlikte sunulacaktır.

**Tanım 3.1.1. (Kandil et al., 2014a)**  $\tilde{I}$ , evrensel  $X$  kümesi üzerinde,  $E$  parametreler kümesi ile esnek kümelerin boş olmayan bir ailesi olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan  $\tilde{I} \subseteq SS(X)_E$  ailesi  $X$  üzerinde  $E$  parametreler kümesi ile birlikte bir esnek ideal olarak adlandırılır.

- (i)  $(F, E) \in \tilde{I}$  ve  $(G, E) \in \tilde{I}$  ise  $(F, E) \tilde{\cup} (G, E) \in \tilde{I}$ ,
- (ii)  $(F, E) \in \tilde{I}$  ve  $(G, E) \tilde{\subseteq} (F, E)$  ise  $(G, E) \in \tilde{I}$ .

$(X, \tau, E)$  esnek topolojik uzay ve  $\tilde{I}$ ,  $X$  üzerinde aynı  $E$  parametrelerinin kümesi ile birlikte bir esnek ideal olsun. Tez boyunca  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  ile gösterilen uzay esnek ideal topolojik uzay olarak adlandırılacaktır.

**Örnek 3.1.2. (Kandil et al., 2014a)**  $X$  evrensel küme olsun. Aşağıdaki herbir aile  $E$  parametreler kümesi ile  $X$  üzerinde esnek idealdir.

- (i)  $\tilde{I} = \{\emptyset\}$ ,
- (ii)  $\tilde{I} = SS(X)_E = \{(F, E) : (F, E), X \text{ üzerinde esnek kümedir.}\}$ ,
- (iii)  $\tilde{I}_f = \{(F, E) \in SS(X)_E : (F, E) \text{ sonlu bir esnek kümedir.}\}$ ,

$\tilde{I}_f$  ailesine  $\tilde{X}$  in sonlu esnek alt kümelerinin esnek ideali denir.

- (iv)  $\tilde{I}_c = \{(F, E) \in SS(X)_E : (F, E) \text{ sayılabilir bir esnek kümedir.}\}$ ,

$\tilde{I}_c$  ailesi  $\tilde{X}$  in sayılabilir esnek alt kümelerinin esnek ideali olarak adlandırılır.

(v)  $\tilde{I}_{(F,E)} = \{(G, E) \in SS(X)_E : (G, E) \tilde{\subseteq} (F, E)\}$ ,  
 (vi)  $\tilde{I}_n = \{(G, E) \in SS(X)_E : int(cl((G, E))) = \tilde{\emptyset}\}$ ,  $(X, \tau, E)$  üzerinde  $\tilde{I}_n$  ailesi hiçbir yerde yoğun olmayan kümelerin esnek ideali olarak tanımlanır.

Örnek 3.1.2 (vi) de tanımlanan  $\tilde{I}_n$  ailesinin  $X$  üzerinde bir esnek ideal olduğunu gösterelim.

$(X, \tau, E)$  esnek topolojik uzay olmak üzere

(vi<sub>i</sub>)  $(F, E), (G, E) \in \tilde{I}_n$  olsun.

$$\begin{aligned} int(cl((F, E) \tilde{\cup} (G, E))) &= int[cl((F, E)) \tilde{\cup} cl((G, E))] \\ &= int(cl((F, E)) \tilde{\cup} cl((G, E))) = cl((G, E)) \end{aligned}$$

sağlanır. Buradan

$$int(cl((F, E) \tilde{\cup} (G, E))) \tilde{\subseteq} cl((G, E))$$

ve

$$int(cl((F, E) \tilde{\cup} (G, E))) \tilde{\subseteq} int(cl((G, E))) = \tilde{\emptyset}$$

elde edilir. Sonuç olarak  $int(cl((F, E) \tilde{\cup} (G, E))) = \tilde{\emptyset}$  ve  $(F, E) \tilde{\cup} (G, E) \in \tilde{I}$  bulunur.

(vi<sub>ii</sub>)  $(F, E) \in \tilde{I}$  ve  $(G, E) \tilde{\subseteq} (F, E)$  olsun. O halde  $int(cl((G, E))) \tilde{\subseteq} int(cl((F, E)))$  sağlanır. Hipotezden  $int(cl((F, E))) = \tilde{\emptyset}$  olduğundan  $int(cl(G, E)) = \tilde{\emptyset}$  bulunur. Buradan  $(G, E) \in \tilde{I}$  elde edilir.

(vi<sub>i</sub>) ve (vi<sub>ii</sub>) den  $\tilde{I}_n$   $X$  üzerinde bir esnek idealdir.

**Teorem 3.1.3. (Kandil et al., 2014a)**  $\tilde{I}$ ,  $X$  evrensel kümesi üzerinde bir esnek ideal olsun. Her bir  $e \in E$  için  $X$  üzerinde  $\tilde{I}_e = \{F(e) : (F, E) \in \tilde{I}\}$  bir idealdir.

**Kanıt.**(i)  $F(e), G(e) \in \tilde{I}_e$  olsun. Buradan  $(F, E), (G, E) \in \tilde{I}$  şeklinde esnek kümeler vardır. İdeal tanımından  $(F, E) \tilde{\cup} (G, E) \in \tilde{I}$  olur. O halde  $F(e) \cup G(e) \in \tilde{I}_e$  elde edilir.

(ii)  $F(e) \in \tilde{I}_e$  ve  $K \subseteq X$  için  $K \subseteq F(e)$  olsun.  $K = G(e) \subseteq F(e)$  olacak şekilde, esnek noktaların birleşimi olarak yazılabilen  $(G, E)$  esnek kümesi ve  $(F, E) \in \tilde{I}$  esnek kümesi vardır. Buradan  $(G, E) \tilde{\subseteq} (F, E)$  dir. O zaman Tanım 3.1.1 (ii) den  $(G, E) \in \tilde{I}$  olur. Böylece  $G(e) \in \tilde{I}_e$  elde edilir.

**Sonuç 3.1.4.** (Kandil et al., 2014a)  $X$  üzerinde bir  $\tilde{I}$  esnek ideal olsun. Bu durumda, her bir  $e \in E$  için  $\tilde{I}_e$ ,  $X$  üzerinde bir idealdir.

**Kanıt.** Teorem 3.1.3 den kolayca görülebilir.

Aşağıdaki örnek Teorem 3.1.3 ün tersinin genelde doğru olmadığına aittir.

**Örnek 3.1.5.**  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ,  $E = \{e_1, e_2, e_3\}$  olmak üzere  $(F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E)$  esnek kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\begin{aligned} (F_1, E) &= \{(e_1, \{x_1\}), (e_2, \{x_3\}), (e_3, \{x_3\})\}, \\ (F_2, E) &= \{(e_1, \{x_4\}), (e_2, \emptyset), (e_3, \{x_2, x_3\})\}, \\ (F_3, E) &= \{(e_1, \{x_1, x_4\}), (e_2, \{x_3\}), (e_3, \{x_2\})\}, \\ (F_4, E) &= \{(e_1, \{x_1, x_4\}), (e_2, \emptyset), (e_3, \{x_2, x_3\})\}. \end{aligned}$$

O halde  $\tilde{I}_{(e_1)} = \{\emptyset, \{x_1\}, \{x_4\}, \{x_1, x_4\}\}$ ,  $\tilde{I}_{(e_2)} = \{\emptyset, \{x_3\}\}$  ve  $\tilde{I}_{(e_3)} = \{\emptyset, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_2, x_3\}\}$  aileleri,  $X$  kümesi üzerinde ideallerdir.

Fakat  $\tilde{I} = \{\tilde{\emptyset}, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E)\}$  ailesi  $X$  üzerinde bir esnek ideal değildir. Çünkü,  $(F_1, E) \tilde{\cup} (F_2, E) = (G, E)$  için  $(G, E) = \{(e_1, \{x_1, x_4\}), (e_2, \{x_3\}), (e_3, \{x_2, x_3\})\} \notin \tilde{I}$  olur.

**Tanım 3.1.6.** (Kandil et al., 2014a)  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  bir esnek ideal topolojik uzay olsun.  $O_{x_e}$ ,  $x_e$  esnek noktasını içeren esnek açık küme olmak üzere,

$$(F, E)^*(\tilde{I}, \tau) = \tilde{\cup}\{x_e : \text{Her } O_{x_e} \in \tau \text{ için } O_{x_e} \tilde{\cap} (F, E) \notin \tilde{I}\}$$

$(F, E)$  esnek kümesinin,  $\tilde{I}$  ve  $\tau$  ya göre yerel fonksiyonu olarak adlandırılır. Tez boyunca  $(F, E)^*(\tilde{I}, \tau)$  yerine kısaca  $(F, E)^*$  kullanılacaktır.

**Uyarı 3.1.7.**  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  bir esnek ideal topolojik uzay ve  $(F, E) \in SS(X)_E$  olsun. Bu durumda,

- (i)  $\tilde{I} = \{\tilde{\emptyset}\}$  ise  $(F, E)^* = cl(F, E)$ ,
- (ii)  $\tilde{I} = SS(X)_E$  ise  $(F, E)^* = \tilde{\emptyset}$

sağlanır.

**Teorem 3.1.8. (Kandil et al., 2014a)**  $(X, \tau, E)$  bir esnek topolojik uzayı üzerinde  $\tilde{I}, \tilde{J}$  iki esnek ideal olsun.  $(F, E), (G, E), (H, E) \in SS(X)_E$  olmak üzere aşağıdakiler vardır;

- (i)  $(\tilde{\emptyset})^* = \tilde{\emptyset}$ .
- (ii)  $(F, E) \tilde{\subseteq} (G, E) \Rightarrow (F, E)^* \tilde{\subseteq} (G, E)^*$ .
- (iii)  $\tilde{I} \subseteq \tilde{J} \Rightarrow (F, E)^*(\tilde{J}) \tilde{\subseteq} (F, E)^*(\tilde{I})$ .
- (iv)  $(F, E)^* \tilde{\subseteq} cl((F, E))$ .
- (v)  $(F, E)^*$  esnek kapalı kümedir.
- (vi)  $((F, E)^*)^* \tilde{\subseteq} (F, E)^*$ .
- (vii)  $((F, E) \tilde{\cup} (G, E))^* = (F, E)^* \tilde{\cup} (G, E)^*$ .
- (viii)  $\tilde{\bigcup}_j (F_j, E)^* = (\tilde{\bigcup}_j (F_j, E))^*$ .
- (ix)  $((F, E) \tilde{\cap} (G, E))^* \tilde{\subseteq} (F, E)^* \tilde{\cap} (G, E)^*$ .
- (x)  $(F, E)^* - (G, E)^* = ((F, E) - (G, E))^* - (G, E)^*$   
 $\tilde{\subseteq} ((F, E) - (G, E))^*$ .
- (xi)  $(G, E) \in \tau \Rightarrow (G, E) \tilde{\cap} (F, E)^* = (G, E) \tilde{\cap} ((G, E) \tilde{\cap} (F, E))^*$   
 $\tilde{\subseteq} ((G, E) \tilde{\cap} (F, E))^*$ .
- (xii)  $(H, E) \in \tilde{I} \Rightarrow ((F, E) \tilde{\cup} (H, E))^* = (F, E)^* = ((F, E) - (H, E))^*$ .

**Kanıt.** (i) Tanım 3.1.6 dan kolayca görülür.

(ii)  $x_e \tilde{\in} (F, E)^*$  olsun. Bu durumda, her  $O_{x_e} \in \tau$  için,  $O_{x_e} \tilde{\cap} (F, E) \notin \tilde{I}$  vardır.  $O_{x_e} \tilde{\cap} (F, E) \tilde{\subseteq} O_{x_e} \tilde{\cap} (G, E)$  ve  $O_{x_e} \tilde{\cap} (F, E) \notin \tilde{I}$  olduğundan  $O_{x_e} \tilde{\cap} (G, E) \notin \tilde{I}$  bulunur. Tanım 3.1.6 ile  $x_e \tilde{\in} (G, E)^*$  sağlanır. Sonuç olarak  $(F, E)^* \tilde{\subseteq} (G, E)^*$  elde edilir.

(iii)  $x_e \tilde{\in} (F, E)^*(\tilde{J})$  olsun. Bu durumda, her  $O_{x_e} \in \tau$  için  $O_{x_e} \tilde{\cap} (F, E) \notin \tilde{J}$  sağlanır.  $\tilde{I} \subseteq \tilde{J}$  olduğundan  $O_{x_e} \tilde{\cap} (F, E) \notin \tilde{I}$  gerçekleşir. O halde,  $x_e \tilde{\in} (F, E)^*(\tilde{I})$  bulunur. Buradan  $(F, E)^*(\tilde{J}) \tilde{\subseteq} (F, E)^*(\tilde{I})$  elde edilir.

(iv)  $x_e \notin cl((F, E))$  olsun. O halde  $O_{x_e} \tilde{\cap} (F, E) = \tilde{\emptyset}$  olacak şekilde bir  $O_{x_e} \in \tau$  vardır.  $\tilde{\emptyset} \in \tilde{I}$  olduğundan  $x_e \notin (F, E)^*$  olur. Buradan,  $(F, E)^* \tilde{\subseteq} cl((F, E))$

sağlanır.

(v)  $x_e \tilde{\in} cl((F, E)^*)$  olsun. Teorem 2.28 den, her  $O_{x_e} \in \tau$  için,  $O_{x_e} \tilde{\cap}((F, E)^*) \neq \emptyset$  sağlanır. O halde  $y_{e'} \tilde{\in} O_{x_e} \tilde{\cap}(F, E)^*$  olacak şekilde bir  $y_{e'}$  esnek noktası vardır. Bu durumda  $y_{e'} \in O_{x_e}$  ve  $y_{e'} \in (F, E)^*$  sağlanır. Buradan, her  $O_{y_{e'}} \in \tau$  için  $O_{y_{e'}} \tilde{\cap}(F, E) \notin \tilde{I}$  vardır. O halde  $O_{x_e} \tilde{\cap}(F, E) \notin \tilde{I}$  ve  $x_e \tilde{\in}(F, E)^*$  ve  $cl(F, E)^* \tilde{\subseteq}(F, E)^*$  elde edilir. Her zaman  $(F, E)^* \tilde{\subseteq} cl(F, E)^*$  sağlandığından  $cl(F, E)^* = (F, E)^*$  bulunur.

(vi) (iv) den  $((F, E)^*)^* \tilde{\subseteq} cl(F, E)^*$  sağlanır. O zaman  $((F, E)^*)^* \tilde{\subseteq} cl(F, E)^* = (F, E)^*$  (v) koşulundan elde edilir.

(vii)  $x_e \tilde{\in} ((F, E) \tilde{\cup}(G, E))^*$  olsun. O zaman her  $O_{x_e} \in \tau$  için,  $O_{x_e} \tilde{\cap}((F, E) \tilde{\cup}(G, E)) = (O_{x_e} \tilde{\cap}(F, E)) \tilde{\cup}(O_{x_e} \tilde{\cap}(G, E)) \notin \tilde{I}$  vardır. O halde her  $O_{x_e} \in \tau$  için,  $O_{x_e} \tilde{\cap}(F, E) \notin \tilde{I}$  veya  $O_{x_e} \tilde{\cap}(G, E) \notin \tilde{I}$  dir. Tanım 3.1.6 dan ya  $x_e \tilde{\in}(F, E)^*$  ya da  $x_e \tilde{\in}(G, E)^*$  gerçekleşir. Böylece,  $x_e \tilde{\in}(F, E)^* \tilde{\cup}(G, E)^*$  olur. Buradan  $((F, E) \tilde{\cup}(G, E))^* \tilde{\subseteq}(F, E)^* \tilde{\cup}(G, E)^*$  elde edilir.

Tersine  $(F, E) \tilde{\subseteq}((F, E) \tilde{\cup}(G, E))$  ve  $(G, E) \tilde{\subseteq}((F, E) \tilde{\cup}(G, E))$  olduğundan, (ii) den  $(F, E)^* \tilde{\subseteq}((F, E) \tilde{\cup}(G, E))^*$  ve  $(G, E)^* \tilde{\subseteq}((F, E) \tilde{\cup}(G, E))^*$  sağlanır. O halde  $(F, E)^* \tilde{\cup}(G, E)^* \tilde{\subseteq}((F, E) \tilde{\cup}(G, E))^*$  bulunur. Sonuç olarak  $((F, E) \tilde{\cup}(G, E))^* = (F, E)^* \tilde{\cup}(G, E)^*$  elde edilir.

