EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(DOKTORA TEZİ)

MATEMATİKSEL FİZİKTE BAZI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN KESİRSEL MATEMATİKLE ÇÖZÜMLERİNİN İNCELENMESİ

Zahide OK BAYRAKDAR

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Fevzi BÜYÜKKILIÇ

Fizik Anabilim Dalı
Sunuş Tarihi : 27.12.2016

Bornova - İZMİR

2016

Zahide OK BAYRAKDAR tarafından *doktora* tezi olarak sunulan "*Matematiksel Fizikte Bazı Diferansiyel Denklemlerin Kesirsel Matematikle Çözümlerinin İncelenmesi*" başlıklı bu çalışma Ege Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve *27 Aralık 2016* tarihinde yapılan tez savunmasında aday oybirliği/~~oyçokluğu~~ ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri			**İmza**
Jüri Başkanı	:	Prof. Dr. İsmail SÖKMEN	
Raportör Üye	:	Prof. Dr. Fevzi BÜYÜKKILIÇ	
Üye	:	Prof. Dr. Uğur TIRNAKLI	
Üye	:	Doç. Dr. Serpil ŞAKİROĞLU	
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Hüseyin ŞİRİN	

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Doktora Tezi olarak sunduğum "Matematiksel Fizikte Bazı Diferansiyel Denklemlerin Kesirsel Matematikle Çözümlerinin İncelenmesi" başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

25.11.2016

Zahide OK BAYRAKDAR

ÖZET

MATEMATİKSEL FİZİKTE BAZI DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN KESİRSEL MATEMATİKLE ÇÖZÜMLERİNİN İNCELENMESİ

OK BAYRAKDAR, Zahide

Doktora Tezi, Fizik Anabilim Dalı
Tez Danışmanı : Prof. Dr. Fevzi BÜYÜKKILIÇ
Aralık 2016, 91 sayfa

Doğada ve beşeri yaşamda stokhastik olarak gelişen birçok karmaşık sistem bulunmaktadır. Bu tez çalışmasında, karmaşık fiziksel sistemlerin dinamiğini tasvir etmekte standart matematiksel fiziğin yetersizliği gösterilmekte ve stokhastik sistemleri gerçeğe yakın tasvir eden kesirsel matematiğin önemi açıklanmaktadır. Ancak görülüyor ki, kesirsel matematik, matematiksel tanımlardan öteye geçememektedir. Kesirsel matematiğin karmaşık sistemleri tasvir etmekte başarılı olmasının temelinde yatan fiziksel mekanizmayı açığa çıkarmak amacıyla, sistemin, kümülatif olarak gelişimini hesaba katan Fibonacci yaklaşımından hareketle kümülatif yöntem geliştirilmektedir. Buradan hareketle, fraktal bir uzayda, bellek etkileri ile gelişen karmaşık süreçlerin, kesirsel matematikle paralel olarak kümülatif yöntemle de ele alınabileceği gösterilmektedir. Kümülatif yöntemde karmaşık fiziksel sistemin geliştiği çevrenin fiziksel özelliği α parametresi ile girdirilmektedir. Bizim formülasyonumuza göre, fiziksel sistemlerin gelişimi, kümülatif yöntemin operatör tekniği ile ele alınmaktadır. Bizim yaklaşımımızda, operatör kuvveti olarak ortaya çıkan α parametresi, kesirsel matematiğin differintegral mertebesine karşılık gelmektedir ve α parametresi fiziksel sistemin çevresi ile olan etkileşmesinin bir ölçüsü olarak ele alınmaktadır. Söz konusu yöntemlerin uygulanması amacıyla, Brown hareketleri, nüfus dinamiği, canlıların yaşam ve ölüm olasılıklarının araştırılması kümülatif yaklaşımla ve kesirsel matematik çerçevesinde de ele alınmaktadır. Çevrenin, canlı nüfus dinamiğine, bireyin yaşam ve ölüm olasılıklarına etkisi çizilen grafikler üzerinde α'ya bağlı olarak gösterilmektedir.

Anahtar Kelimeler : Riemann-Liouville kesirsel integrali, Caputo kesirsel türevi, Mittag-Leffler fonksiyonu, kümülatif küçülmeler/büyümeler, Brown hareketleri, nüfus dinamiği, yaşam ve ölüm olasılıkları.

ABSTRACT

INVESTIGATION OF THE SOLUTIONS OF SOME DIFFERENTIAL EQUATIONS IN MATHEMATICAL PHYSICS WITH FRACTIONAL CALCULUS

OK BAYRAKDAR, Zahide

PhD in Physics
Supervisor : Prof. Dr. Fevzi BÜYÜKKILIÇ
December 2016, 91 pages

In nature as well as human life, there exists many complex systems which develops stochastically. In this thesis, the insufficiency of the standard mathematical physics for describing the dynamics of complex physical systems are presented and the importance of the fractional calculus in describing stochastic systems realistically are outlined. With the aim of to reveal the physical mechanism underlying the success of fractional calculus to describe complex stochastic systems, cumulative method is developed in view of the Fibonacci approach which takes care of the development of the system in a compound manner. Thus, it is seen that complex processes which evolve in a fractal space with memory effects could be handled with cumulative method in parallel to the fractional calculus. In cumulative method, the physical property of the environment in which the complex physical system evolves is imposed with a parameter α. In our derivation, the development of physical systems have been handled with the operator technique of the cumulative method. In our approach, the parameter α emerges as the power of the operator which corresponds to the order of the differintegration of the fractional calculus and parameter α is considered as a measure of the coupling of the physical system with its environment. For the purpose of application, the investigation of the Brownian movements, population dynamics and the life and the mortality probabilities of the living creatures are considered within the framework of fractional calculus and cumulative approaches. The effects of environment on the living population dynamics, life and mortality probabilities of individuals are illustrated via α on the sketched figures.

Keywords : Riemann-Liouville fractional integral, Caputo fractional derivative, Mittag-Leffler function, cumulative diminution/growth, Brownian motion, population dynamics, survival and mortality probabilities.

TEŞEKKÜR

Doktora tez çalışmamın planlanmasında ve yürütülmesinde, gerek engin bilgi ve tecrübelerini gerekse manevi desteğini esirgemeyen değerli danışmanım Sayın Prof. Dr. Fevzi Büyükkılıç'a, tez çalışmalarım süresince kıymetli görüşlerini benimle paylaşan Sayın Prof. Dr. Doğan Demirhan'a ve Sayın Prof. Dr. İsmail Sökmen'e teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Çalışmalarım sırasında, desteğini aldığım kıymetli arkadaşlarım Yrd. Doç. Dr. Hüseyin Şirin ve Dr. H. Hale Karayer'e teşekkür ederim.

Yaşamım boyunca benim için maddi ve manevi her türlü özveride bulunan, desteklerini benden hiç esirgememiş olan kıymetli annem Sabahat OK ve babam Ömer OK'a, anlayışları ve destekleri için sevgili ablalarıma ve onların ailelerine,

ve bana inanmaktan hiç vazgeçmeyen, yoluma hep ışık olan sevgili eşim Tuna BAYRAKDAR'a şükran ve minnetle teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (Devam)

Sayfa

İÇİNDEKİLER (Devam)

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

KISALTMALAR DİZİNİ

Kısaltmalar

GKL	Genelleştirilmiş Kesirsel Langevin
GL	Grünwald-Letnikov
ML	Mittag-Leffler
RL	Riemann-Liouville

1. GİRİŞ

Hareket denklemlerini ifade eden diferansiyel denklemler ve çözümleri olan analitik fonksiyonlar, deterministik fiziksel dünyanın bir mekaniksel tasvirinde yeterli görülmüştür. Ancak düzensiz olarak gelişen, lokal olmayan dinamiğe sahip karmaşık sistemlerde mekaniksel yaklaşım, uzun zaman bellek, uzun menzil uzay etkileşimlerini ihmal etmektedir.

Karmaşık olaylar zaman içinde Öklidiyen olmayan bir uzayda Markoviyen olmayan bir bellekle gelişirler. Bu süreçler ters kuvvet yasası formunda korelasyona sahiptirler ve kesirsel matematik kullanılarak tasvir edilirler. Karmaşık sistemler ve onların yapısal ve dinamik özellikleri, temel ölçeklerdeki geniş çeşitlilik, parçacıklar arasında güçlü etkileşmeler ya da zaman içerisinde öngörülemez ya da anormal bir gelişim ile karakterize edilmektedir. Genel olarak bu tip sistemlerin zamansal gelişimi uyumlu oldukları standart yasalardan saparlar, basit bir üstel durulma yasası bu sistemlerin durulma kavramlarını ve kinetiklerini tanımlamakta yetersizdir (West et al, 2003; Metzler and Klafter, 2000; Hilfer, 2000; West, 2014; Luo and Afraimovich, 2010).

Ele alınan bir fiziksel niceliği, çevresinden ve evrildiği ortamdan izole düşünmek mümkün değildir. Gerçek ortamlar, son derece karmaşık ve düzensiz bir fraktal yapı ile karakterize edilirler. Genel olarak bu mekansal karmaşık yapı, kümelerin fraktal boyutu ile tasvir edilmektedir. Karmaşık dinamik sistemler, Öklid geometrisi ve Markoviyen bellekle tasvir edilemediğinden stokhastik modeller öne çıkmaktadır (Tarasov, 2005a). İstatistiksel mekaniğin geleneksel anlayışı mikroskobik ve makroskobik zaman ölçeklerinin ayrılması temeline dayanır. Bu ayrılma sağlandığı zaman geleneksel istatistiksel fizik geçerlidir. Karmaşık sistemler, klasik diferansiyel denklemlerle tasvir edilemezler. Brown hareketi karmaşık sistemlerin ilk temel örneğidir. Brown hareketi, bir akışkan içerisindeki bir parçacığın, akışkanın molekülleri ile olan rastgele etkileşimlerini ifade eden stokhastik Langevin denklemi

$$m\frac{dv}{dt} = -\zeta v + \delta F(t) \tag{1.1}$$

ile modellenir. Langevin denkleminde $-\zeta v$, parçacığın hareketinden kaynaklanan sürtünme kuvveti, $\delta F(t)$ sıvı moleküllerinin parçacığa rastgele çarpmalarının sonucu oluşan fülükte eden rastgele kuvvettir. Burada fülükte eden kuvvet Gaussyen dağılıma sahiptir ve bu kuvvet için korelasyon fonksiyonu

$$< \delta F(t)\delta F(t') >= 2B\delta(t-t') \tag{1.2}$$

ile tanımlanır. Burada $B = \zeta k_B T$ difüzyon katsayısı, k_B Boltzman sabitidir. Bu ifade fülüktüasyon-kayıp ilşkisi olarak bilinmektedir. Korelasyonun Delta fonksiyonu ile ifade edilmesi, sürecin Markoviyen bir bellekle geliştiğinin göstergesidir. Brown difüzyonunun klasik modeli ve basit bir üstel durulma yasası, karmaşık sistemlerin kinetiklerini tanımlamakta yetersizdir. Örneğin, dielektrik durulması, likit kristalleri, faz geçişleri, hava kirliliğinin atmosferdeki difüzyonu, hücresel difüzyon süreçleri, network trafiği, güçlü manyetik alanlar boyunca sinyal iletimi, organizma ve ekosistem dinamikleri gibi karmaşık fiziksel sistemlerde üstel formda ifade edilemeyen, belleğin sistemin dinamiğine etkisi gösteren uzatılmış üstel ve ters kuvvet yasası formundaki durulma fonksiyonları, sürecin Markoviyen olmayan doğasının işaretidir. Bu durumda flüktüasyon-kayıp ilişkisi, bir bellek fonksiyonu cinsinden

$$< \delta F(t)\delta F(t') >=< x^2(t) >_{eq} K(|t-t'|) \tag{1.3}$$

tanımlanır (Hilfer, 2000; Kilbas et al, 2006; West et al, 2003). Burada bellek fonksiyonu $t^{-\beta}$ formundadır ve β üsteli sürecin dinamik mekanizmasına göre belirlenir.

Fiziksel sistemlerin daha gerçeğe yakın bir tasvirini yapmak için süreçlerin lokal olmayan dinamiğini, bellek etkileşimlerini ve bu süreçlerin gerçekleştiği fraktal ortamların yapısını tasvirde kesirsel matematiğin diferansiyel ve integral hesabının gereği ortaya çıkmaktadır. Kesirsel mertebeli türev ve integral denklemleri, bünyesinde anormal süreçleri ve fraktal ortamları barındıran birçok karmaşık sistemin dinamiğini anlatmakta başarılıdır.

Kesirsel matematiğin karmaşık fiziksel sistemleri tasvirdeki önemi nedeniyle kısaca tarihine değinmek yerinde olur. Kesirsel kalkülüs ya da kesirsel matematik olarak adlandırılan ve tamsayılı mertebeden olmayan türev ve integral hesap, 1695 yılında M.L'Hospital'in, G.W. Leibniz'e yönelttiği, türev mertebesinin 1/2. mertebeden olması durumunun ne anlama geldiği sorusuyla başlar. Bunun ardından Euler (1730), Lagrange (1772), Laplace (1812), Lacroix (1819), Fourier (1822)'in katkılarına rağmen, asıl sistematik çalışmalar 19.yüzyıl ortalarında Lioville (1832), Riemann (1847), Holmogren (1865) tarafından yapılmıştır. Özellikle matematikçilerin önderliğindeki araştırmalar doğrultusunda, Grünwald (1867), Letnikov (1868), Sonin (1869), Laurent (1884), Nekrassov (1888), Krug (1890), Weyl (1917), Riesz (1949), Marchaud (1957) ve diğer bilinen bir çok matematikçinin çalışmalarıyla differintegral teorisinde önemli gelişme sağlanmış ve kesirsel hesap rasyonel, irrasyonel ve karmaşık sayı mertebeli türev ve integral operatörler hesabı olarak güncel formuna ulaşmıştır. Literatürde kesirsel mertebeli türev ve integal hesap yerine çoğunlukla keyfi mertebeli türev ve integral hesap ifadesi kullanılır (Kilbas et al, 2006; Oldham and Spanier, 1974; Hilfer, 2000). Keyfi mertebeli türev ve integral hesap bir matematik disiplin olmakla birlikte günümüzde kaotik dinamikleri içeren uygulamalarda (Zaslavsky, 2002), fraktal ortamın mekaniğinin tasvirinde (Carpinteri and Mainardi, 1997; Tarasov, 2005a,b), kuantum mekaniğinde (Laskin, 2000; Naber, 2004), fiziksel kinetikler (Zaslavsky, 2002; Saichev and Zaslavsky, 1997), anormal difüzyon ve iletim teorisi (Montroll and Shlesinger, 1984; Uchaikin, 2003), ekoloji (Ahmed et al, 2007), nüfus (Rivero et al, 2011) gibi alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır. Ayrıca akışkanlar mekaniği, kendine benzer dinamik sistemler, elektriksel ağlar, olasılık ve istatistik, kontrol teorisi ve dinamik sistemler, viskoelastik, optik, kimyasal ve biyolojik fizik gibi birçok alanda gerçeğe yakın tasvirler için kesirsel matematiğin gereği ortadadır (Podlubny, 1999; Coffey and Kalmykov, 2006; West et al, 2003). Kesirsel matematiğin başarısındaki fiziksel mekanizmayı ortaya koymak üzere, bu çalışmada, çevresi ile etkileşen ve fraktal yapılı ortamlarda gelişen dinamik süreçlerde bellek etkileri, kümülatif artma/azalma yöntemi ile ele alınmaktadır (Büyükkılıç and Demirhan, 2008a,b; Büyükkılıç et al, 2015, 2016).

Bu tez çalışması aşağıdaki şekilde düzenlenmektedir. Giriş bölümüne müteakkip ikinci bölümde, bu tez kapsamında kullanılan kesirsel matematiğin en sık karşılaşılan türev ve integralin matematiksel tanımları ve onların bazı özellikleri kısaca tanıtılmaktadır. Üçüncü bölümde, kümülatif küçülme ve büyüme süreçlerinin operatör modelinden hareketle, kesirsel matematiğin differintegral operatör tanımları elde edilmektedir. Dördüncü bölümde, bir fiziksel sürecin aşınma dinamiği, kümülatif azalma ve kesirsel matematik yöntemleri ile sunulmakta ve elde edilen sonuçlar irdelenmektedir. Beşinci bölümde, denge dışı, anormal dinamiklerin tasvirinde önemli olan Langevin denkleminin kesirsel mertebeye genelleştirilmiş bir formu ortaya konmakta ve kümülatif yaklaşımla bir tasviri yapılarak, denklemlerin çözümleri arasında ilişki kurulmaktadır. Altıncı bölümde, bir fiziksel sürecin büyüme dinamiği, çevresiyle etkileşimi de göz önünde bulundurularak kümülatif büyüme ve kesirsel matematik yöntemleri ile ele alınmaktadır. Burada sürece dahil olan bir α fiziksel parametresi, kesirsel operatörlerin mertebesi olup, sistemin çevresi ile etkileşiminin bir ölçütü olarak değerlendirilmektedir. Yedinci bölümde, kümülatif olarak gelişen süreçlerin bir uygulaması olarak, canlı nüfusunun zaman içindeki gelişimi, kümülatif büyümeler bağlamında irdelenmektedir. Sekizinci bölümde, canlı dinamiğinden hareketle, bir canlının yaşam ve ölüm olasılıklarını tasvir eden bağıntılar kümülatif büyüme yöntemi çerçevesinde ele alınmaktadır. Bir nüfusun büyümesi, çevrenin kısıtlayıcı etkisi nedeniyle sınırlandırılarak, bilinen doğrusal olmayan lojistik diferansiyel denklemlerle ilişkisi ortaya konulmaktadır. Son bölümde sonuçlar yer almaktadır. Ekte ise Lebesgue fonksiyonları, Laplace dönüşümü ve Mittag-Leffler fonksiyonu verilmektedir.

2. KESİRSEL MATEMATİK

Karmaşık sistemlerin gelişiminin tasviri kesirsel matematikle başarılı olarak yapılmaktadır. Bu itibarla kesirsel matematiğin türev ve integral tanımlarının kısaca tanıtılması yararlı olacaktır. Ayrıca kesirsel diferansiyel denklemlerde bir çözüm yöntemi olarak sıkça kullanılan Laplace dönüşümü özellikleri ele alınması yerinde olacaktır. Kesirsel matematiğin differintegral operatörlerinin birbirine denk olması gerekmeyen çok çeşitli tanımları mevcuttur ve bu tanımlardan her biri farklı bir çıkış motivasyonuna sahiptir. Aşağıda, bu operatörlere ait tanımlardan en yaygın kullanıma sahip olanların ve bu operatörlerin bazı özellikleri ele alınacaktır. Bu bölümde tanıtılan differintegralin tanımlarının kümülatif metodla, operatör tekniği ile elde edilmesi bir sonraki bölümde verilmektedir(Büyükkılıç et al, 2016).

2.1 Kesirsel Türev ve İntegral Tanımları

2.1.1 Grünwald-Letnikov kesirsel differintegrali

A.K.Grünwald (1867) ve A.V.Letnikov (1868)'un geliştirdiği tanımda, kesirsel türev ve integral işlemi tek bir formulasyonla ifade edilebilmektedir. Bu yaklaşıma göre, bir $[a, b]$ aralığında tanımlı bir f fonksiyonun, q. mertebeden differintegrali

$$\frac{d^q f}{[d(x-a)]^q} = \lim_{N\to\infty} \left\{ \frac{\left[\frac{x-a}{N}\right]^{-q}}{\Gamma(-q)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)} \right\} f\left(x - j\left[\frac{x-a}{N}\right]\right) \tag{2.1}$$

ile verilmektedir. Bu eşitlik, $q > 0$ için kesirsel türev, $q < 0$ için kesirsel integral ifadesidir (Oldham and Spanier, 1974; Kilbas et al, 2006; Hilfer, 2000). Bu tanım, bir $f(x)$ fonksiyonunun $n \in \mathbb{N}$ mertebeden sonlu fark olarak ifade edilen

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(x - kh), \quad (x, h \in R) \tag{2.2}$$

türev formülünün, kesirsel mertebeye genelleştirilmiş bir formudur (Hilfer, 2000).

(2.1) ile verilen Grünwald-Letnikov (GL) tanımı, uygulandığı fonksiyona en az kısıtlama getiren ve fonksiyonun yalnızca tanımlı olmasını gerektiren bir ifadedir. Bu tanım, bir fonksiyonun differintegralini, fonksiyonun türev ve integralleri kullanılmadan hesaplamaya olanak sağlamaktadır. Ancak limit hesabı zorluk yaratabileceğinden bu tanım, pratik hesaplamalar açısından çok kullanışlı değildir (Oldham and Spanier, 1974; Miller and Ross, 1993; Hilfer, 2000).

2.1.2 Riemann-Liouville kesirsel integrali

Riemann-Liouville(RL) tanımı, bir $f(t)$ fonksiyonun, n-katlı tekrarlı integrali olan Cauchy integral formülünün doğal bir genellemesidir. Bu yaklaşım göre, RL integral tanımı şu şekilde ifade edilmektedir (Carpinteri and Mainardi, 1997; Samko et al, 1993):

Tanım 2.1.2.1. *$\Omega = [a, b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ Reel eksen $\mathbb{R}$ üzerinde sonlu bir kapalı aralık olmak üzere, $\alpha \in \mathbb{C}$ $(\Re(\alpha) > 0)$ mertebeden $I_{a+}^{\alpha} f$ ve $I_{b-}^{\alpha} f$ Riemann-Liouville kesirsel integralleri sırasıyla*

$$\left(I_{a+}^{\alpha} f\right)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad (x > a;\ \Re(\alpha) > 0) \tag{2.3}$$

ve

$$\left(I_{b-}^{\alpha} f\right)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}}, \quad (x < b;\ \Re(\alpha) > 0) \tag{2.4}$$

eşitlikleriyle tanımlıdır. Burada $\Gamma(\alpha)$, Gama fonksiyonudur. (2.3) ve (2.4) eşitlikleri ile verilen bu integrallere sırasıyla sol ve sağ kesirsel integralleri denir.

$\alpha = n \in \mathbb{N}$ iken, (2.3) ve (2.4) tanımları, aşağıda verilen

$$\left(I_{a+}^{n} f\right)(x) = \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 ... \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt \quad (n \in n) \tag{2.5}$$

ve

$$\left(I_{b-}^{n} f\right)(x) = \int_b^x dt_1 \int_b^{t_1} dt_2 ... \int_b^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \tag{2.6}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (t-x)^{n-1} f(t)\,dt \quad (n \in n) \tag{2.7}$$

integralleri ile çakışır.

RL kesirsel integral operatörünün bazı temel özellikleri şöyledir (Kilbas et al, 2006; Samko et al, 1993):

- $\alpha = 0$ için birim operatör özelliği $I_{a+}^{0} f(x) = f(x)$ geçerlidir.

- $\Re(\alpha) > 0$ ve $\beta \in \mathbb{C}(\Re(\beta) > 0)$ olmak üzere,

$$\left(I_{a+}^{\alpha}\left(t-a\right)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma\left(\beta\right)}{\Gamma\left(\beta+\alpha\right)}\left(x-a\right)^{\beta+\alpha-1} \tag{2.8}$$

ve

$$\left(I_{b-}^{\alpha}\left(b-t\right)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma\left(\beta\right)}{\Gamma\left(\beta+\alpha\right)}\left(b-x\right)^{\beta+\alpha-1} \tag{2.9}$$

eşitlikleri geçerlidir.

- $I_{b-}^{\alpha}f$ ve $I_{b-}^{\alpha}f$ kesirsel integrasyonların yarı grup özelliği, $\Re(\alpha) > 0$ ve $\Re(\beta) > 0$ olmak üzere,

$$\left(I_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\beta}f\right)(x) = \left(I_{a+}^{\alpha+\beta}f\right)(x) \text{ ve } \left(I_{b-}^{\alpha}I_{b-}^{\beta}f\right)(x) = \left(I_{b-}^{\alpha+\beta}f\right)(x) \tag{2.10}$$

eşitlikleri hemen her $x \in [a,b]$ kapalı aralığındaki noktada, $f(x) \in L_p(a,b)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ için sağlanır Bkz.Ek-9).

- Yarı grup özelliği ve integral sıralarının değişim özelliği ile ilgili Dirichlet formülünden

$$\left(I_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\beta}f\right)(x) = \left(I_{a+}^{\beta}I_{a+}^{\alpha}f\right)(x) \text{ ve } \left(I_{b-}^{\alpha}I_{b-}^{\beta}f\right)(x) = \left(I_{b-}^{\beta}I_{b-}^{\alpha}f\right)(x) \tag{2.11}$$

eşitlikleri geçerlidir.

2.1.3 Riemann-Liouville kesirsel türevi

Tanım 2.1.3.1. $\alpha \in \mathbb{C}$ $(\Re(\alpha) \geq 0)$ *olmak üzere, Riemann-Liouville kesirsel türevleri* $D_{a+}^{\alpha}y$ *ve* $D_{b-}^{\alpha}y$ *sırasıyla,*

$$\left(D_{a+}^{\alpha}y\right)(x) := \left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\left(I_{a+}^{n-\alpha}y\right)(x)$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{a}^{x}\frac{y\left(t\right)dt}{\left(x-t\right)^{\alpha-n+1}} \quad (n = [\Re(\alpha)]+1;\ \ x > a) \tag{2.12}$$

ve

$$\left(D_{b-}^{\alpha}y\right)(x) := \left(-\frac{d}{dx}\right)^{n}\left(I_{b-}^{n-\alpha}y\right)(x)$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\left(-\frac{d}{dx}\right)^{n}\int_{x}^{b}\frac{y\left(t\right)dt}{\left(t-x\right)^{\alpha-n+1}} \quad (n = [\Re(\alpha)]+1;\ \ x < b). \tag{2.13}$$

integralleri ile tanımlanır. Burada, $[\Re(\alpha)]$, $\Re(\alpha)$ *nın tam değeridir.*

Yeterince düzgün(diferansiyellenebilir) bir $f(x)$ fonksiyonu için, $f(x)$'in GL kesirsel türevi ve RL kesirsel türevi birbirine denktir ve

$$\frac{d^q f}{[d(x-a)]^q} = D^{\alpha}_{a+} f(x). \tag{2.14}$$

geçerlidir.

RL kesirsel türev operatörünün bazı temel özellikleri şöyledir (Kilbas et al, 2006):

- $\Re(\alpha) \geq 0$ ve $\beta \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$\left(D^{\alpha}_{a+} (t-a)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1} \quad \Re(\alpha) \geq 0 \tag{2.15}$$

  eşitliği geçerlidir.

- Özel olarak $\beta = 1$ için bir C sabitinin RL kesirsel türevi sıfırdan farklıdır ve

$$\left(D^{\alpha}_{a+} C\right)(x) = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} C, \quad \left(D^{\alpha}_{b-} C\right)(x) = \frac{(b-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} C, \quad (0 < \Re(\alpha) < 1) \tag{2.16}$$

  şeklinde tanımlanır.

- Kesirsel diferansiyel operatörünün, kesirsel integralin sol tersidir. Yani $\Re(\alpha) > 0$ ve $f(x) \in L_p(a,b)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ olmak üzere,

$$\left(D^{\alpha}_{a+} I^{\alpha}_{a+} f\right)(x) = f(x) \text{ve} \left(D^{\alpha}_{b-} I^{\alpha}_{b-} f\right)(x) = f(x) \quad (\Re(\alpha) > 0) \tag{2.17}$$

  eşitlikleri, $[a,b]$ aralığında hemen hemen her yerde geçerlidir.

