DUAL SONLU RAD- D_{12} MODÜLLERİNİN KARAKTERİZASYONU

Recep KILIÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ARALIK 2016

AMASYA

DUAL SONLU RAD-D_{12} MODÜLLERİNİN KARAKTERİZASYONU

Recep KILIÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ARALIK 2016

AMASYA

Recep KILIÇ tarafından hazırlanan Dual Sonlu Rad-D_{12} Modüllerinin Karakterizasyonu adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Burcu Nişancı TÜRKMEN
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Burcu Nişancı TÜRKMEN
(Matematik Anabilim Dalı, A.Ü.)
………………………………………….
(Matematik Anabilim Dalı, ….)
……………………………………
(Matematik Anabilim Dalı, A.Ü.)

//2016

Bu tez ile A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Doç. Dr. Mehmet KARA ....
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Recep KILIÇ

DUAL SONLU RAD-D_{12} MODÜLLERİNİN

KARAKTERİZASYONU

(Yüksek Lisans Tezi)

Recep KILIÇ

AMASYA
ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Aralık 2016

ÖZET

R bir halka ve M bir R-modül olsun. M modülünün her dual sonlu N alt modülü için M nin bir K direkt toplam terimi ve Çek(α) ⊆ Rad(K) olacak şekilde bir $\alpha : K \longrightarrow {}^{M}/_{N}$ epimorfizması varsa M modülüne dual sonlu Rad-D_{12} modül denir. Bu tez çalışmasında Rad-D_{12} modüllerinin ve dual sonlu Rad-D_{12} modüllerinin çeşitli özellikleri ispatlandı. Özel olarak (yarı) mükemmel halkalar ve artin serisel halkalar (dual sonlu) Rad-D_{12} modülleri yardımıyla karakterize edildi.

Bilim Kodu	**: 912.1.025**
Anahtar Kelimeler	**: (dual sonlu) Rad-D_{12} modül, (yarı) mükemmel halka, artin serisel halka**
Sayfa Adedi	**: 68**
Tez Yöneticisi	**: Doç. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN**

CHARACTERIZATIONS OF COFINITELY RAD-D_{12} MODULES

Recep KILIÇ

AMASYA UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

December 2016

ABSTRACT

Let R be a ring and M be a right R- module. M is called cofinitely Rad-D_{12} if, for every cofinite submodule N of M, there exist a direct summand K of M and an epimorphism $\alpha: K \longrightarrow M/N$ with Ker $(\alpha) \subseteq$ Rad(K). In this paper, we provide various properties of Rad-D_{12} modules and cofinitely Rad-D_{12} modules. In particular, we characterize (semi) perfect rings and artinian serial rings using (cofinitely) Rad-D_{12} modules.

Science Code	**: 912.1.025**
Key Words	**: (cofinitely) Rad-D_{12} module, (semi) perfect ring, artinian serial ring.**
Page Number	**: 68**
Adviser	**: Doç. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN**

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca beni geliştirmek için elinden gelen her şeyi yapan, engin bilgi birikimi ve takdire şayan eğitim anlayışıyla bana yol gösteren, tez konumda ve tez yazımında desteğini esirgemeyen saygı değer danışman hocam Doç. Dr. Burcu Nişancı Türkmen'e, gerek kişiliğiyle gerekse de akademik benliğiyle karşılaştığım her zorlukta yanımda hissettiğim değerli hocam Doç. Dr. Ergül Türkmen'e, Yrd. Doç. Dr. Yılmaz Mehmet Demirci ve Yrd. Doç. Dr. Hasan Hüseyin Ökten hocalarıma da tezimin incelemesinde göstermiş oldukları hassasiyet için teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca manevi desteğini hiç esirgemeyen ve her durumda bana destek olan sevgili eşim Keziban KILIÇ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez FMB-BAP 13-051 (Dual Sonlu) Radikal D12 Modüllerinin Karakterizasyonları adlı Lisansüstü Projelerini Destekleme Projesiyle desteklenmiştir.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv
ABSTRACT v
TEŞEKKÜR vi
İÇİNDEKİLER vii
SİMGELER VE KISALTMALAR ix
1. GİRİŞ 1
2. GENEL BİLGİLER 3
2.1. Halkalar 3
2.2. Modüller 4
2.3. Basit ve Yarı Basit Modüller 12
2.4. Küçük ve Büyük Alt Modüller 14
2.5. Bir Modülün Radikali 16
2.6. Kategori, Funktor ve Funktorun Tamlığı 22
2.7. Projektif, İnjektif Modüller ve İnjektif Bürüm 27
2.8. Lokal ve Oyuk Modüller 36
2.9. Artin ve Noether Modüller 38
3. MATERYAL VE METOT 42
3.1. (Dual Sonlu) Yükseltilebilir ve (P^*) Özelliğine Sahip Modüller 42
3.2. Yarı Mükemmel, (Dual Sonlu) (Rad) $\oplus$- Tümlenmiş Modüller 43
3.3. (Dual Sonlu) D_{12} ve Rad-D_{12} Modüller 47
4. BULGULAR VE TARTIŞMA 51
4.1. Dual Sonlu Rad-D_{12} Modülleri 51
4.2. Modülleri (Dual Sonlu) Rad-D_{12} Olan Halkalar 61
5. SONUÇ VE ÖNERİLER 65
KAYNAKLAR 66
ÖZGEÇMİŞ 69

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel Sayılar Kümesi
$\mathbb{P}$	Asal Sayılar Kümesi
$\subseteq$	Alt Küme
$\subset$	Öz Alt Küme
$\supseteq$	Kapsama
$\cap$	Kümelerde Kesişim İslemi
0_R	$(R,+,\cdot)$ Halkasında $(R,+)$ Abel Grubunun Birimi
1_R	$(R,+,\cdot)$ Halkasında $(R,\cdot)$ Cebirsel Yapısının Birimi
$Rad(R)$	R Halkasının Jacobson Radikali
$\leq$	Alt Modül
$M/_N$	M modülünün N Alt Modülüne Göre Bölüm Modülü
$\trianglelefteq$	Büyük Alt Modül
$\ll$	Küçük Alt Modül
$M \cong N$	İzomorf Modüller

$Hom(A,B)$	A Modülünden B Modülüne Tüm Homomorfizmaların Kümesi
$End(M)$	M Modülünün Endomorfizmalarının Halkası
$Gör(f)$	f Homomorfizmasının Görüntüsü
$Çek(f)$	f Homomorfizmasının Çekirdeği
$\prod_I N_i$	N_i Alt Modüllerinin Direkt Çarpımı
$\sum_I N_i$	N_i Alt Modüllerinin Toplamı
$\oplus_I N_i$	N_i Alt Modüllerinin Direkt Toplamı
$\langle X \rangle$	X Kümesi Tarafından Üretilen Modül
mR	m Elemanı Tarafından Üretilen Devirli Modül
$Rad(M)$	M Modülünün Radikali
$Ob(\mathcal{K})$	$\mathcal{K}$ Kategorisinin Nesneleri
$Mor_{\mathcal{K}}(A,B)$	Bir $\mathcal{K}$ Kategorisinde A Nesnesinden B Nesnesine Tüm Morfizmaların Kümesi
$mod-R$	R-modül Kategorisi
Ab	Abel Grup Kategorisi
$cgs^{\oplus}$	Dual Sonlu Rad-⊕-Tümlenmiş modül
i	İçerme Homomorfizması

Kısaltmalar	**Açıklama**
A.Ü.	Amasya Üniversitesi
S.Ü.	Sinop Üniversitesi
KSK	Kısmi Sıralı Küme
DTT	Direkt Toplam Terimi

1. GİRİŞ

Bu çalışmada R halkası birimli ve birleşmeli; tüm modüller üniter sağ R-modül olarak alınmıştır. M bir modül olsun. M modülünün bir N alt modülü $N \leq M$ şeklinde gösterilir. Eğer $M/_N$ bölüm modülü sonlu üretilmiş ise $N \leq M$ alt modülüne dual sonlu alt modül denir. Maksimal alt modüller dual sonludur. Ayrıca sonlu üretilmiş bir modülün her alt modülü de dual sonludur. $\forall\ 0 \neq N \leq M$ için $L \cap N \neq 0$ olan $L \leq M$ alt modülüne büyük alt modül denir ve $L \trianglelefteq M$ ile gösterilir. Her alt modülü büyük olan modül düzgün modüldür. M nin her (dual sonlu) N alt modülü M modülünün bir $L \leq M$ direkt toplam terimini kapsıyor ve $M = L \oplus K$ için $N \cap K$ alt modülü M modülünde küçük oluyorsa M modülüne yükseltilebilir modül denir. Burada bir $K \leq M$ alt modülünün küçük olması demek, M modülünün her $N < M$ öz alt modülü için $K + N \neq M$ demektir ve $K \ll M$ ile gösterilir. John Clark ve arkadaşlarının [6] da bahsedildiği üzere her sağ R-modülün yükseltilebilir olması için gerek ve yeter koşul R nin sağ ve sol artin serisel halkası ve $Rad\,(R)^2 = 0$ olmasıdır. Burada $Rad\,(R)$, R halkasının Jacobson Radikalidir. M sıfırdan farklı bir R-modül olsun. M modülünün her N öz alt modülü için $N \ll M$ ise M R-modülüne oyuk modül denir. Oyuk modüller ve yarı basit modüller yükseltilebilirdir. M modülünün tüm öz alt modüllerini kapsayan bir öz alt modülü varsa M modülü lokal modül olarak adlandırılır. F. Kasch ve Erika A. Mares direkt toplam terimlerinin genelleştirilmesi olan tümleyen kavramını ve tümlenmiş modülü tanımlamıştır. Buna göre M nin bir N alt modülü için $M = N + L$ ve $N \cap L \ll L$ olacak şekilde $L \leq M$ varsa L ye N nin M modülünde bir tümleyeni denir. Eğer M nin her alt modülü bir tümleyene sahipse M ye tümlenmiş modül adı verilir. Al-Khazzi ve P.F. Smith'in [15] de ispatladığı üzere her sağ R-modülün (dual sonlu) tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul R nin sağ (yarı) mükemmel olmasıdır. Mohamed ve Müller yükseltilebilir modüllerin genelleştirilişi olan $\oplus$-tümlenmiş modülleri (D_{11}) tanımlamışlardır. Buna göre, M nin her N alt modülü M de direkt toplam terimi olan bir tümleyene sahiptir. Ayrıca Zöschinger de dedekind bölgesi üzerindeki her tümlenmiş modülün $\oplus$-tümlenmiş modül olduğunu göstermiştir. H. Çalışıcı ve A.

