HER BURULMA GENİŞLEMESİNDE TÜMLEYENE SAHİP MODÜLLER

Fatih GÖÇER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Aralık 2016

AMASYA

HER BURULMA GENİŞLEMESİNDE

TÜMLEYENE SAHİP MODÜLLER

Fatih GÖÇER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Aralık 2016

AMASYA

Fatih GÖÇER tarafından hazırlanan “HER BURULMA GENİŞLEMESİNDE TÜMLEYENE SAHİP MODÜLLER” adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Ergül TÜRKMEN ……………………………..
Tez Danışmanı, Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Hamza ÇALIŞICI ……………………………..
Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim Dalı, O.M.Ü.

Doç. Dr. Ergül TÜRKMEN ……………………………..
Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim Dalı, A.Ü.

Doç. Dr. Aslıhan SEZGİN ……………………………..
Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim Dalı, A.Ü.

27/12/2016

Bu tez ile A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Doç. Dr. Mehmet KARA ……………………………..
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Fatih GÖÇER

HER BURULMA GENİŞLEMESİNDE TÜMLEYENE SAHİP MODÜLLER

(Yüksek Lisans Tezi)

Fatih GÖÇER

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Aralık 2016

ÖZET

Bu çalışmada Zöschinger'in "lokal (lokal olmayan) dedekind bölgeleri üzerinde (E) özelliğine sahip modüller" çalışmasından yararlanarak değişmeli bölgeler üzerinde TE −modülleri tanımladık ve bu modüllerin özelliklerini gösterdik. TE −modüllerin direkt toplamlarının TE −modül olduğunu ve genişlemeler altında TE −modül sınıflarının kapalı olduğunu gösterdik. Ayrıca, M bir modül olmak üzere, lokal olmayan halkalar üzerinde M nin her alt modülü TE −modül ise, M nin dual sonlu tümlenmiş modül olduğunu gösterdik.

Bilim Kodu :

Anahtar Kelimeler : **Değişmeli Bölge, Tümleyen, Burulma Genişleme**

Sayfa Adedi : **77**

Tez Yöneticisi :

MODULES THAT HAVE A SUPPLEMENT IN EVERY TORSİON EXTENSİON

(M.Sc. Thesis)

Fatih GÖÇER

AMASYA UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

December 2016

ABSTRACT

In this paper, over dedekind commutative domain we define the concept of $TE-$modules, which is adapted from Zöschinger's modules with the property (E) over local (or, non-local) dedekind domains. In this paper, we provide some properties of these modules. We prove that a direct summand of a $TE-$module is a $TE-$module. We show that a class of $TE-$modules is closed under extensions. We also prove that, over a non-local ring, if every submodule of a module M is a $TE-$module, then it is cofinitely supplemented.

Science Code	**:**
Key Words	**: Commutative Domain, Supplement, Torsion Extension**
Page Number	**: 77**
Adviser	**:**

TEŞEKKÜR

Amasya üniversitesinde yüksek lisans öğrenimim boyunca bilgisi, tecrübesi ve akademik kişiliğiyle bana yön veren saygı değer danışman hocam Doç. Dr. Ergül TÜRKMEN’e ve bilgi birikiminden, tez yazım aşamasında fikirlerinden istifade ettiğim değerli eşi Doç. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN’e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu çalışmayı yaparken karşılaştığım zorlukları aşmamda maddi ve manevi desteklerinden ötürü, vazgeçilmezim canım aileme sonsuz teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel Sayılar Kümesi
$\subseteq$	Alt Küme
$\subset$	Öz Alt Küme
$\cap$	Kümelerde Kesişim İşlemi
0_R	$(R,+,\cdot)$ Halkasında $(R,+)$ Abel Grubunun Birimi
1_R	$(R,+,\cdot)$ Halkasında $(R,\cdot)$ Cebirsel Yapısının Birimi
$\leq$	Alt Modül
$M/_N$	M nin N Alt Modülüne Göre Bölüm Modülü
$\ll$	Küçük Alt Modül
$\trianglelefteq$	Büyük Alt Modül
$M \cong N$	İzomorf Modüller
$Hom(A,B)$	A Modülünden B Modülüne Tüm Homomorfizmaların Kümesi
$End(M)$	M Modülünün Endomorfizmalarının Kümesi
$Gör(f)$	f Homomorfizmasının Görüntüsü

Simgeler	**Açıklama**
$Çek(f)$	f Homomorfizmasının Çekirdeği
$\prod_I N_i$	N_i Alt Modüllerinin Direkt Çarpımı
$\sum_I N_i$	N_i Alt Modüllerinin Toplamı
$\bigoplus_I N_i$	N_i Alt Modüllerinin Direkt Toplamı
$\langle X \rangle$	X Kümesi Tarafından Üretilen Modül
Rm	m Elemanı Tarafından Üretilen Devirli Modül
$Re(M,X)$	X Kümesinin M deki Artığı
$Tr(X,M)$	X Kümesinin M deki İzi
$Rad(M)$	M Modülünün Radikali
$Soc(M)$	M Modülünün Soklesi
$Ob(\mathcal{K})$	$\mathcal{K}$ Kategorisinin Nesneleri
$Mor_{\mathcal{K}}(A,B)$	Bir $\mathcal{K}$ Kategorisinde A Nesnesinden B Nesnesine Tüm Morfizmaların Kümesi
$R-mod$	R −Modül Kategorisi
Ab	Abel Grup Kategorisi
$\lim_{\leftarrow} M$	Ters Limit

Kısaltmalar	**Açıklama**
A.Ü.	Amasya Üniversitesi
KSK	Kısmi Sıralı Küme

1. GİRİŞ

Bu tezde injektif modüllerin bir genellemesi olan, her burulma genişlemesinde tümleyene sahip modüller çalışılmıştır. İnjektiflik kavramı ilk olarak L. Zippin'in 1935 yılında Abel gruplarla ilgili yaptığı çalışmasında geçmektedir [1]. Bu kavramı R. Baer 1940 yılında modüllere taşıyarak literatürde Baer Kriteri olarak bilinen "R bir halka ve I bir sol $R-$modül olsun. I nın injektif olması için gerek ve yeter koşul R nin her U sol ideali için $k: U \longrightarrow I$ homomorfizmasının bir $m: R \longrightarrow I$ homomorfizmasına genişletilebilmesidir." teoremi ile injektiflik kavramının genişletilebileceğini göstermiştir [5]. Bass, projektif örtüye sahip sonlu üretilmiş sol (sağ) $R-$modülleri yarı-mükemmel halka olarak tanımladı. Kasch ve Mares ise, 1966 da yapmış oldukları "Eine kennzeichnung semi-perfekter moduln" adlı makalesinde mükemmel ve yarı-mükemmel halka kavramlarını modüllere taşıdı ve karakterize etmek için tümlenmiş modül kavramını tanımladı [12]. Buna göre M nin her N alt modülü için $M = N + L$ olacak şekilde L minimal alt modülü varsa, M modülüne tümlenmiş modül denir. İnjektif modüller her genişlemesinde direkt toplam terimi ve her direkt toplam terimi de tümleyen olduğundan injektif modüller her genişlemesinde tümleyene sahiptir. B. Eckman ve A. Schopf'un 1953 te "Über injective moduln" başlığı altında yayımlanan makalelerinde injektif bürümü tanımladılar ve bir modülün injektif bürümünün olduğunu gösterdiler [8]. Bass ise, injektif bürümün duali olarak projektif örtüyü tanımlayıp karakterize etmiştir. Kasch ve Mares söz konusu yukarıdaki çalışmasında, homomorfik görüntüsü de projektif örtü olan projektif modülleri yarı-mükemmel modül olarak tanımlamışlardır. Zöschinger 1974 yılındaki "Modules that have a supplement in every extension" adlı makalesinde injektif modülün bir genellemesi olarak, her genişlemesinde tümleyene sahip modülleri $E-$modül olarak tanımlamış ve özelliklerini incelemiştir [19]. H. Çalışıcı ve E. Türkmen 2012 yılında yayımlanan "Modules that have a supplement in every cofinite extension" adlı makalede $CE-$modül kavramını tanımladılar ve özelliklerini incelediler [6]. Bu çalışmanın önemli bir sonucu olarak her $E-$modülün $CE-$modül olduğunu elde ettiler [6]. Bu çalışmada ise, her burulma genişlemesinde tümleyene sahip modüller $TE-$modül olarak tanımlandı ve özellikleri incelendi.

Lineer kompakt modüllerin $TE-$modül olduğunu göstermek için genel bilgiler bölümünde modül teori ve homoloji cebire ait temel bilgilere yer verilen bu çalışmanın materyal ve metot bölümünde lineer kompakt modül kavramına yer verildi ve özellikleri ifade edildi. Bulgular ve tartışma bölümünde ise, $TE-$modüllerin temel özellikleri verildi.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Halkalar

2.1.1. Tanım $(R,+)$ bir abel grup olsun. "$\cdot$" R üzerinde bir ikili işlem olsun. Her $a,b,c \in R$ için,

i) $(ab)c = a(bc)$

ii) $a(b+c) = ab+ac$ ve $(a+b)c = ac+bc$

koşullarını sağlayan $(R,+,\cdot)$ cebirsel yapısına **halka** denir.

Ayrıca $(R,+)$ abel grubunun birimine **halkanın sıfırı** denir ve 0_R ile gösterilir [16].

2.1.2. Tanım R bir halka ve I R nin boştan farklı alt kümesi olsun. I, $(R,+)$ abel grubunun alt grubu ve $a,b \in I$ keyfi elemanları için $ab \in I$ ise, I alt grubuna R nin **alt halkası** denir [16].

2.1.3. Tanım $(R,+,\cdot)$ bir halka olsun. Her $a \in R$ için $ae = ea = a$ olacak şekilde $e \in R$ mevcutsa, $e \in R$ ye R halkasının **birim elemanı** denir. Bu eleman teklikle belirli olup $e = 1_R$ ile gösterilir. Birim elemana sahip halkaya ise **birimli halka** denir [16].

Bu çalışmamızda tüm halkalar birimli halka olarak alınacaktır.

2.1.4. Tanım $(R,+,\cdot)$ halkası "$\cdot$" işlemine göre değişmeli ise, R halkasına **değişmeli halka** denir [16].

2.1.5. Tanım Bir R halkasında $a \in R$ için, $ab = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $b \in R$ bulunabilirse, a elemanına halkanın **sıfır böleni** denir. Sıfır böleni olmayan birimli ve değişmeli R halkasına **değişmeli bölge** denir [16].

2.1.6. Tanım R bir halka ve $\emptyset \neq I \subseteq R$ olsun. Her $a, b \in I$ için $a - b \in I$ ve her $a \in I$ ve her $r \in R$ için $ra \in I$ $(ar \in I)$ ise, I ya R nin **sol (sağ) ideali** denir. Eğer I hem sağ hem de sol ideal ise, I ya R halkasının **ideali** denir. $\{0_R\}$ ve R halkasının kendisi her zaman R nin birer ideal olduğundan, sıfırdan farklı her halkanın en az iki ideali vardır. Halkanın kendisinden farklı ideallerine **öz ideal** denir [16].

2.1.7. Tanım R bir halka ve I, R halkasının (sol, sağ) ideali olsun. Eğer R halkasının $I \subset J \subset R$ olacak şekilde J (sol, sağ) ideali yoksa, I ya R halkasının **(sol, sağ) maksimal ideali** denir [15].

2.1.8. Tanım R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer $ba = 1_R$ ($ab = 1_R$) olacak şekilde $b \in R$ varsa a elemanına **sol (sağ) terslenebilir eleman** denir. Eğer a elemanı hem sağ hem sol terslenebilir eleman ise, $a \in R$ ye **terslenebilir eleman** denir [4].

2.1.9. Teorem Sıfırdan farklı R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.

i) R tek sol maksimal ideale sahiptir.

ii) R tek sağ maksimal ideale sahiptir.

iii) $a \in R$ elemanı veya $1 - a$ elemanı terslenebilirdir.

iv) R halkasının tüm terslenebilir olmayan elemanlarının kümesi I ise I, R halkasının öz idealidir [16].

2.1.10. Tanım Teorem 2.1.9 da verilen denk koşullardan birini sağlayan R halkasına **lokal halka** denir [4].

2.1.11. Tanım I_1 ve I_2 R halkasının iki (sol, sağ) ideali olmak üzere $I_1 I_2 = \{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid a_i \in I_1,\ b_i \in I_2, i = 1,2,3,\dots, n\ ve\ n \in \mathbb{N}\}$ kümesi R nin bir idealidir. Bu ideale I_1 ve I_2 **ideallerinin çarpımı** denir [16].

2.1.12. Tanım P, R değişmeli halkasının bir öz ideali olsun. $a, b \in R$ için $ab \in P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ oluyorsa, P ye R nin bir **asal ideali** denir [16].

2.1.13. Tanım R bir halka $a \in R$ olsun. R nin a yı kapsayan tüm (sol, sağ) ideallerinin arakesitine **a tarafından üretilen esas (sol, sağ) ideali** denir. a tarafından üretilen ideal $\langle a \rangle$ ile gösterilir ve $\langle a \rangle = \{ra + as + na | r, s \in R,\ n \in \mathbb{Z}\}$ dir. R birimli halkasında a tarafından üretilen esas sol ideal I ise $I = \{ra | r \in R\} = Ra$, esas sağ ideal J ise $J = \{ar | r \in R\} = aR$ dır. Eğer R birimli ve değişmeli bir halka ise $\langle a \rangle = Ra = Ra$ dır. Her ideali bir esas ideal olan değişmeli bölgeye **esas ideal halkası** denir [16].

2.1.14. Tanım R bir halka olsun. R nin sol ideallerinin her $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots$ azalan zinciri sonlu bir adımda duruyorsa, yani en az bir n doğal sayısı için $I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \cdots$ oluyorsa R ye **sol artin halka** denir [16].

2.1.15. Tanım Birimli ve değişmeli bir halkanın sıfırdan farklı her elemanının tersi varsa, bu halkaya **cisim** denir [16].

2.1.16. Tanım R değişmeli bölge olsun. R nin her öz ideali, sonlu sayıda asal idealin çarpımı ise, R ye **dedekind bölgesi** denir [16].

2.1.17. Teorem R değişmeli bölge olsun. R nin dedekind bölgesi olması için gerek ve yeter koşul R nin sıfırdan farklı her I ideali için $R/_I$ bölüm halkasının artin esas ideal halkası olmasıdır [15].

2.2. Modüller

2.2.1. Tanım Bir R halkası ve $(M, +)$ abel grubu için $f: R \times M \longrightarrow M$ fonksiyonu verilmiş olsun. $f(r, m) \in M$ elemanını rm ile gösterelim. Her $r, s \in R$ ve her $m, n \in M$ için,

i) $r(m + n) = rm + rn$

ii) $(r + s)m = rm + sm$

iii) $(rs)m = r(sm)$

ise, M ye **sol R −modül** denir ve ${}_RM$ veya M ile gösterilir. Eğer R halkası birimli ve her $m \in M$ için,

iv) $1_R m = m$ ise, M ye **üniter sol R −modül** veya kısaca **üniter R −modül** denir. Benzer şekilde sağ R −modül tanımı da yapılabilir [7].

Tezimizde bütün modüller üniter sol modül olarak alınacaktır.

2.2.2. Tanım R bir halka, M bir R −modül ve N, M abel grubunun alt grubu olsun. Her $r \in R$ ve her $n \in N$ için $rn \in N$ ise, N ye M nin **alt modülü** denir ve $N \leq M$ ile gösterilir. $\{0\}$ ve M, M nin alt modülleridir. M nin kendisinden farklı alt modüllerine **öz alt modül** denir ve $N \lneqq M$ ile gösterilir. Sadelik için $\{0\}$ alt modülü 0 ile gösterilir [16].

M bir modül olsun. M nin keyfi sayıdaki alt modüllerinin arakesiti M nin alt modülüdür.

2.2.3. Tanım M bir R −modül ve N, M nin bir alt grubu olsun. $M/_N$ bölüm grubu, her $r \in R$ ve her $n + M \in M/_N$ olmak üzere, $r(m + N) = rm + N$ ile tanımlı dış işleme göre bir R −modül yapısına sahiptir. $M/_N$ modülüne, M nin N ye göre **bölüm modülü** denir [3].

2.2.4. Tanım M bir $R-$modül ve X, M nin bir alt kümesi olsun. M modülünün X kümesini kapsayan bütün alt modüllerinin arakesitine ***X* tarafından üretilen alt modül** denir ve $\langle X\rangle$ ile gösterilir. Eğer X kümesi sonlu elemanlı ise, X kümesi tarafından üretilen alt modüle **sonlu üretilmiş alt modül** denir. X kümesi, $X=\{a\}$ şeklinde tek elemanlı ise, $\langle X\rangle=\langle a\rangle$ ya **devirli alt modül** denir ve $\langle a\rangle=Ra=\{ra|\ r\in R\}$ dir. Ayrıca $\{B_i|i\in I\}$, M nin alt modüllerinin ailesi olmak üzere $X=\bigcup_{i\in I}B_i$ kümesinin ürettiği alt modüle $\boldsymbol{B_i}$ **alt modüllerinin toplamı** denir. B_i alt modüllerinin toplamı $\sum_{i\in I}B_i$ ile gösterilir ve $\sum_{i\in I}B_i=\left\{b_{i_1}+b_{i_2}+\cdots+b_{i_n}\middle|b_{i_j}\in B_{i_1},i_j\in I,j=1,2,\dots,n,n\in\mathbb{N}\right\}$ dir [16].

2.2.5. Tanım M bir modül ve $N\leq M$ olsun. Eğer $M/_N$ bölüm modülü sonlu üretilmiş ise, N ye M nin **dual sonlu alt modülü** denir [16].

2.2.6. Tanım I boştan farklı indis kümesi olmak üzere $\{M_i\}_{i\in I}$ sol $R-$modüllerin bir ailesi olsun. Her $i\in I$ için $f(i)\in M_i$ ile tanımlı tüm f fonksiyonlarının kümesine $\{M_i\}_{i\in I}$ modüller ailesinin **direkt çarpımı** denir ve $\prod_{i\in I}M_i=\{f|f:I\longrightarrow\bigcup_{i\in I}M_i,\forall\, i\in I\ için\, f(i)\in M_i\}$ dir. $\prod_{i\in I}M_i$ nin en fazla sonlu sayıda bileşeni sıfırdan farklı olan elemanların kümesini $\oplus_{i\in I}M_i$ ile gösterecek olursak $\oplus_{i\in I}M_i=\{(m_i)_{i\in I}\mid en\ çok\ sonlu\ sayıda\ i\in I\ için\ m_i\neq 0\}$ kümesine $\{M_i\}_{i\in I}$ modüller ailesinin **dış direkt toplamı** denir. Açık olarak her $m=(m_i)_{i\in I}$, $n=(n_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I}M_i$ için, $m+n=(m_i+n_i)_{i\in I}$ ve her $r\in R$ için, $rm=(rm_i)_{i\in I}$ ile tanımlı işlemlere göre $\prod_{i\in I}M_i$ bir $R-$ modüldür ve $\oplus_{i\in I}M_i\leq\prod_{i\in I}M_i$ $R-$modüllerdir [16].

2.2.7. Tanım M bir $R-$ modül olsun. I boştan farklı bir indis kümesi olmak üzere her $i\in I$ için $\oplus_{i\in I}M_i$ dış direkt toplamında $M_i=M$ alalım. $\oplus_{i\in I}M$ direkt toplamına M nin **kopyalarının toplamı** denir ve M^I ile gösterilir. $M=R$ alınırsa, $F=R^I$ modülüne **serbest modül** denir [15].

2.2.8. Tanım M bir modül ve $\{M_i\}_{i\in I}$ kümesi de M nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. Eğer

i) $M = \sum_{i\in I} M_i$ ve

ii) Her $i \in I$ için $M_i \cap \sum_{j\neq i} M_j = \{0\}$ ise, M ye $\{M_i\}_{i\in I}$ alt modüllerinin **iç direkt toplamı** veya **direkt toplamı** denir ve bu $M = \oplus_{i\in I} M_i$ ile gösterilir. Bu durumda her bir M_i alt modülüne de M nin **direkt toplam terimi** denir.

$I = \{1,2\}$ için M_1 ve M_2 alt modüllerinin iç direkt toplamı ise $M = M_1 \oplus M_2$ olup $M = M_1 + M_2$ ve $M_1 \cap M_2 = \{0\}$ dır [16].

Dış direkt toplam ile iç direkt toplam birbirine izomorftur. Bu yüzden bundan sonra iç direkt toplam da $M = \oplus_{i\in I} M_i$ ile gösterilecektir.

2.2.9. Tanım M bir modül ve I indis kümesi olmak üzere $\{M_i\}_{i\in I}$ de M nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. Her $j \in I$ ve $m_i \in M_i$ için $i = j$ ise $m_i^{'} = m_i$ ve $i \neq j$ için $m_i^{'} = 0$ olmak üzere $\phi_j(m_j) = (m_i^{'})$ ile tanımlı $\phi_j : M_j \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i$ ve $m_i \in M_i$ dönüşümleri ile $\pi_j((m_i)) = m_j$ ile tanımlı $\pi_j : \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow M_j$ dönüşümlerini alalım. Her $j \in I$ için ϕ_j ve π_j birer homomorfizmadır. Ayrıca ϕ_j birebir, π_j örtendir. ϕ_j dönüşümlerine $\prod_{i\in I} M_i$ direkt çarpımının **injeksiyonları**, π_j dönüşümlerine ise, $\prod_{i\in I} M_i$ direkt çarpımının **projeksiyonları** denir [14].