- $\Re(\alpha) > \Re(\beta) > 0$ ise $f(x) \in L_p(a,b)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ için

$$\left(D^{\beta}_{a+} I^{\alpha}_{a+} f\right)(x) = I^{\alpha-\beta}_{a+} f(x) \text{ ve } \left(D^{\beta}_{b-} I^{\alpha}_{b-} f\right)(x) = f(x) \quad \Re(\alpha) > 0. \tag{2.18}$$

  eşitlikleri $[a,b]$ aralığında hemen hemen her yerde geçerlidir.

- $\Re(\alpha) > 0$, $n = [\Re(\alpha)] + 1$ ve $f_{n-\alpha}(x) = \left(I^{n-\alpha}_{a+} f\right)(x)$, $n-\alpha$ mertebeden kesirsel integral olmak üzere,
  $1 \ll p \ll \infty$ ve $f(x) \in I^{\alpha}_{a+} L_p$ ise

$$(I^{\alpha}_{a+} D^{\alpha}_{a+} f)(x) = f(x), \tag{2.19}$$

eşitliği $[a, b]$ aralığındaki hemen hemen her yerde geçerlidir.

2.1.4 Caputo kesirsel türevi

Özellikle başlangıç değer problemlerinde, kesirsel türev tanımı olarak sıkça karşılaşılan bir diğer yaklaşım Caputo'ya aittir. Caputo kesirsel mertebeden türevi aşağıdaki şekilde tanımlanır(Gorenflo and Mainardi, 2008; Podlubny, 1999):

Tanım 2.1.4.1. *$\Re(\alpha) \geq 0$ olmak üzere, $y(x) \in AC^n[a, b]$ ise, $({}^C D^\alpha_{a+} y)(x)$ ve $({}^C D^\alpha_{b-} y)(x)$ Caputo kesirsel türevleri $[a, b]$ kapalı aralığı reel eksen $\mathbb{R}$'de hemen her yerde tanımlıdır.*

$\alpha \notin \mathbb{N}_0$ ise,

$$({}^C D^\alpha_{a+} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{y^{(n)}(t)dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} =: (I^{n-\alpha}_{a+} D^n y)(x) \tag{2.20}$$

ve

$$({}^C D^\alpha_{b-} y)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{y^{(n)}(t)dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} =: (-1)^n (I^{n-\alpha}_{b-} D^n y)(x) \tag{2.21}$$

eşitlikleri ile tanımlıdır, burada $I^{n-\alpha}_{a+}$ ve $I^{n-\alpha}_{b-}$ sırasıyla sol ve sağ R-L kesirsel integralleri ve $D = d/dx$ ve $n = [\Re(\alpha)] + 1$dir.

(2.20) ve (2.21) tanımlarından, c keyfi bir sabit olmak üzere

$$({}^C D^\alpha_{a+} c)(x) = 0 \quad \text{ve} \quad ({}^C D^\alpha_{b-} c)(x) = 0 \tag{2.22}$$

olduğu anlaşılır. Bu sonuç, Caputo türevini, (2.16) tanımı ile verilen sabitin RL kesirsel türevinden ayıran bir diğer özelliktir.

Caputo kesirsel türev operatörü için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

- $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ için,

$$({}^C D^\alpha_{a+} y)(x) = y^{(n)} \text{ve} ({}^C D^\alpha_{b-} y)(x) = y^{(n)} \tag{2.23}$$

ifadesi vardır. Özel olarak $\alpha = 0$ için

$$({}^C D^0_{a+} y)(x) = ({}^C D^0_{b-} y)(x). \tag{2.24}$$

eşitliği sağlanır.

- $\alpha \in \mathbb{C}$ mertebesinden Riemann-Lioville kesirsel türev operatörleri $(D^{\alpha}_{a+}y)(x)$ ve $(D^{\alpha}_{b-}y)(x)$ sırasıyla (2.12) ve (2.13) eşitlikleri ile tanımlansın. α mertebesinden $({}^{C}D^{\alpha}_{a+}y)(x)$ ve $({}^{C}D^{\alpha}_{b-}y)(x)$ türevleri, Riemann-Lioville kesirsel türevi cinsinden sırasıyla

$$({}^{C}D^{\alpha}_{a+}y)(x) := \left(D^{\alpha}_{a+}\left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{y^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k\right]\right)(x) \tag{2.25}$$

ve

$$({}^{C}D^{\alpha}_{b-}y)(x) := \left(D^{\alpha}_{b-}\left[y(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{y^{(k)}(b)}{k!}(b-t)^k\right]\right)(x) \tag{2.26}$$

şeklinde ifade edilir. Burada, $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ için $n = [\Re(\alpha)] + 1$ ve $\alpha \in \mathbb{N}_0$ için $n = \alpha$ dır. (2.25) ve (2.26) tanımlarından hareketle, Caputo kesirsel türev operatörünün, etki ettiği fonksiyonun tamsayı mertebeden türevlerine ve başlangıç koşullarına bağlığı görülür.

- Caputo türevinin, tamsayı mertebeli türevlerle ilişkisi aşağıdaki eşitlikle verilir:

$$\lim_{\alpha\to n}({}^{C}D^{\alpha}_{a+}y)(x) = y^{(n)}(a) + \int_a^x y^{(n+1)}(t)dt = y^{(n)}(x), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.27}$$

(2.16) özelliğine göre sabitin RL kesirsel türevinin sıfırdan farklı olması dengedeki bir sistem için enerji kaybının varlığının bir göstergesidir. Bununla birlikte (2.27) özelliğinden dolayı Caputo kesirsel mertebeli diferansiyel denklemlerin başlangıç koşulları bilinen adi diferansiyel denklemlerde kullanılan koşullar gibi tamsayı mertebeli şekilde yazılabilirken RL kesirsel mertebeli bir diferansiyel denklemin başlangıç koşulları fonksiyonun kesirsel türevlerinin o noktadaki limit durumlarıyla belirlenir. RL kesirsel türev tanımının bu karakteri fiziksel olmayan başlangıç değerlerinin ortaya çıkmasına neden olur. Bu anlamda kesirsel matematiğin Caputo formülasyonu mekanik sistemlerin başlangıç değer problemlerini temsil etmesi açısından daha elverişlidir. Caputo kesirsel türevinin mekanik sistemlerin başlangıç değer problemlerini daha iyi ifade etmesi, RL kesirsel türevinin fiziksel bir karşılığı olmadığı anlamına gelmez. RL kesirsel türevi de elektrodinamikteki gerçek fiziksel sistemlerin tasvirinde kendiliğinden ortaya çıktığı görülmektedir. Örneğin, dielektrik bir ortam içerisindeki elektromanyetik alanlar, Riemann-Liouville zaman-kesirsel diferansiyel denklemleri ile ifade edilir (Podlubny, 1999; Tarasov, 2010).

Caputo kesirsel türevinin tanımı, n. mertebeden türevin mutlak integrallenebilir olmasını gerektirdiği için, RL kesirsel türev tanımına göre daha kısıtlayıcıdır.

Caputo kesirsel türevi tanımında, öncelikle adi türevi takiben bir kesirsel integral hesaplanarak istenen kesirsel türeve ulaşılırken, RL kesirsel türev tanımında bu işlemler ters sırada gerçekleşir (Tarasov, 2010).

2.2 Kesirsel Türev ve İntegrallerin Laplace Dönüşümleri

Kesirsel mertebeden türev ve integral denklemlerin çözümlerinde çeşitli yöntemler kullanılmaktadır. Bunlardan biri de Laplace dönüşüm yöntemidir. Bu bölümde, kesirsel türev ve integrallerin Laplace dönüşümlerine kısaca değinilecektir.

Kesirsel diferansiyel denklemlerin Laplace dönüşüm yöntemi ile çözümlerinde türev ve konvolüsyon operatörlerinin Laplace dönüşümlerine ihtiyaç duyulmaktadır. $\varphi \in C^k(\mathbb{R}^+)$ olmak üzere, φ fonksiyonunun k. mertebeden adi türevinin Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}[D^k\varphi(t)](s) = s^k(\mathcal{L}\varphi)(s) - \sum_{j=0}^{k-1} s^{k-j-1}(D^j\varphi)(0) \quad (k \in \mathbb{N}) \tag{2.28}$$

eşitliği ile tanımlanır. Diğer taraftan $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $h(t)$ ve $\varphi(t)$ fonksiyonlarının $\mathbb{R}^+$ üzerindeki konvolüsyon operatörü

$$h * \varphi = (h * \varphi)(x) := \int_0^x h(x-t)\varphi(t)dt \tag{2.29}$$

ile tanımlıdır. Uygun h ve φ fonksiyonları için (2.29) konvolüsyonunun Laplace dönüşümü için

$$(\mathcal{L}(h * \varphi))(s) = (\mathcal{L}h)(s)(\mathcal{L}\varphi)(s) \tag{2.30}$$

eşitliği geçerlidir.

(2.3) ve (2.4) eşitlikleri ile verilen RL integral tanımları doğrultusunda, $\Re(\alpha) > 0$ için kesirsel mertebeden I^α_{a+} integrali, iki fonksiyonun konvolüsyonu olarak

$$I^\alpha_{a+}f(x) = \left[f(x) * \frac{x_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right], \quad \Re(\alpha) > 0 \tag{2.31}$$

yazılır. Buradan, Laplace dönüşümü yönteminin (2.30) eşitliği ile verilen konvolüsyon özelliği kullanılarak kesirsel mertebeden I^α_{a+} RL integrali için

$$(\mathcal{L}[I^\alpha_{a+}f(x)](s) = s^{-\alpha}(\mathcal{L}f)(s) \tag{2.32}$$

yazılabilir. Burada

$$\mathcal{L}\left[\frac{x_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right] = s^{-\alpha} \tag{2.33}$$

eşitliği kullanılmıştır(Samko et al, 1993).

Riemann-Liouville kesirsel türevi için Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}[D_{a+}^{\alpha} f](s) = \mathcal{L}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^n I_{0+}^{n-\alpha} f\right](s)$$

$$= s^{\alpha}(\mathcal{L}f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} D^k (I_{0+}^{n-\alpha} y)(0+) \tag{2.34}$$

eşitliği ile tanımlanır.

Herhangi bir $b > 0$ için $\alpha > 0$, $n-1 < \alpha \leq n$ $(n \in \mathbb{N})$ olmak üzere $y(x) \in C^n(\mathbb{R}^+)$, $y^{(n)}(x) \in L_1(0,b)$ için $(\mathcal{L}y)(s)$ ve $\mathcal{L}[D^n y(t)]$ Laplace dönüşümleri tanımlı ise Caputo kesirsel türevinin Laplace dönüşümü

$$(\mathcal{L}\, {}^C D_{0+}^{\alpha} y)(s) = s^{\alpha}(\mathcal{L}y)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1}(D^k y)(0), \tag{2.35}$$

eşitliği ile tanımlanır (Kilbas et al, 2006).

(2.34) eşitliğinden görüldüğü üzere Riemann-Lioville kesirsel türevinin Laplace dönüşümünde, başlangıç koşullarının kesirsel mertbeden ifade edilmesi, fiziksel yorum açısından zorluk yaratmaktadır. Buna karşılık (2.35) eşitliği ile verilen Caputo türevlerinin Laplace dönüşümünde, başlangıç koşulları, fiziksel olarak yorumlanabilen tamsayılı türev mertebesi cinsinden ifade edilmektedir (Podlubny, 1999).

Karmaşık süreçlerde ortaya çıkan standart yaklaşımlardaki üstel fonksiyon kadar önem arz eden Mittag-Leffler (ML) fonksiyonu, bu çalışmanın "Ek-C" bölümünde verilmektedir.

3. KESİRSEL DİFERANSİYEL VE İNTEGRAL HESAP VE KÜMÜLATİF SÜREÇLER

Bu bölümde, geleneksel türev ve integral tanımlarını da kapsayan genelleştirilmiş operatörler olarak kesirsel differintegral operatörlerinin temelindeki fiziksel mekanizma kümülatif küçülme/büyüme süreci ile ortaya konmaktadır. Fraktal bir uzayda ve bellek etkilerini itibara alan, başka bir deyişle, Markoviyen olmayan bir bellekle gelişen bir süreç için doğru tasvirin Fibonacci yaklaşımı ile olduğu sergilenmektedir (Büyükkılıç et al, 2016; Sigler, 2002).

Fibonacci yaklaşımı, zamanla evrilen bir süreçte, topluluk elemanlarının bir n. adımındaki sayısı olan F_n'nin, önceki adımlardan bağımsız olmayıp, kendinden önceki iki ardışık Fibonacci sayılarının toplamı olarak yazılabileceğini işaret eder. Böylece Fibonacci sayıları için tekrarlama bağıntısı

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \tag{3.1}$$

şeklinde yazılır. (3.1) bağıntısını sağlayan Fibonacci sayılarının sağladığı karakteristik denklem

$$\lambda^2 = \lambda + 1 \tag{3.2}$$

ile verilir. Bu denklemin bir kökü, değeri $\phi \approx 1.61803$ olan altın orandır. Fibonacci sayılarının, altın oranın kuvveti formunda ve başlangıç değeri F_0 olmak üzere

$$F_n = \phi^n F_0 \tag{3.3}$$

formunda yazılacağı gösterilmiştir (Büyükkılıç and Demirhan, 2008a,b). Bu eşitlik, standart saymada olmayan bellek etkisinin bir sonucudur. Buradan hareketle zaman ve mekanın kesikli olduğu bir aşınma/büyüme süreci, Fibonacci yaklaşımını barındıran, kümülatif azalmalar/artmalar bağlamında ele alınabilir. Böylece standart küçülme/büyüme süreçlerinde ihmal edilen bellek etkileri ve uzayın kesikliliği gerçeğini, kümülatif yaklaşımın içermesi beklenmektedir.

3.1 Kümülatif Süreçlerin Operatör Modeli

Fraktal bir uzayda, Markoviyen olmayan bir bellekle zaman içinde evrilen bir sürecin kümülatif gelişiminin genel bir tasvirini yapmak üzere, bu süreçlerin, operatörler cinsinden matematiksel olarak ele alınması yerinde olur. Bu çerçevede bir niceliğin, kesikli Δt zaman aralıklarında kümülatif olarak gelişim mekanizmasının n adımda tasvir edildiği bir süreç şu algoritma ile ele alınsın. $t = 0$'da sözkonusu niceliğin başlangıç değeri A_0 olsun. Bu süreçte r. adımdaki A_r miktarı, $\hat{B}$ operatörünün A_{r-1}'e etki etmesiyle elde edilen miktarın, A_{r-1}'den çıkarılması/toplanması ile elde edilsin. O halde n adımlı bir süreç, bir $\hat{B}$ operatörü cinsinden

$$\begin{aligned}
\text{0.adım;} \quad A_0 &= A_0 \\
\text{1.adım;} \quad A_1 &= A_0 - \hat{B}A_0 = \hat{C}A_0 \\
&\vdots \\
\text{r.adım;} \quad A_r &= A_{r-1} - \hat{B}A_{r-1} = \hat{C}^r A_0 \\
&\vdots \\
\text{n.adım;} \quad A_n &= A_{n-1} - \hat{B}A_{n-1} = \hat{C}^n A_0
\end{aligned} \tag{3.4}$$

bağıntısı ile ifade edilir. Böylece gelecekteki bir A_n niceliği ile başlangıç niceliği A_0 arasındaki ilişki

$$\hat{C}^n = (1 - \hat{B})^n \tag{3.5}$$

operatörü ile sağlanmış olur. $\hat{C}$ operatörünün n. kuvveti olan $\hat{C}^n$ operatörlerinin A_0 niceliği üzerinde etkisini görmek üzere $\hat{C}^n$, binom serisine açılırsa

$$\hat{C}^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\hat{B})^k \tag{3.6}$$

yazılır. Burada $\binom{n}{k}$'lar binom katsayılarıdır. (3.6) denklemi, (3.4) denkleminde yerine konulursa

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\hat{B})^k A_0 \tag{3.7}$$

eşitliği elde edilir. (3.7) denklemindeki binom katsayıları için $(-1)^k \binom{n}{k} = \frac{\Gamma(k-n)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-n)}$ eşitliği kullanılır. Sonuç olarak, n. adımda; $t = n\Delta t$ süre sonra, gelecekteki bir A_n değerinin, başlangıç değeri A_0 cinsinden ifadesi

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k-n)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-n)} \hat{B}^k A_0 \tag{3.8}$$

Gama fonksiyonları ve $\hat{B}$ operatörü ile belirlenmiş olur.

(3.5) eşitliği ile tanımlanan operatörün tersi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\hat{C}^{-n} = (1 - \hat{B})^{-n} \tag{3.9}$$

Kümülatif gelişim sürecinin tersinir olduğu düşünülerek, (3.4) bağıntısında, eşitliğin her iki yanına (3.9) ile tanımlanan tersinir operatör etki ettirilirse

$$A_0 = (1 - \hat{B})^{-n} A_n \tag{3.10}$$

elde edilir. Böylece (3.10) eşitliğinden, başlangıç miktarı A_0'ın, gelecekteki A_n değerleri cinsinden belirlenebileceği görülür. (3.10) eşitliğini daha açık olarak ifade etmek üzere, negatif binom açılımı olan $(-1)^k \binom{-n}{k} = \binom{n+k-1}{k}$ ifadesi kullanılarak

$$A_0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k-1}{k} \hat{B}^k A_n. \tag{3.11}$$

yazılır. (3.11) eşitliğinde, Gama fonksiyonunun özellikleri kullanılarak başlangıçtaki değer, gelecekteki değerler cinsinden

$$A_0 = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n)} \hat{B}^k A_n \tag{3.12}$$

şeklinde yazılır. Böylece operatör tekniği ile başlangıçtaki fiziksel nicelik A_0 ile gelecekteki bir A niceliği arasındaki bağıntılar teşkil edilmiş olunur.

3.2 Diferansiyel ve İntegral Hesabın Kümülatif Yaklaşımla Ele Alınması

Bölüm-2'de verilen kesirsel matematiğin differintegral bağıntıları matematiksel tanımlardan ibarettir. Bu kısımda bu tanımların temelinde yatan fiziksel mekanizma kümülatif yöntemle ve operatör tekniği ile ortaya konmaktadır. Böylece, kesirsel matematiğin karmaşık fiziksel olayları tasvir etmedeki başarısının temelinde Fibonacci yaklaşımının olduğu sonucu elde edilmektedir.

Bölüm-3 Kesim-1'de ele alınan kümülatif gelişim sürecinde $\hat{B}$ operatörü yerine

$$\hat{B} = e^{-\Delta t \hat{D}} \tag{3.13}$$

alınsın. Burada $\hat{D}$ operatörü bir türev operatörü olmak üzere, $\hat{B}$ operatörü bir öteleme operatörü tanımlar. $\hat{B}$ operatörünün $A(t)$'ye etkisi

$$\hat{B}A(t) = e^{-\Delta t \hat{D}} A(t) = A(t - \Delta t) \tag{3.14}$$

biçiminde tanımlanır. Başka bir ifadeyle, $\hat{B}$ operatörü, $A(t)$ yi $A(t - \Delta t)$ değerine taşır. Burada her bir $\Delta t, 2\Delta t, ..., n\Delta$ zaman artışlarında A_0'ın kümülatif olarak gelişimi

$$\begin{array}{lrcl} \text{0.adım;} & A_0 & = & A_0 \\ \text{1.adım;} & A_1 & = & A_0 - e^{-\Delta t \hat{D}} A_0 = \hat{C} A_0 \\ \text{2.adım;} & A_2 & = & A_1 - e^{-\Delta t \hat{D}} A_1 = \hat{C}^2 A_0 \\ \vdots & & \vdots & \\ \text{n.adım;} & A_n & = & A_{n-1} - e^{-\Delta t \hat{D}} A_{n-1} = \hat{C}^n A_0 \end{array} \tag{3.15}$$

ile ifade edilir. Böylece gelecekteki bir A_n değeri ile başlangıç değeri A_0 arasındaki bağıntı elde edilir. Geçmiş ile gelecek arasındaki bağıntı, $\hat{C}$ operatörü

$$\hat{C} = (1 - e^{-\Delta t \hat{D}}). \tag{3.16}$$

ile kurulmaktadır. Buradan,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\hat{C}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - e^{-\Delta t \hat{D}}}{\Delta t} = \hat{D} \tag{3.17}$$

eşitliği ile $\hat{D}$ türev operatörü elde edilir. n. mertebeden türevi ifade edebilmek amacıyla $\hat{C}^n$ operatörü Binom serisine açılarak

$$\hat{C}^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-e^{-\Delta t \hat{D}})^k \tag{3.18}$$

yazılır. (3.18) toplamı ile verilen operatör, (3.15) bağıntısında yerine konulursa

$$A_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-e^{-\Delta t \hat{D}})^k A_0(t). \tag{3.19}$$

bulunur. (3.13) ifadesi ile tanımlanan $\hat{B}$'nin öteleme operatörü olduğu göz önünde tutularak, operatörün k defa uygulanması sonucu

$$(e^{-\Delta t \hat{D}})^k A_0(t) = A_0(t - k\Delta t). \tag{3.20}$$

elde edilmiş olur. Bu durumda (3.19) eşitliği

$$A_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} A_0(t - k\Delta t). \tag{3.21}$$

şeklinde ifade edilir. (3.21) eşitliği, kesikli bir fonksiyonun n.mertebeden kesikli türevinin hesaplanabilmesine imkan sağlar. Ayrıca türev operatörünün, kümülatif olarak gelişen bir süreçten yola çıkılarak elde edilen bir operatör olduğunu göstermesi bakımından önemlidir.

Bunu bir örnek üzerinde görebilmek için $A(t) = t^k$ sürekli fonksiyonun tamsayılar üzerine kısıtlanması ile elde edilmiş

$$A_n = n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1) \tag{3.22}$$

kesikli fonksiyonu ele alınsın. (3.21) eşitliği ile verilen türev ifadesinden, bir niceliğin 1.türevine karşılık gelen $n = 1$ durumunda,

$$A_1(t) = A_0(t) - A_0(t - \Delta t) \tag{3.23}$$

eşitliği sağlanmalıdır. (3.22) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} A_1(t) &= t(t+\Delta t)\dots(t+(k-1)\Delta t) - (t-\Delta t)\dots(t+(k-2)\Delta t) \\ &= t(t+\Delta t)\dots(t+(k-2)\Delta t)[(t+(k-1)\Delta t) - (t-\Delta t)] \\ &= k\Delta t(t+\Delta t)(t+2\Delta t)\dots(t+(k-2)\Delta t) \end{aligned} \tag{3.24}$$

elde edilir. (3.24) eşitliğinin her iki tarafı $1/\Delta t$ ile çarpılarak $\Delta t \to 0$ için

$$\frac{dA(t)}{dt} = kt^{k-1} \tag{3.25}$$

elde edilir. Buradan hareketle kesikli bir fonksiyonun n. mertebeden türevinin ifadesi olan (3.21) eşitliği tümevarım yoluyla elde edilir.

Kümülatif yaklaşımla elde edilen (3.21) tanımından türev hesabına geçebilmek için (3.23) denklemi Δt ye bölünür ve $\Delta t \to 0$ limiti alınır. Bu durumda

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{A_1(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A_0(t) - A_0(t-\Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\hat{C}}{\Delta t} A_0(t) \tag{3.26}$$

olur. Buradan

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{A_1(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\hat{C}}{\Delta t} A_0(t) \tag{3.27}$$

eşitliği elde edilir. (3.17) denklemi ile verilen türev tanımı göz önünde tutularak, (3.26) denklemindeki indisler limit durumunda geçerliliğini kaybeder ve

$$\frac{d}{dt} A(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\hat{C}}{\Delta t} A(t) \tag{3.28}$$

yazılır. Bu yaklaşımla, (3.21) seri toplamı bir $A(t)$ fonksiyonun daha yüksek mertebeden türev tanımlarını kapsayacak şekilde genelleştirilir. Bu amaçla $\hat{C}^n$ seriye açılarak türev için

$$\frac{d^nA(t)}{dt^n} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{A_n}{(\Delta t)^n} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(e^{-\Delta t\hat{D}})^kA_0(t). \tag{3.29}$$

serileri yazılabilir. (3.29) eşitliğinde limit işleminini Δt yerine başka bir değişken üzerinden yapmak için $[0,t]$ aralığı

$$\Delta t \equiv \frac{t-0}{N}, \quad N = 1,2,\ldots,n \tag{3.30}$$

ile tanımlansın. $\Delta t \to 0$ için $N \to \infty$ sağlanacağından ve Binom katsayılarında $k > n$ için $\binom{n}{k} = 0$ olduğundan, (3.29) ifadesi, n. mertebeden türev eşitliği için

$$\frac{d^nA(t)}{dt^n} = \lim_{N\to\infty}(\frac{t}{N})^{-n}\sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k\binom{n}{k}A(t-k\frac{t}{N}) \tag{3.31}$$

elde edilir.

Benzer yaklaşımla, integral tanımını bir seri toplamı olarak elde etmek üzere, kümülatif olarak gelişen bir süreç için gelişim operatörünün tersi ile ifade edilen (3.10) eşitliği göz önüne alınsın. Bu durumda (3.12) denkleminde, $\hat{B} = e^{-\Delta t\hat{D}}$ diferansiyel öteleme operatörü alınırsa

$$A_0(t) = \sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n)}(e^{-\Delta t\hat{D}})^kA_n(t) \tag{3.32}$$

elde edilir. Bu durumda $\hat{B}$ öteleme operatörünün k defa uygulanmasıyla

$$(e^{-\Delta t\hat{D}})^kA_n(t) = A_n(t-k\Delta t) \tag{3.33}$$

eşitliğine ulaşılır.

İntegral ve türev tanımlarını tek bir formülle birleştirmek üzere, (3.30) tanımı göz önünde bulundurularak, başlangıç değeri ve A_n değerleri arasındaki ilişki

$$A_0(t) = \sum_{k=0}^{N-1}\frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n)}A_n(t-k\Delta t) \tag{3.34}$$

serisi ile N'e bağlı olarak ifade edilir. Bu eşitlik bir önceki bölümde elde edilen (3.21) ifadesinin integral karşılığıdır. Dolayısıyla (3.34) eşitliği kesikli bir fonksiyonun n. mertebeden kesikli integralinin hesaplanmasına olanak sağlar. Ayrıca integral operatörünün kümülatif olarak gelişen bir süreçten yola çıkılarak elde edilen bir operatör olduğunu göstermesi bakımlarından önem arz eder.