Pancar makalelerinde $\bigoplus$-dual sonlu tümlenmiş modülleri tanımlamışlar ve birtakım özelliklerine yer vermişlerdir. D. Keskin ve W. Xue [20] de (D_{12}) modülünü tanımlamışlardır ve kapsamlı bir şekilde çalışmışlardır. Aynı makalenin Önerme 4.3 ünde $\bigoplus$-tümlenmiş modüllerin (D_{12}) özelliğine sahip olduğu ispatlanmıştır. Y. Wang (D_{12}) modüllerinin genelleştirilmesi olan dual sonlu (D_{12}) modüllerini tanımlamıştır. Buna göre M nin her (dual sonlu) N alt modülü için M modülünün bir K direkt toplam terimi ve $Çek\ (\alpha) \ll M/K$ olacak şekilde $\alpha : M/K \longrightarrow M/N$ epimorfizması varsa M modülüne (dual sonlu) (D_{12}) modül denir. Xue tümleyenleri genelleştirerek Rad-tümleyen kavramını tanımlamıştır. Bu tanıma göre $M = U + V$ ve $U \cap V \subseteq Rad(V)$ ise V alt modülüne U nun Rad-tümleyeni denir. Tanımlar gereği her direkt toplam terimi bir tümleyen, her tümleyen bir Rad-tümleyendir. E. Büyükaşık ve C. Lomp (dual sonlu) tümlenmiş modülleri (dual sonlu) Rad-tümlenmiş modüllere, E. Türkmen (dual sonlu) $\bigoplus$-tümlenmiş modülleri (dual sonlu) Rad-$\bigoplus$-tümlenmiş modüllere genelleştirmiştir. B. Nişancı ve A. Pancar [11] de dual sonlu Rad-$\bigoplus$-tümlenmiş modülleri kısaca $cgs^{\bigoplus}$ ile göstermişlerdir. Y. Talebi ve arkadaşları, M modülünün her N alt modülü için M nin bir K direkt toplam terimi ve $Çek\ (\alpha) \subseteq Rad\ (K)$ olacak şekilde $\alpha : K \longrightarrow M/N$ epimorfizması mevcut ise M modülünü $\mathrm{Rad} - \mathrm{D}_{12}$ modül olarak tanımlamışlardır. Bu tez çalışmasında $\mathrm{Rad} - \mathrm{D}_{12}$ modüllerinin genelleştirilmesi olan dual sonlu $\mathrm{Rad} - \mathrm{D}_{12}$ modülü tanımlanmıştır ve bazı cebirsel özelliklerine yer verilmiştir. Ayrıca yarı mükemmel halkaların ve artin serisel halkaların yeni karakterizasyonları dual sonlu $\mathrm{Rad} - \mathrm{D}_{12}$ modülleri yardımıyla verilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Halkalar

2.1.1 Tanım: $(R,+)$ bir abel grup olsun. '**.**' R üzerinde ikili işlem olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan $(R,+,.)$ cebirsel yapısına **halka** denir.

R₁) $\forall a,b,c \in R$ için $(ab)c = a(bc)$ sağlanır.

R₂) $a(b+c) = ab+ac$ ve $(a+b)c = ac+bc$ dir [1] .

2.1.2 Tanım $(R,+,.)$ bir halka olsun. Her $a \in R$ için $ae = ea = a$ olacak şekilde $e \in R$ mevcutsa, $e \in R$ elemanına R halkasının **birim elemanı** denir. $e = 1_R$ ile gösterilir. Birim elemana sahip halkaya **birimli halka** denir. Birim eleman tek türlü belirlidir [1].

$\mathbb{Z}$ birimli bir halka iken, $2\mathbb{Z}$ birimli olmayan bir halkadır.

$(R,+,.)$ halkası ' **.** ' işlemine göre değişmeli ise, bu halkaya **değişmeli halka** denir. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ değişmeli halka iken, $M(n,\mathbb{Z})$ matrisler halkası değişmeli olmayan halkadır.

Bu çalışmada $(R,+,.)$ halkası alışılmış olarak R ile gösterilecektir ve birimli halka olarak kabul edilecektir.

2.1.3 Tanım R bir halka ve $\emptyset \neq I \subseteq R$ olsun. I, $(R,+)$ abel grubunun bir alt grubu ve keyfi $a,b \in I$ elemanları için $ab \in I$ ise, I alt grubuna R halkasının **alt halkası** denir. Ayrıca $\forall r \in R$, $\forall a \in I$ için $ar \in I$ $(ra \in I)$ ise , I alt halkasına R halkasının **sağ (sol) ideali** denir. Eğer I, R halkasının hem sağ hem de sol ideali ise, I ya R halkasının **ideali** denir [8].

Her sağ (sol) ideal aynı zamanda alt halkadır fakat tersi genelde doğru değildir. Örneğin $I = \left\{\begin{pmatrix} n & r \\ 0 & r' \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z};\ r, r' \in \mathbb{Q}\right\}$ kümesi $M(2, \mathbb{R})$ halkasının alt halkasıdır ancak sağ (sol) ideali değildir.

R ve 0, R halkasının aşikar idealleridir. R halkasının kendisinden farklı ideallerine **öz ideal** denir [8].

2.1.4 Tanım R bir halka ve I, R halkasının bir (sağ, sol) ideali olsun. Eğer I (sağ, sol) ideali tek bir $a \in R$ elemanı tarafından üretiliyorsa, I (sağ, sol) idealine **esas (sağ, sol) ideal** denir. Bu durumda I sağ ideali $I = aR = \{\, ar \mid r \in R\}$ şeklindedir. Her ideali esas ideal olan R halkasına **esas ideal halkası** denir [1].

2.1.5 Tanım P, R değişmeli halkasının öz ideali olsun. $a, b \in R$ için $ab \in P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ oluyorsa, P ye R nin **asal ideal** denir [1].

2.1.6 Tanım Bir R halkasında $\forall a \in R$ için, $ab = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq b \in R$ elemanı bulunuyorsa, a ya halkanın **sıfır böleni** denir. Sıfır böleni olmayan birimli ve değişmeli R halkasına **değişmeli bölge** denir [1].

2.1.7 Tanım R değişmeli bölge olsun. R nin her öz ideali, sonlu sayıda asal idealin çarpımı ise, R ye **dedekind bölgesi** denir [1].

2.2 Modüller

2.2.1 Tanım R halkası ve $(M, +)$ abel grubu için $f : M \times R \longrightarrow M$ fonksiyonu verilmiş olsun. $f(m, r) \in M$ elemanı kısaca mr ile gösterilsin. Her $r, s \in R$ ve her $m, n \in M$ için;

i. $(m+n)r = mr + nr$

ii. $m(r+s) = mr + ms$

iii. $m(rs) = (mr)s$ ise M ye **sağ $\boldsymbol{R}$-modül** denir ve M_R ile gösterilir. Eğer R birimli halka ve $\forall\, m \in M$ için

iv. $m1_R = m$ ise M ye **üniter sağ $\boldsymbol{R}$-modül** denir. Benzer tanım sol R-modül için de yapılabilir [2].

Her abel grup bir üniter sağ $\mathbb{Z}$-modüldür. Her R halkası kendi üzerinde bir sağ R-modüldür. Her vektör uzayı, cismi üzerinde üniter sağ modüldür. Bu çalışmada bütün modüller üniter sağ R-modül olarak alınacaktır. Ancak kısalık olması açısından sadece R-modül yazılışı kullanılacaktır.

2.2.2 Tanım R bir halka, M bir R-modül ve N, M abel grubunun alt grubu olsun. Her $r \in R$ ve her $n \in N$ için $nr \in N$ ise, N ye M modülünün **alt modülü** denir ve $N \leq M$ ile gösterilir [1].

0 ve M, M modülünün aşikar alt modülleridir. M modülünün aşikar alt modüllerinden başka alt modüllerine de **öz alt modül** denir. R bir halka ve I, R halkasının öz sağ ideali olmak üzere I, R halkasının bir öz alt modülüdür.

