EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(DOKTORA TEZİ)

GRAFLAR ÜZERİNDE DEĞİŞMELİ CEBİRSEL METOTLAR

Alper ÜLKER

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Tahsin ÖNER

Matematik Anabilim Dalı

Sunuş Tarihi: 19.08.2016

Bornova-İZMİR
2016

Alper ÜLKER tarafından **Doktora Tezi** olarak sunulan "**Graflar Üzerinde Değişmeli Cebirsel Metotlar**" başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 19.08.2016 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri:		**İmza**
Jüri Başkanı	: Doç. Dr. Tahsin ÖNER	....
Raportör Üye	: Prof. Dr. Urfat NURİYEV	....
Üye	: Prof. Dr. Mehmet TERZİLER	....
Üye	: Doç. Dr. Vecdi AYTAÇ	....
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Esra DALAN YILDIRIM	....

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Doktora Tezi olarak sunduğum “Graflar Üzerinde Değişmeli Cebirsel Metotlar ”başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

.... / .... / 20..

İmzası

Alper ÜLKER

ÖZET

GRAFLAR ÜZERİNDE DEĞİŞMELİ CEBİRSEL METOTLAR

ÜLKER, Alper

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Tahsin ÖNER
19 Ağustos 2016, 47 sayfa

Bu tezin amacı, kombinatorik objeler ve değişmeli cebir arasındaki bağlantıları tanıtmaktır. Stanley-Reisner halkalar bu bağlantıda önemli bir rol oynar. Kombinatoriği ve kombinatorik topolojiyi araç olarak kullanarak değişmeli cebir ile ilgili sonuçlar verildi.

Tez, yedi bölümden oluşmaktadır.

Tez ile ilgili genel bilgilerin yer aldığı giriş bölümünden sonra, ön bilgiler bölümünde temel kavramlara yer verildi.

Üçüncü bölümde, Cohen-Macaulay kompleksleri tanıtıldı ve onlarla ilgili temel olgular verildi. Stanley-Reisner halkaları tanıtıldı ve bazı homoloji grupları hesaplandı. Ayrıca bu tezdeki en önemli kompleks ailesi olan bağımsızlık kompleksleri tanıtıldı.

Dördüncü bölümde, tepe-ayrıştırma kavramı tanıtıldı ve zayıf kiriş grafların bağımsızlık kompleksleri için tepe-ayrıştırma sonuçları verildi.

Beşinci bölümde, kabuklanabilirlik kavramı verildi ve kabuklanabilirlik ile ilgili sonuçlar gösterildi.

Altıncı bölümde, kompleksler için cebirsel bir değişmez derinlik tanımlandı. Zayıf kiriş graflar ve çevrim graflar için derinlik hesaplandı.

Son Bölümde, tez boyunca elde edilen sonuçların bir özeti verildi.

Anahtar Kelimeler: Tepe-Ayrıştırma, Bağımsızlık Kompleksleri, Cohen-Macaulay, Kabuklanabilirlik, Depth.

ABSTRACT

COMMUTATIVE ALGEBRAIC METHODS ON GRAPHS

ÜLKER, Alper

Ph.D. Thesis, Mathematics Department
Supervisor: Doç. Dr. Tahsin ÖNER
19 August 2016, 47 pages

The aim of this thesis is to introduce the connections between combinatorial objects and commutative algebra. Stanley-Reisner rings play important role for this connection. Using combinatorics and combinatorial topology as a tool we give some results about commutative algebra.

This thesis consists of seven chapters.

After the introductiory chapter in which the general information concerning to the thesis is given, in the Preliminaries, fundamental and basic notions are presented.

In chapter 3, Cohen-Macaulay Complexes are introduced and basic notions about Cohen- Macaulay Complexes are given. Stanley-Reisner rings are introduced and some homology groups are computed. Also most important familiy of complexes for this thesis that is called independence complexes are introduced.

In chapter 4, the notion of vertex-decomposability is introduced and some results about vertex decomposability of independence complexes of weakly chordal graphs are given.

In chapter 5, the notion of shellability is given and some results about shellability are shown.

In chapter 6, an algebraic invariant depth is defined for complexes. For weakly chordal and cycle graphs depth is computed.

In chapter 7, we final the work with the summary of the thesis.

Keywords: Vertex-Decomposability, Independence Complexes, Cohen-Macaulay, Shellability, Depth.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans döneminden, doktora dönemimin sonuna kadar, akademik hayatım boyunca herzaman yanımda olan ve hiçbir desteğini esirgemeyen danışman hocam, Doç. Dr. Tahsin ÖNER' e, akademik hayatımda bugünlere gelmemde emeği büyük hocalarım Prof. Dr. Mehmet TERZİLER ve Prof. Dr. Pınar DÜNDAR'a, tezim ile ilgili çalışmalarımda büyük destek sağlayan hocalarım Prof. Dr. Yusuf CİVAN ve Doç. Dr. Russ WOODROOFE' e. Tezin grafiklerinin çiziminde emeğe sahip Emrah ÜLKER'e ve en önemlisi her zaman yanımda olan bugünlere gelmemi sağlayan, maddi manevi en büyük destekçim annem Alime ÜLKER ve babam Fahri ÜLKER' e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

İÇİNDEKİLER (Devam)

Sayfa

İÇİNDEKİLER (Devam)

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

Simge	Açıklama
$k[\Delta]$	Δ nın Stanley-Reisner Halkası
$\text{Ind}(G)$	G grafının bağımsızlık kompleksi
$\text{lk}_{\Delta}(F)$	F yüzünün Δ da silinmişi
$\text{star}_{\Delta}(F)$	F yüzünün Δ da yıldızı
$N_G[x]$	x in G de kapalı komşuluğu
$\Delta * \Gamma$	Δ ve Γ nın birleşimi
$\widetilde{H}_q(\Delta, k)$	Δ nın q uncu indirgenmiş homoloji grubu
$\text{depth}(\Delta)$	Δ nın derinliği
$\dim(\Delta)$	Δ nın boyutu
$\text{pd}(R)$	R halkasının projektif boyutu
$\alpha(G)$	G grafının bağımsızlık sayısı
$\beta(G)$	G grafının tepe örtüm sayısı

1. GİRİŞ

Kombinatoriğin cebirsel problemlerin çözümünde kullanımı László Lovász (1979) Kneser konjektürünü (Kneser, 1955) ispatlamasıyla literatüre girmiştir. Bunun yanı sıra 1970' li yıllarda Richard Stanley (1975), Melvin Hochster (1977) ve Gerald A. Reisner (1976) kombinatorik değişmeli cebirin temellerini atmıştırlar ve Cohen-Macaulay kompleksleri kavramı oluşmuştur. Bu çalışmalarda Stanley-Reisner halkaları ortaya çıkmış ve değişmeli cebirin bir çok probleminin kombinatorik yollarla çözümü mümkün olmuştur.

Provan, J.S. ve Billera, L.J. (1980) çalışmalarında tepe-ayrıştırma yöntemini ortaya atmış ve komplekslerin Stanley-Reisner halkalarının Cohen-Macaulay olduğunu göstermek için oldukça kullanışlı bir yöntem sunmuşlardır. Böylece cebirsel bir problem olan Cohen-Macaulay halkalarının karakterizasyonu, aynı zamanda kombinatorik bir problem olmuştur.

Daha sonraki çalışmalarda, Björner, A ve Wachs, M.L. (1996) tepe-ayrıştırma yöntemini saf komplekslerden genel komplekslere genişleterek daha fazla cebirsel sonuçlar elde etmişlerdir.

Bu tezin esas yöntemi tepe-ayrıştırma olup, bazı graf ve kompleks aileleri için bu yöntem kullanılarak değişmeli cebirsel sonuçlar elde edilmiştir.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde tezde ilerki bölümlerde kullanılacak temel tanımlar ve ön bilgiler verilecektir. Tez boyunca, kombinatorik değişmeli cebir için (Villarreal, 2015; Bruns and Herzog, 2008; Stanley, 2008), değişmeli cebir için (Dummit and Foote, 2004; Matsumura and Reid, 1989; Rotman, 2003;), graf teorisi için (Chartrand and Zhang, 2008) ve cebirsel topoloji için (Rotman, 1998, 2003; Hatcher, 2001; Munkres, 2008) çalışmalarındaki kavramlar ve notasyonlar temel alınmıştır.

2.1 Değişmeli Cebir

Bir k cisim ve $R = k[x_1, ..., x_n]$ k cismi üzerinde n değişkenli bir polinomlar halkası olsun. $a_i \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_n^{a_n}$ çarpımına bir tekterimli (monomial) denir. $R = k[x_1, ..., x_n]$ nin tekterimlileri tarafından üretilen bir I idealine tekterimli ideal denir.

Örnek 1 $R = k[x_1, ..., x_5]$ olsun. $I = (x_1x_3, x_4, x_2x_5)$, R nin bir monomial idealidir. Bu durumda, eğer $f \in I$ ise $g_1, g_2, g_3 \in R$ olmak üzere $f = g_1x_1x_3 + g_2x_4 + g_3x_2x_5$ dir.

Tanım 2.1 (Rotman, 2003) R bir halka ve P, R nin bir ideali olsun. Eğer $a, b \in R$ için $ab \in P$ olduğunda $a \in P$ veya $b \in P$ sağlanıyor ise P idealine R nin bir asal ideali denir.

R bir halka ve $I \subseteq R$ ideal olsun. Eğer $I \subset P$ ve P tarafından içerilen ve I idealini içeren başka bir asal ideal yoksa P ye I nın minimal asal ideali denir (Dummit and Foote, 2004).

Tanım 2.2 (Dummit and Foote, 2004) Değişmeli bir R halkasının bir I ideali için, eğer $I \subseteq J \subseteq R$ olacak şekilde bir J ideali yoksa I ya bir maksimal ideal denir.

Tanım 2.3 (Rotman, 2003) R bir tek $\mathfrak{m}$ maksimal ideale sahip değişmeli bir halka ise $(R, \mathfrak{m})$ ye lokal halka denir.

Tanım 2.4 (Dummit and Foote, 2004) Bir R halkası aşağıdaki,

(i) R nin boştan farklı her idealler kümesi maksimal elemana sahiptir,
(ii) R nin artan $I_0 \subseteq I_1 \subseteq ...$ idealler zinciri sabitlenir, yani, $I_i = I_{i+1}$,
(iii) R nin her ideali sonlu üretilmiştir,
koşullarını sağlarsa R ye Noetherian halka denir.

Tanım 2.5 (Rotman, 2003) R bir halka ve M bir R-modül olsun. Eğer M modülünün,

$$... \longrightarrow P_n \longrightarrow ... \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

şeklindeki dizisi tam ve her bir $i = 1, 2, ..., n$ için P_i ler projektif modül ise bu diziye projektif çözücü denir.

Tanım 2.6 (Rotman, 2003) R bir halka ve M bir R-modül olsun. Eğer M modülünün,

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow ... \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

şeklinde bir projektif çözücüsü var ise, n sayısına M nin projektif boyut denir ve $\mathrm{pd}(M)$ ile gösterilir.

Uyarı 2.7 Tanım 2.5' de verilen projektif çözücü için, her bir modülden bir N modüle homomorfizmalar alınırsa,

$0 \to \mathrm{Hom}_R(M,N) \overset{\epsilon}{\to} \mathrm{Hom}_R(P_0,N) \overset{d_1}{\to} \mathrm{Hom}_R(P_1,N) \overset{d_2}{\to} ... \overset{d_{n-1}}{\to} \mathrm{Hom}_R(P_{n-1},N) \overset{d_n}{\to} \mathrm{Hom}_R(P_n,N) \overset{d_{n+1}}{\to}$ ... tam dizisi elde edilir (Dummit and Foote, 2004).

Tanım 2.8 (Dummit and Foote, 2004) M ve N birer R-modül olsunlar. Bir M modülünün projektif çözücüsü için Uyarı 2.6' daki dizi göz önüne alınırsa, tüm $n \geqslant 0$ için,

$$d_n : \mathrm{Hom}_R(P_{n-1},N) \to \mathrm{Hom}_R(P_n,N)$$

homomorfizmasında, $\mathrm{Ext}^n_R(M,N) = \mathrm{Ker}(d_{n+1})/\mathrm{Im}(d_n)$ dir ve $\mathrm{Ext}^0_R(M,N) = \mathrm{Ker}(d_1)$ olarak tanımlanır. Bu $\mathrm{Ext}^n_R(M,N)$ grubuna, $\mathrm{Hom}_R(-,N)$ ' nın n-inci kohomoloji türev funktoru denir.

Önerme 2.9 (Dummit and Foote, 2004) M bir R-modül olsun. Buna göre, $\mathrm{Ext}^0_R(M,N) \cong \mathrm{Hom}_R(M,N)$ dir.

Teorem 2.10 (Dummit and Foote, 2004) R-modüllerin bir $0 \longrightarrow \Omega \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \Theta \longrightarrow 0$ tam dizisi alınsın. Buna göre bir M modülü için,

$0 \to \mathrm{Hom}_R(M,\Omega) \to \mathrm{Hom}_R(M,\Gamma) \to \mathrm{Hom}_R(M,\Theta) \to \mathrm{Ext}^1_R(M,\Omega) \to \mathrm{Ext}^1_R(M,\Gamma) \to \mathrm{Ext}^1_R(M,\Theta) \to \mathrm{Ext}^2_R(M,\Omega) \to ...$
dizisi tamdır.

2.2 Cohen-Macaulay Halkaları

Bu bölümde çalışmanın cebirsel anlamda en önemli yapısını oluşturan Cohen-Macaulay halkaları tanıtılacaktır. Cohen-Macaulay halkalar cebirsel geometriden, değişmeli cebire ve cebirsel kombinatoriğe bir çok alanda rol oynamaktadır.

Eğer R ye ait asal idealler $P_0 \subsetneq P_1 ... \subsetneq P_n \subsetneq R$ şeklinde kesin artan bir dizi oluşturuyor ise, buna asal idellerin n uzunlukta bir zinciri denir.

Tanım 2.11 (Matsumura and Reid, 1989) P ideali R halkasının bir asal ideali olsun.

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq ... \subsetneq P_n = P$$

olacak şekildeki en uzun asal idealler zincirinin uzunluğuna P nin yüksekliği (height) denir ve $\mathrm{ht}(P)$ ile gösterilir.

Eğer P ideali minimal asal ideal ise $\mathrm{ht}(P) = 0$ dır (Villarreal, 2015).

Tanım 2.12 (Krull Boyut) R halkasının Krull boyutu,

$$\dim(R) = \sup\{n : P_0 \subsetneq P_1 ... \subsetneq P_n,\ R \text{ nin bir asal ideller zinciridir.}\}$$

olacak şekildeki n sayısıdır ve $\dim(R)$ ile gösterilir (Matsumura and Reid, 1989).

Ayrıca bir R halkasının Krull boyutunun tanımı, asal ideallerinin yükseklikleri cinsinden de verilebilir.

Tanım 2.13 (Matsumura and Reid, 1989) R halkasının Krull boyutu,

$$\dim(R) = \sup\{\text{ht}(P) : P \text{ ideali R nin asal ideali}\}$$

dır.

Uyarı 2.14 (Villarreal, 2015) I ideali bir R halkasının herhangi bir ideali olsun. Bu durumda,

$$\text{ht}(I) = \min\{\text{ht}(P) : I \subset P \text{ ve } P \text{ ideali R nin asal ideali}\}$$

dir.

Tanım 2.15 (Matsumura and Reid, 1989) R halka ve M bir R-modül olsun. Buna göre,

$$\text{Ann}(M) = \{x \in R : xM = 0\}$$

kümesine M modülünün sıfırlayanı denir.