Bir uygulama olarak, kümülatif yaklaşımla elde edilen (3.34) seri toplamı, bir fonksiyonun kesikli integralini elde etmek üzere kullanılsın. $n = 1$ durumu olan

$$A_0(t) = \sum_{j=0}^{N-1} A_1(t - j\Delta t) \tag{3.35}$$

eşitliği göz önüne alınsın. Bu toplam, (3.22) ile verilen kesikli kuvvet fonksiyonu için

$$A_0(t) = \sum_{j=0}^{N-1} (t - j\Delta t)(t - (j+1)\Delta t)\dots(t - (j+k-1)\Delta t) \tag{3.36}$$

formunda ifade edilir. (3.36) eşitliğini integral kalkulüsün temel teoreminin kesikli özdeşi olarak (Bender and Orszag, 1999) $\Delta t \sum_{k=n_0}^{N-1} X_j = g_{n+1} - g_n$ formunda yazabilmek için toplamın sınırı değiştirilerek, 1.mertebeden kesikli integral için

$$\begin{aligned}
A_0(t) &= \sum_{j=n_0}^{N-1} (t - j\Delta t)(t - (j+1)\Delta t)\dots(t - (j+k-1)\Delta t) \\
&\times \frac{[(t - (j-1)\Delta t)) - (t - (j+k)\Delta t]}{(k+1)\Delta t} \\
&= \frac{1}{(k+1)\Delta t} \sum_{j=n_0}^{N-1} [(t - (j-1)\Delta t)(t - j\Delta t)\dots(t - (j+k-1)\Delta t) \\
&- (t - j\Delta t)\dots(t - (j+k)\Delta t)] \qquad (3.37) \\
&= \frac{1}{(k+1)\Delta t} [t - (N-1)\Delta t)(t - N\Delta t)\dots(t - (N+k-1)\Delta t)] + c_0
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada c_0 değeri
$c_0 = -\frac{1}{(k+1)\Delta t} [t - (n_0 - 1)\Delta t)(t - n_0\Delta t)\dots(t - (n_0 + k - 1)\Delta t)]$'dir.

(3.37) eşitliğinin her iki tarafı, integral tanımı gereği Δt ile çarpılarak $\Delta t \to 0$ için tanım, sürekli integral formülü

$$\frac{d^{-1}A(t)}{dt^{-1}} = \int_0^a x^k = \frac{x^{k+1}}{(k+1)} + c_0 \tag{3.38}$$

ile çakışır. Bu durumda (3.34) eşitliğini yüksek mertebeye genelleştirmek üzere her iki tarafı $(\Delta t)^n$ ile çarpılırsa

$$\frac{A_0(t)}{(\Delta t)^{-n}} = (\frac{t}{N})^n \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(n+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n)} A_n(t - k\Delta t) \tag{3.39}$$

eşitliği elde edilir. Böylece $N \to \infty$ limit durumunda $A(t)$'nin n-katlı integrali

$$\frac{d^{-n}A(t)}{dt^{-n}} = \lim_{N\to\infty} (\frac{t}{N})^{n} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{k+n-1}{k} A(t-k\frac{t}{N}) \tag{3.40}$$

olarak elde edilir.

Nihayetinde, Binom katsayılarının özellikleri yardımıyla (3.31) denklemi ile verilen n. mertebeden türev ifadesinin seri formu

$$\frac{d^{n}A(t)}{dt^{n}} = \lim_{N\to\infty} (\frac{t}{N})^{-n} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k-n)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-n)} A(t-k\frac{t}{N}) \tag{3.41}$$

şeklinde yazılır. n. mertebeden integralin seri ifadesi ise

$$\frac{d^{-n}A(t)}{dt^{-n}} = \lim_{N\to\infty} (\frac{t}{N})^{n} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k+n)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n)} A(t-k\frac{t}{N}) \tag{3.42}$$

olarak elde edilir.

(3.31) ve (3.42) ifadeleri ile verilen sırasıyla n. mertebeden türev ve n. mertebeden integral formüllerini keyfi bir q mertebesine genelleştirmek mümkündür. Ayrıca bu iki tanım kullanılarak, bir $A(t)$ fonksiyonun keyfi bir q mertebesinden differintegralini ifade eden yani kesirsel mertebeden türev ve integral işlemlerini tek bir formülde birleştiren

$$\frac{d^{\pm q}A(t)}{dt^{\pm q}} = \lim_{N\to\infty} (\frac{t}{N})^{\mp q} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Gamma(k\mp q)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\mp q)} A(t-k\frac{t}{N}). \tag{3.43}$$

eşitliği elde edilir. Burada, q mertebesi, kesirsel türev işlemi için " +" işaretli, kesirsel integral işlemi için " -" işaretli alınmaktadır. Tarafımızca, kümülatif yaklaşımla elde edilen (3.43) formülünün, literatürde bilinen ve Bölüm-2 Kesim-1'de (2.1) eşitliği ile verilen Grünwald differintegral tanımı ile çakıştığı görülmektedir (Oldham and Spanier, 1974).

Differintegralin kümülatif metodla ve operatör tekniği ile tarafımızdan elde edilmesi ayrıntılı olarak (Büyükkılıç et al, 2016) kaynağında verilmektedir.

Sonuç olarak bu çalışma ile kümülatif azalma ve artma süreçlerinin operatör modelinden hareketle, kesirsel matematiğin temel anahtar formülleri olan differintegral operatör tanımları matematiksel olarak elde edilmektedir. Böylece, kesirsel matematiğin differintegral tasvirlerinin altında yatan fiziksel mekanizmanın kümülatif artmalar/azalmalar ve Fibonacci yaklaşımı olduğu sonucuna varılmaktadır.

Fiziksel süreçlerin, Öklidiyen bir uzayda, Markoviyen bir bellekle ele alındığı standart yaklaşımlarda, sürecin uzun zaman bellek etkileri ve uzayın fraktallığı ihmal edilmektedir. Bize göre, kümülatif yaklaşımın kesikli ve her adımın, önceki adımlarla ilişkilendirildiği rekürans karakterinin bir sonucu olarak, bellek etkileri ve uzayın fraktallığı doğal olarak kendini göstermektedir. Bu nedenle karmaşık sistemlerin dinamiğini tasvir edilebileceği düşünülmektedir.

4. KÜMÜLATİF AŞINMA VE KESİRSEL MATEMATİK

4.1 Bir Aşınma Probleminin Kümülatif Modeli

Bölüm-3'de matematiksel operatörler cinsinden tasviri yapılan kümülatif gelişim süreci bu bölümde, zaman içinde aşınan ve başlangıçta çevre ile etkileşmesi göz ardı edilen bir fiziksel niceliğin kesikli dinamiği olarak, kümülatif azalmalar bağlamında ele alınmaktadır. Neticede, incelenen niceliğin başlangıç değeri ve gelecekte ulaşacağı büyüklük arasındaki ilişki elde edilmektedir. Kesikli zaman değişkeninde yeterince büyük adım sayılarına ulaşıldığında, başka bir deyişle uzun süren gözlem sonunda, ele alınan fiziksel niceliğin davranışı Mittag-Leffler fonksiyonu ile ilişkilendirilmektedir. Ayrıca bir aşınma sürecini tasvir eden oran denkleminin çözümü kesirsel matematik çerçevesinde ele alınmakta ve kümülatif yaklaşımla elde edilen çözümle ilişkisi kurulmaktadır.

Fiziksel sistemlerin bölünerek, aşınarak küçülmesi ya da artarak büyümesi doğada gözlemlenen süreçlerdir. Karmaşık, stokhastik sistemlerin örnekleri deprem, yangın, çığ, borsa endeksi, kanserli hücre, nüfus dinamiğinin gelişimleri, meteorolojik hareketler, trafiğe çıkan araç sayısının gelişimi v.b. kümülatif davranışlar sergilerler. Bu gibi süreçlerin tasviri, zaman ve mekanın kesikli olduğu bir aşınma süreci olarak kümülatif küçülme mekanizması ile ele alınabilir (Büyükkılıç and Demirhan, 2008a,b).

Fibonacci anlayışı bizim çalışmamızın dayandığı temel felsefedir. Bu anlayıştan hareketle, viskoz olmayan bir ortamda gelişen, başka bir deyişle, çevrenin sisteme olan etkisinin göz ardı edildiği bir azalma sürecinin kesikli modeli kümülatif yaklaşımla şu şekilde ele alınmaktadır. Matematiksel operatörlerin özellikleri kullanılarak, Bölüm-3 Kesim-1'de inşa edilen kümülatif küçülme süreci, bir özdeğer-özvektör denklemi olarak aşağıdaki gibi ele alınabilir:

$$\hat{B}A_n(t) = \lambda \Delta t A_n(t). \tag{4.1}$$

Bu eşitliğe göre, $\hat{B}$ operatörünün $A_n(t) = A(n\Delta t)$ durumları üzerine etki etmesi sonucu $\lambda\Delta t$ öz değeri elde edilmektedir. Bölüm-3 Kesim-1'de tasvir edilen kümülatif sürece göre, başlangıç olarak gözlenen, örnek olarak bozunan nükleer madde ya da aşınan, eksilen, kütle, hız, sermaye v.b. gibi bir fiziksel nicelik $A(0) = A_0$

olsun. Bu nicelik λ aşınma yüzdesi ve Δt birim zaman artışlarıyla bir aşınmaya tabi olsun. n. adımda, yani $t = n\Delta t$ zaman sonra, A_0 niceliğinin ulaşacağı gelecekteki bir $A(n\Delta t)$ değerini bulunsun. Bu duruma göre $A(\Delta t)$

$$A(\Delta t) = (1 - \lambda\Delta t)A_0 = \phi A_0 \tag{4.2}$$

eşitliği ile verilir. Burada

$$\phi = (1 - \lambda\Delta t) \tag{4.3}$$

aşınma için gelişim operatörüdür. 2. adımda yani $2\Delta t$ süresinde ulaşılan miktar

$$A(2\Delta t) = (1 - \lambda\Delta t)A(\Delta t) = \phi A(\Delta t) \tag{4.4}$$

olur. n. adımda, bir tekrarlama bağıntısı olarak

$$A(n\Delta t) = \phi A((n-1)\Delta t) \tag{4.5}$$

elde edilir. Sırasıyla, $n = 0, 1, ..., n-1$ için $A(n\Delta t)$ ifadeleri ardışık denklemlerde yerine konularak, n adım sonraki $A(n\Delta t)$ niceliğinin, A_0 başlangıç niceliği ile ilişkisi

$$A(n\Delta t) = \phi^n A_0 \tag{4.6}$$

eşitliği ile hesaplanır. (4.3) eşitliği ile verilen operatör tanımı kullanılarak, (4.6) eşitliğinin sağ tarafı Binom serisine açılırsa,

$$A(n\Delta t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\lambda\Delta t)^k A_0 \tag{4.7}$$

elde edilir. Burada $\binom{n}{k}$'lar binom katsayılarıdır. (4.7) toplamında Binom katsayıları açık yazılırsa, kümülatif aşınma sürecinde, gelecekteki bir $A(n\Delta t)$ niceliği, başlangıç niceliği cinsinden yazılarak

$$A(n\Delta t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} (-\lambda\Delta t)^k A_0 \tag{4.8}$$

elde edilir. (4.8) eşitliğinde, kesikli zaman aralığı $\Delta t = t/n$ eşitliği kullanılarak, t zaman süresi cinsinden, gelecekteki bir $A(n\Delta t)$ niceliği için

$$A(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n(n-1)...(n-r+1)}{k! n^k} (\lambda t)^k A_0 \tag{4.9}$$

elde edilir. Denklem (4.9) yeniden düzenlenerek

$$A(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{Q(n,k)}{k!} (\lambda t)^k A_0 \tag{4.10}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $Q(n,k)$ fonksiyonu

$$Q(n,k) = \prod_{i=1}^{k} (1 - \frac{k-i}{n}) \tag{4.11}$$

eşitliği ile tanımlanmaktadır. Yeterince büyük n değerleri için, $Q(n,k) \to 1$ değerine yakınsar. Başka bir deyişle, adımlar sıklaşırsa, zaman sürekli hale gelir ve söz konusu dinamik sistemin gelecekteki bir $A(t)$ durumunun, $k! = \Gamma(k+1)$ özelliği kullanılarak, A_0 başlangıç durumu cinsinden ifadesi

$$A(t) = A_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\lambda t)^k}{\Gamma(k+1)} \tag{4.12}$$

olarak bulunur. Bir üstel fonksiyonun seri açılımı göz önüne alınırsa, (4.12) eşitliği

$$A(t) = A_0 \exp(-\lambda t) \tag{4.13}$$

formunda yazılır. Görüldüğü üzere (4.13) ifadesi

$$dA = -\lambda dt A. \tag{4.14}$$

oran denkleminin bir çözümüdür.

Yukarıda sözü edilen aşınma sürecinde, zaman değişkeninde sürekliliğe geçildiğinde, (4.13) eşitliği ile ifade edilen gelecek değer, Mittag-Leffler fonksiyonu (9.4) cinsinden

$$A(t) = A_0 E_1(-\lambda t) \tag{4.15}$$

eşitliği ile verilir. (4.15) eşitliğinden anlaşılacağı üzere, bir fiziksel niceliğin gelecekteki bir durumunun, başlangıçtaki durumu ile ilişkisi, ML fonksiyonunun bir özel formu olan üstel fonksiyon ile belirlenmektedir.

Şimdiki değerin gelecekteki değerlerden elde edilmesi pratikte gelecek henüz gerçekleşmediği için, bu uygulamanın ancak matematiksel olarak sürecin zaman tersinirliğini göstermesi bakımından değeri olur. Bu itibarla yeni bir uygulama olarak A'nın şimdiki değerinin gelecekteki değerlerinden elde edildiği durum göz önüne alınsın.

Özdeğer-özvektör problemi için, şimdiki değer gelecekteki değerler cinsinden

(3.11) denklemine göre

$$A_0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k+1}{k} (\lambda \Delta t)^k A(n\Delta t) \tag{4.16}$$

şeklinde yazılır. $t = n\Delta t$, için (4.16) denklemi

$$A_0 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^k} \binom{n+k+1}{k} (\lambda t)^k A(t) \tag{4.17}$$

formunda yazılır. n'nin çok büyük olması halinde başlangıçtaki A_0 ve gelecekteki değer $A(t)$ arasındaki ilişkiyi ifade eden (4.17) eşitliği ML fonksiyonu cinsinden

$$A_0 = E_1(\lambda t)A(t) \tag{4.18}$$

ya da

$$A_0 = e^{\lambda t} A(t) \tag{4.19}$$

şeklinde yazılır. Görülüyor ki gelecekteki değerden kümülatif bir artışla ilerleyerek başlangıç değerine ulaşmak mümkün olmaktadır. Bu da geriye dönüşün tersinir alındığı anlamına gelir. Ayrıca (3.10) ve (4.18) çözümlerinden, ML fonksiyonuna özel bir C^n operatörü olarak bakılabileceği anlaşılmaktadır.

4.1.1 Sabit katkılı bir kümülatif aşınma modeli

Bölüm-4 Kesim-1'de tanımlanan duruma ilave olarak bu bölümde, başlangıçtaki büyüklüğü A_0 olan bir niceliğin her adımda, bir P miktarının sisteme katıldığı bir kümülatif küçülme süreci ele alınacaktır. Bu tipteki bir kümülatif küçülme sürecinin de, Fibonacci yaklaşımı ile ifade edilebileceği gösterilecektir. Ayrıca bir t süresi sonunda, gelecekteki bir $A(n\Delta t)$ niceliğinin aşınarak tamamen sona ermesi için P katkısının ne olması gerektiği sorusuna cevap bulunacaktır. Bu durum, sabit katkılı bir kümülatif aşınma süreci olarak modellenen bir fiziksel sistemin denge durumlarının analizine karşılık gelir.

Sabit katkılı bir kümülatif aşınma sürecinde A_0 ve P nicelikleri, zaman içinde aynı aşınma sürecine tabi olan nicelikler ve ardışık aşınmalar sonunda elde kalan nicelikler $K_0, K(\Delta t), ..., K(n\Delta t)$ olsunlar. Bu özellikteki bir kümülatif aşınma süreci

$$\begin{array}{lll} \text{0. adım} & ; & K_0 = A_0 \\ \text{1. adım} & ; & K(\Delta t) = (1-\lambda\Delta t)K_0 - P = \phi A_0 - P \\ \text{2. adım} & ; & K(2\Delta t) = (1-\lambda\Delta t)K(\Delta t) - P = \phi K(\Delta t) - P = \phi^2 A_0 - (\phi+1)P \\ & \vdots & \qquad \vdots \\ \text{n. adım} & ; & K(n\Delta t) = \phi K((n-1)\Delta t) - P = \phi^n A_0 - (\phi^{n-1} + \ldots + 1)P \end{array} \tag{4.20}$$

şeklinde ifade edilir. Burada ϕ, (4.3) eşitliği ile verilen aşınma için gelişim operatörüdür. (4.20) süreci sembolik olarak iki niceliğin farkı şeklinde

$$K = L - T \tag{4.21}$$

eşitliği ile ifade edilsin. (4.21) eşitliğinde, L ve T, ϕ operatörü cinsinden sırasıyla

$$L = \phi^n A_0 \tag{4.22}$$

$$T = \sum_{k=0}^{n-1} \phi^k P \tag{4.23}$$

şeklinde tanımlanır.

(4.21) eşitliğindeki K birikim niceliği, herhangi bir adımda, sistemin başlangıç ve katkı niceliklerinin kümülatif olarak gelişimleri sonucunda, net birikimin eriştiği durumu ortaya koyan bir işleve sahiptir. Şöyle ki, n. adımda, $L > T$ durumunda, K birikim niceliği pozitif olduğundan birikmenin gerçekleştiği, $L = T$ durumunda, kalan K miktarı sıfır olduğundan, başlangıç ve katkı niceliklerinin ulaştıkları nicelikler için bir denge durumunun sağlandığı, $L < T$ için K birikim niceliği negatif olduğundan, sürecin sonucunda, başlangıç miktarındaki birikme ile katkı niceliğinin birikmesi kıyaslandığında azalmanın gerçekleştiğine ilişkin sonuçlar elde edilmektedir.

(4.22) eşitliği ile verilen ve n adım sonra, A_0 başlangıç değerinin ulaştığı değeri gösteren L ifadesi için

$$L(n\Delta t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\lambda\Delta t)^k A_0 \tag{4.24}$$

eşitliği ya da Binom katsayıları açıkça yazılarak yeterince büyük n sayısı için (4.12) ifadesine benzer şekilde

$$L(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\lambda t)^k}{\Gamma(k+1)} A_0 \tag{4.25}$$

eşitliği elde edilir. (4.25) ifadesi, tanımı (9.4) eşitliği ile verilen ML fonksiyonu cinsinden

$$L(t) = E_1(-\lambda t) A_0 \tag{4.26}$$

formunda ifade edilir.

Kümülatif küçülmelerde Fibonacci sayıları, sürecin tasviri için doğal ifade elemanları olarak görülebilir. Bu kapsamda, (4.22) ve (4.23) eşitlikleri ile verilen L ve T nicelikleri, paralel bir notasyon olarak Fibonacci sayıları ile ifade edilebilir. Bu amaçla zaman artışı $\Delta t = 1$ birim seçilerek, sürecin gelişiminin anlık bir tasviri için

$$L_n = F_n \tag{4.27}$$

ya da

$$F_n = (1-\lambda)^n A_0 \tag{4.28}$$

eşitliği yazılabilir. Burada F_n ler Fibonacci sayılarıdır (Sigler, 2002).

Benzer şekilde sabit katkı paylarının zaman içindeki birikimini ifade eden T niceliği de Fibonacci sayıları cinsinden

$$T_i = F_i \tag{4.29}$$

şeklinde yazılır. Buradan,

$$F_i = (1-\lambda)^i P \tag{4.30}$$

eşitliği yazılabilir. Böylece, ele alınan kümülatif aşınma süreci ve Fibonacci sayıları arasındaki matematiksel ilişki açıkça ortaya konmuş olur.

Kümülatif aşınma sürecinde başlangıç değerinin ve katkı paylarının ulaştığı birikim değerleri irdelenmeye devam edilebilir. Bu sürece tabi olan katkı paylarının n. adımda ulaştığı toplam T değeri, bir geometrik seri olduğundan kolaylıkla hesaplanır ve T toplamı için

$$T = \frac{1-\phi^n}{1-\phi} P \tag{4.31}$$

eşitliği elde edilir.

Kümülatif azalma sürecinde K birikim niceliğinin denge durumu olan, $K = 0$ yani $L = T$ koşulu tekrar ele alınsın. Bu durumda, (4.22) eşitliği ile verilen L ve

(4.31) eşitliği ile verilen T ifadelerinin eşitliğinden denge durumu için

$$P = \frac{\phi - 1}{\phi^n - 1} A_0 \tag{4.32}$$

elde edilir. Yeterince büyük n adım sonrasında (4.32) eşitliği için

$$P = P_0 \frac{z}{e^z - 1} \tag{4.33}$$

yazılır. Burada $P_0 = \frac{A_0}{n}$ ve $z = \lambda t$ alınmaktadır.

$z \ll 1$ için, (4.33) eşitliğindeki z değişkenine bağlı terim Maclaurin serisine açılarak

$$P \approx P_0 \left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12} + ...\right). \tag{4.34}$$

bulunur. Bu yaklaşıma göre $z \ll 1$ olması durumunda, yani aşınmanın çok zayıf ve t zaman süresinin çok kısa olduğu durum için

$$P \sim P_0 \tag{4.35}$$

yazılabilir. Bunun anlamı, her aşamada sisteme katılan P katkısının, adım başına düşen başlangıç niceliğini gösteren $P_0 = A_0/n$'ye yaklaşık olarak eşit olmasıdır. Bu durum sürecin kümülatif olarak gelişme etkisinin ihmal edilecek düzeyde seyrettiğini göstermektedir.

$z \gg 1$ olması durumunda ise her aşamada sürece katılan miktar için

$$P \sim P_0 z e^{-z} \tag{4.36}$$

denkliği vardır. Bu durumda, P_0 başlangıç niceliğinin kümülatif olarak aşınmasının bariz etkisi gözlemlenir.

Buraya kadar tasvir edilen, sabit katkılı bir kümülatif aşınma sürecinde, her adımda sürece bir kayıp terimi olarak dahil olan P niceliği kaynaklı ele alınan sistemin aşınması hızlanmıştır. Bu durumun aksine, kümülatif azalan bir sistemin daha uzun süre sürdürülebilirliğini sağlamak üzere, P niceliği, kümülatif azalma etkisine direnen, arttırıcı yönde katkı sağlayabilir. Bu durumda, K birikiminin değeri L ve T'nin farkı yerine toplamları olarak

$$K = L + T \tag{4.37}$$

alınır. Toplamın hesaplanması kümülatif birikim etkisini görmek açısından ilginçtir.

Bu durumda K birikim niceliği

$$K = \phi^n A_0 + (\phi^{(n-1)} + \phi^{(n-2)} + ... + 1)P \tag{4.38}$$

olur. Özel olarak başlangıç niceliği $A_0 = P$ değerinde olursa K birikimi bir seri toplamı olarak

$$K = \sum_{i=0}^{n} \phi^i P \tag{4.39}$$

yazılabilir. Böylece (4.39) eşitliği ile verilen toplam, bir geometrik seri oluşturduğundan,

$$K = \frac{1 - \phi^{(n+1)}}{1 - \phi} P \tag{4.40}$$

elde edilir. (4.40) ile verilen eşitlikte, $\phi < 1$'dir. Bu nedenle yeterince büyük bir n değeri için $\phi^{(n+1)} \to 0$ limiti sağlanır. Bu durumda K birikim değeri için

$$K = \frac{n}{z} P \tag{4.41}$$

elde edilir. $A_0 = P$ değeri göz önünde bulundurularak, bu eşitlikten, kümülatif olarak birikmenin gerçekleştiği gözlenmektedir. Ancak, sürecin gelişiminin kümülatif olarak gerçekleşmemesi durumunda sürecin sonundaki birikim, her adımda sürece eklenen katkı miktarı cinsinden

$$K = nP \tag{4.42}$$

eşitliği ile verilir. Böylece, (4.41) eşitliği ve (4.42) eşitliği karşılaştırıldığında iki birikim niceliği arasındaki ilişki şöyle ifade edilebilir:

$$K_{\text{kümülatif}} = \frac{1}{z} K_{\text{kümülatif olmayan}}. \tag{4.43}$$

4.2 Aşınma Probleminin Kesirsel Matematik Çerçevesinde Ele Alınması

Önceki bölümlerde, kümülatif azalan bir süreç olarak ele alınan bir fiziksel sistemin dinamiğinin, kesikli bir modelinden elde edilen çözümünü, standart bir azalma süreciyle kıyaslamak üzere, öncelikle azalan bir sürecin Öklidiyen bir uzayda, Markoviyen bir belleğe sahip olarak geliştiği durumdaki çözümü ele alınmalıdır. Bölüm-4 Kesim-1'de anlatılan kümülatif küçülmenin adımlarının uzay ve zaman bağlamında kesikli yapısı bir yana bırakılarak, aşınmanın sürekli bir uzay ve zamanda geliştiği esas alınarak bir $A(t)$ fiziksel niceliğinin, aşınma hızı $\lambda > 0$ ile bir dt zaman aralığındaki değişimi

$$dA(t) = -A(t)\lambda dt \tag{4.44}$$

formunda yazılır. Burada " $-$ " işareti ele incelenen fiziksel niceliğin aşınma sürecine tabi olduğunu ifade etmektedir. (4.44) denklemi, d/dt türev operatörünün bir özdeğer denklemi olarak düzenlenebilir. Bu durumda bir oran denklemi olarak

$$\frac{dA(t)}{dt} = -\lambda A(t) \tag{4.45}$$

ya da bir integral denklemi olarak

$$A(t) - A_0 = -\lambda I_t^1 A(t) \tag{4.46}$$

yazılır. Burada, A_0, $A(t)$ niceliğinin $t = 0$'daki başlangıç değeridir ve I_t^1 birinci mertebeden bir integral operatörüdür. Aşınma oranı λ

$$\lambda = -\frac{1}{A(t)}\frac{dA(t)}{dt} \tag{4.47}$$

eşitliği ile verilir ve boyutu zamanın tersidir. (4.45) eşitliği ile verilen 1. mertebeden diferansiyel denklem ve (4.46) eşitliği ile verilen integral denklem, integral mertebesi 1 olduğundan birbirine denktir. Bu denklemlerin çözümü

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t} \tag{4.48}$$

ile verilir. (4.48) eşitliğinden, bir azalma sürecinin, standart matematik çerçevesinde, sürekli ve Öklidiyen bir uzayda, Markoviyen bir bellekle gelişimini tasvir eden basit oran denkleminin çözümünün üstel formda olduğu ve kümülatif küçülme yaklaşımı ile elde edilen (4.6) çözümünün özel bir hali olduğu görülmektedir.

Zamana göre kesirsel türev, fiziksel sistemlerde yapısal olarak kayıplı süreçlere karşılık gelen uzun-menzil bellek etkileri ile karakterize edilir. Kesikli olarak ele alınan kümülatif süreçlerde bellek etkileri, sistemin mevcut durum evriminin, geçmiş durumlarla ilişkilendirildiği anlamına gelir. Burada, azalan bir sürecin kesirsel denklemleri ve kümülatif süreçler arasında bir bağ olup olmadığı araştırılmaktadır. Bu bağlamda, bir aşınma sürecinin kesirsel matematik çerçevesinde çözümünü incelemek üzere aşınma sürecini tasvir eden bir kesirsel mertebeli denklem ele alınmalıdır. Bu amaçla, Nonnenmacher ve Meltzler'i izleyerek (West et al, 2003), (4.46) denklemi, bir kesirsel aşınma integral denklemi olarak

$$A(t) - A_0 = -\lambda^\alpha I_0^\alpha A(t) \tag{4.49}$$

formunda genelleştirilebilir. Burada I_0^α, tanımı (2.3) eşitliği ile verilen $a^+ = 0$ için RL kesirsel integral operatörüdür ve α kesirsel operatörün mertebesi olup değeri $0 < \alpha \leq 1$ aralığındadır. (4.49) denkleminde fraktal operatör mertebesi α olduğu için, boyutun doğruluğu açısından $\lambda \to \lambda^\alpha$ alınmaktadır. (4.49) denklemine kesirsel türev operatörü uygulandığında, (2.17) eşitliği ile verilen operatörün tersinirlik özelliği sonucu

$$D_0^\alpha A(t) - \frac{A_0 t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} = -\lambda^\alpha A(t). \tag{4.50}$$

tipinde bir homojen olmayan kesirsel diferansiyel denklem elde edilir. Burada D_t^α bir kesirsel türev operatörüdür (Kilbas et al, 2006; Podlubny, 1999; West et al, 2003). (4.49) denkleminden farklı olarak (4.50) diferansiyel denkleminde, sabitin yanında bir terim açığa çıkmaktadır. Bunun nedeni (2.16) eşitliği ile verilen RL özellikliğine göre, (4.49) denkleminde başlangıç değeri A_0'ın, α mertebesinden kesirsel türevi sıfırdan farklıdır ve

$$D_0^\alpha A_0 = A_0 \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \tag{4.51}$$

ile verilmektedir. Bu durum, kesirsel oran denkleminin homojenliğini bozmaktadır ve kesirsel türev operatörlerini kullanmanın getirdiği bir sonuçtur.