(viii) (vii) den kolayca görülür.

(ix)  $(F, E) \tilde{\cap}(G, E) \tilde{\subseteq}(F, E)$  ve  $(F, E) \tilde{\cap}(G, E) \tilde{\subseteq}(G, E)$  vardır. O halde (ii) den  $((F, E) \tilde{\cap}(G, E))^* \tilde{\subseteq}(F, E)^*$  ve  $((F, E) \tilde{\cap}(G, E))^* \tilde{\subseteq}(G, E)^*$  sağlanır. O zaman  $((F, E) \tilde{\cap}(G, E))^* \tilde{\subseteq}(F, E)^* \tilde{\cap}(G, E)^*$  elde edilir.

(x)  $(F, E) - (G, E) \tilde{\subseteq}(F, E)$  olduğundan  $((F, E) - (G, E))^* \tilde{\subseteq}(F, E)^*$  sağlanır. Buradan,

$$((F, E) - (G, E))^* - (G, E)^* \tilde{\subseteq}(F, E)^* - (G, E)^* \quad \dots \quad (1)$$

bulunur.



$$\text{Tersine, } (F, E) = [(F, E) - (G, E)]\tilde{\cup}[(F, E)\tilde{\cap}(G, E)]$$

ve buradan

$$\begin{aligned} (F, E)^* &= [[(F, E) - (G, E)]\tilde{\cup}[(F, E)\tilde{\cap}(G, E)]]^* \\ &= [(F, E) - (G, E)]^*\tilde{\cup}[(F, E)\tilde{\cap}(G, E)]^* \\ &\tilde{\subseteq}[(F, E) - (G, E)]^*\tilde{\cup}(G, E)^* \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} (F, E)^* - (G, E)^* &\tilde{\subseteq} [[(F, E) - (G, E)]^*\tilde{\cup}(G, E)^*] - (G, E)^* \\ &= [[(F, E) - (G, E)]^*\tilde{\cup}(G, E)^*]\tilde{\cap}((G, E)^*)^c \\ &= [(F, E) - (G, E)]^* - (G, E)^* \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$(F, E)^* - (G, E)^* \tilde{\subseteq} [(F, E) - (G, E)]^* - (G, E)^* \quad \dots \quad (2)$$

gerçeklenir.

(1) ve (2) den  $(F, E)^* - (G, E)^* = [(F, E) - (G, E)]^* - (G, E)^*$  elde edilir.

Ayrıca  $x_e \tilde{\in} [(F, E) - (G, E)]^* - (G, E)^*$  ise  $x_e \tilde{\in} [(F, E) - (G, E)]^*$  sağlanır.

O halde  $(F, E)^* - (G, E)^* = [(F, E) - (G, E)]^* - (G, E)^* \tilde{\subseteq} [(F, E) - (G, E)]^*$  vardır.

(xi)  $(G, E) \in \tau$  ve  $x_e \tilde{\in} (G, E)\tilde{\cap}(F, E)^*$  olsun. O zaman,

$$x_e \tilde{\in} (G, E) \quad \dots \quad (1)$$

ve  $x_e \tilde{\in} (F, E)^*$  sağlanır. O halde her  $O_{x_e} \in \tau$  için,  $(O_{x_e}\tilde{\cap}(F, E)) \notin \tilde{I}$  vardır.  $(G, E)$ ,  $x_e$  yi içeren  $\tau$ -açık esnek küme ve  $O_{x_e}\tilde{\cap}(G, E) \in \tau$  olduğu için  $[O_{x_e}\tilde{\cap}(G, E)]\tilde{\cap}(F, E) \notin \tilde{I}$  elde edilir. Buradan her  $O_{x_e} \in \tau$  için  $O_{x_e}\tilde{\cap}[(G, E)\tilde{\cap}(F, E)] \notin \tilde{I}$  olur. O zaman,

$$x_e \tilde{\in} [(G, E)\tilde{\cap}(F, E)]^* \quad \dots \quad (2)$$

gerçeklenir. O halde (1) ve (2) den  $x_e \tilde{\in} [(G, E)\tilde{\cap}(F, E)]^*\tilde{\cap}(G, E)$  bulunur.

Buradan,

$$(G, E)\tilde{\cap}(F, E)^*\tilde{\subseteq}[(G, E)\tilde{\cap}(F, E)]^*\tilde{\cap}(G, E) \quad \dots \quad (3)$$

elde edilir.

Tersine,  $[(F, E)\tilde{\cap}(G, E)]\tilde{\subseteq}(F, E)$  olduğundan  $[(F, E)\tilde{\cap}(G, E)]^*\tilde{\subseteq}(F, E)^*$  bulunur. Buradan,

$$(G, E)\tilde{\cap}[(F, E)\tilde{\cap}(G, E)]^*\tilde{\subseteq}(G, E)\tilde{\cap}(F, E)^* \quad \dots \quad (4)$$

sağlanır.

(3) ve (4) den  $(G, E)\tilde{\cap}(F, E)^* = [(G, E)\tilde{\cap}(F, E)]^*\tilde{\cap}(G, E)$  gerçekleşir.

Ayrıca,  $x_e\tilde{\in} [(G, E)\tilde{\cap}(F, E)]^*\tilde{\cap}(G, E)$  ise  $x_e\tilde{\in} [(G, E)\tilde{\cap}(F, E)]^*$  vardır.

Buradan,  $(G, E)\tilde{\cap}(F, E)^* = (G, E)\tilde{\cap}((G, E)\tilde{\cap}(F, E))^*\tilde{\subseteq}((G, E)\tilde{\cap}(F, E))^*$

dir.

(xii)  $(H, E) \in \tilde{I}$  ve  $x_e\tilde{\in}[(F, E)\tilde{\cup}(H, E)]^*$  olsun. O zaman her  $O_{x_e} \in \tau$  için  $O_{x_e}\tilde{\cap}[(F, E)\tilde{\cup}(H, E)] \notin \tilde{I}$  dir. Bu durumda  $[O_{x_e}\tilde{\cap}(H, E)]\tilde{\cup}[O_{x_e}\tilde{\cap}(F, E)] \notin \tilde{I}$  elde edilir. O zaman ya  $O_{x_e}\tilde{\cap}(H, E) \notin \tilde{I}$  ya da  $O_{x_e}\tilde{\cap}(F, E) \notin \tilde{I}$  dir. Fakat  $O_{x_e}\tilde{\cap}(H, E) \notin \tilde{I}$  ile  $(H, E) \notin \tilde{I}$  gerçekleşir. Her  $O_{x_e} \in \tau$  için  $O_{x_e}\tilde{\cap}(F, E) \notin \tilde{I}$  olduğundan  $x_e\tilde{\in}(F, E)^*$  sağlanır. O halde  $[(F, E)\tilde{\cup}(H, E)]^*\tilde{\subseteq}(F, E)^*$  bulunur.

Tersine  $(F, E)\tilde{\subseteq}[(H, E)\tilde{\cup}(F, E)]$  olduğundan  $(F, E)^*\tilde{\subseteq}[(H, E)\tilde{\cup}(F, E)]^*$  bulunur. Sonuç olarak  $(F, E)^* = [(H, E)\tilde{\cup}(F, E)]^*$  olur.

$[(F, E) - (H, E)]\tilde{\subseteq}(F, E)$  olduğundan  $[(F, E) - (H, E)]^*\tilde{\subseteq}(F, E)^*$  elde edilir.

Tersine,  $x_e\tilde{\notin}[(F, E) - (H, E)]^*$  olsun. O zaman  $O_{x_e}\tilde{\cap}[(F, E) - (H, E)] \in \tilde{I}$  olacak şekilde bir  $O_{x_e} \in \tau$  vardır. Hipotezden,  $(H, E) \in \tilde{I}$  olduğundan  $(H, E)\tilde{\cup}[O_{x_e}\tilde{\cap}((F, E) - (H, E))] \in \tilde{I}$  ve  $(H, E)\tilde{\cup}[O_{x_e}\tilde{\cap}(F, E)] \in \tilde{I}$  sağlanır. O halde  $O_{x_e} \in \tau$  için  $O_{x_e}\tilde{\cap}(F, E) \in \tilde{I}$  ve  $x_e\tilde{\notin}(F, E)^*$  vardır . Buradan  $(F, E)^*\tilde{\subseteq}[(F, E) - (H, E)]^*$  elde edilir.

O halde  $(H, E) \in \tilde{I}$  ise  $((F, E)\tilde{\cup}(H, E))^* = (F, E)^* = ((F, E) - (H, E))^*$  bulunur.

Örnek 3.1.9, Teorem 3.1.8 (ix) koşulunun tersinin her zaman doğru olmadığına aittir.

**Örnek 3.1.9.**  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $E = \{e_1, e_2\}$  olsun.  $X$  üzerinde  $(F_1, E)$ ,  $(F_2, E)$ ,  $(F_3, E)$ ,  $(G, E)$ ,  $(H, E)$  esnek kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$(F_1, E) = \{(e_1, \{x_1\}), (e_2, \{x_2, x_3\})\}$$

$$(F_2, E) = \{(e_1, \{x_3\}), (e_2, \emptyset)\}$$

$$(F_3, E) = \{(e_1, \{x_1, x_3\}), (e_2, \{x_2, x_3\})\}$$

$$(G, E) = \{(e_1, \{x_3\}), (e_2, \emptyset)\}$$

$$(H, E) = \{(e_1, \emptyset), (e_2, X)\}$$

$X$  üzerinde bir esnek topoloji  $\tau = \{\tilde{\emptyset}, \tilde{X}, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E)\}$  alınsın ve  $(I_1, E)$ ,  $(I_2, E)$ ,  $(I_3, E)$ ,  $(I_4, E)$ ,  $(I_5, E)$ ,  $(I_6, E)$ ,  $(I_7, E)$  esnek kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$(I_1, E) = \{(e_1, \{x_1\}), (e_2, \{x_2, x_3\})\}$$

$$(I_2, E) = \{(e_1, \{x_1\}), (e_2, \emptyset)\}$$

$$(I_3, E) = \{(e_1, \{x_1\}), (e_2, \{x_3\})\}$$

$$(I_4, E) = \{(e_1, \{x_1\}), (e_2, \{x_2\})\}$$

$$(I_5, E) = \{(e_1, \emptyset), (e_2, \{x_2, x_3\})\}$$

$$(I_6, E) = \{(e_1, \emptyset), (e_2, \{x_2\})\}$$

$$(I_7, E) = \{(e_1, \emptyset), (e_2, \{x_3\})\}$$

Bu durumda  $\tilde{I} = \{(I_1, E), (I_2, E), (I_3, E), (I_4, E), (I_5, E), (I_6, E), (I_7, E)\}$   $X$  üzerinde bir esnek idealdir.

$(G, E)^* = \{(e_1, \{x_2, x_3\}), (e_2, \{x_1\})\}$  ve  $(H, E)^* = \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \{x_1\})\}$  olduğundan,

$$((G, E) \tilde{\cap} (H, E))^* = (\tilde{\emptyset})^* = \tilde{\emptyset}$$

bulunur. Ayrıca,

$$((G, E)^* \tilde{\cap} (H, E)^*) = \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \{x_1\})\}$$

elde edilir. O halde ,

$$(G, E)^* \tilde{\cap} (H, E)^* \not\subseteq ((G, E) \tilde{\cap} (H, E))^*$$

olduğu görülür.

Aşağıdaki Örnek 3.1.10, Teorem 3.1.8 (x) koşulunun tersinin her zaman doğru olmadığına aittir.

**Örnek 3.1.10.**  $(X, \tau, E)$  Örnek 3.1.9 da verilen esnek topolojik uzay ve  $\tilde{I}$ ,  $X$  üzerinde tanımlanan esnek ideal olmak üzere  $(T, E), (V, E) \subseteq SS(X)_E$  esnek kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$(T, E) = \{(e_1, \{x_1, x_3\}), (e_2, \{x_2, x_3\})\}, (V, E) = \{(e_1, \emptyset), (e_2, \{x_1, x_2, x_3\})\}$$

ve

$$(T, E)^* = \{(e_1, \{x_2, x_3\}), (e_2, \{x_1\})\}, (V, E)^* = \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \{x_1\})\}$$

olduğundan

$$(T, E)^* - (V, E)^* = \{(e_1, \{x_3\}), (e_2, \emptyset)\}$$

bulunur. Ayrıca,

$$(T, E) - (V, E) = \{(e_1, \{x_1, x_3\}), (e_2, \emptyset)\}$$

elde edilir. O halde

$$((T, E) - (V, E))^* = \{(e_1, \{x_2, x_3\}), (e_2, \{x_1\})\}$$

olur. Sonuç olarak,

$$((T, E) - (V, E))^* \not\subseteq (T, E)^* - (V, E)^*$$

olduğu görülür.

**Teorem 3.1.11. (Kandil et al., 2014a)**  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  esnek ideal topolojik uzay olsun. O zaman,

$$cl^*(F, E) = (F, E) \tilde{\cup} (F, E)^*$$

ile tanımlanan  $cl^* : SS(X)_E \rightarrow SS(X)_E$  operatörü esnek kapanış operatörüdür.

**Kanıt.** (i) Teorem 3.1.8 (i) den  $cl^*(\tilde{\emptyset}) = \tilde{\emptyset} \tilde{\cup} (\tilde{\emptyset})^* = \tilde{\emptyset} \tilde{\cup} \tilde{\emptyset} = \tilde{\emptyset}$  bulunur.

(ii) Her  $(F, E) \in SS(X)_E$  için  $(F, E) \subseteq cl^*(F, E)$  olduğu açıktır.

(iii) Teorem 3.1.8 (vii) yardımıyla

$$\begin{aligned} cl^*[(F, E) \tilde{\cup} (G, E)] &= [(F, E) \tilde{\cup} (G, E)] \tilde{\cup} [(F, E) \tilde{\cup} (G, E)]^* \\ &= [(F, E) \tilde{\cup} (G, E)] \tilde{\cup} [(F, E)^* \tilde{\cup} (G, E)^*] \\ &= (F, E) \tilde{\cup} (F, E)^* \tilde{\cup} (G, E) \tilde{\cup} (G, E)^* \\ &= cl^*(F, E) \tilde{\cup} cl^*(G, E) \end{aligned}$$

elde edilir.

(iv) Teorem 3.1.8 (vi) yardımıyla

$$\begin{aligned}
 cl^*(cl^*(F, E)) &= cl^*((F, E)\tilde{U}(F, E)^*) \\
 &= ((F, E)\tilde{U}(F, E)^*)\tilde{U}((F, E)\tilde{U}(F, E)^*)^* \\
 &= ((F, E)\tilde{U}(F, E)^*)\tilde{U}(F, E)^*\tilde{U}((F, E)^*)^* \\
 &= (F, E)\tilde{U}(F, E)^* = cl^*(F, E)
 \end{aligned}$$

bulunur.

**Tanım 3.1.12. (Kandil et al., 2014a)**  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  esnek ideal topolojik uzay ve  $cl^* : SS(X)_E \rightarrow SS(X)_E$  esnek kapanış operatörü olsun.  $X$  üzerinde  $\tau$  dan daha ince,  $\star$ -esnek topoloji olarak adlandırılan  $\tau^*(\tilde{I})$  veya  $\tau^*$  ile gösterilen, tek bir topoloji vardır ve bu topoloji,

$$\tau^*(\tilde{I}) = \{(F, E) \in SS(X)_E : cl^*(F, E)^c = (F, E)^c\}$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek 3.1.13,  $\star$ -esnek topolojiye ait örnekler olarak aşağıda verilmiştir.

**Örnek 3.1.13. (Kandil et al., 2014a)**

(i)  $\tilde{I} = \{\emptyset\}$  ise her  $(F, E) \in SS(X)_E$  için  $(F, E)^*(\tilde{I}, \tau) = cl(F, E)$  olduğundan,  $cl^*(F, E) = cl(F, E)$  ve  $\tau^* = \tau$  sağlanır.