2.2.10. Tanım M bir modül ve N M nin öz alt modülü olsun. $N \subset I \subset M$ olacak şekilde M nin bir I öz alt modülü yoksa, N ye M nin bir **maksimal alt modülü** denir [16].

Ayrıca sonlu üretilmiş modüllerin her öz alt modül bir maksimal alt modül tarafından kapsanır.

2.2.11. Tanım M sıfırdan farklı bir modül olsun. Eğer M modülü, sıfır alt modülünden başka öz alt modüle sahip değilse, M ye **basit modül** denir [13].

2.2.12. Yardımcı Teorem M bir modül ve $N \leq M$ olsun. N alt modülünün maksimal alt modül olması için gerek ve yeter koşul $M/_N$ bölüm modülünün basit olmasıdır [16].

İspat. ($\Rightarrow$): N maksimal alt modül olsun. $M/_N$ bölüm modülünün basit olmadığını kabul edelim. Bu takdirde $M/_N$ modülünün sıfırından farklı bir $K/_N$ şeklinde en az bir öz alt modülü vardır. Buradan $N < K < M$ yazılır. Bu ise, N nin maksimal olmasıyla çelişir.

($\Leftarrow$): $M/_N$ modülü basit modül olsun ve N modülünün maksimal olmadığını kabul edelim. Bu durumda $N < K < M$ olacak şekilde K öz alt modülü vardır ve $K/_N$ bölüm modülü $M/_N$ nin sıfırından farklı bir öz alt modülüdür. Bu ise, $M/_N$ nin basit modül olmasıyla çelişir.

2.2.13. Teorem M sıfırdan farklı bir modül olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

i) M nin her alt modülü basit alt modüllerin toplamıdır.

ii) M basit alt modüllerin toplamıdır.

iii) M basit alt modüllerin direkt toplamıdır.

iv) M nin her alt modülü direkt toplam terimidir [13].

2.2.14. Tanım Teorem 2.2.13 te verilen denk koşullardan birini sağlayan M modülüne **yarı-basit modül** denir [13].

Yarı-basit modüllerin sınıfı alt modüller, direkt toplamlar ve bölüm modülleri altında kapalıdır.

2.2.15. Önerme M bir basit sol R −modül olsun. Bu takdirde 0, M nin maksimal alt modülüdür ve sıfırdan farklı her $m \in M$ için $Rm = M$ dir [13].

2.2.16. Tanım R bir halka, M bir $R-$ modül ve $A \subseteq M$ olsun. Bu takdirde $\{r \in R | \ \forall\, m \in A \ için \ rm = 0\}$ kümesi R halkasının idealidir. Bu ideale A kümesinin **sıfırlayanı (annihilatörü)** denir ve $Ann(A)$ ile gösterilir [15].

2.2.17. Teorem R bir halka ve M sıfırdan farklı bir R −modül olsun. Bu takdirde M nin basit olması için gerek ve yeter koşul sıfırdan farklı her $m \in M$ elemanı için $M \cong {}^{R}/_{Ann(m)}$ ve $Ann(m)$ nin R nin maksimal ideali olmasıdır [15].

2.2.18. Tanım R değişmeli bölge ve M bir R −modül olsun. R nin sıfırdan farklı en az bir r elemanı için $rm = 0$ koşulunu sağlayan $m \in M$ elemanına M nin **burulma elemanı** denir. M nin tüm burulma elemanlarının kümesini $T(M)$ ile gösterirsek, $T(M)$ kümesi M nin bir alt modülüdür. Burada $T(M)$ ye M modülünün **burulma alt modülü** denir. Eğer$T(M) = M$ ise, M modülüne **burulma modülü**, $T(M) = 0$ ise, M ye **burulmasız modül** denir [16].

2.3. Homomorfizmalar ve İzomorfizma Teoremleri

2.3.1. Tanım M ve N R −modüller olsun. Eğer $f: M \longrightarrow N$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa, f fonksiyonuna ***R* − modül homomorfizması** veya kısaca **homomorfizma** denir.

i) Her $m, n \in M$ için $f(m + n) = f(m) + f(n)$

ii) Her $m \in M$ ve her $r \in R$ için $f(rm) = rf(m)$

Eğer f homomorfizması birebir ise, f ye **monomorfizma**, örten ise **epimorfizma**, birebir ve örten ise, **izomorfizma** adı verilir. $f: M \longrightarrow N$ izomorfizma olmak üzere M ve N modüllerine **izomorf modüller** denir ve M ile N nin izomorf olması $M \cong N$ ile gösterilir. M ve N birer $R-$modül olmak üzere M den N ye tüm $R-$modül homomorfizmaların kümesi $Hom(M,N)$ ile gösterilir. Eğer $f: M \longrightarrow M$ bir homomorfizma ise, f ye M modülünün bir **endomorfizması** denir ve M nin tüm endomorfizmalarının kümesi $End(M)$ ile gösterilir. Buna göre $End(M) = Hom(M,M)$ dir [13].

2.3.2. Tanım M bir modül ve $N \leq M$ olsun. Her $m \in N$ için $i(m) = m$ ile tanımlı $i: N \longrightarrow M$ fonksiyonu bir modül monomorfizması olup bu monomorfizmaya **içerme monomorfizması** denir. $\pi: M \longrightarrow M/N$, $\pi(m) = m + N$ ile tanımlı π fonksiyonu ise bir epimorfizma olup bu epimorfizmaya **doğal (kanonik) epimorfizma** denir [13].

2.3.3. Tanım M bir modül olmak üzere $I_M(m) = m$ ile tanımlı $I_M: M \longrightarrow M$ dönüşümü bir modül izomorfizması olup bu izomorfizmaya **birim (idantik) homomorfizma** denir [13].

2.3.4. Tanım $f: M \longrightarrow N$ bir modül homomorfizması olsun. $\{m \in M \mid f(m) = 0\}$ kümesine f nin **çekirdeği** denir ve $Çek(f)$ ile gösterilir. $\{f(m) \mid m \in M\}$ kümesine f nin **görüntüsü** denir ve $Gör(f)$ ile gösterilir. Ayrıca $Çek(f) \leq M$ ve $Gör(f) \leq N$ dir [13].

2.3.5. Teorem (Birinci İzomorfizma Teoremi) $f: M \longrightarrow N$ bir modül homomorfizması olsun. Bu taktirde $M/_{Çek(f)} \cong Gör(f)$ dir. Özel olarak f örten ise, $M/_{Çek(f)} \cong N$ ve f birebir ise $M \cong f(M)$ dir [13].

2.3.6. Teorem (İkinci İzomorfizma Teoremi) M bir modül, H ve K de M nin alt modülleri olsun. Bu taktirde ${H+K}/{K}$, ${M}/{K}$ bölüm modülünün alt modülü olup, ${H+K}/{K} \cong {H}/{H \cap K}$ dır [13].

2.3.7. Teorem (Üçüncü İzomorfizma Teoremi) M bir modül ve $K \leq N \leq M$ olsun. Bu durumda ${(M/K)}/{(N/K)} \cong {M}/{N}$ dir [13].

2.3.8. Yardımcı Teorem $\{M_i\}_{i\in I}$ $R-$modüllerin bir ailesi, M bir $R-$modül ve her $i \in I$ için $f_i \colon M \longrightarrow M_i$ modül homomorfizmaları verilsin. Her $m \in M$ için $f(m) = (f_i(m))_{i\in I}$ ile tanımlı $f \colon M \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i$ dönüşümü bir homomorfizmadır ve $Çek(f) = \bigcap_{i\in I} Çek(f_i)$ dir [16].

2.3.9. Yardımcı Teorem M bir yarı-basit modül ise M nin her öz alt modülü bir maksimal alt modül tarafından kapsanır [13].

İspat. M nin herhangi bir N öz alt modülünü alalım. Bu takdirde Teorem 2.2.13 ile $M = N \oplus L$ olacak şekilde M nin L yarı-basit alt modülü vardır. Bu takdirde $L_i \leq L$ basit modüller olmak üzere $L = \oplus_{i\in I} L_i$ şeklindedir. Birinci İzomorfizma Teoreminden bir $i_0 \in I$ için $M/\left[N \oplus (\oplus_{i\neq i_0} L_i)\right] \cong L_{i_0}$ yazılabilir. L_{i_0} basit olduğundan Yardımcı Teorem 2.2.12 ile $N \oplus (\oplus_{i\neq i_0} L_i)$, M nin maksimal alt modülüdür ve $N \leq N \oplus (\oplus_{i\neq i_0} L_i)$ dir.

2.4. Bir Kümenin Bir Modüldeki Artığı ve İzi

2.4.1. Tanım M bir $R-$modül ve X, $R-$modüllerin bir ailesi olsun. M nin

$$Re(M,X) = \bigcap \{\, Çek(f) \mid f \in Hom(M,U), U \in X \,\}$$

alt modülüne X kümesinin M modülündeki **artığı (reject)** denir [16].

2.4.2. Teorem M bir R $-$modül ve X R $-$modüllerin bir ailesi olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

i) Verilen sıfırdan farklı her $f: L \longrightarrow M$ homomorfizması için $hf \neq 0$ olacak şekilde $U \in X$ ve $h \in Hom(M, U)$ vardır.

ii) Her $i \in I$, $U_i \in X$ için bir $g: M \longrightarrow \prod_{i \in I} U_i$ monomorfizması vardır.

iii) $Re(M, X) = 0$ dır [16].

2.4.3. Tanım Teorem 2.4.2 verilen denk koşullardan birini sağlayan M modülüne $\boldsymbol{X}$ **$-$eş üretilmiş modül** denir [16].

2.4.4. Tanım M bir modül olsun. Verilen her f: $M \longrightarrow \prod_{i \in I} M_i$ monomorfizması için, $M \xrightarrow{f} \prod_{i \in I} M_i \xrightarrow{\pi_E} \bigoplus_{i \in E} M_i$ monomorfizma olacak şekilde $E \subseteq I$ sonlu alt kümesi var ve $\pi_E : \prod_{i \in I} M_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in E} M_i$ epimorfizması monomorfizma ise, M ye **sonlu eş-üretilmiş modül** denir [16].

2.4.5. Tanım $\{M_i\}_{i \in I}$, modüllerin bir ailesi olsun. Her $i \in I$ için $M \leq \prod_{i \in I} M_i$ olmak üzere $\pi_i|_M : M \longrightarrow M_i$ dönüşümü bir epimorfizma ise, M ye $\prod_{i \in I} M_i$ direkt çarpımının **alt direkt çarpımı** denir [16].

2.4.6. Yardımcı Teorem N bir modül olsun. Bu durumda,

i) Bir N modülünün $\{M_i\}_{i \in I}$ ailesinin bir alt direkt çarpımına izomorf olması için gerek ve yeter koşul $\bigcap_{i \in E} Çek(f_i) = 0$ olacak şekilde $\{ f_i \colon N \longrightarrow M_i \}_{i \in I}$ epimorfizmalar ailesinin mevcut olmasıdır.

ii) N nin alt modüllerinin bir $\{N_i\}_{i \in I}$ ailesi için $N / (\bigcap_{i \in I} N_i)$ bölüm modülü, $\{N / N_i\}_{i \in I}$ modüller ailesinin alt direkt çarpımına izomorftur [16].

2.4.7. Teorem M bir modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir.

i) M sonlu eş-üretilmiştir.

ii) M nin $\bigcap_{i\in I} V_i = 0$ olacak şekilde her $\{V_i\}_{i\in I}$ alt modüller ailesi için, I nın $\bigcap_{i\in E} V_i = 0$ olacak şekilde bir sonlu bir E alt kümesi vardır.

iii) $\bigcap_{i\in I} Çek(f_i) = 0$ olacak şekilde her $\{ f_i\colon M \longrightarrow M_i \}_{i\in I}$ homomorfizmalar ailesi için $\bigcap_{i\in E} Çek(f_i) = 0$ olacak şekilde I nın E sonlu alt kümesi vardır.

iv) M nin her alt modülü sonlu eş-üretilmiştir [16].

2.4.8. Tanım M bir $R-$modül ve X $R-$modüllerin boş kümeden farklı bir ailesi olsun. M nin

$Tr(X,M) = \sum\{ Gör(f) \mid f \in Hom(U,M),\ U \in X\}$ alt modülüne X kümesinin M modülündeki **izi (trace)** denir [16].

2.4.9. Önerme M bir modül olsun. Bu durumda

i) $Tr(X,M)$, X tarafından üretilmiş M nin en büyük alt modülüdür.

ii) $M = Tr(X,M)$ olması için gerek ve yeter koşul M modülünün $X-$üretilmiş olmasıdır [16]

2.5. Pullback ve Pushout Diyagramları

2.5.1. Tanım $\alpha\colon M \longrightarrow K$ ve $\beta\colon N \longrightarrow K$ homomorfizmalar çifti aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde bir F modülü varsa F, α ve β üçlüsüne **pullback** denir.

i)
$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\delta"'] & M \arrow[d, "\alpha"] \\ N \arrow[r, "\beta"] & K \end{tikzcd}$$
diyagramı değişmelidir. Yani $\beta\delta = \alpha\gamma$ dır ve

ii)

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[r, "\gamma'"] \arrow[d, "\delta'"'] & M \arrow[d, "\alpha"] \\ N \arrow[r, "\beta"] & K \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli yani, $\beta\delta' = \alpha\gamma'$ olacak şekildeki her δ' ve γ' homomorfizmaları için,

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\gamma'"'] & F' \arrow[dl, dashed, "\gamma"] \\ M & \end{tikzcd} \quad \text{ve} \quad \begin{tikzcd} F' \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\delta'"'] & F \arrow[dl, dashed, "\delta"] \\ N & \end{tikzcd}$$

diyagramları değişmeli, yani $\gamma \circ \theta = \gamma'$ ve $\delta \circ \theta = \delta'$olacak şekilde tek bir $\theta: F' \longrightarrow F$ homomorfizması vardır.

Bu durumda (i) deki diyagram **pullback diyagramı** olarak isimlendirilir [16].

2.5.2. Teorem $\alpha: M \longrightarrow K$ ve $\beta: N \longrightarrow K$ homomorfizmaları verilsin. Bu durumda bir F pullback vardır ve izomorfizma altında tektir [16].

2.5.3. Tanım $\alpha: K \longrightarrow M$ ve $\beta: K \longrightarrow N$ homomorfizmalar çifti aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde F modülü varsa F, α ve β üçlüsüne **pushout** denir,

i)

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & M \arrow[d, "\gamma"] \\ N \arrow[r, "\delta"] & F \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Yani $\delta\beta = \gamma\alpha$ ve

ii)

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & M \arrow[d, "\gamma'"] \\ N \arrow[r, "\delta'"] & F' \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli yani, $\delta'\beta = \gamma'\alpha$ olacak şekildeki her δ' ve γ' homomorfizmaları için,

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[dr, dashed, "\gamma'"] & \\ F \arrow[r, "\theta"] & F' \end{tikzcd} \quad \text{ve} \quad \begin{tikzcd} N \arrow[d, "\delta"'] \arrow[dr, dashed, "\delta'"] & \\ F \arrow[r, "\theta"] & F' \end{tikzcd}$$

diyagramları değişmeli yani, $\gamma \circ \theta = \gamma'$ ve $\delta \circ \theta = \delta'$ olacak şekilde bir tek $\theta: F \longrightarrow F'$ homomorfizması vardır.

Bu durumda (i) deki diyagram **pushout diyagramı** olarak isimlendirilir [16].

2.5.4. Teorem $\alpha: K \longrightarrow M$ ve $\beta: K \longrightarrow N$ homomorfizmaları verilsin. Bu durumda bir F pushout vardır ve izomorfizma altında tektir [16].

2.6. Küçük ve Büyük Alt Modüller

2.6.1. Tanım M bir modül, $K,$ M nin alt modülü olsun. Eğer $K + L = M$ koşulunu sağlayan M nin bir L öz alt modülü yoksa, K alt modülüne M de **küçüktür** denir ve $K \ll M$ şeklinde gösterilir [13].

M sıfırdan farklı bir modül ise $0 \ll M$ dir.

2.6.2. Tanım M bir modül ve $K \leq M$ olsun. M nin sıfırdan farklı her L alt modülü için $K \cap L \neq 0$ ise, K alt modülüne M de **büyüktür** denir ve $K \trianglelefteq M$ ile gösterilir [16].

M sıfırdan farklı bir modül ise $M \trianglelefteq M$ dir.

2.6.3. Teorem (Modüler Kural) M bir modül olsun. K, L, N modülleri M nin alt modülleri ve $K \subseteq N$ olsun. Bu takdirde $K + (L \cap N) = (K + L) \cap N$ dir [16].

2.6.4. Önerme (Küçük Alt Modülün Özellikleri)

i) M bir modül ve $K \leq N \leq M$ olsun. Eğer $K \ll N$ ise K nın her alt modülü, M nin N yi kapsayan her alt modülünde küçüktür.

ii) M bir modül, $K_1, K_2, \dots, K_n, M_1, M_2, \dots, M_n$, M nin alt modülleri ve her $i = 1,2,\dots,n$ için $K_i \ll M_i$ olsun. Bu takdirde $K_1 + K_2 + \cdots + K_n \ll M_1 + M_2 + \cdots + M_n$ dir.

iii) $f: M \longrightarrow N$ bir homomorfizma olsun. $K \ll M$ ise, $f(K) \ll f(M)$ dir. Özellikle $f(K) \ll N$ dir.

iv) M bir modül, K ve N, M nin alt modülleri, $K \subseteq N$ ve N, M nin direkt toplam terimi olsun. Bu takdirde $K \ll N$ olması için gerek ve yeter koşul $K \ll M$ olmasıdır.

v) $N \ll M$ ve N M nin direkt toplam terimi ise, $N = 0$ dır.

vi) $M/_N$ sonlu üretilmiş ve $N \ll M$ ise, M modülü sonlu üretilmiştir [13].

İspat.

i) U K nın bir alt modülü ve L M nin N tarafından kapsanan bir alt modülü olmak üzere bir $T \leq L$ için $U + T = L$ olsun. Modüler kuraldan $N = L \cap N = (U + T) \cap N = U + T \cap N = K + T \cap N$ elde edilir. $K \ll N$ olduğundan $T \cap N = N$ olur. Böylece $U \subseteq N \subseteq T$ olup $T = U + T = L$ dir.

ii) İspatı $n = 2$ için yapalım. $K_1 + K_2 + L = M_1 + M_2$ olacak şekilde herhangi bir L alt modülünü alalım. $K_1 \ll M_1$ olduğundan ve i) den $K_2 + L = M_1 + M_2$ olur. Benzer şekilde $K_2 \ll M_2$ olduğundan ve i) den $K_2 \ll M_1 + M_2$ olup $L = M_1 + M_2$ elde edilir. Böylece $K_1 + K_2 \ll M_1 + M_2$ bulunur. Sonlu sayıdaki K_i alt modülleri için ispat benzer şekilde yapılır.

iii) $f(K) + L = f(M)$ olacak şekilde herhangi bir $L \leq f(M)$ alt modülünü alalım. $f(K) + L = f(M)$ eşitliğinden $f^{-1}(f(K) + L) = M$ yazılabilir. Böylece $K + f^{-1}(L) = M$ dir. $K \ll M$ olduğundan $f^{-1}(L) = M$ bulunur. Buradan $L = f(M)$

olduğu görülür. Yani $f(K) \ll f(M)$ dir. Ayrıca i) den dolayı $f(M) \leq N$ olduğundan $f(K) \ll N$ elde edilir.

iv) $K \ll N$ ise, i) den $K \ll M$ dir. Tersine; $K \ll M$ olsun. $K + L = N$ olacak şekilde herhangi bir $L \leq N$ alalım. N, M nin direkt toplam terimi olduğundan $M = N \oplus U$ olacak şekilde $U \leq M$ alt modülü vardır. Bu durumda $K + L + U = M$ ve $K \ll N$ olduğundan $L + U = M$ dir. Modüler kuraldan $N = L + (U \cap N) = L$ olur. Buradan $K \ll N$ elde edilir.

v) N alt modülü M nin bir direkt toplam terimi ise $M = N \oplus K$ olacak şekilde M nin bir K alt modülü vardır. Böylece $M = N + K$ olup $N \ll M$ olduğundan $K = M$ dir. Ayrıca $N \cap K = 0$ ve $K = M$ olduğundan $N = N \cap M = 0$ bulunur.

vi) M/N sonlu üretilmiş olsun. Bu takdirde $M = N + K$ olacak şekilde sonlu üretilmiş $K \leq M$ alt modülü vardır. Buradan $N \ll M$ olduğundan $K = M$ olup M sonlu üretilmiştir.

2.7. Bir Modülün Radikali

2.7.1. Tanım M bir modül olsun. M nin tüm maksimal alt modüllerinin arakesitine M nin **radikali** denir ve $Rad(M)$ ile gösterilir. Eğer M nin maksimal alt modülü yoksa, $Rad(M) = M$ dir. Bu takdirde M modülüne **radikal modül** denir. M nin tüm radikal alt modüllerinin toplamı $p(M)$ ile gösterilir [13].

R bir halka olmak üzere tüm yarı-basit $R-$modüllerin ailesine SS dersek, $Rad(M) = Re(M, SS)$ dir [13].

2.7.2. Teorem R bir halka ve M bir R −modül olsun. Bir $m \in M$ için Rm devirli alt modülünün küçük olmaması için gerek ve yeter koşul $m \notin U$ olacak şekilde U maksimal alt modülünün olmasıdır [13].