Bir aşınma sürecini tasvir eden ve (4.49) ile verilen integral denklemini ya da onun eşdeğeri olan ve (4.50) ile verilen diferansiyel denklemi çözmek üzere, uygulamalarda sıkça başvurulan Laplace dönüşüm yöntemi kullanılabilir. Bunun için, Laplace dönüşümü özelliklerinden, (4.49) integral denkleminin Laplace dönüşümü için

$$\tilde{A}(s) - \frac{A_0}{s} = -\lambda^\alpha \mathcal{L}[I_0^\alpha A(t)](s) \tag{4.52}$$

eşitliği elde edilir. (4.52) eşitliğindeki kesirsel mertebeden integralin Laplace dönüşümü için, (2.32) eşitliği kullanılarak

$$\tilde{A}(s) = A_0 \frac{(s)^{-1}}{1 + (\frac{s}{\lambda})^{-\alpha}} \tag{4.53}$$

eşitliği elde edilir. Böylece, (4.53) ifadesine ters Laplace dönüşümü uygulanarak, (4.49) başlangıç değer probleminin çözümünün

$$A(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[A_0 \frac{(s)^{-1}}{1 + (\frac{s}{\lambda})^{-\alpha}}\right](t) \tag{4.54}$$

hesabı ile gerçekleştirileceği görülür. (4.54) eşitliği ile verilen ters Laplace dönüşümünde

$$\alpha = 0, \quad \text{için} \quad A(t) = A_0 \tag{4.55}$$

$$\alpha = 1, \quad \text{için} \quad A(t) = A_0 e^{-\lambda t} \tag{4.56}$$

olduğu görülmektedir. (4.54) ters dönüşümünün açık çözümü için, ters dönüşümü alınacak olan ifadenin paydası seriye açılarak

$$A(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[A_0 \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \lambda^{\alpha k} s^{-\alpha k - 1}\right](t) \tag{4.57}$$

toplamı yazılır. Böylece, (2.33) eşitliği ile verilen Laplace dönüşüm özelliği ve (4.57) eşitliği kullanılarak (4.49) integral denkleminin çözümü

$$A(t) = A_0 \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{(\lambda t)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} \tag{4.58}$$

olarak bulunur. (4.58) eşitliği ile ifade edilen çözüm, tanımı (9.4) eşitliği ile verilen ML fonksiyonu cinsinden

$$A(t) = A_0 E_\alpha[-(\lambda t)^\alpha] \tag{4.59}$$

formunda yazılır.

Bir aşınma sürecinin, kümülatif ve kesirsel matematik yaklaşımları ile elde edilen çözümleri kıyaslandığında, kümülatif küçülme yaklaşımında, sürecin viskoz bir ortamdaki aşınmasını hesaba katmak için, (4.12) çözümünün, (4.59) formunda, α'ya bağlı şekilde alınması gerektiği sonucuna varılmaktadır. Burada Fibonacci yaklaşımının önemi ortaya çıkmaktadır. Kesirsel matematikteki diferintegralin mertebesi $0 < \alpha \leq 1$ aralığında tanımlıdır. Bize göre α, aşınmanın gerçekleştiği ortamın viskoz, ağdalı yapısını hesaba katmaya imkan veren bir parametre işlevi görmektedir. $\alpha = 1$ durumu olan (4.56) çözümü, sürecin özgür olduğu, serbest gerçekleştiği duruma, $\alpha \to 0$ olduğu (4.55) ile verilen çözüm ise sürecin kilitlendiği limit durumuna karşılık gelmektedir. Bir başka deyişle aşınma sürecinin gelişmesinde bir "frenleme" görevi üstlenmektedir. Sonuç olarak α, aşınma sürecinin geliştiği ortamın doğasına bağlıdır. Bölüm-4 Kesim-1'de ele alınan aşınma sürecinde ortamın viskozitesi dikkate alınmamaktadır. Süreç serbest bir ortamda kümülatif olarak ilerlemektedir. Bir başka ifade ile $\alpha = 1$ alınmaktadır. Kümülatif azalma yaklaşımı ile elde edilen (4.12) çözümü ile oran denkleminin kesirsel matematik yaklaşımı ile elde edilen (4.59) çözümünün $\alpha = 1$ durumunda aynılığı sağlanmaktadır.

Ortamın kesikli yapıda oluşu, sürecin ardışık adımlarla birbirine bağlı olarak ilerlemesi, bellek etkisinin Markoviyen olmadığı anlamına gelmektedir. Böylece standart yaklaşımlara yöneltilen zaman ve mekanın sürekli oluşu ve olayların Markoviyen geliştiği hendikapları bu yaklaşımla aşılmaktadır.

5. LANGEVİN DENKLEMİNİN KÜMÜLATİF VE KESİRSEL YAKLAŞIMLA İNCELENMESİ

Difüzyon kavramı, parçacıkların uzayda rastgele hareketi ile ilşikilidir. Normal difüzyonda, parçacığın, bir zaman aralığındaki ortalama karesel yerdeğiştirmesi, yeterince uzun zaman geçtikten sonra, zamanın doğrusal bir fonksiyonu ile ifade edilir. Ortalama karesel yerdeğiştirmenin zamanla doğrusal seyreden ilişkisinin geçerliliğini yitirdiği, normal difüzyona kıyasla daha hızlı ya da daha yavaş davranışlar gözlemlendiği durumlar, anormal difüzyon süreçleridir. Her durumdaki difüzyon süreçlerini tanımlamada, denge dışı sistemlerin tasvirinde, Brown hareketlerinin dinamiği, temel olarak alınmaktadır (Muralidhar et al, 1990).

Brown hareketi bir parçacığın, kütlesi kendisine göre daha küçük parçacıklardan oluşan bir ısı banyosu olarak adlandırılan sıvıdaki rastgele, düzensiz hareketi olarak bilinmektedir. Parçacığı çevreleyen sıvının m kütleli Brown parçacığı ile etkileşmesi iki kuvvet oluşturmaktadır; kayıplı kuvvet ve fülükte eden kuvvet. Kayıplı kuvvet, viskoz bir sıvıdaki parçacığın hareketinden oluşan sürtünme kuvvetidir ve $\zeta = 6\pi\eta a$ Stokes' yasası ile belirlenmektedir. Diğer fülükte eden kuvvet, sıvı moleküllerinin Brown parçacığına rastgele ve anlık değişen çarpmalarından oluşmaktadır. Bu fiziksel modele göre hareket, $\dot{x} = v$ parçacığın hızı olmak üzere

$$m\dot{v}(t) = -\zeta v(t) + f(t) \tag{5.1}$$

formunda Langevin denklemi ile tasvir edilir. Burada ζ sürtünme katsayısıdır (Zwanzig, 2001; Mazo, 2002; Coffey et al, 2004). (5.1) denkleminin çözümü, $f(t)$ fülükte eden kuvvetin istatistiksel özelliklerine bağlıdır. Langevin denkleminde Brown parçacığının hareketi, Gaussyen istatistiğe sahip, delta korelasyonlu fülüktüasyonlarla tasvir edilen bir süreçtir:

$$\langle f(t)\rangle = 0 \tag{5.2}$$

$$\langle f(t)f(\tau)\rangle = 2D\delta(t-\tau). \tag{5.3}$$

Brown parçacığının dinamiği, (5.1) denkleminin çözümü olan

$$v(t) = v(0)e^{-\zeta t/m} + \frac{1}{m}\int_0^t f(t')e^{-\zeta(t-t')/m}dt' \tag{5.4}$$

eşitliği ile elde edilir. Böylece (5.2) özelliğinden ortalama hız,

$$\langle v(t)\rangle = v_0 e^{-\zeta t/m} \tag{5.5}$$

ve (5.3) özelliğinden Brown parçacığının kinetik enerjisi de

$$\frac{1}{2}\langle v^2(t)\rangle = \frac{e^{-\zeta t}}{2}v_0^2 + \frac{D}{2m\zeta}(1 - e^{-\frac{2\zeta}{m}}) \tag{5.6}$$

olarak hesaplanır.

Ancak fiziksel sistemler, burada Brown parçacığının hareketi, daha gerçekçi olarak ele alındığında sürecin geliştiği viskoz ortamın fraktal yapısının ve fülükte eden kuvvetin, uzun menzil etkileşimlerinin, lokal olmayan karakterinin itibara alınması gerekir. Bu bağlamda standart yaklaşımın bu sistemleri tasvirdeki yetersizliğinin, Langevin denkleminin kesirsel ve kümülatif yaklaşımlarla ele alınmasıyla giderileceği düşünülmektedir.

5.1 Langevin Denkleminin Kesirsel Matematikle İncelenmesi

Langevin denkleminin çözümünün, (5.4) ifadesi ile gösterilmesi semboliktir. Çözüme ulaşabilmek için, integralin varlığı, dolayısıyle fülükte eden $f(t)$ kuvvetinin stokhastik özellikleri de gözönünde bulundurulmalıdır. Ayrıca uzun zaman bellek ve uzay etkileşimleri içeren karmaşık fiziksel sistemlerin, Markoviyen olmayan karakteri göz önüne alındığında, kesirsel matematik bu karmaşık sistemleri modellemede önemli bir araç olmaktadır. (5.1) denkleminin kesirsel mertebeye genelleştirilmiş bir formunun standart fiziği ve karmaşık sistemleri kapsayabileceği söylenebilir. Bu amaçla Genelleştirilmiş Kesirsel Langevin (GKL) denklemi

$$D^{2\alpha}x(t) + \int_0^t \gamma(t-t')[{}^C D_0^\alpha x(t')]dt' = f(t) \tag{5.7}$$

formunda ele alınsın. Burada ${}^C D_0^\alpha$ Caputo türev operatörüdür. $\alpha \to 1$ için denklem genelleştirilmiş Langevin denklemine indirgenir (Zwanzig, 2001).

(5.7) kesirsel denklemindeki $f(t)$ rastgele gürültü terimi bir "dahili gürültü" ise korelasyon fonksiyonunun $\gamma(t)$ kayıplı bellek fonksiyonu ile ilişkisi flüktüasyon-kayıp ilişkisi olarak bilinen

$$\langle f(t)f(t')\rangle = C(|t-t'|) = k_B T\gamma(|t-t'|), \quad \langle f(t)\rangle = 0 \tag{5.8}$$

ile verilir. Burada k_B Boltzman sabiti ve T çevrenin mutlak sıcaklığıdır (Wang, 1992; Viñales and Despósito, 2007, 2008, 2006; Camargo et al, 2009).

(5.7) denklemin çözümü için Laplace yöntemi kullanmak elverişlidir. Bu nedenle (5.7) denkleminde eşitliğin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanır. Kesirel mertebeden diferintegral operatörlerinin Laplace dönüşüm özellikleri kullanıldığında, başlangıç koşulları $x(0) = x_0$ ve $\dot{x}(0) = v_0$ olmak üzere

$$(\mathcal{L}x(t))(s) = \frac{x_0}{s} + v_0\tilde{K}(s) + \tilde{G}(s)\tilde{f}(s) \tag{5.9}$$

eşitliği elde edilir. Burada $G(t)$ ve $K(t)$ fonksiyonlarının Laplace dönüşümlerine karşılık gelen $(\mathcal{L}G(t))(s)$ ve $(\mathcal{L}K(t))(s)$ fonksiyonları sırasıyla

$$(\mathcal{L}G(t))(s) = \frac{1}{[s^{2\alpha} + s^{\alpha}\tilde{\gamma}(s)]} \tag{5.10}$$

$$(\mathcal{L}K(t))(s) = \frac{s^{2\alpha-2}}{[s^{2\alpha} + s^{\alpha}\tilde{\gamma}(s)]} \tag{5.11}$$

ile tanımlıdır. Böylece (5.9) eşitliğinin ters Laplace dönüşümü ile (5.7) kesirsel denkleminin çözümü konum için

$$x(t) = x_0 + v_0K(t) + \int_0^t G(t-\tau)f(\tau)d\tau \tag{5.12}$$

ve hız için

$$v(t) = v_0\dot{K}(t) + \int_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau \tag{5.13}$$

formunda bulunur. Burada $g(t)$ durulma fonksiyonu $g(t) = \dot{G}(t)$ ve $l(t) = \dot{K}(t)$ ile tanımlı olduğu için Laplace türev dönüşüm özelliğinden

$$(\mathcal{L}g(t))(s) = \frac{s}{[s^{2\alpha} + s^{\alpha}\tilde{\gamma}(s)]} \tag{5.14}$$

ve

$$(\mathcal{L}l(t))(s) = \frac{s^{2\alpha-1}}{[s^{2\alpha} + s^{\alpha}\tilde{\gamma}(s)]} \tag{5.15}$$

eşitlikleri geçerlidir.

Konum ve hız niceliklerinin ortalama değerleri, rastgele hareketlerde $\langle f(t)\rangle = 0$ kabul edildiği için

$$\langle x(t)\rangle = x_0 + v_0K(t) \tag{5.16}$$

ve

$$\langle v(t)\rangle = v_0l(t) \tag{5.17}$$

eşitlikleri ile hesaplanır. Böylece yer değiştirme ve hız ifadelerinin, ortalama yerdeğiştirme ve ortalama konum ifadeleri ile ilişkisi

$$x(t) = \langle x(t) \rangle + \int_0^t G(t-\tau) f(\tau) d\tau \tag{5.18}$$

ve

$$v(t) = \langle v(t) \rangle + \int_0^t g(t-\tau) f(\tau) d\tau \tag{5.19}$$

formülleriyle hesaplanır. (5.12) ve (5.16) ifadelerinden yararlanılarak varyans ve ortalama kare yerdeğiştirme formülleri

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^2(t) &= \langle [x(t) - \langle x(t) \rangle]^2 \rangle \\ &= 2 \int_0^t dt_1 G(t_1) \int_0^{t_1} dt_2 G(t_2) C(t_1 - t_2) \end{aligned} \tag{5.20}$$

ve

$$\begin{aligned} \langle x^2(t) \rangle &= x_0 + 2x_0 v_0 + v_0^2 K^2(t) + 2 \int_0^t dt_1 G(t_1) \int_0^{t_1} dt_2 G(t_2) C(t_1 - t_2) \\ &= x_0 + 2x_0 v_0 + v_0^2 K^2(t) + \sigma_{xx}^2(t) \end{aligned} \tag{5.21}$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu eşitliklerden, varyans ve ortalama karesel yerdeğiştirme gibi zaman ortalaması alınmış, deneysel olarak ölçülebilir niceliklerin $G(t)$, $K(t)$, $g(t)$, $l(t)$ gibi durulma fonksiyonları ile ilişkisi görülür. Başka bir deyişle, GKL denkleminin analitik çözümleri, bu durulma fonksiyonlarının belirlenmesiyle elde edilmiş olur.

GKL denklemi ile tasvir edilen sistemin davranışı, bellek fonksiyonun seçimine göre farklılık göstermektedir. Bu durumu tespit etmek üzere, öncelikle (5.8) bellek fonksiyonu Dirac Delta fonksiyonu cinsinden

$$\gamma(t) = 2\lambda \delta(t) \tag{5.22}$$

seçilsin. Bu durumda (5.22) fonksiyonunun Laplace dönüşümü için

$$(\mathcal{L}\gamma(t))(s) = 2\lambda \tag{5.23}$$

elde edilir. (5.23) eşitliği kullanılarak, (5.10) ve (5.11) eşitlikleri ile verilen $(\mathcal{L}G(t))(s)$ ve $(\mathcal{L}K(t))(s)$ fonksiyonları bu bellek fonksiyonu için belirlenmiş olur. Böylece, ters Laplace dönüşüm özelliklerinden durulma fonksiyonları

$$G(t) = t^{2\alpha-1} E_{\alpha,2\alpha}(-2\lambda t^{\alpha}) \tag{5.24}$$

$$g(t) = t^{2\alpha-2}E_{\alpha,2\alpha-1}(-2\lambda t^{\alpha}) \tag{5.25}$$

$$K(t) = tE_{\alpha,2}(-2\lambda t^{\alpha}) \tag{5.26}$$

ve

$$l(t) = E_{\alpha,1}(-2\lambda t^{\alpha}) \tag{5.27}$$

formunda elde edilir. Bu durulma fonksiyonları $\langle x(t)\rangle$ ve $\langle v(t)\rangle$ eşitliklerinde kullanılarak ortalama yerdeğiştirme için

$$\langle x(t)\rangle = x_0 + v_0 tE_{\alpha,2}(-2\lambda t^{\alpha}) \tag{5.28}$$

ve ortalma hız için

$$\langle v(t)\rangle = v_0 E_{\alpha,1}(-2\lambda t^{\alpha}) \tag{5.29}$$

çözümleri elde edilir. Bu sonuçlara göre parametreye bağlı bir denklem kullanılmasıyla, Brown hareketinin en iyi temsil edilebilmesiyle ilgili esneklik kazandırılmaktadır. $\langle x(t)\rangle$ ve $\langle v(t)\rangle$ ifadelerinde $x_0 = 0$ ile $\alpha \to 1$ limit durumu için

$$\langle x(t)\rangle = v_o K(t) = v_0 tE_{1,2}(-2\lambda t) = \frac{v_0}{2\lambda}(1 - e^{-2\lambda t}) \tag{5.30}$$

$$\langle v(t)\rangle = v_o l(t) = v_0 tE_{1,1}(-2\lambda t) = v_0 E_1(-2\lambda t) = v_0 e^{-2\lambda t} \tag{5.31}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu sonuçlar standart Brown hareketinin sonuçlarıyla uyumludur (Lindenberg and West, 1990; Lutz, 2001).

(5.28) ve (5.29) çözümleri, korelasyon fonksiyonunun Dirac Delta bellek fonksiyonu olması sebebiyle, belleğin göz ardı edildiği, Markoviyen gelişen bir süreci tasvir etmektedir. Ancak, düzensiz, fraktal ortamda gelişen karmaşık stokhastik sistemlerde, uzun-zaman korelasyon fonksiyonları davranışları görülmektedir. Bu durumda GKL denkleminin çözümü için bellek fonksiyonu ile ifade edilen korelasyon fonksiyonu (5.8)

$$\gamma(t) = \gamma_k \frac{t^{-\lambda}}{\Gamma(1-\lambda)} \tag{5.32}$$

formunda olur. GKL denkleminin Laplace dönüşümü yöntemiyle çözümü için, öncelikli olarak (5.32) ifadesi ile tanımlanan bellek fonksiyonun Laplace dönüşümü

$$(\mathcal{L}\gamma(t))(s) = \gamma_k s^{\lambda-1} \tag{5.33}$$

elde edilir. Buradan durulma fonksiyonlarının, kuvvet-yasası formunda bellek fonksiyonu ile Laplace dönüşümleri için

$$(\mathcal{L}K(t))(s) = \frac{s^{2\alpha-2}}{s^{2\alpha} + \gamma_k s^{\alpha+\lambda-1}} \tag{5.34}$$

$$(\mathcal{L}G(t))(s) = \frac{1}{s^{2\alpha} + \gamma_k s^{\alpha+\lambda-1}} \tag{5.35}$$

$$(\mathcal{L}g(t))(s) = \frac{s}{s^{2\alpha} + \gamma_k s^{\alpha+\lambda-1}} \tag{5.36}$$

$$(\mathcal{L}l(t))(s) = \frac{s^{2\alpha-1}}{s^{2\alpha} + \gamma_k s^{\alpha+\lambda-1}} \tag{5.37}$$

elde edilir. Bu fonksiyonların, ters Laplace dönüşümleri de, ML fonksiyonun Laplace dönüşüm özelliğinden sırasıyla

$$K(t) = tE_{\alpha-\lambda+1,2}(-\gamma_k t^{\alpha-\lambda+1}) \tag{5.38}$$

$$G(t) = t^{2\alpha+\lambda-2} E_{\alpha-\lambda+1,2\alpha}(-\gamma_k t^{\alpha-\lambda+1}) \tag{5.39}$$

$$g(t) = t^{2\alpha+\lambda-3} E_{\alpha-\lambda+1,2\alpha}(-\gamma_k t^{\alpha-\lambda+1}) \tag{5.40}$$

$$l(t) = t^{\lambda-1} E_{\alpha-\lambda+1,1}(-\gamma_k t^{\alpha-\lambda+1}) \tag{5.41}$$

olarak hesaplanır. Görüldüğü üzere fiziksel nicelikler, kesirsel türev mertebesi α ve bellek fonksiyonunun kuvveti λ'ya bağlı olarak elde edilmektedir. Bu durulma fonksiyonlarının uzun zaman davranışı, ML fonksiyonlarının asimptotik değerleri yardımı ile hesaplandığında, standart fizikteki üstel fonksiyonlarla değil, kuvvet yasası formunda elde edilmektedir. Bu fonksiyonların analitik olarak elde edilmesiyle, deneysel olarak ölçülebilen, (5.16), (5.17), (5.20), (5.21) ifadeleriyle verilen sırasıyla konum ortalama, hız ortalama, varyans, ortalama karesel yer değiştirme gibi niceliklerin zaman içinde gelişimleri belirlenmiş olur.

Kesirsel matematiğin karmaşık stokhastik sistemleri tasvir etmekteki temel başarısının altında yatan fiziksel mekanizma, bize göre, incelenen sistemin kümülatif davranışının sonucudur. Bu nedenle, Langevin denklemini kesirsel matematik yaklaşımına paralel olarak kümülatif yöntemle ele almak yerinde olur.

5.2 Langevin Denkleminin Kümülatif Modeli

Kümülatif süreçlerin operatör modeli çeşitli fiziksel stokhastik süreçlere uygulanabilir. Bu bağlamda, Langevin denklemi kümülatif yaklaşımla ele alınmaktadır. Brown parçacığının hızının zaman içindeki evrimi kümülatif azalma yaklaşımı ile ifade edilebilir. Ayrıca fülükte eden kuvvet, her bir $t = \Delta t, 2\Delta t, ..., n\Delta t$ kesikli zaman aralıklarına karşılık gelen $f(t_i)$'lerin katılımı olarak ifade edilirse Brown parçacığın hareketi

$$\begin{array}{ccrcl} t=0 & & v(0) & = & v_0 \\ t=\Delta t & & v_1 & = & (1-\zeta\Delta t)v_0 + f(t_0) = \phi v_0 + f(t_0) \\ t=2\Delta t & & v_2 & = & \phi v_1 + f(t_1) = \phi^2 v_0 + \phi f(t_0) + f(t_1) \\ t=3\Delta t & & v_3 & = & \phi v_2 + f(t_2) = \phi^3 v_0 + \phi^2 f(t_0) + \phi f(t_1) + f(t_2) \\ & & \vdots & & \vdots \\ t=n\Delta t & & v_n & = & \phi v_{n-1} + f(t_{n-1}) = \phi^n v_0 + \sum_{k=1}^{n} \phi^{n-k} f(t_{k-1}) \end{array} \tag{5.42}$$

algoritması ile ifade edilir. Burada $\phi = (1-\zeta)$ ve $m = 1$'dir. Bu kümülatif algoritmaya göre kesikli olarak ifade edilen $f(t_i)$ rastgele kuvvetleri de kümülatif, birikerek ilerleyen sürece dahil olurlar. Elde edilen (5.42) eşitliği Binom açılımı kullanılarak

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-\zeta\Delta t)^k v_0 + \phi^n \sum_{k=1}^{n} \phi^{-k} f(t_{k-1}) \tag{5.43}$$

formunda yazılabilir. Kümülatif azalma süreci olarak tasvir edilen Brown parçacığının hız modelinden elde edilen (5.43) eşitliğine, bellek etkilerini içeren kesikli bir Langevin denklemi olarak bakılabilir.

(5.42) eşitliğinin sağ tarafında fülükte eden kuvveti gösteren toplam, t zaman değişkeninin bir fonksiyonu olarak

$$F(t) = \phi^n \sum_{k=1}^{n} \phi^{-k} f(t_{k-1}) \tag{5.44}$$

tanımlanabilir. (5.43) eşitliği, fülükte eden $F(t)$ kuvvetinin istatistiksel özelliklerine bağlı olarak ele alınmalıdır.

(5.43) eşitliğinde, fülükte eden kuvvet olmadığı durumda, (5.44) terimi sıfırdır. Yeterince büyük adım sayısı n için zaman değişkeni sürekli hale gelir ve denklemin bu durumda çözümü, önceki bölümlerde oran denklemi olarak tasvir edildiği üzere serbest hareket eden parçacık için

$$v(t) = v_0 e^{-\zeta t} \tag{5.45}$$

olarak elde edilir. Bu değer aynı zamanda hız ortalaması $\langle v(t) \rangle$ değerine eşittir. Bu durumda, kümülatif yöntemle elde edilen (5.43) eşitliği yeterince büyük n değerleri ve Delta korelasyona sahip bir $F(t)$ fonksiyonu ile (5.4) eşitliği ile verilen standart Langevin denkleminin çözümü olan

$$v(t) = v_0 e^{-\zeta t} + \int_0^t f(t') e^{-\zeta(t-t')} dt' \tag{5.46}$$

eşitliğine karşılık gelir.

Burada önerilen kesikli kümülatif mekanizma ile tasvir edilen Langevin denkleminin ve onun kesirsel mertebeye genelleştirilmiş formunun, limit durumlarında standart sonuçlarla uyumluluğu görülmektedir. Bunun nedeninin, kümülatif yaklaşımla itibara alınan bellek etkilerinin olduğu anlaşılmaktadır. Buradan hareketle, kümülatif küçülme ve büyüme yaklaşımları ile kesirsel matematik formülasyonunun, fraktal ortamda, bellek etkileri ile gelişen karmaşık sistemleri tasvirde paralel tasvir yöntemleri olarak kullanılabileceği görülmektedir. Brown hareketinin, bir çok denge-dışı sistemin tasvirinde temel model olarak kullanıldığı göz önünde bulundurulduğunda, önerilen kesikli ve standart fiziği de kapsayan kesirsel Langevin denklemi'nin çözümünün önemi ortaya çıkmaktadır.