(ii)  $\tilde{I} = SS(X)_E$  ise her  $(F, E) \in SS(X)_E$  için  $(F, E)^*(\tilde{I}, \tau) = \emptyset$  olduğundan  $cl^*(F, E) = (F, E)$  ve  $\tau^* = SS(X)_E$  bulunur. Burada  $\tau^*$  esnek ayrık topoloji olarak adlandırılır.

(iii)  $\tilde{I} \subseteq \tilde{J}$  ise o halde  $(F, E)^*(\tilde{J}, \tau) \supseteq (F, E)^*(\tilde{I}, \tau)$  olur. O halde  $(X, \tau^*(\tilde{J}), E)$   $\star$ -esnek topolojik uzayı,  $(X, \tau^*(\tilde{I}), E)$   $\star$ -esnek topolojik uzayından daha incedir.

(iv)  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$  ve  $E = \{e\}$  olsun.  $\tau = \{\tilde{X}, \emptyset, (F, E)\}$   $X$  üzerinde bir esnek topoloji olmak üzere  $(F, E)$  esnek kümesi,

$$(F, E) = \{e, \{x_2\}\}$$

olarak ve  $\tilde{I} = \{\tilde{\emptyset}, (G, E)\}$  bir esnek ideal olmak üzere,  $(G, E)$  esnek kümesi,

$$(G, E) = \{e, \{x_2\}\}$$

şeklinde tanımlansın.

O zaman  $(F_1, E), (F_2, E)$ ,  $X$  üzerinde  $(F_1, E) = \{e, \{x_2\}\}$  ve  $(F_2, E) = \{e, \{x_1, x_3\}\}$  şeklinde tanımlanan esnek kümeler olmak üzere  $\tau^* = \{\tilde{X}, \tilde{\emptyset}, (F_1, E), (F_2, E)\}$  elde edilir.

(v)  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$  ve  $E = \{e\}$  olsun.  $\tau = \{\tilde{X}, \tilde{\emptyset}, (F_1, E), (F_2, E)\}$   $X$  üzerinde bir esnek topoloji olmak üzere,  $(F_1, E), (F_2, E)$  esnek kümeleri,

$$(F_1, E) = \{e, \{x_2\}\}, (F_2, E) = \{e, \{x_1, x_2\}\}$$

şeklinde tanımlansın.  $\tilde{I} = \{\tilde{\emptyset}, (G_1, E), (G_2, E), (G_3, E)\}$  bir esnek ideal olmak üzere  $(G_1, E), (G_2, E), (G_3, E)$  esnek kümeleri  $(G_1, E) = \{e, \{x_1\}\}, (G_2, E) = \{e, \{x_2\}\}$  ve  $(G_3, E) = \{e, \{x_1, x_2\}\}$  ile tanımlansın.

Bu durumda  $\tau^* = SS(X)_E$  bulunur.

**Teorem 3.1.14. (Kandil et al., 2014a)**  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  esnek ideal topolojik uzay olsun. O halde,

$$\mathcal{B}(\tilde{I}, \tau) = \{(F, E) - (G, E) : (F, E) \in \tau, (G, E) \in \tilde{I}\}$$

sınıfı  $\tau^*(\tilde{I})$  topolojisi için esnek bazdır.

**Kanıt.** (i)  $\tilde{X} \in \tau$  ve  $\tilde{\emptyset} \in \tilde{I}$  olduğundan  $\tilde{X} - \tilde{\emptyset} \in \mathcal{B}$  olur.  $\tilde{X} \in \mathcal{B}$  olduğundan  $\bigcup_{j \in J} ((F_j, E) - (G_j, E)) = \tilde{X}$  olur.

(ii)  $(B_1, E), (B_2, E) \in \mathcal{B}$  ve  $x_e \tilde{\in} (B_1, E) \tilde{\cap} (B_2, E)$  olsun.  $(B_1, E) = (F_1, E) - (G_1, E)$  ve  $(B_2, E) = (F_2, E) - (G_2, E)$  olacak şekilde  $(F_1, E), (F_2, E) \in$

$\tau$  ve  $(G_1, E), (G_2, E) \in \mathcal{B}$  vardır.  $x_e \tilde{\in} (B_1, E) \tilde{\cap} (B_2, E)$  için  $x_e \tilde{\in} ((F_1, E) - (G_1, E)) \tilde{\cap} ((F_2, E) - (G_2, E))$  vardır. Bu durumda,  $x_e \tilde{\in} ((F_1, E) \tilde{\cap} (F_2, E)) - ((G_1, E) \tilde{\cup} (G_2, E)) \in \mathcal{B}(\tilde{I}, \tau)$  elde edilir.

Sonuç olarak,  $\mathcal{B}, \tau^*$  topolojisinin esnek bazıdır.

Örnek 3.1.15  $\tau^*$  topolojisi için esnek baz oluşturulmasıyla ilgilidir.

**Örnek 3.1.15.**  $(X, \tau, E)$  Örnek 3.1.13 (v) de verilen esnek topolojik uzay ve  $\tilde{I}$ ,  $X$  üzerinde tanımlanan esnek ideal olsun.  $X$  üzerinde  $(B_1, E) = \{(e, \{x_1\})\}, (B_2, E) = \{(e, \{x_2\})\}, (B_3, E) = \{(e, \{x_3\})\}, (B_4, E) = \{(e, \{x_1, x_3\})\}, (B_5, E) = \{(e, \{x_2, x_3\})\}$  esnek kümeleri Teorem 3.1.14 den elde ediliyor. O halde,

$\mathcal{B}(\tilde{I}, \tau) = \{\tilde{X}, \tilde{\emptyset}, (B_1, E), (B_2, E), (B_3, E), (B_4, E), (B_5, E)\}$  sınıfı, üzerindeki  $\tau^*(\tilde{I})$  topolojisi için esnek bazdır.

**Sonuç 3.1.16. (Kandil et al., 2014a)**  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  esnek ideal topolojik uzay olsun. O zaman,  $\tau \subseteq \mathcal{B}(\tilde{I}, \tau) \subseteq \tau^*(\tilde{I})$  dir.

**Kanıt.**  $(F, E) \in \tau$  olsun. O halde,  $(F, E) - \tilde{\emptyset} = (F, E) \in \mathcal{B}(\tilde{I}, \tau)$  sağlanır. Buradan,  $\tau \subseteq \mathcal{B}(\tilde{I}, \tau)$  bulunur.

$(F, E) \in \tau$  ve  $(G, E) \in \tilde{I}$  olacak şekilde  $(F, E) - (G, E) \in \mathcal{B}(\tilde{I}, \tau)$  olsun.

$$\begin{aligned} cl^*[(F, E) - (G, E)]^c &= cl^*[(F, E)^c \tilde{\cup} (G, E)] \\ &= [(F, E)^c \tilde{\cup} (G, E)] \tilde{\cup} [(F, E)^c \tilde{\cup} (G, E)]^* \\ &= [(F, E)^c \tilde{\cup} (G, E)] \tilde{\cup} ((F, E)^c)^* \tilde{\cup} (G, E)^* \\ &= (F, E)^c \tilde{\cup} (G, E) \\ &= [(F, E) - (G, E)]^c \end{aligned}$$

olur. O halde,  $cl^*[(F, E) - (G, E)]^c = [(F, E) - (G, E)]^c$  sağlanır. Buradan  $(F, E) - (G, E) \in \tau^*(\tilde{I})$  ve  $\mathcal{B}(\tilde{I}, \tau) \subseteq \tau^*(\tilde{I})$  bulunur.

Sonuç olarak,  $\tau \subseteq \mathcal{B}(\tilde{I}, \tau) \subseteq \tau^*(\tilde{I})$  elde edilir.

### 3.2 Esnek Topoloji ile Esnek İdealin Uyumluluğu

Bu kısımda esnek ideal ile esnek topolojinin uyumluluğu tanımı yapılarak bu kavrama ait bazı denklik koşulları incelenecektir.

**Tanım 3.2.1. (Kandil et al., 2014a)**  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  esnek ideal topolojik uzay olsun. Her  $(F, E) \in SS(X)_E$  için,

” $(F, E)$  esnek kümesinin içerdiği her  $x_e$  esnek noktası için  $O_{x_e} \tilde{\cap}(F, E) \in \tilde{I}$  olacak şekilde bir  $O_{x_e}$  esnek açık kümesi varsa bu durumda  $(F, E) \in \tilde{I}$ ”

koşulu sağlanırsa  $\tau$  esnek topolojisi  $\tilde{I}$  esnek ideali ile uyumludur denir ve  $\tau \sim \tilde{I}$  ile gösterilir.

**Teorem 3.2.2. (Kandil et al., 2014a)**  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  esnek ideal topolojik uzay ve  $\tau \sim \tilde{I}$  olsun. O zaman aşağıdakiler denktir;

- (i) Her  $(F, E) \in SS(X)_E$  için  $(F, E) \tilde{\cap}(F, E)^* = \tilde{\emptyset}$  ise  $(F, E)^* = \tilde{\emptyset}$ ,
- (ii) Her  $(F, E) \in SS(X)_E$  için  $((F, E) - (F, E)^*)^* = \tilde{\emptyset}$ ,
- (iii) Her  $(F, E) \in SS(X)_E$  için  $((F, E) \tilde{\cap}(F, E)^*)^* = (F, E)^*$ .

**Kanıt.**  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  esnek ideal topolojik uzay ve  $\tau \sim \tilde{I}$  olmak üzere,

$(i) \Rightarrow (ii)$  :  $(F, E) \in SS(X)_E$  olsun. (i) den ve  $((F, E) - (F, E)^*) \tilde{\cap}((F, E) - (F, E)^*)^* = \tilde{\emptyset}$  olduğundan  $((F, E) - (F, E)^*)^* = \tilde{\emptyset}$  elde edilir.

$(ii) \Rightarrow (iii)$  :  $(F, E) \in SS(X)_E$  alalım.

$(F, E) = ((F, E) - ((F, E) \tilde{\cap}(F, E)^*)) \tilde{\cup}((F, E) \tilde{\cap}(F, E)^*)$  olduğundan

$$\begin{aligned} (F, E)^* &= [((F, E) - ((F, E) \tilde{\cap}(F, E)^*)) \tilde{\cup}((F, E) \tilde{\cap}(F, E)^*)]^* \\ &= [(F, E) - ((F, E) \tilde{\cap}(F, E)^*)]^* \tilde{\cup}[(F, E) \tilde{\cap}(F, E)^*]^* \\ &= \tilde{\emptyset} \tilde{\cup}[(F, E) \tilde{\cap}(F, E)^*]^* \quad ((ii)den) \\ &= [(F, E) \tilde{\cap}(F, E)^*]^* \end{aligned}$$

Sonuç olarak,  $(F, E)^* = [(F, E) \tilde{\cap}(F, E)^*]^*$  bulunur.

$(iii) \Rightarrow (i)$  :  $(F, E) \in SS(X)_E$  ve  $(F, E) \tilde{\cap}(F, E)^* = \tilde{\emptyset}$  olsun. (iii) den



$(F, E)^* = [(F, E)\tilde{\cap}(F, E)^*]^* = (\tilde{\emptyset})^* = \tilde{\emptyset}$  bulunur. Buradan  $(F, E)^* = \tilde{\emptyset}$  ve  $(F, E)^* \in \tilde{I}$  elde edilir.

**Sonuç 3.2.3. (Kandil et al., 2014a)**  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  esnek ideal topolojik uzay,  $(F, E) \in SS(X)_E$  ve  $\tau \sim \tilde{I}$  olsun. O zaman  $((F, E)^*)^* = (F, E)^*$  olur.

**Kanıt.**  $(F, E) \in SS(X)_E$  olsun. Teorem 3.2.2 (iii) den  $(F, E)^* = ((F, E)\tilde{\cap}(F, E)^*)^* \subseteq ((F, E)^*)^*$  ve buradan  $(F, E)^* \subseteq ((F, E)^*)^*$  sağlanır. Ayrıca Teorem 3.1.8 (vi) den  $((F, E)^*)^* \subseteq (F, E)^*$  dir. Sonuç olarak  $((F, E)^*)^* = (F, E)^*$  elde edilir.

**Teorem 3.2.4. (Kandil et al., 2014a)**  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  esnek ideal topolojik uzay olsun. O zaman aşağıdakiler denktir;

- (i)  $\tau \sim \tilde{I}$ ,
- (ii) Her  $(F, E) \in SS(X)_E$  için  $(F, E)\tilde{\cap}(F, E)^* = \tilde{\emptyset}$  ise  $(F, E) \in \tilde{I}$ ,
- (iii) Her  $(F, E) \in SS(X)_E$  için  $(F, E) - (F, E)^* \in \tilde{I}$ ,
- (iv) Her  $(F, E) \in \tau^*$  - kapalı esnek kümesi için  $(F, E) - (F, E)^* \in \tilde{I}$ ,
- (v) Her  $(F, E) \in SS(X)_E$  için  $(F, E), (G, E) \subseteq (G, E)^*$  koşulunu sağlayan boştan farklı  $(G, E)$  esnek kümesini içermiyorsa  $(F, E) \in \tilde{I}$ .

**Kanıt.**  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  esnek ideal topolojik uzay olmak üzere,

(i)  $\Rightarrow$  (ii) :  $(F, E) \in SS(X)_E$  ve  $(F, E)\tilde{\cap}(F, E)^* = \tilde{\emptyset}$  olsun. Her  $x_e \in (F, E)$  ve  $x_e \notin (F, E)^*$  için  $O_{x_e} \tilde{\cap}(F, E) \in \tilde{I}$  olacak şekilde bir  $O_{x_e} \in \tau$  vardır.  $\tau \sim \tilde{I}$  olduğundan  $(F, E) \in \tilde{I}$  sağlanır.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) :  $(F, E) \in SS(X)_E$  olsun.

$$\begin{aligned} & ((F, E) - (F, E)^*) \tilde{\cap} ((F, E) - (F, E)^*)^* \\ &= [(F, E)\tilde{\cap}((F, E)^*)^c] \tilde{\cap} [(F, E)\tilde{\cap}((F, E)^*)^c]^* \\ &\subseteq [(F, E)\tilde{\cap}((F, E)^*)^c] \tilde{\cap} (F, E)^* \tilde{\cap} (((F, E)^*)^c)^* \\ &\subseteq [(F, E)\tilde{\cap}((F, E)^*)^c] \tilde{\cap} (F, E)^* = \tilde{\emptyset} \end{aligned}$$

olduğundan, (ii) ile  $(F, E) - (F, E)^* \in \tilde{I}$  elde edilir.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) :  $(F, E) \in SS(X)_E$   $\tau^*$ - kapalı esnek küme olsun. (iii) den

$(F, E) - (F, E)^* \in \tilde{I}$  gerçekleşir.

(iv)  $\Rightarrow$  (i) :  $(F, E)$  esnek kümesinin içerdiği her  $x_e$  esnek noktası için  $O_{x_e} \tilde{\cap}(F, E) \in \tilde{I}$  olacak şekilde bir  $O_{x_e}$  esnek açık kümesi olduğunu kabul edelim. O halde  $x_e \notin (F, E)^*$  sağlanır. Buradan,  $(F, E) \tilde{\cap}(F, E)^* = \tilde{\emptyset}$  olur.  $(F, E) \tilde{\cup}(F, E)^*$ ,  $\tau^*$ -kapalı olduğundan hipotezden  $((F, E) \tilde{\cup}(F, E)^*) - ((F, E) \tilde{\cup}(F, E)^*)^* \in \tilde{I}$  elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} ((F, E) \tilde{\cup}(F, E)^*) - ((F, E) \tilde{\cup}(F, E)^*)^* &= ((F, E) \tilde{\cup}(F, E)^*) - (F, E)^* \\ &= (F, E) \in \tilde{I} \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

(iii)  $\Rightarrow$  (v) :  $(F, E) \in SS(X)_E$  için  $(F, E)$ ,  $(G, E) \tilde{\subseteq}(G, E)^*$  koşulunu sağlayan boştan farklı  $(G, E)$  esnek kümesini içermesin. Teorem 3.2.2 (iii) den  $(F, E) \tilde{\cap}(F, E)^* \tilde{\subseteq}(F, E)^* = ((F, E) \tilde{\cap}(F, E)^*)^*$  sağlanır. Buradan  $(F, E) \tilde{\cap}(F, E)^* \tilde{\subseteq}((F, E) \tilde{\cap}(F, E)^*)^*$  elde edilir. Kabulden  $(F, E) \tilde{\cap}(F, E)^* = \tilde{\emptyset}$  bulunur. O halde  $(F, E) = (F, E) - (F, E)^* \in \tilde{I}$  elde edilir.