Tanım 2.16 (Matsumura and Reid, 1989) R bir halka ve M de bir R-modül olsun. Buna göre,

$$\dim(M) = \dim(R)/\text{Ann}(M)$$

dir.

Örnek 2 $R = k[x_1, x_2, ..., x_n]$ bir polinomlar halkası olsun. Buna göre, dim$(R) = n$ dir. Gerçekten $(0) \subsetneq (x_1) \subsetneq (x_1, x_2) \subsetneq ... \subsetneq (x_1, x_2, ..., x_n)$ asal ideallerin kesin artan bir dizisi olup asal ideal zinciridir.

Örnek 3 $\mathbb{F}$ bir cisim olsun, buna göre dim$(\mathbb{F}) = 0$ dır, çünkü $\mathbb{F}$ nin tek asal ideali (0) dır.

Örnek 4 $R = k[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ ve $I = (x_1x_2, x_2x_3, x_2x_4, x_1x_5, x_4x_5)$ olduğunu kabul edelim. Buna göre, dim$(R/I) = 3$ dür.

Tanım 2.17 (Dummit and Foote, 2004) R halkasında sıfırdan farklı $a \in R$ elemanı için $ab = 0$ iken $b \neq 0$ olacak şekilde bir $b \in R$ var ise, a ya sıfır bölen denir.

Tanım 2.18 (Regüler Eleman) Bir $x \in R$ ve $m \in R/I$ için $xm = 0$ iken $m = 0$ oluyor ise yani x bir sıfır bölen değilse, diğer bir ifadeyle, $m \in I$ ise, x' e R/I da bir regüler eleman denir (Bruns and Herzog, 1998).

Örnek 5 $I = (x_1x_2)$, $R = k[x_1, x_2, x_3, x_4]$ halkasının bir ideali olsun. $0 \neq x_1 \in R$ için, $\overline{x_1x_2} = 0 \in R/I$ olup, $x_2 \notin I$ dır. Böylece x_1 regüler eleman değildir.

Tanım 2.19 (Regüler Diziler) R nin bir $f_1, f_2, ..., f_t$ dizisi aşağıdaki,

(i) f_1 elemanı R/I da regüler eleman,
(ii) f_i elemanı $R/(I, f_1, ..., f_{i-1})$ da regüler eleman,

şartlarını sağlıyorsa, bu diziye R/I da regüler dizi denir (Bruns and Herzog, 1998).

Önerme 2.20 (Bruns and Herzog, 1998) Tüm maksimal regüler diziler aynı uzunluğa sahiptir ve herhangi bir regüler dizi maksimal regüler diziye genişletilebilir.

Tanım 2.21 (Bruns and Herzog, 1998) Bir R/I halkasının maksimal regüler dizisinin uzunluğuna R/I halkasının derinliği (depth) denir ve depth(R/I) ile gösterilir.

Teorem 2.22 (Auslander-Buchsbaum Formülü)
$R = k[x_1, ..., x_n]$ halkası n değişkenli bir polinomlar halkası ve I, R nin bir ideali olsun. Buna göre,

$$\text{pd}(R/I) + \text{depth}(R/I) = n$$

dir (Rotman, 2003).

Tanım 2.23 R halkası $\mathfrak{m}$ maksimal ideale sahip bir Noetherian lokal halka olsun. Eğer $\dim(R) = \text{depth}(R)$ ise R halkasına Cohen-Macaulay halkası denir (Bruns and Herzog, 1998).

Bu çalışmada, bir R halkasının Cohen-Macaulay olmasından daha çok özel R nin bazı özel I idealleri için R/I bölüm halkasının Cohen-Macaulay oluşu üzerinde durulacaktır.

2.3 Simpleksel Homoloji

Simpleks kompleksleri, kombinatorik değişmeli cebirin temel elemanlarından biridir ve topolojik uzayları, manifoldları kombinatorik olarak ifade etmede önemli rol oynar.

Tanım 2.24 Bir Δ simpleks kompleksi, sonlu bir tepeler kümesi V ile birlikte bu V nin altkümelerinin, yüz (face) veya simpleks (simplex) olarak adlandırılan ve

(i) $\tau \in \Delta$ ve $\sigma \subseteq \tau$ ise $\sigma \in \Delta$,
(ii) $\sigma \in \Delta$ ve $\tau \in \Delta$ ise $\sigma \cap \tau \in \Delta$
koşullarını sağlayan bir koleksiyonundan oluşur (Villarreal, 2015).

σ, Δ kompleksinin bir yüzü olsun. σ nın boyutu $\dim(\sigma) = |\ \sigma\ | -1$ ile tanımlanır. Özel olarak Δ kompleksinin kapsama bağıntısı ile en büyük boyutlu yüzlerine Δ nın faseti (facet) adı verilir. Ayrıca, $\dim(\Delta) = sup\{\dim(\sigma) : \sigma \in \Delta\}$, Δ kompleksinin boyutunu tanımlar. q boyutlu bir yüze q-yüz veya q-simpleks adı verilir.

Bir Δ kompleksinin V tepe kümesinin elemanları doğrusal olarak yönlendirilirse, Δ ya yönlendirilmiş bir kompleks denir. $F = \{v_0, v_1, ..., v_d\}$ bir $d-$simpleks olsun. F nin tepelerinin $v_{i_0} < v_{i_1} < ... < v_{i_d}$ ve $v_{j_0} < v_{j_1} < ... < v_{j_d}$ iki yönlendirmesi olsun, eğer $(i_0, i_1, ..., i_d)$ sıralı $(d+1)$-lisi, $(j_0, j_1, ..., j_d)$ nin çift permütasyonu ise bu iki yönlendirme denktir. Böylece bir simpleksin yönlendirilmesi iki denklik sınıfı oluşturur. O halde yönlendirilmiş bir d-simpleks F, bu denklik sınıflarından biridir. F nin tepelerinin bir $v_0 < v_1 < ... < v_d$ yönlendirilmesi $[v_0, v_1, ..., v_d]$ ile gösterilir. $C_q(\Delta)$ yönlendirilmiş q-simpleksler tarafından üretilen serbest $R-$modül olsun. Diğer bir ifadeyle, $C_q(\Delta)$ modülünü üreten baz yönlendirilmiş q-simpleksler olsun. Böylece $\dim_k C_q(\Delta)$, Δ nın q-simplekslerinin sayısına eşittir.

Tanım 2.25 (Rotman, 1998) Bir sınır dönüşümü, $q \geq 1$ olmak üzere, $\partial_q([v_0, v_1, ..., v_q]) = \sum_{i=1}^{q}(-1)^i[v_0, v_1, ..., v_{i-1}, \widehat{v_i}, ..., v_q]$ ile tanımlanmış

$$\partial_q : C_q(\Delta) \longrightarrow C_{q-1}(\Delta)$$

bir homomorfimadır. Burada, $\widehat{v_i}$ ile v_i tepesinin silinmesi gösterilmektedir. $\partial_q \partial_{q+1} = 0$ olduğundan, $C(\Delta) = (C_q(\Delta), \partial_q)$ bir zincir kompleksidir.

d-boyutlu bir Δ kompleksi için genişletilmiş yönlendirilmiş zincir kompleksi ise,

$$0 \longrightarrow C_d(\Delta) \xrightarrow{\partial_d} C_{d-1}(\Delta) \xrightarrow{\partial_{d-1}} \ldots \longrightarrow C_0(\Delta) \xrightarrow{\epsilon} k \longrightarrow 0$$

şeklindedir.

$Z_q(\Delta, R) = \mathrm{Ker}(\partial_q)$ ve $B_q(\Delta, R) = \mathrm{Im}(\partial_{q+1})$ homomorfizmalarına sırasıyla çevrimler ve sınırlar denir. Böylece, Δ nın R katsayılı indirgenmiş q.uncu homoloji grubu, $\widetilde{H}_q(\Delta, k) = Z_q / B_q$ dur.

Tanım 2.26 (Villarreal, 2015) Δ bir d-boyutlu simpleks kompleksi olsun. Δ nın $q \leqslant d$ olacak şekildeki q boyutlu tüm yüzlerinin oluşturduğu komplekse Δ nın q-iskeleti denir ve $\Delta^{(q)}$ ile gösterilir.

Δ kompleksine ait yüzler için, bağlantı (link), yıldız (star) ve silinmesi (deletion) aşağıdaki gibidir.

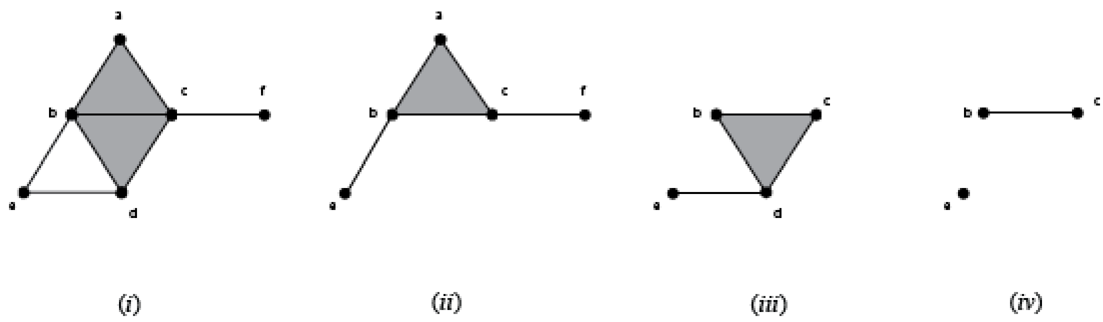
Tanım 2.27 (Villarreal, 2015) Δ bir simpleks kompleksi ve F, Δ ya ait bir yüz olsun. Buna göre, F nin bağlantı, yıldız ve silinme kompleksleri sırasıyla,

$$\mathrm{lk}_\Delta(F) = \{G \in \Delta : G \cap F = \varnothing \text{ ve } G \cup F \in \Delta\}$$

$$\mathrm{star}_\Delta(F) = \{G \in \Delta : G \cup F \in \Delta\}$$

$$\mathrm{del}_\Delta(F) = \{G \in \Delta : G \cap F = \varnothing\}$$

şeklinde tanımlanır.



Şekil 1: Bir kompleksin bağlantı, silinmişi ve yıldızı.

Örnek 6 Şekil 1 de (i) Δ, (ii) $\text{del}_\Delta(d)$, (iii) $\text{star}_\Delta(d)$, (iv) $\text{lk}_\Delta(d)$ kompleksleri verilmiştir.

Tanım 2.28 (Villarreal, 2015) Δ ve Γ birbirinden ayrık $V(\Delta)$ ve $V(\Gamma)$ tepe kümelerine sahip iki kompleks olsun. Buna göre,

$$\Delta * \Gamma := \{\delta \cup \gamma : \delta \in \Delta,\ \gamma \in \Gamma\}$$

kompleksine Δ ve Γ nın birleşimi denir.

Yardımcı Teorem 2.29 Δ bir simpleks kompleksi ve F, Δ ya ait bir yüz ise, $\text{star}_\Delta(F) = F * \text{lk}_\Delta(F)$ dir.

Kanıt. $\sigma \in \text{star}_\Delta(F)$ alınırsa, tanımdan $\sigma \cup F \in \Delta$ dır. Böylece $\sigma \in \text{lk}_\Delta(F)$ olup $\sigma \in F * \text{lk}_\Delta(F)$ olduğu açıkca görülür. □

2.4 Graf Teorisi

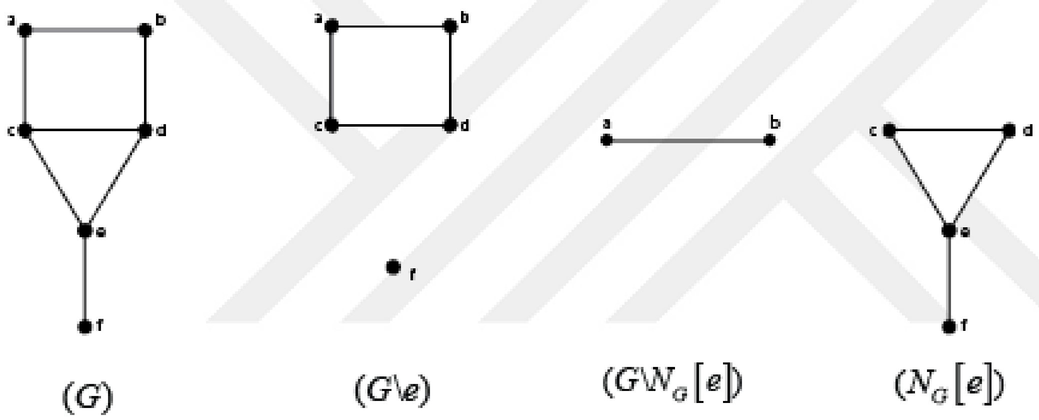
V boştan farklı bir küme ve $E \subseteq V \times V$ olsun. V tepeler kümesi ve E ayrıtlar kümesi olmak üzere $G = (V, E)$ ikilisine bir graf denir. G nin tepeler kümesi $V(G)$ ve ayrıtlar kümesi $E(G)$ ile gösterilir.

x ve y, G ye ait tepeler olsunlar. Eğer xy, $E(G)$ ye ait ayrıt ise, x ve y bitişik veya komşu tepeler denir. Bir x tepesinin açık komşuluğu $N_G(x) := \{y \in V(G) : xy \in E(G)\}$ ve x tepesinin kapalı komşuluğu ise $N_G[x] = N_G(x) \cup \{x\}$ şeklinde tanımlanır (Chartrand and Zhang, 2008).

H ve G iki graf olsun. $V(H) \subseteq V(G)$ ise, H ye G nin alt grafı denir. Eğer H grafı G nin altgrafı ve her $x, y \in V(H)$ için $xy \in E(G)$ ise H, G nin indirgenmiş altgrafı adını alır. $U \subseteq V(G)$ ise, $G \setminus U$ ile $V(G) \setminus U$ üzerine indirgenmiş graf gösterilir ve eğer $U = \{x\}$ ise bu $G \setminus x$ ile gösterilir.

Tanım 2.30 (Chartrand and Zhang, 2008) $G = (V(G), E(G))$ bir graf olsun. Eğer her $u, v \in V(G)$ için $uv \in E(G)$ ise G ye tam graf denir.

Tanım 2.31 (Chartrand and Zhang, 2008) Bir $G = (V, E)$ grafının tepe kümesinin bir altkümesi üzerine indirgenmiş alt graf tam graf ise, bu alt kümeye klik denir.

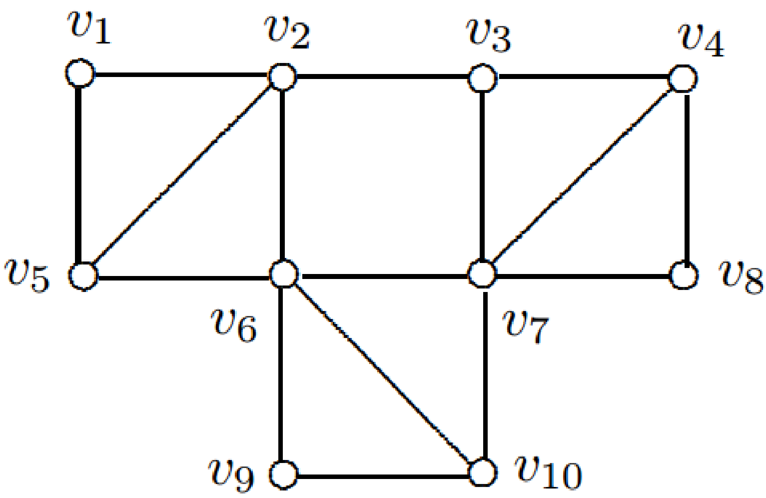


Şekil 2: İndirgenmiş Graf

Örnek 7 Şekil 2' de bir G grafı ve e tepesi için, $G \setminus e$, $G \setminus N_G[e]$ ve e nin kapalı komşuluğu üzerine indirgenmiş graf gösterilmektedir.