6. KÜMÜLATİF BÜYÜME VE KESİRSEL MATEMATİK

6.1 Fraktal Yapılı Ortamlarda Kümülatif Büyüme

Bu bölümde, Bölüm-4'te elde edilen sonuçlar doğrultusunda, bir fiziksel sistemin viskoz bir ortamdaki kümülatif olarak büyümesi, geliştiği çevre ile etkileşimi göz önünde bulundurulak ele alınmaktadır. Bu etkileşme, sistemin dinamiğine α parametresine bağlı bir gelişim operatörü aracılığı ile girdirilmektedir. Paralel bir yaklaşımla kesirsel matematik ile ele alınan bir büyüme sürecinde α parametresi, kesirsel matematikteki differintegral mertebesine karşılık gelmektedir. Bu bağlamda $\exp$ fonksiyonunun yerini alan ML fonksiyonu, hem kümülatif yaklaşımla hem de kesirsel matematikle tasvir edilen büyüme sürecinin doğal bir tasvir elemanı olarak karşımıza çıkmaktadır. Sonuç olarak fiziksel süreçleri kümülatif yaklaşımla ele almanın, bu fiziksel süreçlerin Markoviyen olmayan bir bellekle fraktal bir ortamda gelişmesi, mekanın fraktal ve zamanın kesikli olmasını göz önüne alan arayışlara bir cevap olduğu düşünülmektedir.

Bilindiği üzere, doğa ve insan davranışlarının bir çok büyüme modeli, incelenen büyüklük $A(t)$ olmak üzere, dt gibi zaman aralığındaki $dA(t)$ değişimi basitçe

$$\frac{dA(t)}{A(t)} = \lambda dt \tag{6.1}$$

formunda, yaygın bilinen bir oran denklemi ile ifade edilmektedir. (6.1) denkleminin çözümü $A(0) = A_0$ başlangıç değeri olmak üzere

$$A(t) = A_0 \exp(\lambda t) \tag{6.2}$$

bulunur. Bu çözüm Öklidiyen bir ortamda, serbet gelişen bir büyüme sürecini tasvir etmektedir.

Bilinen basit üstel yasalar, bir dinamiğin doğasını basitçe ifade etmek amaçlı kullanılmaktadır. (6.2) eşitliği ile verilen çözümün daha gerçekçi fiziksel sistemleri ve deneysel sonuçları tasvir etmekten uzak olduğu ortadadır. Burada, süreci etkileyen bir dış alanın varlığı, mekan ve zamanın kırıklı oluşu, homojen olmayışı yani heterojen oluşu, süreci hızlandıran veya yavaşlatan etkenlerin varlığı, bellek etkisi ihmal edilmektedir. Bu nedenle başlangıç değer A_0 ile gelecekteki değer $A(t)$ arasındaki ilişki üstel olarak elde edilmektedir.

Bu bağlamda sistemin, çevresi ile etkileşimini hesaba katmak üzere, fraktal bir uzayda yani boyutu kesirli mertebeden olan bir uzayda gelişen sürecin kümülatif olarak büyümesinin tasvirinde gelişim operatörü ϕ

$$\phi = (1 + \lambda \Delta t)^{\alpha} \tag{6.3}$$

seçilebilir. Burada α parametresi $0 < \alpha \leq 1$ aralığındadır. Böylece, bir fiziksel niceliğin, viskoz bir ortamda büyümesinin dinamiği aşağıdaki gibi bir kümülatif artış modeli ile ele alınır:

$$\begin{aligned}
&\text{0.adım} \quad ; \quad A(0) = A_0 \\
&\text{1.adım} \quad ; \quad A(\Delta t) = (1 + \lambda \Delta t)^{\alpha} A_0 = \phi^1 A_0 \\
&\text{2.adım} \quad ; \quad A(2\Delta t) = (1 + \lambda \Delta t)^{\alpha} A(\Delta t) = \phi^2 A_0 \\
&\quad \vdots \\
&\text{n.adım} \quad ; \quad A(n\Delta t) = (1 + \lambda \Delta t)^{\alpha} A((n-1)\Delta t) = \phi^n A_0 .
\end{aligned} \tag{6.4}$$

ϕ operatörü (6.4) denkleminde yerine yazılarak Binom serisine açılırsa, kümülatif olarak büyüyüen bir süreç için gelecekteki bir $A(n\Delta t)$ değeri ve sürecin başlangıç değeri arasındaki ilişki, $m = n\alpha$ olmak üzere

$$A(m\Delta t) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (\lambda \Delta t)^k A_0 \tag{6.5}$$

eşitliği ile ifade edilir. Binom katsayıları açık olarak yazılırsa

$$A(m\Delta t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{m(m-1)...(m-k+1)}{k!} (\lambda \Delta t)^k A_0 \tag{6.6}$$

eşitliği elde edilir. Böylece gelecekteki bir $A(n\Delta t)$ büyüklüğü, başlangıç durumu A_0 cinsinden ifade edilmiş olur.

(6.6) ifadesinde, $\Delta t = t/n$ eşitliği yerine konularak, A niceliğinin gelecekteki değeri t zaman değişkeni cinsinden

$$A(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k! m^k} (\lambda t)^k A_0 \tag{6.7}$$

formunda yazılır.

Kümülatif olarak büyüyen bir niceliğin, gelişimini ifade eden $A(t)$ niceliğini, literatürde iyi bilinen bir ifade ile ilişkilendirmek için, bu ifadenin limit davranışına bakmak yerinde olur. Bu amaçla, (6.7) eşitliği

$$A(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q(m,k)}{k!} (\alpha\lambda t)^k A_0 \tag{6.8}$$

formunda yazılabilir. Burada $Q(m,k)$ niceliği

$$Q(m,k) = \prod_{i=1}^{k} (1 - \frac{k-i}{m}) \tag{6.9}$$

şeklinde tanımlıdır. Yeterince büyük m değerleri için $Q(m,k) \to 1$ limiti değerini alır. Böylece $A(t)$ niceliğinin zaman içindeki gelişimine karşılık gelen değerleri m den bağımsız olarak

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha\lambda t)^k}{\Gamma(k+1)} A_0 \tag{6.10}$$

eşitliği ile ifade edilir. Böylece (6.10) eşitliğinde $k = \alpha r$ seçimi ile, ML fonksiyonu cinsinden

$$A(t) = A_0 E_\alpha (at)^\alpha \tag{6.11}$$

olarak elde edilir. Burada $a = \alpha\lambda$'dır. Böylece çözüm, bir başka ifade ile gelecekteki değer ve başlangıç değeri arasındaki bağıntı ML fonksiyonun cinsinden sağlanmış olur. Bu bağıntı kesirsel matematikte, differintegral mertebesi olarak karşımıza çıkan α'yı da barındıran çok basit bir ifade olmaktadır. (6.11) eşitliği ile verilen çözüm, $\alpha \to 1$ için

$$A(t) = E_1(\lambda t) A_0 \tag{6.12}$$

halini alır.

ML fonksiyonu, fraktal gelişim operatörünün kuvveti α'ya bağlı olarak, standart bir üstel fonksiyonun zamanla gelişiminden farklılık göstermektedir. (6.11) eşitliği ile ifade edilen kümülatif büyüme sürecinde, ML fonksiyonun asimptotik değerleri göz önünde bulundurulduğunda, $A(t)$ niceliği için, sürecin başlangıcı olan $\lambda t \ll 1$ için

$$A(t) \approx A_0 E_\alpha[(\lambda t)^\alpha] \to A_0 e^{(\lambda t)^\alpha} \tag{6.13}$$

limitini sağlamaktadır. Bu durumda sürecin zaman içindeki davranışı uzatılmış üstel olarak bilinen formda ifade edilir. Süreç ilerledikçe $\lambda t \gg 1$ için $A(t)$ niceliğinin davranışı

$$A(t) = A_\infty E_\alpha[(\lambda t)^\alpha] \to A_\infty (\lambda t)^\alpha$$

ters kuvvet yasası formundadır. Yukarıdaki limitlerde, A_0 ve A_∞ sayıları fonksiyonun sırasıyla sıfır ve sonsuzdaki asimptotik değerleridir. Bu limit durumlarından, söz konusu fiziksel büyüklüğün başlangıç değerini, fiziksel büyüklüğün gelecekteki bir değerine bağlayan ML fonksiyonunun, üstel ile kuvvet yasası olmak üzere iki asimptotik form arasındaki değerlerde düzgün (diferansiyellenebilir) olarak değiştiği gözlemlenmektedir. Ters kuvvet yasası, kesirsel integral oran denklemi ile ifade edilen sürecin, zamanda asimptotik olarak kendi kendine benzer davranışı olduğunun işaretidir (Büyükkılıç and Demirhan, 2008a; Kilbas et al, 2006; West et al, 2003; Mathai et al, 2011).

6.1.1 Fraktal yapılı ortamlarda sabit katkılı bir kümülatif büyüme

Bu bölümde, Bölüm-6 Kesim-1'de anlatılan, çevresi ile etkileşmesinin de itibara alındığı artan bir fiziksel sürece ek olarak, sürecin başlangıcında elde bulunan A_0 niceliğine her adımda P kadar miktar dahil olsun. Zamanla ilerledilçe, P katkısı da A_0 gibi kümülatif büyüme sürecine tabi olacaktır. Süreç, kümülatif büyüme modeline göre, matematiksel olarak

$$\begin{aligned}
&\text{0. adım} \quad ; \quad K(0) = A_0 \\
&\text{1.adım} \quad ; \quad K(\Delta t) = (1+\lambda\Delta t)^{\alpha} K(0) - P = \phi A_0 - P \\
&\text{2.adım} \quad ; \quad K(2\Delta t) = (1+\lambda\Delta t)^{\alpha} K(\Delta t) - P = \phi^2 A_0 - (\phi+1)P \\
&\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\text{n.adım} \quad ; \quad K(n\Delta t) = \phi^n A_0 - (\phi^{n-1} + \phi^{n-2} + ... + 1)P
\end{aligned} \tag{6.14}$$

algoritması ile ifade edilir. (6.14) bağıntısına göre, $t = n\Delta t$ süre sonra A_0 başlangıç niceliğinin ulaştığı değer L, P katkısının ulaştığı değeri T ile gösterilsin. Bu durumda T niceliğinin L niceliğinden çıkarılması ile elde edilen ve birikimi gösteren K niceliği için

$$K = L - T, \tag{6.15}$$

yazılır. Burada L niceliği,

$$L = (1+\lambda\Delta t)^{\alpha n} A_0 \tag{6.16}$$

eşitliği ve T niceliği,

$$T = \sum_{k=0}^{n-1} (1+\lambda\Delta t)^{\alpha k} P \tag{6.17}$$

eşitliği ile hesaplanır.

Çevresi ile etkileşim halinde olan ve büyüme davranışı gösteren bir sistem için, K birikim miktarının $L > T$ olması durumunda pozitif, yani zaman içinde sabit katkı büyümesinin, başlangıçtaki A_0 niceliğinin büyümesini aşamadığı, $L = T$ durumunda K birikim miktarının sıfır olduğu, yani başlangıçtaki nicelik ve sabit katkı payı büyümelerinin dengelendiği ve $L < T$ olması durumunda ise K birikiminin negatif, yani başlangıçtaki nicelik büyümesinin, sabit katkı büyümelerinin altında kaldığını gösterdiği açıktır.

Farklı bir durum olarak, kümülatif büyüme sürecindeki bir sisteme, P katkısı, artma yönünde katkı sağlayacak şekilde işareti "+" olarak ele alınsın. Bu durumda, T niceliği, L niceliğinden çıkarılmak yerine, L'ye eklenir. Bu durumda birikim niceliği için

$$K = L + T \tag{6.18}$$

yazılabilir. Ayrıca özel olarak $A_0 = P$ seçimi ile, (6.18) eşitliği ile verilen birikim niceliği için aşağıdaki toplam yazılır:

$$K = (\phi^n + \phi^{n-1} + \phi^{n-2} + ... + 1)P. \tag{6.19}$$

(6.19) ile verilen seri toplamı yapılırsa, böylece birikim niceliği ve katkı terimi P arasındaki ilişki için

$$K = \frac{\phi^{n+1} - 1}{\phi - 1} P \tag{6.20}$$

eşitliği yazılır. Bu durumda K niceliği, $A(n\Delta t)$'ye bağlı tüm terimlerin katsayılarının toplamıdır. Kümülatif bir büyüme sürecinde, $\phi > 1$ olduğu için, (6.20) eşitliğinin payındaki 1 terimi, ϕ^{n+1} terimine kıyasla göz ardı edilebilir. Böylece $\Delta t = t/n$ olmak üzere birikim değeri için

$$K \approx \frac{nP}{\alpha\lambda t}\left(1 + \frac{\lambda t}{n}\right)^{\alpha(n+1)} \tag{6.21}$$

elde edilir. Bu durumda K daima pozitiftir ve sistemin büyüdüğünü gösterir.

Kümülatif olarak büyüme gösteren bir sistemin denge durumuna karşılık gelen $K = 0$ durumu için $L = T$ olmalıdır. (6.17) eşitliği ile verilen T toplamı bir geometrik seri olduğundan toplam için

$$T = \frac{1 - \phi^n}{1 - \phi} P \tag{6.22}$$

eşitliği geçerlidir. Böylece, (6.16) eşitliği ile verilen L değeri, (6.22) eşitliğindeki T toplamı ile eşitlenerek denge durumu için

$$P = \frac{1 - (1 + \lambda\Delta t)^{\alpha}}{(1 + \lambda\Delta t)^{-\alpha n} - 1} A_0 \tag{6.23}$$

eşitliği elde edilir. (6.23) ifadesi $\Delta t = t/n$ alınarak, yeterince büyük n değerleri için

$$P = P_0 \frac{z}{1 - e^{-z}} \tag{6.24}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $P_0 = A_0/n$ ve $z = \alpha\lambda t$'dir. (6.24) eşitliğindeki z değişkenine bağlı ikinci terim yeniden düzenlenirse P katkı terimi için

$$P \approx P_0 \left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} - \frac{z^3}{24} + ...\right) \tag{6.25}$$

formunda bir seri elde edilir. (6.25) ifadesi de göz önüne alındığında, (6.24) eşitliğinin limit durumları için

$$z \ll 1, \qquad P \sim P_0 \tag{6.26}$$

$$z \gg 1, \qquad P \sim zP_0 \tag{6.27}$$

ifadeleri elde edilir. (6.26) ifadesinden $z \ll 1$ durumunda büyüme sürecindeki kümülatif etkinin olmadığı görülmektedir. Ancak (6.27) ifadesine göre $z \gg 1$ durumunda, yani zaman geçtikçe, kümülatif büyümenin etkisi bariz olarak gözlemlenir.

Sıradaki bölümde, bir büyüme sürecinin geliştiği çevre ile etkileşmesini tasvir etmekte kullanılan bir yöntem olarak, $A(t)$ niceliğinin kesirsel matematik kullanılarak elde edilecek çözümü, kümülatif artışlar bağlamında elde edilen ve (6.11) eşitliği ile verilen çözüm ile kıyaslanmak üzere ele alınacaktır.

6.2 Kümülatif Büyümenin Kesirsel Matematikle İlişkisi

Bölüm-(6.1)'de, (6.1) eşitliği ile tanımlanan ve artan bir süreç için yazılan oran denkleminin bir integral denklemi olarak ifadesi

$$A(t) - A_0 = \lambda I_t^1 A(t) \tag{6.28}$$

denklemi ile verilir. (6.28) denklemi, bir büyüme kesirsel integral denklemi olarak

$$A(t) - A_0 = \lambda^\alpha I_0^\alpha A(t) \tag{6.29}$$

formunda α mertebesine genelleştirilir. (6.29) kesirsel integral denklemini, bir kesirsel diferansiyel denklem olarak yazmak için eşitliğin her iki tarafına kesirsel türev operatörü uygulanırsa, (2.17) ile verilen tersinirlik özelliğinden, zamana bağlı homojen olmayan kesirsel büyüme denklemi şu formda elde edilir:

$$D_0^\alpha A(t) - \frac{A_0 t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} = \lambda^\alpha A(t). \tag{6.30}$$

Burada D_0^α RL kesirsel türev operatörüdür (Kilbas et al, 2006; Podlubny, 1999; Hilfer, 2000).

(6.29) ile verilen kesirsel integral denkleminin çözümü için RL integralinin Laplace dönüşüm özellikleri kullanılarak

$$\tilde{A}(s) = A_0 \frac{(s)^{-1}}{1 - (\frac{s}{\lambda})^{-\alpha}} \tag{6.31}$$

eşitliği elde edilir. Bir büyüme sürecinin tasvirinde, esas denklem olarak (6.29) integral denkleminin kullanılması, Bölüm-(2.2)'de tanıtılan Laplace dönüşüm özelliklerindeki kullanım kolaylığı açısındandır. Böylece, (6.31) eşitliğine ters Laplace dönüşümü uygulanarak zamana bağlı çözüm

$$A(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[A_0 \frac{(s)^{-1}}{1 - (\frac{s}{\lambda})^{-\alpha}}\right](t) \tag{6.32}$$

eşitliğinin sağ tarafındaki ters dönüşümün hesaplanmasıyla gerçekleştirilir. Bunun için, payda seriye açılarak

$$A(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[A_0 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{\alpha k} s^{-\alpha k - 1}\right](t) \tag{6.33}$$

toplamı yazılır. (2.33) eşitliği ile verilen Laplace dönüşüm özelliği ve (6.33) eşitliği kullanılarak (6.29) ile verilen bir büyüme sürecine ait kesirsel integral denkleminin çözümü

$$A(t) = A_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda t)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} \tag{6.34}$$

bulunur. Çözüm olarak elde edilen (6.34) eşitliği, (9.4) eşitliği ile tanımı verilen Mittag-Leffler fonksiyonu cinsinden

$$A(t) = A(0) E_\alpha (\lambda t)^\alpha \tag{6.35}$$

formunda yazılabilir. Böylece, kesirsel matematik yaklaşımı ile elde edilen çözüm olan (6.35) ifadesi ile kümülatif büyümeler yaklaşımı ile elde edilen çözüm olan (6.11) ifadesi kıyaslanırsa, çözümlerin özdeş olduğu görülmektedir.

Bu bölümde, bir fiziksel sistemin büyüme süreci, serbest bir ortamdan, çevresiyle etkileşmesinin göz önünde bulundurulduğu viskoz bir ortama alınmaktadır. Bu etkileşme, α parametresine bağlı bir gelişim operatörü ile kümülatif artış sürecinin dinamiğine dahil edilmektedir. Bu yaklaşımda, başlangıç değer ve gelecek değer arasındaki ilişkide ML fonksiyonu doğal bir tasvir elemanı olarak ortaya çıkmaktadır. α kesirsel matematikte bir differintegral mertebesi olmasının yanında, fiziksel davranışların gelişimini; gerilemesini, ilerlemesini, yavaşlayıp hızlanmasını vb. kontrol eden bir özelliğe sahiptir. Esas olarak incelenen doğa ve insana ait olayların geliştiği fiziksel ortamın özelliği ile ilgilidir. ML fonksiyonunun tanımında geçen α parametresi de bu kapsamda değerlendirilebilir.

7. CANLI TOPLULUĞUNUN NÜFUS DİNAMİĞİ

Dünya nüfusunun büyüklüğündeki fülüktüasyonlar, genellikle stokhastik ve zamanda rastgele olarak gerçekleşirler. Özellikle, günümüzde sanayi, teknoloji ve iletişimin gelişmesiyle birlikte insanların hareketliliğinin çok daha hızlı hale gelmesi, ayrıca yöresel, bölgesel, kıtalar arası politik anlaşmazlıklar, ekonomik nedenler, savaş, kuraklık, hastalıklar v.b. insan topluluklarının hareketliliğini gün geçtikçe arttırmakta ve koloniler halinde göçe zorlamaktadır. Bu gelişmeler nedeniyle globalleşen dünyada canlı topluluklarının birbirleri ve çevreleri ile etkileşimi kültür, ekonomi, eğitim, çevre koşulları, vb. konularda toplumların karakterlerinin değişmesinde, şekillenmesinde önemli role sahiptir. Bu hareketliliğin nüfusların dinamiğindeki etkileri, bir bölgede yaşayan nüfus büyüklüğünün değişimi ile yansıtılabilir (Büyükkılıç et al, 2016).

Nüfus dinamiğini ifade eden uygun matematiksel modeller bulma arayışları 18. yüzyıla kadar uzanmaktadır. Çevre kaynaklarının sınırlandımasının olmadığı bir model ilk olarak Malthus üstel büyüme yasası olarak bilinen

$$N(t) = N_0 e^{at} \tag{7.1}$$

eşitliği ile verilir. Bu ifade bir nüfusun dinamiğini tanımlayan oran denkleminin çözümüdür (Malthus, 1798). 1838 yılında Verhulst, nüfus dinamiğini etkileyebilecek çevresel faktörleri ve taşıma kapasitesini de göz önüne alan Bernoulli denkleminin özel bir formu ile ifade edilen

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2 \tag{7.2}$$

lojistik büyüme modelini önermiştir (Verhulst, 1838). Öte yandan doğada av-avcı ilişkisi olarak bilinen Lotka-Volterra denklemleri bir biyolojik sistemdeki iki popülasyonun birbirleriyle olan etkileşimlerini izah etmek amacıyla ortaya konan bir modeldir (Murray, 1993). Bu yaklaşımlar, belirli tipteki dinamikleri modellemek konusunda başarılı olsalar da, bir popülasyonu etkileyen ısı değişimleri ölüm ve yaşam olasılıkları gibi rastgele faktörlerin olduğu stokastik karmaşık dinamikleri ifade edemezler. Yakın geçmişte nüfus dinamiklerini ifade eden çeşitli modeller stokastik olarak ele alınmaktadır (Lande et al, 2003; Turchin, 2003; Matis and Kiffe, 2000) .

Bir nüfusun dinamiğini etkileyen birçok çevresel faktör vardır. Bu nedenle nüfus dinamiğinin karmaşık bir fiziksel sistem olarak ve kümülatif yaklaşımla ele alınması hem bu dinamiği anlamak açısından hem de kesirsel matematiğin bu tip dinamikleri tasvir edebilmesindeki başarısının ortaya konulması açısından önemlidir. Bu itibarla bu bölümde, önceki bölümlerde ayrıntılı olarak değinilen kümülatif artma mekanizmasının bir uygulaması olarak bir toplulukta yaşayan canlı nüfusunun dinamiği kümülatif artış bağlamında ele alınmaktadır. Söz konusu nüfusun geliştiği çevre ile etkileşimi ve çevre koşullarının sınırlayıcı etkisi göz önünde bulundurularak, kümülatif büyüme modelinde, nüfus artış hızı sınırlandırılarak literatürde bilinen lojistik map ve onun sürekli karşılığı lojistik denklem ile ilişkisi kurulmuştur.

7.1 Canlı Nüfus Dinamiğinin Kümülatif Yaklaşımla İncelenmesi

Bir nüfusun gelişim sürecinin kesikli dinamiği, kümülatif olarak artan bir süreç olarak ele alındığında, n. adımındaki nüfusu N_n olmak üzere, Δt zaman sonraki ardışık adımdaki nüfus büyüklüğü ile ilişkisi, $\phi = (1 + a\Delta t)$ gelişim operatörü cinsinden

$$N_{n+1} = (1 + a\Delta t)N_n \tag{7.3}$$

eşitliği ile ifade edilir. Burada a artış hızı olup zamandan bağımsız alınmaktadır. Bu denklem bir canlı topluluğunun nüfus dinamiğini hiçbir sınırlama olmaksızın artan bir süreç olarak, zamana ve büyüme hızına bağlı olarak tasvir etmektedir.

Bir alandaki nüfusa oranla mevcut besinin yetersizliği, savaş, hastalık, kuraklık, ekonomik nedenler vb. çevresel etkiler belirli bir eşik değerine kadar sistem tarafından tolere edilir. Ancak bir değerden sonra yaşamı idame ettirmeye yarayan kaynaklar nüfus gelişimi üzerinde sınırlayıcı esas öge olmaktadır. Bir başka deyişle gerçekçi bir nüfus dinamiği için (7.1) ve (7.3) eşitlikleri gibi, sürekli devam eden bir artış olarak ifade edilen nüfus gelişimlerinin artış hızına bir sınırlandırma getirilerek sistemin dengeye gitmesi temin edilir. Bu amaçla, nüfus artış hızı a, çevrenin taşıma kapasitesi etkisini dahil etmek için

$$a = a_0 \left(1 - \frac{N_n}{N_{\text{max}}}\right) \tag{7.4}$$

şeklinde alınsın. Bu durumda (7.4) eşitliği (7.3) denkleminde yerine konulur ve yeniden düzenlenirse, kümülatif gelişen bir nüfus için

$$N_{n+1} = (a_0\Delta t + 1)N_n - \frac{a_0\Delta t}{N_{\text{max}}}N_n^2 \tag{7.5}$$

kesikli denklemi elde edilir. (7.5) eşitliğinin her iki tarafı Δt'ye bölünürse, $\Delta t \to 0$

limiti için denklem sürekli hale gelir ve

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2 \tag{7.6}$$

denklemi elde edilir. Burada $a = a_0$ ve $b = a_0/N_{\text{max}}$'tır. Bu ise literatürde iyi bilenen bir lojistik denklemdir (Strogatz, 1994; Davis, 1962). (7.6) denklemine göre, nüfusun değişiminin esas belirleyicisi, nüfus artış hızı a, nüfus artış hızını frenleyen ise çevre etkisini empoze eden b katsayısıdır.

Nüfus dinamiğinde temel bir tasvir elemanı olarak bilinen lojistik map denklemi ve (7.5) denklemi ile verilen kesikli kümülatif büyüme denklemi arasında bir ilişki kurulabilir. Bu amaçla (7.5) denklemi

$$N_{n+1} = rN_n - \frac{(r-1)}{rN_{\text{max}}} N_n^2 \tag{7.7}$$

formunda yazılsın. Burada $r = (1 + a_0 \Delta t)$'dir. Kümülatif nüfus denklemini boyutsuz bir denklem haline getirmek üzere

$$N_n = \frac{rN_{\text{max}}}{r-1} x_n \tag{7.8}$$

dönüşümü yapılır ve (7.7) denkleminde yerine konulursa

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \tag{7.9}$$

lojistik map elde edilir. Böylece, birçok içerikte ortaya çıkan en basit doğrusal olmayan fark denklemi, kümülatif süreçlerle ilişkilendirilerek elde edilir. Görüldüğü üzere, lojistik map, (7.7) denkleminin boyutsuz hale getirilmesiyle elde edilen ve içinde sınırlandırılmış kümülatif büyümeyi barındıran doğrusal olmayan bir kesikli denklemdir.

Denklem (7.6), çevre etkisini de içeren bir nüfus dinamiğini tasvir eden doğrusal olmayan Bernoulli denklemidir. Bu denklemin kümülatif yöntem çerçevesinde tarafımızdan yapılan ayrıntılı bir melez çözümü ele alınmıştır. Bu çalışmada nüfus gelişimine çevre etkisi differintegral mertebesi α ile ortaya konmaktadır (Büyükkılıç et al, 2016). (7.6) denkleminde a ve b parametreleri sürecin dinamiğine göre belirlenmektedir. Sistemin, denge durumuna ait çözümleri için, denklemde özel olarak a ve b pozitif sabitler olarak seçilsin. (7.6) eşitliği ile verilen doğrusal olmayan denklemin çözümü için

$$N(t) = \frac{1}{u(t)} \tag{7.10}$$

değişken dönüşümü yapılarak denklem

$$\frac{du(t)}{dt} + au(t) = b \tag{7.11}$$

birinci mertebeden doğrusal bir diferansiyel denkleme indirgenir. (7.11) denkleminin homojen kısmının kümülatif yöntem ile çözümü daha önceki bölümlerde açıkça tasvir edildiği üzere limit durumunda

$$u_h = c\exp(-at) \tag{7.12}$$

ile verilmektedir. Bu durumda (7.11) denkleminin genel çözümü,

$$u_g = c\exp(-at) + \frac{b}{a} \tag{7.13}$$

elde edilir. (7.10) dönüşümünden, nüfusun büyümesinin $t = 0$ için başlangıç büyüklüğü N_0 olmak üzere, ortamın etkisinin göz ardı edildiği nüfus büyümesi, bilinen lojistik fonksiyonu

$$N(t) = \frac{N_0}{\left(1 - \frac{b}{a}N_0\right)\exp(-at) + \frac{b}{a}N_0}. \tag{7.14}$$

ile ifade edilmektedir (Strogatz, 1994; Davis, 1962).