(v)  $\Rightarrow$  (iii) :  $(F, E) \in SS(X)_E$  olsun.

$$\begin{aligned} ((F, E) - (F, E)^*) \tilde{\cap}((F, E) - (F, E)^*)^* &= (F, E) \tilde{\cap}((F, E)^*)^c \tilde{\cap}((F, E) \tilde{\cap}((F, E)^*)^c)^* \\ &\tilde{\subseteq} (F, E) \tilde{\cap}((F, E)^*)^c \tilde{\cap}(F, E)^* \tilde{\cap}(((F, E)^*)^c)^* \\ &= \tilde{\emptyset} \end{aligned}$$

sağlanır. Ayrıca,  $(F, E) - (F, E)^*$  esnek kümesi  $(G, E) \tilde{\subseteq}(G, E)^*$  koşulunu sağlayan boştan farklı  $(G, E)$  esnek kümesini içermediğinden ve (v) den  $(F, E) - (F, E)^* \in \tilde{I}$  elde edilir.

**Teorem 3.2.5. (Kandil et al., 2014a)**  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  esnek ideal topolojik uzay  $\tau \sim \tilde{I}$  olsun. Bir esnek kümenin  $\tau^*$ -kapalı olması için gerek ve yeter koşul bu esnek kümenin,  $\tau$ -kapalı esnek küme ve  $\tilde{I}$  esnek ideali içindeki bir esnek kümenin birleşimi şeklinde yazılmasıdır.

**Kanıt.**  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  esnek ideal topolojik uzay ve  $(F, E)$   $\tau^*$ -kapalı esnek küme olsun. O halde,  $cl^*(F, E) = (F, E)$  vardır. Buradan  $(F, E) \tilde{\cup}(F, E)^* = (F, E)$  sağlanır. O zaman,  $(F, E)^* \tilde{\subseteq}(F, E)$  bulunur. Sonuç olarak,

$$(F, E) = ((F, E) - (F, E)^*) \tilde{\cup}(F, E)^*$$

elde edilir. Burada,

Teorem 3.2.4 (iv) den  $(F, E) - (F, E)^* \in \tilde{I}$  ve Teorem 3.1.8 (v) den  $(F, E)^*$   $\tau$ -kapalıdır.

Tersine  $(F, E) = (G, E) \tilde{\cup} (I, E)$  olmak üzere  $(G, E)$   $\tau$ -kapalı esnek küme ve  $(I, E) \in \tilde{I}$  olsun. Buradan,  $(F, E)^* = ((G, E) \tilde{\cup} (I, E))^* = (G, E)^* \tilde{\cup} (I, E)^*$   
 $= (G, E)^* \tilde{\subseteq} cl(G, E) = (G, E)$   
 $\tilde{\subseteq} (F, E)$

sağlanır. Buradan  $(F, E)^* \tilde{\subseteq} (F, E)$  ve  $(F, E) \tilde{\cup} (F, E)^* = (F, E)$  sağlanır. Sonuç olarak  $cl^*(F, E) = (F, E)$  elde edilir. O halde  $(F, E)$   $\tau^*$ -kapalıdır.

**Teorem 3.2.6. (Kandil et al., 2014a)**  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  esnek ideal topolojik uzay  $\tau \sim \tilde{I}$  olsun. O zaman  $\mathcal{B}(\tilde{I}, \tau)$  bir esnek topolojik uzaydır ve  $\mathcal{B} = \tau^*$  dir.

**Kanıt.**  $(G, E) \in \tau^*$  olsun. O zaman  $(G, E)^c$ ,  $\tau^*$ -kapalıdır.  $(F, E)$   $\tau$ -kapalı ve  $(I, E) \in \tilde{I}$  olmak üzere Teorem 3.2.5 den  $(G, E)^c = (F, E) \tilde{\cup} (I, E)$  yazılır. Buradan,

$$\begin{aligned} (G, E) &= (X, E) - ((F, E) \tilde{\cup} (I, E)) \\ &= ((X, E) - (F, E)) \tilde{\cap} ((X, E) - (I, E)) \\ &= (F, E)^c - (I, E) \end{aligned}$$

elde edilir.  $(F, E)^c \in \tau$  ve  $(I, E) \in \tilde{I}$  olduğundan  $(G, E) \in \mathcal{B}(\tilde{I}, \tau)$  bulunur.

Tersine Sonuç 3.1.16 dan  $\mathcal{B}(I, \tau) \tilde{\subseteq} \tau^*(I)$  sağlanır.

## 4 ESNEK $\tilde{I}$ -REGÜLER VE ESNEK $\tilde{I}$ -NORMAL UZAYLAR

Bu bölümde esnek ideal topolojik uzayların  $\tilde{I}$ -regüler ve ardından  $\tilde{I}$ -normal olma koşulları verilecektir. Esnek Lindelöf uzay kavramından faydalanılarak bu uzaylar arasındaki ilişkiyi veren teorem ispatıyla birlikte sunulacaktır.

### 4.1 Esnek $\tilde{I}$ -Regüler Uzaylar

**Tanım 4.1.1. (Güler and Kale, 2014)**  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  esnek ideal topolojik uzay olsun. Esnek kapalı her  $(K, E) \in SS(X)_E$  kümesi ve  $x_e \notin (K, E)$  özelliğindeki her  $x_e \in SP(X)_E$  esnek noktası için

$$(U, E) \tilde{\cap} (V, E) = \tilde{\emptyset}, \quad (K, E) - (V, E) \in \tilde{I} \text{ ve } x_e \tilde{\in} (U, E)$$

olacak şekilde  $(U, E), (V, E)$  esnek açık kümeleri varsa  $(X, \tau, E)$  uzayına esnek  $\tilde{I}$ -regüler uzay denir.

Örnek 4.1.2 esnek  $\tilde{I}$ -regüler uzaylar ile ilgilidir.

**Örnek 4.1.2.**  $X = \{x_1, x_2, x_3\}, E = \{e_1, e_2\}, \tau = \{\tilde{\emptyset}, \tilde{X}, \{(e_1, \{x_1\}), (e_2, \{x_2, x_3\})\}, \{(e_1, \{x_3\}), (e_2, \emptyset)\}, \{(e_1, \{x_1, x_3\}), (e_2, \{x_2, x_3\})\}\}$  ve  $\tilde{I} = \{\tilde{\emptyset}, \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \emptyset)\}, \{(e_1, \emptyset), (e_2, \{x_1\})\}, \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \{x_1\})\}\}$  olsun. O halde  $(X, \tau, E)$  bir esnek  $\tilde{I}$ -regüler uzaydır.

**Önerme 4.1.3. (Güler and Kale, 2014)**  $(X, \tau, E)$  esnek regüler uzayı,  $X$  üzerinde bir  $\tilde{I}$  esnek idealine göre esnek  $\tilde{I}$ -regülerdir.

**Kanıt.**  $\tilde{\emptyset} \in \tilde{I}$  olduğu için kanıt açıktır.

Aşağıdaki örnek Önerme 4.1.3 ün tersinin genelde doğru olmadığını gösterir.

**Örnek 4.1.4.**  $(X, \tau, E)$ , Örnek 4.1.2 de verilen esnek topolojik uzay olsun.  $(K, E) = \{(e_1, \{x_2, x_3\}), (e_2, \{x_1\})\}$  esnek kapalı küme ve  $x_e = \{(e_1, \{x_1\}), (e_2, \emptyset)\} \notin (K, E)$  esnek noktası için  $x_e \in (U_1, E)$ ,  $(K, E) \not\subseteq (U_2, E)$  olacak şekilde  $(U_1, E)$ ,  $(U_2, E)$  ayrık esnek açık kümeleri bulunamadığından  $(X, \tau, E)$  esnek regüler uzay değildir.

**Uyarı 4.1.5. (Güler and Kale, 2014)**  $\tilde{I} = \{\emptyset\}$  ise esnek regüler uzay ile esnek  $\tilde{I}$ -regüler uzay çakışır.

**Uyarı 4.1.6**  $(X, \tau, E)$  esnek topolojik uzayı, esnek  $\tilde{I}$ -regüler uzay ve  $\tilde{J}$ ,  $X$  üzerinde  $\tilde{I} \subseteq \tilde{J}$  olacak şekilde bir esnek ideal olsun. O zaman  $(X, \tau, E)$  esnek  $\tilde{J}$ -regüler uzaydır.

**Teorem 4.1.7. (Güler and Kale, 2014)**  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  esnek ideal topolojik uzay ve  $(X, \tau^*, E)$   $\star$ -esnek topolojik uzay olsun. O halde  $(X, \tau, E)$  uzayının esnek  $\tilde{I}$ -regüler uzay olması için gerek ve yeter koşul  $(X, \tau^*, E)$  uzayının esnek  $\tilde{I}$ -regüler uzay olmasıdır.

**Kanıt.**  $(X, \tau, E)$  esnek  $\tilde{I}$ -regüler uzay ve  $x_e \notin (K, E)$  olacak şekilde  $(K, E)$  esnek kümesi  $\tau^*$ -kapalı olsun. Bu durumda  $(K, E)^c$  esnek kümesi  $\tau^*$ -açıktır. O halde  $(H, E) \in \tau$  ve  $(I, E) \in \tilde{I}$  olmak üzere  $(K, E)^c = (H, E) - (I, E)$  vardır. O zaman  $(H, E)^c$  esnek kapalı kümesi için  $x_e \notin (H, E)^c$  olur. Hipotezden  $x_e \in (U, E)$  ve  $(H, E)^c - (V, E) \in \tilde{I}$  olacak şekilde  $(U, E)$  ve  $(V, E)$  ayrık esnek açık kümeleri vardır. Buradan

$$\begin{aligned} (H, E)^c - (V, E) &= ((K, E)^c \tilde{\cup} (I, E))^c - (V, E) \\ &= ((K, E) \tilde{\cap} (I, E)^c) - (V, E) \\ &= ((K, E) - (I, E)) - (V, E) \in \tilde{I} \end{aligned}$$

elde edilir. Esnek ideal tanımından  $(I, E) - (V, E) \in \tilde{I}$  bulunur.

Tersine  $(X, \tau^*, E)$  esnek  $\tilde{I}$ -regüler uzay ve  $x_e \notin (K, E)$  olacak şekilde  $(K, E)$  esnek kapalı küme olsun.  $\tau \subseteq \tau^*$  olduğundan  $(K, E)$  esnek  $\tau^*$ -kapalı küme olur. Hipotezden,  $x_e \in (U, E)$  ve  $(K, E) - (V, E) \in \tilde{I}$  olacak şekilde  $(U, E)$

ve  $(V, E)$  ayrık  $\tau^*$ -açık esnek kümeleri vardır.  $(U, E)$  esnek  $\tau^*$ -açık küme olduğundan,  $(G_1, E) \in \tau$  ve  $(I_1, E) \in \tilde{I}$  olmak üzere  $(U, E) = (G_1, E) - (I_1, E)$  olur. O halde,  $x_e \tilde{\in}(G, E)$  bulunur. Benzer şekilde,  $(G_2, E) \in \tau$  ve  $(I_2, E) \in \tilde{I}$  olmak üzere  $(V, E) = (G_2, E) - (I_2, E)$  olur.  $\tilde{I}$  esnek ideal olduğundan  $(K, E) - (G_2, E) \in \tilde{I}$  elde edilir. Sonuç olarak  $(X, \tau, E)$  esnek  $\tilde{I}$ -regüler uzaydır.

**Uyarı 4.1.8. (Kandil et al., 2014c)**  $\tilde{I}$ ,  $X$  üzerinde bir esnek ideal ve  $Y \subseteq X$  olsun. O zaman  $\tilde{I}_Y = \{\tilde{Y} \tilde{\cap}(I, E) : (I, E) \in \tilde{I}\}$ ,  $Y$  üzerinde bir esnek idealdir.

**Teorem 4.1.9. (Güler and Kale, 2014)**  $(X, \tau, E)$  esnek  $\tilde{I}$ -regüler uzay ve  $Y \subseteq X$  olsun. Bu durumda,  $(Y, \tau_Y, E)$  esnek alt uzay topolojisi esnek  $\tilde{I}_Y$ -regüler uzaydır.

**Kanıt.**  $Y \subseteq X$  ve  $(K, E)$ , esnek  $\tau_Y$ -kapalı küme olsun.  $(Y, \tau_Y, E)$  alt uzay topolojisinde  $y_e$  esnek noktasını  $y_e \tilde{\notin}(K, E)$  olacak şekilde alalım. Kabulden  $y_e \tilde{\notin}(H, E)$  ve  $(H, E)$  esnek  $\tau$ -kapalı küme olacak şekilde  $(K, E) = \tilde{Y} \tilde{\cap}(H, E)$  olur. Hipotezden,  $y_e \tilde{\in}(U, E)$  ve  $(H, E) - (V, E) \in \tilde{I}$  olacak şekilde  $(U, E)$  ve  $(V, E)$  ayrık esnek  $\tau$ -açık kümeleri vardır. Buradan,  $\tilde{Y} \tilde{\cap}((H, E) - (V, E)) \in \tilde{I}_Y$  sağlanır. O halde  $\tilde{Y} \tilde{\cap}((H, E) - (V, E)) = \tilde{Y} \tilde{\cap}(H, E) - \tilde{Y} \tilde{\cap}(V, E) = ((K, E) - (V, E)) \tilde{\cap}(\tilde{Y}) \in \tilde{I}_Y$  elde edilir. Ayrıca  $\tilde{Y} \tilde{\cap}(U, E)$  ve  $\tilde{Y} \tilde{\cap}(V, E)$  ayrık esnek  $\tau_Y$ -açık olduğundan  $(Y, \tau_Y, E)$  esnek alt uzay topolojisi, esnek  $\tilde{I}_Y$ -regüler uzaydır.

**Teorem 4.1.10 . (Güler and Kale, 2014)**  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  esnek ideal topolojik uzay olsun. Aşağıdakiler denktir;

- (i)  $(X, \tau, E)$  esnek  $\tilde{I}$ -regüler uzaydır,
- (ii) Her bir  $x_e$  esnek noktasını içeren her  $(G, E)$  esnek açık kümesi için  $cl((U, E)) - (G, E) \in \tilde{I}$  olacak şekilde  $x_e$  esnek noktasını içeren bir  $(U, E)$  esnek açık kümesi vardır,
- (iii) Her bir  $x_e$  esnek noktasını içermeyen  $(K, E)$  esnek kapalı kümesi için  $cl((U, E)) \tilde{\cap}(K, E) \in \tilde{I}$  olacak şekilde  $x_e$  esnek noktasını içeren bir  $(U, E)$  esnek

açık kümesi vardır.