Bir G grafında $i, j \in \{1, ..., n\}$ için $v_i v_j \in E(G)$ ve $v_i \neq v_j$ olmak üzere $\{v_1, ..., v_n\}$ dizisine bir yol denir. x ve y komşu olmayan iki tepe olsun, bu iki tepeyi birbirine bağlayan ayrıta kiriş (chord) denir (Chartrand and Zhang, 2008).

Tanım 2.32 (Chartrand and Zhang, 2008) G bağlantılı bir graf olsun. G nin u ve v tepeleri arasındaki en küçük uzunluktaki yolun uzunluğuna u ile v arasındaki mesafe denir ve dist(u, v) ile gösterilir.



Şekil 3: Graflarda Mesafe

Örnek 8 Şekil 3 deki grafta, dist(v_1, v_10) = 3, dist(v_5, v_4) = 3 dür.

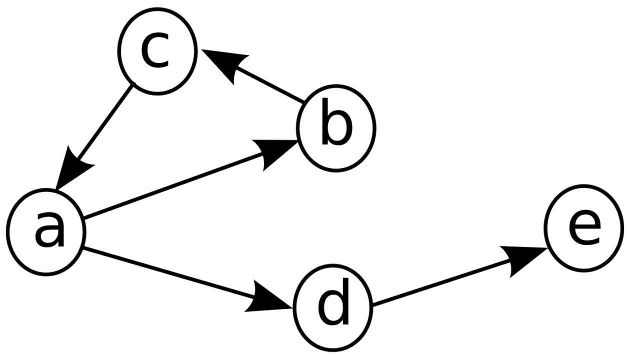
Tanım 2.33 Bir G grafında 4 veya daha uzun tüm çevrimler bir kirişe sahip ise bu grafa kiriş graf (chordal) denir (Chartrand and Zhang, 2008).

Tanım 2.34 $G = (V, E)$ grafında bir x tepesi için $N_G[y] \subseteq N_G[x]$ olacak şekilde en az bir $y \in N_G(x)$ varsa, x tepesine baskılayan tepe (codominated vertex) denir (Bıyıkoğlu and Civan, 2015).

Tanım 2.35 (Bıyıkoğlu and Civan, 2015) G ve H iki graf olsun. Eğer her bir $0 \leqslant i \leqslant k$ için $G \cong G_0$, $H \cong G_{k+1}$ ve $G_{i+1} = G_i - x_i$ şartlarını sağlayan ve her x_i tepesi G_i de baskılayan olacak şekilde $G_0, G_1, ..., G_{k+1}$ grafları var ise, G grafı H ye ardıl-sökülebilir (codismantlable) denir. Bir G grafı ayrıtsız bir graf veya bir ayrıtsız grafa ardıl-sökülebilir ise G ye ardıl-sökülebilir graf (codismantlable graph) denir. G ardıl-sökülebilir graf ise $\{x_0, x_1, ..., x_k\}$ tepelerinin sıralamasına sökülme sıralaması (codismantling order) denir.

Tanım 2.36 (Chartrand and Zhang, 2008) Bir $G = (V, E)$ grafının tepe kümesi, her $v_i w_j \in E(G)$ ayrıtı $v_i \in A$ ve $w_j \in B$ için $V(G) = A \cup B$ şeklinde ayrışabiliyor ise, G ye iki parçalı (bipartite) graf denir.

Eğer bir grafta ayrıtlar yönlendirilmiş ise bu grafa yönlü graf denir ve V tepe kümesi, E yönlü ayrıtların kümesi olmak üzere $\overrightarrow{G} = (V, E)$ ile gösterilir. $u, v \in E(\overrightarrow{G})$ olması u dan v ye bir yönlendirilmiş kenar vardır demektir. $\overrightarrow{G} = (V, E)$ yönlü grafında, herhangi bir u tepesine yönlenen tepelerin sayısı u nun giriş-derecesi, u nun yönlendirildiği tepelerin sayısınada u nun çıkış-derecesi denir.



Şekil 4: Yönlü bir graf.

Örnek 9 Yönlü bir $\overrightarrow{G} = (V, E)$ grafı Şekil 4 deki gibi olsun. Buna göre, $\{b, c\} \in E(\overrightarrow{G})$, $\{a, b\} \in E(\overrightarrow{G})$, $\{c, a\} \in E(\overrightarrow{G})$, $\{a, d\} \in E(\overrightarrow{G})$, $\{d, e\} \in E(\overrightarrow{G})$ dir. b tepesinin giriş-derecesi 1, çıkış-derecesi 1, a tepesinin giriş-derecesi 1, çıkış-derecesi 2 dir (Chartrand and Zhang, 2008).

3. COHEN-MACAULAY KOMPLEKSLER

Çalışmanın bu kısmında, Cohen-Macaulay halkalarının kombinatorik anlamda aynı yapıya sahip olan Cohen-Macaulay kompleksleri kavramı verilecektir. Bir kompleksin hangi koşullar altında Cohen-Macaulay olduğundan bahsedilecektir.

3.1 Graflar ve Ayrıt İdealleri

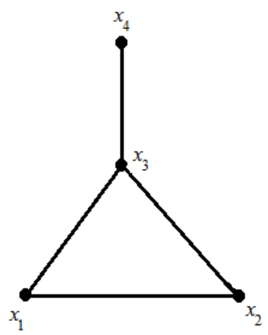
Bu bölümde grafların, hangi durumda Cohen-Macaulay olduğu üzerinde durulacaktır. Bu konuda ilk çalışmalar Villarreal (1990, 1997) tarafından yapılmıştır, daha sonra Herzog, Hibi ve Zheng (2006) kiriş grafların Cohen-Macaulay olduğunu göstermiştir, ayrıca bir çok yazar bu konuda çalışmalar yapmıştır. (Zaare-Nahandi, 2015; Vander Maulen et al., 2014; Mousivand et al., 2015;Hibi et al., 2015; Mahmoudi and Mousivand, 2010).

Şimdi bir grafı cebirsel anlamda yorumlamaya yarayan ayrıt ideal kavramı verilecektir, ayrıt idealler ilk olarak Villarreal (1990) tarafından ortaya atılmıştır ve grafları cebirsel yapılara ilişkilendirdiğinden kombinatorik değişmeli cebirde önemli bir yere sahiptir.

Tanım 3.1 (Villarreal, 1990) G bir graf ve $V(G) = \{x_1, ..., x_n\}$, n elemanlı tepe kümesi olsun. O zaman

$$I(G) = \{x_i x_j : \ x_i x_j \in E(G)\}$$

kümesi bir ideal teşkil eder ve ayrıt ideal (edge ideal) denir.



Şekil 5: Basit graf

Örnek 10 G grafı Şekil 5 teki gibi olsun. Buna göre G ye ait ayrıt ideal $I(G) = (x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_3x_4)$ şeklindedir.

Eğer bir G grafında tüm tepeler yalıtılmış ise, diğer bir ifadeyle G de herhangi iki tepe bir ayrıt ile bağlanmamış ise $I(G) = (0)$ dır.

Tanım 3.2 (Villarreal, 2015) G, $V(G) = \{x_1, ..., x_n\}$ tepe kümeli bir graf, $R = k[x_1, ..., x_n]$ G nin tepe kümesine ilişkin polinom halkası ve $I(G)$, G nin ayrıt ideali olsun. O zaman, G Cohen-Macaulay graftır ancak ve ancak $R/I(G)$ bir Cohen-Macaulay halkadır.

Tanım 3.3 (Chartrand and Zhang, 2008) G bir graf ve W, $V(G)$ nin bir alt kümesi olsun. Eğer her $x_ix_j \in E(G)$ için $x_i \in W$ ya da $x_j \in W$ sağlanıyorsa, W ye tepe örtümü denir.

Yukarıdaki tanımı sağlayan en küçük W kümesine minimal tepe örtümü denir ve $\mid W \mid = \beta(G)$ ye tepe örtümü sayısı denir.

Tanım 3.4 (Chartrand and Zhang, 2008) G bir graf olsun. G de $S \subset V(G)$ alt kümesinin her bir x_i, x_j elemanları için $x_ix_j \notin E(G)$ ise S ye bağımsız küme denir.

Yukarıdaki tanımı sağlayan en büyük S kümesine maksimal bağımsız küme denir ve $\mid S \mid = \alpha(G)$ ye tepe bağımsızlık sayısı denir.

Sonuç 3.5 (Villarreal, 2015) G bir graf ve $\mid V(G) \mid = n$ olsun. Buna göre, $\alpha(G) + \beta(G) = n$ dir.

Tanım 3.6 (Chartrand and Zhang, 2008) Bir grafta tüm minimal tepe örtüm kümeleri ya da tüm maksimal bağımsız kümeler aynı kardinaliteye sahip ise grafa iyi örtülmüş denir.

Önerme 3.7 (Herzog and Hibi, 2011) G bir Cohen-Macaulay graf ise G iyi-örtülmüştür.

Önerme 3.8 (Villarreal, 2015) P ideali bir W minimal tepe örtümü elemanları ile üretilirse, $P \subset R$ asal idealine $I(G)$ nin minimal asal ideali denir.

Yardımcı Teorem 3.9 (Herzog and Hibi, 2011) $I(G)$ ideali G nin ayrıt ideali olsun. $W \subseteq V$ kümesi G nin bir tepe örtüm kümesi ise, $I(G) \subset (W)$ dir.

Kanıt. $x_i x_j \in I(G)$ herhangi bir eleman olsun. W tepe örtüm kümesi olduğundan x_i veya x_j lerden en az biri W de bulunmaktadır. O halde $x_i x_j \in (W)$ olduğunu görmek kolaydır. □

Teorem 3.10 (Villarreal, 2015) G, $V(G) = \{x_1, ..., x_n\}$ üzerinde bir graf ve $R = k[x_1, ..., x_n]$ halkası k cismi üzerinde bir polinomlar halkası olsun. Buna göre, $I(G)$ ayrıt ideali ve $\alpha(G)$ bağımsızlık sayısı için,

$$\dim(R/I(G)) = \alpha(G)$$

dir. Burada ki boyut Tanım 2.12 de bahsedilen Krull boyuttur.

Kanıt. G nin bir minimal örtüm kümesi W olsun ve $\mid W \mid = \beta$ olarak alınsın. $(W) = (x_{i_1}, ..., x_{i_\beta})$ olarak kabul edilsin. (W) ideali minimal asal ideal olduğundan ve $I(G) \subset (W)$ ifadesinden, $(x_{i_1}, ..., x_{i_\beta})/I(G)$ ideali $R/I(G)$ nin minimal asal ideali olur. Buradan,

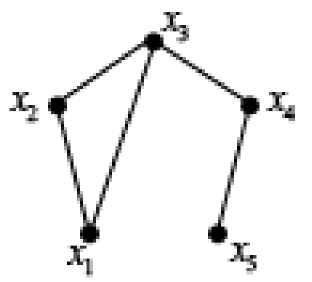
$$(x_{i_1}, ..., x_{i_\beta})/I(G) \subsetneq (x_{i_1}, ..., x_{i_{\beta+1}})/I(G) \subsetneq ... \subseteq (x_{i_1}, ..., x_{i_{\beta+\alpha}})/I(G) \subset R/I(G)$$

asal ideallerin bir zinciridir. $\alpha + \beta = n$ olduğundan bu zincirin uzunluğu α kadar olup $\dim(R/I(G)) = \alpha(G)$ dir. □

Yardımcı Teorem 3.11 (Villarreal, 2015) G bir graf, $W_1, W_2, ..., W_k$ kümeleri G nin minimal tepe örtümü kümeleri ve $I(G)$ de G nin ayrıt ideali olsun. Buna göre,

$$I(G) = (W_1) \cap (W_2) \cap ... \cap (W_k)$$

şeklinde asal ayrışımı vardır.



Şekil 6: Ayrıt idealin asal ayrışımı.

Örnek 11 G basit grafı Şekil 6 daki gibi olsun. Burada $I(G) = \{x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5\}$ şeklindedir. $I(G) = (x_1, x_2, x_4) \cap (x_1, x_3, x_4) \cap (x_2, x_3, x_5) \cap (x_2, x_3, x_4)$ olarak asal ayrışıma sahiptir. Gerçekten, $W_1 = \{x_1, x_2, x_4\}, W_2 = \{x_1, x_3, x_4\}, W_3 = \{x_2, x_3, x_5\}, W_3 = \{x_2, x_3, x_4\}$ kümeleri G' nin minimal tepe örtüm kümeleridir.

Yukarıdaki satırlarda bir halkanın derinliği regüler diziler yardımıyla tanımlanmıştı, halkanın derinliği regüler dizilerin yanı sıra homolojik olarak da bir karakterizasyona sahiptir (Roberts, 1998).

Önerme 3.12 (Roberts, 1998) R halkası $\mathfrak{m}$ maksimal ideale sahip bir halka ve M bir R-modül olsun. Buna göre, depth$(M) = 0$ dır ancak ve ancak $\mathfrak{m}$ nin her elemanı M de bir sıfır bölendir.

Önerme 3.13 (Roberts, 1998) Eğer $a \in \mathfrak{m}$ bir M, $R-$modül üzerinde sıfır bölensiz ise, depth(M/aM) = depth$(M) - 1$ dir.

Teorem 3.14 (Roberts, 1998) M bir $R-$modül olsun. Buna göre,

$$\text{depth}_R(M) = min\{i : \text{Ext}^i_R(k, M) \neq 0\}$$

dir.

Kanıt. depth$_R(M) = 0$ olsun. Tanımdan Ext$^0_R(k, M) \neq 0$ olması gerekmektedir. Önerme 2.9 dan Ext$^0_R(k, M)$ = Hom$_R(k, M) \neq 0$ olmalıdır. $k = R/\mathfrak{m}$ olduğundan Hom$_R(k, M) \neq 0$ olması demek $R/\mathfrak{m} \to M$ homomorfizmasının aşikar olmaması demektir. Bu da $a\mathfrak{m} = 0$ yani maksimal ideal $\mathfrak{m}$ nin sıfırdan farklı her $a \in M$ nin sıfırlayanı olması demektir. $\operatorname{depth}_R(M) = 0$ kabülümüzden dolayı $\operatorname{Ext}^0_R(k, M) \neq 0$ olur. Şimdi $\operatorname{depth}_R(M) = d$ alınsın. Bu durumda Önerme 3.13 den $\mathfrak{m}$ nin $x \neq 0$ elemanı için $\operatorname{depth}_R(M/xM) = d - 1$ olur.

$$0 \to M \xrightarrow{x} M \to M/xM \to 0$$

tam dizisi tamdır ve Teorem 2.10 dan,

$$\begin{gathered} 0 \to \operatorname{Hom}_R(k, M) \xrightarrow{x} \operatorname{Hom}_R(k, M) \to \operatorname{Hom}_R(k, M/xM) \to \operatorname{Ext}^1_R(k, M) \xrightarrow{x} \\ \operatorname{Ext}^1_R(k, M) \to \operatorname{Ext}^1_R(k, M/xM) \to \ldots \to \operatorname{Ext}^i_R(k, M) \xrightarrow{x} \operatorname{Ext}^i_R(k, M) \to \\ \operatorname{Ext}^i_R(k, M/xM) \to \operatorname{Ext}^{i+1}_R(k, M) \to \operatorname{Ext}^{i+1}_R(k, M) \xrightarrow{x} \operatorname{Ext}^{i+1}_R(k, M) \to \ldots \end{gathered}$$

tam dizisini verir. Her i ve $x \in \mathfrak{m}$ için $x\operatorname{Ext}^i_R(k, M) = 0$ olduğundan, $\operatorname{Ext}^i_R(k, M/xM) \to \operatorname{Ext}^{i+1}_R(k, M)$ dönüşümü injektifdir. O halde, $\operatorname{Ext}^i_R(k, M/xM) = 0$ ise $\operatorname{Ext}^{i+1}_R(k, M) = 0$ olmalıdır. Kabulden dolayı her $i < d - 1$ için $\operatorname{Ext}^i_R(k, M/xM) = 0$ ve $\operatorname{Ext}^{d-1}_R(k, M/xM) \neq 0$ olduğundan,

$$\ldots \to 0 \to \operatorname{Ext}^{d-1}_R(k, M/xM) \to \operatorname{Ext}^d_R(k, M) \to \operatorname{Ext}^d_R(k, M) = 0 \to \ldots$$

tam dizisinde en küçük i için $\operatorname{Ext}^{d-1}_R(k, M/xM) \cong \operatorname{Ext}^d_R(k, M) \neq 0$ dır.