İspat. $(\Rightarrow)$: Rm devirli alt modülünün M de küçük olmadığını kabul edelim ve $X = \{N \subsetneqq M | N + Rm = M\}$ kümesini tanımlayalım. Hipotezden $X \neq \emptyset$ dir. X kapsama bağıntısına göre sıralı bir kümedir. Y, X kümesinin tam sıralı bir alt kümesi olsun. $Y_0 = \bigcup_{K \in Y} K$, dersek $m \notin Y_0$ dır. Çünkü $m \in Y_0$ olursa bir $K \in Y$ için $m \in K$ olup $K = K + Rm = M$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla Y_0 M nin kendisinden farklı bir alt kümesidir. Ayrıca her $K \in Y$ için $K + Rm = M$ olduğundan $Y_0 + Rm = M$ olup $Y_0 \in X$ bulunur. Buradan Y nin X kümesinde bir üst sınırı olup Zorn Yardımcı Teoreminden X kümesi bir U maksimal elemanını içerir. Şimdi U alt modülünün M de maksimal olduğunu gösterelim. $U \subsetneqq V \leq M$ keyfi olsun. $U + Rm = M$ ve $U \subsetneqq V$ olduğundan $V + Rm = M$ bulunur. Diğer taraftan U, X kümesinin maksimal elemanı olduğundan $V \notin X$ dir. Dolayısıyla X kümesinin tanımından dolayı $V = M$ olup U alt modülü M de maksimaldir.

$(\Leftarrow)$: $m \notin U$ olacak şekilde U maksimal alt modülünün mevcut olduğunu kabul edelim. Bu takdirde U maksimal modül olduğundan $U + Rm = M$ olup Rm, M modülünde küçük değildir.

Önerme 2.6.4 ve Teorem 2.7.2 yardımı ile aşağıdaki sonucu elde ederiz.

2.7.3. Sonuç R bir halka ve M bir R −modül olsun. Bu takdirde,

i) $m \in M$ olmak üzere $Rm \ll M$ olması için gerek ve yeter koşul $m \in Rad(M)$ olmasıdır.

ii) $Rad(M) = \sum_{L \ll M} L$ dir [13].

2.7.4. Yardımcı Teorem M bir modül olsun. I indis kümesi olmak üzere her $i \in I$ için $N \leq N_i \leq M$ olsun. Bu takdirde $\bigcap_{i \in I}(N_i/N) = (\bigcap_{i \in I} N_i)/N$ dir [16].

İspat. $m + N \in \bigcap_{i \in I} (N_i/N)$ keyfi elemanını alalım. Her $i \in I$ için $m + N \in N_i/N$ olup $m \in N_i$ dir. Buradan $m \in \bigcap_{i \in I} N_i$ olur ki $m + N \in (\bigcap_{i \in I} N_i)/N$ elde edilir. Tersi benzer şekilde gösterilebilir.

2.7.5. Teorem (Radikalin Özellikleri) M bir modül olsun. Bu takdirde,

i) $Rad(M/Rad(M)) = 0$ dır.

ii) $N \leq M$ ise, $Rad(N) \leq Rad(M)$ dir.

iii) $f \in Hom\,(M, K)$ için $f(Rad(M)) \leq Rad(K)$ dır. Eğer $Çek(f) \leq Rad(M)$ ise, $f\big(Rad(M)\big) = Rad(f(M))$ dir.

iv) $N \leq M$ olmak üzere $(N + Rad(M))/N \leq Rad(M/N)$ ve $N \leq Rad(M)$ ise, $Rad(M/N) = Rad(M)/N$ dir.

v) $M = \oplus_{i \in I} M_i$ ise, $Rad(M) = \oplus_{i \in I} Rad(M_i)$ ve $M/Rad(M) \cong \oplus_{i \in I}(M_i/Rad(M_i))$ dir.

vi) M modülünün radikal modül olması için gerek ve yeter koşul M nin her sonlu üretilmiş alt modülünün M de küçük olmasıdır.

vii) M sonlu üretilmiş ise, $Rad(M) \ll M$ dir

viii) M yarı-basit ise, $Rad(M) = 0$ dır.

ix) R bir halka ve M R −basit modüllerin direkt çarpımı ise, $Rad(M) = 0$ dır [13].

İspat.

i) M nin maksimal alt modülleri ile ${}^{M}/_{Rad(M)}$ nin maksimal alt modülleri arasında birebir eşleme vardır. X, M nin tüm maksimal alt modüllerinin kümesi olmak üzere $M/Rad(M) = \bigcap_{U \in X}(U/Rad(M))$ olup Yardımcı Teorem 2.7.4 ten dolayı $M/Rad(M) = \bigcap_{U \in X}(U/Rad(M)) = (\bigcap_{U \in X} U)/Rad(M) = Rad(M)/Rad(M) = 0$ elde edilir.

ii) $N \leq M$ ve $m \in Rad(N)$ olsun. Bu takdirde Sonuç 2.7.3 ten $Rm \ll N$ olup Önerme 2.6.4 i) den $Rm \ll M$ elde edilir. Yine Sonuç 2.7.3 ten $m \in Rad(M)$ olup $Rad(N) \leq Rad(M)$ bulunur.

iii) $f \in Hom_R(M, K)$ alalım. $m \in Rad(M)$ ise, Sonuç 2.7.3 ten $Rm \ll M$ olup Önerme 2.6.4 iii) den $f(Rm) = Rf(m) \ll f(M)$ elde edilir. Dolayısıyla $f(m) \in Rad(f(M))$ olup $f(Rad(f(M)) \leq Rad(f(M))$ elde edilir. f homomorfizma olduğundan $f(M) \leq K$ olup ii) den $Rad(f(M)) \leq Rad(K)$ bulunur. Dolayısıyla $f(Rad(f(M)) \leq Rad(K)$ elde edilir.

Şimdi $Çek(f) \leq Rad(M)$ için $Rad(f(M)) \leq f(Rad(M))$ olduğunu gösterelim. $f(m) \in Rad(f(M))$ keyfi bir eleman olsun. Sonuç 2.7.3 ten $Rf(m) \ll f(M)$ dir. Kabul edelim ki $m \notin Rad(M)$ olsun. Bu takdirde $Rm + L = M$ olacak şekilde M nin L maksimal alt modülü vardır. Buradan $f(M) = Rf(m) + f(L)$ olup $Rf(m) \ll f(M)$ olduğundan $f(M) = f(L)$ elde edilir. Buradan $M = L + Çek(f)$ olup $Çek(f) \leq Rad(M) \leq L$ olduğundan $L = M$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $m \in Rad(M)$ olduğundan $Rad(f(M)) \leq f(Rad(M))$ olur. Dolayısıyla $f\big(Rad(M)\big) = Rad(f(M))$ eşitliği bulunur.

iv) $\pi: M \longrightarrow M/N$ doğal epimorfizmasını alalım. iii) den $(Rad(M) + N)/N = \pi\big(Rad(M)\big) \leq Rad\big(\pi(M)\big) = Rad(M)/N$ dir. Eğer $Çek(\pi) = N \leq Rad(M)$ ise tekrar iii) den $Rad(M)/N = Rad\big(\pi(M)\big) = \pi\big(Rad(M)\big) = (Rad(M) + N)/N = {Rad(M)}/{N}$ elde edilir.

v) Her $i \in I$ için $M_i \leq M$ olmak üzere ii) den $Rad(M_i) \leq Rad(M)$ olup $\bigoplus_{i \in I} Rad(M_i) \leq Rad(M)$ dir.

Tersine; $m \in Rad(M)$ keyfi elemanını alalım. Bu takdirde Sonuç 2.7.3 ten $Rm \ll M$ olup $m = m_{i_1} + m_{i_2} + \cdots + m_{i_k}$ olacak şekilde $j = 1,2, \ldots, k$ olmak üzere $m_{i_j} \in M_{i_j}$ elemanları vardır. Her $j = 1,2, \ldots, k$ için $\pi_{i_j}: M \longrightarrow M_{i_j}$ projeksiyonu için Önerme

2.6.4 iii) den $\pi_{i_j}(Rm) = Rm_{i_j} \ll M_{i_j}$ olup Sonuç 2.7.3 ten dolayı $m_{i_j} \in Rad(M_{i_j})$ olup $m = m_{i_1} + m_{i_2} + \cdots + m_{i_k} \in \bigoplus_{i \in I} Rad(M_i)$ dir. Sonuç olarak $\bigoplus_{i \in I} Rad(M_i) = Rad(M)$ dir. Ayrıca her $(m_i)_{i \in I} \in M$ için $f((m_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} \left({m_i + Rad(M_i)} / {Rad(M_i)} \right)$ ile tanımlı $f: M \longrightarrow \bigoplus_{i \in I}(M_i/Rad(M_i))$ dönüşümü epimorfizmadır ve $Çek(f) = Rad(M)$ olduğundan $M/Rad(M) \cong \bigoplus_{i \in I}(M_i/Rad(M_i))$ elde edilir.

vi) $M = Rad(M)$ ise, her $m \in M$ için Sonuç 2.7.3 ten $Rm \ll M$ olur. Buradan Önerme 2.6.4 ii) den M modülünün sonlu üretilmiş her alt modülü M de küçük olur. Tersi Sonuç 2.7.3 ten açıktır.

vii) $Rad(M)$ nin M de küçük olmadığını kabul edelim. Bu durumda $M = Rad(M) + K$ olacak şekilde M nin L öz alt modülü vardır. M sonlu üretilmiş olduğundan her öz alt modülü bir maksimal alt modül tarafından kapsanır. Bu maksimal alt modül U olsun. Böylece $Rad(M) \leq U$ ve $K \leq U$ olup $M = Rad(M) + K = U$ çelişkisi elde edilir. Buradan $Rad(M) \ll M$ elde edilir.

viii) M yarı-basit olsun. Sonuç 2.7.3 ten herhangi bir $m \in Rad(M)$ için $Rm \ll M$ dir. M yarı-basit olduğundan $Rm \leq M$ alt modülü M nin direkt toplam terimidir. Dolayısıyla Rm hem küçük alt modül hem de direkt toplam terimi olduğundan Önerme 2.6.4 v) gereği $Rm = 0$, dolayısıyla $m = 0$ dır. Sonuç olarak $Rad(M) = 0$ dır.

ix) R bir halka $SS = \{N_i\}_{i \in I}$ tüm basit $R-$ modüllerin ailesi olsun. M basit modüllerin bir direkt çarpımı ise $M = \prod_{i \in I} N_i$ şeklinde yazılabilir. Buradan $i: M \longrightarrow \prod_{i \in I} N_i$ içerme dönüşümü modül monomorfizmasıdır. Teorem 2.4.2 ve Tanım 2.7.1 den $Rad(M) = Re(M, SS) = 0$ bulunur.

2.7.6. Önerme M sıfırdan farklı bir modül ve $N \leq M$ olsun. Bu takdirde,

i) $p(M) = 0$ ise, $p(N) = 0$ dır.

ii) $p(N) = 0$ ve $p(M/N) = 0$ ise, $p(M) = 0$ dır.

iii) $M = \oplus_{i \in I} M_i$ ise $p(M) = \oplus_{i \in I} p(M_i)$ dir

iv) $p(M)$, M nin en büyük radikal alt modülüdür [19].

2.7.7. Tanım M sıfırdan farklı bir modül olsun. M nin her öz alt modülü M de küçük ise, M ye **oyuk modül** denir [16].

2.7.8. Tanım M bir modül olsun. Eğer M nin tüm öz alt modüllerinin toplamı yine bir öz alt modül ise, M ye **lokal modül** denir [16].

R bir halka olsun. R nin lokal halka olması için gerek ve yeter koşul ${}_R R$ sol R −modülünün lokal olmasıdır.

2.7.9. Teorem R bir halka ve M sıfırdan farklı bir R −modül olsun. M modülünün lokal olması için gerek ve yeter koşul M nin sonlu üretilmiş ve bir tek maksimal alt modüle sahip olmasıdır. Bu durumda M nin tüm öz alt alt modüllerinin toplamı $Rad(M)$ ye eşit olup, $Rad(M) \ll M$ dir [16].

İspat.($\Rightarrow$): M lokal modül ve M nin öz alt modüllerinin toplamı K olsun. $K \neq M$ olduğundan $m \notin K$ olacak şekilde en az bir $m \in M$ vardır. Böylece $Rm \not\subset K$ dır. K, M nin tüm öz alt modüllerin toplamı olduğundan $Rm = M$ olup M devirlidir. K nın maksimal alt modül olduğu ise tanımdan açıktır.

($\Leftarrow$): M bir tek K maksimal alt modülüne sonlu üretilmiş sahip devirli modül olsun. Bu durumda Tanım 2.2.10 ile M nin her öz alt modülü K tarafından kapsanır. Dolayısıyla M nin bütün öz alt modüllerinin toplamı K olup M lokal modüldür.

Radikalin tanımı gereği $Rad(M) = K$ olup M modülü devirli olduğundan Teorem 2.7.5 vii) den dolayı $Rad(M) \ll M$ elde edilir.

2.8. Bir Modülün Soklesi

2.8.1. Tanım R bir halka ve SS tüm basit $R-$modüllerin ailesi olsun. M bir $R-$modül olmak üzere,

$$\begin{aligned} Soc(M) &= Tr(X, M) = \sum\{\, Gör(f) \mid f \in Hom(X, M)\} \\ &= \sum\{\, Gör(f) \mid f(U) \leq M \; basit\ alt\ modül, U \in X\,\} \\ &= \sum\{\, K \leq M \mid K \; basit\ alt\ modül\,\} \end{aligned}$$

alt modülüne M nin **soklesi** denir. Ayrıca $Soc(M) = \bigcap\{\, L \leq M \mid L \trianglelefteq M\}$ dir [16].

Teorem 2.2.13 ten dolayı $Soc(M)$ alt modülü M nin en büyük yarı-basit alt modülüdür. Ayrıca $K \leq M$ ise $Soc(K) \leq Soc(M)$ olduğu açıktır.

2.8.2. Önerme (Soklenin Özellikleri) R bir halka ve M bir $R-$modül olsun. Bu durumda,

i) Her $f: M \longrightarrow N$ homomorfizması için $f\big(Soc(M)\big) \subseteq Soc(N)$ dir.

ii) M nin her K alt modülü için $Soc(K) = K \cap Soc(M)$ dir.

iii) $Soc(M) \trianglelefteq M$ olması için gerek ve yeter koşul sıfırdan farklı her K alt modülü için $Soc(K) \neq 0$ olmasıdır.

iv) $M = \bigoplus_{i \in I} N_i$ ise $Soc(M) = \bigoplus_{i \in I} Soc(N_i)$ dir [16].

İspat.

i) Bir $f: M \longrightarrow N$ homomorfizmasını alalım. $Soc(M) = \sum_{i \in I}\{K \leq M \mid K\ M\ nin\ basit\ alt\ modülü\}$ olduğunu biliyoruz. K M nin basit alt modülü olmak üzere basit modüllerin homomorfizma altındaki görüntüsü basit olduğundan $f(K)$ modülü $f(M)$ de basittir. Böylece $f\big(Soc(M)\big) = f(\sum_{i\in I}\{K \leq M | K\ M\ nin\ basit\ alt\ modülü\})$

$$= \sum_{i\in I}\sum_{i\in I}\{f(K) \leq N | K\ M\ nin\ basit\ alt\ modülü\} \subseteq Soc(N) \text{ dir.}$$

ii) $K \leq M$ ve S K nın basit bir alt modülü olsun. O halde S M ninde basit alt modülüdür. Böylece $S \subseteq K \cap Soc(M)$ dir. K nın her basit alt modülü için bu geçerli olduğundan $Soc(K) \subseteq K \cap Soc(M)$ dir. Tersine $Soc(M)$ nin M nin en büyük yarı basit alt modülü olduğunu biliyoruz. Teorem 2.2.13 ile $K \cap Soc(M)$ K nın basit alt modüllerinin toplamıdır. Böylece $K \cap Soc(M) \subseteq Soc(K)$ dır.

iii) $Soc(M) \trianglelefteq M$ ve $0 \neq K \leq M$ olsun. Bu durumda büyük alt modül tanımı gereği M nin her L büyük alt modülü için $L \cap K \neq 0$ dır. Böylece $K \cap Soc(M) \neq 0$ dır. ii) den $Soc(K) = K \cap Soc(M) \neq 0$ elde edilir.

Tersine; M nin sıfırdan farklı her K alt modülü için $Soc(K) \neq 0$ olsun. ii) den $Soc(K) = K \cap Soc(M) \neq 0$ olup $Soc(M) \trianglelefteq M$ dir.

iv) Her $i \in I$ için N_i her basit modülü M nin de bir basit alt modülü olduğundan $\oplus_{i\in I}Soc(N_i) \subseteq Soc(M)$ olduğu açıktır. Tersine $M = \oplus_{i\in I}N_i$ ve L M nin bir basit alt modülü olsun. Böylece $L = Ra$ olacak şekilde bir $a \in L$ vardır. $a \in \oplus_{i\in I}N_i$ olduğundan $a = n_{i_1} + n_{i_2} + \cdots + n_{i_k}$ olacak şekilde teklikle belli $n_{i_j} \in N_{i_j}$, $j = 1,2, \ldots, k,\ k \in \mathbb{N}$ vardır. Her $j = 1,2, \ldots, k$ için $\pi_{i_j}: M \longrightarrow N_{i_j}$ projeksiyonları için $\pi_{i_j}(a) = n_{i_j}$ olduğundan $\pi_{i_j}(L) = R\pi_{i_j}(a) = Rn_{i_j}$, N_{i_j} nin bir basit alt modülüdür. Böylece her $j = 1,2, \ldots, k$ için $n_{i_j} \in Soc(N_{i_j})$ olup $a = n_{i_1} + n_{i_2} + \cdots + n_{i_k} \in \oplus_{i\in I}Soc(N_i)$ yazılabilir. Buradan $L = Ra \subseteq \oplus_{i\in I}Soc(N_i)$ elde edilir. M nin her L basit alt modülü için bu geçerli olduğundan $Soc(M) \subseteq \oplus_{i\in I}Soc(N_i)$ dir.

2.8.3. Yardımcı Teorem M bir modül $L_1, L_2 \leq M$ olsun. M nin K_1 ve K_2 alt modülleri için $K_1 \trianglelefteq L_1$ ve $K_2 \trianglelefteq L_2$ ise, $K_1 \cap K_2 \trianglelefteq L_1 \cap L_2$ dir [16].

İspat. $N\ L_1 \cap L_2$ nin sıfırdan farklı bir alt modülü olsun. O halde $K_1 \trianglelefteq L_1$ olduğundan $K_1 \cap N \neq 0$ dır. $K_2 \trianglelefteq L_2$ olduğundan $K_2 \cap (K_1 \cap N) = (K_2 \cap K_1) \cap N \neq 0$ dır. böylece $K_1 \cap K_2 \trianglelefteq L_1 \cap L_2$ dir.

2.8.4. Teorem M bir modül olsun. M nin sonlu eş-üretilmiş olması için gerek ve yeter koşul $Soc(M)$ nin eş-sonlu üretilmiş ve $Soc(M) \trianglelefteq M$ olmasıdır [16].

İspat. ($\Longrightarrow$): M sonlu eş-üretilmiş olsun. Bu takdirde I indis kümesi olmak üzere her $i \in I$ için $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ olacak şekilde $M_i \leq M$ alt modülleri vardır. Böylece i içerme monomorfizması ve I_M birim homomorfizma olmak üzere

$$i: Soc(M) \longrightarrow \prod_{i \in I} M_i \xrightarrow{I_M} \bigoplus_{i \in I} M_i \text{ dizisi yazılabilir.}$$

Buradan $Soc(M)$ sonlu eş-üretilmiştir. Şimdi ise, $Soc(M) \trianglelefteq M$ olduğunu gösterelim. M nin sıfırdan farklı bir K alt modülünü alalım. Bu durumda $Soc(K) = \cap \{L_i | Her\ i \in I\ için\ L_i \trianglelefteq K\}$ yazılabilir. Kabul edelim ki $Soc(K) = 0$ olsun. M sonlu eş-üretilmiş olduğundan Teorem 2.4.7 iv) gereği $Soc(K) \leq M$ sonlu eş-üretilmiş olup sonlu $J \subseteq I$ alt indis kümesi için $L_0 = \cap \{L_j \,|\, Her\ j \in J\ için\ L_j \trianglelefteq K\} = 0$ yazılır. Yardımcı Teorem 2.8.3 ten dolayı $L_0 \trianglelefteq K$ elde edilir. Sonuç olarak buradan $K = 0$ çelişkisine ulaşılır. Dolayısıyla $Soc(K) \neq 0$ olup Teorem 2.8.2 iii) ten $Soc(M) \trianglelefteq M$ dir.

($\Longleftarrow$): Sonlu eş-üretilmiş bir modülün her büyük genişlemesi sonlu eş-üretilmiş olduğundan M sonlu eş-üretilmiştir.

2.9. Tümleyen Alt Modüller ve Tümlenmiş Modüller

2.9.1. Tanım M bir modül ve U, M nin bir alt modülü olsun. Eğer $M = U + V$ olacak şekilde bir V alt modülü var ve bu şarta göre minimal ise yani bir $V' \leq V$ için $M = U + V'$ olması $V' = V$ olmasını gerektiriyorsa V ye U alt modülünün **tümleyeni**

denir. Eğer $U + V = M$ koşulunu gerçekleyen her $V \leq M$ alt modülü için, $V^{'} \leq V$ olacak şekilde $V^{'}$ tümleyeni varsa, U ya M de **bol tümleyene sahiptir** denir [16].

2.9.2. Teorem M bir modül ve $U, V \leq M$ olsun. V alt modülü U nun tümleyeni olması için gerek ve yeter koşul $U + V = M$ ve $U \cap V \ll V$ olmasıdır [16].