**Kanıt.** (i)  $\Rightarrow$  (ii) :  $(X, \tau, E)$  esnek  $\tilde{I}$ -regüler uzay ve  $(G, E)$ ,  $x_e$  esnek noktasını içeren esnek açık küme olsun. O halde  $x_e \tilde{\in}(U, E)$  ve  $(\tilde{X} - (G, E)) - (V, E) \in \tilde{I}$  olacak şekilde  $(U, E), (V, E)$  ayrık esnek açık kümeleri vardır. Buradan,  $(I, E) \in \tilde{I}$  olacak şekilde  $(\tilde{X} - (G, E)) \tilde{\subseteq}(V, E) \tilde{\cup}(I, E)$  elde edilir.  $(U, E) \tilde{\cap}(V, E) = \tilde{\emptyset}$  olduğundan  $(U, E) \tilde{\subseteq} \tilde{X} - (V, E)$  olur. Buradan  $cl((U, E)) \tilde{\subseteq} \tilde{X} - (V, E)$  sağlanır. Sonuç olarak  $cl((U, E)) - (G, E) \tilde{\subseteq} (\tilde{X} - (V, E)) \tilde{\cap}((V, E) \tilde{\cup}(I, E)) = (\tilde{X} - (V, E)) \tilde{\cap}(I, E) \tilde{\subseteq} (I, E) \in \tilde{I}$  bulunur.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) :  $x_e \tilde{\notin}(K, E)$  olacak şekilde,  $(K, E)$ ,  $X$  üzerinde bir esnek kapalı küme olsun. O zaman,  $cl((U, E)) - (\tilde{X} - (K, E)) \in \tilde{I}$  olmak üzere  $x_e$  esnek noktasını içeren bir  $(U, E)$  esnek açık kümesi vardır. Dolayısıyla  $cl((U, E)) \tilde{\cap}(K, E) \in \tilde{I}$  elde edilir.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) :  $x_e \tilde{\notin}(K, E)$  olacak şekilde,  $(K, E)$ ,  $X$  üzerinde bir esnek kapalı küme olsun. Bu durumda  $cl((V, E)) \tilde{\cap}(K, E) \in \tilde{I}$  olmak üzere  $x_e$  esnek noktasını içeren bir  $(V, E)$  esnek açık kümesi vardır.  $cl((V, E)) \tilde{\cap}(K, E) = (I, E) \in \tilde{I}$  ise  $(K, E) - (\tilde{X} - cl((V, E))) \in \tilde{I}$  olacak şekilde  $(V, E)$  ve  $\tilde{X} - cl((V, E))$  ayrık esnek açık kümelerdir. Sonuç olarak  $(X, \tau, E)$  esnek  $\tilde{I}$ -regüler uzaydır.

## 4.2 Esnek $\tilde{I}$ -Normal Uzaylar

**Tanım 4.2.1.** (Güler and Kale, 2014)  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  esnek ideal topolojik uzay olsun. Ayrık esnek kapalı her bir  $(F, E), (G, E) \in SS(X)_E$  kümeleri için

$$(F, E) - (U, E) \in \tilde{I} \text{ ve } (G, E) - (V, E) \in \tilde{I}$$

olacak şekilde  $(U, E), (V, E)$  ayrık esnek açık kümeleri varsa  $(X, \tau, E)$  uzayına esnek  $\tilde{I}$ -normal uzay denir.

Aşağıdaki Örnek 4.2.2 esnek  $\tilde{I}$ -normal uzaylar ile ilgilidir.

**Örnek 4.2.2. (Güler and Kale, 2014)**  $X = \mathbb{R}$  ve  $E = \{e_1, e_2\}$  olsun.  $\mathcal{B} = \{(F, E) : F(e_1) = (a, b], F(e_2) = \{a\}, a < b\}$  esnek bazı verilsin ve  $\tau, \mathcal{B}$  tarafından üretilen esnek topoloji olsun.  $\tilde{I} = \{(I, E) : I_{(e_1)}, I_{(e_2)} \text{ sonlu}\}$  olmak üzere  $(\mathbb{R}, \tau, E)$  esnek  $\tilde{I}$ -normal uzaydır.

**Önerme 4.2.3.**  $(X, \tau, E)$  esnek normal uzayı,  $X$  üzerinde bir  $\tilde{I}$  esnek idealine göre esnek  $\tilde{I}$ -normaldir.

**Kanıt.**  $\emptyset \in \tilde{I}$  olduğu için kanıt açıktır.

Aşağıdaki örnek Önerme 4.2.3 ün tersinin genelde doğru olmadığını gösterir.

**Örnek 4.2.4.**  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $E = \{e_1, e_2\}$  olsun.  $X$  üzerinde esnek topoloji  $\tau = \{\tilde{\emptyset}, \tilde{X}, \{(e_1, \{x_1\}), (e_2, \{x_2, x_3\})\}, \{(e_1, \{x_3\}), (e_2, \emptyset)\}, \{(e_1, \{x_2, x_3\}), (e_2, X)\}, \{(e_1, \{x_1, x_3\}), (e_2, \{x_2, x_3\})\}, \{(e_1, \emptyset), (e_2, \{x_2, x_3\})\}, \{(e_1, \{x_3\}), (e_2, \{x_2, x_3\})\}$  alınsın.  $X$  üzerinde esnek ideal  $\tilde{I} = \{\tilde{\emptyset}, \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \emptyset)\}, \{(e_1, \emptyset), (e_2, \{x_1\})\}, \{(e_1, \{x_2\}), (e_2, \{x_1\})\}$  olmak üzere  $(X, \tau, E)$  bir esnek  $\tilde{I}$ -normal uzaydır.

$(K_1, E) = \{(e_1, \{x_2, x_3\}), (e_2, \{x_1\})\}$  ve  $(K_2, E) = \{(e_1, \{x_1\}), (e_2, \emptyset)\}$  ayrık esnek kapalı kümeleri için  $(K_1, E) \tilde{\subseteq} (U_1, E)$  ve  $(K_2, E) \tilde{\subseteq} (U_2, E)$  olacak şekilde  $(U_1, E), (U_2, E)$  ayrık esnek açık kümeleri olmadığından  $(X, \tau, E)$  bir esnek normal uzay değildir.

**Uyarı 4.2.5. (Güler and Kale, 2014)**  $\tilde{I} = \{\tilde{\emptyset}\}$  ise esnek normal uzay ile esnek  $\tilde{I}$ -normal uzay çakışır.

**Uyarı 4.2.6.**  $(X, \tau, E)$  esnek topolojik uzayı, esnek  $\tilde{I}$ -normal uzay ve  $\tilde{J}, X$  üzerinde  $\tilde{I} \subseteq \tilde{J}$  olacak şekilde bir esnek ideal olsun. O zaman  $(X, \tau, E)$  esnek  $\tilde{J}$ -normal uzaydır.

**Teorem 4.2.7.**  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  esnek ideal topolojik uzay ve  $(X, \tau^*, E)$   $\star$ -esnek topolojik uzay olsun.  $(X, \tau, E)$  uzayı esnek  $\tilde{I}$ -normal uzay ise



$(X, \tau^*, E)$  uzayı esnek  $\tilde{I}$ -normal uzaydır.

**Kanıt.**  $(X, \tau, E)$  esnek  $\tilde{I}$ -normal uzay ve  $(F, E), (G, E) \in SS(X)_E$   $(F, E) \tilde{\cap} (G, E) = \tilde{\emptyset}$  olacak şekilde  $(F, E), (G, E)$  esnek  $\tau^*$ -kapalı kümeler olsun. O halde  $(F, E)^c, (G, E)^c \in \tau^*$  olur. Buradan  $(H, E), (K, E) \in \tau$  ve  $(I_1, E), (I_2, E) \in \tilde{I}$  olmak üzere  $(F, E)^c = (H, E) - (I_1, E)$  ve  $(G, E)^c = (K, E) - (I_2, E)$  sağlanır. O zaman  $(H, E)^c \tilde{\subseteq} (F, E)$  ve  $(K, E)^c \tilde{\subseteq} (F, E)$  olur.  $(H, E)^c, (K, E)^c$  esnek  $\tau$ -kapalı kümeler olmak üzere  $(H, E)^c \tilde{\cap} (K, E)^c = \tilde{\emptyset}$  elde edilir. Hipotezden  $(H, E)^c - (U, E) \in \tilde{I}$  ve  $(K, E)^c - (V, E) \in \tilde{I}$  olacak şekilde  $(U, E), (V, E)$  ayrık esnek  $\tau$ -açık kümeleri vardır. Ayrıca  $\tau \subseteq \tau^*$  olduğundan  $(U, E), (V, E)$  ayrık esnek  $\tau^*$ -açık kümelerdir. Buradan

$$\begin{aligned} (F, E) - (U, E) &= [(H, E)^c \tilde{\cup} (I_1, E)] - (U, E) \\ &= [(H, E)^c - (U, E)] \tilde{\cup} [(I_1, E) - (U, E)] \\ &\tilde{\subseteq} [(H, E)^c - (U, E)] \tilde{\cup} [(I_1, E)] \in \tilde{I} \end{aligned}$$

olur.  $(F, E) - (U, E) \in \tilde{I}$  sağlanır. Benzer şekilde  $(G, E) - (V, E) \in \tilde{I}$  bulunur. Böylece  $(X, \tau^*, E)$  uzayı esnek  $\tilde{I}$ -normal uzaydır.

Tersine  $(X, \tau^*, E)$  esnek  $\tilde{I}$ -normal uzay olsun.  $(X, \tau, E)$  uzayının esnek  $\tilde{I}$ -normal olmadığını kabul edelim. O halde ayrık esnek  $\tau$ -kapalı  $(F, E), (G, E) \in SS(X)_E$  kümeleri ve her bir  $(U, E), (V, E)$  ayrık esnek  $\tau$ -açık kümeleri için  $(F, E) - (U, E) \notin \tilde{I}$  ve  $(G, E) - (V, E) \notin \tilde{I}$  sağlanır. Burada  $\tau \subseteq \tau^*$  olduğundan  $(F, E), (G, E)$  ayrık esnek  $\tau^*$ -kapalı ve  $(U, E), (V, E)$  ayrık esnek  $\tau^*$ -açık olur. Bu durum  $(X, \tau^*, E)$   $\star$ -esnek topolojik uzayın esnek  $\tilde{I}$ -normal olması ile çelişir.

**Teorem 4.2.8. (Güler and Kale, 2014)**  $(X, \tau, E)$  esnek  $\tilde{I}$ -normal uzay ve  $\tilde{Y} \in SS(X)_E$  esnek  $\tau$ -kapalı küme olsun. Bu durumda  $(Y, \tau_Y, E)$  esnek alt uzay topolojisi, esnek  $\tilde{I}_Y$ -normaldir.

**Kanıt.**  $(F, E)$  ve  $(G, E)$  ayrık esnek  $\tau_Y$ -kapalı kümeler olsun.  $\tilde{Y}$  esnek  $\tau$ -kapalı küme olduğundan  $(F, E)$  ve  $(G, E)$  ayrık esnek  $\tau$ -kapalı kümelerdir. Hipotezden  $(F, E) - (U, E) \in \tilde{I}$  ve  $(G, E) - (V, E) \in \tilde{I}$  olacak şekilde  $(U, E), (V, E)$  ayrık esnek  $\tau$ -açık kümeleri vardır. O zaman  $(F, E) - (U, E) = (I, E) \in \tilde{I}$  ve  $(F, E) \tilde{\subseteq} (U, E) \tilde{\cup} (I, E)$  sağlanır. Buradan  $(F, E) - (\tilde{Y} \tilde{\cap} (U, E)) = \tilde{Y} \tilde{\cap} (I, E) \in \tilde{I}_Y$  elde edilir. Benzer şekilde  $(G, E) - (\tilde{Y} \tilde{\cap} (V, E)) \in \tilde{I}_Y$  bulunur.

Böylece  $(Y, \tau_Y, E)$  esnek alt uzay topolojisi, esnek  $\tilde{I}_Y$ -normaldir.

**Teorem 4.2.9. (Güler and Kale, 2014)**  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  esnek ideal topolojik uzay olsun. Aşağıdakiler denktir;

(i)  $(X, \tau, E)$  bir esnek  $\tilde{I}$ -normal uzaydır,

(ii) Her bir  $(K, E)$  esnek kapalı kümesini içeren her  $(U, E)$  esnek açık kümesi için  $(K, E) - (V, E) \in \tilde{I}$  ve  $cl((V, E)) - (U, E) \in \tilde{I}$  olacak şekilde bir  $(V, E)$  esnek açık kümesi vardır,

(iii) Her bir  $(K, E)$  ve  $(H, E)$  ayrık esnek kapalı kümesi için  $(K, E) - (U, E) \in \tilde{I}$  ve  $cl((U, E)) \tilde{\cap} (H, E) \in \tilde{I}$  olacak şekilde bir  $(U, E)$  esnek açık kümesi vardır.

**Kanıt.** (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $(X, \tau, E)$  bir esnek  $\tilde{I}$ -normal uzay ve  $(K, E)$  esnek kapalı küme ve  $(V, E)$  esnek açık küme olsun. O zaman  $\tilde{X} - (U, E)$  esnek kapalı ve  $(K, E) \tilde{\cap} (\tilde{X} - (U, E)) = \tilde{\emptyset}$  dir. Hipotezden  $(K, E) - (V_1, E) \in \tilde{I}$  ve  $(\tilde{X} - (U, E)) - (V_2, E) \in \tilde{I}$  olacak şekilde  $(V_1, E), (V_2, E)$  ayrık esnek açık kümeleri vardır. Buradan  $(V_1, E) \tilde{\cap} (V_2, E) = \tilde{\emptyset}$  olduğundan  $cl((V_1, E)) \tilde{\subseteq} \tilde{X} - (V_2, E)$  ve  $cl((V_1, E)) - (U, E) \tilde{\subseteq} (\tilde{X} - (V_2, E)) - (U, E) = (\tilde{X} - (U, E)) - (V_2, E)$  elde edilir. Dolayısıyla  $cl((V_1, E)) - (U, E) \in \tilde{I}$  bulunur.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Hipotezden açıktır.

(iii)  $\Rightarrow$  (i)  $(K, E), (H, E)$  ayrık esnek kapalı kümeler olsun. Hipotezden  $(K, E) - (U, E) \in \tilde{I}$  ve  $cl((U, E)) \tilde{\cap} (H, E) = \tilde{\emptyset}$  olacak şekilde  $(U, E)$  esnek açık kümesi vardır.  $(V, E) = \tilde{X} - cl((U, E))$  olsun.  $(V, E)$  esnek açık ve  $(U, E) \tilde{\cap} (V, E) = \tilde{\emptyset}$  olduğundan  $(X, \tau, E)$  bir esnek  $\tilde{I}$ -normal uzaydır.

**Teorem 4.2.10. (Güler and Kale, 2014)**  $(X, \tau, E)$  esnek Lindelöf ve esnek  $\tilde{I}$ -regüler uzay olsun. O zaman  $(X, \tau, E)$ , esnek  $\tilde{I}$ -normal uzaydır.

**Kanıt.**  $(F_1, E)$  ve  $(F_2, E)$  ayrık esnek kapalı kümeler olsun.  $(X, \tau, E)$  esnek  $\tilde{I}$ -regüler uzay olduğundan, her bir  $x_e \in (F_1, E)$  esnek noktası için  $cl((V_{x_e}, E)) \tilde{\cap} (F_2, E) \tilde{\in} \tilde{I}$  olacak şekilde  $x_e$  yi içeren  $(V_{x_e}, E)$  esnek açık kümesi vardır. Buradan  $\{(V_{x_e}, E) : x_e \in (V_{x_e}, E)\} \tilde{\cup} (F_1, E)^c, (X, \tau, E)$  uzayının

esnek açık örtüsü olur.  $(X, \tau, E)$  esnek lindelöf uzay olduğundan bu örtünün sayılabilir esnek alt örtüsü  $\{(V_{(x_e)_\lambda}, E) : x_e \tilde{\in} (V_{(x_e)_\lambda}, E), \lambda \in \Lambda\} \tilde{\cup} (F_1, E)^c$  vardır. O halde  $(F_1, E) \tilde{\subset} \{(V_{(x_e)_\lambda}, E) : x_e \tilde{\in} (V_{(x_e)_\lambda}, E), \lambda \in \Lambda\}$  ve  $cl((V_{(x_e)_\lambda}, E)) \tilde{\cap} (F_2, E) = I_\lambda \tilde{\in} \tilde{I}$  sağlanır. Benzer şekilde  $(F_2, E) \tilde{\subset} \{(U_{(y_e)_\lambda}, E) : y_e \tilde{\in} (U_{(y_e)_\lambda}, E), \lambda \in \Lambda\}$  ve  $cl((U_{(y_e)_\lambda}, E)) \tilde{\cap} (F_1, E) = I_\lambda \in \tilde{I}$  olacak şekilde uzayın  $\{(U_{(y_e)_\lambda}, E) : y_e \tilde{\in} (U_{(y_e)_\lambda}, E), \lambda \in \Lambda\}$  sayılabilir esnek açık ailesi vardır.