Ayrıca bir M modülünün keyfi sayıdaki alt modüllerinin arakesiti de M nin alt modülüdür.

2.2.3 Tanım M bir R −modül ve X, M nin bir alt kümesi olsun. M nin X kümesini kapsayan bütün alt modüllerinin arakesitine **X tarafından üretilen alt modül** denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir. Eğer X sonlu elemanlı ise, X kümesi tarafından üretilen alt modüle **sonlu üretilmiş alt modül** denir ve $X = \{a\}$ şeklinde tek elemanlı ise, $\langle X \rangle = \langle a \rangle$ ya **devirli alt modül** denir ve $\langle a \rangle = aR = \{ ar \mid r \in R \}$ şeklindedir. Ayrıca $\{ B_i \mid i \in I \}$, M nin alt modüllerinin ailesi ise, $\langle X \rangle = \bigcup_{i \in I} B_i$ kümesinin ürettiği alt modüle B_i **modüllerinin toplamı** denir. $\langle X \rangle = \bigcup_{i\in I} B_i = \sum_{i\in I} B_i$ ile gösterilir [1].

Eğer $M = < X >$ ve X sonlu ise, M ye **sonlu üretilmiş** $\boldsymbol{R}$**-modül**, $M = < a >$ olacak şekilde $a \in M$ varsa M ye $\boldsymbol{a}$ **tarafından üretilmiş devirli** $\boldsymbol{R}$**-modül** denir.

2.2.4 Tanım M bir R-modül, N; M nin bir alt grubu olsun. $M/_N$ bölüm grubu $r \in R,\ m + N \in M/_N$ olmak üzere $(m+N)r = mr + N$ ile tanımlı dış işleme göre bir R −modül yapısına sahiptir. Bu $M/_N$ R-modülüne $\boldsymbol{M}$ **nin** $\boldsymbol{N}$ **ye göre bölüm modülü** denir [3].

2.2.5 Teorem M sonlu üretilmiş R-modül olsun. Bu durumda M nin her bölüm modülü de sonlu üretilmiştir [1].

İspat M sonlu üretilmiş R-modül ve $N \leq M$ olsun. M sonlu üretilmiş olduğundan $M = < \{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n\} >$ ve her $m \in M$ için $m = x_1r_1 + x_2r_2 + \cdots + x_nr_n$ olacak şekilde $\forall\ 1 \leq i \leq n$ için $x_i \in M$ ve$r_i \in R$ elemanları vardır. Her $m + N \in M/_N$ için $m + N = (x_1r_1 + x_2r_2 + \cdots + x_nr_n) + N = (x_1 + N)r_1 + (x_2 + N)r_2 + \cdots + (x_n + N)r_n$ olup $M/_N = < \{x_1 + N, x_2 + N, \ldots\ldots\ldots, x_n + N\} >$ bulunur. Dolayısıyla $M/_N$ sonlu üretilmiştir.

2.2.6 Tanım M bir R −modül, $N \leq M$ olsun. Eğer $M/_N$ bölüm modülü sonlu üretilmiş ise, N ye **dual sonlu alt modül** denir [1].

2.2.7 Tanım I boştan farklı indis kümesi olmak üzere $\{A_i\}_{i\in I}$ sağ R-modüllerin bir ailesi olsun. $\forall i \in I$ için $f(i) \in A_i$ ile tanımlı tüm f fonksiyonlarının kümesine $\{A_i\}_{i\in I}$ modüller ailesinin **direkt çarpımı** denir ve $\prod_{i\in I} A_i = \{f \mid f: I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i,\ her\ i \in I\ için\ f(i) \in A_i\}$ dir. $\prod_{i\in I} A_i$ nin en fazla sonlu sayıda bileşeni sıfırdan farklı olan elemanların kümesi $\bigoplus_{i\in I} A_i$ ile gösterilirse $\bigoplus_{i\in I} A_i = \{\ (a_i)_{i\in I}\ \mid\ en\ çok\ sonlu\ sayıda\ i \in I\ için\ a_i \neq 0\ \}$ kümesine $\{\ A_i\ \}_{i\in I}$ modüller ailesinin **dış direkt toplamı** denir. Açık olarak $\bigoplus_{i\in I} A_i \leq \prod_{i\in I} A_i$ dir [1].

2.2.8 Tanım M bir R-modül ve $\{A_i\}_{i\in I}$ alt modüllerinin bir ailesi olsun. Eğer;

i) $M = \sum_{i\in I} A_i$ ve

ii) $\forall i \in I$ için $A_i \cap \sum_{j\neq i} A_j = 0$ ise, M modülüne $\{A_i\}_{i\in I}$ alt modüller ailesinin bir **iç direkt toplamı** veya **direkt toplamı** denir ve $M = \bigoplus_{i\in I} A_i$ ile gösterilir. Her bir A_i alt modülüne ***M* modülünün direkt toplam terimi** denir [1].

Açıktır ki M modülünün A_1 ve A_2 alt modülleri için $M = A_1 \oplus A_2$ olması için gerek ve yeter koşul $M = A_1 + A_2$ ve $A_1 \cap A_2 = 0$ olmasıdır.

2.2.9 Tanım M bir R-modül olsun. Eğer M nin iki direkt toplam teriminin toplamı tekrar M nin bir direkt toplam terimi oluyorsa, M ye **direkt toplam terimlerinin toplamı özelliğine sahiptir** denir veya kısaca **(DTT) özelliğine sahiptir** denir [1].

2.2.10 Teorem (Modüler Kuralı) M bir R modül, K, N ve H da M nin alt modülleri ve $H \subseteq N$ olsun. Bu taktirde $(\ H + K) \cap N = H + (\ K \cap N\ )$ dir [3].

İspat Her $a \in (H + K) \cap N$ için $a \in (H + K)$ ve $a \in N$ olduğundan $a = h + k$ olacak şekilde $h \in H$ ve $k \in K$ vardır. $H \subseteq N$ olduğundan $h \in N$ olur. Bu durumda $k = a - h$ ve $a \in N, h \in N$ olduğundan $k \in N$ olup, $k \in (\ K \cap N\ )$ bulunur. Yani $a = h + k \in H + (\ K \cap N\ )$ olup $(H + K) \cap N \subseteq H + (\ K \cap N\ )$ bulunur. Ayrıca

$H + (K \cap N) \subseteq H + K$ ve $H + (K \cap N) \subseteq N$ olduğundan $H + (K \cap N) \subseteq (H + K) \cap N$ olur. Dolayısıyla $(H + K) + N = H + (K \cap N)$ dir.

2.2.11 Tanım M ve N iki sağ R- modül olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $f : M \to N$ fonksiyonuna **sağ *R*-modül homomorfizması** denir.

i) Her $a,b \in M$ için $f(a+b) = f(a) + f(b)$

ii) Her $a \in M$ ve her $r \in R$ için $f(ar) = f(a)r$

Benzer şekilde iki sol R-modül yardımıyla sol R-modül homomorfizması tanımı da verilebilir. Biz çalışmamızda sağ R-modüller üzerinde duracağımız için herhangi bir sağ R-modül homomorfizmasını kısaca homomorfizma olarak adlandıracağız. Eğer f homomorfizması birebir ise, f ye **monomorfizma**, örten ise, **epimorfizma**, birebir ve örten ise, **izomorfizma** adı verilir. $f: M \longrightarrow N$ izomorfizma ise, M ve N modüllerine **izomorf modüller** denir ve $M \cong N$ ile gösterilir [4].

M modülünden N modülüne tanımlı tüm homomorfizmaların kümesi $Hom\ (M, N)$ ile gösterilir. $Hom(M, N) = \{ f \mid f : M \longrightarrow N\ modül\ homomorfizması \}$ şeklindedir. Burada $M = N$ ise f ye **endomorfizma** adı verilir. Ayrıca M den M ye tanımlı tüm homomorfizmaların kümesi $End(M\ )$ ile gösterilir.

M bir $R-$modül ve $N \leq M$ olsun. Her $a \in N$ için $f(a) = a$ ile tanımlı $f : N \to M$ dönüşümü bir $R-$modül monomorfizması olup bu monomorfizmaya **içerme homomorfizması** denir ve i yazılışı ile gösterilir. $\pi: M \longrightarrow M/N$, $\pi(m) = m + N$ ile tanımlı π homomorfizması ise, bir epimorfizma olup bu epimorfizmaya **doğal (kanonik) homomorfizma** denir [4].

M bir R-modül ve $\{M_i\}_{i\in I}$, M nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. $M = \oplus_{i\in I} M_i$ iken $\forall (m_i) \in M$ için $\psi_k((m_i)_{i\in I}) = m_K$ ile tanımlı $\psi_k: M \longrightarrow M_K$ epimorfizmasına ***k*. izdüşüm homomorfizması** adı verilir[1].

M bir R −modül olmak üzere $g(m) = m$ ile tanımlı $g: M \to M$ bir R −modül izomorfizması olup bu izomorfizmaya **birim (idantik) homomorfizma** denir [4].

2.2.12 Teorem $f : M \longrightarrow N$ ve $g : N \longrightarrow K$ birer R-modül homomorfizmaları iseler $g \circ f : M \longrightarrow K$ bileşke fonksiyonu bir R-modül homomorfizmasıdır [5].