$\square$

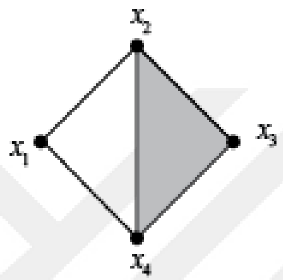
3.2 Stanley-Reisner Halkalar

Bu bölümde bir Δ kompleksi için Stanley-Reisner halkası tanıtılacaktır. Stanley-Reisner halkası G. A. Reisner (1976) ve R. Stanley (1975) nin çalışmaları ile ortaya çıkmıştır. Kombinatorik topoloji ile değişmeli cebir arasında bağlantı kuran temel bir araçtır.

Tanım 3.15 (Bruns and Herzog, 1998) Δ bir simpleks kompleksi olsun. Buna göre Δ Cohen-Macaulay komplekstir ancak ve ancak $\dim(\Delta) = \operatorname{depth}(\Delta)$ dır.

Bir simpleks kompleksinin cebir ile bağlantısını oluşturan özel bir halka sınıfı olan Stanley-Reisner halkalarının tanımı verilebilir.

Tanım 3.16 (Villarreal, 2015) Δ kompleksi $V = \{x_1, .., x_n\}$ tepe kümesi üzerinde bir simpleks kompleksi ve k bir cisim olsun. $I_\Delta := \{x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_s} \in k[x_1, ..., x_n] : \{x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_s}\} \notin \Delta\}$ tekterimli idealine Δ nın Stanley-Reisner ideali denir. $k[x_1, ..., x_n]/I_\Delta$ bölüm halkasına da Δ nın *Stanley-Reisner halkası* denir ve $k[\Delta]$ ile gösterilir.



Şekil 7: Bir kompleksin Stanley-Reisner Halkası

Örnek 12 Δ kompleksi Şekil 7 deki gibi olsun. O zaman $\Delta = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_4\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_4\}, \{x_2, x_4\}, \{x_2, x_3, x_4\}\}$ dir. Buna göre, Δ nın Stanley-Reisner ideali,

$$I_\Delta = \{\{x_1, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_4, x_3\}, \{x_1, x_2, x_4\}\}$$

olmalıdır. Stanley-Reisner halkası ise, $k[\Delta] = [x_1, x_2, x_3, x_4]/I_\Delta$ dır.

Stanley-Reisner halkalar kombinatorik (topolojik) yapıları, değişmeli cebirsel yapılara bağlayan en önemli kavramdır. Şimdi bunun bir sonucu olacak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.17 (Bruns and Herzog, 1998) Δ bir simpleks kompleksi ve $k[\Delta]$ da Δ nın Stanley-Reisner halkası olsun. Buna göre,

$$\dim(k[\Delta]) = \dim(\Delta) + 1$$

dir. Burada eşitliğin solundaki Krull boyut, eşitliğin sağındaki Tanım 2.24 de bahsedilen topolojik anlamda boyuttur.

Bir simpleks kompleksi Δ nın tüm fasetleri aynı boyuta (kardinaliteye) sahip ise Δ ya (saf) pure kompleks denir.

Önerme 3.18 (Bruns and Herzog, 1998) Δ Cohen-Macaulay kompleks ise saf komplekstir.

Bir kompleksin Cohen-Macaulay olması için Reisner tarafından bulunan önemli teorem aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.19 (Reisner, 1977) Δ d-boyutlu bir kompleks ve k bir cisim olsun. Buna göre aşağıdakiler denktir,

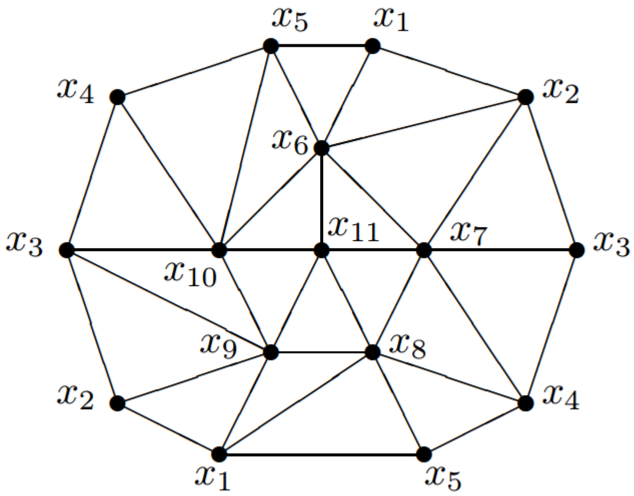
(i) Δ kompleksi Cohen-Macaulay' dır,
(ii) Her $\sigma \in \Delta$ yüzleri ve $i < \dim(\mathrm{lk}_\Delta(\sigma))$ için $\widetilde{H}_i(\mathrm{lk}_\Delta(\sigma); k) = 0$.

Yukarıdaki tanımdan, $\mathrm{lk}_\Delta(\varnothing) = \Delta$ olduğu gözönüne alındığında, Δ Cohen-Macaulay ise her $i < \dim(\Delta)$ için $\widetilde{H}_i(\Delta; k) = 0$ olduğu sonucuna ulaşılabilir.

Örnek 13 (Villarreal, 2015) $\mathbb{R}P^2$ kompleksi $\mathbb{Z}_3$ üzerinde Cohen-Macaulay fakat $\mathbb{Z}_2$ üzerinde Cohen-Macaulay değildir. Şekil 8 da görüldüğü üzere, $\mathbb{R}P^2$ de her tepenin bağlantısı bir çevrimdir ve her kenarın bağlantısı bir tepedir. Bu da $\mathbb{R}P^2$ nin her bağlantısının Cohen-Macaulay olduğunu verir. Ayrıca $\mathbb{R}P^2$ nin,

$$\widetilde{H}_i(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_3) = \begin{cases} \mathbb{Z}_3, & i = 2 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \widetilde{H}_i(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & i = 1 \text{ ve } 2 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde indirgenmiş homoloji grupları vardır.



Şekil 8: $\mathbb{R}P^2$ uzayının üçgenleştirmesi

Önerme 3.20 Δ kompleksinin k cismi üzerinde bir Cohen-Macaulay kompleks olması için gerek ve yeter koşul, her $\sigma \in \Delta$ için $\mathrm{lk}_\Delta(\sigma)$ lerin k cismi üzerinde bir Cohen-Macaulay kompleks olmasıdır.

Kanıt. Δ bir Cohen-Macaulay kompleks olsun. Buna göre Teorem 3.19 dan herhangi bir $\sigma \in \Delta$ yüzü için, her $i < \dim(\mathrm{lk}_\Delta \sigma)$ için $\widetilde{H}_i(\mathrm{lk}_\Delta(\sigma); k) = 0$ dır. Şimdi her $\tau \in \mathrm{lk}_\Delta(\sigma)$ yüzü için $\mathrm{lk}_{\mathrm{lk}_\Delta(\sigma)}(\tau) = \mathrm{lk}_\Delta(\sigma \cup \tau)$ eşitliğinden ve Δ nın Cohen-Macaulay oluşundan, tüm $i < \dim(\mathrm{lk}_{\mathrm{lk}_\Delta(\sigma)}(\tau))$ için $\widetilde{H}_i(\mathrm{lk}_{\mathrm{lk}_\Delta(\sigma)}(\tau); k) = 0$ sonucuna varılır.

Tersine, σ yüzü boş yüz olarak alınırsa, $\mathrm{lk}_\Delta(\emptyset) = \delta$ olduğundan Δ bir Cohen-Macaulay kompleksdir. □

Önerme 3.21 Δ kompleksi 1-boyutlu simpleks kompleksi olsun. Buna göre Δ Cohen-Macaulay dır ancak ve ancak bağlantılıdır.

Kanıt. Δ, 1-boyutlu ve Cohen-Macaulay olsun. Teorem 3.19 dan $\dim(\mathrm{lk}_\Delta(F)) < 1$ olduğundan $\widetilde{H}_0(\Delta; k) = 0$ sonucuna ulaşılır. O halde Δ bağlantılı bir komplekstir. Kabul edilsin ki Δ, 1-boyutlu ve bağlantılı olsun. Buna göre, her $x \in \Delta$ yüzü için $\dim(\mathrm{lk}_\Delta(x)) = 0$ dır. Bu durumda $\mathrm{lk}_\Delta(x)$ sadece 0-simplekslerden oluşan bir komplekstir ve Cohen-Macaulay dır. Böylece Önerme 3.20 den Δ Cohen-Macaulaydır. □

Önerme 3.22 (Villarreal, 2015) Δ d-boyutlu bir kompleks olsun. Δ^q da $q \leqslant d$

olacak şekilde q-iskeleti olsun. Eğer Δ Cohen-Macaulay ise Δ^q da Cohen-Maculay dır.

Önerme 3.23 (Villarreal, 2015) Δ_1 ve Δ_2 iki simpleksler kompleksi olsun. Buna göre $\Delta_1 * \Delta_2$ Cohen-Macaulaydır ancak ve ancak Δ_1 ve Δ_2 Cohen-Macaulaydır.

Önerme 3.24 Δ kompleksi k cismi üzerinde bir Cohen-Macaulay kompleks olsun. Buna göre, herhangi bir $F \in \Delta$ için $\text{star}_\Delta(F)$ bir k cismi üzerinde Cohen-Macaulay komplekstir.

Kanıt. Yardımcı Teorem 2.29 dan, her $F \in \Delta$ yüzü için $\text{star}_\Delta(F) = F * \text{lk}_\Delta(F)$ dir. Herhangi bir simpleksin Cohen-Macaulay olması ile bilikte Önerme 3.20 ve Önerme 3.23 den $F \in \Delta$ için $\text{star}_\Delta(F)$ Cohen-Macaulay komplekstir. □

Önerme 3.25 Δ, d-boyutlu bir Cohen-Macaulay kompleks olsun. $F \in \Delta$ bir yüz ve $i < d - 1$ olmak üzere, $\widetilde{H}_i(\text{lk}_\Delta(F); k) \cong \widetilde{H}_i(\text{del}_\Delta(F); k)$ dır.

Kanıt. Δ Cohen-Macaulay kompleks olduğundan, her $F \in \Delta$ ve $i < \dim(\text{lk}_\Delta(F))$ olmak üzere, $\widetilde{H}_i(\text{lk}_\Delta(F); k) = 0$ dır. $\dim(F) = k$ alınırsa ve ayrıca $\dim(\Delta) = d$ den tanım gereği $\dim(\text{lk}_\Delta(F)) = d - k$ olur. Yardımcı Teorem 3.32 den,

$$\ldots \to \widetilde{H}_i(\text{lk}_\Delta(F); k) \to \widetilde{H}_i(\text{del}_\Delta(F); k) \to \widetilde{H}_i(\Delta; k) \to \widetilde{H}_{i-1}(\text{lk}_\Delta(F); k) \to$$
$$\widetilde{H}_{i-1}(\text{del}_\Delta(F); k) \to \widetilde{H}_{i-1}(\Delta; k) \to \ldots$$

dizisi. Δ Cohen-Macaulay olduğundan $i < d$ için $\widetilde{H}_i(\Delta; k) = 0$ ve $i < d - k$ için $\widetilde{H}_i(\text{lk}_\Delta(F); k) = 0$ olur. Buna göre her $i < d$ için,

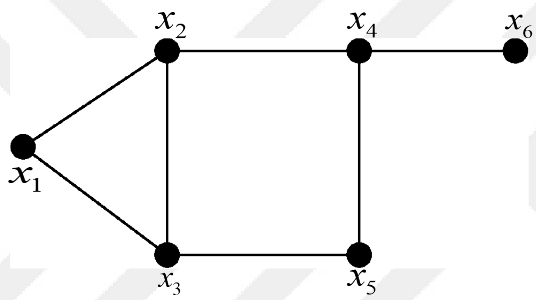
$$0 \to \widetilde{H}_i(\text{lk}_\Delta(F); k) \to \widetilde{H}_i(\text{del}_\Delta(F); k) \to 0$$

dizisi tam olduğundan $\widetilde{H}_i(\text{lk}_\Delta(F); k) \cong \widetilde{H}_i(\text{del}_\Delta(F); k)$ sonucuna ulaşılır. □

3.3 Bağımsızlık Kompleksleri

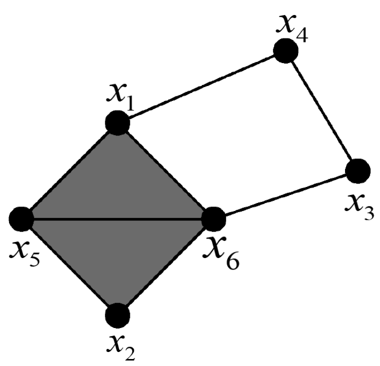
Bağımsızlık kompleksleri kombinatorik değişmeli cebir ve kombinatorik topolojide literatüründe oldukça çalışılan bir simpleks kompleks sınıfıdır. Bağımsızlık kompleksleri değişmeli cebirde önemli sonuçlara sahiptir. (Dochtermann and Engström, 2009; Egström, 2009; Meshulam, 2009; Kawamura, 2010;Ehrenborg and Hetyei, 2006; Barmak, 2013). $G = (V, E)$ bir graf olsun. G nin bağımsızlık kompleksi, tepe kümesi $V(G)$ üzerinde olup, yüzleri G nin bağımsız kümelerinden oluşan bir simpleks kompleksidir ve Ind(G) ile gösterilir. Yani,

$$\text{Ind(G)} := \{F \subseteq V(G) : F,\ G \text{ nin bağımsız kümesidir}\}$$



Şekil 9: Basit Graf

Örnek 14 Şekil 9 da bir G grafı ve Şekil 10 da G nin Ind(G) kompleksi.



Şekil 10: Bağımsızlık kompleksi

Uyarı 3.26 G bir graf $x \in V(G)$ olsun. Buna göre Ind(G) için,

$$\text{lk}_{\text{Ind}(G)}(x) = \text{Ind}(G \setminus N_G[x])$$

$$\text{del}_{\text{Ind}(G)}(x) = \text{Ind}(G \setminus x)$$

şeklindedir.

Uyarı 3.27 G bir graf olsun. $V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing$ ve $G = G_1 \cup G_2$ ise Ind(G) = Ind$(G_1) *$ Ind(G_2) dir. Ayrıca $\dim$ (Ind(G)) = $\dim$ (Ind(G_1)) + $\dim$ (Ind(G_2)) + 1 dir.

Teorem 3.28 (Woodroofe, 2009) G bir graf, G_1 ve G_2 de $G = G_1 \cup G_2$ olacak şekilde, G grafının bağlantılı elemanları olsun. Buna göre, Ind(G) Cohen-Macaulay dır ancak ve ancak Ind(G_1) ve Ind(G_2) Cohen-Macaulay dır.