İspat. ($\Rightarrow$): V, U nun tümleyeni olsun. Bu durumda $U + V = M$ olur. Bir $X \leq V$alt modülü için $(U \cap V) + X = V$ olsun. Buradan $U + (U \cap V) + X = V + U = M$ olup $U + X = M$ elde edilir. $X \leq V$ ve V nin minimalliğinden $X = V$ bulunur. Yani $U \cap V \ll V$ dir.

($\Leftarrow$):$U + V = M$ ve $U \cap V \ll V$ olsun. Bir $X \leq V$ için $M = U + X$ olsun. Buradan $(U + X) \cap V = M \cap V$ ve modüler kuraldan $U \cap V + X = V$ olur. $U \cap V \ll V$ olduğundan $X = V$ elde edilir.

2.9.3. Teorem (Tümleyen alt modülün özellikleri) R bir halka ve M bir R −modül ve $U, V \leq M$ olsun. U alt modülünün tümleyeni V olmak üzere,

i) $W \leq U$ alt modülü $M = W + V$ ise V, alt modülü W nin de tümleyenidir.

ii) M sonlu üretilmiş ise, V de sonlu üretilmiştir.

iii) U, M nin maksimal alt modülü ise V devirlidir ve $U \cap V$, V nin tek maksimal alt modülüdür. Yani V lokaldir.

iv) $K \ll M$ ise V, $U + K$ nın da tümleyenidir.

v) $K \ll M$ için $K \cap V \ll V$ ve $Rad(V) = V \cap Rad(M)$ dir.

vi) $Rad(M) \ll M$ ise U, M nin bir maksimal alt modülü tarafından kapsanır.

vii) Bir $L \leq U$ için ${(V + L)}/{L}$ bölüm modülü ${M}/{L}$ de ${U}/{L}$ nin bir tümleyenidir.

viii) $Rad(M) \ll M$ veya $Rad(M) \leq U$ ise $\pi: M \longrightarrow M/_{Rad(M)}$ doğal epimorfizması için $M/_{Rad(M)} = \pi(U) \oplus \pi(V)$ dir [16].

İspat.

i) $W \leq U$ için $M = W + V$ olsun. U alt modülünün M deki tümleyeni V olduğundan Teorem 2.9.2 gereği $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ yazılır. $W \leq U$ olduğundan $W \cap V \leq U \cap V \ll V$ yazılır. Önerme 2.6.4 i) den $W \cap V \ll V$ dir. Dolayısıyla V W nın da M de tümleyenidir.

ii) M sonlu üretilmiş olsun. $M = U + V$ olduğundan $V' \leq V$ sonlu üretilmiş alt modülü için $M = U + V'$ yazılabilir. V nin minimalliğinden $V = V'$ bulunur.

iii) V U nun tümleyeni ve U maksimal alt modül olsun. O halde $m \notin U$ olacak şekilde bir $m \in V$ vardır. Aksi takdirde $U = U + V = M$ çelişkisi elde edilir. U maksimal olduğundan $M = U + Rm$ ve V nin minimalliğinden $V = Rm$ yazılabilir. Böylece V devirlidir. $M/_U \cong V/_{U \cap V}$ basit olduğundan $U \cap V$ V nin bir maksimal alt modülüdür. Böylece $Rad(V) \subseteq U \cap V$ dir. Tersine $U \cap V \ll V$ olduğundan $U \cap V \subseteq Rad(V)$ dir. Böylece $U \cap V = Rad(V)$ V nin tek maksimal alt modülüdür. Teorem 2.7.9 ile V lokaldir.

iv) $K \ll M$ olsun. Bir $X \subseteq V$ için $M = U + K + X$ olsa $M = U + X$ yazılabilir. V nintümleyeninin minimalliğinden dolayı $X = V$ dir.

v) $K \ll M$, bir $X \subseteq V$ için $(K \cap V) + X = V$ olsun. Böylece $M = U + V = U + (K \cap V) + X = U + X$ elde edilir. Buradan $X = V$ olup, $(K \cap V) \ll V$ dir. Bir $a \in V \cap Rad(M)$ alalım. O halde $Ra \ll M$ ve $K = Ra \leq V$ dir. Böylece $K \cap V = Ra \cap V = Ra \ll V$ dir. Buradan $a \in V$ dir. Dolayısıyla $V \cap Rad(M) \leq Rad(V)$

bulunur. Ayrıca $Rad(V) \leq V \cap Rad(M)$ ilişkisi her zaman var olduğundan $V \cap Rad(M) = Rad(V)$ elde edilir.

vi) $U \leq Rad(M) \neq M$ ise, U alt modülü M nin her maksimal alt modülünde kapsanır. $U \nsubseteq Rad(M)$ olsun. v) ten dolayı $Rad(V) = V \cap Rad(M) \neq V$ yazılır. Bu durumda V nin en az bir $V^{'}$ maksimal alt modülü vardır. Birinci İzomorfizma Teoreminden $M/_{(U + V')} \cong V/_{V'}$ yazılır. Böylece $U + V^{'}$, M de maksimal alt modüldür ve $U \subseteq U + V^{'}$ dir.

vii) $L \leq U$ için $M = U + V$ olduğundan $U/_L + {(V + L)}/_L = M/_L$ yazılabilir. Modüler kuraldan $U \cap (V + L) = U \cap V + L$ yazılır. Buradan $(U/_L) \cap \left({(V + L)}/_L\right) = {((U \cap V) + L)}/_L$ elde edilir. $U \cap V \ll V$ olduğundan ${(U \cap V + L)}/_L \ll {(V + L)}/_L$ olur. Böylece ${(V + L)}/_L$ modülü $U/_L$ nin $M/_L$ de tümleyenidir.

viii) $\pi: M \longrightarrow M/_{Rad(M)}$ doğal epimorfizma olmak üzere U nun tümleyeni V olduğundan $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ yazılır. Buradan $Rad(M) \leq U$ ise, vii) den $\pi(U) \cap \pi(V) \ll \pi(V)$ yazılır. Böylece $\pi(U) \cap \pi(V) \ll M/_{Rad(M)}$ olup Teorem 2.7.5 i) ile $\pi(U) \cap \pi(V) = 0$ dır. Eğer $Rad(M) \ll M$ ise, iv) den V, $U + Rad(M)$ nin M de bir tümleyenidir. $Rad(M) \leq U + Rad(M)$ ve $\pi(U + Rad(M)) = \pi(U)$ olduğundan ilk tartışma ile tekrar $M/_{Rad(M)} = \pi(U) \cap \pi(V)$ dir.

2.9.4. Tanım M bir modül olsun. M nin her (dual sonlu) alt modülü tümleyene sahip ise, M modülüne **(dual sonlu) tümlenmiş modül** ve M nin (dual sonlu) her alt modülü bol tümleyene sahip ise, M ye **bol (dual sonlu) tümlenmiş modül** denir [16].

2.9.5. Teorem M tümlenmiş modül ve $Rad(M) = 0$ ise, M yarı-basittir [16].

İspat. M tümlenmiş modül, $Rad(M) = 0$ ve $U \leq M$ olsun. O halde U alt modülü M de bir V tümleyenine sahiptir yani $M = U + V$, $U \cap V \ll V$ dir. $U \cap V \ll V$ olduğundan radikalin tanımı gereği $U \cap V \leq Rad(M) = 0$ olup $U \cap V = 0$ elde edilir. Bu ise, U nun M de bir direkt toplam terimi olduğunu, dolayısıyla M nin yarı-basit olduğunu gösterir.

2.9.6. Yardımcı Teorem $p(M)$ sonlu üretilmiş ise, $p(M) = 0$ dır [19].

İspat. $p(M)$ sonlu üretilmiş ise Teorem 2.7.5 vii) ve Teorem 2.7.6 iv) gereği $p(M) = Rad(p(M)) \ll p(M)$ olup $p(M) = 0$ dır.

2.9.7. Teorem M tümlenmiş modül ve $p(M) = 0$ ise, $Rad(M) \ll M$ dir.

İspat. $Rad(M)$ nin M de küçük olmadığını kabul edelim. Bu durumda $M = Rad(M) + U$ olacak şekilde M nin bir U öz alt modülü vardır. M tümlenmiş modül olduğundan U nun M de bir V tümleyeni vardır ve $M = U + V,\ U \cap V \ll V$ dir. $p(M) = 0$ olduğundan Önerme 2.7.6 i) gereği $p(V) = 0$ olup V en az bir K maksimal alt modülüne sahiptir. $M = U + V = U + (V + K) = (U + K) + V$ yazılabilir. İkinci İzomorfizma Teoreminden ${}^{M}/_{U+K} \cong {}^{V}/_{V \cap (U+K)} = {}^{V}/_{K}$ basit olup**,** Yardımcı Teorem 2.2.12 den dolayı $U + K$, M nin maksimal alt modülüdür. $M = Rad(M) + U \leq Rad(M) + (U + K) = U + K$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $RadM \ll M$ dir.

2.9.8. Tanım M bir modül olsun. $Rad(M)$ M de tümleyene sahipse, M ye **radikal tümlenmiş modül** denir [19].

Yarı-basit ve tümlenmiş modüller radikal tümlenmiştir.

2.9.9. Tanım M bir modül olsun. M nin her öz alt modülü en az bir maksimal alt modülü tarafından kapsanıyorsa, M ye **eş-atom** modül denir [13].

Sonlu üretilmiş modüller eş-atomdur.

2.9.10. Teorem M bir modül olsun. Bu takdirde,

i) M modülünün yarı-basit olması için gerek ve yeter koşul M nin eş-atom ve her maksimal alt modülünün M de bir direkt toplam terimi olmasıdır.

ii) $U \leq Rad(M)$ ve U eş-atom ise, $U \ll M$ dir.

iii) M eş-atom ise, $Rad(M) \ll M$ dir

iv) M eş-atom ve $N \leq M$ ise, $M/_N$ eş-atomdur [13].

2.10. Tam Diziler

2.10.1. Tanım $\{M_n | n \in \mathbb{Z}\}$ modüller ailesi ve bunların $f_n: M_n \longrightarrow M_{n-1}$ homomorfizmalarından oluşan $\ldots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \longrightarrow \ldots$ dizisinde her $n \in \mathbb{Z}$ için $Gör(f_{n+1}) \subseteq Çek(f_n)$ ise, bu diziye **kompleks dizi**, $Gör(f_{n+1}) = Çek(f_n)$ ise, **tam dizi** denir [3].

2.10.2. Önerme $0 \xrightarrow{f} K \xrightarrow{g} L \xrightarrow{h} M \xrightarrow{e} 0$ dizisi tam ise, g bir monomorfizma, h bir epimorfizmadır. Ayrıca $Gör(g) \cong K$ ve $M \cong L/Gör(g)$ dir. Böylece izomorf modülleri özdeşleştirerek $M = L/K$ alabiliriz [3].

İspat. $Çek(g) = Gör(f) = f(0) = 0$ olduğundan g monomorfizmadır. İzomorfizma teoreminden $Gör(g) = g(K) \cong L$ dır. Her $m \in M$ için $e(m) = 0$ olduğundan $Gör(h) = Çek(e) = M$ dir. Yani h epimorfizmadır. Birinci izomorfizma teoreminden $M = Gör(h) \cong L/Çek(h) = L/Gör(g)$ elde edilir.

2.10.3. Tanım $0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ şeklindeki tam diziye kısa tam dizi denir [3].

M bir modül ve $N \leq M$ olmak üzere $0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0$ ve $f: M \longrightarrow K$ homomorfizması verildiğinde $0 \longrightarrow Çek(f) \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} f(M) \longrightarrow 0$ kısa tam dizilerdir.

2.10.4. Teorem $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi için aşağıdaki koşullar denktir.

i) $h \circ f = I_A$ olacak şekilde $h: B \longrightarrow A$ homomorfizması bulunur.

ii) $Gör(f)$ alt modülü B nin bir direkt toplam terimidir.

iii) $g \circ k = I_C$ olacak şekilde $k: C \longrightarrow B$ homomorfizması vardır. Bu durumda $B = A \oplus C$ dir [3].

İspat. (i⇒ii): $B = Gör(f) \oplus Çek(h)$ olduğunu gösterelim. Her $b \in B$ için $h\big(b - f \circ h(b)\big) = h(b) - \big((h \circ f) \circ h\big)(b) = h(b) - h(b) = 0$ olduğundan $b - f \circ h(b) \in Çek(h)$ dır. O halde $b = f\big(h(b)\big) + \big(b - f \circ h(b)\big) \in Gör(f) + Çek(h)$ elde ederiz. Diğer taraftan her $f(x) \in Gör(f) \cap Çek(h)$ için $x = (h \circ f)(x) = h\big(f(x)\big) = 0$ olup $Gör(f) \cap Çek(h) = 0$ bulunur. Yani $B = Gör(f) \oplus Çek(h)$ dır.

(ii⇒iii): Bir $M \leq B$ için $B = Gör(f) \oplus M$ olsun. $M \cap Çek(g) = M \cap Gör(f) = 0$ olduğundan $g|_M$, bir monomorfizmadır. Ayrıca, g bir epimorfizma olduğundan her

$c \in C$ için $g(b) = c$ olacak şekilde bir $b \in B$ bulunur. $a \in M,\ m \in M$ olmak üzere $b = f(a) + m$ şeklinde yazabiliriz. O halde $c = g(b) = g \circ f(a) + g(m) = g(m)$ dir. Dolayısıyla $g|_M$ epimorfizmadır ve böylece $g|_M$ bir izomorfizmadır. Bu izomorfizmanın tersinin değer kümesi genişletilerek bir $k\colon C \longrightarrow B$ monomorfizması elde edilir ve $g \circ k = I_C$ olduğu açıktır.

(iii $\Longrightarrow$ i): Her $b \in B$ için $g\big(b - k \circ g(b)\big) = g(b) - \big((g \circ k) \circ g\big)(b) = 0$ olup $b - k \circ g(b) \in Çek(g) = Gör(f)$ dir. O halde $b - k \circ g(b) = f(a)$ olacak şekilde bir $a \in A$ bulunur ve f monomorfizma olduğundan a tektir. O halde $h\colon B \longrightarrow A$ fonksiyonunu $h(b) = a$ ile tanımlayalım. Şimdi ise, h ın monomorfizma olduğunu gösterelim. $h(b) = a, h(b^{'}) = a^{'}$ ise, $b - k \circ g(b) = f(a)$ ve $b^{'} - k \circ g(b^{'}) = f(a^{'})$ olur. O halde $(b + b^{'}) - k \circ g(b + b^{'}) = \big(b - k \circ g(b)\big) + \big(b^{'} - k \circ g(b^{'})\big)$ $= f(a) + f(a^{'}) = f(a + a^{'})$ ve dolayısıyla $h(b + b^{'}) = a + a^{'} = h(b) + h(b^{'})$ elde ederiz. Diğer taraftan her $r \in R$ için $rb - k \circ g(rb) = r\big(b - k \circ g(b)\big) = rf(a) = f(ra)$ olduğundan $h(rb) = ra = rh(b)$ elde ederiz. Böylece h homomorfizmadır. Ayrıca her $a \in A$ için $f(a) - k \circ g\big(f(a)\big) = f(a) - k\big((g \circ f)(a)\big) = f(a) - k(0) = f(a)$ olup $h\big(f(a)\big) = a$ dır. Dolayısıyla $h \circ f = I_A$ olur. f monomorfizma olduğundan $Gör(f) \cong A$dır. Sonuç olarak $B = Gör(f) \oplus M$ ve $M \cong C$ olduğunu görürüz. Böylece $B = A \oplus C$ elde edilir.

2.10.5. Tanım Teorem 2.10.4 te verilen denk koşullarından biri gerçekleştiğinde $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ kısa tam dizisine **parçalanan kısa tam dizi** deni [3].

2.10.6. Yardımcı Teorem Tam satırlı

$$\begin{tikzcd} & & G \arrow[dl, dashed, "s"'] \arrow[d, "h"] & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

diyagramının bir $s: G \longrightarrow A$ homomorfizması ile değişmeli olarak yani $f \circ s = h$ olacak şekilde tamamlanabilmesi için gerek ve yeter koşul $g \circ h = 0$ olmasıdır. Ayrıca bu durumda s tek türlüdür [3].

İspat. ($\Rightarrow$): Diyagram değişmeli olacak şekilde bir s homomorfizması mevcut olsun. Diyagram tam satırlı olduğundan $g \circ h = g \circ f \circ s = 0 \circ s = 0$ elde edilir.

($\Leftarrow$): $g \circ h = 0$ olsun. $s: G \longrightarrow A$ homomorfizmasını aşağıdaki şekilde tanımlayalım: $x \in G$ keyfi elemanı için $g\big(h(x)\big) = 0$ olduğundan $h(x) \in Çek(g) = f(A)$ dır. Yani bir $a \in A$ için $h(x) = f(a)$ dır. f bir monomorfizma olduğundan a tek türlüdür. Bu durumda $s(x) = a$ olarak iyi tanımlı bir s fonksiyonu elde ederiz. $s(x) = a,\ s(y) = b$ ve $r \in R$ ise $h(x) = f(a),\ h(y) = f(b)$ dir. Buradan $h(x + y) = h(x) + h(y) = f(a) + f(b) = f(a + b)$, $h(rx) = rh(x) = rf(a) = f(ra)$ ve dolayısıyla $s(x + y) = a + b = s(x) + s(y), s(rx) = ra = rs(x),$ yani s homomorfizmadır. Şimdi diyagramın değişmeli olduğunu gösterelim. $x \in G$ keyfi elemanı için $h(x) = f(a), a \in A$ olsun. O halde $s(x) = a$ ve dolayısıyla $f\big(s(x)\big) = f(a) = h(x)$ elde ederiz. Diyagramı değişmeli yapan bir $s': G \longrightarrow A$ homomorfizması mevcutsa, her $a \in G$ için $f\big(s'(a)\big) = h(a) = f(s(a))$ olur. Bu takdirde f monomorfizma olduğundan $s'(a) = s(a)$ elde edilir. Böylece $s' = s$ ve s tek türlüdür.

2.10.7. Yardımcı Teorem Tam satırlı

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & C \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "s"] & 0 \\ & G & & \end{tikzcd}$$

diyagramının bir $s: C \longrightarrow G$ homomorfizması ile değişmeli olarak yani, $s \circ g = h$ olacak şekilde tamamlanabilmesi için gerek ve yeter koşul $h \circ f = 0$ olmasıdır. Ayrıca bu durumda s tek türlüdür [3].

İspat. Yardımcı Teorem 2.10.6 ya benzer şekilde ispat yapılır.

2.11. Kategori, Funktor ve Funktorun Tamlığı

2.11.1. Tanım Bir $\mathcal{K}$ kategorisi

i) $Ob(\mathcal{K})$ nesneler sınıfından;

ii) Her sıralı (A, B) nesneler çifti için, $Mor_{\mathcal{K}}(A, B)$ morfizmalar kümesinden (farklı $(A, B), (C, D)$ çiftleri için $Mor_{\mathcal{K}}(A, B) \cap Mor_{\mathcal{K}}(C, D) = \emptyset$ olmak üzere);

iii) $f \in Mor_{\mathcal{K}}(A, B)$, $g \in Mor_{\mathcal{K}}(B, C)$ olmak üzere her (g, f) çiftine bunların bileşkesi denilen $g \circ f \in Mor_{\mathcal{K}}(A, C)$ morfizmasını karşı getiren $Mor_{\mathcal{K}}(B, C) \times Mor_{\mathcal{K}}(A, B) \longrightarrow Mor_{\mathcal{K}}(A, C)$ fonksiyonlarından oluşur, öyle ki:

a) Her A, B, C, D nesneleri ve $f \in Mor_{\mathcal{K}}(A, B)$, $g \in Mor_{\mathcal{K}}(B, C), h \in Mor_{\mathcal{K}}(C, D)$ morfizmalar için $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ eşitliği sağlanır.

b) Her $A \in Ob(\mathcal{K})$ nesnesinin, her $f \in Mor_{\mathcal{K}}(A, B), g \in Mor_{\mathcal{K}}(B, A)$ için $f \circ I_A = f$, $I_A \circ g = g$ eşitliklerini gerçekleyen bir $I_A \in Mor_{\mathcal{K}}(A, A)$ birim (idantik) morfizması vardır [3].

2.11.2. Tanım $\mathcal{K}$ ve $\mathcal{M}$ kategoriler olsun. Bir $F: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{M}$ **kovaryant funktoru,** $\mathcal{K}$ nın her A nesnesine $\mathcal{M}$ nin bir $F(A)$ nesnesini, $\mathcal{K}$ daki her $f \in Mor_{\mathcal{K}}(A, B)$ morfizmasına bir $F(f) \in Mor_{\mathcal{M}}(F(A), F(B))$ morfizmasını karşı getiren ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir kuraldır.

i) $f \in Mor_{\mathcal{K}}(A, B)$, $g \in Mor_{\mathcal{K}}(B, C)$ ise, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ dir.

ii) Her $A \in Ob(\mathcal{K})$ için $F(I_A) = I_{F(A)}$ dır [3].

2.11.3. Tanım $\mathcal{K}$ ve $\mathcal{M}$ kategoriler olsun. Bir $F: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{M}$ **kontravaryant funktoru**, $\mathcal{K}$ nın her A nesnesine $\mathcal{M}$ nin bir $F(A)$ nesnesini, $\mathcal{K}$ daki her $f \in$

$Mor_{\mathcal{K}}(A,B)$ morfizmasına bir $F(f) \in Mor_{\mathcal{M}}(F(B),F(A))$ morfizmasını karşı getiren ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir kuraldır.

i) $f \in Mor_{\mathcal{K}}(A,B),\ g \in Mor_{\mathcal{K}}(B,C)$ ise, $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ dir.

ii) Her $A \in Ob(\mathcal{K})$ için $F(I_A) = I_{F(A)}$ dır [3].