2.2.13 Tanım $f : M \longrightarrow N$ bir R-modül homomorfizması olsun. $\{a \in M \mid f(a) = 0\}$ kümesine f nin **çekirdeği** denir ve $Çek(f)$ yazılışı ile gösterilir. $\{f(a) \mid a \in M\}$ kümesine f nin **görüntüsü** denir ve $Gör(f)$ yazılışı ile gösterilir. Ayrıca $Çek(f) \leq M$ ve $Gör(f) \leq N$ dir [4].

2.2.14 Teorem $\pi: M \longrightarrow M/N$, doğal (kanonik) homomorfizma olsun. Bu taktirde $Çek(\pi) = N$ dir [4].

2.2.15 Tanım M bir R-modül olsun. $\forall f \in End(M)$ için $f(U) \subseteq U$ koşulunu sağlayan M nin U alt modülüne **karakteristik alt modül** denir [1].

2.2.16 Teorem (Homomorfizma Teoremi) $f: M \to N$ bir R-modül homomorfizması olsun. Bu takdirde $M/Çek(f) \cong Gör(f)$ dir. Özellikle f bir epimorfizma ise, $M/Çek(f) \cong N$ dir [4].

2.2.17 Teorem (1. İzomorfizma Teoremi) M bir R-modül, H ve K da M nin alt modülleri olsun. Bu takdirde $H+K/K$, M/K modülünün alt modülü olup, $H+K/K \cong H/H\cap K$ dır [4].

2.2.18 Teorem (2. İzomorfizma Teoremi) M bir R-modül ve $K \leq N \leq M$ olsun. Bu durumda $(M/K)/(N/K) \cong M/N$ dir [4].

2.2.19 Tanım $\{M_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ modüller topluluğunun ve bunların $f_n: M_n \longrightarrow M_{n-1}$ homomorfizmalarından oluşan $\ldots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \longrightarrow \ldots$ dizisinde her $n \in \mathbb{Z}$ için $Gör(f_{n+1}) \subseteq Çek(f_n)$ ise, bu diziye **kompleks**, $Gör(\,f_{n+1}\,) = Çek(\,f_n\,)$ ise, bu diziye **tam dizi** denir [3].

2.2.20 Önerme $0 \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C \xrightarrow{e} 0$ dizisi tam ise, g bir monomorfizma, h bir epimorfizmadır. Ayrıca $Gör(g) \cong A$ ve $C \cong B/Gör(g)$ dir. Böylece izomorf modülleri özdeşleştirilerek $C = B/A$ alınabilir [3].

İspat $Çek(g) = Gör(f) = f(0) = 0$ olduğundan g monomorfizmadır. 1. izomorfizma teoreminden $Gör(g) = g(A) \cong A$ dır. Her $c \in C$ için $e(c) = 0$ olduğundan $Gör(h) = Çek(e) = C$ dir. Yani h epimorfizmadır. Tekrar birinci izomorfizma teoreminden $C = Gör(h) \cong B/Çek(h) = B/Gör(g) \cong B/A$ elde edilir.

2.2.21 Tanım $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ şeklindeki tam diziye **kısa tam dizi** denir [3].

M bir modül ve $N \leq M$ olmak üzere $0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0$ ve

$f : M \longrightarrow K$ homomorfizması için $0 \longrightarrow Çek(f) \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} f(M) \longrightarrow 0$ dizileri birer kısa tam dizidir.

2.2.22 Teorem F bir modül, $X = \{x_k |\ k \in K\}$ de F nin bir alt kümesi olsun. Bu durumda aşağıdaki iki koşul denktir;

i) Her $a \in F$ elemanı, sadece sonlu sayıda r_k katsayıları sıfırdan farklı (veya hepsi sıfır) olmak üzere, tek türlü olarak $\sum_{k \in K} x_k\, r_k$ şeklinde yazılabilir.

ii) Her $k \in K$ için $f_k(r) = x_k r$ şeklinde tanımlanan $f_k : R \longrightarrow x_k R$ fonksiyonu bir izomorfizma olup $F = \bigoplus_{k \in K} x_k R$ dır [3].

2.2.23 Tanım Bir önceki teoremdeki denk koşullardan birini sağlayan F modülüne **serbest modül,** $X = \{\, x_k \mid k \in K \,\}$ kümesine de F modülünün **serbest üretenler kümesi** veya kısaca **tabanı** denir [3].

2.2.24 Tanım $M,$ 0 dan farklı R-modül olsun. M nin aşikar alt modülleri olan M ve 0 dan başka direkt toplam terimi olmayan M modülüne **parçalanamazdır** denir.

Parçalanamaz bir modüle izomorf olan her modül de parçalanamazdır [1].

2.2.25 Tanım M bir R-modül ve N, M modülünün öz alt modülü olsun. M modülünün N yi kapsayan N den başka öz alt modülü yoksa N öz alt modülüne M nin **maksimal alt modülü** denir [1].

$p \in \mathbb{P}$ olmak üzere $p\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülünün maksimal alt modülüdür.

2.2.26 Önerme M sonlu üretilmiş bir R-modül olsun. Bu takdirde M modülünün her öz alt modülü bir maksimal alt modülde kapsanır [4].

2.2.27 Teorem $0 \longrightarrow A \underset{h}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B \underset{k}{\overset{g}{\rightleftarrows}} C \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi için aşağıdaki koşullar denktir:

i) $h \circ f = 1_A$ olacak şekilde bir $h: B \longrightarrow A$ homomorfizması bulunur.

ii) $Gör(f)$ alt modülü B nin bir direkt toplam terimidir.

iii) $g \circ k = 1_C$ olacak şekilde bir $k: C \longrightarrow B$ homomorfizması bulunur [3].

2.2.28 Tanım Teorem 2.2.27 deki denk koşullardan birini sağlayan kısa tam diziye **parçalanabilirdir** denir [3].

2.2.29 Önerme M ve N birer R-modül olmak üzere $f: M \longrightarrow N$ epimorfizması verilsin. M nin $Çek(f) \subseteq K$ koşulunu sağlayan $\forall K \leq M$ alt modüllerinin kümesi ile N nin alt modüllerinin kümesi arasında birebir bir eşleme vardır [3].

2.3 Basit ve Yarı Basit Modüller

2.3.1 Tanım: Sıfırdan farklı bir M modülünün sıfırdan ve kendisinden başka alt modülü yoksa M modülüne **basit modül** denir [3].

2.3.2 Teorem M basit modül ise 0 , M nin maksimal alt modülüdür ve M devirlidir [1].

İspat M basit modül olduğundan 0 modülünü kapsayan bir öz alt modül yoktur. Bu sebeple 0, M modülünün maksimal alt modülüdür. Herhangi bir $0 \neq m \in M$ elemanı için $mR \leq M$ dir. M basit modül ve $0 \neq mR$ olduğundan $mR = M$ dir. Yani M devirlidir.

2.3.3 Teorem M bir modül olsun. $N \leq M$ alt modülünün M nin maksimal alt modülü olması için gerek ve yeter koşul $M/_N$ bölüm modülünün basit modül olmasıdır [3].

İspat ($\Longrightarrow$) $U/_N \leq M/_N$ keyfi alt modülü için $N \leq U$ dir. Hipotez gereği N maksimal alt modül olduğundan için $N = U$ veya $U = M$ dir. O halde $M/_N$ bölüm modülünün alt modülleri $N/_N$ veya $M/_N$ dir. Dolayısıyla $M/_N$ bölüm modülü basittir.

($\Longleftarrow$) $M/_N$ bölüm modülü basit olsun. $N < K \leq M$ koşulunu sağlayan M nin K alt modülünü alalım. Buradan $N/_N < K/_N \leq M/_N$ yazılır. $M/_N$ bölüm modülü basit olduğundan $K/_N = M/_N$ olup $K = M$ dir. Dolayısıyla $N \leq M$ maksimal alt modüldür.

2.3.4 Teorem M sıfırdan farklı bir modül olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

i) M basit alt modüllerin toplamıdır.

ii) M basit alt modüllerin direkt toplamıdır.

iii) M nin her alt modülü direkt toplam terimidir [4].

2.3.5 Tanım Teorem 2.3.4 te verilen denk koşullardan birini sağlayan M modülüne **yarı-basit modül** denir.

2.3.6 Tanım M sıfırdan farklı her alt modül çiftinin kesişimi sıfırdan farklı ve her öz alt modül çiftinin toplamı bir öz alt modül olan bir modül ise, M ye **eş-düzgün modül** denir [30].

2.4 Küçük ve Büyük Alt Modüller

2.4.1 Tanım R bir halka ve M bir R modül olmak üzere K, M modülünün öz alt modülü olsun. Eğer $K+L=M$ koşulunu sağlayan M modülünün L öz alt modülü yoksa K alt modülüne M modülünde **küçüktür** denir ve $K \ll M$ şeklinde gösterilir [4].

Sıfırdan farklı her modülün sıfır alt modülü, modülün kendisinde küçüktür.

$\mathbb{Z}_6$ $\mathbb{Z}$-modülünde $K=\{\bar{0},\bar{3}\}$ alt modülü için $K \ll \mathbb{Z}_6$ dır.