Kanıt. Ind(G_1) ve Ind(G_2) Cohen-Macaulay kompleksler olsun. Şimdi, depth(Ind(G_1)) = dim(Ind(G_1)) = d_1 ve depth(Ind(G_2)) = dim(Ind(G_2)) = d_2 olarak alınsın. Uyarı 3.27 den dim(Ind(G)) = dim(Ind$(G_1 \cup G_2)$)
= dim(Ind$(G_1) *$ Ind(G_2))
= dim(Ind(G_1)) + dim(Ind(G_2)) + 1
eşitliği elde edilir. O halde dim(Ind(G)) = $d_1 + d_2 + 1$ dir. Ayrıca Yardımcı Teorem 6.8 den depth(Ind(G_1)) + depth(Ind(G_2)) = $d_1 + d_2 + 1$ olduğundan dim(Ind(G)) = depth(Ind(G)) dir. O halde Ind(G) Cohen-Macaulaydır bir komplekstir.

□

Sonuç 3.29 $i \in I$ olmak üzere G_i graflar ailesi G nin bağlantılı elemanları olsunlar. Buna göre herbir $i \in I$ için G_i Cohen-Macaulay ise G Cohen-Macaulay dır.

Teorem 3.30 (Mayer-Vietoris) Δ_1 ve Δ_2 kompleksleri Δ nın $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ olacak şekilde iki alt kompleksi olsun. Buna göre,

$$\ldots \to \widetilde{H}_k(\Delta_1 \cap \Delta_2; k) \to \widetilde{H}_k(\Delta_1; k) \oplus \widetilde{H}_k(\Delta_1; k) \to \widetilde{H}_k(\Delta; k) \to$$
$$\widetilde{H}_{k-1}(\Delta_1 \cap \Delta_2; k) \to \ldots$$

dizisi tamdır ve bu diziye Mayer-Vietoris tam dizisi denir.

Bir Δ topolojik uzayında, birim dönüşüm sabit bir dönüşüme homotopik denk ise bu uzaya büzülebilir (contractible) denir.

Yardımcı Teorem 3.31 Δ bir kompleks olsun. Buna göre, $v \in \Delta$ tepesi için $\text{star}_\Delta(v)$ büzülebilirdir.

Kanıt. Öncelikle $\text{star}_\Delta(x) = x * \text{lk}_\Delta(x)$ olduğunu gösterelim. $\sigma \in \text{star}_\Delta(x)$ alalım. Tanımdan, $x \in \sigma$ dır. $\sigma' = \sigma \setminus x$ alırsak, $\sigma' \in \text{lk}_\Delta(x)$ olur. Böylece $\sigma \in x * \text{lk}_\Delta(x)$ sonucuna ulaşırız. Tersine, $\sigma \in x * \text{lk}_\Delta(x)$ ise $x \in \sigma$ olur. O halde $\sigma \in \text{star}_\Delta(x)$ dır. $x * \text{lk}_\Delta(x)$ kompleksi tepesi x olan bir koni olduğundan ve her koni büzülebilir (Rotman, 1998, Teorem 1.11) olduğundan $\text{star}_\Delta(v)$ büzülebilirdir.

□

Bir büzülebilir uzayın tüm indirgenmiş homoloji grupları aşikardır (sıfırdır). O halde bir Δ simpleks kompleksinin herhangi bir x tepesi için, tüm i değerlerinde $\widetilde{H}_k(\text{star}_\Delta; k) = 0$ değerini alır.

Yardımcı Teorem 3.32 Δ bir simpleksler kompleksi olsun. Buna göre,

$$\begin{gathered}... \to \widetilde{H}_i(\text{lk}_\Delta(F); k) \to \widetilde{H}_i(\text{del}_\Delta(F); k) \to \widetilde{H}_i(\Delta; k) \to \widetilde{H}_{i-1}(\text{lk}_\Delta(F); k) \to \\ \widetilde{H}_{i-1}(\text{del}_\Delta(F); k) \to \widetilde{H}_{i-1}(\Delta; k) \to ...\end{gathered}$$

dizisi tamdır.

Kanıt. Teorem 3.30 da $\Delta_1 = \text{del}_\Delta(x)$ ve $\Delta_2 = x * \text{lk}_\Delta(x)$ olarak alınırsa, $\text{del}_\Delta(x) \cup x * \text{lk}_\Delta(x) = \Delta$ olduğunu ve $\text{del}_\Delta(x) \cap x * \text{lk}_\Delta(x) = \text{lk}_\Delta(x)$ olduğu açıkca görülür. Ayrıca Yardımcı Teorem 3.31 ü gözönüne alarak,
$\widetilde{H}_i(\text{del}_\Delta(F); k) \oplus \widetilde{H}_i(x * \text{lk}_\Delta(F); k) \cong \widetilde{H}_i(\text{del}_\Delta(F); k)$ olması ile birlikte dizinin tamlığına ulaşılır.

□

Yardımcı Teorem 3.33 G bir graf ve $\text{Ind}(G)$ onun bağımsızlık kompleksi olsun. Buna göre aşağıdaki dizi tamdır,

$$\begin{gathered}... \to \widetilde{H}_k(\text{lk}_{\text{Ind}(G)}(v)) \to \widetilde{H}_k(\text{del}_{\text{Ind}(G)}(v)) \to \widetilde{H}_k(\text{Ind}(G)) \to \widetilde{H}_{k-1}(\text{lk}_{\text{Ind}(G)}(v)) \to \\ \widetilde{H}_{k-1}(\text{del}_{\text{Ind}(G)}(v)) \to ... \to \widetilde{H}_0(\text{Ind}(G)) \to 0.\end{gathered}$$

Kanıt. G grafında bir v tepesi alınsın. Uyarı 3.26 dan $\text{Ind}(G - v) = \text{del}_{\text{Ind}(G)}(v)$ ve $\text{Ind}(G - N_G[v]) = \text{lk}_{\text{Ind}(G)}(v)$ olup, $X = \text{del}_{\text{Ind}(G)}(v)$ ve $Y = v * \text{lk}_{\text{Ind}(G)}(v)$ olarak alınsın. Buradan $\text{del}_{\text{Ind}(G)}(v) \cup (v * \text{lk}_{\text{Ind}(G)}(v)) = \text{Ind}(G)$ ve $\text{del}_{\text{Ind}(G)}(v) \cap (v * \text{lk}_{\text{Ind}(G)}(v)) = \text{lk}_{\text{Ind}(G)}(v)$ olduğunu görmek kolaydır. Bu iki eşitlik Mayer-Vietoris tam dizisinde yerine konursa yukarıdaki dizinin tam olduğu görülür.

□

4. TEPE-AYRIŞTIRMA

Tepe-ayrıştırma ilk olarak saf kompleksler için Provan ve Billera (1980) tarafından ortaya atılmıştır. Daha sonra Björner ve Wachs (1996, 1997) tarafından saf olmayan komplekslere genişletilmiştir. Bir tepe-ayrıştırılabilir saf kompleks (veya graf), kabuklanabilirdir ve Cohen-Macaulaydır. Bu nedenle tepe-ayrıştırma değişmeli cebirin problemlerini kombinatorik olarak çözmek için hızlı bir yöntemdir. Tepe-ayrıştırılabilir kompleksler (veya graflar) oldukça çalışılmış ve güncel bir kavramdır (Woodroofe, 2009, 2012; Bıyıkoğlu and Civan, 2014; Engström and Noren, 2014)

Bir simpleks kompleksi için tepe-ayrıştırma şu şekildedir,

Tanım 4.1 (Woodroofe, 2009) Δ kompleksi d-boyutlu simpleks kompleksi olsun. Buna göre, Δ bir simpleks ya da öyle bir v tepesi vardır ki $\text{del}_\Delta(v)$ kompleksi (d)-boyutlu tepe-ayrıştırılabilir ve $\text{lk}_\Delta(v)$ de $(d-1)$-boyutlu tepe-ayrıştırılabilir ise Δ' ya tepe-ayrıştırılabilir kompleks denir.

Burada v tepesi, döküm tepesi (shedding vertex) adını alır. Simpleks kompleksleri için bir döküm tepesinin tanımı aşağıdaki gibidir.

Tanım 4.2 (Woodroofe, 2009) Bir Δ simpleks kompleksinde, bir v tepesinin bağlantısı $\text{lk}_\Delta(v)$ ye ait hiçbir yüz $\text{del}_\Delta(v)$ nin bir faseti değil ise bu tepeye döküm tepesi denir.

Bu tanıma denk olan ve ilerki bölümlerde ispatlarda oldukça kullanılacak olan bir başka tanım verilecektir.

Tanım 4.3 (Woodroofe, 2009) Δ kompleksinde bir v tepesini içeren her $F \in$

Δ yüzü için, $(F \setminus v) \cup \{w\} \in \Delta$ olacak şekilde en az bir w tepesi bulunabiliyor ise, bu tepeye döküm tepesi denir.

Örnek 15 Δ kompleksi $V(\Delta) = \{a, b, c, d, e\}$ tepe kümesi ile birlikte, fasetleri $F_1 = \{a, b, c\}, F_2 = \{b, c, d\}, F_3 = \{d, e\}$ olan 2-boyutlu bir kompleks olsun. Burada a tepesi döküm tepesidir, gerçekten $a \in F_1$ ve $(F_1 \setminus a) \cup \{d\} = F_2$ olup $F_2 \in \Delta$ dır ve F_1 faseti a yı içeren tek fasettir.

Tepe-ayrıştırma kavramı, bağımsızlık komplekslerine yorumlanabilir. Bu durumda, tepe-ayrıştırmanın tanımı aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 4.4 (Woodroofe, 2012) G bir graf ve $v \in V(G)$ olsun. Eğer her $S \subseteq G \setminus N_G[v]$ bağımsız kümesi için,$S \cup \{w\}$ bir bağımsız küme olacak şekilde en az bir $w \in N(v)$ tepesi bulunabiliyor ise v ye G nin (ya da Ind(G) nin) bir döküm tepesi denir.

Tanım 4.5 (Woodroofe, 2009) G bir graf ve Ind(G) de G nin bağımsızlık kompleksi olsun. Eğer G ayrıtsız (tamamen ayrık) bir graf ya da herhangi bir v döküm tepesi için $G \setminus v$ ve $G \setminus N_G[v]$ tepe-ayrıştırılabilir ise Ind(G) ye tepe-ayrıştırılabilir bir kompleks denir.

Çalışmanın giriş bölümünde, bir G grafında baskılayan tepenin tanımı yapılmıştı. Şimdi bu tür tepelerin aslında aynı zamanda bir döküm tepesi olduğu gösterilecektir.

Yardımcı Teorem 4.6 (Bıyıkoğlu and Civan, 2014) G bir graf ve x ve y tepeleride, $N_G[y] \subseteq N_G[x]$ olacak şekilde iki tepe olsun. Buna göre, x bir döküm tepesidir.

Kanıt. y tepesi x in komşusu olduğundan, her $S \subseteq G \setminus N_G[x]$ bağımsız kümesi için, $y \notin S$ olduğu açıktır. $N_G[y] \subseteq N_G[x]$ olduğundan S ye ait hiçbir s tepesi ile y komşu olamayacağından, $S \cup \{y\}$ bir bağımsız küme olacaktır. □

Bir G grafında, x tepesinin komşuları üzerine indirgenmiş graf tam graf (klik!!), yani $N_G[x]$ bir tam graf ise, bu tepeye simpleks tepesi denir. Yukarıdaki yardımcı teoremden, $N_G(x)$ ye ait iki u ve w tepeleri için $N_G[u] \subseteq N_G[w]$

olacağından herhangi bir $y \in N_G(x)$ tepesi döküm tepesidir.

Dirac (1961) teoreminden, bir kiriş graf her zaman en az bir simpleks tepesi bulundurur. Buna göre aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.7 (Woodroofe, 2009) G kiriş bir graf ise, $\mathrm{Ind}(G)$ tepe-ayrıştırılabilir.

Yardımcı Teorem 4.8 (Woodroofe, 2012) Δ tepe-ayrıştırılabilir bir kompleks ise, Δ nın tüm r-iskeletleride tepe-ayrıştırılabilirdir.

Yardımcı Teorem 4.9 Δ_1 ve Δ_2 tepe-ayrıştırılabilir iki kompleks olsun. Buna göre, $\Delta_1 * \Delta_2$ tepe-ayrıştırılabilirdir.

Kanıt. Δ_1 tepe-ayrıştırılabilir olduğundan, $v_1 \in \Delta_1$ döküm tepesine sahiptir. v_1' in $\Delta_1 * \Delta_2$ kompleksinde de döküm tepesi olduğunu gösterelim (v_2 için benzer şekildedir). $v_1 \in F_1 \subseteq \Delta_1$ ve $F_2 \subseteq \Delta_2$ olacak şekilde $F_1 \cup F_2 \in \Delta_1 * \Delta_2$ yüzünü alalım. v_1 tepesi Δ_1 de döküm tepesi olduğundan, $(F_1 \setminus v_1) \cup w = F_1' \subseteq \Delta_1$ olacak şekilde $w \in \Delta_1$ vardır. Buna göre, $F_1' \cup F_2 \in \Delta_1 * \Delta_2$ olduğundan, v_1 tepesi $\Delta_1 * \Delta_2$ için bir döküm tepesidir. Δ_2 nin bir döküm tepesi aynı zamanda $\Delta_1 * \Delta_2$ için de bir döküm tepesi olduğunu göstermek benzer şekilde yapılabilir. Ayrıca,

$(\Delta_1 \setminus v_1) * \Delta_2 = (\Delta_1 * \Delta_2) \setminus v_1$ olduğundan, $\mathrm{del}_{\Delta_1}(v_1) * \Delta_2 = \mathrm{del}_{\Delta_1 * \Delta_2}(v_1)$ kompleksi $(d_1 + d_2 + 1)$-boyutlu ve $\mathrm{lk}_{\Delta_1}(v_1) * \Delta_2 = \mathrm{lk}_{\Delta_1 * \Delta_2}(v_1)$ kompleksi $(d_1 + d_2)$-boyutlu olduğundan tümevarım ile $\Delta_1 * \Delta_2$ kompleksi tepe-ayrıştırılabilirdir.

□

4.1 Zayıf Kiriş Graflar ve Tepe-Ayrıştırma

G bir graf olsun, eğer G nin kendisi ve tümleyeni en fazla 4 uzunlukta indirgenmiş bir çevrime sahip ise G ye zayıf kiriş graf denir. Bir grafta birbirine komşu olmayan x ve y tepeleri arasındaki her kirişsiz yol 2 uzunlukta ise bu (x, y) ye 2-çift denir. G grafının tümleyeni G^c ye ait (x, y) 2-çiftine G de eş-çift denir.

Yardımcı Teorem 4.10 (Hayward et al, 1989) Bir graf G zayıf kiriş graftır ancak ve ancak G nin her indirgenmiş alt grafı ya kliktir ya da en az bir eş-çift içerir.

Yardımcı Teorem 4.11 Bir G zayıf kiriş graf için, $x, y \in V(G)$ verilsin. Buna göre, (x, y) G de eş-çifttir ancak ve ancak, ya

(i) Eğer $u \in N_G(x) \setminus N_G(y)$ ve $v \in N_G(y) \setminus N_G(x)$ ise $uv \in E(G)$,ya da
(ii) $N_G[x]$ ve $N_G[y]$ kümeleri içerme ile karşılaştırılabilirdirler.