$(G_\lambda, E) = (U_{(y_e)_\lambda}, E) - \{(cl(V_{(x_e)_\lambda}, E)) : x_e \tilde{\in} cl((V_{(x_e)_\lambda}, E)), \lambda \in \Lambda\}$  ve  $(H_\lambda, E) = (V_{(x_e)_\lambda}, E) - \{(cl(U_{(y_e)_\lambda}, E)) : y_e \tilde{\in} cl((U_{(y_e)_\lambda}, E)), \lambda \in \Lambda\}$  olmak üzere  $(G, E) = \tilde{\cup}\{(G_\lambda, E) : \lambda \in \Lambda\}$  ve  $(H, E) = \tilde{\cup}\{(H_\lambda, E) : \lambda \in \Lambda\}$  olsun.  $\lambda \in \Lambda$  için  $(G_\lambda, E)$  ve  $(H_\lambda, E)$  esnek açık kümeler olduğundan  $(F_1, E) - (G, E) \in \tilde{I}$  ve  $(F_2, E) - (H, E) \in \tilde{I}$  olacak şekilde  $(G, E)$  ve  $(H, E)$  ayrık esnek açık kümelerdir. Bir  $\delta_0 \in \Lambda$  ve  $y_e \tilde{\in} (F_1, E)$  için  $(V_{(x_e)_{\delta_0}}, E)$  esnek kümesi vardır. Ayrıca her  $\delta \in \Lambda$  için  $cl((V_{(x_e)_\delta}, E)) \tilde{\cap} (F_1, E) = (I_\delta, E)$  olur. O halde her  $\delta \in \Lambda$  için  $(F_1, E) \subset [\tilde{X} - cl((V_{(x_e)_\delta}, E))] \tilde{\cup} (I_\delta, E)$  olur. Buradan  $y_e \tilde{\in} (G_{\delta_0}, E)$  veya  $y_e \tilde{\in} \tilde{\cap}\{(I_\lambda, E) : \lambda \in \Lambda\} = (I, E)$  elde edilir. O zaman  $(F_1, E) - (G, E) \in \tilde{I}$  olacak şekilde  $(F_1, E) \tilde{\subset} (G, E) \tilde{\cup} (I, E)$  sağlanır.  $(F_2, E) - (H, E) \in \tilde{I}$  olduğu benzer şekilde ispatlanır.

## 5 ESNEK $\tilde{I}$ -KOMPAKT UZAYLAR VE ESNEK İDEAL İLE ESNEK BAĞLANTILILIK

Bu bölümde  $\tilde{I}$ -kompakt olan esnek ideal topolojik uzaylar kavramı ve esnek ideal topolojik uzayların bağlantılılığı tanımlanacaktır. Ayrıca, çeşitli örnekler verilecek ve bu uzayın bazı özellikleri üzerinde durulacaktır.

### 5.1 Esnek $\tilde{I}$ -Kompakt Uzaylar

**Tanım 5.1.1.** (Kandil et al., 2014b)  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  esnek ideal topolojik uzay ve  $(F, E) \in SS(X)_E$  olsun.  $(F, E)$  esnek kümesinin, esnek açık kümelerden oluşan her  $\{(G_\alpha, E) : \alpha \in \Delta\}$  örtüsünün  $(F, E) - \bigcup\{(G_{\alpha_i}, E) : i = 1, 2, \dots, n\} \in \tilde{I}$  olacak şekilde sonlu bir  $\{(G_{\alpha_i}, E) : i = 1, 2, \dots, n\}$  alt ailesi varsa  $(F, E)$  kümesine  $(X, \tau, E)$  ye göre esnek  $\tilde{I}$ -kompakt denir. Ayrıca  $\tilde{X}$  esnek kümesi  $(X, \tau, E)$  ye göre esnek  $\tilde{I}$ -kompakt ise  $(X, \tau, E)$  ye esnek  $\tilde{I}$ -kompakt uzay denir.

Örnek 5.1.2 esnek  $\tilde{I}$ -kompakt uzaylar ile ilgilidir.

**Örnek 5.1.2.**  $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ ,  $E = \{e_1, e_2\}$  ve  $\{(F_n, E)\}_{n \in \mathbb{N}} = \{(e_1, \{x_1, \dots, x_n\}), (e_2, X)\}_{n \in \mathbb{N}}$  esnek kümeler ailesini alalım. O zaman  $\tau = \{(F_n, E) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, \tilde{X}\}$  ailesi  $X$  üzerinde esnek topolojidir.  $\tilde{I} = SS(X)_E$  için  $(X, \tau, E)$  uzayı esnek  $\tilde{I}$ -kompakt uzaydır

**Önerme 5.1.3.** (Kandil et al., 2014b) Her  $(X, \tau, E)$  esnek kompakt topolojik uzayı,  $X$  üzerinde bir  $\tilde{I}$  esnek idealine göre, esnek  $\tilde{I}$ -kompaktır.

**Kanıt.**  $\emptyset \in \tilde{I}$  olduğu için kanıt açıktır.

Aşağıdaki örnek Önerme 5.1.3 ün tersinin genelde doğru olmadığını gösterir.

**Örnek 5.1.4.**  $(X, \tau, E)$ , Örnek 5.1.2 de verilen esnek topolojik uzay olsun.  $\{(F_n, E) : n \in \mathbb{N}\}$  esnek açık örtüsünün sonlu alt örtüsü olmadığı için,  $(X, \tau, E)$  esnek kompakt uzay değildir.

**Uyarı 5.1.5. (Kandil et al., 2014b)**  $\tilde{I} = \{\emptyset\}$  ise esnek  $\tilde{I}$ -kompakt uzay ile esnek kompakt uzay çakışktır.

**Uyarı 5.1.6**  $(X, \tau, E)$  esnek topolojik uzayı, esnek  $\tilde{I}$ -kompakt uzay ve  $\tilde{J}$ ,  $X$  üzerinde  $\tilde{I} \subseteq \tilde{J}$  olacak şekilde bir esnek ideal olsun. O zaman  $(X, \tau, E)$  esnek  $\tilde{J}$ -kompakt uzaydır.

**Teorem 5.1.7. (Kandil et al., 2014b)**  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  esnek ideal topolojik uzay ve  $(X, \tau^*, E)$   $\star$ -esnek topolojik uzayı olsun. O halde  $(X, \tau, E)$  uzayının esnek  $\tilde{I}$ -kompakt olması için gerek ve yeter koşul  $(X, \tau^*, E)$  uzayının esnek  $\tilde{I}$ -kompakt olmasıdır.

**Kanıt.**  $(X, \tau, E)$  esnek  $\tilde{I}$ -kompakt ve  $\{(G_\alpha, E) : \alpha \in \Delta\}$  ailesi  $\tau^*$ -açık esnek örtü olsun. O zaman  $(V_\alpha, E) \in \tau$  ve  $(I_\alpha, E) \in \tilde{I}$  olmak üzere, her  $\alpha \in \Delta$  için  $(G_\alpha, E) = (V_\alpha, E) - (I_\alpha, E)$  sağlanır. Burada  $\{(V_\alpha, E) : \alpha \in \Delta\}$  ailesi bir  $\tau$ -açık esnek örtüdür.  $(X, \tau, E)$  esnek  $\tilde{I}$ -kompakt olduğundan  $\tilde{X} - \tilde{\bigcup}_{\alpha \in \Delta_0} (V_\alpha, E) \in \tilde{I}$  olacak şekilde bir  $\Delta_0 \subseteq \Delta$  sonlu kümesi vardır.

$$\tilde{X} - \tilde{\bigcup}_{\alpha \in \Delta_0} (G_\alpha, E) = \tilde{X} - \tilde{\bigcup}_{\alpha \in \Delta_0} [(V_\alpha, E) - (I_\alpha, E)]$$

$$\tilde{\subseteq} [\tilde{X} - \tilde{\bigcup}_{\alpha \in \Delta_0} (V_\alpha, E)] \tilde{\cup} [\tilde{\bigcup}_{\alpha \in \Delta_0} (I_\alpha, E)] \in \tilde{I}$$

elde edilir. Burada her  $\alpha \in \Delta$  için  $(I_\alpha, E) \in \tilde{I}$  olur. O halde  $(X, \tau^*, E)$  esnek  $\tilde{I}$ -kompakttır.

Tersine  $(X, \tau^*, E)$  esnek  $\tilde{I}$ -kompakt ve  $\{(G_\alpha, E) : \alpha \in \Delta\}$  ailesi  $\tau$ -açık esnek örtü olsun.  $\tau \subseteq \tau^*$  olduğundan  $\{(G_\alpha, E) : \alpha \in \Delta\}$  ailesi  $\tau^*$ -açık örtü olur.  $(X, \tau^*, E)$  esnek  $\tilde{I}$ -kompakt olduğundan  $\tilde{X} - \tilde{\bigcup}_{\alpha \in \Delta_0} (V_\alpha, E) \in \tilde{I}$  olacak şekilde bir  $\Delta_0 \subseteq \Delta$  sonlu kümesi vardır. Burada her  $\alpha \in \Delta$  için  $(V_\alpha, E)$  esnek  $\tau$ -açık kümedir. O halde  $(X, \tau, E)$  esnek  $\tilde{I}$ -kompakttır.

**Teorem 5.1.8. (Kandil et al., 2014b)**  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  esnek ideal topolojik uzay ve  $(X, \tau^*, E)$   $\star$ -esnek topolojik uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki

diyagram elde edilir.

$$\begin{array}{ccc}
 (X, \tau^*, E) & \implies & (X, \tau, E) \\
 \text{esnek kompakt uzaydır} & & \text{esnek kompakt uzaydır} \\
 \\ 
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 (X, \tau^*, E) & \iff & (X, \tau, E) \\
 \text{esnek } \tilde{I}\text{-kompakt uzaydır} & & \text{esnek } \tilde{I}\text{-kompakt uzaydır}
 \end{array}$$

**Kanıt.** Önerme 5.1.3, Teorem 5.1.7 ve  $\tau \subseteq \tau^*$  olduğundan açıktır.

## 5.2 Esnek $\tilde{I}$ -Bağlantılılık

**Tanım 5.2.1.** (Kandil et al., 2014c)  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  bir esnek ideal topolojik uzay olsun.  $\tilde{X}$  in  $\star$ -esnek ayrılışı  $(F, E) \tilde{\cap} (G, E) = \emptyset$  ve  $\tilde{X} = (F, E) \tilde{\cup} (G, E)$  olacak şekilde boştan farklı  $(F, E) \in \tau$  ve  $(G, E) \in \tau^*$  çiftidir.

**Tanım 5.2.2.** (Kandil et al., 2014c)  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  bir esnek ideal topolojik uzay olsun.  $(X, \tau, E, \tilde{I})$   $\star$ -esnek bağlantılıdır ancak ve ancak  $\tilde{X}$  üzerinde  $\star$ -esnek ayrılmış esnek küme yoktur. Aksi halde  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  esnek topolojik uzayı  $\star$ -esnek bağlantısızdır.

**Teorem 5.2.3.** (Kandil et al., 2014c)  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  bir esnek ideal topolojik uzay olsun. O zaman aşağıdakiler denktir;

- (i)  $(X, \tau, E, \tilde{I})$   $\star$ -esnek bağlantılıdır,
- (ii)  $\tilde{X}$  boştan farklı  $\tau$ -açık ve  $\tau^*$ -açık iki ayrık esnek kümenin birleşimi şeklinde yazılamaz,
- (iii)  $\tilde{X}$  boştan farklı  $\tau$ -kapalı ve  $\tau^*$ -kapalı iki ayrık esnek kümenin birleşimi şeklinde yazılamaz,

(iv)  $\tilde{X}$  in hem  $\tau$ -açık ve  $\tau$ -kapalı, hemde  $\tau^*$ -kapalı ve  $\tau$ -açık olan özalt kümesi yoktur.

**Kanıt.** (i)  $\Rightarrow$  (ii) Tanımdan kolayca görülmektedir.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Kabul edelim ki  $(F, E)$   $\tau$ -kapalı,  $(G, E)$   $\tau^*$ -kapalı ve  $(F, E)\tilde{\cap}(G, E) = \tilde{\emptyset}$  olacak şekilde  $\tilde{X} = (F, E)\tilde{\cup}(G, E)$  olsun. Buradan  $(F, E)^c = (G, E)$ ,  $(G, E)$   $\tau$ -açık ve  $(G, E)^c$   $\tau^*$ -açık olduğundan  $\tilde{X} = (G, E)\tilde{\cup}(G, E)^c$  ve  $(G, E)\tilde{\cap}(G, E)^c = \tilde{\emptyset}$  elde edilir. Bu durum (ii) ile çelişir.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) Kabul edelim ki  $(F, E)$ ,  $\tilde{X}$  in özalt kümesi olsun.  $(F, E)$  yi  $\tau^*$ -açık ve  $\tau$ -kapalı veya  $\tau^*$ -kapalı ve  $\tau$ -açık olacak şekilde alalım.  $(F, E)^c$ ,  $\tau^*$ -kapalı ve  $(F, E)$ ,  $\tau$ -kapalı olduğundan  $\tilde{X} = (F, E)\tilde{\cup}(F, E)^c$  ve  $(F, E)\tilde{\cap}(F, E)^c = \tilde{\emptyset}$  olur. Bu durum (iii) ile çelişir.

(iv)  $\Rightarrow$  (i) Kabul edelim ki  $(F, E)$   $\tau$ -açık ve  $(G, E)$   $\tau^*$ -açık olmak üzere  $\tilde{X} = (F, E)\tilde{\cup}(G, E)$  ve  $(F, E)\tilde{\cap}(G, E) = \tilde{\emptyset}$  olsun. Buradan  $(F, E) = (G, E)^c$  ve  $(G, E) = (F, E)^c$  olur. O halde  $(F, E)$ ,  $\tau^*$ -kapalı ve  $\tau$ -açık,  $(G, E)$ ,  $\tau^*$ -açık ve  $\tau$ -kapalı bulunur. Bu durum (iv) ile çelişir.

**Önerme 5.2.4. (Kandil et al., 2014c)**  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  bir esnek ideal topolojik uzay olmak üzere  $(X, \tau, E, \tilde{I})$   $\star$ -esnek bağlantılı olsun. O zaman  $(X, \tau, E)$  esnek bağlantılıdır.

Aşağıdaki örnek Önerme 5.2.4 in tersinin genelde doğru olmadığına aittir.

**Örnek 5.2.5. (Kandil et al., 2014c)**  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $E = \{e\}$  olsun.  $X$  üzerinde  $(F_1, E)$ ,  $(F_2, E)$  esnek kümeleri  $(F_1, E) = \{e, \{x_2\}\}$  ve  $(F_2, E) = \{e, \{x_1, x_2\}\}$  olmak üzere  $X$  üzerinde bir esnek topoloji  $\tau = \{\tilde{X}, \tilde{\emptyset}, (F_1, E), (F_2, E)\}$  alınsın ve  $(I_1, E)$ ,  $(I_2, E)$ ,  $(I_3, E)$  esnek kümeleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$(I_1, E) = \{e, \{x_1\}\}, (I_2, E) = \{e, \{x_2\}\}, (I_3, E) = \{e, \{x_1, x_2\}\}$$

Bu durumda  $\tilde{I} = \{\tilde{\emptyset}, (I_1, E), (I_2, E), (I_3, E)\}$   $X$  üzerinde bir esnek idealdir.  $(X, \tau, E)$  esnek bağlantılıdır fakat  $(X, \tau, E, \tilde{I})$   $\star$ -esnek bağlantısızdır.

**Tanım 5.2.6. (Kandil et al., 2014c)**  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  bir esnek ideal topolojik uzayında  $(F, E)$  ve  $(G, E)$  boş esnek kümeden farklı olsun.  $cl^*((F, E)) \tilde{\cap} (G, E) = (F, E) \tilde{\cap} cl((G, E)) = \tilde{\emptyset}$  ise  $(F, E), (G, E)$   $\star$ -ayrık esnek kümelerdir denir. Burada  $(F, E)$  ve  $(G, E)$  esnek kümelerinin rolleri değiştirilebilir. Yani,  $(F, E), (G, E)$   $\star$ -ayrık esnek kümeler ise  $cl^*((G, E)) \tilde{\cap} (F, E) = (G, E) \tilde{\cap} cl((F, E)) = \tilde{\emptyset}$  olur.