Ancak çevresel faktörlerin, nüfus gelişimine etkileri göz önünde bulundurulduğunda, indirgenmiş lojistik denklemi

$$\frac{D_0^\alpha u(t)}{dt} + au(t) = b \tag{7.15}$$

formunda alınmalıdır. Bu durumda, (7.15) denkleminin homojen çözümü, kümülatif küçülme operatörü $\phi = (1 - a\Delta t)^\alpha$ yardımıyla ML fonksiyonu cinsinden

$$u_h = cE_\alpha(-at^\alpha) \tag{7.16}$$

formunda elde edilir. Böylece (7.15) denkleminin genel çözümü

$$u_g = cE_\alpha(-at^\alpha) + \frac{b}{a} \tag{7.17}$$

şeklinde bulunur. Burada $c = (u_0 - \frac{b}{a})$ biçiminde tanımlıdır. Nüfus büyümesi için $t = 0$'daki başlangıç koşulu $N_0 = 1/u_0$ göz önünde bulundurularak, (7.10) dönüşümünden çevre etkilerini barındıran melez çözüm

$$N(t) = \frac{N_0}{\left(1 - \frac{b}{a}N_0\right)E_\alpha(-at^\alpha) + \frac{b}{a}N_0} \tag{7.18}$$

olarak elde edilir. (7.18) çözümünün zaman içindeki gelişimini tespit etmek için limit durumlarına bakmak yerinde olur. (7.18) çözümünün limit değerleri ML fonksiyon limit özellikleri ile belirlenir[Bkz.Ek-C]. Sürecin başlangıcında, $at \ll 1$ durumunda nüfus değeri için

$$N(t) \approx N_0 \tag{7.19}$$

elde edilir. Uzun zaman gözlem sonucunda, nüfusun ulaştığı taşıma kapasitesini ifade eden

$$N(t) \approx \frac{a}{b} \tag{7.20}$$

değeri elde edilir. Bu durumda sistemin dengeye ulaştığı söylenebilir.

$N(t)$ nüfusunun zaman içinde gelişimi, başlangıç koşulu N_0'ın, denge durumu olan a/b değerine göre büyüklüğü ile yakından ilgilidir. Ayrıca, bir nüfusun büyüme ya da küçülme dinamiği, üreme katsayısı a'nın işareti ve frenleyici terim b'ye bağlı olmaktadır. Başlangıç koşulu N_0'ın, $0 < N_0 < \frac{a}{b}$ aralığında olması durumunda, nüfus fonksiyonu monoton olarak artarak uzun zaman limitinde denge değeri olan $N_{max} = \frac{a}{b}$'ye ulaşır. Bu durum, büyümekte olan bir sistemi tasvir etmektedir. Diğer taraftan, $N_0 > \frac{a}{b} > 0$ sağlandığında, nüfus fonksiyonu monoton olarak azalır ve uzun zaman limitinde $N_{max} = \frac{a}{b}$ değerine ulaşır. Bu durumda da nüfusun azalma davranışı gösterdiği söylenebilir. Bu gözlemler, aşağıdaki grafikler üzerinde de açıkça görülmektedir.

Nüfusu kısıtlayıcı terimi $b = 0$ olması durumunda (7.18) denkleminin çözümü

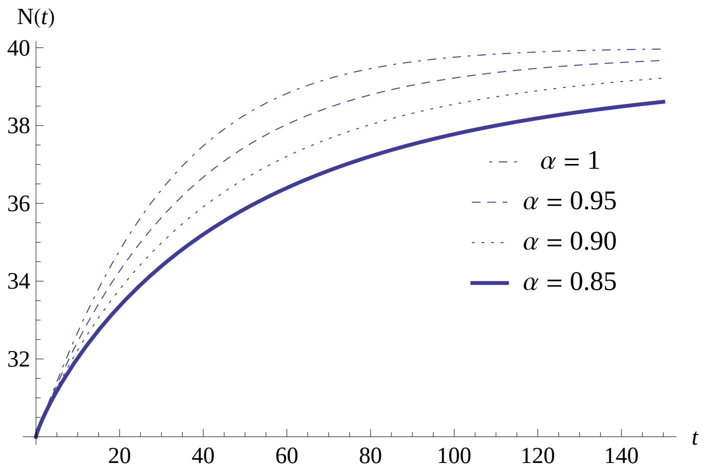
$$N(t) = \frac{1}{cE_\alpha(-at^\alpha)} \tag{7.21}$$

formunda bir modifiye Malthus yasasını tasvir eder.

Yukarıdaki çözümlerde, $a > 0$ ve $b > 0$ olduğu (7.6) denklemi ile verilen sistemin kararlığı irdelenmiştir. Cebirsel olarak, $a > 0$ ve $b > 0$ olmakla birlikte (7.6) denkleminde, a'nın işaretinin pozitif ve b'nin işaretinin pozitif ya da a ve b'nin denklemdeki işaretlerinin negatif olduğu koşullar da ele alınabilir. Ancak her iki durumda da, sistemi frenleyen bir etki olarak ele alınan b terimi, sistemin temel davranışını belirleyen üreme katsayısı a ile benzer etkiye neden olacağı için, sistemi dengeye getiren bir rol oynamaz. Bu durumlar bize göre, nüfus dinamikleri için birer çözüm olarak kabul edilemezdir. Ancak bu seçimlere ek olarak a'nın denklemdeki işaretinin negatif ve b'nin denklemdeki işaretinin pozitif seçilmesiyle, popülasyonun dinamiğini ifade eden çözüm fonksiyonu

$$N(t) = \frac{N_0}{\left(1 + \frac{b}{a}N_0\right) E_\alpha(at^\alpha) - \frac{b}{a}N_0} \tag{7.22}$$

Şekil 7.1: Canlı nüfusunun $0 < N_0 < \frac{a}{b}$ olması koşulunda, farklı α değerleri için gösterimi.



bir soyun tükenmesini ifade edecektir. Azalan bir nüfusu ifade eden (7.22) fonksiyonu, çevre etkilerinin göz ardı edildiği durum olan $\alpha \to 1$ limitinde,

$$N(t) = \frac{N_0}{\left(1 + \frac{b}{a}N_0\right)\exp(at) - \frac{b}{a}N_0} \tag{7.23}$$

eşitliğine indirgenir.

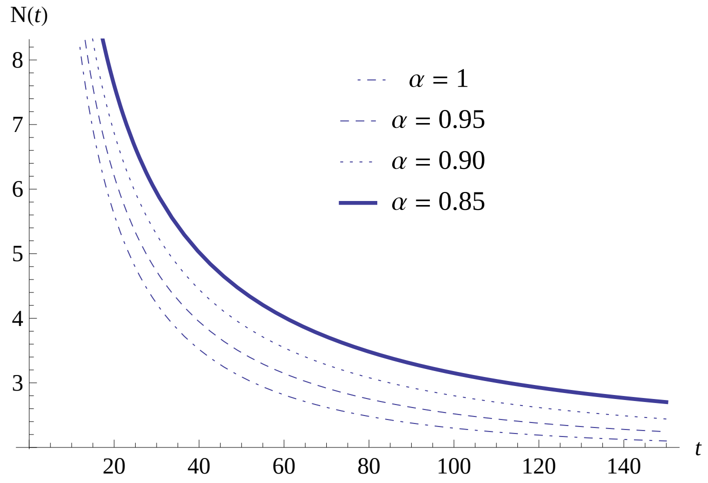
Şekil 7.1 ve Şekil 7.2, çevre etkisinin nüfus dinamiğine etkisini göstermesi bakımından değişen α değerleri için çizilmektedir. Şekil 7.1, başlangıç değeri birim (br.) büyüklük cinsinden olmak üzere $N_0 = 30$ br. ve $a = 0.04$ br., $b = 0.001$ br. katsayıları için çizilmektedir. Bu değerler incelenen nüfusun büyüklüğüne göre genişletilebilirler. Şekilden gözlemleneceği üzere, α değeri büyüdükçe, nüfus büyümesi hızlanmakta ve nihayet denge değeri olan taşıma kapasitesine ulaşmaktadır.

Şekil 7.2 başlangıç değeri $N_0 = 50$ br. olmak üzere $a = 0.02$ br. ve $b = 0.01$ br. katsayıları için çizilmektedir. Şekilden gözlemleneceği üzere, α değeri büyüdükçe, nüfusun azalması yavaşlamakta ve denge değerine ulaşmaktadır.

7.1.1 İki bileşenli nüfus dinamiği

İnsan topluluklarının göç hareketlerinin sayılarının arttığı bir dönemde, bir coğrafyada mevcut yaşayan; yerli ve onlara parça parça katılan mültecilerin (kolonilerin) zaman içinde nüfuslarının ulaşacakları miktarlarının kıyaslanmaları önem arz etmektedir. Bu amaçla, nüfusun bu dinamiğini tasvir etmek üzere, bir çevrede, başlangıç yerli nüfus N_0'a, dışarıdan Δt zaman aralıkları ile, her adımda P kadar bir koloni topluluğu katıldığı varsayılsın. Burada iki bileşenin, sırasıyla yerli ve kolonial mülteci topluluklarının kümülatif olarak, aynı artış hızı ile nüfuslarını arttırdığı

Şekil 7.2: Canlı nüfusunun $N_0 > \frac{a}{b}$ olması koşulunda, farklı α değerleri için gösterimi.



varsayılsın. t zaman sonra, akümülatif nüfusu K'nın ne olacağını incelensin. Burada P sayıdaki topluluğun, o nüfus için iç ya da dışa göç olmasına göre akümülatif nüfus için matematiksel olarak iki durum söz konusu olabilir: yerli nüfus ile koloni nüfusunun toplamları veya farkları.

Öncelikli olarak nüfusu oluşturan iki bileşenin zaman içinde ulaştıkları nüfusları kıyaslamak için bileşenlerinin farkları ele alısın. Bu durumda nüfus, bu katılım nedeniyle, üstel olarak Malthus büyüme yasası gereğince artmaz, çevre etkisel bir faktör olarak mevcut nüfusun azalmasına neden olur. Böylece n adımda t süresince nüfusun ulaşacağı durum, her bir Δt zaman aralığına karşılık gelen ardışık adımlar için

$$\begin{aligned}
\text{0. adım;}\quad K_0 &= \phi^0 N_0 \\
\text{1.adım;}\quad K_1 &= N_0 + \lambda \Delta t N_0 - P = \phi N_0 - P \\
\text{2.adım;}\quad K_2 &= N_1 + \lambda \Delta t N_1 - P = \phi^2 N_0 - (\phi + 1)P \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\text{n.adım;}\quad K_n &= \phi^n N_0 - (\phi^{n-1} + \phi^{n-2} + ... + 1)P
\end{aligned} \tag{7.24}$$

yazılabilir. Bu eşitliğe göre, akümülatif nüfus sembolik olarak

$$K = L - T, \tag{7.25}$$

olarak yazılsın. Burada

$$L = \phi^n N_0 \tag{7.26}$$

ve

$$T = P\sum_{k=0}^{n-1}\phi^k = P\frac{1-\phi^n}{1-\phi} \tag{7.27}$$

dir. Böylece (7.25) eşitliği için

$$K = \phi^n N_0 - P\frac{1-\phi^n}{1-\phi} \tag{7.28}$$

elde edilir.

Akümülatif nüfus K'nın pozitif olması yani $L > T$ olması durumunda nüfusun, t zaman içinde gelişiminde yerli nüfusun artışının, göçmen nüfusun artışının üstünde kaldığını gösterir. $L = T$ durumu, yani $K = 0$, yerli nüfusun artışı ile göçmen nüfusun artışının dengelendiği anlamına gelir. $L < T$ durumu yani $K < 0$ olduğu durumda, yerli nüfusun artışının, göçmen nüfusun artışından küçük kaldığı sonucu çıkarılır. Burada sıra ile yerli nüfus çoğalmasının, göçmen nüfus çoğalmasının üstünde kalması, yerli nüfus çoğalmasının, göçmen nüfus çoğalmasına eşit olması ve yerli nüfus çoğalmasının, göçmen nüfus çoğalmasının altında olması durumlarının, N_0, t, P gibi değişkenlere bağlı olduğu gözlemlenir. Bu bakış açısıyla t süre sonra, N_0 başlangıç nüfusu ve a artış hızı ile nüfusun ulaştığı birikim değeri, q bir rasyonel sayı olmak üzere

$$K_q = qN_0 \tag{7.29}$$

formunda yazılabilir. Bunun nedeni denge durumundan hareketle, P_q değerinin başlangıç değeri N_0'nın bir katı olarak yazılabilmesidir. Böylece

$$P_q = N_0\frac{(q-\phi^n)(\phi-1)}{1-\phi^n} \tag{7.30}$$

eşitliği yazılır. Bir örnek olarak, $q = 1, 0, -1$ değerleri için P_q niceliği sırasıyla

$$P_1 = N_0(\phi-1) = \frac{N_0}{n}at \tag{7.31}$$

$$P_0 = N_0\frac{\phi^n(1-\phi)}{1-\phi^n} \tag{7.32}$$

ve

$$P_{-1} = N_0\frac{(1+\phi^n)(1-\phi)}{1-\phi^n} \tag{7.33}$$

olarak elde edilir. $q = 1$ durumunda, birikim nüfusu zamanla aynı kalır. $q = 0$ durumunda birikim nüfusu zamanla sıfıra yönelir. $q = -1$ durumunda, koloninin eriştiği nüfus mevcut nüfusun eriştiği nüfusu N_0 kadar aşar.

Nüfus birikimi için oluşabilecek ikinci bir durum ise, göçmen nüfusun yerli nüfusunu arttırıcı yönde etki yapmasıdır. Bu durumda, t zaman sonra iki bileşenden oluşan akümülatif nüfus yerli nüfus ve koloni nüfusla birlikte

$$K = L + T \tag{7.34}$$

birikimi oluşturur. Bu durum, iki nüfusun birbirleriyle etkileşme içinde olmadığı, bağımsız olarak geliştiği idealize bir duruma karşılık gelmektedir. Ancak topluluklar, sosyal, ekonomik, kültürel v.b. birçok yönden etkileşim içindedir. Bu durum, kümülatif mekanizmaya bir q parametresi ile şu şekilde dahil edilebilir:

$$K_q = L_q + T_q + (1-q)L_q T_q. \tag{7.35}$$

Burada, q, sosyal akışkanlık parametresidir. $q \neq 1$ durumu, K_q'nun toplanabilir olmadığı, $q = 1$ durumunda ise L_1 ve T_1 etkileşme içinde olmadığı için K_1 durumunun, toplanabilir olduğu söylenebilir (Tsallis, 2009).

K_q'nun negatif olmadığı kabulü ile, K_q birikimini oluşturan nüfuslar için, $q < 1$ ise $K_q \geq L_q + T_q$, $q > 1$ ise $K_q \leq L_q + T_q$ geçerlidir. Buradan $q < 1$ ve $q > 1$ koşullarının sırasıyla, superadditive ve subadditive oldukları söylenebilir. Bu yaklaşımda q'nun topluluklar arası akışkanlığın bir ölçüsü olduğu sonucuna ulaşılır.

Topluluklar arası etkileşmenin olmadığı $q = 1$ durumu için (7.26) ve (7.27) eşitliklerinden

$$K = \phi^n N_0 + P\frac{1-\phi^n}{1-\phi} \tag{7.36}$$

yazılır. Özel olarak bir aşamada katılan göçmen nüfus, yerli nüfusa eşit $P = N_0$ olacak şekilde gerçekleşen bir senaryoda, akümülatif nüfus için

$$K = N_0 + P\frac{1-\phi^{n+1}}{1-\phi} \tag{7.37}$$

geçerlidir.

7.1.2 İki bileşenli nüfus dinamiğinin denge durumu

Yerli nüfusun artışı ile kolonial nüfus artışlarının bir t zaman sonra eşit olduğu durum başka bir deyişle denge durumu, nüfusun evrildiği o bölge için sosyal, ekonomik, kültürel, vb. bakımlardan ilginç olabilir. Bu nedenle, denge durumunun fiziksel gerçekleşme şartları daha yakından ele alınsın. (7.25) denklemi ile verilen birikim nüfusunda, yerli nüfusun kolonial nüfusla eşitlendiği denge durumunun sağlanması için

$$P\left(z\right)=\frac{z}{1-\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^{-n}}\frac{N_0}{n} \tag{7.38}$$

olması gerekir. Burada $z=at$'dir. P, $N_0/n=n_0$ cinsinden, bir olasılık fonksiyonu $f(z)$ olarak yazılabilir. Böylece, denge durum olasılığı $f(z)$; her bir adımda yerli nüfusu dengeleyici bir olasılık olmak üzere

$$f(z)=\frac{z}{1-\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^{-n}} \tag{7.39}$$

şeklinde yazılabilir. n'nin yeterince büyük değerleri için

$$f(z)=\frac{z}{1-e^{-z}} \tag{7.40}$$

formunda davranış gösterir. Bu amaçla, $f(z)$ olasılığı, Bernoulli sayılarının üretiç fonksiyonu yardımı ile

$$f(z)=\frac{z}{1-e^{-z}}=\sum_{m=0}^{\infty}B_m\frac{(-z)^n}{m!} \tag{7.41}$$

yazılabilir. Burada B_m'ler Bernoulli sayılarıdır (Mathai and Haubold, 2008). Bernoulli sayılarından birkaçı $B_0=1$, $B_1=-1/2$, $B_2=1/6$, $B_3=0$, $B_4=-1/30$, $B_5=0$, $B_6=1/42,\ldots$, olmak üzere, kolonial katkının denge durumu için olasılığı

$$f\left(z\right)\simeq 1+\frac{1}{2}z+\frac{1}{6}z^2-\frac{1}{30}z^4+\frac{1}{42}z^6+\ldots \tag{7.42}$$

olarak yazılabilir.

(7.40) eşitliğinden hareketle, iki bileşenli, eşit nüfusa ulaşmış bir yapının, denge olasılık fonksiyonu $f(z)$'nin sağladığı bir diferansiyel denklem elde edilebilir. Bunun için $f(z)$, $f^2(z)$ ve $f'(z)$ nicelikleri arasındaki ilişkiden, $f(z)$ için

$$f'(z)+p(z)f(z)=q(z)f^2(z) \tag{7.43}$$

tipinde bir denklem elde edilir. Burada

$$p(z)=-\frac{1}{z},\quad q(z)=-\frac{e^{-z}}{z} \tag{7.44}$$

dir. Görüldüğü üzere, formal olarak (7.43) denklemi bir Bernoulli denklemidir (Davis, 1962; Ross, 1989). Bu durum, akümülatif nüfusun bileşenlerinin eşit olduğu denge durumu için elde edilen denklemin, doğrusal olmayan birinci dereceden bir denklem olduğu anlamına gelir. Doğal olarak (7.42) denkleminin çözümü, (7.39) ve

(7.41) ile verilen $f(z)$ olasılık fonksiyonudur. Burada ilginç olan bir diğer durum da, çözümün bir seri şeklinde Bernoulli sayıları kullanılarak yazılabilmesidir. Bir başka bakış açısıyla, Bernoulli sayıları, nüfus artışı ile ilgili bir diferansiyel denklemin çözümünü üreten katsayılar olarak karşımıza çıkmaktadır.

7.2 Çevresiyle Etkileşen Bir Nüfus Dinamiğinin Kesirsel Matematikle Ele Alınması

Nüfus dinamiğinin içinde geliştiği çevre ile etkileşim içinde olduğu aşikardır. Bu nedenle nüfus dinamiğini, ortamın kırıklı yapısının zaman içindeki bekleme ve gecikme gibi bellek etkilerini barındıran daha karmaşık bir süreç olarak ele almak gerekir. Bu nedenle kümülatif gelişim operatörü ϕ, $0 < \alpha \leq 1$ aralığında tanımlı bir α parametresine bağlı olarak

$$\phi = (1 + a\Delta t)^{\alpha} \tag{7.45}$$

seçilebilir. Böylece (7.3) bağıntısı ile tasvir edilen kümülatif olarak artan bir nüfus süreci, başlangıçtaki değeri N_0 cinsinden

$$N_n = \phi N_{n-1} = [(1 + a\Delta t)^{\alpha}]^n N_0 \tag{7.46}$$

kesikli denklem ile yazılabilir. (7.46) denklemi ile verilen algoritmanın kümülatif büyümeye ait yaklaşımı izlenerek, adım sayıları sıklaştırıldığında, elde edilen çözümde nüfusun zamanla gelişimi ML fonksiyonu cinsinden

$$N(t) = N_0 E_{\alpha}(at^{\alpha}) \tag{7.47}$$

çözümünün bir özel hali olmaktadır. Görülüyor ki, kümülatif büyüme sürecinde, adım sayısının çok büyümesi halinde elde edilen çözüm fonksiyonu üstel ya da ML formunda olsun, her iki durumda da adım sayısından bağımsız hale gelmektedir. Yani, süreç kesikli durumdan, sürekli hale getirilmektedir.

Kesirsel matematiğin diferansiyel denklemlerin çözümündeki başarısının altında yatan temel mekanizmanın, kümülatif büyüme olduğu tarafımızca gösterilmiştir (Büyükkılıç et al, 2015, 2016). Nüfus artışı Öklidiyen olmayan, fraktal, kırıklı bir uzayda, Morkoviyen olmayarak geliştiğinden, kümülatif yaklaşıma paralel olarak kesirsel matematik çerçevesinde ele almak yerinde olur. Bu itibarla, $N(t)$ nüfusunun zamanla gelişimi için bir nüfusun artışını gösteren kesirsel oran denklemi olarak

$$D_t^{\alpha}N(t) - N_0\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} = a^{\alpha}N(t) \tag{7.48}$$

yazılır. Kesirsel diferansiyel denklemin Laplace dönüşüm yöntemi izlenerek çözümü yapılabilir. Böylece nüfus gelişiminin kesirsel matematik ile elde edilen çözümü, kümülatif büyüme yöntemi ile elde edilen (7.47) çözümü ile aynı olduğu görülmektedir.

ML fonksiyonunun limit durumları olan (9.14) ve (9.15) eşitlikleri göz önünde bulundurulursa, ML fonksiyonun, dolayısıyla N_0'a bağlı olarak (7.47) çözümünün üstel form ve ters kuvvet yasası aralığındaki değerlerde salınım gösterdiği anlaşılır. $\alpha \to 1$ durumunda ise (7.47) ile verilen çözüm, Malthus's yasası formuna dönüşmektedir.

7.2.1 İki bileşenli nüfus dinamiğinin denge durumunun kesirsel diferansiyel denklemi

İki bileşenli nüfus dinamiği, geliştiği çevrenin etkileri göz önünde bulundurmak üzere kesirsel matematik çerçevesinde yeniden ele alınsın. Gelişim operatorü (7.45) formunda seçilsin. Buradaki α parametresi, nüfusun geliştiği çevrenin nüfus gelişimine etkisinin bir ölçütü olarak değerlendirilecektir. Kesirsel matematikte ise α, türev mertebesi olarak kimliklendirilir. Sürecin kesikli olarak her bir Δt zaman aralıkları ile peş peşe kümülatif olarak evrildiğini varsayılsın. Akümülatif nüfus K'nın n. adımdaki durumu (7.24) eşitliğinde α ya bağlı gelişim operatörü cinsinden

$$K_n = \phi^n N_0 - (\phi^{n-1} - \phi^{n-2} + ... + 1)P \tag{7.49}$$

olarak ifade edilir. Buradan

$$K = \phi^n N_0 - P\frac{1-\phi^n}{1-\phi} \tag{7.50}$$

yazılabilir. Akümülatif nüfus için, yerli nüfusun kolonial nüfusla eşitlendiği denge durumu için açıkça

$$P = \frac{\left(1 + a\dfrac{t}{n}\right)^{\alpha} - 1}{1 - \left(1 + a\dfrac{t}{n}\right)^{-\alpha n}}N_0 \tag{7.51}$$

yazılır. (7.51) eşitliğinden, $n/N_0 = n_0$ olmak üzere, P, n_0 niceliği cinsinden bir denge durumu olasılık fonksiyonu $\rho(t)$ olarak ifade edilir. Böylece, yeterince büyük

n değerleri için olasılık fonksiyonu

$$\rho(t) \approx \frac{\alpha a t^{\alpha}}{1 - E_{\alpha}(a t^{\alpha})} \tag{7.52}$$

ile tanımlanabilir. Söz konusu nüfus dinamiğinin denge durumları, çözümü $\rho(t)$ olan bir diferansiyel denklem ile ifade edilebilir. Bu amaçla, denge durumu olasılık fonksiyonu

$$\frac{\alpha a t^{\alpha}}{\rho(ti)} = 1 - E_{\alpha}(a t^{\alpha}) = v(a t^{\alpha}) \tag{7.53}$$

formunda yazılsın. ML fonksiyonlarının, RL türev tanımı kullanılarak (7.53) eşitliği ile verilen $v(at^{\alpha})$ fonksiyonu için

$$D^{\alpha}_{0+}[v(a t^{\alpha})] = a[v(a t^{\alpha}) - 1] \tag{7.54}$$

formunda, kesirsel lojistik denklemi elde edilir. Burada, kümülatif olarak artan ve çevre etkisinin itibara alındığı iki bileşenli bir nüfus artışında, akümülatif nüfusun bileşenlerinin eşit olduğu denge durumu için, (7.54) eşitliği ile verilen kesirsel bir diferansiyel denklem elde edilmiştir. Başka bir deyişle, (7.54) ile verilen kesirsel diferansiyel denklemlerin çözümleri, denge durumunda, yerli nüfusa eklenen $P(t)$ göçmen nüfusunun olasılığının zamana bağlı gelişimini göstermektedir.

8. CANLILARDA BİREYSEL YAŞAM VE ÖLÜM OLASILIKLARI

8.1 Bir Canlının Yaşam ve Ölüm Olasılıklarına Kümülatif Yaklaşım

Bölüm-7 Kesim-1'de belirli bir bölgedeki bir topluluğa ait nüfusun dinamiği, niceliksel değişimi bağlamında ele alınmıştır. Bunun yanı sıra bir canlı topluluğuna ait yaşlanma, yaşam ömrü tahmini, ölüm örgüsünün zaman içindeki değişimi gibi mekanizmaları tanımlamak, bu niceliklerin olasılıklarından hareketle de mümkün olmaktadır. Bu amaçla, bu bölümde bir nüfusun dinamiğine ait bu mekanizmalar tarihsel süreçte değeri olan bağıntılar gözden geçirilerek ele alınmaktadır. Bu bağlamda, canlı topluluğuna ait bir ölüm olasılığının zaman içindeki gelişimi oran denkleminin kümülatif küçülme ile tasvirinden hareketle ele alınmaktadır. Burada, canlıların yaşadığı çevresi ile etkileşiminin bir sonucu olarak ölme ve yaşama olasılıklarının sınırlandırılması gereği ortaya çıkmıştır. Bu amaçla, ölüm ve yaşam olasılıklarını tasvir eden kümülatif yaklaşım ile lineer olmayan kesikli ve sürekli denklemler arasındaki ilişki ortaya konmakta ve bir canlıya ait ölüm ve yaşam olasılıklarının dinamiğini tasvir eden çözümler kümülatif yaklaşımla elde edilmektedir. Burada, canlının yaşadığı çevrenin, ölüm ve yaşam dinamiklerine olan etkisinin bir ölçütü olarak bir α parametresi ortaya çıkmaktadır.