Kanıt. (x, y), G de eş-çift ve $u \in N_G(x) \setminus N_G(y)$, $v \in N_G(y) \setminus N_G(x)$ olsun. Böylece, uy ve vx, $E(G^c)$ de ayrıtlar olurlar. (x, y), $E(G^c)$ de 2-çift olduğundan, $uv \notin E(G^c)$ olmalıdır. Aksi halde (x, v, u, y) yolu G^c de kirişsiz 3-yol olur ve bu (x, y) nin $E(G^c)$ de 2-çift oluşu ile çelişir o halde (i) gerçeklenir, $uv \in E(G)$ olmalıdır. Eğer (x, y), G de eş-çift ise, $xy \in E(G)$ dir ve bu durumda (i) sağlanmıyorsa, açıkca $N_G[y] \subseteq N_G[x]$ veya $N_G[x] \subseteq N_G[y]$ dir.

Tersine, eğer x ve y tepeleri G de durum (i) deki gibi iseler, uy ve vx ayrıtları G^c de indirgenmiş $2K_2$ oluştururlar. x ve y tepelerinin her ikisine birden bitişik olmayan öyle bir w tepesi bulunursa, xw ve wy G^c de ayrıt oluştururlar. O halde, (x, y) G^c de 2-çifttir. x ve y tepeleri G de durum (ii) deki gibi olsunlar. Genelliği bozmadan, $N_G[y] \subseteq N_G[x]$ olarak alınabilir. x tepesinden y tepesine G^c de tüm kirişsiz yollar 3 veya daha fazla uzunlukta olsun, açıkca $N_G(y)$ de bir v tepesi vardır ve y, G^c de x tepesine bitişik değildir. Bu da $N_G[y] \subseteq N_G[x]$ kabulü ile çelişeceğinden, x tepesinden y tepesine tüm kirişsiz yollar en fazla 2 uzunluktadır. □

Yardımcı Teorem 4.12 x tepesi G zayıf kiriş grafının döküm tepesi olsun. Buna göre en az bir $y \in N_G(x)$ için (x, y) eş-çifttir.

Kanıt. x, G de döküm tepesi ve $S \subseteq G \setminus N_G[x]$ maksimal bağımsız küme olsun. x döküm tepesi olduğundan, en az bir $y \in N_G(x)$ vardır ve $S \cup \{y\}$ kümesi bağımsız kümedir. Böylece, her $s_i \in S$ için (y, s_i, x) yolları G^c de 2 uzunlukta kirişsiz yollardır. O halde (x, y), G^c de 2-çifttir. Böylece ispat biter. □

Önerme 4.13 P_n, n tepeli bir yol grafı olsun. P_n nin son ayrıtlarını oluşturan tepeler eş-çifttir, dahası P_n nin son tepesine bitişik olan tepe döküm tepesidir.

Kanıt. $xy \in E(P_n)$ son kenar olsun. Genelliği bozmadan, $N_G[y] \subseteq N_G[x]$ olduğu kabul edilsin. Yardımcı Teorem 4.6 ve Yardımcı Teorem 4.12 den x döküm tepesidir ve (x, y) eş-çifttir. □

Yardımcı Teorem 4.14 (Kosh-ahang and Moradi, 2014) G grafı, indirgenmiş

C_5 çevrimini içermeyen tepe-ayrıştırılabilir bir graf ve x döküm tepesi olsun, böylece $N_G[y] \subseteq N_G[x]$ olacak şekilde $y \in N_G(x)$ vardır.

Teorem 4.15 G bir zayıf kiriş graf olsun. Eğer G tepe-ayrıştırılabilir ise, ardıl-sökülebilir graftır.

Kanıt. G zayıf kiriş ve tepe-ayrıştırılabilir bir graf olsun. O halde G de bir x döküm tepesi mevcuttur. Böylece, Yardımcı Teorem 4.11 ve Yardımcı Teorem 4.6 dan $N_G[y] \subseteq N_G[x]$ olacak şekilde $y \in N_G(x)$ vardır ve x tepesi döküm tepesidir. Yardımcı Teorem 4.12 den (x, y) eş-çifttir. $G - x$ zayıf kiriş ve tepe-ayrıştırılabilir olduğundan, tümevarım ile G ardıl-sökülebilir graftır. □

Bir G grafı, en az bir baskılayan tepe içermiyorsa, bu grafa *kapalı komşuluk Sperner* (CNS-graf) adı verilir.

Teorem 4.16 Bir G grafı iyi-örtülmüş ve ardıl-sökülebilir graf olsun. Eğer G, indirgenmiş iyi-örtülmüş CNS-alt grafı içermiyorsa, G tepe-ayrıştırılabilirdir.

Kanıt. G iyi-örtülmüş ve ardıl-sökülebilir olsun, o halde G nin baskılayan bir x tepesi vardır. (Bıyıkoğlu ve Civan, 2014) de Yardımcı Teorem 9 dan $G \setminus N_G[x]$ iyi-örtülmüş graftır. Eğer $G \setminus N_G[x]$ baskılayan tepeye sahip değilse, $G \setminus N_G[x]$ G nin indirgenmiş bir CNS-alt grafıdır. G de indirgenmiş bir CNS-alt graf olmadığından, $G \setminus N_G[x]$ bir baskılayan tepeye sahip olmalıdır. Ayrıca, (Bıyıkoğlu ve Civan, 2014) de Yardımcı teorem 10 dan $G \setminus x$ de iyi-örtülmüş ve ardıl-sökülebilir bir graftır. $G - N_G[x]$ de iyi-örtülmüş bir graftır. $G \setminus x$ ve $G \setminus N_G[x]$ iyi-örtülmüş ardıl-sökülebilir graf olduğundan tepe-ayrıştırılabilirdir. □

Teorem 4.17 G grafı zayıf kiriş graf ve $\{x_0, ..., x_k\}$ sökülme sıralaması ile ardıl-sökülebilir graf olsun. Eğer G de $i \in \{0, ..., x_k\}$ için (x_i, x_{i+1}) 2-çift değil ise, G tepe-ayrıştırılabilirdir.

Kanıt. G zayıf kiriş ve ardıl-sökülebilir olsun fakat tepe-ayrıştılırılabilir olmasın. O halde, $\{x_0, ..., x_k\}$ de öyle bir x_i tepesi vardır ki $G_i \setminus N_G[x_i]$ tepe-ayrıştırılabilir değildir. Böylece $G_i \setminus N_G[x_i]$ zayıf kirişdir ve baskılayan tepeye sahip değildir. $G_i \setminus x_i$ zayıf kiriş ve ardıl-sökülebilir olduğundan,$N_G[y_k] \subseteq N_G[x_{i+1}]$ koşulunu sağlayan $y_k \in N_G[x_{i+1}]$ tepeleri aynı zamanda $N_{G_i}[x_i]$ dedir. Böylece (x_i, x_{i+1}) açıkca 2-çift oluşturur ve ispat biter. □

4.2 Yönlü Graflar ve Tepe-Ayrıştırma

Civan ve Bıyıkoğlu (2014) çalışmalarında, yönlendirilmiş graflar üzerinde, tepe-ayrıştırılabilir basit graflar oluşturan bir operasyon tanımlamışlardır. $\overrightarrow{G} = (V, E)$ bir yönlü graf olsun, $\overrightarrow{G}$ den oluşturulan bu basit grafa *ortak-düşman grafi* (*Common-Enemy graph*) denir ve $CE(\overrightarrow{G})$ ile gösterilir. $x \Longrightarrow y$ ile $\overrightarrow{G}$ de x tepesinden başlayan ve y tepesinde biten yönlü yol gösterilecektir. Bir u tepesinin düşman kümesini $A(u) = \{v \in V : v \Longrightarrow u\}$ ile tanımlanmıştır ve $A[u] = A(u) \cup \{u\}$ dur. $CE(\overrightarrow{G})$ grafının kenar kümesi $E(CE(\overrightarrow{G}))$ ile gösterilsin, böylece $xy \in E(CE(\overrightarrow{G}))$ olması için gerek ve yeter şart $x \neq y$ ve $A[x] \cap A[y] \neq \varnothing$ olmasıdır. [ct] çalışmada $\overrightarrow{G}$ yönlendirilmiş ve çevrimsiz bir graf ise $CE(\overrightarrow{G})$ tepe-ayrıştırılabilir olduğu gösterilmiştir. Bu bölümde yönlendirilmiş graflar üzerinde *kapalı-aralık* operasyonu adı verilen yeni bir operasyon tanımlanacaktır. Bir $\overrightarrow{G}$ yönlendirilmiş grafının kapalı-aralık grafı $\overrightarrow{G}$ den oluşturulan basit bir graf olup $CP(\overrightarrow{G})$ ile gösterilir. $CP(\overrightarrow{G})$ nin düşman kümesi ve kenar kümesi $CE(\overrightarrow{G})$ ile aynı şekilde tanımlanır. Özel olarak, $\overrightarrow{G}$ bir yönlü graf ve $x_0, x_1, ..., x_n$ de $\overrightarrow{G}$ de yönlü bir yol ise, bu operasyonda $x_0, \hat{x_1}, ..., x_n$ yönlü yolundan bir x_1 tepesinin silinmesi $x_0, x_2, ..., x_n$ yönlü yolunun oluşmasına yol açar.

Uyarı 4.18 $x \in V(\overrightarrow{G})$ sıfır çıkış-dereceli olsun ve pozitif giriş-dereceli tepe olsun. x tepesinden başlayıp herhangi bir $w \in V(\overrightarrow{G})$ tepesinde biten bir yönlü yol olmadığından, $CE(\overrightarrow{G} - x) \cong CP(\overrightarrow{G} - x)$ ve $CE(\overrightarrow{G} - N_{CE(\overrightarrow{G})}[x]) \cong CP(\overrightarrow{G} - N_{CP(\overrightarrow{G})}[x])$ dir.

Bir G grafında bir x tepesi için, $N_G[y] \subseteq N_G[x]$ olacak şekilde bir $y \in N_G(y)$ tepesi varsa bu x tepesine baskılayan tepe denir. Aşağıdaki yardımcı teorem döküm tepesi ile baskılayan tepe arasındaki ilişkiyi göstermektedir.

Yardımcı Teorem 4.19 (Bıyıkoğlu ve Civan, 2014) Bir x tepesi baskılayan ise x döküm tepesidir.

Uyarı 4.20 G grafında bir x tepesinin indirgenmiş açık komşuluğu $N_G(x)$ bir klik ise x e simpleksel tepe denir. Böylece, $N_G(x)$ e ait her tepe baskılayan olup döküm tepesidir.

Teorem 4.21 $\overrightarrow{G}$ bir yönlendirilmiş graf olsun, buna göre $CP(\overrightarrow{G})$ tepe-ayrıştırılabilirdir.

Kanıt. $\overrightarrow{G}$ çevrimsiz ise, onun ortak-düşman grafı tepe-ayrıştırılabilirdir (Bıyıkoğlu ve Civan, 2014) ve Uyarı 4.20 den $CP(\overrightarrow{G}))$ de tepe-ayrıştırılabilirdir. Kabul edilsin ki $\overrightarrow{G}$ de en az bir yönlü çevrim olsun. $\{x_1, x_2, ..., x_n, x_1\}$ $\overrightarrow{G}$ nin bir yönlü çevrimi olsun. $xy \in E(CE(\overrightarrow{G}))$ ancak ve ancak $x \neq Y$ ve $A[x] \cap A[y] \neq \varnothing$ olduğundan $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ $CP(\overrightarrow{G})$ de indirgenmiş bir klik oluşturur. Böylece $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ deki her tepe uyarı x den ve baskılayan olup döküm tepesidir. Genelliği bozmadan x_1 nin döküm tepesi olduğu kabul edilsin. Bu durumda, $CP(\overrightarrow{G} - x_1)$ ve $CP(\overrightarrow{G} - N_{CP(\overrightarrow{G})}[x_1])$ nin tepe-ayrıştırılabilir olduğunu göstermek yeterlidir. Bir $ab \in E(CP(\overrightarrow{G} - x_1))$ ise, tanım gereği $v \in A[a] \cap A[b]$ olacak şekilde en az bir $v \in V(\overrightarrow{G})$ vardır. Eğer $v = x_1$ ise, $i = \{0, 2, ..., n\}$ için $CP(\overrightarrow{G}) - x_1$ de $x_i \in A[a] \cap A[b]$ olmalıdır çünkü $\{x_0, x_2, ..., x_n\}$ yolu $\overrightarrow{G} - x_1$ de yönlü yoldur. Bu da $ab \in E(CP(\overrightarrow{G} - x_1))$ olduğunu verir. ab kenarı $E(CP(\overrightarrow{G} - N_{CP(\overrightarrow{G})}[x_1])$ de olsun. Böylece, $w \in A[a] \cap A[b]$ olacak şekilde $w \in V(\overrightarrow{G})$ vardır. Eğer $w \in N[x_1]$ ise, açıkca a ve b nin her ikisi de $N[x_1]$ de olmalıdır, bu kabul ile çelişir. O halde $ab \in E(CP(\overrightarrow{G}) - N_{CP(\overrightarrow{G})}[x_1])$ dir. Sonuç olarak, $CP(\overrightarrow{G} - x_1)$ ve $CP(\overrightarrow{G} - N_{CP(\overrightarrow{G})}[x_1])$ lerin her ikisi de tepe-ayrıştırılabilidir. □

5. KABUKLANABİLİRLİK

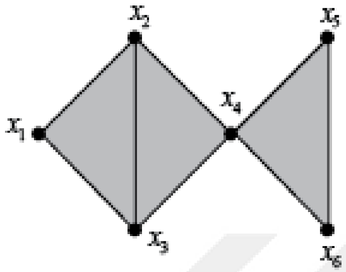
Bu bölümde kabuklanabilirlik kavramı tanıtılacaktır ve bu kavram ile ilgili temel sonuçlar verilecektir. Kabuklanabilirlik kombinatorik topolojinin en eski kavramlarından biridir ve çok önemli sonuçlara sahiptir. Pure olmayan kompleksler için (Björner ve Wachs, 1996) tarafından incelenmiştir. Kabaca bir kompleksin kabuklanabilirliği onun fasetlerinin birbirine uygun bir şekilde yapışmasıdır. Bir kompleks kabuklanabilir ise uygun boyutta kürelerin wedge toplamına homotopi denktir. Ayrıca kabuklanabilirlik önemli cebirsel sonuçlara da sahiptir. Bu çalışmada daha çok bu sonuçlar üzerinde durulacaktır.

Tanım 5.1 (Van Tuyl and Villareeal, 2008) Bir Δ simpleks kompleksinin fasetleri, $(\bigcup\limits_{i=1}^{k-1} < F_i >) \cap < F_k >$ altkompleksi saf ve $(\dim F_k - 1)$-boyutlu olacak şekilde $F_1, F_2, ..., F_t$ olarak doğrusal bir şekilde sıralanabiliyor ise Δ ya kabuklanabilir kompleks denir.

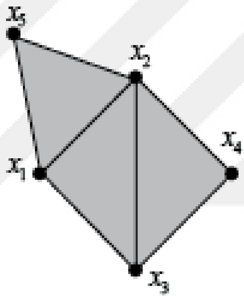
Bu verilen tanım literatürde daha çok saf ve kabuklanabilir kompleksler için kabul edilir. Şimdi saf olmayan ve kabuklanabilir kompleksler için Björner ve

Wachs (1996) tarafından ortaya atılan tanım verilecektir.

Tanım 5.2 (Björner and Wachs, 1996) Bir Δ simpleks kompleksinin fasetleri, tüm $1 \leq i < j \leq s$ için, en az bir $v \in F_j \setminus F_i$ olacak şekilde ve $\{v\} = F_j \setminus F_l$ olacak şekilde en az bir $l \in \{1, ..., j-1\}$ bulunursa, Δ nın $F_1, ..., F_s$ fasetlerinin sıralamasına kabuklanabilirlik sıralaması denir ve Δ ya da kabuklanabilir kompleks denir.



Şekil 11: Kabuklanamaz bir kompleks.



Şekil 12: Kabuklanabilir bir kompleks.