**Teorem 5.2.7. (Kandil et al., 2014c)**  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  bir esnek ideal topolojik uzayında  $(F, E) \tilde{\subseteq} (G, E), (H, E) \tilde{\subseteq} (K, E)$  ve  $(G, E), (K, E)$   $\star$ -ayrık esnek kümeler olsun. O zaman  $(F, E), (H, E)$   $\star$ -ayrık esnek kümelerdir.

**Kanıt.**  $(F, E) \tilde{\subseteq} (G, E)$  ise  $cl((F, E)) \tilde{\subseteq} cl((G, E))$  olur. Ayrıca  $(H, E) \tilde{\subseteq} (K, E)$  ve hipotezden  $cl((F, E)) \tilde{\cap} (H, E) \tilde{\subseteq} cl((F, E)) \tilde{\cap} (K, E) \tilde{\subseteq} cl((G, E)) \tilde{\cap} (K, E) = \tilde{\emptyset}$  bulunur.  $(H, E) \tilde{\subseteq} (K, E)$  ise  $cl^*(H, E) \tilde{\subseteq} cl^*(K, E)$  sağlanır. Buradan  $(F, E) \tilde{\cap} cl^*(H, E) \tilde{\subseteq} (F, E) \tilde{\cap} cl^*(K, E) \tilde{\subseteq} (G, E) \tilde{\cap} cl^*(K, E) = \tilde{\emptyset}$  elde edilir. O zaman  $(F, E), (H, E)$   $\star$ -ayrık esnek kümelerdir.

**Teorem 5.2.8. (Kandil et al., 2014c)**  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  bir esnek ideal topolojik uzay olsun.  $(F, E), (G, E)$   $\star$ -ayrık esnek kümeler ve  $(F, E) \tilde{\cup} (G, E) \in \tau$  ise  $(F, E), (G, E)$  sırasıyla  $\tau^*$ -açık ve  $\tau$ -açık esnek kümelerdir.

**Kanıt.**  $(F, E) \tilde{\cup} (G, E) \in \tau$  olacak şekilde  $(F, E), (G, E)$   $\star$ -ayrık esnek kümeler olsun. O zaman  $(F, E) \tilde{\cup} (G, E) \in \tau^*$  olur.  $cl^*(G, E)$  esnek kümesi  $\tau^*$ -kapalı esnek küme olduğundan  $(cl^*(G, E))^c$   $\tau^*$ -açık esnek kümedir.  $((F, E) \tilde{\cup} (G, E)) \tilde{\cap} (cl^*((G, E)))^c = [(F, E) \tilde{\cup} (G, E)] \tilde{\cap} [(G, E) \tilde{\cup} (G, E)^*]^c$

$$= [(F, E) \tilde{\cup} (G, E)] \tilde{\cap} [(G, E)^c \tilde{\cap} ((G, E)^*)^c]$$

$$= [(F, E) \tilde{\cap} (G, E)^c \tilde{\cap} ((G, E)^*)^c] \tilde{\cup} [(G, E) \tilde{\cap} (G, E)^c \tilde{\cap} ((G, E)^*)^c]$$

**Teorem 5.2.9. (Kandil et al., 2014c)**  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  bir esnek ideal topolojik uzay olsun.  $(F, E), (G, E)$   $\star$ -ayrık esnek kümeler ve  $(F, E) \tilde{\cup} (G, E) \in \tau$  ise  $(F, E), (G, E)$  sırasıyla  $\tau^*$ -kapalı ve  $\tau$ -kapalı esnek kümelerdir.

**Kanıt.** Teorem 5.2.8 un kanıtına benzer biçimde yapılır.



**Teorem 5.2.10. (Kandil et al., 2014c)**  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  bir esnek ideal topolojik uzay ve  $(F, E), (G, E) \subseteq SS(X)_E$  esnek kapalı kümeler olsun. Bu iki esnek kümenin  $\star$ -ayrık esnek olması için gerek ve yeter koşul bu iki esnek kümenin ayrık olmasıdır.

**Kanıt.**  $(F, E), (G, E)$   $\star$ -ayrık esnek olsun. O zaman  $cl^*((G, E)) \tilde{\cap} (F, E) = (G, E) \tilde{\cap} cl((F, E)) = \tilde{\emptyset}$  sağlanır. Buradan  $(G, E) \tilde{\cap} (F, E) = \tilde{\emptyset}$  elde edilir. Sonuç olarak  $(F, E), (G, E)$   $\star$ -ayrık esnek kümelerdir.

Tersine  $(F, E)$  ve  $(G, E), (F, E) \tilde{\cap} (G, E) = \tilde{\emptyset}$  olacak şekilde esnek kapalı kümeler olsun. O zaman  $cl((F, E)) \tilde{\cap} (G, E) = \tilde{\emptyset}$  sağlanır. Buradan  $cl^*((G, E)) \tilde{\cap} (F, E) \subseteq cl((G, E)) \tilde{\cap} (F, E) = (F, E) \tilde{\cap} (G, E) = \tilde{\emptyset}$  elde edilir. O halde  $(F, E), (G, E)$   $\star$ -ayrık esnek kümelerdir.

**Tanım 5.2.11. (Kandil et al., 2014c)**  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  bir esnek ideal topolojik uzay olmak üzere  $\tilde{X}$  esnek kümesi iki  $\star$ -ayrık esnek kümenin esnek birleşimi şeklinde yazılamıyorsa  $(X, \tau, E)$  uzayına  $\star_s$ -esnek bağlantılı uzay denir.

**Teorem 5.2.12. (Kandil et al., 2014c)**  $(Y, \tau_Y, E, I_Y), (X, \tau, E, \tilde{I})$  esnek ideal topolojik uzayının esnek alt uzayı ve  $(F_1, E), (F_2, E) \subseteq \tilde{Y} \subseteq \tilde{X}$  olsun.  $(F_1, E), (F_2, E)$  esnek kümelerinin  $\tau_Y$  üzerinde  $\star$ -ayrık esnek küme olması için gerek ve yeter koşul  $(F_1, E), (F_2, E)$  esnek kümelerinin  $\tau$  üzerinde  $\star$ -ayrık esnek küme olmasıdır.

**Kanıt.** Kabul edelim ki  $(F_1, E)$  ve  $(F_2, E), \tau_Y$  üzerinde  $\star$ -ayrık esnek kümeler olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} cl_{\tau_Y}^*((F_1, E)) \tilde{\cap} (F_2, E) &= \tilde{\emptyset} \text{ ve } (F_1, E) \tilde{\cap} cl_{\tau_Y}((F_2, E)) = \tilde{\emptyset} \\ [cl_{\tau}^*((F_1, E)) \tilde{\cap} \tilde{Y}] \tilde{\cap} (F_2, E) &= cl_{\tau}^*((F_1, E)) \tilde{\cap} (F_2, E) = \tilde{\emptyset} \\ (F_1, E) \tilde{\cap} [cl_{\tau}((F_2, E)) \tilde{\cap} \tilde{Y}] &= cl_{\tau}((F_2, E)) \tilde{\cap} (F_1, E) = \tilde{\emptyset} \text{ olur. Böylece} \\ (F_1, E), (F_2, E) \text{ esnek kümeleri } \tau \text{ üzerinde } \star\text{-ayrık esnek kümelerdir} \end{aligned}$$

Tersi benzer şekilde görülür.

**Teorem 5.2.13. (Kandil et al., 2014c)**  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  esnek ideal

topolojik uzay ve  $Y \subset X$  olsun.  $\tilde{Y}$  esnek alt kümesinin  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  esnek ideal topolojik uzayına göre  $\star_s$ -esnek bağlantılı olması için gerek ve yeter koşul  $\tilde{Y}$  esnek kümesinin  $(Y, \tau_Y, E, \tilde{I}_Y)$  esnek alt uzay topolojisine göre  $\star_s$ -esnek bağlantılı olmasıdır.

**Kanıt.**  $\tilde{Y}$  esnek kümesinin  $(Y, \tau_Y, E, \tilde{I}_Y)$  esnek alt uzay topolojisine göre  $\star_s$ -esnek bağlantılı olmadığını kabul edelim. Bu durumda  $\tilde{Y} = (F_1, E) \tilde{\cup} (F_2, E)$  olacak şekilde  $(F_1, E), (F_2, E) \tau_Y$  üzerinde  $\star$ -ayrık esnek kümeleri vardır. Teorem 5.2.12 ile  $(F_1, E), (F_2, E) \tau$  üzerinde  $\star$ -ayrık esnek kümeler olur. Buradan  $\tilde{Y}, (X, \tau, E, \tilde{I})$  esnek ideal topolojik uzayına göre  $\star_s$ -esnek bağlantılı olmadığı bulunur.

Tersi benzer şekilde görülür.

**Teorem 5.2.14. (Kandil et al., 2014c)**  $(Y, \tau_Y, E, \tilde{I}_Y)$   $\star_s$ -esnek bağlantılı alt uzay topolojisi ve  $\tilde{Y} \tilde{\subseteq} (F, E) \tilde{\cup} (G, E)$  olacak şekilde  $(F, E), (G, E)$   $\star$ -ayrık esnek kümeler olsun. O halde  $\tilde{Y} \tilde{\subseteq} (F, E)$  veya  $\tilde{Y} \tilde{\subseteq} (G, E)$  gerçekleşir.

**Kanıt.**  $(F, E)$  ve  $(G, E) \tau$  üzerinde  $\star$ -ayrık esnek kümeler olmak üzere  $\tilde{Y} \tilde{\subseteq} (F, E) \tilde{\cup} (G, E)$  olsun. O halde  $\tilde{Y} = (\tilde{Y} \tilde{\cap} (F, E)) \tilde{\cup} (\tilde{Y} \tilde{\cap} (G, E))$  sağlanır. Buradan  $(\tilde{Y} \tilde{\cap} (F, E)) \tilde{\cup} cl_\tau^*(\tilde{Y} \tilde{\cap} (G, E)) \tilde{\subseteq} (F, E) \tilde{\cap} cl_\tau^*(G, E) = \tilde{\emptyset}$  elde edilir. Ayrıca  $cl_\tau(\tilde{Y} \tilde{\cap} (F, E)) \tilde{\cup} cl_\tau^*(\tilde{Y} \tilde{\cap} (G, E)) \tilde{\subseteq} cl_\tau(\tilde{Y}) \tilde{\cap} (G, E) = \tilde{\emptyset}$  olur.  $\tilde{Y} \tilde{\cap} (F, E)$  ve  $\tilde{Y} \tilde{\cap} (G, E)$  boş esnek kümeden farklı iseler teorem 5.2.13 den  $\tilde{Y}, (Y, \tau_Y, E, \tilde{I}_Y)$  uzayına göre  $\star_s$ -esnek bağlantılı değildir. Buradan  $\tilde{Y} \tilde{\cap} (F, E) = \tilde{\emptyset}$  veya  $\tilde{Y} \tilde{\cap} (G, E) = \tilde{\emptyset}$  sağlanır. O halde  $\tilde{Y} = \tilde{Y} \tilde{\cap} (F, E) = \tilde{\emptyset}$  veya  $\tilde{Y} = \tilde{Y} \tilde{\cap} (G, E) = \tilde{\emptyset}$  olur. O halde  $\tilde{Y} \tilde{\subseteq} (F, E)$  veya  $\tilde{Y} \tilde{\subseteq} (G, E)$  gerçekleşir.

## 6 ESNEK $\tilde{I}$ -PARAKOMPAKT UZAYLAR

Bu bölümde tez boyunca incelenen çalışmalar ışığında bir esnek ideal topolojik uzayın esnek  $\tilde{I}$ -parakompakt olma kavramını tanıtilacak ve bu koşulu sağlayan uzayların özellikleri incelenecektir. Ayrıca konu çeşitli örneklerle zenginleştirilecektir.

**Tanım 6.1. (Lin, 2013)**  $(X, \tau, E)$  esnek topolojik uzay ve  $\mathcal{V} \subseteq SS(X)_E$  esnek kümelerin bir ailesi olsun.

(i) Her  $x_e \in SP(X)_E$  esnek noktası için,  $\mathcal{V}$  ailesinin elemanlarının sadece sonlu tanesiyle kesişecek şekilde  $x_e$  esnek noktasının bir  $U_{x_e}$  esnek komşuluğu var ise  $\mathcal{V}$  ailesine yerel sonlu aile denir.

(ii)  $\mathcal{U} \subseteq SS(X)_E$  esnek kümelerin bir ailesi olsun. Her  $(U, E) \in \mathcal{U}$  için,  $(U, E) \tilde{\subseteq} (V, E)$  olacak şekilde bir  $(V, E) \in \mathcal{V}$  var ise,  $\mathcal{U}$  ailesine  $\mathcal{V}$  ailesinin inceltiymişi denir.

$\mathcal{U}$  ailesinin elemanları esnek açık kümeler ise  $\mathcal{U}$  ailesine,  $\mathcal{V}$  ailesinin esnek açık inceltiymişi denir.  $\mathcal{U}$  ailesinin elemanları esnek kapalı kümeler ise  $\mathcal{U}$  ailesine,  $\mathcal{V}$  ailesinin esnek kapalı inceltiymişi denir.

**Önerme 6.2. (Lin, 2013)**  $(X, \tau, E)$  esnek topolojik uzay ve  $\mathcal{U} = \{(F_\alpha, E) : \alpha \in \wedge\}$  esnek kümelerin yerel sonlu bir ailesi olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- (i)  $\mathcal{U}$  ailesinin her alt ailesi yerel sonlu bir ailedir.
- (ii)  $\mathcal{V} = \{cl((F_\alpha, E)) : (F_\alpha, E) \in \mathcal{U}\}$  ailesi yerel sonlu bir ailedir.
- (iii)  $cl(\tilde{\bigcup}_{(F_\alpha, E) \in \mathcal{U}} (F_\alpha, E)) = \tilde{\bigcup}_{(F_\alpha, E) \in \mathcal{U}} cl((F_\alpha, E))$ .

**Kanıt.** (i) Kanıt açıktır.

(ii)  $x_e \in SP(X)_E$  olsun. Hipotezden her bir  $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  için  $U_{x_e} \tilde{\cap} (F_\alpha, E) \neq \tilde{\emptyset}$  olacak şekilde bir  $U_{x_e} \in \mathcal{N}_{x_e}$  vardır. O zaman her bir  $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  için  $U_{x_e} \tilde{\cap} cl((F_\alpha, E)) \neq \tilde{\emptyset}$  sağlanır. Buradan  $\mathcal{V} = \{cl((F_\alpha, E)) : (F_\alpha, E) \in \mathcal{U}\}$  ailesi yerel sonludur.

(iii)  $x_e \tilde{\in} cl(\tilde{\bigcup}_{\alpha \in \wedge} (F_\alpha, E))$  alalım. O zaman her  $U_{x_e} \in \mathcal{N}_{x_e}$  için  $U_{x_e} \tilde{\cap} (\tilde{\bigcup}_{\alpha \in \wedge} (F_\alpha, E)) \neq \tilde{\emptyset}$  sağlanır. Hipotezden her  $x_e \in SP(X)_E$  için,  $\alpha \neq \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  olmak üzere  $U'_{x_e} \tilde{\cap} (F_\alpha, E) = \tilde{\emptyset}$  olacak şekilde bir  $U'_{x_e} \in \mathcal{N}_{x_e}$  vardır. O halde  $U'_{x_e} \tilde{\cap} (\tilde{\bigcup}_{\alpha \neq \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} (F_\alpha, E)) = \tilde{\emptyset}$  bulunur. Buradan  $x_e \tilde{\notin} \tilde{\bigcup}_{\alpha \neq \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} (F_\alpha, E)$  elde edilir.

$$x_e \tilde{\in} cl(\tilde{\bigcup}_{\alpha \in \wedge} (F_\alpha, E)) = cl(\tilde{\bigcup}_{\alpha \neq \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} (F_\alpha, E)) \tilde{\bigcup} cl(\tilde{\bigcup}_{\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} (F_\alpha, E))$$

olduğundan  $x_e \tilde{\in} cl(\tilde{\bigcup}_{\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} (F_\alpha, E))$  sağlanır.  $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  sonlu olduğu için,

$$\begin{aligned} x_e \tilde{\in} cl(\tilde{\bigcup}_{\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} (F_\alpha, E)) &= \tilde{\bigcup}_{\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} cl((F_\alpha, E)) \\ &\subseteq \tilde{\bigcup}_{\alpha \in \wedge} cl((F_\alpha, E)) \end{aligned}$$

elde edilir.