Bir canlının t yaşına kadar yaşama olasılığı $p(t)$, $\mu(t)$ ölüm fonksiyonu cinsinden

$$\mu(t) = -\frac{d \ln p(t)}{dt} \tag{8.1}$$

eşitliği ile tanımlanır. Burada $\mu(t)$ pozitif, sürekli bir fonsiyondur. (8.1) denkleminden, bir canlının yaşama olasılığı için diferansiyel denklem

$$\frac{dp}{dt} = -\mu(t)\, p(t) \tag{8.2}$$

formunda elde edilir. Yaşam olasılığın ait diferansiyel denklemi çözülürse, canlının yaşama başladığı $t = 0$'da yaşama olasığı $p(0) = 1$ alınarak yaşam olasılığı için

$$p(t) = e^{-\int_0^t \mu(t')dt'} \tag{8.3}$$

eşitliği elde edilir. Burada ölüm fonksiyonu $\mu(t)$ nin seçimi yaşama olasılığının matematiksel olarak hesaplanması bakımından önem arz etmektedir. Ölüm fonksiyonu $\mu(t) = a$ sabit alınırsa, canlının yaşama olasılığı ya da ayakta kalma olasılığı basit üstel dağılım olarak

$$p\left(t\right) = p_0 e^{-at} \tag{8.4}$$

eşitliği ile ifade edilir. Bu durumda canlının ölüm olasılığı ise

$$q\left(t\right) = 1 - p_0 e^{-at} \tag{8.5}$$

bulunur.

Canlının yaşadığı ortamın, canlı ile olan etkileşimini itibara almak için, (8.2) numaralı denklem, kümülatif küçülme ve kesirsel matematik ile çözülebilir. Burada, kümülatif küçülme metodunda, operator kuvveti, kesirsel matematikte türev mertebesi olarak kimliklendirilen $0 < \alpha \leq 1$ ile sürece dahil edilir. Sürecin geliştiği ortamın fraktallığı ve küçülmenin kümülatif olarak ilerlediği göz önünde bulundurulursa, oran denkleminin çözümü olan yaşam olasılığı her iki metotta da ML fonksiyonu cinsinden

$$p\left(t\right) = p_0 E_\alpha[-(at)^\alpha] \tag{8.6}$$

olur. Bu durumda ölüm olasılığı ise

$$q\left(t\right) = 1 - p_0 E_\alpha[-(at)^\alpha] \tag{8.7}$$

elde edilir. Ancak bu basit üstel fonksiyonlarla tanımlanan ve kümülatif yaklaşımla elde edilen çözümler, ölüm ve yaşama ait olasılıkları kısıtlama olmaksızın tasvir ettikleri için yetersiz kalmaktadır.

Bu yaklaşımların dışında yıllara bağlı olarak yaşlanan bir çok sistemin yaşam dinamiğini tasvir eden pratik bağıntılar mevcuttur. İnsan ölümünün yıllara bağlı dinamiği ise Gompertz tarafından,

$$\mu\left(t\right) = b\exp(ct) \tag{8.8}$$

formunda bir ölüm fonksiyonu ile tasvir edilmiştir (Gompertz, 1825; Gavrilov and Gavrilova, 2001; Shklovskii, 2005). Burada b, c deneyle uyum içinde tayin edilmesi gereken reel ve sıfırdan büyük parametrelerdir. 1860'ta Makeham, Gompertz'in üstel olan ölüm fonksiyonuna yaştan bağımsız bir a terimi ekleyerek formülü iyileştirmede katkı sağlamıştır (Makeham, 1860). Bu durumda ölüm fonksiyonu

$$\mu\left(t\right) = a + b\exp(ct) \tag{8.9}$$

eşitliği ile verilir. (8.9) formülündeki a terimi, yaşa bağlı olmayan diğer tüm nedenlerden dolayı ölüm risklerini hesaba katmaktadır. Bu durumda (8.9) formülü ile, t yaşına kadar yaşama olasılığı

$$p(t) = \exp[-at - \frac{b}{c}[\exp(ct) - 1]] \tag{8.10}$$

olur. Bu durumda ölüm olasılığı ise

$$q(t) = 1 - \exp[-at - \frac{b}{c}[\exp(ct) - 1]] \tag{8.11}$$

bulunur.

Ölüm fonksiyonu $\mu(t)$ için başka seçimler de yapılabilir. P.Grigolini'nin ders notlarını izleyerek (Grigolini, 2008), örneğin $\mu(t)$ bir kuvvet fonksiyonu olarak şöyle seçilebilir:

$$\mu\left(t\right) = a\left(1 + ct\right)^{\beta}. \tag{8.12}$$

Bu seçime göre (8.3) denkleminden, yaşam olasılığı $p(t)$

$$p(t) = \exp(-\frac{a}{c}\frac{1}{1+\beta}[(1 + ct)^{1+\beta} - 1]) \tag{8.13}$$

bulunur. (8.13) formülü ile verilen yaşam olasılığı, $\beta = 0$ koşulu için, (8.4) üstel ifadesi ile özdeş olur. $\beta > 0$ durumunda ise daha hızlı sıfıra gider. Diğer yandan $\beta < 0$ iken, yaşam olasılığının, üstel bir azalmaya göre daha yavaşladığı görülür. $\beta = -1$ koşulu için,

$$p\left(t\right) = \frac{1}{\left(1 + ct\right)^{\frac{a}{c}}} \tag{8.14}$$

elde edilir. Uzun zaman limitinde, (8.14) olasılık ifadesindeki paydadaki 1 ihmal edilir ve

$$p\left(t\right) = \left(ct\right)^{-\frac{a}{c}} \tag{8.15}$$

eşitliği geçerlidir. Bu durum ise tekillik yaratan bir ters kuvvet yasasıdır. Doğal olarak yaşama olasığı/ölme olasılığı β nın seçimine bağlıdır (Grigolini, 2008).

(8.13) denklemi ile verilen yaşam olasılığı için uzun zaman limitinde

$$p\left(t\right) = \exp\left(-\frac{a}{1+\beta}c^{\beta}t^{1+\beta}\right) \tag{8.16}$$

eşitliği elde edilir. (8.16) yaşam olasılığı ifadesini daha sade bir formda yazmak üzere

$$\nu = \beta + 1 \tag{8.17}$$

olmak üzere

$$\lambda = [\frac{a}{\nu} c^{\nu-1}]^{\frac{1}{\nu}} \tag{8.18}$$

dönüşümü yazılsın. Böylece (8.16) olasılığı için kapalı bir form olarak

$$p\,(t) = \exp(-(\lambda t)^{\nu}) \tag{8.19}$$

eşitliği elde edilir. (8.19) yazımı ile, (8.16) yaşam olasılığı için, Tsallis tarafından ortaya konan non-ektensif termodinamikteki genelleştirilmiş üstel cinsinden

$$p_q(t) = [1 + (q-1)\lambda t]^{\frac{\nu}{q-1}} \tag{8.20}$$

eşitliği ile ifade edilebilir. Bu durumda, (8.20) eşitliği $q = 1$ limitinde (8.19) eşitliğine denk olur. Böylece genelleştirilmiş üstel ve entropi indeksi q, nüfus dinamiğinde bir yaşam olasılık dinamiğini ifade eden bir formülle ilişkilendirilmiş olmaktadır. Bu sonuç, kuvvet yasası formunda bir ölüm fonksiyonunun, uzun zaman limitini tasvirde ortaya çıkmaktadır.

8.2 Yaşam ve Ölüm Olasılıklarının Diferansiyel Denklemi

Ekosistemdeki bir nüfusun elemanlarının sınırlı bir ömürleri mevcuttur. Ancak nüfus bireylerinin hayatta kalma davranışları ya da canlı dinamiğinin matematiksel olarak ele alınış biçimine göre ölüm olasılıklarının zaman içindeki gelişimleri her bir türe ve türün bulunduğu çevrenin etkilerine göre farklı olarak ifade edilmektedir. Gerçek dünyaya ait gözlemlerden en temel olarak bir nüfus için yaşama ve ölme olasılıklarının sınırsız olarak artmaması veya azalmaması gerektiği bilinmektedir.

Bir türün ölüm olasılığı için şöyle bir kesikli model ortaya konulsun. Başlangıçta, ölüm olasılığı sıfır ve canlının n birim zaman yaşadığı kabul edilsin. Bir t süresi canlının ömrünü göstermek üzere n sayısı

$$n = \frac{t}{\Delta t} \tag{8.21}$$

eşitliği ile tanımlansın. Burada Δt ay, yıl vb. zaman birimidir. Canlının $(n+1)$. zaman biriminde ölme olasılığı, q_n olasılığını idrak ettikten sonra, $a\Delta t q_n$ kadar artsın. Bu durum kümülatif olarak artış

$$q_{n+1} = (1 + a\Delta t)\, q_n \tag{8.22}$$

denklemi ile verilir. Burada a olasılık için artış hızıdır. Ancak ölüm olasılığı ilanihaye büyüyemez. Bu itibarla, ölüm olasılığının sınırlandırılması gerekir. Bu amaçla,

$$a = a_0\left(1 - \frac{q_n}{q_{\max}}\right) \tag{8.23}$$

alınsın. (8.23) eşitliği, (8.22) ile verilen kesikli kümülatif bağıntıda yerine konulursa

$$q_{n+1} = (1 + a_0\Delta t)q_n - \frac{a_0\Delta t}{q_{\max}}q_n^2 \tag{8.24}$$

denklemi elde edilir. Buradan (8.24) denklemi yeniden düzenlenir ve $\Delta t \to 0$ limiti alınırsa, (8.24) denklemi sürekli hale gelir ve

$$\frac{dq}{dt} = aq - bq^2 \tag{8.25}$$

elde edilir. Böylece ölüm olasılığına ait birinci mertebeden doğrusal olmayan Bernoulli tipinde bir denklem elde edilir (Strogatz, 1994; Davis, 1962; Mathai and Haubold, 2008). q'nun alabileceği q_{max} değerini elde etmek için (8.25) denklemi q_{max} değeri için yazılır ve q_{max}'ın sabit bir değer olduğu göz önüne alınırsa

$$q_{max} = \frac{a}{b} \tag{8.26}$$

bulunur. q_{n+1}'in sıfırdan büyük olması koşulu, yani $a_0\Delta t/(1 + a\Delta t) < 1$ olduğu durumda (8.24) denkleminden tüm adımlarda $q_{max} = \frac{a}{b} \geq q_n$ bulunur.

Ölüm olasılığı, bir lojistik map olarak ele alınabilir. (8.24) denkleminden

$$q_{n+1} = rq_n - \frac{(r-1)}{rq_{\max}}q_n^2 \tag{8.27}$$

yazılır. Burada $r = (1 + a_0\Delta t)$ dir. q_n olasılığı, yeniden ölçeklendirilirse, yani

$$q_n = \frac{rq_{\max}}{r-1}x_n \tag{8.28}$$

alınırsa, (8.24) denklemi bir lojistik map olarak

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \tag{8.29}$$

formunda yazılır. Lojistik map, en basit kesikli lineer olmayan fark denklemidir. Sonuç olarak, bir türün ölüm olasılığı bize göre lojistik map ile ilişkilendirilen kümülatif bir gelişim modeli olarak ifade edilebilir.

Ölüm olasılığının lineer olmayan (8.25) denklemi ile ifade edilen dinamiği, bir hibrit çözüm olarak kümülatif yaklaşımla elde edilebilir. Bunun için öncelikli olarak ölüm olasılığı denklemi keyfi bir $x(t)$ değişkeni cinsinden

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - bx(t)^2 \tag{8.30}$$

formunda yazılsın. Burada $a > 0$ ve $b > 0$ seçilmektedir. (8.30) tipinde lineer olmayan diferansiyel denklemin bir çözüm yöntemi olarak, denklemde $x(t)$ değişkeni yerine

$$x(t) = \frac{1}{u(t)} \tag{8.31}$$

dönüşümü yapılır (Ross, 1989; Davis, 1962). Bu dönüşüm (8.30) denkleminde yerine konularak, denklem $u(t)$ değişkenine göre yazılır ve

$$u' + au = b \tag{8.32}$$

denklemine indirgenir. Bu denklem birinci mertebeden lineer bir diferansiyel denklemdir. Bu denklemin kümülatif küçülmeler yaklaşımı ve kesirsel matematik çerçevesinde çözümü, önceki bölümlerde değinildiği gibi ele alınabilir. Sonuç olarak (8.32) ile verilen denklemin homojen kısmının limit durumunda çözümü

$$u_h = u_0 \exp\left(-at\right) \tag{8.33}$$

yazılır. (8.32) denkleminin toplam çözümü için homojen kısmının çözümü ile bir özel çözümü olan $u_p = b/a$ göz önünde bulundurulursa, (8.32) denkleminin genel çözümü

$$u = c \exp\left(-at\right) + \frac{b}{a} \tag{8.34}$$

formunda elde edilir. Böylece (8.31) dönüşümünden, doğrusal olmayan denklemin çözümü

$$x(t) = \frac{1}{c \exp\left(-at\right) + \dfrac{b}{a}} \tag{8.35}$$

olarak elde edilir. (8.30) denkleminin çözümünde, başlangıç niceliğinin tanım aralığı, çözümün davranışını belirlemektedir. Başlangıç koşulu $x(0) = x_0$, $0 < x(0) < a/b$ aralığında ise fonksiyon, monoton olarak artarak ölüm olasılığı için a/b değerine ulaşır. Bu durumda (8.41) çözümüne ölüm ihtimali $q(t)$ olarak bakılabilir. Böylece çevre koşullarının etkisi bir kenara bırakıldığı durumda ölüm olasılığı için

$$q(t) = \frac{1}{(1 - \frac{b}{a}q_0) \exp(-at) + \dfrac{b}{a}q_0} \tag{8.36}$$

yazılır. Öte yandan başlangıç değeri $x(0) > a/b$ ise, fonksiyon, monoton olarak azalarak yaşam olasılığı a/b'ye ulaşır. Bu durumda, (8.41) niceliği, bir yaşam olasılığı

$p(t)$ olarak bilinen lojistik fonksiyonu

$$p(t) = \frac{1}{(1 - \frac{b}{a}p_0)\exp(-at) + \dfrac{b}{a}p_0} \tag{8.37}$$

indirgenir. Literatürde lojistik denklemin çözümleri olarak bilinen bu fonksiyonlar, sigmoid, S şekilli fonksiyonlar olarak da bilinmektedir (Strogatz, 1994; Ross, 1989).

Ancak çevresel koşulların, yaşam ve ölüm olasılık dinamiğine etkisi göz önünde bulundurulursa, (8.30) denklemi bir α parametresine bağlı olacak şekilde

$$\frac{D_0^\alpha u(t)}{dt} + au(t) = b \tag{8.38}$$

formunda alınmalıdır. Bu durumda, (8.38) denkleminin homojen kısmının çözümü, kümülatif küçülme operatörü $\phi = (1 - a\Delta t)^\alpha$ yardımıyla ML fonksiyonu cinsinden

$$u_h = u_0 E_\alpha \left(-at^\alpha\right) \tag{8.39}$$

yazılır. (8.38) denkleminin genel çözümü için homojen kısmının çözümü ile bir özel çözümü olan $u_p = b/a$ göz önünde bulundurulursa, (8.32) denkleminin çözümü

$$u = cE_\alpha \left(-at^\alpha\right) + \frac{b}{a} \tag{8.40}$$

formunda elde edilir. Böylece (8.31) dönüşümünden, doğrusal olmayan denklemin çözümü

$$x(t) = \frac{1}{cE_\alpha \left(-at^\alpha\right) + \dfrac{b}{a}} \tag{8.41}$$

olarak elde edilir.

(8.30) denkleminin çözümünde başlangıç koşulu $x(0) = x_0$, $0 < x(0) < a/b$ aralığında olduğunda, fonksiyon monoton olarak artacağından, canlının ölüm olasılığının zamanla arttığı gerçeğinden hareketle, (8.41) çözümüne ölüm ihtimali $q(t)$ olarak bakılabilir. Bu durumda çevre etkilerini barındıran ölüm ihtimali için melez çözüm

$$q(t) = \frac{1}{cE_\alpha \left(-at^\alpha\right) + \dfrac{b}{a}}. \tag{8.42}$$

yazılır. Öte yandan başlangıç değeri $x(0) > a/b$ ise, fonksiyon, monoton olarak azalarak yaşam olasılığı a/b'ye ulaşır. Bu durumda, (8.41) niceliği, bir yaşam olasılığı

$p(t)$ olarak

$$p(t) = \frac{1}{cE_\alpha\left(-at^\alpha\right) + \dfrac{b}{a}} \tag{8.43}$$

yazılabilir.

Yaşam ve ölüm olasılıklarına ait fonksiyonların, tam ifadesi için, başlangıç koşulu $0 < q_o < a/b$ olmak üzere denklemde yerine konularak c sabiti, (8.42) denkleminden elde edilir. Böylece yaşam dinamiğinin doğrusal olmayan denkleminin çözümü $q(t)$

$$q(t) = \frac{q_0}{(1-\frac{b}{a}q_0)E_\alpha\left(-at^\alpha\right) + \dfrac{b}{a}q_0} \tag{8.44}$$

formunda elde edilir. Başlangıç yaşama ihtimali $p_0 > \frac{a}{b}$ olmak kaydıyla, (8.43) denklemi

$$p(t) = \frac{p_0}{(1-\frac{b}{a}p_0)E_\alpha\left(-at^\alpha\right) + \dfrac{b}{a}p_0} \tag{8.45}$$

formunda elde edilir. Yaşama ve ölüm ihtimallerinin uzun zaman içinde gelişimi, aynı limit değeri olan a/b ye yönelmektedir. Bu ifadelerdeki α parametresine bağlılık, olasılığın gelişimini etkileyen çevresel koşulların varlığıdır.

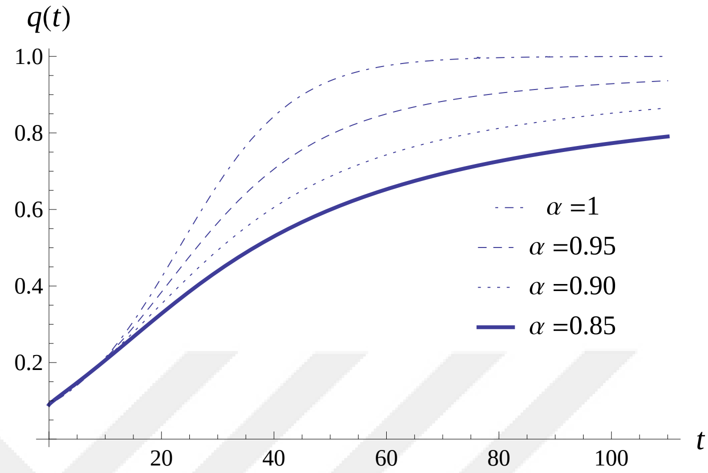
α parametresi, çevrenin, bir bireyin olasılık dinamiğine etkisinin bir ölçüsü olarak değerlendirilmektedir. Bu amaçla, aşağıdaki şekillerde olasılık fonksiyonlarının, α parametresine göre değişimleri bazı t zaman değerleri için gösterilmektedir.

Bir bireyin yaşam olasılığına ilişkin tarafımızdan yapılan bir çalışma, yayına sunulmak üzere hazırlanmaktadır. Burada, çevre etkisi, differintegral parametresi α ile girdirilmektedir ["Evolution of Life and Gender Distributions of a Community" Z.Ok Bayrakdar, F.Büyükkılıç, D.Demirhan].

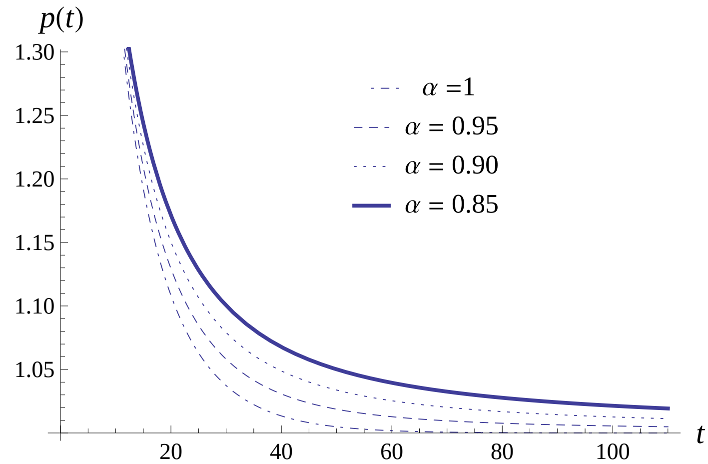
Şekil 8.1'de bir bireyin ölüm olasılığının zamanla değişimini ifade eden (8.44) fonksiyonun normalize edilmiş formunun grafiği $q_0 = 0.03, a = 0.1, b = 0.3$ olmak üzere, farklı α değerleri için verilmektedir. Şekle göre, operatör parametresi α'nın değeri küçüldükçe, ölüm olasılığını yavaşlatıcı, frenleyici etkiye sahip olduğu gözlemlenir.

Bir bireyin yaşam olasılığının zamanla değişimini ifade eden (8.45) fonksiyonun normalize edilmiş formu Şekil 8.2'de, $p_0 = 0.9, a = 0.1, b = 0.4$ olmak üzere farklı α değerleri için verilmektedir. Şekle göre, operatör parametresi α'nın değeri büyüdükçe, yaşam olasılığını hızlandırıcı yönde etkide buluduğu gözlemlenir.

Şekil 8.1: Ölüm olasılığının farklı α değerleri için gösterimi.



Şekil 8.2: Yaşam olasılığının farklı α değerleri için gösterimi.



9. SONUÇLAR

Kesirsel matematik pek çok farklı dinamik sistemleri incelemekte başarıyla kullanılmaktadır. Bu çalışmada, karmaşık sistemlerin incelenmesinde başarılı olan kesirsel matematiğin kısa bir tanıtımı yapılmaktadır. Ancak kesirsel matematikteki elemanlar, uygulanabilirlik işlevine bakılmaksızın farklı matematiksel tanımlarla verilmektedir. Bu durum fiziksel uygulamalarda zorluklar yaratmaktadır. Örnek olarak, differintegralin matematikçiler tarafından verilen tanımının işlevi, açık olarak ifade edilmemektedir. Fiziksel süreçlerin Markoviyen olmayan bir bellekle fraktal uzayda gelişmesinin dinamik sistemlerde hesaba katılması gerekir. Bu durum kesirsel matematiğin başarısının temelinde yatan dinamiksel mekanizmanın, fiziksel uygulamalarla yakından incelenmesini gerektirmektedir.

Bölüm-3'te kesirsel matematiğin türev ve integral operatörlerinin Fibonacci yaklaşımından hareketle geliştirilen kümülatif küçülme/büyüme modeli ile ele alınabileceği gösterilmektedir. Kesikli kümülatif yöntemin, standart yaklaşımdan farklı olarak, bir süreci, uzay ve zaman bakımından kesikli olarak ele alarak süreç adımlarını birbiriyle ilişkilendirmekle, yani kümülatif yaklaşımdaki rekürans karakteri ile bellek etkilerini taşıması ve uzun zaman aralığındaki gözleme dair sonuçlarla uzun zaman bellek etkilerini itibara alarak dinamiği tasvir edilebileceği öngörülmektedir. Bu bağlamda olayın Markoviyen olmayarak ele alındığı söylenebilir. Sonuç olarak bu çalışma ile kesirsel matematiğin stokhastik süreçleri standart matematiğe göre daha başarılı tasvir etmesinin temelinde yatan ana etmenin kümülatif küçülme/büyüme mekanizmasını hesaba kattığı gerçeğinin olduğu ortaya konmaktadır. Böylece kesirsel matematiğin differintegral hesabı, matematiksel bir tanım olmaktan öte, fiziksel sistemleri tasvir eden bir işleve sahip olmaktadır.

Bölüm-4 Kesim-1'de bir niceliğin gelişimini çevre ile etkileşiminin itibara alınmadığı bir aşınma süreci kesikli bir yapıda kümülatif yaklaşım ile ele alınmaktadır. Burada kümülatif çözümde, ortamın viskozluğunun hesaba katılmadığı söylenebilir. Bu durumda söz konusu nicelik ve gelecekte ulaşılacak olan miktar arasındaki bağıntı, zamanda sürekliliğe geçildiğinde, Mittag-Leffler fonksiyonun da bir özel durumu olan üstel fonksiyon ile ifade edilmektedir. Bir aşınma süreci, standart matematik çerçevesinde sürekli ve Öklidiyen bir uzayda, Markoviyen bir bellekle ele alındığında da üstel azalan olarak ifade edilen bu çözüm, aynı zamanda iyi bilinen oran denkleminin de çözümüdür.

Aynı aşınma problemi, kesirsel matematik kullanılarak çözüldüğünde standart matematikle yapılan çözümde karşılaşılan üstel fonksiyonun yerini ML fonksiyonu almaktadır. Uzayın fraktallığının ortadan kalkması ile ML fonksiyonu e-sayısına indirgenmektedir. ML fonksiyonu ile ifade edilen fiziksel süreçlerin eksponansiyel yasa ile kuvvet yasası formu arasındaki davranışlarını oldukça iyi bir şekilde tanımlayabilmektedir.

Kesirsel matematik çerçevesinde yapılan çözümde diferintegral mertebesi $0 < \alpha \leq 1$ aralığında alınmaktadır. α, sürecin geliştiği ortamın, sürtünme ile ilgili viskoz davranışına karşılık gelmektedir. Kesirsel matematikle çözümdeki ML fonksiyonu ve Fibonacci yaklaşımı ile kümülatif küçülme probleminin çözümünün özdeşliği $\alpha = 1$ alındığında sağlanmaktadır. Bu durumda kümülatif çözümde ortamın viskozluğunun hesaba katılmadığı söylenebilir. Kesirsel matematikteki differintegral mertebesi α nın, ortamın viskozluğunun büyüme sürecini ağırlaştırıcı, yavaşlatıcı, durdurucu etki yapması olarak yorumlanabilir. $\alpha \to 0$ durumunda ise sürecin gelişmesi tamamen kilitlenmektedir, frenlenmektedir. Kesirsel oran denkleminin, kümülatif küçülme ile ele alınması sonucunda α nın doğasını anlamak mümkün olmaktadır. Karmaşık sistemleri incelemeye Fibonacci anlayışı ile yaklaşmanın doğru bir tasvire götüreceği sonucuna varılmaktadır.

Bölüm-5'te bu çalışma kapsamında önerilen kesikli kümülatif mekanizma ile tasvir edilen Langevin denkleminin çözümünün ve Langevin denkleminin kesirsel mertebeye genelleştirilmiş formunun çözümünün, limit durumlarında standart sonuçlarla uyumluluğu ön plana çıkmaktadır. Bu durumun temel nedeninin, kümülatif yaklaşımla itibara alınan sürecin bellek etkilerinin ve uzayın fraktallığının olduğu anlaşılmaktadır. Bu motivasyonla kümülatif küçülme ve büyüme yaklaşımları ile kesirsel matematik formülasyonunun karmaşık stokhastik sistemlerin dinamiğinde paralel birer tasvir elemanı olarak kullanılabileceğine dair bir sonuç elde edilmektedir.