2.11.4. Tanım $\mathcal{K}$ kategorisinde her $A,B \in Ob(\mathcal{K})$için $Mor_{\mathcal{K}}(A,B)$ kümesinde bir abel grup yapısı verilmişse ve her $f,g: A \longrightarrow B$, $h,k: B \longrightarrow C$ için $h \circ (f+g) = h \circ f + h \circ g$ ve $(h+k) \circ f = h \circ f + k \circ f$ ise, $\mathcal{K}$ ya **önadditif kategori** denir. $R - mod$ ve Ab kategorileri önadditif kategoridir [3].

2.11.5. Tanım $\mathcal{K}$ ve $\mathcal{K}'$ önadditif kategorilerse, her $f,g: A \longrightarrow B$ morfizmaları için $F(f+g) = F(f) + F(g)$ koşulunu gerçekleyen $F: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'$ funktorlarına **additif funktorlar** denir [3].

2.11.6. Tanım Bir $F: R - mod \longrightarrow Ab$ additif additif kovaryant funktorunu alalım.

i) $\ldots \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \ldots$ tam dizisi için $\ldots \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \longrightarrow \ldots$ dizisi tamsa, F ye **tam funktor** denir.

ii) Her $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ tam dizisi için $0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$ dizisi tamsa, F ye **soldan tam funktor** denir.

iii) Her $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ tam dizisi için $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \longrightarrow 0$ dizisi tamsa, F ye **sağdan tam funktor** denir.

Benzer şekilde kontravaryant funktorlar için de tamlık kavramları tanımlanır [3].

2.11.7. Yardımcı Teorem $R - mod$ kategorisinde satır ve sütunları tam dizi olan aşağıdaki diyagramı düşünelim.

$$
\begin{tikzcd}
Çek\varphi_1 \arrow[d, "i_1"] & Çek\varphi_2 \arrow[d, "i_2"] & Çek\varphi_3 \arrow[d, "i_3"] \\
M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\varphi_1"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\varphi_2"] & M_3 \arrow[d, "\varphi_3"] \\
N_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "p_1"] & N_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "p_2"] & N_3 \arrow[d, "p_3"] \\
N_1/\varphi_1(M_1) & N_2/\varphi_2(M_2) & N_3/\varphi_3(M_3)
\end{tikzcd}
$$

diyagramında $Çek\varphi_1 \xrightarrow{\alpha_1} Çek\varphi_2 \xrightarrow{\alpha_2} Çek\varphi_3$ ve $M_1/\varphi_1(M_1) \xrightarrow{\beta_1} M_2/\varphi_2(M_2) \xrightarrow{\beta_2} M_3/\varphi_3(M_3)$ şeklinde belirlenen homomorfizmaları tek olarak vardır. Ayrıca yukarıdaki diyagram değişmeli olacak şekilde tamamlanır ve

i) g_1 monomorfizma ise, birinci satır tamdır.

ii) f_1 monomorfizma ise, α_1 monomorfizmadır.

iii) f_2 epimorfizma ise, son satır tamdır.

iv) g_2 epimorfizma ise, β_2 epimorfizmadır.

v) f_2 epimorfizma ve g_1 monomorfizma ise, tam satırlı $Çek\varphi_2 \xrightarrow{\alpha_2} Çek\varphi_3 \xrightarrow{\delta} {M_1}/{\varphi_1(M_1)} \xrightarrow{\beta_1} {M_2}/{\varphi_2(M_2)}$ dizisi elde edilecek şekilde $\delta: Çek\varphi_3 \longrightarrow {M_1}/{\varphi_1(M_1)}$ bağlayıcı homomorfizması vardır [16].

2.12. Hom Funktoru

2.12.1. Tanım A ve B sol $R-$ modüller olsun. $f, g \in Hom(A, B)$ homomorfizmalarının $f + g$ toplamını her $a \in A$ için $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ olarak tanımlayalım. $0: A \longrightarrow B$ homomorfizmasını her $a \in A$ için $0(a) = 0$ olarak ve bir $f: A \longrightarrow B$ homomorfizması verildiğinde $-f: A \longrightarrow B$ homomorfizmasını $(-f)(a) = -f(a)$ olarak tanımlayalım. $f + g, 0, -f \in Hom(A, B)$ olduğu ve $(f + g) + h = f + (g + h)$, $f + g = g + f$ eşitlikleri kolayca kontrol edilir. Böylece, $Hom(A, B)$ bir abel grubu oluşturur. Bu gruba **homomorfizmalar grubu** denir. Kategori dilinde $Hom_R(A, B) = Mor_{R-Mod}(A, B)$ dir ve $R - Mod$ bir önadditif kategoridir. ($h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g$ ve $(h + k) \circ f = h \circ f + k \circ f$ eşitlikleri kolayca gösterilir.)

$f: B \longrightarrow C$ bir homomorfizma ise, $Hom(A, f): Hom(A, B) \longrightarrow Hom(A, C)$ fonksiyonunu ($Hom(A, f)$ yi kısaca f_* ile gösterelim.) $f_*(g) = f \circ g$ ile tanımlayalım. $f \circ g$ iki homomorfizmanın bileşkesi olup bir homomorfizmadır, yani $f \circ g \in Hom(A, C)$ dir ve $f_*(g + h) = f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h = f_*(g) + f_*(h)$ olduğundan f_* homomorfizmadır. Ayrıca $Hom(A, f + h)(g) = (f + h) \circ g = f \circ g + h \circ g = Hom(A, f)(g) + Hom(A, h)(g) = \big(Hom(A, f) + Hom(A, h)\big)(g)$ den $Hom(A,\cdot): R - mod \longrightarrow Ab$ bir kovaryant funktordur. Benzer şekilde $f: A \longrightarrow C$ homomorfizması için $f^* = Hom(f, B): Hom(C, B) \longrightarrow Hom(A, B)$ homomorfizmasını $f^*(g) = g \circ f$ ile tanımlayarak $Hom(\cdot, B): R - mod \longrightarrow Ab$ kontravaryant additif funktorunu elde ederiz [3].

2.12.2 Teorem Her M modülü için $Hom(M,\cdot)$ soldan tam kovaryant ve $Hom(\cdot,M)$ de soldan tam kontravaryant funktordur [3].

İspat. $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ tam dizisini alalım. $0 \longrightarrow Hom(M,A) \xrightarrow{f_*} Hom(M,B) \xrightarrow{g_*} Hom(M,C)$ dizisinin tam olduğunu göstermek için ilk önce $h \in Çek(f_*)$ alalım. Her $m \in M$ için $f\big(h(m)\big) = (f \circ h)(m) = f_*(h)(m) = 0(m) = 0$ ve f monomorfizma olduğundan, $h(m) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $h = 0$ ve $Çek(f_*) = \{0\}$ olup f_* bir monomorfizmadır. $u \in Gör(f_*)$ olsun. Bu durumda $u = f_*(v) = f \circ v$ olacak şekilde bir $v \in Hom(M,A)$ bulunur ve $g_*(u) = g_*(f \circ v) = g \circ f \circ v = 0 \circ v = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $u \in Çek(g_*)$ ve $Gör(f_*) \subseteq Çek(g_*)$ olur. Şimdi $u \in Çek(g_*)$ alalım. O halde $g \circ u = g_*(u) = 0$ dır ve

$$\begin{tikzcd} & & & M \arrow[dl, dashed, "s"'] \arrow[d, "u"] \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Yardımcı Teorem 2.10.6 kullanılarak $u = f \circ s = f_*(s) \in Gör(f_*)$ olacak şekilde bir $s \in Hom(M,A)$ homomorfizması bulunur. Dolayısıyla $Çek(g_*) \subseteq Gör(f_*)$ dır. Böylece $Hom(M,\cdot)$ soldan tamdır. $Hom(\cdot,M)$ kontravaryant funktorunun soldan tam olduğunu göstermek için $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ tam dizisini alalım ve $0 \longrightarrow Hom(C,M) \xrightarrow{g^*} Hom(B,M) \xrightarrow{f^*} Hom(A,M)$ dizisinin tam olduğunu gösterelim: $u \in Çek(g^*\ )$ alalım. Her $c \in C$ için g epimorfizma olduğundan $g(b) = c$ olacak şekilde bir $b \in B$ bulunduğundan $u(c) = (u \circ g)(b) = g^*(u)(b) = 0(b) = 0$ elde ederiz. Böylece $u = 0$ ve $Çek(g^*) = 0$ dır. Yani g^* monomorfizmadır. $u \in Gör(g^*)$ olsun. Bu durumda $v = g^*(u) = u \circ g$ olacak şekilde bir $u \in Hom(C,M)$ bulunur ve $f^*(v) = f^*(u \circ g) = u \circ g \circ f = u \circ 0 = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $u \in Çek(f^*)$ ve $Gör(g^*) \subseteq Çek(f^*)$ olur.

Şimdi $v \in Çek(f^*)$ alalım. O halde $v \circ f\ = f^*(v) = 0$ dır ve

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"'] & C \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "s"] & 0 \\ & M & & \end{tikzcd}$$

Yardımcı Teorem 2.10.7 kullanılarak $v = s \circ g = g^*(s) \in Gör(g^*)$ olacak şekilde bir $s \in Hom(C, M)$ homomorfizması bulunur. Dolayısıyla $Çek(f^*) \subseteq Gör(g^*)$ dır. Sonuç olarak $Çek(f^*) = Gör(g^*)$ elde edilir. Böylece $Hom(\cdot, M)$ soldan tamdır [3].

2.13. Projektif ve İnjektif Modüller

2.13.1. Tanım Bir P modülünü alalım. Her $f: A \longrightarrow B$ epimorfizması ve her $g: P \longrightarrow B$ homomorfizması için $g = f \circ h$ olacak şekilde bir $h: P \longrightarrow A$ homomorfizması bulunursa, P ye **projektif modül** denir. Diğer bir deyişle, tam satırlı her

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r] & 0 \\ & P \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, dashed, "h"] & \end{tikzcd}$$

diyagramı bir h homomorfizmasıyla değişmeli olarak, yani $g = f \circ h$ tamamlanabilirse P ye **projektif modül** denir [3].

2.13.2. Tanım I bir modülünü olsun. Her $f: A \longrightarrow B$ monomorfizması ve her $g: A \longrightarrow I$ homomorfizması için $g = h \circ f$ olacak şekilde bir $h: B \longrightarrow I$ homomorfizması bulunursa, I ya **injektif modül** denir. Diğer bir deyişle, tam satırlı her

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & I & \end{tikzcd}$$

diyagramı bir $h: B \longrightarrow I$ homomorfizması ile değişmeli olarak yani $g = h \circ f$ olacak şekilde tamamlanabilirse, I modülüne **injektif modül** denir [3].

2.13.3. Teorem $\{I_k | k \in K\}$ bir modüller topluluğu olsun. $I = \prod_{k \in K} I_k$ direkt çarpımının injektif olması için gerek ve yeter koşul her $k \in K$ için I_k nın injektif olmasıdır [3].

İspat. ($\Longrightarrow$): $I = \prod_{k \in K} I_k$ injektif olsun. Keyfi $f: A \longrightarrow B$ monomorfizmasını ve $g: A \longrightarrow I_k$ homomorfizmasını alalım. I injektif olduğundan $i_k: I_k \longrightarrow \prod_{n \in K} I_n$ gömme homomorfizması olmak üzere $i_k \circ g: A \longrightarrow I$ homomorfizması için $i_k \circ g = h \circ f$ olacak şekilde bir $h: B \longrightarrow I$ homomorfizması bulunur. Şimdi $e: P_k \longrightarrow A$ homomorfizmasını $e = h \circ i_k$ olarak tanımlayalım.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[dl, dashed, "h'"'] \arrow[ddl, dashed, "h"] \\
& I_k \arrow[u, "g"] \arrow[d, shift left, "p_k"] & \\
& I \arrow[u, shift left, "i_k"] &
\end{tikzcd}$$

O halde $p_k: I \longrightarrow I_k$, k. izdüşüm olmak üzere $h' = p_k \circ h$ eşitliği ile tanımlanan $h': B \longrightarrow I_k$ homomorfizması için $h' \circ f = p_k \circ h \circ f = p_k \circ i_k \circ g = I_{I_k} \circ g = g$ elde ederiz. Dolayısıyla her $k \in K$ için I_k injektiftir.

($\Longleftarrow$): Keyfi $f: A \longrightarrow B$ epimorfizmasını ve $g: A \longrightarrow I$ homomorfizmasını alalım. Her $k \in K$ için I_k nın projektif olduğundan $p_k \circ g: A \longrightarrow I_k$ homomorfizması için $p_k \circ g = h_k \circ f$ olacak şekilde bir $h_k: B \longrightarrow I_k$ homomorfizması bulunur.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[ddl, dashed, "h_k"] \\
& I \arrow[d, "p_k"'] & \\
& I_k &
\end{tikzcd}$$

Her $k \in K$ için $h_k = p_k \circ h$ olacak şekilde bir $h: B \longrightarrow I$ homorfizması bulunur. Bu durumda her $k \in K$ için $p_k \circ (h \circ f) = h_k f = p_k \circ g$ eşitliği elde ederiz. Ayrıca $g = f \circ h$ eşitliğini elde ederiz. Böylece $I = \prod_{k \in K} I_k$ injektif modüldür.

2.13.4. Teorem (Baer Kriteri) I modülünün injektif olması için gerek ve yeter koşul her U sol ideali ve $k: U \longrightarrow I$ homomorfizmasının bir $m: R \longrightarrow I$ homomorfizmasına genişletilebilmesidir [3].

2.13.5. Tanım D bir abel grup olsun. Her n pozitif tam sayısı için $nD = D$ ise, (yani her $d \in D$ için $nd' = d$ olacak şekilde bir $d' \in D$ bulunursa) D ye **bölünebilir grup** denir [3].

2.13.6. Teorem D grubunun injektif olması için gerek ve yeter koşul bölünebilir olmasıdır [3].

İspat. (⟹): D injektif grup, $d \in D$ ve n pozitif tamsayı olsun. Her $m \in \mathbb{Z}$ için $f(m) = nm$ olmak üzere $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ ve her $m \in \mathbb{Z}$ için $g(m) = md$ olmak üzere $g: \mathbb{Z} \longrightarrow D$ fonksiyonlarını tanımlayalım. f nin monomorfizma ve g nin ise, homomorfizma olduğu açıktır. D injektif olduğundan $g = h \circ f$ olacak şekilde yani aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan bir $h: \mathbb{Z} \longrightarrow D$ homomorfizması vardır.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & \mathbb{Z} \arrow[dl, dashed, "h"] \\
& D &
\end{tikzcd}$$

Bu durumda $d = g(1) = (h \circ f)(1) = h(n) = h(n1) = nh(1) \in nD$ elde ederiz. Dolayısıyla D grubu bölünebilirdir.

($\Longleftarrow$): D bölünebilir grup olsun. Baer kriteri yardımıyla D nin injektif olduğunu göstermek için, $\mathbb{Z}$ nin herhangi her hangi bir $I \neq 0$ idealinden D ye keyfi bir $f: I \longrightarrow D$ homomorfizması alalım. n pozitif tamsayı olmak üzere, $I = n\mathbb{Z}$ olduğunu biliyoruz. D bölünebilir olduğundan $f(n) = nd$ olacak şekilde bir $d \in D$ vardır. Her $m \in \mathbb{Z}$ için $g(m) = md$ olmak üzere $g: \mathbb{Z} \longrightarrow D$ fonksiyonunu tanımlayalım. g nin homomorfizma olduğu açıktır. Her $nk \in n\mathbb{Z}$ için,

$$g(nk) = nkd = k(nd) = kf(n) = f(kn)$$

olduğundan $g|_{n\mathbb{Z}} = f$ dir. O halde Baer kriterinden dolayı D injektif gruptur.

2.13.7. Teorem Her A abel grubu için, D injektif grup olmak üzere $f: A \longrightarrow D$ monomorfizması bulunur [3].

İspat. $F = \oplus_{\alpha}\mathbb{Z}$ olmak üzere (α kardinal sayıdır.) bir $g: F \longrightarrow A$ epimorfizması bulunur. $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q}$ ve bölünebilir grupların direkt toplamı da bölünebilir olduğundan $F = \oplus_{\alpha}\mathbb{Z} \leq \oplus_{\alpha}\mathbb{Q} = D'$ olsun. Yani F nin D' bölünebilir grubunun alt grubu olduğunu elde ederiz. Bölünebilir grubun epimorfik görüntüsü de bölünebilir olduğundan, $D = D'/Çek(g)$ bir bölünebilir gruptur.Şimdi $f: A \longrightarrow D$ fonksiyonunu aşağıdaki şekilde tanımlayalım; $a \in A$ için $g(x) = a$ olacak şekilde bir $x \in F$ bulunur. $f(a) = x + Çek(g) \in D'/Çek(g)$ alalım. Başka bir $y \in F$ için de $g(y) = a$ ise, $g(x - y) = 0$, yani $x - y \in Çek(g)$ dir. Bu durumda $x + Çek(g) = y + Çek(g)$ dir. Dolayısıyla f iyi tanımlıdır. (x in seçiminden bağımsızdır.) Her $a, b \in A$ için $g(x) = a$, $g(z) = b$ olmak üzere $x, z \in F$ aldığımızda, $g(x + z) = a + b$ olacaktır. Dolayısıyla $f(a + b) = x + z + Çek(g) = \big(x + Çek(g)\big) + \big(z + Çek(g)\big) = f(a) + f(b)$ gerçeklenir. Böylece f bir homomorfizmadır. $a \in Çek(f)$, yani $f(a) = x + Çek(g) = Çek(g)$ ise, $x \in Çek(g)$, buradan da $a = g(x) = 0$ elde ederiz. O halde f monomorfizmadır.

2.13.8. Yardımcı Teorem i) A bir $R - modül$ ise her $a \in A$, her $r \in R$ için $e(a)(r) = ra$ ile tanımlanan $e: A \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(R, A)$ fonksiyonu bir modül monomorfizmasıdır.

ii) $f: A \longrightarrow B$ bir modül homomorfizması ise, her $\alpha \in Hom_{\mathbb{Z}}(R, A)$ için $f_*(\alpha) = f \circ \alpha$ olarak tanımlanan $f_*: Hom_{\mathbb{Z}}(R, A) \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(R, B)$ fonksiyonu bir modül homomorfizmasıdır. f bir monomorfizma ise, f_* da monomorfizmadır [3].

2.13.9. Teorem D injektif (yani bölünebilir) grup ise, $Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)$ injektif sol R −modüldür [3].

2.13.10. Teorem Her A modülü için, I injektif modül olmak üzere bir $f: A \longrightarrow I$ monomorfizması bulunur [3].

2.13.11 Teorem Bir I sol R −modülü için aşağıdaki koşullar denktir.

i) I injektiftir.

ii) $Hom(\cdot, I)$ funktoru tamdır.

iii) $0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$ şeklindi olan her kısa tam dizi parçalanabilirdir.

I modülü, D bölünebilir grup olmak üzere $Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)$ şeklinde bir modülün direkt toplam terimine izomorftur [3].

2.13.12. Tanım R bir halka olmak üzere her basit sol R −modül injektif ise, R ye sol $\boldsymbol{V}$ **−halka** denir [11].

2.13.13. Teorem Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.

i) R sol V −halkadır.

ii) Herhangi bir sol M R −modülü için $Rad(M) = 0$ dır.

iii) R halkasının her öz sol I ideali maksimal sol ideallerin arakesitidir [11].

İspat. (i⟺ ii): R bir V −halka ve M de sol R −modül olsun. Şimdi tüm M nin tüm maksimal alt modüllerin arakesitinin sıfıra eşit olduğunu gösterelim. Herhangi bir $0 \neq x \in M$ alalım. Bu durumda Rx devirli sol $R-$ modülünü düşünebiliriz. N modülü Rx in maksimal alt modülü olsun. $S = {}^{Rx}/_{N}$ basit olduğundan hipotezimiz gereği S injektiftir. Şimdi de $f: Rx \longrightarrow S$ kanonik epimorfizmasını düşünelim. S injektif olduğundan f homomorfizması $f^{'}: M \longrightarrow S$ ye homomorfizmasına genişletilebilir. $Çek(f^{'})$, M nin x elemanını içermeyen maksimal alt modülüdür. Bu ise bize M nin tüm maksimal alt modüllerinin arakesitinin sıfıra eşit olduğunu, yani $Rad(M) = 0$ olduğunu gösterir.

(ii⟺ iii): I, R halkasının öz sol ideali olsun. $Rad\left({}^{R}/_{I}\right) = 0$ olduğundan, I ideali, R nin birtakım maksimal sol ideallerinin arakesitidir.

(iii⟺ i): S, herhangi bir sol basit R −modül ve J ise, R nin herhangi bir ideali olsun. Bu durumda sıfırdan farklı $f: J \longrightarrow S$ homomorfizması tanımlanabilir. S nin injektif olduğunu gösterebilmek için f nin R genişletilebilir olduğunu göstermemiz gerekir. $x \in {}^{J}/_{Çek(f)}$ elemanını alalım. $x \notin Çek(f)$ ve $Çek(f)$, R nin tüm maksimal sol ideallerinin arakesiti olduğundan $Çek(f) \subseteq M$ olacak şekilde M maksimali vardır, öyle ki; $x \notin M$ dir. ${}^{J}/_{Çek(f)} \cong S$ basit olduğundan $M \cap J = Çek(f)$ dir. Buradan da $R = M + J$ olduğu açıkça görülebilir. Böylece herhangi bir $a \in J$ ve $m \in M$ elemanları için $f^{'}(a + m) = f(a)$ şeklinde tanımlı f nin genişlemesi olan $f^{'}: M \longrightarrow S$ homomorfizmasını tanımlayabiliriz. Bu da bize her sol basit S R −modülünün injektif olduğunu dolayısıyla da R halkasının V −halka olduğunu gösterir.