Tersine  $\tilde{\bigcup}_{(F_\alpha, E) \in \mathcal{U}} cl((F_\alpha, E)) \subseteq cl(\tilde{\bigcup}_{(F_\alpha, E) \in \mathcal{U}} (F_\alpha, E))$  olur.

O halde  $cl(\tilde{\bigcup}_{(F_\alpha, E) \in \mathcal{U}} (F_\alpha, E)) = \tilde{\bigcup}_{(F_\alpha, E) \in \mathcal{U}} cl((F_\alpha, E))$  bulunur.

**Tanım 6.3. (Lin, 2013)**  $(X, \tau, E)$  esnek topolojik uzay olsun.  $\tilde{X}$  in her  $\mathcal{V}$  esnek açık örtüsünün,  $\tilde{X}$  uzayını örten bir yerel sonlu esnek açık inceltilmiş varsa  $(X, \tau, E)$  uzayına esnek parakompakt uzay denir.

**Tanım 6.4.**  $(X, \tau, E, \tilde{I})$  esnek ideal topolojik uzay ve  $(F, E) \in SS(X)_E$  olsun.  $(F, E)$  esnek kümesinin, esnek açık kümelerinden oluşan her  $\{(G_\alpha, E) : \alpha \in \wedge\}$  örtüsünün  $(F, E) - \tilde{\bigcup}\{(V_\alpha, E) : \alpha \in \vee\} \in \tilde{I}$  olacak şekilde bir  $\{(V_\alpha, E) : \alpha \in \vee\}$  yerel sonlu esnek açık inceltilmiş varsa  $(F, E)$  esnek kümesine  $(X, \tau, E)$  ye göre esnek  $\tilde{I}$ -parakompakt denir. Ayrıca  $\tilde{X}$  esnek kümesi  $(X, \tau, E)$  ye göre esnek  $\tilde{I}$ -parakompakt ise  $(X, \tau, E)$  ye esnek  $\tilde{I}$ -parakompakt uzay denir.

**Örnek 6.5.**  $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ ,  $E = \{e_1, e_2\}$  ve  $\tau, \delta = \{\{(e_1, \emptyset), (e_2, \{x_i\})\}, \{(e_1, \{x_i\}), (e_2, \emptyset)\}\}_{x_i \in X}$ , ailesini esnek alt baz kabul eden topoloji olsun.  $\tilde{I} = \{(I, E) : (I, E) \subseteq \{(e_1, \emptyset), (e_2, \{x_1, x_2, x_3, \dots\})\}\}$  olmak üzere  $(X, \tau, E)$  esnek topolojik uzayı esnek  $\tilde{I}$ -parakompakttır.

**Önerme 6.6.** Her  $(X, \tau, E)$  esnek parakompakt topolojik uzayı,  $X$

üzerinde bir  $\tilde{I}$  esnek idealine göre, esnek  $\tilde{I}$ -parakompakttır.

**Kanıt.**  $\tilde{\emptyset} \in \tilde{I}$  olduğu için kanıt açıktır.

**Uyarı 6.7.**  $(X, \tau, E)$  esnek topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler vardır.

(i)  $\tilde{I} = \{\tilde{\emptyset}\}$  ise esnek  $\tilde{I}$ -parakompakt uzay ile esnek parakompakt uzay çakışıktır.

(ii)  $(X, \tau, E)$  esnek topolojik uzayı, esnek  $\tilde{I}$ -parakompakt ve  $\tilde{J}$ ,  $X$  üzerinde  $\tilde{I} \subseteq \tilde{J}$  olacak şekilde bir esnek ideal olsun. O zaman  $(X, \tau, E)$  esnek  $\tilde{J}$ -parakompakttır.

**Teorem 6.8.** Bir  $(X, \tau, E)$  esnek  $\tilde{I}$ -parakompakt uzayın esnek kapalı alt kümelerinin sayılabilir birleşimi, esnek  $\tilde{I}$ -parakompakt alt uzaydır.

**Kanıt.**  $(A, E)$ , esnek kapalı alt kümelerin sayılabilir birleşimi olsun. O zaman her  $i \in \mathbb{N}$  için  $(A_i, E)$  esnek kapalı olmak üzere  $(A, E) = \tilde{\bigcup}\{(A_i, E) : i \in \mathbb{N}\}$  olur.  $(A, E)$  esnek kümesinin  $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, E), \alpha \in \wedge\}$ ,  $\tau_{(A,E)}$ -açık örtüsünü alalım. Her  $\alpha \in \wedge$  için  $(V_\alpha, E) \in \tau$  olmak üzere  $(U_\alpha, E) = (V_\alpha, E) \tilde{\cap} (A, E)$  vardır. O halde  $\mathcal{U}_1 = \{(V_\alpha, E) : \alpha \in \wedge\} \tilde{\bigcup} \{\tilde{X} - (A_i, E) : i \in \mathbb{N}\}$ ,  $\tilde{X}$  uzayının esnek açık örtüsüdür.

Hipotezden, bir  $(I, E) \in \tilde{I}$  için  $\tilde{X} = \tilde{\bigcup}\{(V_\beta, E) : \beta \in \vee\} \tilde{\bigcup} (I, E)$  olacak şekilde  $\mathcal{U}_1$  esnek ailesinin,  $\mathcal{V}_1 = \{(V_\beta, E) : \beta \in \vee\}$  yerel sonlu esnek açık inceltişi vardır. O halde  $\mathcal{G} = \{(V_\beta, E) : (V_\beta, E) \in \mathcal{V}_1 \text{ ve } (V_\beta, E) \tilde{\cap} (A_i, E) \neq \tilde{\emptyset}, \forall i \in I\}$  ailesi yerel sonludur.  $(V_\beta, E) \in \mathcal{G}$  alalım.  $\mathcal{V}_1, \mathcal{U}_1$  ailesinin esnek inceltişi olduğundan  $(V_\beta, E) \tilde{\subseteq} (U, E)$  olacak şekilde  $(U, E) \in \mathcal{U}_1$  vardır. O zaman  $(U, E) = (V_\alpha, E)$  olmalıdır.  $\tilde{X} = \tilde{\bigcup}\{(V_\beta, E) : \beta \in \vee\} \tilde{\bigcup} (I, E)$  olduğundan  $(A, E) = (\tilde{\bigcup}\{(V_\beta, E) : \beta \in \vee\} \tilde{\bigcup} (I, E)) \tilde{\cap} (A, E)$  bulunur. Buradan  $(A, E) = \tilde{\bigcup}\{(V_\beta, E) \tilde{\cap} (A, E) : \beta \in \vee\} \tilde{\bigcup} ((A, E) \tilde{\cap} (I, E))$  ve  $(A, E) \subseteq \tilde{\bigcup}\{(V_\beta, E) \tilde{\cap} (A, E) : \beta \in \vee\} \tilde{\bigcup} I_A$  elde edilir.

$\mathcal{G}_A = \{(V_\beta, E) \tilde{\cap} (A, E) : (V_\beta, E) \in \mathcal{G} \text{ ve } \beta \in \vee\}$  olsun.  $x_e \tilde{\in} (A, E)$  olsun.  $\mathcal{G}$  yerel sonlu olduğundan, her  $\beta \neq \beta_1, \dots, \beta_n$  için  $(V_\beta, E) \tilde{\cap} (W, E) = \tilde{\emptyset}$  olacak şekilde bir  $(W, E) \in \mathcal{N}(x_e)$  vardır. Buradan her  $\beta \neq \beta_1, \dots, \beta_n$

için  $((V_\beta, E)\tilde{\cap}(A, E))\tilde{\cap}((W, E)\tilde{\cap}(A, E)) = \tilde{\emptyset}$  sağlanır. O zaman  $\mathcal{G}_A$  ailesi,  $\tau_{(A, E)}$  yerel sonlu esnek açıktır.  $(V_\beta, E) \in \mathcal{G}$  olmak üzere  $(V_\beta, E)\tilde{\cap}(A, E) \in \mathcal{G}_A$  alalım. Öyle bir  $(V_\alpha, E) \in \mathcal{U}_1$  için  $(V_\beta, E)\tilde{\subseteq}(V_\alpha, E)$  olur ve buradan  $(V_\beta, E)\tilde{\cap}(A, E)\tilde{\subseteq}(V_\alpha, E)\tilde{\cap}(A, E)$  bulunur.  $\mathcal{G}_A$  ailesi,  $\mathcal{U}$  ailesinin esnek inceltiştir. Sonuç olarak  $(A, E)$  esnek  $\tilde{I}_A$ -parakompakttır.

**Sonuç 6.9.**  $(X, \tau, E)$  esnek  $\tilde{I}$ -parakompakt uzay olsun.  $(A, E) \in SS(X)_E$  esnek kapalı küme ise  $(A, \tau_A, E)$  esnek topolojik uzayı esnek  $\tilde{I}_A$ -parakompakttır.

**Teorem 6.10.**  $(X, \tau, E)$  esnek  $\tilde{I}$ -kompakt uzay ise  $(X, \tau, E)$  esnek  $\tilde{I}$ -parakompakt uzaydır.

**Kanıt.**  $\{(U_\alpha, E) : \alpha \in \mathcal{V}\}$  ailesi  $\tilde{X}$  in esnek açık örtüsü olsun. Hipotezden  $\tilde{X} - \tilde{\bigcup}\{(U_\alpha, E) : \alpha \in \mathcal{V}_0\}$  olacak şekilde  $\mathcal{V}$  nin sonlu bir  $\mathcal{V}_0$  alt kümesi vardır.  $\mathcal{V} = \{(U_\alpha, E) : \alpha \in \mathcal{V}_0\}$  ailesi  $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, E) : \alpha \in \mathcal{V}\}$  ailesinin yerel sonlu açık inceltiştir. O halde  $(X, \tau, E)$  esnek  $\tilde{I}$ -parakompakt uzaydır.

Örnek 6.11 Teorem 6.10 un tersinin genelde doğru olmadığına aittir.

**Örnek 6.11.** Örnek 6.5 deki  $(X, \tau, E)$  esnek topolojik uzayını alalım.  $\mathcal{V} = \{\{(e_1, \emptyset), (e_2, \{x_i\})\}, \{(e_1, \{x_i\}), (e_2, \emptyset)\}\}_{x_i \in X}$  ailesi,  $X$  uzayının esnek açık örtüsüdür. Fakat  $(X, \tau, E)$  uzayı esnek  $\tilde{I}$ -kompakt değildir.

## 7 SONUÇ

1999 yılında Molodstov tarafından ilk kez ortaya atılan esnek küme kavramı 2014 yılında esnek ideal kavramının ortaya atılmasıyla genişlemiş ve bu alanlarda pek çok ilerleme sağlanmıştır.

Biz de bu tezdeki çalışmalarımızı A. Kandil, O. A. E. Tantawy, S. A. El-Sheikh and A. M. Abd El-latif, 2014 yılında yayınlanan "Soft Ideal Theory Soft Local Function and Generated Soft Topological Spaces" adlı makalesi ve yine aynı yıl yayınlanan "Soft Connectedness Via Soft Ideals" makalesini temel alarak yaptık.

Ayrıca, esnek ideal topolojik uzaylar üzerindeki özellikleri ve önermeleri inceleyerek örneklerle destekledik. Daha sonra, esnek  $\tilde{I}$ -parakompakt uzay tanımını ve bu uzay üzerindeki bazı teoremleri verdik. Konuların daha iyi anlaşılmasını sağlamak için örneklerle çalışmayı destekledik.





## KAYNAKLAR DİZİNİ

- Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W.K. and Shabir, M., 2009, On some new operations in soft set theory, *Computers and Mathematics with Applications*, 57, 1547–1553.
- Aygünoğlu, A. and Aygün, H., 2012, Some notes on soft topological spaces, *Neural Computing Applications*, 21, 113–119.
- Caksu Guler, A. and Kale, G., 2015, Regularity and normality on soft ideal topological spaces, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 9(4), 373-383.
- Das, S. and Samanta, S.K., 2013, Soft metric, *Annals Fuzzy Mathematics and Informatics*, 6(1), 77-94.
- Demir, İ. and Bedre Özbakır, O., 2014, Soft Hausdorff spaces and their some properties, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 8(5), 769-783.
- Feng, F., Jun, Y.B. and Zhao, X., 2008, Soft semirings, *Computer Mathematics with Applications*, 56, 2621-2628.
- Kandil, A., Tantawy, O. A. E., El-Sheikh, S. A. and Abd El-latif, A. M., 2014a, Soft ideal theory soft local function and generated soft topological spaces, *Applied Mathematics and Information Sciences*, 8(4), 1595-1603.
- Kandil, A., Tantawy, O. A. E., El-Sheikh, S. A. and Abd El-latif, A. M., 2014b, Soft semi compactness via soft ideals, *Applied Mathematics and Information Sciences*, 8,(5), 2297-2306.
- Kandil, A., Tantawy, O. A. E., El-Sheikh, S. A. and Abd El-latif, A. M., 2014c, Soft connectedness via soft ideals, *Journal of New Results in Science*, 4, 1304-7981.
- Kuratowski, K., 1933, Topologie 1, *Warszawa*.

**KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)**

- Lin, F.**, 2013, Soft connected spaces and soft paracompact spaces, *International Science Index International Journal of Mathematical, Computational, Natural and Physical Engineering*, 7(2).
- Maji, P.K., Biswas, R. and Roy, A.R.**, 2003, Soft set theory, *Computers and Mathematics with Applications*, 45, 555–562.
- Molodtsov, D.**, 1999, Soft set theory-first results, *Computers and Mathematics with Applications*, 37, 19–31.
- Nazmul, Sk. and Samanta, S. K.**, 2012, Neighbourhood properties of soft topological spaces, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 6, 1-15.
- Rong, W.**, 2012, The countabilities of soft topological spaces, *International Journal of Computational and Mathematical Sciences*, 6,159–162.
- Shabir, M. and Naz, M.**, 2011, On soft topological spaces, *Computers Mathematics with Applications*, 61, 1786-1799.
- Zorlutuna, I., Akdag, M., Min, W.K. and Atmaca, S.**, 2012, Remarks on soft topological spaces, *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 3, 171- 185.



# ÖZGEÇMİŞ

## Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı: Elif TURANLI

Doğum Yeri: Artvin

Doğum Tarihi: 1 Ekim, 1989

Uyruğu: T.C.

Adres: Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü 35100,  
Bornova, İZMİR

E-mail: elif.turanli.ege.uni.08@gmail.com

## Eğitim Durumu

1996-2004: Karagözoğlu İlköğretim Okulu- 75.Yıl İlköğretim Okulu-  
BALIKESİR

2004-2007: Edremit Anadolu Lisesi- BALIKESİR

2008-2013: Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Teorik  
Matematik Ağırlıklı Matematik Lisans Programı- İZMİR

2012: Mainz Johannes Gutenberg Üniversitesi, İnstitute of mathematics-  
ALMANYA

2013: Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü,  
Topoloji Bilim Dalı Yüksek Lisans Programı- İZMİR

## Yabancı Dil

- İngilizce, e-YDS (Elektronik Yabancı Dil Sınavı ) Nisan 2015 puanı : 62,5

### **Burslar**

- Ege Üniversitesi Aliye Üster Vakfı Lisansüstü Bursu

### **İdari Görevler**

- 2013-2015 Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü Lisansüstü Öğrenci Temsilciliği

### **Ödüller**

- 2013 Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Üçüncülüğü

### **Konferanslar**

- Gebze Yüksek Teknoloji Enstitüsü 1. Kadın Matematikçiler Derneği Çalıştayı  
Mayıs 2014

### **Sertifikalar**

- Pedagojik Formasyon- Ege Üniversitesi Ağustos 2014