Önceki bölümlerden elde edilen sonuçlar doğrultusunda, bir küçülme/büyüme sürecinin ilerleyişi serbest bir ortamdan, viskoz bir ortama alındığında süreci etkileyen bir α parametresi ortaya çıkmaktadır. Buradan hareketle Bölüm-6'de bir fiziksel sistemin viskoz bir ortamdaki kümülatif olarak büyümesi, geliştiği çevre ile etkileşimi göz önünde bulundurularak ele alınmaktadır. Bu etkileşme, α parametresine bağlı bir gelişim operatörü ile kümülatif artış sürecinin dinamiğine dahil edilmektedir. Bu yaklaşımda, başlangıç değer ve gelecek değer arasındaki ilişkide ML fonksiyonu doğal bir tasvir elemanı olarak ortaya çıkmaktadır.

Kesirsel matematiksel çerçevesinde büyüme için yazılan kesirsel oran denkleminin çözümü, ML fonksiyonu ile α parametresine bağlı olarak elde edilmektedir. Bu bağlamda kümülatif çözümde ortamın viskozluğunun hesaba katıldığı söylenebilir. Böylece kümülatif yöntemde, ortam etkileri hesaba katmaya yarayan operatör parametresi α, differintegral mertebesine karşılık gelmektedir. Bizim yöntemimizde, süreç kesikli fraktal bir ortamda ve önceki adımlarla ilişkili olarak gelişmektedir. Bu anlamda sürecin Öklidiyen olmayan bir ortamda, Markoviyen olmayan bir bellekle ele alındığı söylenebilir. Kesirsel büyüme denkleminin, kümülatif büyüme ve α parametresine bağlı bir operatör ile ele alınması sonucunda α'nın doğasını anlamak mümkün olmaktadır.

Bölüm-7'de kümülatif büyüme mekanizmasının bir uygulaması olarak, günümüzde insan topluluklarının yeryüzündeki hareketliliğinin arttığı noktasından hareketle, mobil nüfus dinamiği ele alınmaktadır. Bu bağlamda, kümülatif büyüme yaklaşımı ve kesirsel matematik formülasyonu yan yana kullanılmaktadır. Popülasyon dinamiğine ait tarihsel formüller özellikle Malthus ve Verhulst bağıntıları yeniden ele alınarak güncellenmektedir. Kesirsel matematiksel formülasyonda, popülasyonun çevre ile etkileşimi 0 ve 1 aralığında bulunan α türev mertebesi ile girdirilmektedir. Kesikli kümülatif büyüme yaklaşımında, bir popülasyonun kümülatif nüfus artışı, çevre taşıma kapasitesi göz önünde tutularak sınırlandırılmakta, buradan lojistik denklem elde edilmektedir. Lojistik denklemdeki nüfus boyutsuz yapıldığında, birçok içerikte ortaya çıkan en basit ve kullanışlı lojistik map ile lojistik denklem arasında çok yakın ilişki kurulmaktadır.

Nüfus hareketlerine ait bir senaryo ayrıntılarıyla ele alınmaktadır. Bir coğrafyada bulunan iki bileşenin birlikte oluşturduğu birikim nüfus hesaplanmakta yerli nüfus ile peş peşe katılan mülteci, sığınmacı nüfusun zaman içindeki artışlarının ulaştığı nicelikler kıyaslanmaktadır. İki bileşenin ulaştığı nüfusların aynı olduğu denge/denge dışı durumları önemi nedeniyle, özel bir incelemeye tabi tutulmaktadır. Bu bağlamda, genel olarak, t süre sonunda denge durumunda, yerli nüfusa katılan göçmen nüfus birikimi, kesikli adım başına düşen nüfusu P, koloninin üreme katsayısı a, mülteci sayısı n, başlangıçtaki yerli nüfus sayısı N_0, çevre nüfus etkileşimini hesaba katan türev mertebesi α'ya bağlı olarak elde edilmektedir.

Ard arda yerli nüfusa katılan P niceliği, N_0/n cinsinden, bir olasılık fonksiyonu $f(z)$ olarak değerlendirilmektedir. Bu bağlamda, $f(z)$ Bernoulli sayılarının üretici fonksiyonu cinsinden ifade edilmektedir. Çözümün $f(z)$ olduğu mülteci nüfus gelişimini gösteren, katsayıları zamana bağlı olan bir diferansiyel denklem, hem kümülatif büyüme metodu içinde hem de kesirsel matematik çerçevesinde elde edilmektedir.

Sonuç olarak kümülatif büyüme ve çevre etkisi girdirildiğinde, t zamanı içinde nüfus artışını veren canlı dinamiği bağıntısında Mittag-Leffler fonksiyonu, evrensel bir fonksiyon olarak karşımıza çıkmaktadır. Nüfus artışlarının dinamiğinde, nüfus artış hızı esas belirleyici olmakta, çevre, taşıyıcı kapasitesi bakımından frenleyici bir etki yapmaktadır.

Bölüm-8'de nüfus dinamiğinden hareketle bir türün, ömrünü tahmin etmek üzere pratik değeri olan ölüm ve yaşama olasılıkları tarihsel bir perspektif içinde gözden geçirilmektedir. Canlının ölüm olasılığının zamanla arttığı gerçeğinden hareketle ölüm olasılığı kümülatif büyüme metodu ve kesirsel matematik çerçevesinde tasvir edilmektedir. Burada, olasılık denklemindeki olasılığın artış katsayısı, önemli bir parametredir. Bu katsayı çevre etkilerinin kısıtlayıcı koşullarını içerecek şekilde düzenlenerek ölüm olasılığına ait, taşıma kapasitesi koşuluyla uyumlu, Bernoulli tipinde lineer olmayan bir denklem elde edilmiştir. Bu denklemin melez bir çözümü yapılmaktadır. Ölüm olasılığına ait denklemin çözümü olarak ölüm olasılığının, uzun zaman içinde erişebileceği denge durumuna ait büyüklük, artış parametresi a frenleme parametresi b cinsinden a/b olarak elde edilmektedir. Ölüm olasılığı ile ilişkisinden hareketle yaşam olasılığına ait çözüm de bulunmaktadır. Her iki olasılığın, başlangıç koşullarına çok bağlı olduğu görülmektedir. Çevre etkilerinin bir ölçüsü olarak kabul edilen α parametresinin süreç dinamiğine etkisi önemini korumaktadır. Bu amaçla, çözümlerin α'ya bağlı olarak değişimleri şekil üzerinde verilmektedir.

Sonuç olarak karmaşık sistemler fraktal bir uzayda zaman bakımından ise kesikli bir yapıda evrilmektedir. Mekanın ve zamanın bu davranışı geleneksel Öklidiyen ve Markoviyen anlayışıyla bağdaşmamaktadır. Bu durumda standart hesap yerine kesirsel matematik daha gerçekçi fiziksel tasvirleri yapmaya imkan sağlamaktadır. Kesirsel matematiğin tanımından öte işlevinin ortaya konması başarısındaki temel mekanizmanın açıklanması fiziksel uygulama bakımından önem arz etmektedir.

Bu çalışmada kesirsel matematik differintegralinin temelindeki mekanizma Fibonacci anlayışı ile ortaya konmaktadır. İlgili uygulama alanı için differintegral mertebesi α fiziksel olarak yorumlanmaktadır.

EK AÇIKLAMALAR

Ek Açıklamalar A

Lebesgue Fonksiyonları

$L_p(a,b)$, $[a,b]$ kapalı aralığında

$$\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} < \infty \tag{9.1}$$

ile tanımlanan Lebesgue reel değişkenli ölçülebilir fonksiyonların kümesidir (Kilbas et al, 2006).

Ek Açıklamalar B

Laplace Dönüşümü

$t \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ olmak üzere

$$(\mathcal{L}\varphi)(s) = \mathcal{L}[\varphi(t)](s) = \tilde{\varphi}(s) := \int_0^\infty e^{-st}\varphi(t)dt \ \ (s \in \mathbb{C}) \tag{9.2}$$

dönüşümüne $\varphi(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü denir. (9.2) integralini yakınsak yapan s değerlerinin infimum değeri σ_φ, yakınsaklık eksenidir. Böylece (9.2) integrali $\Re(s) > \sigma_\varphi$ için yakınsak $\Re(s) < \sigma_\varphi$ için ıraksaktır.

$x \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere ters Laplace dönüşümü

$$(\mathcal{L}^{-1}\tilde{\varphi})(t) = \mathcal{L}^{-1}[\tilde{\varphi}(s)](t) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st}\tilde{\varphi}(s)ds \quad (\gamma = \Re(s) > \sigma_\varphi) \tag{9.3}$$

ile verilir (Kilbas et al, 2006).

Ek Açıklamalar C

Mittag-Leffler Fonksiyonu

Mittag Leffler Fonksiyonu, kesirsel mertebeden integral ve kesirsel mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümlerinde ve özellikle, kinetik denklemin kesirsel mertebeye genellştirilmesi çalışmalarında, rastgele yürüyüşler, Lévy uçuşları ve süper difüzyon özelliği gösteren transport süreci ve karmaşık sistemlerin incelenmesinde kendiliğinden ortaya çıkmaktadır (Mathai et al, 2011). Bu bağlamda önemi, son yıllarda, fizik, biyoloji mühendislik ve uygulamalı bilimlerin problem çözümlerinde direkt olarak karşılaşılması sebebiyle artmıştır (Mathai and Haubold, 2008).

Mittag-Leffler (ML) Fonksiyonu $E_\alpha(z)$, ismini aldığı bir İsveçli matematikçi tarafından

$$E_\alpha(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (z \in \mathbb{C}, \ \Re(\alpha) > 0) \tag{9.4}$$

serisi ile tanımlanmıştır. ML fonksiyonu $1/\Re(\alpha)$ mertebesinden her yerde analitiktir.

ML fonksiyonu $E_\alpha(z)$ $\alpha \to 0^+$ limitinde tüm karmaşık düzlemdeki analitikliğini kaybeder ve

$$E_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1 \tag{9.5}$$

eşitliğini sağlar. ML fonksiyonları, $k! = \Gamma(k+1)$ ve $(\alpha k)! = \Gamma(\alpha k + 1)$ ilişkisi nedeniyle, üstel fonksiyonun basit bir genellemesidir. $\alpha = 1$ için

$$E_1(z) = \exp(z) \tag{9.6}$$

eşitliği sağlanır (Carpinteri and Mainardi, 1997).

ML fonksiyonunun bir genellemesi, Gama fonksiyonunun argümanındaki 1 sabitinin yerine keyfi bir kompleks β paremetresi konarak elde edilmiştir. Bu genelleştirilmiş ML fonksiyonu $E_{\alpha,\beta}(z)$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (z, \beta \in \mathbb{C}, \ \Re(\alpha) > 0) \tag{9.7}$$

eşitliği ile tanımlanır. Genelleştirilmiş ML fonksiyonu da $1/\Re(\alpha)$ mertebesinden her yerde analitiktir.

(9.7) tanımı, $\beta = 1$ durumu için (9.4) tanımına indirgenir:

$$E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z). \tag{9.8}$$

Özel olarak (9.7) eşitliğinde $\alpha = 1, \beta = 2$ için

$$E_{1,2}(z) = \frac{\exp z - 1}{z} \tag{9.9}$$

elde edilir (Carpinteri and Mainardi, 1997; Kilbas et al, 2006).

(9.7) eşitliği ile verilen tanımdan yararlanılarak genelleştirilmil ML fonksiyonu için aşağıdaki bağıntılar elde edilir (Mathai et al, 2011):

$$E_{\alpha,\beta}(z) = zE_{\alpha,\alpha+\beta}(z) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \tag{9.10}$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \beta E_{\alpha,\beta+1}(z) + \alpha z \frac{d}{dz} E_{\alpha,\beta+1}(z) \tag{9.11}$$

$$\frac{d^m}{dz^m}[z^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(z^\alpha)] = z^{\beta-m-1}E_{\alpha,\beta-m}(z^\alpha) \tag{9.12}$$

$$\frac{d}{dz}E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{E_{\alpha,\beta-1}(z) - (\beta-1)E_{\alpha,\beta}(z)}{\alpha z}. \tag{9.13}$$

Mittag-Leffler Fonksiyonunun Asimptotik Davranışı

ML fonksiyonunun asimptotik davranışı, kesirsel sistemlerde, kesirsel reaksiyon, kesirsel durulma, kesirsel difüzyon v.b. gibi fiziğin çeşitli problemlerini yorumlamada önemli bir rol oynamaktadır (Mathai et al, 2011).

ML fonksiyonunun, $z \to \infty$ limitinde kompleks düzlemin çeşitli bölgelerindeki özellikleri şöyle özetlenebilir:
$0 < \alpha < 2$ durumu için

$$E_\alpha(z) \sim \frac{1}{\alpha}\exp(z^{1/\alpha}) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{\Gamma(1-\alpha k)}, \quad |z| \to \infty, \ \ |\arg z| < \alpha\pi/2, \tag{9.14}$$

$$E_\alpha(z) \sim -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{\Gamma(1-\alpha k)}, \quad |z| \to \infty, \ \ \alpha\pi/2 < \arg z < 2\pi - \alpha\pi/2. \tag{9.15}$$

$\alpha \geq 2$ için

$$E_\alpha(z) \sim \frac{1}{\alpha} \sum_m \exp(z^{1/\alpha} e^{2\pi i m/\alpha}) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{\Gamma(1-\alpha k)}, \quad |z| \to \infty \tag{9.16}$$

formundadır, burada m, $-\alpha\pi/2 < \arg z + 2\pi m < \alpha\pi/2$ aralığındaki tüm tamsayı değerlerini alır ve $\arg z$, $[-\pi, \pi]$ aralığında herhangi bir değer alabilir (Carpinteri and Mainardi, 1997). Yukarıda eşitliklerle verilen asimptotik ifadelere göre, ML fonksiyonu ve onun genelleştirilmiş formu, bilinen kinetik denklemler ve ona karşılık gelen kesirsel denklemler tarafından tasvir edilen kavramların, üstel form ve kuvvet-yasası formu davranışları arasında değiştiği anlaşılmaktadır.

Mittag-Leffler fonksiyonun kesirsel operatörler ile ilşkisi

$\Re(\alpha) > 0$, $\Re(\beta) > 0$, $\Re(\mu) \geq 0$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere, ML ve genelleştirilmiş ML fonksiyonlarının RL kesirsel integralleri sırasıyla

$$(I^\alpha_{a+} E_\alpha[\lambda(t-a)^\alpha])(x) = \lambda^{-1}(E_\alpha[\lambda(x-a)^\alpha] - 1) \tag{9.17}$$

ve

$$(I^\alpha_{a+}(t-a)^{\beta-1} E_{\mu,\beta}[\lambda(t-a)^\mu])(x) = (x-a)^{\alpha+\beta-1} E_{\mu,\alpha+\beta}[\lambda(x-a)^\mu] \tag{9.18}$$

eşitlikleri ile tanımlanır (Kilbas et al, 2006; Podlubny, 1999; Mathai and Haubold, 2008).

ML ve genelleştirilmiş ML fonksiyonlarının RL kesirsel türevleri ise sırasıyla

$$(D^\alpha_{a+} E_\alpha[\lambda(t-a)^\alpha])(x) = \lambda E_\alpha[\lambda(x-a)^\alpha] \tag{9.19}$$

ve

$$(D^\alpha_{a+}(t-a)^{\beta-1} E_{\mu,\beta}[\lambda(t-a)^\mu])(x) = (x-a)^{\beta-\alpha-1} E_{\mu,\beta-\alpha}[\lambda(x-a)^\mu] \tag{9.20}$$

eşitlikleriyle tanımlanır.

$\alpha > 0$ olmak üzere $a \in \mathbb{R}$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere, ML fonksiyonunun Caputo türevi

$$({}^C D^\alpha_{0+} E_\alpha[\lambda(t-a)^\alpha])(x) = \lambda E_\alpha[\lambda(x-a)^\alpha] \tag{9.21}$$

eşitliği ile tanımlanır.

Mittag-Leffler fonksiyonunun Laplace dönüşümü

Kesirsel mertebeden türev ve integral denklemlerin Laplace dönüşüm yöntemi ile çözümlerinde karşılaşılan, ML fonksiyonunun Laplace dönüşümleri

$$\mathcal{L}[E_\alpha(\lambda t^\alpha)](s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - \lambda}, \quad (|\lambda s^{-\alpha}| < 1) \tag{9.22}$$

ve

$$\mathcal{L}[E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)](s) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - \lambda}, \quad (|\lambda s^{-\alpha}| < 1) \tag{9.23}$$

eşitlikleri ile tanımlanır (Kilbas et al, 2006; Mathai et al, 2011).

KAYNAKLAR DİZİNİ

Ahmed, E., El-Sayed, A.M.A. and El-Saka, H.A.A., 2007, Equilibrium points, stability and numerical solutions of fractional order predator-prey and rabies models, *J. Math. Anal. Appl.*, **325**1, 542-553. 3

Bender, C.M. and Orszag, S.A., 1999, Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers1, Springer-Verlag, New York, Inc. 19

Büyükkılıç, F. and Demirhan, D., 2008, Cummulative Growth with Fibonacci Approach, Golden Section and Physics, *Chaos Soliton and Fractals*, **42**1, 24-32. 3, 13, 23, 46

Büyükkılıç, F. and Demirhan, D., 2008, Cumulative Diminuations with Fibonacci Approach, Golden Section and Physics, *International Journal of Theoretical Physics*, **47**3, 606-616. 3, 13, 23

Büyükkılıç, F., Ok Bayrakdar Z. and Demirhan, D., 2015, Investigation of cumulative growth process via Fibonacci method and fractional calculus, *Appl. Math. Comput.*, **265**, 237-244. 3, 61

Büyükkılıç, F., Ok Bayrakdar Z. and Demirhan, D., 2016, Investigation of the cumulative diminution process using the Fibonacci method and fractional calculus, *Physica A*, **444**, 336-344. 3, 61

Büyükkılıç, F., Ok Bayrakdar Z. and Demirhan, D., 2016, http://arxiv.org/abs/1608.08534 5, 13, 20

Büyükkılıç, F., Ok Bayrakdar Z. and Demirhan, D., 2016, http://arxiv.org/abs/1611.00259 51, 53

Camargo, R.F., Oliveira, E.C. and Vaz, J., 2009, On anomalous diffusion and the fractional generalized Langevin equation for a harmonic oscillator, *J.Math.Phys.*, **50**, 123518. 37

Carpinteri, A. and Mainardi, F., 1997, Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, Springer-Verlag Wien GmbH. 3, 6, 81, 82, 83

Coffey, W.T. and Kalmykov, Y.P., 2006, Fractals, Diffusion and Relaxation in Disordered Complex Systems, John Wiley and Sons, Inc., New Jersey. 3

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

Coffey, W.T. and Kalmykov, Y.P. and Waldron, J.T., 2004, The Langevin Equation, World Scientific, Singapore. 35

Davis, H.T., 1962, Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations, Dover Publications, Inc., New York. 53, 54, 60, 69, 70

Gavrilov, L.A. and Gavrilova, N.S., 2001, The Reliability Theory of Aging and Longevity, *J.Theor.Biol.*, 213(4), 527-45. 66

Gompertz, B., 1825, On the nature of the function expressive of the law of human mortality and on a new mode of determining life contingencies, *Philos.Trans.Roy.Soc.London A* , 115, 513-585. 66

Gorenflo, R. and Mainardi, F., 2008, Fractional Calculus:Integral and Differential Equations of Fractional Order, https://arxiv.org/abs/0805.3823 9

Grigolini, P., 2008, Lecture notes, Spring 67

Hilfer, R., 2000, Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, Singapore, 473p. 1, 2, 5, 6, 49

Kilbas, A.A., Srivastava, H.M. and Trujillo, J.J., 2006, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, Amsterdam, 523p. 2, 5, 6, 8, 12, 32, 46, 49, 79, 80, 82, 83, 84

Lande, R., Engen, S. and Saether, B.E., 2003, Stochastic populated dynamics in ecology and conservation, Oxford University Press, Oxford. 51

Laskin, N., 2000, Fractional quantum mechanics, *Phys. Rev.E*, **62**, 3135-3145. 3

Lindenberg, K. and B.J.West, 1990, The Nonequilibrium Statistical Mechanics of Open and Closed Systems, VCH, New York. 39

Luo, A.C.J. and Afraimovich, V., , 2010, Long-Range Interactions, Stochasticity and Fractional Dynamics, Springer, Berlin, 309p. 1

Lutz, E., 2001, Fractional Langevin equation, *Phs.Rev. E*, 64, 051106. 39

Makeham, W., 1860, On the law of mortality and the construction of annuity tables, *J. Inst. Actuaries*, 8, 301-310. 66

Malthus, T.R., 1798, An Essay on the Principle of Population, Printed for J. Johnson in St. Paul's Church-Yard, London. 51

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

Mathai, A.M. and Haubold, H.J., 2008, Special Functions for Applied Scientist, Springer, New York, 464p. 60, 69, 81, 83

Mathai, A.M., Haubold, H.J. and Saxena, R.K., 2011, Mittag-Leffler Functions and Their Applications, *Hindawi Publishing Corporation Journal of Applied Mathematics*, **2011**, 51p. 46, 81, 82, 84

Matis, J.H. and Kiffe, T.R., 2000, Stochastic Population Models:A Compartmental Perspective, Springer-Verlag, New York. 51

Mazo, R.M., 2002, Brownian Motion: Fluctuations Dynamics and Applications, Clarendon Press, Oxford. 35

Metzler, R. and Klafter, J., 2000, The random walk's guide to anomalous diffusion:a fractional dynamics approach, *Physics Reports*, **339**, 1-77. 1

Montroll, E.W. and Shlesinger, M.F., 1984, The wonderful world of random walks In: Studies in Statistical Mechanics, Vol. 11, North-Holland, Amsterdam, pp.1-121 3

Miller, K.S. and Ross, B., 1993, The Fractional Calculus, Jonh Wiley and Sons, Inc, New York, 366p. 6

Muralidhar, R.,Ramkrishna, D., Nakanishi, H. and Jacobs,D., 1990, Anomalous Diffusion:A Dynamic Perspective, *Phsica A*, **167**, 539-559. 35

Murray, J.D., 1993, Mathematical Biology I.An Introduction, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 551p. 51

Naber, M., 2004, Time fractional Schrodinger equation, *J. Math. Phys.*, **45**, 3339-3352. 3

Oldham, K.B. and Spanier, J., 1974, The Fractional Calculus, Academic Press Inc, California, 234p. 2, 5, 6, 20

Podlubny, I., 1999, Fractional Differential Equations, Academic Press Inc, California, 341p. 3, 9, 10, 12, 32, 49, 83

Rivero, M., Trujillo, J.J., Vazquez, L. and Velasco, M.P., 2011, Fractional dynamics of populations, *Appl. Math. Comput.*, **218**, 1089-1095. 3

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

Ross, S.L., 1989, Introduction to Ordinary Differential Equations, John Wiley and Sons, Inc., New Jersey. 60, 70, 71

Saichev, A.I. and Zaslavsky, G.M., 1997, Fractional kinetic equations: solutions and applications, *Chaos*, **7**, 753-764. 3

Samko, S. G., Kilbas, A.A. and Marichev, O. I., 1993, Fractional Integrals and Derivatives, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 976p. 6, 12

Shklovskii, B.H., 2005, A simple derivation of the Gompertz law for human mortality, *Theory in Bioscience*, **123**, 431-433. 66

Sigler, L.E., 2002 Fibonacci's Liber Abaci, Springer-Verlag, New York. 13, 28

Strogatz, S.H., 1994 Nonlinear Dynamics and Chaos, Perseus Books Publishing, Massachusetts. 53, 54, 69, 71

Tarasov, V.E, 2005, Fractional Hydrodynamic Equations for Fractal Media, *Annals of Physics*, **318**, 286-307. 1, 3

Tarasov, V.E, 2005, Continuous medium model for fractal media, *Phys. Lett. A*, **336**, 167-174. 3

Tarasov, V.E, 2010, Fractional Dynamics, Springer, Berlin, 504p. 10, 11

Tsallis, C., 2009, Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics, Springer, New York, 382p. 59

Turchin, P., 2003, Complex Population Dynamics: A Theoretical/empirical Synthesis, Princeton University Press, New Jersey, 450p. 51

Uchaikin, V.V., 2003, Anomalous diffusion and fractional stable distributions, *J. Exper.Theor. Phys.*, **97**, 810-825. 3

Verhulst, P.F., 1838, Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement, *Corr. Math. Physics*, **10**, 113. 51

Viñales, P.F. and Despósito, M.A., 2007, Anomalous diffusion induced by a Mittag-Leffler correlated noise, *Phys.Rev.E*, **75**, 042102. 37

Viñales, P.F. and Despósito, M.A., 2008, Memory effects in the asymptotic diffusive behavior of a classical oscillator described by a generalized Langevin equation, *Phys.Rev.E*, **77**, 031123. 37

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devam)

Viñales, P.F. and Despósito, M.A., 2006, Anomalous diffusion: Exact solution of the generalized Langevin equation for harmonically bounded particle, *Phys.Rev.E*, **73**, 016111. 37

Wang, K.G., 1992, Long time correlation effects and biased anomalous diffusion, *Phys.Rev.A*, **45**, 2. 37

West, B.J., Bologna, M. and Grigolini, P., 2003, Physics of Fractal Operators, Springer-Verlag, New York, 349p. 1, 2, 3, 31, 32, 46

West, B.J., 2014, Colloquium:Fractional calculus view of complexity:A tutorial, *Rev. Mod. Phys.*, **86**. 1

Zaslavsky, G.M., 2002, Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport, *Phys. Rep.*, **371**, 461-580. 3

Zwanzig, R., 2001, Nonequilibrium Statistical Mechanics, Oxford, New York, 222p. 35, 36

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: **Zahide OK BAYRAKDAR**

Doğum Tarihi: 16 Mart 1982

Doğum Yeri: Bornova/İZMİR

Yabancı Dil: İngilizce, Almanca

EĞİTİM

Y.Lisans İzmir Yüksek Teknoloji Enstitüsü, Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü, *Matematik ABD*, 2008

Lisans Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 2005

YAYINLAR

F.Büyükkılıç, Z.Ok Bayrakdar, D.Demirhan, *Investigation of the Cumulative Diminution Process Using The Fibonacci Method and Fractional Calculus*, Physica A **444**, 336-344, 2016.

F.Büyükkılıç, Z.Ok Bayrakdar, D.Demirhan, *Investigation of the Cumulative Growth Process via the Fibonacci Method and Fractional Calculus*, App. Math.Comp. **265**, 237–244, 2015.

Z.Ok Bayrakdar, F.Büyükkılıç, D.Demirhan, *Life Probability and Gender Distributions of a Community*-yayına sunulacak

F.Büyükkılıç, Z.Ok Bayrakdar, D.Demirhan, 2016, *Fractional differential and integral operations and cumulative processes*, http://arxiv.org/abs/1608.08534

F.Büyükkılıç, Z.Ok Bayrakdar, D.Demirhan, 2016, *A study on the evolution of a community population by cumulative and fractional calculus approaches*, http://arxiv.org/abs/1611.00259