Teorem 5.3 (Provan and Billera, 1980) Bir Δ kompleksi saf ve kabuklanabilir ise Cohen-Macaulay komplekstir.

Örnek 16 (Provan and Billera, 1980) Bir simpleks saf ve kabuklanabilirdir. Böylece Cohen-Macaulaydır.

Teorem 5.4 Δ kabuklanabilir ise, tüm $F \in \Delta$ yüzleri için $\mathrm{lk}_\Delta(F)$ da kabuklanabilirdir.

Kanıt. Δ nın bir kabuklanabilirlik sıralaması $F_1, F_2, ..., F_s$ olsun. Şimdi herhangi bir $F \in \Delta$ yüzü için $\mathrm{lk}_\Delta(F) = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_t\}$ olduğu kabul edilsin. Tanımdan tüm $i = 1, 2, ..., t$ için $(\sigma_i \cup F)$ yüzü Δ nın fasetidir ve her biri $F_1, F_2, ..., F_s$ sıralamasındaki fasetlerden birine eşittir. Δ kabuklanabilir olduğundan, $1 \leq i < j \leq s$ için en az bir $v \in F_j \setminus F_i = (\sigma_j \cup F) \setminus (\sigma_i \cup F) = \sigma_j \setminus \sigma_i$ ve $\{v\} = F_j \setminus F_l =$

$(\sigma_j \cup F) \smallsetminus (\sigma_l \cup F) = \sigma_j \smallsetminus \sigma_l$ olacak şekilde en az bir $l \in \{1, ..., j-1\}$ bulunacağından, $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_t$ sıralaması $\mathrm{lk}_\Delta(F)$ için bir kabuklanabilirlik sıralamasıdır böyle $\mathrm{lk}_\Delta(F)$ kabuklanabilirdir. □

Teorem 5.5 (Villarreal and Van Tuyl, 2008) Δ ve Γ iki kompleks olsun. Buna göre, Δ ve Γ kabuklanabilirdir ancak ve ancak $\Delta * \Gamma$ kabuklanabilirdir.

Yardımcı Teorem 5.6 Δ bir kabuklanabilir kompleks olsun, buna göre herhangi bir F için $\mathrm{star}_\Delta(F)$ kabuklanabilirdir.

Kanıt. $\mathrm{star}_\Delta(F) = F * \mathrm{k}_\Delta(F)$ olduğundan, Teorem 5.4 ten $\mathrm{k}_\Delta(F)$ kabuklanabilirdir. Ayrıca (Provan and Billera, 1980) den bir simpleks kabuklanabilirdir. Teorem 5.5 ten iki kabuklanabilir kompleksin birleşimlerinin kabuklanabilir oluşundan, $\mathrm{star}_\Delta(F)$ kabuklanabilirdir. □

Bir Δ kompleksinin tepe-ayrıştırılabilir olması, onun topolojisi ile ilgili sonuçlar verir. Örneğin, Δ nın kabuklanabilir olduğunu görmek genelde kolay değildir, bu yüzden tepe-ayrıştırma yöntemi bir kompleksin kabuklanabilirliğini göstermek için oldukça kullanışlı bir metodolojidir.

Teorem 5.7 (Wachs, 1999) $v \in \Delta$ döküm tepesi olsun. Buna göre, $\mathrm{del}_\Delta(v)$ ve $\mathrm{lk}_\Delta(v)$ kabuklanabilir ise Δ kabuklanabilirdir.

Kanıt. Kabul edelim ki $F_1, F_2, ..., F_t$ faset dizisi $\mathrm{del}_\Delta(v)$ nin ve $G_1, G_2, ..., G_s$ de $\mathrm{lk}_\Delta(v)$ nin kabuklabilirliği olsun. Böylece, $G_1 \cup v, G_2 \cup v, ..., G_s \cup v$ faset dizisi $v * \mathrm{lk}_\Delta(v)$ için bir kabuklanabilirlik dizisidir. $(\mathrm{del}_\Delta(v)) \cup (v * \mathrm{lk}_\Delta(v)) = \Delta$ olduğundan bu iki dizinin birleşimi Δ nın bir kabuklanabilirlik dizisidir. □

Teorem 5.8 (Provan and Billera, 1980) Δ tepe-ayrıştırılabilir kompleks ise kabuklanabilirdir.

Teorem 5.9 (Van Tuyl, 2009) G bipartite graf olsun. $\mathrm{Ind}(G)$ tepe-ayrıştırılabilirdir ancak ve ancak kabuklanabilirdir.

6. DERİNLİK VE DERİNLİK ALT SINIRI

Daha önceki bölümde derinlik kavramının tanımı cebirsel anlamda verilmişti. Derinlik kavramı cebirsel olmasının yanı sıra topolojik olarakta yorumlanabilir. Bu bölümde bazı graf sınıflarının bağımsızlık komplekslerinin derinliklerine ait alt sınırlar hesaplanacak ve bunların topolojik sonuçları verilecektir. Derinlik hesabı aynı zamanda, Auslander-Buchsbaum formülünün bir sonucu olarak projektif boyut hesabı yapar. Projektif boyut ile ilgili Dao ve Schweig (2013, 2014, 2015) önemli sonuçlar elde etmişlerdir. Çalışmanın bu bölümünde bu sonuçlara ek olarak, bağımsızlık komplekslerine ait derinlik hesabları yapılacaktır.

Bir Δ simpleks kompleksi için derinlik topolojik olarak,

$$\text{depth}(\Delta) = \min\{m : \widetilde{H}_{m-|\sigma|}(\text{lk}_{\Delta}(\sigma); k) \neq 0, \sigma \in \Delta\}$$

şeklindedir.

Teorem 6.1 (Fröberg, 1980) Δ bir simpleks kompleksi ise depth$(k[\Delta])$ = $1 +$ maks$\{i : \Delta$ nın $i-$ iskeleti Cohen-Macaulaydır$\}$.

Sonuç 6.2 Ind(G) bağımsızlık kompleksi ve $k[\text{Ind}(G)]$ Stanley-Reisner halka olsun. Buna göre, depth$(k[\text{Ind}(G)])$ = depth$(\Delta) + 1$ dir.

Yukarıdaki tanım cebirsel yorumdan kombinatorik olarak tekrar yorumlanırsa,

Yardımcı Teorem 6.3 (Woodroofe, 2012) Δ simpleks kompleksi ise, depth$(k[\Delta]) \geq r$ olması için gerek ve yeter şart Δ nın r-iskeletleri saf ve tepe-ayrıştırılabilidir.

Yardımcı Teorem 6.4 (Dao and Schweig, 2015) G bir graf ve Ind(G) de bağımsızlık kompleksi ise, $q < |V(G)| -$ pd$(k[\Delta]) - 1$ için $\widetilde{H}_q(\text{Ind}(G), k) = 0$ dir.

Sonuç 6.5 Δ simpleks kompleksi olsun. Eğer depth$(k[\Delta]) \geq r$ ise, $q < r - 1$ için $\widetilde{H}_q(\text{Ind}(G), k) = 0$ dır.

Kanıt. Auslander-Buchsbaum formülünden, $|V(G)| - \mathrm{pd}(k[\Delta]) = \mathrm{depth}(k[\Delta])$ dır. Bu eşitlik ve Yardımcı teorem 6.3 kullanarak $q < \mathrm{depth}(k[\Delta]) - 1$ elde edilir ve ispat biter. □

Bir Δ kompleksinin i-boyutlu iskeleri (i-iskeletleri) Δ^i olarak da gösterilir. Aşağıda Δ kompleksinin depth sayısının alt sınırı ve onun simpleksel homolojisi arasındaki ilişkiyi açıklayan teorem verilecektir.

Teorem 6.6 Δ bir simpleks kompleksi olsun. Buna göre, $\mathrm{depth}(k[\Delta]) \geq 2$ ancak ve ancak $\widetilde{H}_0(\Delta, k) = 0$.

Kanıt. $\mathrm{depth}(k[\Delta]) = \mathrm{depth}(\Delta) + 1$ olduğundan, Δ nın 1-iskeletlerinin Cohen-Macaulay olduğu sonucuna varılır. Δ^1 Cohen-Macaulay olduğundan dolayı $i < \dim \Delta^1$ için $\widetilde{H}_i(\Delta^1, k) = 0$ olacağından, $\widetilde{H}_0(\Delta^1, k) = 0$ sonucuna ulaşılır. Simpleksel homolojide $\widetilde{H}_d(\Delta^{d+1}, k) = \widetilde{H}_d(\Delta, k)$ eşitliğinden, $\widetilde{H}_0(\Delta, k) = 0$ elde edilir.

Tersine, $\widetilde{H}_0(\Delta, k) = 0$ ise, Δ bağlantılıdır. 1-boyutlu kompleksin Cohen-Macaulay olması için gerek ve yeter şart bağlantılı olması gerçeğinden, Δ^1 Cohen-Macaulaydır ve Sonuç 6.2 ile Yardımcı Teorem 6.3 den $\mathrm{depth}(k[\Delta]) \geq 2$ olduğu sonucuna varılır.

□

Yardımcı Teorem 6.7 (Ziegler, 1994) Δ simpleks kompleksi için $\mathrm{depth}(\Delta) = d$ olsun. Buna göre, $v * \Delta$ için $\mathrm{depth}(v * \Delta) = d + 1$ dir.

Yardımcı Teorem 6.8 (Woodroofe, 2011b) Δ_1 ve Δ_2 simpleks kompleksleri için sırasıyla $\mathrm{depth}(\Delta_1) = d_1$ ve $\mathrm{depth}(\Delta_2) = d_2$ olsun. Buna göre, $\mathrm{depth}(\Delta_1 * \Delta_2) = d_1 + d_2 + 1$ dir.

6.1 Çevrim Graflar ve Derinlik

C_n grafı n tepeye sahip çevrim grafı olsun. Bu bölümde, $\mathrm{Ind}(C_n)$ komplekslerinin depth değerleri hesaplanacaktır. $n = 3$ veya $n = 5$ ise, $\mathrm{Ind}(C_n)$ tepe-ayrıştılabilirdir (Villarreal, 1990). Bu kompleksler için derinlik değerleri daha sonra verilcektir.

Bir $G = (V, E)$ grafında bir $A \subseteq V(G)$ altkümesini alalım. Eğer $V \setminus A$ kümesine ait her tepe $A \subseteq V(G)$ altkümesinin en az bir tepesine komşu ise bu A tepe kümesine baskın küme denir. A' nın bağımsız kümesi olduğunda aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 6.9 $G = (V, E)$ herhangi bir graf olsun.

$$i(G) = \min\{|A| : A \subseteq V(G),\ G \text{ nin bağımsız ve baskın kümesi}\}$$

ile tanımlı $i(G)$ sayısına G nin bağımsız baskınlık sayısı denir.

Yardımcı Teorem 6.10 G ve Ind(G) de bağımsızlık kompleksi olsun. Eğer Ind(G) tepe-ayrıştırılabilir ise, $i(G)$ bağımsız baskınlık sayısı olmak üzere depth$(k[\text{Ind}(G)]) = i(G)$ dir.

Kanıt. Δ tepe-ayrıştırılabilir bir kompleks ise, Δ nın tüm r-iskeletleride tepe-ayrıştırılabilir olduğundan, Δ nın en büyük boyutlu saf iskeleti $i(G)$-iskeleti olduğundan, $i(G)$-boyutlu iskeleti Cohen-Macaulaydır. O halde depth$(k[\text{Ind}(G)]) = i(G)$ sonucuna ulaşılır. □

Buna göre, depth$(k[\text{Ind}(C_5)]) = i(C_5)$ ve depth$(k[(\text{Ind}(C_3)]) = i(C_3)$ dir.

Yardımcı Teorem 6.11 (Dao and Schweig, 2015) C_n grafı n tepeli bir çevrim graf olsun. Buna göre, $n \equiv 0 \mod 3$ yada $n \equiv 2 \mod 3$ ise, $i(G - v) = i(G)$ dir.

Uyarı 6.12 Aşağıda bir yol grafı için bağımsız baskın sayısı verilmiştir.

$$i(P_n) = \begin{cases} \frac{n}{3} & \text{, eğer } n \equiv 0 \mod 3 \\ \frac{n+2}{3} & \text{, eğer } n \equiv 1 \mod 3 \\ \frac{n+1}{3} & \text{, eğer } n \equiv 2 \mod 3 \end{cases}$$

Çevrim grafı için ise,

$$i(C_n) = \begin{cases} \frac{n}{3} & \text{, eğer } n \equiv 0 \mod 3 \\ \frac{n-1}{3} & \text{, eğer } n \equiv 1 \mod 3 \\ \frac{n+1}{3} & \text{, eğer } n \equiv 2 \mod 3 \end{cases}$$

Yardımcı Teorem 6.13 G, bağımsızlık baskınlık sayısı $i(G)$ olan bir graf olsun. Bu durumda, her $v \in V(G)$ tepesi Ind(G) nin $(i(G) - 1)$-iskeleti için bir döküm tepesidir.

Kanıt. Kabul edilsin ki σ yüzü Ind(G) nin $v \in \sigma$ olacak şekilde $(i(G) - 1)$-boyutlu iskeletine ait bir yüz olsun. Bu durumda, $|\sigma| \leq i(G) - 1$ dir. G nin herhangi bir maximal bağımsızlık kümesinin kardinalitesi en az $i(G)$ olduğundan, $(\sigma \setminus v) \cup \{w\}$ bağımsız küme olacak şekilde en az bir $w \in V(G)$ vardır. Böylece Tanım 4.4 den v bir döküm tepesidir.

□

Teorem 6.14 $k \in \mathbb{Z}^+$ olsun. $n = 3k + 2$ veya $n = 3k$ olmak üzere depth$(k[\text{Ind}(C_n)]) = i(C_n) - 1$ dir.

Kanıt. Yardımcı teoremden den herhangi bir $v \in V(C_n)$ tepesi Ind(C_n) kompleksinin $i(C_n) - 1$-iskeleti için döküm tepesidir. Ind$(C_n - v)$ = Ind(P_{n-1}) ve Ind$(C_n \setminus N_G[v])$ = Ind(P_{n-3}) olduğundan. Uyarı 6.11 ve yardımcı teorem xx den $i(C_n) = i(C_n \setminus v) = i(P_{n-1})$ ve $i(C_n) = i(C_n \setminus N_G[v]) - 1 = i(P_{n-3})$ olduğu açıktır. Böylece Ind(P_{n-1}) $i(C_n)$-boyutlu ve Ind(P_{n-3}) $(i(C_n) - 1)$-boyutlu tepe-ayrıştırılabilir komplekslerdir. Yardımcı Teorem 6.13 kullanarak ve boyutu bir düşürerek Ind(C_n) kompleksinin $(i(C_n) - 1)$-boyutlu iskeletlerinde döküm tepesi elde edilir. Böylece tümevarım ile Ind$(C_n - v)$ kompleksinin $(i(C_n) - 1)$-boyutlu iskeletleri ve Ind$(C_n \setminus N_G[v])$ kompleksinin de $(i(C_n) - 2)$-boyutlu iskeletleri saf ve tepe-ayrıştırılabilir komplekslerdir. Sonuç olarak, Ind$(C_n - v)$ kompleksinin $(i(C_n) - 1)$-boyutlu iskeletleri Cohen-Macaulaydır. depth$(k[\text{Ind}(G)]) = r$ olması için gerek ve yeter şart Ind(G) nin r-boyutlu iskeletlerinin Cohen-Macaulay olmasıdır önermesi depth$(k[\text{Ind}(C_n)]) = i(C_n) - 1$ olduğunu verecektir. □

Sonuç 6.15 $k \in \mathbb{Z}^+$ olsun. $n = 3k + 2$ veya $n = 3k$ olmak üzere, $i(G) - 1 \leq$ depth$(k[\text{Ind}(C_n)]) \leq i(G)$ dir.