2.4.2 Önerme (Küçük Alt Modülün Özellikleri)

i) M bir modül ve $K < N \leq M$ olsun. Eğer $K \ll N$ ise, K ve K nın alt modülleri N alt modülünü kapsayan M modülünün alt modüllerinde küçüktür.

ii) M bir modül, $K_1, K_2, \dots, K_n, M_1, M_2, \dots, M_n$, M modülünün alt modülleri ve her $i=1,2,\dots,n$ için $K_i \ll M_i$ olsun. Bu takdirde

$K_1 + K_2 + \cdots + K_n \ll M_1 + M_2 + \cdots + M_n$ dir.

iii) M, N birer R −modül ve $f\colon M \longrightarrow N$ bir homomorfizma olsun. $K \ll M$ ise, $f(K) \ll f(M)$ dir.

iv) M bir modül, K ve N, M nin alt modülleri, $K \leq N$ ve N, M nin direkt toplam terimi olsun. Bu takdirde $K \ll N$ olması için gerek ve yeter koşul $K \ll M$ olmasıdır.

v) $N \leq M$ alt modülü M de hem küçük hem de direkt toplam terimi ise, $N=0$ dır.

vi) M/N sonlu üretilmiş ve $N \ll M$ ise, M modülü sonlu üretilmiştir [4].

İspat **i)** L, M nin N alt modülünü kapsayan keyfi bir alt modül olsun. $K+U=L$ koşulunu gerçekleyen $U \leq L$ alt modülü verilsin. $K+U=L$ nin N ile arakesitini alınırsa $(K+U)\cap N=N$ olup $K \leq N$ ve Teorem 2.2.10 dan $K+(N\cap U)=N$

bulunur. $K \ll N$ olduğundan $N \cap U = N$ bulunur. Buradan $N \leq U$ elde edilir. $K \leq N \leq U$ ve $K + U = L$ olduğundan $U = L$ dir. Dolayısıyla $K \ll L$ bulunur.

ii) İspatı $n = 2$ için yapalım. $K_1 + K_2 + L = M_1 + M_2$ olacak şekilde herhangi bir L alt modülünü alalım. $K_1 \ll M_1$ olduğundan i) den $K_1 \ll M_1 + M_2$ olur. Buradan $K_2 + L = M_1 + M_2$ olur. Benzer şekilde $K_2 \ll M_2$ olduğundan i) den $K_2 \ll M_1 + M_2$ olup $L = M_1 + M_2$ elde edilir. Böylece $K_1 + K_2 \ll M_1 + M_2$ bulunur. Sonlu sayıdaki K_i alt modülleri için de ispat benzer şekilde yapılır.

iii) $f(K) + L = f(M)$ olacak şekilde herhangi bir $L \leq f(M)$ alt modülü verilsin. Bu takdirde $f^{-1}(f(K) + L) = M$ yazılır. Buradan $K + f^{-1}(L) = M$ elde edilir. $K \ll M$ olduğundan $f^{-1}(L) = M$ buradan da $L = f(M)$ olduğu görülür. Yani $f(K) \ll f(M)$ olup i) den de $f(K) \ll N$ bulunur.

iv) $K \ll N$ ise i) den $K \ll M$ dir. Tersine; $K \ll M$ olsun. $K + L = M$ olacak şekilde herhangi bir $L \leq M$ alt modülünü alalım. $N,$ M nin direkt toplam terimi olduğundan $M = N \oplus U$ olacak şekilde $U \leq M$ vardır. Bu durumda $K + L + U = M$ ve $K \ll M$ olduğundan $L + U = M$ dir. $K + L + U = M$ eşitliğinin N ile arakesiti alınırsa, Teorem 2.2.10 dan $N = L + (U \cap N) = L$ olur. O halde $K \ll N$ elde edilir.

v) N, M nin bir direkt toplam terimi olduğundan $M = N \oplus K$ olacak şekilde $K \leq M$ vardır. Buradan $M = N + K$ ve $N \ll M$ olduğundan $K = M$ elde edilir. Ayrıca $N \cap K = 0$ ve $K = M$ olduğundan $N = N \cap M = 0$ bulunur.

vi) M/N sonlu üretilmiş olsun. Bu takdirde $M = N + K$ olacak şekilde sonlu üretilmiş $K \leq M$ vardır. Buradan $N \ll M$ olduğundan $K = M$ elde edilir. Dolayısıyla M sonlu üretilmiştir.

2.4.3 Tanım M modülünün N alt modülünün sıfırdan farklı her alt modül ile kesişimi sıfırdan farklı ise, diğer bir deyişle; her $U \leq M$ için $N \cap U = 0$ olması $U = 0$ olmasını gerektiriyorsa, N alt modülüne M nin **büyük alt modülü** denir ve $N \trianglelefteq M$ ile gösterilir [3].

Tanım 2.4.3 den sıfırdan farklı her M modülü için $M \trianglelefteq M$ olduğu açıktır.

Tanım 2.4.3 e denk olarak; bir M R-modülünün $N \leq M$ alt modülü verildiğinde $N \trianglelefteq M$ için gerek ve yeter koşul $\forall\, 0 \neq m \in M$ için $0 \neq mr \in N$ olacak şekilde $r \in R$ elemanına sahip olmasıdır.

$\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ modülünde sıfırdan farklı her alt modül büyüktür. Gerçekten, sıfırdan farklı her $m, n \in \mathbb{Z}$ için $0 \neq mn \in m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$ olduğundan $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} \neq 0$ dır.

M modülünün sıfırdan farklı her alt modülü M de büyükse, M modülüne **düzgün modül** denir [6].

2.4.4 Önerme M bir modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

i) M düzgün modüldür.

ii) M nin sıfırdan farklı her alt modülü parçalanamazdır [6].

İspat $(\mathbf{i}) \Rightarrow (\mathbf{ii})$ M nin sıfırdan farklı bir N alt modülü için $N = U \oplus V$ olsun. O halde $U \cap V = 0$ dır ve M düzgün modül olduğundan $U = 0$ veya $V = 0$ olur. Bu durumda N parçalanamazdır.

$(\mathbf{ii}) \Rightarrow (\mathbf{i})$ $0 \neq N \leq M$ keyfi alt modülü olsun. Hipotez gereği N alt modülü parçalanamazdır. $K \cap N = 0$ koşulunu sağlayan K alt modülü için $N \oplus K \leq M$ alt modülü verilsin. Hipotez gereği $N \oplus K$ parçalanamazdır. $N \neq 0$ olduğundan $K = 0$ dır. O halde N alt modülü büyük alt modüldür. Sonuç olarak M düzgün modüldür.

2.5 Bir Modülün Radikali

2.5.1 Tanım R bir halka ve M bir R-modül olsun. M modülünün tüm maksimal alt modüllerinin arakesitine M modülünün **radikali** denir ve $Rad(M)$ ile gösterilir. Eğer

M modülünün maksimal alt modülü yoksa $Rad(M) = M$ olarak alınır. $Rad(M) = M$ olan M modülüne **radikal modül** denir [4].

M nin tüm radikal alt modüllerinin toplamı $P(M)$ ile gösterilir.

$\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ modülü maksimal alt modüle sahip olmadığından $Rad(\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ dur. Dolayısıyla $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ radikal modüldür. Ayrıca $P(\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ dir.

2.5.2 Yardımcı Teorem M bir modül olsun. $m \in M$ olmak üzere mR devirli modülünün M nin küçük alt modülü olmaması için gerek ve yeter koşul $m \notin U$ olacak şekilde $U < M$ maksimal alt modülünün olmasıdır [4].

İspat $m \notin U$ olacak şekilde $U < M$ maksimal alt modülünün mevcut olduğunu kabul edelim. Bu takdirde U nun maksimal alt modül olmasından dolayı $U + mR = M$ olup mR, M modülünün küçük alt modülü değildir.

Tersine; mR devirli alt modülünün M modülünün küçük alt modülü ve $X = \{N < M \mid N + mR = M\}$ olsun. Hipotezden $X \neq \emptyset$ dir. X kapsama bağıntısına göre kısmen sıralı bir kümedir. Y, X kümesinin tam sıralı bir alt kümesi olsun. $Y_0 = \bigcup_{K \in Y} K$, Y kümesinin bir üst sınırı olup $m \notin Y_0$ dır. Şayet $m \in Y_0$ olsa bir $K \in Y$ için $m \in K$ olup $K = K + mR = M$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $Y_0 < M$ dir. Ayrıca her $K \in Y$ için $K + mR = M$ olduğundan $Y_0 + mR = M$ eşitliğinden $Y_0 \in X$ bulunur. Buradan da Y, X kümesinde bir üst sınıra sahip olup Zorn Yardımcı Teoreminden X kümesi bir U maksimal elemanını içerir. $U < V \leq M$ keyfi olsun. Buradan $U + mR = M$ olduğundan $V + mR = M$ bulunur. Diğer taraftan U, X kümesinin maksimal elemanı olduğundan $V \notin X$ dir. Dolayısıyla X kümesinin tanımından dolayı $V = M$ olup U alt modülü M modülünün maksimal alt modülü bulunur.

2.5.3 Sonuç $m \in M$ olmak üzere $mR \ll M$ olması için gerek ve yeter koşul $m \in Rad(M)$ olmasıdır [4].

Sonuç 2.5.3 den $Rad\ (\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}) = 0$ dır.