2.14. Mükemmel ve Yarı-Mükemmel Modüller

2.14.1. Tanım M ve N $R-$modülleri ve $f: M \longrightarrow N$ bir epimorfizması verilsin. $Çek(f) \ll M$ ise, f epimorfizmasına **örtü** denir. f örtü ve M projektif ise, M modülüne N nin **projektif örtüsü** denir [17].

Bir M modülünün projektif örtüsü izomorfizma farkıyla tektir.

M bir modül ve $K \leq M$ olsun. K alt modülünün M de küçük olması için gerek ve yeter koşul $\pi: M \longrightarrow M/_K$ doğal epimorfizmasının örtü olmasıdır.

2.14.2. Tanım M bir modül olsun. M nin her bölüm modülü projektif örtüye sahip ise, M ye **yarı-mükemmel modül** denir [16].

Yarı-mükemmel modüllerin bölüm modülleri de yarı-mükemmeldir. Ayrıca yarı-mükemmel modüller eş-atom olduğundan radikali kendisinde küçüktür [16].

2.14.3. Önerme M, N, K modüller olmak üzere $f: M \longrightarrow N$, $g: N \longrightarrow K$ epimorfizmaları verilsin. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler vardır.

i) f ve g epimorfizmalarının örtü olmaları için gerek ve yeter koşul gf in örtü olmasıdır.

ii) M projektif örtüye sahipse, M modülünün bir maksimal alt modülü vardır [17].

2.14.4. Yardımcı Teorem M bir $R-$modül ve $U \leq M$ olsun. Bu takdirde aşağıda verilen ifadeler denktir.

i) $M/_U$ bölüm modülü projektif örtüye sahiptir.

ii) $M = U + V$ koşulunu sağlayan M nin her V alt modülü, U alt modülünün tümleyenini kapsar.

iii) U alt modülünün M de projektif örtüye sahip olan bir tümleyeni vardır [17].

İspat. (i⟹ii): P projektif modül ve $g: P \longrightarrow M/U$ örtü ve $M = U + V$ olsun. Bu takdirde her $v \in V$ için $f(v) = v + U$ şeklinde tanımlı $f: V \longrightarrow M/U$ dönüşümü bir epimorfizmadır. P projektif modül olduğundan,

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & M/U \arrow[r] & 0 \\ & P \arrow[ul, dashed, "h"] \arrow[u, "g"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli, yani $fh = g$ olacak şekilde $h: P \longrightarrow V$ homomorfizması vardır. g örten olduğundan $m \in M$ ve $p \in P$ keyfi elemanları için $g(p) = m + U = (fh)(p) = f\big(h(p)\big) = h(p) + U$ olup $m - h(p) \in U$ ve $M = U + h(P)$ dir. Şimdi $h\big(Çek(g)\big) = U \cap h(P) \ll h(P)$ olduğunu göstermeliyiz. Herhangi bir $u \in U \cap h(P)$ elamanı için $h(P) \leq V$ olduğundan $u \in U$, $u \in h(P)$ ve bir $p \in P$ için $\{0\} = f(u) = f\big(h(p)\big) = g(p)$ olduğundan $p \in Çek(g)$ bulunur. Böylece $u = h(p) \in h(Çek(g))$ dir. Tersine; $m \in h(Çek(g))$ keyfi elemanı ve bir $p \in Çek(g)$ için $m = h(p)$ yazılabilir. Buradan $p \in Çek(g)$ olduğundan $\{0\} = g(p) = f\big(h(p)\big) = f\big(h(p)\big) = f(m)$ olacağından $m \in U \cap h(P)$ bulunur. Dolayısıyla $h\big(Çek(g)\big) = U \cap h(P)$ olup Önerme 2.6.4 ii) den dolayı $U \cap h(P) \ll h(P)$ elde edilir. Sonuç olarak $h(P)$, U alt modülünün M de tümleyenidir.

(ii⟹iii): Açıktır.

(iii⟹i): V alt modülü, U alt modülünün M te tümleyeni olmak üzere V tümleyen alt modülünün projektif örtüsü P olsun. Bu takdirde $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ olup $f: P \longrightarrow V$ epimorfizması vardır. İzomorfizma teoreminden $h: V/V \cap U \longrightarrow M/U$

izomorfizması elde edilir. Bu takdirde $\pi: V \longrightarrow V/_{V \cap U}$ doğal epimorfizması için $h\pi: V \longrightarrow M/_{U}$ dönüşümü bir örtüdür. Önerme 2.14.3 i) den dolayı P projektif modülü $M/_{U}$ nun bir projektif örtüsüdür.

2.14.5. Teorem Bir M modülünün yarı-mükemmel olması için gerek ve yeter koşul tümlenmiş ve her tümleyeninin de projektif örtüye sahip olmasıdır [17].

İspat. Yardımcı Teorem 2.14.4 ten istenen görülür.

2.14.6. Teorem Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.

i) ${}_RR$ yarı-mükemmeldir.

ii) ${}_RR$ (dual sonlu) tümlenmiştir.

iii) Her sonlu üretilmiş sol R modül tümlenmiştir.

iv) Her sonlu üretilmiş sol R modül projektif örtüye sahiptir.

v) Her sol R −modül dual sonlu tümlenmiştir ([16],[3]).

2.14.7. Tanım Teorem 2.14.6 da verilen denk koşullardan birini sağlayan R halkasına **yarı-mükemmel halka** denir [16].

2.14.8. Tanım M bir modül ve I boştan farklı indis kümesi olsun. Eğer M^I yarı-mükemmel modül ise, M modülüne **mükemmel modül** denir [16].

2.14.9. Teorem Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.

i) ${}_RR$ mükemmeldir.

ii) Her sol R −modül projektif örtüye sahiptir.

iii) Her sol R −modül tümlenmiştir [16].

2.14.10. Tanım Teorem 2.14.9 da verilen denk koşullardan birini sağlayan *R* halkasına **sol mükemmel halka** denir [16].

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Modüllerin Ters Sistemi

3.1.1. Tanım $(I, \leq)$ KSK olsun. R birimli bir halka olmak üzere $\{M_i\}_{i \in I}$ birimli sol $R-$ modüllerin bir ailesi olsun. Her $n \in I$ için $I_{M_n} : M_n \longrightarrow M_n$ birim homomorfizmasını φ_{nn} ile gösterelim. Yani $\varphi_{nn} : M_n \longrightarrow M_n$ birim homomorfizması olsun. $i \leq j$ olacak şekildeki her $i, j \in I$ için $\varphi_{ji} : M_j \longrightarrow M_i$ homomorfizması mevcut ve $i, j \leq k$ için,

$$\begin{tikzcd} M_k \arrow[rr, "\varphi_{kj}"] \arrow[dr, "\varphi_{ki}"'] & & M_j \arrow[dl, "\varphi_{ji}"] \\ & M_i & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli, yani $\varphi_{ki} = \varphi_{ji}\varphi_{kj}$ ise, $\{M_i, \varphi_{ji}\}_I$ ikilisine $R-$modüllerin **ters sistemi** denir.

$\{M_i, \varphi_{ji}\}_I$ $R-$ modüllerin ters sistemi ve M bir $R-$ modül olsun. $\{\, v_i : M \longrightarrow M_i \,,\ v_i = \varphi_{ji} v_j \,,\ i \leq j \,\}$ ailesi mevcut ise, $\{\, v_i \mid v_i : M \longrightarrow M_i \,,\ v_i = \varphi_{ji} v_j \,,\ i \leq j \,\}$ ailesine M modülünden $\{M_i, \varphi_{ji}\}_I$ ters sistemine **homomorfizmaların ters sistemi** denir [16].

3.1.2. Tanım M bir $R-$modül olsun. I keyfi bir indis kümesi olmak üzere I kümesindeki sonlu sayıda $i_1, i_2, i_3, \dots, i_r$ elemanları için $M_{i_0} \subseteq M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap M_{i_3} \cap \dots \cap M_{i_r}$ koşulunu sağlayan $i_0 \in I$ varsa, $\{M_i\}_{i \in I}$ ailesine M modülünün **ters sistemli ailesi** denir [16].

Örnek 1

M bir $R-$modül ve $\{M_i\}_{i\in I}$ M modülünün ters sistemli bir ailesi olsun. $i \leq j$ $\Leftrightarrow M_j \subseteq M_i$ ile tanımlı kapsama bağıntısına göre $(I, \leq)$ bir KSK dır. $i \leq j$ için;

$e_{ji} : M_j \longrightarrow M_i$ içerme homomorfizmaları olmak üzere $i \leq j \leq k$ için,

$$\begin{tikzcd} M_k \arrow[rr, "e_{kj}"] \arrow[dr, "e_{ki}"'] & & M_j \arrow[dl, "e_{ji}"] \\ & M_i & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Yani $e_{ki} = e_{ji}\, e_{kj}$ dır. Dolayısıyla $\{M_i, e_{ji}\}_I$, alt R $-$modüllerin bir ters sistemidir.

$L = \cap_{i\in I} M_i \subseteq M$ alt modülünü alalım. Her $i \in I$ için $v_i : L \longrightarrow M_i$ içerme homomorfizması olsun. Bu takdirde $i \leq j$ için $e_{ji} : M_j \longrightarrow M_i$ içerme homomorfizması olmak üzere $a \in L$ için $(e_{ji}\, v_j)(a) = (e_{ji})\left(v_j(a)\right) = v_i(a)$ olup $\{\, v_i \mid v_i : \cap_{i\in I} M_i \subseteq \longrightarrow M_i \,,\; v_i = e_{ji}\, v_j \,, i \leq j \,\}$ ailesi $\cap_{i\in I} M_i$ den $\{M_i, e_{ji}\}_I$ ters sistemine homomorfizmaların bir ters sistemidir.

3.1.4. Tanım $\{M_i, \varphi_{ji}\}_I$ $R-$ modüllerin ters sistemi ve M bir $R-$ modül olsun. $\{\, f_i \mid f_i : M \longrightarrow M_i \,,\; f_i = \varphi_{ji} f_j \,, i \leq j \,\}$ homomorfizmaların ters sistemi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, M modülüne $\{M_i, \varphi_{ji}\}_I$ ailesinin **ters limiti** denir [16]. Verilen her $\{\, v_i \mid v_i : M \longrightarrow M_i \,,\; v_i = \varphi_{ji} v_j \,, i \leq j \,\}$ homomorfizmaların ters sistemi için,

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f_i"] & & M_i \\ & L \arrow[ul, "v"] \arrow[ur, "v_i"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde, yani $v_i = f_i v$ bir tek $v: L \longrightarrow M$ homomorfizması vardır. Şimdi ters limitin tekliğini gösterelim. $\{ f_i^{'} \mid f_i^{'}: M^{'} \longrightarrow M_i \,, f_i^{'} = \varphi_{ji} f_j^{'} \,, i \leq j \}$ homomorfizmalarının ters limiti için $M^{'}$, $\{M_i, \varphi_{ji}\}_I$ ailesinin ters limiti olsun. Tanım gereği her $i \in I$ için,

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f_i"] & & M_i \\ & M^{'} \arrow[ul, "f^{'}"] \arrow[ur, "f_i^{'}"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde $f^{'}: M^{'} \longrightarrow M$ homomorfizması var olsun. Yine tanım gereği her $i \in I$ için,

$$\begin{tikzcd} M^{'} \arrow[rr, "f_i^{'}"] & & M_i \\ & M \arrow[ul, "g"] \arrow[ur, "f_i"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir tek $g: M \longrightarrow M^{'}$ homomorfizması vardır. Her $i \in I$ için; $f_i^{'} f^{'} = f_i^{'}$ ve $f_i^{'} g = f_i$ olduğundan $f_i^{'} = f_i f^{'} = (f_i^{'} g) f^{'}$ olur. Buradan $f_i^{'} = f_i^{'}(g f^{'})$ elde edilir. Böylece $f_i^{'} = f_i^{'}(g f^{'})$ ve buradan $g f^{'} = I_{M^{'}}$ ve $f_i f^{'} g = f_i$ buradan da $f^{'} g = I_M$ olup M izomorfizma farkıyla tektir.

Şimdi de ters limitin inşasını yapalım.

$\{M_i, \varphi_{ji}\}_I$ R −modüllerin ters sistemi olsun. Her $i \leq j$ olacak şekilde (i, j) çifti için $M_i = M_{j,i}$ olarak kodlayalım. $\pi_j: \prod_{k \in I} M_k \longrightarrow M_{j,i}$ doğal epimorfizmaları yardımıyla $\prod_{k \in I} M_k \xrightarrow{\pi_j} M_j \xrightarrow{\varphi_{ji}} M_{j,i}$ ve $\prod_{k \in I} M_k \xrightarrow{\pi_i} M_i \xrightarrow{\varphi_{ij}} M_{j,i}$

dönüşümlerini elde ederiz. $i \leq j$ için; $\varphi_{ij}\pi_j - \pi_i : \prod_{k\in I} M_k \longrightarrow M_{j,i}$ homomorfizmasını alalım. Her $(m_k)_{k\in I} \in \prod_{k\in I} M_k$ için; $F((m_k)_{k\in I}) = \prod_{i\leq j}(\varphi_{ji}\pi_j - \pi_i)(\,(m_k)_{k\in I})$ ile tanımlı $F: \prod_{k\in I} M_k \longrightarrow \prod_{i\leq j} M_{j,i}$ homomorfizmasını düşünelim. $(m_k)_{k\in I} \in Çek(F)$ elemanı için $\prod_{i\leq j}(\varphi_{ji}\pi_j - \pi_i)(\,(m_k)_{k\in I}) = 0$, buradan $\varphi_{ji}(m_j) - m_i = 0$ elde edilir. Böylece $m_i = \varphi_{ji}(m_j), (i \leq j)$ olup $Çek(F) \subseteq \{\,(m_k)_{k\in I} \mid her\ i \leq j\ için\ m_i = \varphi_{ji}(m_j)\,\}$ elde edilir. Tersi ise, açıktır. Dolayısıyla $Çek(F) = \{\,(m_k)_{k\in I} \mid her\ i \leq j\ için\ m_i = \varphi_{ji}(m_j)\,\}$ dir. O halde $Çek(F) \subseteq \prod_{k\in I} M_k$ bir alt modüldür. $w: Çek(F) \longrightarrow \prod_{k\in I} M_k$ içerme dönüşümü olmak üzere $f_i = \pi_i w : Çek(F) \longrightarrow M_i$ bir homomorfizmadır.

Şimdi $i \leq j$ için $\varphi_{ji} f_j = f_i$ olduğunu gösterelim. $x \in ÇekF$ keyfi bir elemanı için; $x = (m_k)_{k\in I}$ ve $(\varphi_{ji} f_j)((m_k)_{k\in I}) = \varphi_{ji}(m_j) = m_i = f_i((m_k)_{k\in I})$ olup $\{\, f_i \,|f_i: ÇekF \longrightarrow M_i, \varphi_{ji} f_j = f_i\,,\ i \leq j\,\}$ homomorfizmaların bir ters sistemidir. $\{\, v_i \mid v_i: L \longrightarrow M_i\,,\ v_i = \varphi_{ji} v_{j\,,}\ i \leq j\}$ homomorfizmaların bir ters sistemi olmak üzere,

$$\begin{tikzcd}
Çek(F) \arrow[rr, "f_i"] & & M_i \\
& L \arrow[ul, "v"] \arrow[ur, "v_i"'] &
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde $v: L \longrightarrow ÇekF$ homomorfizması bulmalıyız.

$(m_k)_{k\in I} = \begin{cases} v_i(a), & i = k \\ 0\,, & i \neq k \end{cases}$ için $v(a) = (m_k)_{k\in K}$ ile tanımlı $v: L \longrightarrow ÇekF$ dir. $\left(m_i = v_i(a) = \varphi_{ji} = \varphi_{ji}(m_j)\ olup\ Gör(v) \subseteq F\,\right)$. $f_i v = v_i$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $Çek(F)$, bu ters ailenin ters limitidir ve $Çek(F) = (\pi_i\,, \lim_{\leftarrow} M_i)$ ile gösterilir.

3.2. Homomorfizmaların Ters Limitleri

$\{M_i, \varphi_{ji}\}_I$ ve $\{L_i, \psi_{ji}\}_I$ $R-$modüllerin iki ters sistemi ve limitleri sırasıyla $(\pi_i, \lim_{\leftarrow} M_i)$ ve $(\pi_i^{'}, \lim_{\leftarrow} L_i)$ olsun. $i \leq j$ için $v_j \psi_{ji} = v_i \varphi_{ji}$ olacak şekilde $v_i : M_i \longrightarrow L_i$ homomorfizmaları mevcut ise, her $i \in I$ için,

$$\begin{tikzcd}
\lim_{\leftarrow} M_i \arrow[r, "v"] & \lim_{\leftarrow} L_i \\
M_j \arrow[u, "\pi_j"] \arrow[r, "v_j"] & L_j \arrow[u, "\pi_j^{'}"]
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde ($v_j \pi_j = \pi_j^{'} v$) bir tek v homomorfizması vardır. Her $j \in I$ için v_j dönüşümleri monomorfizma (izomorfizma) ise, v de monomorfizma (izomorfizma) dır ve $v = \lim_{\leftarrow} v_i$ olarak yazılır [16].

İspat. $i \leq j$ için $v_i \pi_i = v_i f_{ji} \pi_j = \pi g_{ji} v_j \pi_j$ olduğundan $\{ v_i \pi_i : \lim_{\leftarrow} N_i \longrightarrow L_i \}$ homomorfizmaların ters sistemidir. Dolayısıyla $v : \lim_{\leftarrow} N_i \longrightarrow \lim_{\leftarrow} L_i$ homomorfizması vardır.

3.3. Tam Dizilerin Ters Limitleri

$\{K_i, f_{ji}\}_I$, $\{L_i, g_{ji}\}_I$ ve $\{N_i, h_{ji}\}_I$ modüllerin ters sistemleri ve sırasıyla ters limitleri de $(f_i, \lim_{\leftarrow} K_i)$, $(g_i, \lim_{\leftarrow} L_i)$ ve $(h_i, \lim_{\leftarrow} N_i)$ olsun. $i \leq j$ için,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K_j \arrow[r, "u_j"] \arrow[d, "f_{ji}"] & L_j \arrow[r, "v_j"] \arrow[d, "g_{ji}"] & N_j \arrow[d, "h_{ji}"] \\ 0 \arrow[r] & K_i \arrow[r, "u_i"] & L_i \arrow[r, "v_i"] & N_i \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde $\{u_i\}_{i\in I}$ ve $\{v_i\}_{i\in I}$ homomorfizmaları ailesi olsun. Bu takdirde $u = \lim_{\leftarrow} u_i$ ve $v = \lim_{\leftarrow} v_i$ olmak üzere $0 \longrightarrow \lim_{\leftarrow} K_i \xrightarrow{u} \lim_{\leftarrow} L_i \xrightarrow{v} \lim_{\leftarrow} N_i$ dizisi soldan tamdır [16]. Yukarıdaki diziler için v_i ler monomorfizma olduğundan u bir monomorfizmadır. Homomorfizmaların ters limitlerinden;

$$\begin{tikzcd} \lim_{\leftarrow} K_i \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f_j"] & \lim_{\leftarrow} L_i \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g_j"] & \lim_{\leftarrow} N_i \arrow[d, "h_j"] \\ K_j \arrow[r, "u_j"] & L_j \arrow[r, "v_j"] & N_j \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. $v_j u_j f_j = h_j vu = 0$ iken, $vu = 0$ olup $Gör(u) \subseteq Çek(v)$ dir. $(l_i)_I \in Çek(v)$, dolayısıyla buradan $v_j(l_j) = 0$ ve $l_j = u_j(k_j)$ olur. Böylece $(l_i)_I \in Gör(u)$ olup $Çek(v) \subseteq Gör(u)$ elde edilir.

Şimdi tekrar alt modüllerin ters limitine dönelim.

M bir R −modül ve $\{M_i\}_{i\in I}$ $R-$ alt modüllerin bir ters sistemli ailesi olsun. $i \leq j$ $\Leftrightarrow M_j \subseteq M_i$ için $(I, \leq)$ KSK dır. $i \leq j$ için $e_{ji}: M_j \longrightarrow M_i$ içerme homomorfizması olup $\{\, v_i : \bigcap_{i\in I} M_i \longrightarrow M_i \,\}$ ailesi bir ters sistemdir. $\{M_i, e_{ji}\}_I$ ailesinin ters limiti $(\pi_i, \lim_{\leftarrow} M_i)$ ise,

$$\begin{tikzcd} \lim_{\leftarrow} M_i \arrow[rr, "\pi_i"] & & M_i \\ & \bigcap_{i\in I} M_i \arrow[ul, "v"] \arrow[ur, "v_i"'] & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir tek $v : \bigcap_{i\in I} M_i \longrightarrow \lim_{\leftarrow} M_i$ homomorfizması vardır. v_i dönüşümleri monomorfizma olduğundan v de monomorfizmadır. $(m_i)_{i\in I} \in \lim_{\leftarrow} M_i$ olup $m_i = e_{ji}(m_j)$ ve e_{ji} içerme monomorfizması olduğundan $m_i = m_j \in \bigcap_{i\in I} M_i$ olup $v(m_i) = (m_i)_{i\in I}$ olur. Buradan ise, v örtendir. Dolayısıyla $\bigcap_{i\in I} M_i \cong \lim_{\leftarrow} M_i$ dir.

Şimdi ise, bölüm modülleri için ters sistem inşa edelim.