6.2 Zayıf Kiriş Graflar için Derinlik Sınırı

G bir graf olsun, eğer G nin kendisi ve tümleyeni en fazla 4 uzunlukta indirgenimş bir çevrime sahip ise G ye zayıf kiriş graf denir. Bir grafta birbirine komşu olmayan x ve y tepeleri arasındaki her kirişsiz yol 2 uzunlukta ise buna 2-

çift denir.

Önerme 6.16 P_n, n tepeli bir yol grafı ise Ind(P_n) kompleksi $(\lceil \frac{n}{3} \rceil - 1)$-boyutlu Cohen-Macaulay komplekstir.

Kanıt. Önerme 4.13 den son tepeye bitişik bir x tepesi P_n grafı için bir döküm tepesidir. O halde $P_n \smallsetminus x$ ve $P_n \smallsetminus N_{P_n}[x]$ grafları bu tipte en az bir döküm tepesine sahip olmalıdırlar. O halde Ind(P_n) kompleksi tepe-ayrıştırılabilirdir. Bir tepe-ayrıştırılabilir Ind(G) kompleksi $i(G)$ boyutta Cohen-Macaulay olduğundan ve P_n nin herhangi bir bağımsız baskın kümesine ait u ve v tepesi için dist$(u, v) = 2$ veya dist$(u, v) = 3$ olduğundan, $i(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ dür ve Ind(P_n) kompleksi $(\lceil \frac{n}{3} \rceil - 1)$-boyutlu Cohen-Macaulay komplekstir. □

Teorem 6.17 G grafı çapı D olan bir zayıf kiriş graf olsun. Buna göre, depth$(k[\text{Ind}(G)]) \geq \lceil \frac{D+1}{3} \rceil$ dir.

Kanıt. G grafı n tepeli bir yol grafı olsun. Bu durumda, G grafı bir zayıf kiriş graftır ve Önerme 4.13, son tepeye yani derecesi bir olan tepeye bitişik tepe döküm tepesidir. Dahası Ind(G) kompleksi $(\lceil \frac{D+1}{3} \rceil - 1)$-boyutlu bir Cohen-Macaulay komplekstir ve depth$(k[\text{Ind}(G)]) = \lceil \frac{D+1}{3} \rceil$ dir. G grafı zayıf kiriş graf ve P_n de $V(G) \smallsetminus V(P_n) \neq \varnothing$ olacak şekilde G nin indirgenmiş en uzun yolu olsun. Bu P_n nin G nin çapı olduğunu verir. Şimdi, Ind(G) nin $i(P_n)$-boyutlu iskeletlerinin tepe-ayrıştırılabilirliliği incelenecektir. Çünkü Ind(G) nin $i(P_n)$-boyutlu tepe-ayrıştırılabilir iskelete sahip olması onun derinliği için alt sınır verecektir. x, P_n nin son tepesine bitişik bir tepesi olsun ve F de G nin $i(P_n)$ kardinaliteli yüzü olsun. O halde,

Durum 1. F nin tüm tepeleri $V(P_n)$ kümesinde olsun, bu durumda Ind(P_n) nin tepe-ayrıştırılabilir olması, bazı $v \in V(P_n)$ tepeleri için $(F \smallsetminus x) \cup \{v\}$ kümesinin G de bağımsız bir küme olmasını gerektirir ve bu küme $i(P_n)$ kardinaliteye sahiptir.

Durum 2. F nin bazı tepeleri $V(G) \smallsetminus V(P_n)$ de olsun. Eğer hiçbir $v \in V(G)$ tepesi için $(F \smallsetminus x) \cup \{v\}$ kümesi G nin bir bağımsız kümesi değil ise, F nin $V(G) \smallsetminus V(P_n)$ deki tepeleri P_n için baskın tepelerdir, yani tüm P_n tepelerine bitişiktir, bu da G nin çapının D uzunluğu ile çelişir. O halde $(F \smallsetminus x) \cup \{v\}$ bağımsızdır.

Sonuç olarak, x tepesi G nin $i(P_n)$-boyutlu iskeletleri için döküm tepesidir. $P_n \smallsetminus x$ ve $P_n \smallsetminus N_G[x]$ grafları sırasıyla $i(P_n)$ ve $i(P_n) - 1$ baskınlık sayılarına sahip olduklarından, Ind(G) kompleksinin $i(P_n)$-boyutlu iskeletleri tümevarım ile saf ve tepe-ayrıştırılabilirdir. $i(P_n) = \lceil \frac{D+1}{3} \rceil$ olduğundan, depth$(k[\text{Ind}(G)]) \geq \lceil \frac{D+1}{3} \rceil$ dir.

□

Sonuç 6.18 G grafı çapı D olan bir zayıf kiriş graf ise, tüm $q \leq \lceil \frac{D+1}{3} \rceil - 1$ için $\widetilde{H}_q(\text{Ind}(G), k) = 0$ dur.

7. SONUÇ

Çalışmada Bağımsızlık Kompleksleri yardımıyla Stanley-Reisner halkaları ile ilgili sonuçlar bulunmuştur. Tepe-ayrıştırılabilirlik yöntemi ile değişmeli cebire ait literatürde daha önce bulunmamış önemli sonuçlar kazandırılmıştır.

Zayıf Kiriş grafların döküm tepeleri karakterize edilmiştir. Böylece daha önce hiç çalışmamış indirgenmiş dört uzunlukta kirişsiz çevrime sahip grafların tepe-ayrıştırılabilirliği ile ilgili sonuçlar verilmiştir. Bunun yanı sıra, zayıf kiriş grafların tepe-ayrıştırılabilir olanlarının aynı zamanda ardıl-sökülebilir graflar olduğu sonucuna varılmıştır.

Kabuklanabilirlik kavramı tanıtılmış ve kabuklanabilir kompleksler ile ilgili sonuçlar verilmiştir.

Çalışmanın son bölümünde ise değişmeli cebirde önemli bir değişmez olan bir halkanın derinliği kavramı üzerinde durulup, bir halkanın derinliği kombinatorik açıdan yorumlanmıştır. Literatürde derinlik kavramı kombinatorik olarak çok az ele alındığından, bu çalışma kombinatorik değişmeli cebire önemli bir katkıda bulunmaktadır. Bunun yanı sıra, zayıf kiriş graflarının Stanley-Reisner halkaları için derinlik alt sınırı verilmiştir. Bu da literatürde bilinen alt sınırlar ile kıyaslandığında oldukça keskin bir sonuçtur. Ayrıca çevrim graflarının Stanley-Reisner halkaları için bağımsızlık baskınlık sayısı cinsinden derinlik hesabı yapılmıştır.

Çalışma, bir komplek için derinlik değerinin ve simpleksel homolojisi arasındaki ilişki verilerek, zayıf kiriş graflarından oluşturulan bağımsızlık kompleksleri için homoloji gruplarına ait sonuç verilerek bitirilmiştir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Barmak, J. A., 2013, Star Clusters in Independence Complexes of Graphs, Adv. in Math., 241: 33-57 pp.

Bıyıkoğlu, T. and Civan, Y., 2014, Vertex-Decomposable Graphs, Codismantlability, Cohen-Macaulayness, and Castelnuovo-Mumford Regularity, Electronic J. Combin., 21(1): 1-17 pp.

Billera, L. J., Myers, A. N., 1999, Shellability of Intervals Orders, Order, 15: 113-117 pp.

Björner, A and Wachs, M.L., 1996, Shellable Nonpure Complexes and Posets I, Trans. Amer. Math. Soc., 348(4): 1299-1327 pp.

Björner, A and Wachs, M.L., 1997, Shellable Nonpure Complexes and Posets II, Trans. Amer. Math. Soc., 349(10): 3945-3975 pp.

Bruns, W., Herzog, H. J., 1998, Cohen-Macaulay Rings 2nd., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 468 p.

Chartrand, G., Zhang, P., 2008, Chromatic Graph Theory, Discrete Mathematics and Its Applications, Chapman and Hall/CRC, 504 p.

Dao, H., Schweig, S., 2013, Bounds on the Regulariy and projective Dimension of Ideals Associated to Graphs, J. Algebr. Comb., 38: 37-55 pp.

Dao, H., Schweig, S., 2014, Bounding the Projective Dimension of a Squarefree Monomial Ideal via Domination in Clutters, Proc. of the AMS, 143(2): 555-565 pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

Dao, H., Schweig, S., 2015, Further Applications of Clutter Domination parameters to Projective Dimension, J. of Alg., 432: 1-11 pp.

Dirac, G. A., 1961, On Rigid Circuit Graphs, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 25(1): 1-20 pp.

Dochterman, A. and Engström, A, 2009, Algebraic Properties of Edge Ideals via Combinatorial Topology, Electronic J. Combin., 16(2): 1-24 pp.

Dummit, D. S., Foote, R. M., 2004, John Wiley and Sons Inc., 932 p.

Ehrenborg, R., Hetyei, G., 2006, Topology of Independence Complex ,European J. of Combin., 27: 906-923 pp.

Engström, A., 2008, Independence Complexes of Claw-Free Graphs, European J. of Combin., 29: 234-241 pp.

Engström, A., 2009, Complexes of Directed Tress and ındependence Complexes, Disc. Math., 309: 3299-3309 pp.

Engström, A., Noren, P., 2014, Tverberg's Theorem and Graph Coloring, Disc. Comput. Geom., 51: 207-220 pp.

Hatcher, A., 2001, Algebraic Topology 1st ed., Cambridge University Press, 556 p.

Hayward, R. B., Hoàng, C.T. and Maffray, F., 1989, Optimizing Weakly Triangulated Graphs, Graphs and Combinatorics, 5(5): 339-349 pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

Herzog, J., Hibi, T., Zheng, X., 2006, Note Cohen-Macaulay Chordal Graphs, J. of Combin. Ser. A., 113: 911-916 pp.

Herzog, J., Hibi, T., 2011, Monomial Ideals, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 305p.

Hibi, T., Higashitani, A., Kimura, K., O' Keefe, A. B., 2015, Algebraic Study on Cameron-Walker Graphs, Journal of Alg., 422: 257-269 pp.

Hochster, M., 1977, Cohen-Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes, Ring theory II. Lect. Notes in Pure and Appl. Math, Dekker, 171-223 pp.

Kawamura, K., 2010, Independence Complexes of Chordal Graphs, Disc. Math., 310: 2204-2211 pp.

Kosh-Ahang, F and Moradi, S., 2014, Regularity and Projective Dimension of Edge Ideals of C_5-free Vertex Decomposable Graphs, Proceedings of AMS, 142(5): 1567-1576 pp.

Kneser, M., 1955, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 2. Abteilung, 58(27): 1-27 pp.

Lovász, L., 1978, Kneser's conjecture, chromatic number, and homotopy,J. of Combin. Theory Ser. A, 25(3): 319-324 pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

Mahmoudi, M., Mousivand, A., 2010, An Alternative Proof of a Characterization of Cohen-Macaulay Bipartite Graphs, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg., 80: 145-148 pp.

Matsumura, H., Reid, M., 1989, Commutative Ring Theory, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 336 p.

Meshulam, R., 2003, Domination Numbers and homology, J. of Combin. Theory Ser. A, 102: 321-330 pp.

Mousivand, A., Fakhari, A. S., Yassemi, S., 2015, A New Construction for Cohen-Macaulay Graphs, Comm. in Alg., 43: 5104-5112 pp.

Munkres, J. R., 2008, Elements Of Algebraic Topology, Westview Press, 464 p.

Provan, J.S. and Billera, L.J., 1980, Decompositions of Simplicial Complexes Related to Diameters of Convex Polyhedra, Math. of Operation Research, 5(4): 576-594 pp.

Reisner, G. A., 1976, Cohen-Macaulay Quotients of Polynomial Rings, Adv. in Math., 21: 30-49 pp.

Roberts, P. C., 1998, Multiplicities and Chern Classes in Local Algebra, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 320 p.

Rotman, J. J., 1998, An Introduction to Algebraic Topology , Graduate Texts in Mathematics , Springer, 438 p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

Rotman, J. J.,2003, Advanced Modern Algebra, Graduate Studies in Mathematics, Prentice Hall, 1040 p.

Stanley, R., 1975, The Upper Bound Conjecture and Cohen-Macaulay Rings, Studies in Appl. Math., 54(2): 135-142 pp.

Stanley, R., 1996, Combinatorics and Commutative Algebra 2nd., Progress in Mathematics, Birkhäuser, 168 p.

Vander Meulen, K. N., Van Tuyl, A., Watt, C., 2014,Cohen-Macaulay Circulant Graphs, Comm. in Alg. , 42: 1896-1910 pp.

Van Tuyl, A., 2009, Sequentially Cohen-Macaulay Bipartite Graphs: Vertex Decomposability and Regularity, Arch. Math., 93: 451-459 pp.

Villarreal, R. H., 1990, Cohen-Macaulay Graphs, Manuscripta Math., 66(3): 277-293 pp.

Villarreal, R. H., 1997, Cohen-Macaulay Bipartite Graphs, Arch. Math., 68: 71-76 pp.

Van Tuyl. A., Villarreal, R. H., 2008, Shellable Graphs and Sequentially Cohen-Macaulay Bipartite Graphs, J. of Combin. Theory Ser. A, 115: 799- 814 pp.

Villarreal, R. H., 2015, Monomial Algebras 2nd., Monographs and Research Notes in Mathematics, CRC Press, 704 p.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

Wachs, M. L., 1999, Obstructions to Shellability, Disc. Comput. Geom., 22: 95-103 pp.

Woodroofe, R., 2009, Vertex Decomposable Graphs and Obstructions to Shellability, Proceedings of AMS, 137(93): 451-459 pp.

Woodroofe, R., 2011, Chordal and Sequentially Cohen-Macaulay Clutters, Elec. J. of Combin., 18(1): 1-20 pp.

Woodroofe, R., 2011, Erdos-Ko-Rado Theorems for Simplicial Complexes, J. of Combin. Theory Ser. A, 118: 1218-1227 pp.

Woodrofe, R., 2012, Chains of Modular Elements and Shellability, J. Combin. Theory Ser. A, 119(6): 1315-1327 pp.

Zaare-Nahandi, R., 2015, Cohen-Macaulayness of Bipartite Graphs, Revisited, Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 38: 1601-1607 pp.

Ziegler, G. M., 1994, Shellability of Chessboard Complexes ,Israel J. of Math., 87: 97-110 pp.

ÖZGEÇMİŞ

05.03.1982 tarihinde İzmir' de doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini İzmir Bornova' da tamamladı. 2006 yılında Süleyman Demirel Üniversitesi Matematik Bölümü' nde lisans eğitimini tamamladı. 2009 yılına kadar özel eğitim kurumlarında ortaöğretim matematik öğretmenliği yaptıktan sonra, 2009-2010 yılları arasında Sinop Üniversitesi Matematik Bölümü' nde araştırma görevliliği yaptı. 2008 yılında başladığı, Ege Üniversitesi Fen-Bilimleri Enstitüsü Matematiğin Temelleri ve Matematik Lojik Anabilimdalı yüksek lisans eğitimini 2010 yılında Sinop Üniversitesi Fen-Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilimdalı' nda tamamladı. 2011 yılında Araştırma Görevlisi olarak başladığı Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi' nden Ege Üniversitesi' ne doktora eğitimi için gönderilerek, 2011 yılında Ege Üniversitesi' nde doktora öğrencisi ve araştırma görevlisi olarak çalışmalarına başladı. 2014 yılında Yüksek Öğretim Kurulu' nun yurtdışı araştırma bursu ile Amerika Birleşik Devletleri Mississippi State Üniversitesi' nde araştırmacı ziyaretçi olarak 9 ay süre ile bulundu.