2.5.4 Teorem Bir M modülü için $Rad(M) = \sum_{K \ll M} K$ dır [1].

İspat $m \in Rad(M)$ keyfi elemanı verilsin. Bir önceki sonuçtan $mR \ll M$ olup $m \in mR \subseteq \sum_{K \ll M} K$ dir.

Tersine; $m \in \sum_{K \ll M} K$ keyfi elemanı verilsin. Kabul edelim ki; N, M de keyfi bir maksimal alt modül olmak üzere $m \notin N$ olsun. Bu durumda $M = mR + N$ yazılır. $m \in \sum_{K \ll M} K$ olduğundan $m = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ olacak şekilde $K_i \ll M$ $(i = 1,2, \ldots n)$ alt modülleri vardır. Buradan $mR = (k_1 + k_2 + \cdots + k_n)R = k_1R + k_2R + \cdots + k_nR \subseteq K_1 + K_2 + \cdots + K_n$ elde edilir. Ayrıca Önerme 2.4.1 ii) ve i) den $K_1 + K_2 + \cdots + K_n \ll M$ ve $mR \ll M$ bulunur. $M = mR + N$ ve $mR \ll M$ olduğundan $M = N$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $\sum_{K \ll M} K \subseteq Rad(M)$ olup $Rad(M) = \sum_{K \ll M} K$ elde edilir.

2.5.5 Yardımcı Teorem M bir R-modül olsun. I indis kümesi olmak üzere her $i \in I$ için N_i R-modülleri M modülünün $N \leq M$ alt modülünü kapsayan alt modülleri olsun. Bu takdirde $\bigcap_{i \in I} (N_i/N) = (\bigcap_{i \in I} N_i)/N$ dir [1].

İspat $m + N \in \bigcap_{i \in I} (N_i/N)$ keyfi elemanı verilsin. Buradan $\forall i \in I$ için $m + N \in N_i/N$ olup $m \in N_i$ dir. Böylece $m \in \bigcap_{i \in I} N_i$ olur ki $m + N \in (\bigcap_{i \in I} N_i)/N$ elde edilir. Ters kapsama benzer şekilde işlem yapılarak gösterilebilir.

2.5.6 Teorem (Radikalin Özellikleri)

M bir modül olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler vardır;

i) $Rad(M/Rad(M)) = 0$ dır.

ii) $N \leq M$ ise, $Rad(N) \leq Rad(M)$ dir.

iii) K bir R-modül olmak üzere her $f \in Hom\,(M, K)$ için $f\big(Rad(M)\big) \leq Rad(K)$ dır. Eğer $Çek(f) \leq Rad(M)$ ise, $f\big(Rad(M)\big) = Rad(f(M))$ dir. Özel olarak her $f \in End(M)$ için $f(Rad(M)) \leq Rad(M)$ dir.

iv) $N \leq M$ olmak üzere $(N + Rad(M))/N \leq Rad(M/N)$ ve $N \leq Rad(M)$ ise $Rad(M/N) = Rad(M)/N$ dir.

v) $M = \oplus_{i \in I} M_i$ ise, $Rad(M) = \oplus_{i \in I} Rad(M_i)$ ve $M/Rad(M) \cong \oplus_{i \in I}(M_i/Rad(M_i))$ dir.

vi) M modülünün radikal modül olması için gerek ve yeter koşul M nin her sonlu üretilmiş N öz alt modülü için $N \ll M$ olmasıdır.

vii) M sonlu üretilmiş ise, $Rad(M) \ll M$ dir [4].

viii) $N \leq K \leq M$ için $N \subseteq Rad(M)$ ve K, M nin direkt toplam terimi ise, $N \subseteq Rad(K)$ dır.

İspat **i)** Önerme 2.2.29 gereğince M modülünün maksimal alt modülleri ile $M/Rad(M)$ bölüm modülünün maksimal alt modülleri arasında birebir eşleme vardır. X, M nin tüm maksimal alt modüllerinin kümesi olmak üzere $M/Rad(M) = \bigcap_{U \in X}(U/Rad(M))$ olup Yardımcı Teorem 2.5.5 den $M/Rad(M) = \bigcap_{U \in X}(U/Rad(M)) = (\bigcap_{U \in X} U)/Rad(M) = Rad(M)/Rad(M) = 0$ elde edilir.

ii) $N \leq M$ ve $m \in Rad(N)$ olsun. Bu takdirde Sonuç 2.5.3 den $mR \ll N$ olup Önerme 2.4.2 i) den $mR \ll M$ elde edilir. Tekrar Sonuç 2.5.3 den $m \in Rad(M)$ olup $Rad(N) \leq Rad(M)$ bulunur.

iii) $m \in Rad(M)$ ise Sonuç 2.5.3 den $mR \ll M$ olup Önerme 2.4.2 iii) den $f(mR) = f(m)R \ll f(M)$ elde edilir. Dolayısıyla $f(m) \in Rad(f(M))$ olup $f(Rad(M)) \leq Rad(f(M))$ elde edilir. $Çek(f) \leq Rad(M)$ olsun. $f(m) \in Rad(f(M))$ keyfi elemanı verilsin. Sonuç 2.5.3 den $f(m)R \ll f(M)$ dir. Kabul edelim ki $m \notin Rad(M)$ olsun. Bu takdirde Yardımcı Teorem 2.5.2 den dolayı $mR + K = M$ olacak şekilde M modülünün K maksimal alt modülü vardır. Buradan

$f(M) = f(m)R + f(K)$ olup $f(m)R \ll f(M)$ olduğundan $f(M) = f(K)$ dır. Buradan $M = K + Çek(f)$ olup $Çek(f) \leq Rad(M) \leq K$ olduğundan $M = K$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $m \in Rad(M)$ den $f(m) \in f\big(Rad(M)\big)$ dir. Sonuç olarak $f\big(Rad(M)\big) = Rad\big(f(M)\big)$ bulunur.

iv) $\pi: M \longrightarrow M/N$ doğal homomorfizması verilsin. Buradan $Çek(\pi) = N$ dir. iii) den $Çek(\pi) \leq Rad(M)$ olup tekrar iii) uygulanırsa $\pi\big(Rad(M)\big) = (Rad(M) + N)/N = Rad(M)/N = Rad(\pi(M)) = Rad(M/N)$ bulunur.

v) Her $i \in I$ için $M_i \leq M$ olmak üzere ii) den $Rad(M_i) \leq Rad(M)$ olup $\bigoplus_{i \in I} Rad(M_i) \leq Rad(M)$ dir. Tersine; $m \in Rad(M)$ keyfi elemanı için Sonuç 2.5.3 den $mR \ll M$ olup $m = m_{i_1} + m_{i_2} + \cdots + m_{i_k}$ olacak şekilde $j \in \{1,2, \dots, k\}$ olmak üzere $m_{i_j} \in M_{i_j}$ elemanları vardır. Buradan $m_{i_j}R \leq mR$ olup Önerme 2.4.2 i) den $m_{i_j}R \ll M$ dir. M_{i_j} modülleri M modülünün direkt toplam terimi olduğundan Önerme 2.4.2 iv) den $m_{i_j}R \ll M_{i_j}$ elde edilir. Sonuç 2.5.3 den dolayı $m_{i_j} \in Rad(M_{i_j})$ olup $m \in \bigoplus_{i \in I} Rad(M_i)$ dir. Sonuç olarak $\bigoplus_{i \in I} Rad(M_i) = Rad(M)$ dir. Ayrıca her $(m_i)_{i \in I} \in M$ için $f(\,(m_i)_{i \in I}\,) = \sum_{i \in I}\big(m_i + Rad(M_i)\big)$ ile tanımlı $f: M \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} (M_i/Rad(M_i))$ dönüşümü epimorfizmadır ve $Çek(f) = Rad(M)$ dir. Homomorfizma Teoreminden $M/Rad(M) \cong \bigoplus_{i \in I}(M_i/Rad(M_i))$ elde edilir.

vi) $M = Rad(M)$ ise, her $m \in M$ için $mR \ll M$ olur. Buradan Önerme 2.4.2 ii) den M modülünün sonlu üretilmiş her N öz alt modülü için $N \ll M$ dir. Tersi Sonuç 2.5.3 den açıktır.

vii) $Rad(M)$, M de küçük olmasın. Bu durumda $M = Rad(M) + K$ olacak şekilde M nin K öz alt modülü vardır. M sonlu üretilmiş olduğundan her öz alt modülü bir maksimal alt modülde kapsanır ve bu maksimal alt modül U olsun. Böylece $Rad(M) \leq U$ ve $K \leq U$ olup $M = Rad(M) + K = U$ çelişkisi elde edilir. Böylece $Rad(M) \ll M$ dir.

viii) $n \in N$ keyfi olsun. $N \subseteq Rad(M)$ olduğundan $nR \ll M$ dir. K, M nin direkt toplam terimi olduğundan $M = K \oplus K'$ olacak şekilde $K' \leq M$ vardır. $nR \subseteq N \subseteq K$ olduğundan Önerme 2.4.2 v) den $nR \ll K$ dır. Sonuç 2.5.3 den $N \subseteq Rad(K)$ bulunur.

2.5.7 Önerme M bir modül olsun. Eğer M modülünün her öz alt modülü bir maksimal alt modülde kapsanıyorsa, $Rad(M) \ll M$ dir [1].