M bir R −modül ve $\{M_i\}_{i\in I}$ $R-$ alt modüllerin bir ters sistemli ailesi olsun. $(I,\leq)$ KSK dır. $i \leq j$ için $p_{ji}: M/M_j \longrightarrow M/M_i$ doğal epimorfizmalar olmak üzere $\left\{M/M_i\, , p_{ji}\right\}_I$ bir ters sistemdir. Tam dizilerin ters sistemini düşünelim.

$\left\{M_i\, , e_{ji}\right\}_I$ ters sisteminin ters limiti $\{v_i\, , \bigcap_{i\in I} M_i\}$ dir.

$\{M, e_{ii}\}_I$ ters sisteminin ters limiti $\{I_M\, , M\}$ dir.

$\left\{M/M_i\, , p_{ji}\right\}_I$ ters sisteminin ters limiti $\left\{h_i\, , \lim_{\leftarrow} M/M_i\right\}$ dir.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_j \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "e_{ji}"] & M \arrow[r, "p_j"] \arrow[d, "I_j"] & M/M_j \arrow[d, "p_{ji}"] \\
0 \arrow[r] & M_i \arrow[r, "\subseteq"] & M \arrow[r, "p_i"] & M/M_i
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Dolayısıyla $p = \lim_{\leftarrow} p_j$ olmak üzere $0 \longrightarrow \bigcap_{i\in I} M_i \xrightarrow{\subseteq} M \xrightarrow{p} \lim_{\leftarrow} M/M_i$ dizisi soldan tamdır [16].

Son elde edilen dizinin sağdan tam olmasını tartışalım.

3.4. Lineer Kompakt Modüller ve Özellikleri

3.4.1. Teorem Bir M R −modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.

i) Verilen her $\{M_i\}_{i\in I}$ ters sistemli ailesi için $p : M \longrightarrow \lim_{\leftarrow} {}^{M}/_{M_i}$ bir epimorfizmadır.

ii) Verilen her $\{M_i\}_{i\in I}$ ters sistemli ailesi için $\{x_i + M_i\}_{i\in I}$ yan sınıflarının sonlu sayıdaki arakesiti boştan farklı ise, $\bigcap_{i\in I}(x_i + M_i) \neq \emptyset$ dir [16].

İspat. (i $\Rightarrow$ ii): $\{M_i\}_{i\in I}$ ailesi için $p : M \longrightarrow \lim_{\leftarrow} {}^{M}/_{M_i}$ epimorfizma olsun.

$\lim_{\leftarrow} {}^{M}/_{M_i} = \left\{ (x_i + M_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} {}^{M}/_{M_i} \;\middle|\; i \leq j \text{ için } x_i + M_i = p_{ji}\big(x_j + M_j\big) \right\}$

$= \left\{ (x_i + M_i)_{i\in I} \;\middle|\; M_j \subseteq M_i \text{ için } x_i + M_i = p_{ji}\big(x_j + M_j\big) = x_j + M_j \right\}$ şeklindedir.

Dolayısıyla $(x_i + M_i)_{i\in I} \in \lim_{\leftarrow} {}^{M}/_{M_i} \iff M_j \subseteq M_i$ iken, yani $x_i + M_i = x_j + M_j \iff M_j \subseteq M_i$ iken $x_j + M_j \subseteq x_i + M_i$ dir. $\emptyset \neq (x_j + M_j) \cap (x_i + M_i) = y + M_j\ , y \in x_i + M_i$ olur. Buradan ise, $x_j + M_j \subseteq x_i + M_i$ olup sonlu kesişim özelliğini sağlayan $(x_i + M_i)_{i\in I}$ ailesi $\lim_{\leftarrow} {}^{M}/_{M_i}$ ye aittir. $\lim_{\leftarrow} p_{ji}$ epimorfizma olduğundan her $i \in I$ için $x + M_i = x_i + M_i$ olacak şekilde $x \in M$ vardır. Dolayısıyla buradan $x \in \bigcap_{i\in I}(x_i + M_i) \neq \emptyset$ elde edilir.

(ii $\Rightarrow$ i): $(x_i + M_i)_{i\in I} \in \lim_{\leftarrow} {}^{M}/_{M_i}$ olsun. Yani $M_j \subseteq M_i$ iken $x_j + M_j \subseteq x_i + M_i$ olsun. $\{M_i\}_{i\in I}$ ters sistem ailesi olduğundan her sonlu $i_1, i_2, i_3 \ldots i_r \in I$ için $M_k \subseteq M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap M_{i_3} \cap \ldots \cap M_{i_r}$ olacak şekilde $k \in I$ vardır. Dolayısıyla $x_k + M_k \subseteq \bigcap_{s=1}^{r}(x_{i_s} + M_{i_s}) \neq \emptyset$ dir. Kabulümüzden dolayı her $i \in I$ için $x \in \bigcap_{i\in I}(x_i + M_i)$ den $x + M_i = x_i + M_i$ olup $p = \lim_{\leftarrow} p_j$ epimorfizmadır.

3.4.2. Tanım Teorem 3.4.1 verilen denk koşullardan birini sağlayan M modülüne **lineer kompakt modül** denir [16].

3.4.3. Teorem M bir modül ve $N \leq M$ olsun. N lineer kompakt ve $\{M_i\}_{i\in I}$, M nin alt modüllerinin ters sistemli ailesi ise, $N + \bigcap_{i\in I} M_i = \bigcap_{i\in I}(N + M_i)$ dir [16].

İspat. $i_1, i_2, i_3 \dots i_r \in I$ için $(N \cap M_k) \subseteq (N \cap M_{i_1}) \cap (N \cap M_{i_2}) \cap (N \cap M_{i_3}) \cap \dots \cap (N \cap M_{i_r})$ arakesitini alalım. $(N \cap M_k) \subseteq \left(N \cap M_{i_1}\right) \cap \left(N \cap M_{i_2}\right) \cap \left(N \cap M_{i_3}\right) \cap \dots \cap \left(N \cap M_{i_r}\right) = N \cap (M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap M_{i_3} \cap \dots \cap M_{i_r})$ olacak şekilde $k \in I$ olup $\{N \cap M_i\}_{i \in I}$ ailesi N de ters sistemlidir. Benzer şekilde $\left\{N + {}^{M_i}/_{N}\right\}_I$ ailesi de ${}^{M}/_{N}$ bölüm modülünde ters sistemli bir ailedir. Dolayısıyla,

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \bigcap_{i\in I}(N + M_i) \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "\subseteq"] & \bigcap_{i\in I} M_i \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\subseteq"] & \bigcap_{i\in I}\left(N + {}^{M_i}/_{N}\right) \arrow[d, "\subseteq"] & (*) \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "p_N"] & M \arrow[r, "P"] \arrow[d, "p_M"] & {}^{M}/_{N} \arrow[d, "p_{\overline{M}}"] & \\
0 \arrow[r] & \lim_{\leftarrow} {}^{N}/_{N \cap M_i} \arrow[r] & \lim_{\leftarrow} {}^{M}/_{M_i} \arrow[r] & \lim_{\leftarrow} {}^{M}/_{N + M_i} &
\end{tikzcd}
$$

diyagramı değişmelidir. p_N epimorfizma olduğundan f de epimorfizmadır. Yani $Gör(f) = {}^{(\bigcap_{i\in I} M_i + N)}/_{N} = \bigcap_{i\in I} {}^{(M_i + N)}/_{N} = {}^{(\bigcap_{i\in I} M_i + N)}/_{N}$ olup $N + \bigcap_{i\in I} M_i = \bigcap_{i\in I}(M_i + N)$ bulunur.

3.4.4. Teorem M bir modül ve $N \leq M$ olsun. M nin lineer kompakt olması için gerek ve yeter koşul N ve ${}^{M}/_{N}$ modüllerinin lineer kompakt olmasıdır [16].

İspat. ($\Rightarrow$): M lineer kompakt modül olsun. Bu takdirde $p_M: M \longrightarrow \lim_{\leftarrow} M/_{M_i}$ bir epimorfizmadır. (*) diyagramının değişmeliliğinden $p_{\overline{M}}p$ epimorfizma olup $p_{\overline{M}}$ epimorfizmadır. Dolayısıyla $M/_N$ lineer kompakttır. Her $i \in I$ için $M_i \leq N$ ise, p_N epimorfizma olup N lineer kompakttır.

($\Leftarrow$): N ve $M/_N$ lineer kompakt modüller olsun.(*) diyagramında p_N ve $p_{\overline{M}}$ epimorfizma olduğundan p_M epimorfizmadır. Dolayısıyla M lineer kompakttır.

3.4.5. Teorem M lineer kompakt modül olsun. Bu takdirde M sonsuz çoklukta alt modülün direkt toplamı olarak yazılamaz [16].

İspat. $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ lineer kompakt, I indis kümesi ve her $i \in I$ için $N_i = \bigoplus_{i\neq j} M_j$ olsun. $0 \neq x_i \in M_i$ için $(x_i + N_i)_{i\in I}$ yan sınıflarını alalım. $x_1 + N_1,\ x_2 + N_2,\ x_3 + N_3, \dots, x_r + N_r$ için $x_1 + x_2 + x_3 + \ \dots + x_r \in \cap_{s=1}^{r} (x_s + N_s)$ olup $\{x_i + N_i\}_{i\in I}$ sonlu kesişim özelliğini sağlar. Dolayısıyla $\cap_{i\in I} (x_i + N_i) \neq \emptyset$ olduğundan her $i \in I$ için $x + N_i = x_i + N_i$ bulunur. Sonuç olarak $|I| < \infty$ elde edilir.

3.4.6. Teorem M bir modül ve U, M nin lineer kompakt alt modülü olsun. $U,\ M$ de bol tümleyene sahiptir [16].

İspat. $U \leq M$ lineer kompakt alt modül olsun. $M = U + V$ olacak şekilde $V \leq M$ alt modülünü alalım. $S = \{V' \subseteq V | M = U + V'\}$ olsun. $M = U + V$ olduğundan $\exists\ V \in S$ olup $S \neq \emptyset$ dir. S kümesi "$\subseteq$" bağıntısına göre kısmi sıralı bir kümedir. S' kümesi S nin tam sıralı bir alt kümesi olmak üzere $L = \bigcap_{L'\in S'} L'$ olsun. $L' \subseteq V$ olduğundan $L \subseteq V$ dir. $\{L'\}_{L'\in S'}$ ailesi bir ters sistemdir. Dolayısıyla U lineer kompakt olduğundan Teorem 3.4.3 gereği $U + L = U + \bigcap_{L'\in S'} L' = \bigcap_{L'\in S'} (U + L') = M$ olup $L \in S$ dir. Böylece L, S' tam sıralı alt kümesinin alt sınırıdır. Zorn Yardımcı Teoreminden S, bir V_0 minimal elemanına sahiptir. Sonuç olarak V_0 alt modülü $M = U + V_0$ koşulunu sağlayan minimal alt modül olup V_0, U nun M de tümleyenidir.

3.4.7. Sonuç M bir R −modül olsun. M lineer kompakt ise, bol tümlenmiştir [16].

İspat. M lineer kompakt ise, her alt modülü lineer kompakt olup M bol tümlenmiştir.

3.5. Artin ve Noether Modüller

3.5.1. Tanım M bir modül olsun. M nin alt modüllerinin her $M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \cdots \supseteq M_n \supseteq \cdots$ azalan zinciri sonlu bir adımda durursa, yani en az bir $n \in \mathbb{N}$ için $M_n = M_{n+1} = M_{n+2} = \cdots$ olursa M ye M ye **artin modül** denir [16].

Basit modüller artindir.

Artin modüllerin sınıfı alt modüller, bölüm modülleri, sonlu toplamlar ve genişlemeler altında kapalıdır.

3.5.2. Sonuç M bir $R-$modül olsun. M lineer kompakt ise, $M/_{Rad(M)}$ sonlu üretilmiş artin modüldür [16].

İspat. Teorem 3.4.4 ten $M/_{Rad(M)}$ lineer kompakt olup Sonuç 3.4.7 den $M/_{Rad(M)}$ bol tümlenmiştir. Bu takdirde $Rad(M/_{Rad(M)}) = 0$ olduğundan $M/_{Rad(M)}$ yarı-basittir. Teorem 3.4.5 gereği $M/_{Rad(M)}$ sonlu sayıda basit modüllerin direkt toplamıdır. Basit modüller artin olduğundan ve artin modüllerin sonlu toplamları da artin olduğundan $M/_{Rad(M)}$ sonlu üretilmiş artin modüldür.

3.5.3. Tanım M bir modül olsun. M nin alt modüllerinin her $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \cdots \subseteq M_n \subseteq \cdots$ artan zinciri sonlu bir adımda durursa, yani en az bir $n \in \mathbb{N}$ için $M_n = M_{n+1} = M_{n+2} = \cdots$ olursa M ye M ye **noether modül** denir [16].

3.5.4. Önerme M bir modül olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

i) M noether modüldür.

ii) M nin her alt modülü sonlu üretilmiştir.

iii) M nin alt modüllerinin herhangi bir boştan farklı ailesinin bir maksimal elemanı vardır [16].

İspat. (i$\Rightarrow$ ii): N, M nin herhangi bir alt modülü olsun ve N alt modülünün sonlu üretilmiş olmadığını kabul edelim. Bu takdirde $N \neq \langle m_1 \rangle$ olacak şekilde bir $m_1 \in N$ ve $N \neq \langle m_1, m_2 \rangle$ olacak şekilde bir $m_2 \in N \backslash \langle m_1 \rangle$ elemanları vardır. Böyle devam edilirse, $m_{k+1} \in N \backslash \langle m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k \rangle$ elde edilir. Böylece M nin alt modüllerinin $\langle m_1 \rangle \subset \langle m_1, m_2 \rangle \subset \cdots \subset \langle m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k \rangle \subset \cdots$ artan sonsuz zinciri elde edilir. Bu durumda N sonlu üretilmiş modüldür.

(ii$\Rightarrow$ iii): S, M modülünün alt modüllerinin boştan farklı herhangi bir ailesi ve $N_0 \in S$ olsun. N_0, S nin maksimali değilse, $N_0 \subset N_1$ olacak şekilde $N_1 \in S$, N_1, S nin maksimali değilse, $N_1 \subset N_2$ olacak şekilde $N_2 \in S$ vardır. Eğer S ailesinin maksimali yoksa, $N_0 \subset N_1 \subset N_2 \ldots \subset N_k \subset \cdots$ sonsuz zinciri elde edilir. $i \in \mathbb{N}$ olmak üzere $N = \bigcup N_i$ olsun. Her $i \in \mathbb{N}$ için $N_i \leq M$ ve N_i sonlu üretilmiş olduğundan N, M nin sonlu üretilmiş alt modülüdür. Bu takdirde $N = \langle m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k \rangle$ olacak şekilde $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k \in M$ vardır. Böylece $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k$ elemanlarını içiren M nin bir N_j alt modülünü bulabiliriz. Buradan $N_j = N_{j+1} = \cdots$ bulunur. Bu durumda S nin maksimal elemanı vardır.

(iii$\Rightarrow$ i): M nin alt modüllerinin herhangi bir $N_1 \subset N_2 \dots \subset N_k \subset \cdots$ artan zincirini alalım. Bu takdirde $\{N_i\}$ modüller ailesinin bir N_j maksimali vardır. Böylece $N_1 \subset N_2 \dots \subset N_j = N_{j+1} = \cdots$ elde edilir. Sonuç olarak M noetherdır.

Noether modüllerin sınıfı alt modüllerde, bölüm modüllerinde, sonlu toplamlarda ve genişlemeler altında kapalıdır.

3.5.5. Teorem M lineer kompakt modül olsun. M nin noether olması için gerek ve yeter koşul $p(M) = 0$ olmasıdır [16].

İspat. $(\Rightarrow)$: M noether olduğundan Teorem 3.4.5 ten her alt modülü dolayısıyla $p(M) \leq M$ sonlu üretilmiştir. $Rad\big(p(M)\big) = p(M)$ olduğundan $p(M) = 0$ dır.

$(\Leftarrow)$: $U \leq M$ alalım. $U \neq 0$ ise, $p(M) = 0$ olduğundan $U \neq Rad(U)$ dur. M lineer kompakt olduğundan U lineer kompakt olup tümlenmiştir. $p(U) = 0$ olduğundan $Rad(U) \ll U$ dur. Ayrıca ${}^{U}\!/_{Rad(U)}$ sonlu üretilmiş olduğundan Sonuç 3.5.2 den U sonlu üretilmiştir. Sonuç olarak M noetherdır.

3.5.6. Teorem M modülünün sonlu eş-üretilmiş olması için gerek ve yeter koşul M nin her ters sistemli $\{M_i\}_{i \in I}$ ailesi için $K \subseteq M_i$ olacak şekilde $K \subseteq M$ alt modülünün mevcut olmasıdır [16].

3.5.7. Teorem Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.

i) M artin modüldür.

ii) M nin alt modüllerinin boştan farklı her alt kümesi bir minimal elemana sahiptir.

iii) M nin her bölüm modülü sonlu eş-üretilmiştir.

iv) M lineer kompakt ve sıfırdan farklı her $M/_N$ bölüm modülü için $Soc(M/_N) \neq 0$ dır [16].

İspat. (i⟹ii): Γ, M nin alt modüllerinin boştan farklı bir alt kümesi olsun. $\Gamma \neq \emptyset$ olduğundan $M_1 \in \Gamma$ olacak şekilde $M_1 \leq M$ vardır.$|\Gamma| = 1$ ise, M_1 istenendir. $|\Gamma| \geq 2$ olsun. $M_1,\ M_2 \in \Gamma$ karşılaştırılabilirse, $M_2 \subseteq M_1$ yazılabilir. Bu yöntemle ... $\subseteq M_n \subseteq \cdots \subseteq M_2 \subseteq M_1$ zinciri elde edilir. M artin olduğundan en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki: her $k \in \mathbb{N}$ için $M_{n_0} = M_{n_0+k}$ olup M_{n_0} Γ nın minimal elemanıdır.

(ii⟹iii): Hipotezden M nin sıfırdan farklı her ters sistemli ailesi, sıfırdan farklı bir minimal elemana sahiptir. Teorem 2.4.7 ten M sonlu eş-üretilmiştir. Dolayısıyla her bölüm modülü sonlu eş-üretilmiştir.

(iii⟹i): $M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \cdots \supseteq M_n \supseteq \cdots$ zincirini düşünelim. $N = \cap_{i\in\mathbb{N}} M_i$ olsun. $M/_N$ sonlu eş-üretilmiştir. Buradan $\{0\} = N/_N = {}^{\cap_{i\in\mathbb{N}} M_i}/_N = \cap_{i\in\mathbb{N}} \left(M_i/_N\right)$ olduğundan Teorem 2.4.7 den bir n doğal sayısı için $\cap_n \left(M_i/_N\right) = 0$ dır. Dolayısıyla $M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap \ldots \cap M_n = N$ olup her $i \in \mathbb{N}$ için $M_{i+n} = M_i$ dir. Böylece M artindır.

(ii⟹ iv): M nin ters sistemli aileleri sonlu olduğundan istenen elde edilir.

(iv⟹iii): Teorem 3.4.4 ten $Soc(M) \leq M$ lineer kompakt ve Teorem 3.4.5 ten $Soc(M)$ sonsuz çoklukta alt modülün direkt toplamı olarak yazılamayacağından, $Soc(M)$ sonlu üretilmiştir. $U \cap Soc(M) = 0$ olsun. $\Gamma = \{\, Soc(M) \subseteq V \mid U \cap V = 0 \,\}$ kümesini göz önüne alalım. $Soc(M) \in \Gamma$ olduğundan $\Gamma \neq \emptyset$ dir. Zorn Yardımcı Teoreminden Γ bir V_0 maksimal elemanına sahiptir. Bu durumda $U \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/_{V_0}$ dolayısıyla da $u \xrightarrow{i} u \xrightarrow{\pi} u + V_0$

yazılabileceğinden U, $M/_{V_0}$ ın büyük alt modülü olarak alınabilir. Buradan $Soc(U) = U \cap Soc(M/_V) \neq 0$ ve $U \cap Soc(M) = Soc(U) \neq 0$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $Soc(M) \trianglelefteq M$ sonucuna ulaşılır. Teorem 2.8.2 den M sonlu üretilmiştir.

3.6. İnjektif Modüllerin Genellemeleri

3.6.1 Tanım N bir modül ve $M \leq N$ olsun. Bu takdirde N modülüne M nin **genişlemesi** denir [19].

3.6.2. Tanım M bir modül olsun. Eğer M her genişlemesinde tümleyene sahipse, M ye bir $\boldsymbol{E}-$ **modül**, her genişlemesinde bol tümleyene sahipse, M ye bir $\boldsymbol{EE}$ **−modül** denir [19].

3.6.3. Önerme Lineer kompakt modüller EE −modüldür [19].

İspat. M lineer kompakt modül ve $M \leq N$ olsun. Teorem 3.4.6 gereği M EE −modüldür.

3.6.4. Sonuç Her artin modül EE −modüldür [19].

İspat. M artin modül olsun. Teorem 3.5.8 gereği M lineer kompakttır. Önerme 3.6.3 ten dolayı M EE −modüldür.

3.6.5. Önerme İnjektif modüller E −modüldür [19].

İspat. İnjektif modüller Teorem 2.13.11 iii) den dolayı her genişlemesinde direkt toplam terimidir. Buna göre I injektif modül ve M, I nın herhangi bir genişlemesi olmak üzere $M = I \oplus N$ olacak şekilde M nin bir N alt modülü vardır. Böylece $M = I + N$ ve $\{0\} = I \cap N \ll N$ yazılabileceğinden N modülü I injektif modülünün tümleyenidir. Sonuç olarak I , her genişlemesinde tümleyene sahip olduğundan E −modüldür.