İspat $M = Rad(M) + L$ olacak şekilde keyfi bir $L < M$ öz alt modülü için, hipotez gereği $L \leq U$ olacak şekilde M modülünün bir U maksimal alt modülü vardır. $L \leq U$ ve $Rad(M) \leq U$ olduğundan $M = Rad(M) + L \leq U$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $L = M$ olup $Rad(M) \ll M$ dir.

2.5.8 Tanım M bir modül olsun. Eğer M modülünün her öz alt modülü bir maksimal alt modülde kapsanıyorsa, M modülüne **eş-atom modül** denir [4].

2.5.9 Teorem M modülünün eş-atom modül olması için gerek ve yeter koşul $Rad(M/U) = M/U$ koşulunu sağlayan her $U \leq M$ için $U = M$ olmasıdır [29].

2.5.10 Teorem M bir R −modül olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler vardır.

i) Sonlu üretilmiş modüller eş-atomdur.

ii) $U \leq Rad(M)$ ve U eş-atom ise, $U \ll M$ dir.

iii) M eş-atom ve $N \leq M$ ise, M/N eş-atomdur.

iv) M eş-atom ise, $Rad(M) \ll M$ dir [4].

İspat **i)** Sonlu üretilmiş modüllerin her öz alt modülü bir maksimal alt modülde kapsandığından sonlu üretilmiş modüller eş-atomdur.

ii) Kabul edelim ki U alt modülü M de küçük olmasın. Bu takdirde $M = U + K$ olacak şekilde M nin K öz alt modülü vardır. Buradan $U \cap K \neq U$ olduğu açıktır. U eş-atom olduğundan U nun $U \cap K$ öz alt modülü bir $L < U$ maksimal alt modülü tarafından kapsanır. Böylece $U/_L$ basit modüldür. 1. İzomorfizma teoremi gereğince $M/_{K+L} = {U+K}/_{K+L} \cong U/_L$ olduğundan $K + L$ alt modülü M de maksimal alt modüldür. $U \leq Rad(M) \leq K + L$ olduğundan $M = K + L$ çelişkisi elde edilir. Kabulümüz yanlıştır. O halde $U \ll M$ dir.

iii) M eş-atom olsun. $M/_N$ bölüm modülünün herhangi bir $K/_N$ öz alt modülü için $N \leq K < M$ yazılabilir. M eş-atom olduğundan $K \leq U$ olacak şekilde M nin U maksimal alt modülü vardır. Ayrıca Önerme 2.2.29 dan M modülü ile $M/_N$ bölüm modülünün maksimal alt modülleri arasında birebir eşleme olduğundan $U/_N$ bölüm modülü $M/_N$ de maksimal alt modüldür. Sonuç olarak $K/_N \leq U/_N$ olduğundan $M/_N$ eş-atomdur.

iv) $M = Rad(M) + K$ olacak şekilde M nin K alt modülü verilsin. Buradan $Rad\left(M/_K\right) = M/_K$ dır. iii) den $M/_K$ eş-atom modüldür. Ayrıca $M/_K$ radikal olduğundan $K = M$ bulunur. Dolayısıyla $Rad(M) \ll M$ dir.

2.6 Kategori, Funktor ve Funktorun Tamlığı

2.6.1 Tanım Bir $\mathcal{K}$ kategorisi

i) $Ob(\mathcal{K})$ nesneler sınıfından;

ii) Her sıralı (A, B) nesneler çifti için, $Mor_{\mathcal{K}}(A, B)$ morfizmalar kümesinden (farklı $(A, B), (C, D)$ çiftleri için $Mor_{\mathcal{K}}(A, B) \cap Mor_{\mathcal{K}}(C, D) = \emptyset$ olmak üzere);

iii) $f \in Mor_{\mathcal{K}}(A,B),\ g \in Mor_{\mathcal{K}}(B,C)$ olmak üzere her (g,f) çiftine bunların bileşkesi denilen $g \circ f \in Mor_{\mathcal{K}}(A,C)$ morfizmasını karşı getiren $Mor_{\mathcal{K}}(B,C) \times Mor_{\mathcal{K}}(A,B) \longrightarrow Mor_{\mathcal{K}}(A,C)$ fonksiyonlarından oluşur, öyle ki:

a) Her A,B,C,D nesneleri ve $f \in Mor_{\mathcal{K}}(A,B),\ g \in Mor_{\mathcal{K}}(B,C), h \in\ Mor_{\mathcal{K}}(C,D)$ morfizmaları için $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ eşitliği sağlanır.

b) Her $A \in Ob(\mathcal{K})$ nesnesinin, her $f \in Mor_{\mathcal{K}}(A,B), g \in Mor_{\mathcal{K}}(B,A)$ için

$f \circ I_A = f,\ I_A \circ g = g$ eşitliklerini gerçekleyen bir $I_A \in Mor_{\mathcal{K}}(A,A)$ birim (idantik) morfizması vardır [3].

Aşağıda bazı kategori örneklerine yer verilmiştir.

i) Set kategorisinin nesneleri tüm kümelerdir. $Mor_{Set}(A,B)$, A kümesinden B kümesine olan tüm fonksiyonlardan oluşur ve morfizmaların bileşkesi fonksiyonların alışılmış bileşkeleridir.

ii) R birimli halka olsun. $Mod - R$ kategorisinin nesneleri tüm sağ R-modüller, morfizmaları modül homomorfizmaları olmak üzere $Mor_{Mod-R}(M,N) = Hom_R(M,N)$ ve bileşkeleri, homomorfizmaların alışılmış bileşkeleridir.

iii) Ab kategorisi abel gruplarından, bunların homomorfizmalarından ve alışılmış bileşkelerinden oluşur. Burada $Mor_{Ab}(A,B) = Hom(A,B)$ [3].

2.6.2 Tanım $\mathcal{K}$ ve $\mathcal{M}$ kategoriler olsun. Bir **kovaryant** $F: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{M}$ **funktoru**, $\mathcal{K}$ nın her A nesnesine $\mathcal{M}$ nin bir $F(A)$ nesnesini, $\mathcal{K}$ daki her $f \in Mor_{\mathcal{K}}(A,B)$ morfizmasına bir $F(f) \in Mor_{\mathcal{M}}(F(A),F(B))$ morfizmasını karşı getiren ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir kuraldır:

1) $f \in Mor_{\mathcal{K}}(A,B),\ g \in Mor_{\mathcal{K}}(B,C)$ ise, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ dir.

2) Her $A \in Ob(\mathcal{K})$ için $F(I_A) = I_{F(A)}$ dır [3].

2.6.3 Tanım $\mathcal{K}$ ve $\mathcal{M}$ kategoriler olsun. Bir **kontravaryant** $F: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{M}$ **funktoru**, $\mathcal{K}$ nın her A nesnesine $\mathcal{M}$ nin bir $F(A)$ nesnesini, $\mathcal{K}$ daki her $f \in Mor_{\mathcal{K}}(A,B)$ morfizmasına bir $F(f) \in Mor_{\mathcal{M}}(F(B),F(A))$ morfizmasını karşı getiren ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir kuraldır:

i) $f \in Mor_{\mathcal{K}}(A,B),\ g \in Mor_{\mathcal{K}}(B,C)$ ise, $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ dir.

ii) Her $A \in Ob(\mathcal{K})$ için $F(I_A) = I_{F(A)}$ dır [3].

2.6.4 Tanım $\mathcal{K}$ kategorisinde Her $A,B \in Ob(\mathcal{K})$için $Mor_{\mathcal{K}}(A,B)$ kümesinde bir abel grup yapısı verilmiş ve her $f,g: A \longrightarrow B$, $h,k: B \longrightarrow C$ için $h \circ (f+g) = h \circ f + h \circ g$ ve $(h+k) \circ f = h \circ f + k \circ f$ ise, $\mathcal{K}$ ya **önadditif kategori** denir.

$Mod - R$ ve Ab kategorileri önadditif kategorilerdir [3].

2.6.5 Tanım $\mathcal{K}$ ve $\mathcal{K}'$ önadditif kategoriler ise, her $f,g: A \longrightarrow B$ morfizmaları için $F(f+g) = F(f) + F(g)$ koşulunu gerçekleyen $F: \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'$ funktoruna **additif funktor** denir [3].

2.6.6 Tanım Bir $F: Mod - R \longrightarrow Ab$ additif kovaryant funktorunu alalım.

a) $\ldots \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \ldots$ tam dizisi için $\ldots \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \longrightarrow \ldots$ dizisi tamsa F ye **tam funktor** denir.

b) Her $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ tam dizisi için $0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$ dizisi tamsa F ye **soldan tam funktor** denir.

c) Her $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ tam dizisi için $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \longrightarrow 0$ dizisi tamsa F ye **sağdan tam funktor** denir.

Benzer şekilde kontravaryant funktorlar için de tamlık kavramları tanımlanabilir [3].