3.6.6. Tanım M bir modül olsun. $M \leq N$ ve $N/_{M}$ sonlu üretilmiş ise, N modülüne M nin **dual sonlu genişlemesi** denir. M her dual sonlu genişlemesinde tümleyene sahip ise M ye bir $\boldsymbol{CE}$ **−modül** denir [6].

3.6.7. Yardımcı Teorem M bir modül olsun. M nin EE −modül olması için gerek ve yeter koşul M nin her alt modülünün E −modül olmasıdır [19].

İspat. (⟹): M modülü EE −modül olsun. N M nin herhangi bir genişlemesi olmak üzere $U \leq M$ keyfi alt modülünü alalım. Böylece aşağıdaki pushout diyagramını yazabiliriz.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha"] & F \\ U \arrow[u, "\cup"] \arrow[r, "\subset"] & N \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

Burada $M^{'} = Gör(\alpha)$ ve $N^{'} = Gör(\beta)$ olmak üzere $F = M^{'} + N^{'}$ dür. Böylece varsayımımızdan dolayı $M^{'}$, F de $V \subset N^{'}$ olacak şekilde bir V tümleyenine sahiptir. Ayrıca V, $M^{'} \cap N^{'}$ nin $N^{'}$nün tümleyenidir. Bu durumda $N^{'} = M^{'} \cap N^{'} + V$ yazılır ve $N^{'} = M^{'} \cap N^{'} + V$ eşitliğinin β üzerinden ters görüntüsü alınırsa, $N = U + \beta^{-1}(V)$ elde edilir. Yani $\beta^{-1}(V)$, U alt modülünün N de tümleyenidir. Sonuç olarak M nin her U alt modülü E −modüldür.

(⟸): M nin her alt modülü $E -$ modül olsun. N, M nin herhengi bir genişlemsi olmak üzere $X + M = N$, $X \leq N$ olacak şekilde V alt modülünü alalım. Hipotezden dolayı $X \cap M \leq M$ ve $X \cap M \leq X$ olduğundan $X \cap M$ alt modülü X te bir V tümleyenine sahiptir. Bu durumda $X \cap V + V = X$ elde edilir. Böylece $X + M = X \cap V + V + M = V + M = N$ olduğundan N modülünde M nin bir tümleyeni V olur. Dolayısıyla M EE $-$modüldür.

3.6.8. Önerme R bir halka olsun. R nin sol mükemmel halka olması için gerek ve yeter koşul her sol R $-$modülün E $-$modül olmasıdır [19].

İspat. Teorem 2.14.6 dan açıktır.

3.6.9. Önerme R bir halka olsun. R nin yarı-mükemmel olması için gerek ve yeter koşul her sol R $-$modülün CE $-$modül olmasıdır [6].

İspat. ($\Rightarrow$): R yarı-mükemmel ve M bir R $-$modül olmak üzere M nin herhangi bir dual sonlu genişlemes N olsun. Bu takdirde N nin sonlu üretilmiş bir K alt modülü vardır öyle ki; $N = M + K$ dır. R yarı-mükemmel olduğundan K tümlenmiştir. Böylece M modülü N de bir tümleyene sahip olup CE $-$modüldür.

($\Leftarrow$): Her sol R $-$modül CE $-$modül olsun. Bu durumda R nin her sol ideali R sol R $-$modulünde tümleyene sahiptir. Böylece ${}_RR$ tümlenmiş modül ve sonuç olarak R yarı-mükemmeldir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Her Burulma Genişlemesinde Tümleyene Sahip Modüller

Bu bölümde modüller, değişmeli bölgeler üzerinde alınacaktır.

4.1.1. Tanım M bir modül ve $N \leq M$ alt modül olsun. $M/_N$ burulma modülü ise, M ye N nin **burulma (torsion) genişlemesi** denir [9].

4.1.2. Tanım M bir modül olsun. M modülü her burulma genişlemesinde tümleyene sahip ise, M ye $\boldsymbol{TE}$ **−modül** denir [9].

4.1.3. Önerme Her E −modül TE −modüldür [9].

İspat. M bir $E-$ modül olsun. Bu durumda M modülü, her genişlemesinde dolayısıyla her burulma genişlemesinde tümleyene sahiptir. Böylece M , TE −modüldür.

4.1.4. Yardımcı Teorem R lokal olmayan dedekind bölgesi ve M bir R −modül olsun. Bu takdirde, M modülünün TE −modül olması için gerek ve yeter koşul $M/_{T(M)}$ bölüm modülünün injektif modül ve $T(M)$ nin radikal tümlenmiş olmasıdır [19].

4.1.5. Sonuç Lokal olmayan dedekind bölgesi üzerinde her radikal tümlenmiş burulma modülü TE −modüldür [19].

4.1.6 Yardımcı Teorem R lokal olmayan dedekind bölgesi ve $\{P_i\}_{i\in I}$ kümesi R nin farklı maksimal ideallerinin bir sonsuz ailesi ve $M = \prod_{i\in I} {}^{R}/_{P_i}$ olsun. Bu takdirde,

i) $Rad(M) = 0$ dır.

ii) $T(M) = \bigoplus_{i\in I} {}^{R}/_{P_i}$ olup $T(M)$ M de bir tümleyene sahip değildir.

iii) K, R nin kesirler cismi olmak üzere ${}^{M}/_{T(M)} \cong K^J$ olacak şekilde $J \subseteq I$ indis kümesi vardır [2].

Önerme 4.1.3 ile her E −modülün bir TE −modül olduğunu biliyoruz. Aşağıdaki örnek bize bu önermenin tersinin her zaman doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 2

P tüm asal tamsayılar kümesi olmak üzere $N = \prod_{p\in P} \mathbb{Z}_p$ $\mathbb{Z}$ −modülünü düşünelim. Yardımcı Teorem 4.1.6 ii) den dolayı $T(N) = \bigoplus_{p\in P} \mathbb{Z}_p$ burulma alt modülü yarı-basittir. $M = T(N)$ olarak alalım. Yarı-basit modüller radikal tümlenmiş olduğundan M radikal tümlenmiştir. Sonuç 4.1.5 gereği M TE − modüldür. Ancak Yardımcı Teorem 4.1.6 ii) den dolayı M bir E −modül değildir [2].

4.1.7. Önerme TE −modüllerin direkt toplam terimleri TE −modüldür [9].

İspat. $M = M_1 \oplus M_2$ olmak üzere M bir TE −modül ve N, M_1 modülünün burulma genişlemesi olsun. $N' = N \oplus M_2$ için $\phi: M \longrightarrow N'$ içerme dönüşümünü alalım. Bu durumda ${}^{N}/_{M_1} \cong {}^{N\oplus M_2}/_{M_1\oplus M_2} = {}^{N'}/_{\phi(M)}$ olup N, M_1 modülünün bir burulma genişlemesi olduğundan N' de $\phi(M)$ nin bir burulma genişlemesidir. Böylece hipotezimizden dolayı $\phi(M)$, N' de bir V tümleyenine sahiptir. O halde $N' = \phi(M) + V$ ve $\phi(M) \cap V \ll V$ yazılır. $\pi: N' \longrightarrow N$, $\pi\big((m,n)\big) = n$ ile tanımlı projeksiyon dönüşümü dikkate alınırsa, $\pi(\phi(M) + V) = \pi(V)$ ve Önerme 2.6.4 iii) den $\pi(\phi(M) \cap V) \ll \pi(V)$ olur. Buradan $N = M_1 + \pi(V)$ ve $M_1 \cap \pi(V) \ll$

N bulunur ki bu da bize $\pi(V)$ nin N de M_1 in tümleyeni olduğunu gösterir. Dolayısıyla M_1 TE $-$modüldür.

Son önerme ile TE $-$modülllerin direkt toplam terimlerinin TE $-$modül olduğunu gördük. Ancak TE $-$modülllerin her alt modülünün TE $-$modül olması gerekmez. Bunu bir örnekle gösterelim.

Örnek 3

M modülü yerine $\mathbb{Q}$ $\mathbb{Z}-$modülünü alalım. $\mathbb{Q}$ modülü $\mathbb{Z}$ değişmeli bölgesinin kesir cismidir. $\mathbb{Q}$ injektif olduğundan $E -$ modüldür. Önerme 4.1.3 ten dolayı da $\mathbb{Q}$ TE $-$modüldür. Ancak $\mathbb{Q}$ nun $\mathbb{Z}$ alt modülü TE $-$modül değildir.

4.1.8. Önerme Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir [9].

i) M nin her alt modülü TE $-$modüldür.

ii) M modülü her burulma genişlemesinde bol tümleyene sahiptir.

İspat. (i $\Rightarrow$ ii): M nin her alt modülü $TE -$ modül olsun. N M nin burulma genişlemesi olmak üzere $N = M + K,\ K \leq N$ alalım. İkinci İzomorfizma Teoreminden $N \ / \ M \cong K \ / \ (M \cap K)$ olup K $M \cap K$ nın burulma bir genişlemesidir. Kabulümüzden dolayı $M \cap K \leq M$ olduğundan $M \cap K$ alt modülü TE $-$modüldür. Böylece $K = M \cap K + L$ ve $(M \cap K) \cap L = M \cap L \ll L$ olacak şekilde $L \leq K$ tümleyeni vardır. Buradan $N = M + K = M + M \cap K + L = M + L$ elde edilir. Sonuç olarak $N = M + L$ ve $M \cap L \ll L$ olduğundan M bir TE $-$modüldür.

(ii $\Rightarrow$ i): $M_1 \leq M$ ve N M_1 in bir burulma genişlemesi olsun. $H = \{(m', -m')|m' \in M_1\}$ olmak üzere $F = {}^{(M \oplus N)}/_{H}$ modülünü ele alalım. Bu durumda her $m \in M$ için $\gamma(m) = (m, 0) + H$ ile tanımlı $\gamma: M \longrightarrow F$ ve her $n \in N$

için $\psi(n) = (0, n) + H$ ile tanımlı $\psi: N \longrightarrow F$ monomorfizmaları vardır. $i_1: M_1 \longrightarrow N$ ve $i_2: M_1 \longrightarrow M$ içerme monomorfizmaları ile birlikte,

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & N \arrow[d, "\psi"] \\ M \arrow[r, "\gamma"] & F \end{tikzcd}$$

pushout diyagramı elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} F &= \{ (m,n) + H \mid m \in M,\ n \in N\} \\ &= \{ (m,0) + H \mid m \in M \} + \{ (0,n) + H \mid n \in N \} \\ &= \{ \gamma(m) \mid m \in M \} + \{ \psi(n) \mid n \in N \} = Gör(\gamma) + Gör(\psi) \text{ dir.} \end{aligned}$$

Şimdi ise, her $(m,n) + H \in F$ için $\Phi\big((m,n) + H\big) = n + M_1$ ile tanımlı $\Phi: F \longrightarrow {}^{N}/_{M_1}$ epimorfizmasını dikkate aldığımızda, $(m,n) + H \in F$ için

$$\begin{aligned} (m,n) + H \in F \in Çek(\Phi) &\Leftrightarrow \Phi\big((m,n) + H\big) = n + M_1 = M_1 \\ &\Leftrightarrow n \in M_1 \\ &\Leftrightarrow (m,n) + H = ((m+n, 0) + H) + (-n, n) + H \\ &\Leftrightarrow (m,n) + H = (m+n, 0) + H \in Gör(\gamma) \quad \text{olduğundan} \end{aligned}$$

$Çek(\Phi) = Gör(\gamma)$ elde edilir.

Ayrıca Birinci İzomorfizma Teoreminden ${}^{N}/_{M_1} = {}^{F}/_{Çek(\Phi)} \cong {}^{F}/_{Gör(\gamma)}$ olduğundan ve kabulümüz gereği $Gör(\gamma)$ nın F burulma genişlemesinde bir V bol tümleyeni vardır yani, $F = Gör(\gamma) + V$ ve $Gör(\gamma) \cap V \ll V$ olacak şekilde bir $V \leq F$ vardır. Bunun ψ dönüşümü altında ters görüntüsü alınırsa, $\psi^{-1}(F) = \psi^{-1}(Gör(\gamma) + V)$ ve $\psi^{-1}(Gör(\gamma) \cap V) \ll \psi^{-1}(V)$ olup $N = M_1 + \psi^{-1}(V)$ ve $M_1 \cap \psi^{-1}(V) \ll \psi^{-1}(V)$ elde edilir. Yani $\psi^{-1}((V)$ alt modülü M_1 in N de bir tümleyenidir. Sonuç olarak M_1 TE −modüldür.

4.1.9. Sonuç Lineer kompakt modüller TE −modüldür [9].

İspat. M lineer kompakt modül olsun. Teorem 3.4.4 ten dolayı M modülünün her alt modülü lineer kompakttır. Lineer kompakt modüller Teorem 3.6.3 ten dolayı EE −modül olduğundan M modülü her genişlemesinde, dolayısıyla da her burulma genişlemesinde bol tümleyene sahiptir. Teorem 4.1.8 gereğince M TE −modüldür.

4.1.10. Teorem $0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$ kısa tam dizi ve L burulma modül olsun. K ve L modülleri TE −modül ise, M TE −modüldür [10].

İspat. İspatı yaparken f bir monomorfizma olduğundan genelliği bozmadan $K \leq M$ olarak alacağız.

M nin herhangi bir burulma genişlemesi N olsun. Bu takdirde $K \leq M \leq N$ olur. Üçüncü izomorfizma teoreminden $N/M \cong \dfrac{N/K}{M/K}$ olduğundan N/K , M/K modülünün bir burulma genişlemesidir. $L \cong M/K$ olduğundan hipotez gereği M/K bölüm modülü bir $TE-$ modül ve böylece $M/K + V/K = M+V/K = N/K$ ve $M/K \cap V/K = M \cap V/K = N/K \ll V/K$ olacak şekilde $V/K \leq M/K$ vardır. Buradan $N = M + V$ elde edilir. Burulma modülün alt modülü de burulma olup V/K burulma olduğundan K nın burulma genişlemesi V olup, K nın V de bir V' tümleyeni vardır öyle ki, $K + K' = V$ ve $K \cap K' \ll V$ dir. Böylece $N = M + V = M + K + K' = M + K'$ elde edilir.

Şimdi ise, K' modülünün M nin tümleyeni olduğunu gösterelim.

Kabul edelim ki K' nün bir X alt modülü için $M + X = N$ olsun. Böylece $M/K + (X+K)/K = N/K$ olur. Buradan da $(X+K)/K = V/K \Rightarrow X + K = V \Rightarrow X = K'$ elde edilir. Sonuç olarak K', N de M nin tümleyenidir.

4.1.11. Sonuç M_1 herhangi bir TE −modül ve M_2 burulma TE −modül olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Bu takdirde, M TE −modüldür [10].

İspat. Teorem 4.1.10 den istenen görülür.

4.1.12. Yardımcı Teorem R lokal olmayan bir halka ve M bir R −modül olsun. M basit ise, burulma modülüdür [16].

İspat. M basit olduğundan $M = Rm$ olacak şekilde $0 \neq m \in M$ vardır. R nin $I = Ann(m)$ ideali için $R/_I \cong Rm$ yazılabilir. Hipotezden $Ann(m) \neq 0$ olduğundan $rm = 0$ olacak şekilde $0 \neq r \in R$ vardır. Dolayısıyla M burulma modüldür.

4.1.13. Önerme R lokal olmayan bir halka ve M bir R −modül olsun. $Soc(M) \subseteq T(M)$ dir [16].

İspat. $Soc(M) = 0$ ise, $Soc(M) \subseteq T(M)$ olduğu açıktır.

$Soc(M) \neq 0$ olsun. $0 \neq m \in Soc(M)$ için $m = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n$ olacak şekilde $i \in I = \{1,2,3, \dots, n\}$ için $m_i \in M$ vardır ve Rm_i basit modüldür. Yardımcı Teorem 4.1.12 dan her $i \in I$ ve $0 \neq r_i \in R$ için $r_i m_i = 0$ dır. Ancak $r = r_1 r_2 r_3 \dots r_n$ alınırsa, R bir bölge olduğundan $r \neq 0$ dır. Böylece $rm = 0$, dolayısıyla $m \in T(M)$ elde edilir. Sonuç olarak $Soc(M) \subseteq T(M)$ dir.

4.1.14. Yardımcı Teorem R halka, M bir R −modül olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

i) M dual sonlu tümlenmiştir.

ii) M nin her maksimal alt modülü M de tümleyene sahiptir [2].

4.1.15 Sonuç R lokal olmayan bir halka ve M bir R −modül olsun. M nin her alt modülü TE −modül ise, M dual sonlu tümlenmiştir [9].

İspat. Yardımcı Teorem 4.1.14 ten M nin her maksimal alt modülünün M de tümleyene sahip olduğunu göstermek yeterlidir. M nin herhangi bir maksimal alt modülü U olsun. $M/_U$ basit olduğundan Yardımcı Teorem 4.1.12 dan dolayı $M/_U$ burulma modüldür. Hipotezden U, $TE-$modül olup M de bir tümleyene sahiptir. Dolayısıyla M dual sonlu tümlenmiştir.

4.1.16. Yardımcı Teorem M bir $TE-$modül ve $Rad(N) = 0$ olan N modülüde M nin burulma genişlemesi olsun. Bu takdirde M modülü N nin direkt toplam terimidir [9].

İspat. M nin N deki tümleyenine V dersek $M + V = N$ ve $M \cap V \ll N$ yazılır. Buradan $M \cap V \subseteq Rad(N) = 0$ olur ki, bu da bize $M \cap V = 0$ olduğunu gösterir. Böylece $N = M \oplus V$ elde edilir.

4.1.17. Sonuç R bir $V-$halka ve M bir $TE-$modül olsun. Bu takdirde $N/_M$ burulma modülü ile M, N nin direk toplamıdır [9].

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Konusunu, her burulma genişlemesinde tümleyene sahip modüllerin, TE −modül olarak tanımlandığı injektif modüllerin genellemelerinin oluşturduğu bu çalışmada aşağıdaki sonuçlara ulaşıldı,

- Her E −modül TE −modüldür. Ancak bunun tersi her zaman doğru değildir. Yani her TE −modül E −modül olmayabilir.
- Her lineer kompakt modül TE −modüldür.
- TE −modüllerin direkt toplamlarının TE −modül olması için direkt toplam terimlerinden birinin burulma modül olması gerektiği gösterildi.

Bu çalışmadan yola çıkılarak her burulma genişlemesinde radikal, zayıf, bol ve bol zayıf tümleyene sahip modüller araştırılıp karakterize edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Alexander, J.W., Zippin, L., “Discrete abelian groups and their character groups”, ***Annals of Mathematics***, DOI: 10.2307/1968665, (1935).

[2] Alizade, R., Bilhan, G. and Smith, P. F., “Modules whose maximal submodules have supplements”, ***Comm. In Algebra***, 29(6), 2389-2405, (2001).

[3] Alizade, R., Pancar, A., “Homoloji cebire giriş”, ***Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi***, Samsun, (1991).

[4] Anderson, F.W., Fuller, K.R., “Rings and categories of modules”, ***Springer-New York***, (1992).

[5] Baer, R., "Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group", ***Bulletin of the American Mathematical Society,*** (1940).

[6] Çalışıcı, H., Türkmen, E., “Modules that have a supplement in every cofinite extension”, ***Georgian Math. J***., 19, 209-216, (2012).

[7] Çallıalp, F., Tekir, Ü.,”Değişmeli halkalar ve modüller”, ***Birsen Yayınevi***, İstanbul, (2009).

[8] Eckmann, B., Schorf, A., “Uber injective moduln”, ***Arch. Math***., 4, 75-78, (1953).

[9] Göçer, F., Türkmen, E., “Modules that have a supplement in every torsion extension”, ***Palestine Journal of Mathematics***, 515-518, (2015).

[10] Göçer, F., Türkmen, E., “Corrigendum to modules that have a supplement in every torsion extension”, ***Palestine Journal of Mathematics***, 304-305, (2016).

[11] Jain, S. K., Srivastava, A. K. and Tuganbayev, A. A., “Cyclic modules, and structure of rings”, ***Oxford Mathematical Monoqraphs***, (2012).

[12] Kasch,F., Mares, E. A., “Eine kennzeichnung semi-perfekter moduln”, ***Nagoya Math. J.***, Volume 27, Part 2, 525-529, (1966).

[13] Kasch, F., “Modules and Rings”, ***Academic Press İnc.***, Munich, Germany, (1982).

[14] Pancar, A., Türkmen, B. N., “İnjektif modüllere giriş”, ***Pegem Akademi***, Ankara, (2014).

[15] Sharpe, D. W., Vamos, P., “İnjective modules”, ***Cambridge at the University Press***, (1972).

[16] Wisbauer, R., “Foundations of modules and ring theory”, ***Gordon and Breach***, Philadelphia, (1991).

[17] Xue, W., “Characterizations of semiperfect and perfect rings”, ***Publicacions Matematique***, (1996).

[18] Zöschinger, H., “Komplementierte moduln uber dedekindringen,” ***J. Algebra***, pp. 42–56, (1974).

[19] Zöschinger, H. “Moduln, die in jeder erweiterung ein komplement haben”, ***Math. Scand.***, 267-287, (1974).

ÖZGEÇMİŞ VE İLETİŞİM BİLGİLERİ

Adı Soyadı	: Fatih GÖÇER
Doğum Yeri	: Hassa / HATAY
Doğum Tarihi	: 26.09.1986
Bildiği Yabancı Dil	:

Eğitim Durumu

Lise	: Hatay Belen Lisesi (2000 - 2003)
Lisans	: Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü (2005 - 2009)

İletişim Bilgileri

Adres	: Akbilek Mahallesi, Kemal Nehrazoğlu Caddesi, Simre Apt., No:17, Daire:7 Merkez / Amasya
E-posta	: gcrfth@gmail.com