2.6.7 Tanım A ve B sağ R-modüller olsun. $f, g \in Hom(A, B)$ homomorfizmalarının $f + g$ toplamını her $a \in A$ için $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ olarak, $0 : A \longrightarrow B$ homomorfizmasını her $a \in A$ için $0(a) = 0$ olarak ve bir $f : A \longrightarrow B$ homomorfizması verildiğinde $-f : A \longrightarrow B$ homomorfizmasını ise, $(-f)(a) = -f(a)$ olarak tanımlansın. $f + g, 0, -f \in Hom(A, B)$ olduğu ve $(f + g) + h = f + (g + h)$, $f + g = g + f$ eşitlikleri kolayca kontrol edilir. Böylece $Hom(A, B)$ bir abel grup yapısına sahiptir. Bu gruba **homomorfizmalar grubu** denir. Kategori dilinde $Hom_R(A, B) = Mor_{Mod-R}(A, B)$ dir. $h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g$ ve $(h + k) \circ f = h \circ f + k \circ f$ eşitlikleri sağlandığından Mor-R bir önadditif kategoridir. $f : B \longrightarrow C$ bir homomorfizma ise, $f_* : Hom(A, f) : Hom(A, B) \longrightarrow Hom(A, C)$ fonksiyonu $f_*(g) = f \circ g$ şeklinde tanımlansın. $f \circ g$ bir homomorfizmadır. Dolayısıyla $f \circ g \in Hom(A, C)$ olup $f_*(g + h) = f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h = f_*(g) + f_*(h)$ olduğundan f_* homomorfizmadır. Ayrıca $Hom(A, f + h)(g) = (f + h) \circ g = f \circ g + h \circ g = Hom(A, f)(g) + Hom(A, h)(g) = \big(Hom(A, f) + Hom(A, h)\big)(g)$ den $Hom(A, \cdot) : Mor$-$R \longrightarrow Ab$ bir kovaryant funktordur. Benzer şekilde $f : A \longrightarrow C$ homomorfizması için $f^* = Hom(f, B) : Hom(C, B) \longrightarrow Hom(A, B)$ homomorfizması $f^*(g) = g \circ f$ ile tanımlanırsa $Hom(\cdot, B) : Mor$- $R \longrightarrow Ab$ kontravaryant additif funktoru elde edilir [7].

2.6.8 Teorem Her M modülü için $Hom(M, \cdot)$ soldan tam kovaryant ve $Hom(\cdot, M)$ de soldan tam kontravaryant funktordur [3].

İspat $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ tam dizi olsun. $0 \longrightarrow Hom(M, A) \xrightarrow{f_*} Hom(M, B) \xrightarrow{g_*} Hom(M, C)$ dizisi verilsin. $h \in Çek(f_*)$ keyfi elemanı verilsin. $\forall m \in M$ için $f\big(h(m)\big) = (f \circ h)(m) = f_*(h)(m) = 0(m) =$

0 ve f monomorfizma olduğundan $h(m) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $h = 0$ ve $Çek(f_*) = 0$ olup f_* bir monomorfizmadır. $u \in Gör(f_*)$ keyfi elemanı verilsin. Bu durumda $u = f_*(v) = f \circ v$ olacak şekilde bir $v \in Hom(M, A)$ bulunur ve $g_*(u) = g_*(f \circ v) = g \circ f \circ v = 0 \circ v = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $u \in Çek(g_*)$ ve $Gör(f_*) \subseteq Çek(g_*)$ olur.

Ters kapsama için keyfi bir $u \in Çek(g_*)$ verilsin. O halde $g \circ u = g_*(u) = 0$ dır ve

$$\begin{tikzcd} & & M \arrow[dl, dashed, "s"'] \arrow[d, "u"] & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Diyagramında $u = f \circ s = f_*(s) \in Gör(f_*)$ olacak şekilde bir $s \in Hom(M, A)$ homomorfizması bulunur. Dolayısıyla $Çek(g_*) \subseteq Gör(f_*)$ dır. Böylece $Hom(M, \cdot)$ kovariant fuktoru soldan tamdır.

Tersine $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ tam dizisi verilsin. $u \in Çek(g^*)$ keyfi olsun. Her $c \in C$ için g epimorfizma olduğundan $g(b) = c$ olacak şekilde bir $b \in B$ bulunduğundan $u(c) = (u \circ g)(b) = g^*(u)(b) = 0(b) = 0$ elde edilir. Böylece $u = 0$ ve $Çek(g^*) = 0$ dır yani g^* monomorfizmadır. Dolayısıyla $0 \longrightarrow Hom(C, M) \xrightarrow{g^*} Hom(B, M) \xrightarrow{f^*} Hom(A, M)$ dizisi tam olup $Hom(. , M)$ soldan tamdır. $u \in Gör(g^*)$ keyfi olsun. Bu durumda $v = g^*(u) = u \circ g$ olacak şekilde bir $u \in Hom(C, M)$ bulunur ve $f^*(v) = f^*(u \circ g) = u \circ g \circ f = u \circ 0 = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $u \in Çek(f^*)$ ve $Gör(g^*) \subseteq Çek(f^*)$ olur. $v \in Çek(f^*)$ keyfi olsun. O halde $v \circ f = f^*(v) = 0$ dır ve

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"'] & C \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "s"] & 0 \\ & M & & \end{tikzcd}$$

diyagramında $v = s \circ g = g^*(s) \in Gör(g^*)$ olacak şekilde bir $s \in Hom(C, M)$ homomorfizması bulunur. Dolayısıyla $Çek(f^*) \subseteq Gör(g^*)$ dır. Sonuç olarak $Çek(f^*) = Gör(g^*)$ elde edilir. Böylece $Hom(\,\cdot\,, M)$ kovariant funktoru soldan tamdır [3].

2.7 Projektif, İnjektif Modüller ve İnjektif Bürüm

2.7.1 Tanım M, N ve P üç tane R-modül olsun. Satır tam dizi olmak üzere eğer aşağıdaki diyagram değişmeli ise P modülüne ***M*-projektiftir** denir.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] & \\ M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Bir başka deyişle yukarıdaki diyagramda f epimorfizma olmak üzere f, g homomorfizmaları için $g = f \circ h$ olacak şekilde bir $h: P \longrightarrow M$ homomorfizması bulunursa, P ye ***M*-projektiftir** denir. Eğer bu diyagramdaki $M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$ satır tam dizisi keyfi alınırsa P ye **projektiftir** denir [3].

2.7.2 Teorem $\{P_k \mid k \in K\}$ bir modüller topluluğu olsun. $P = \oplus_{k\in K} P_k$ direkt toplam teriminin projektif olması için gerek ve yeter koşul her $k \in K$ için P_k nın projektif olmasıdır [3].

İspat $(\Rightarrow)$ $P = \oplus_{k\in K} P_k$ projektif olsun. Keyfi $f: A \longrightarrow B$ epimorfizmasını ve $g: P_k \longrightarrow B$ homomorfizmasını alalım. $p_k: P \longrightarrow P_k$, k. izdüşüm ve $i_k: P_k \longrightarrow P$, içerme homomorfizması olsun. P projektif olduğundan $g \circ p_k: P \longrightarrow B$ homomorfizması için $g \circ p_k = f \circ h$ olacak şekilde bir $h: P \longrightarrow A$ homomorfizması bulunur. $e: P_k \longrightarrow A$ homomorfizması $e = h \circ i_k$ olarak tanımlanırsa,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r] & 0 \\ & P_k \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, dashed, "e"'] \\ & P \arrow[u, "p_k"'] \arrow[uul, dashed, "h"] \end{tikzcd}$$

$f \circ e = f \circ h \circ i_k = g \circ p_k \circ i_k = g \circ I_{P_k} = g$ dir. Böylece P_k projektiftir.

($\Leftarrow$) Keyfi $f: A \longrightarrow B$ epimorfizmasını ve keyfi $g: P \longrightarrow B$ homomorfizması verilsin. Her $k \in K$ için P_k projektif olduğundan $g \circ i_k: P_k \longrightarrow B$ homomorfizması için $g \circ i_k = f \circ g \circ h_k$ olacak şekilde bir $h_k: P_k \longrightarrow A$ homomorfizması bulunur.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r] & 0 \\ & P \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, dashed, "h"'] \\ & P_k \arrow[u, "i_k"'] \arrow[uul, dashed, "h_k"] \end{tikzcd}$$

Her $k \in K$ için $h_k = h \circ i_k$ olacak şekilde bir $h: P \longrightarrow A$ homorfizması vardır. Bu durumda her $k \in K$ için $g \circ i_k = f \circ h_k = f \circ h \circ i_k$ eşitliği elde edilir. Buradan $g = f \circ h$ bulunur. Böylece $P = \bigoplus_{k \in K} P_k$ projektif modüldür.

2.7.3 Teorem Her F serbest modülü projektiftir [3].

2.7.4 Teorem Her M R-modülü için F serbest olmak üzere bir $f: F \longrightarrow M$ epimorfizması vardır [3].

2.7.5 Teorem Bir P modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:

i) P projektiftir.

ii) $Hom(P,\ \cdot\ )$ tam funktordur.

iii) $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow P \longrightarrow 0$ şeklindeki her kısa tam dizi parçalanabilirdir.

iv) P bir serbest modülün direkt toplam terimine izomorftur [3].

İspat $(\mathbf{i}) \Rightarrow (\mathbf{ii})$ $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ tam dizisi verilsin. $0 \longrightarrow Hom(P,A) \xrightarrow{f_*} Hom(P,B) \xrightarrow{g_*} Hom(P,C) \longrightarrow 0$ dizisinin tam olduğunu göstermek için g_* ın epimorfizma olduğunu göstermemiz yeterlidir. Teorem 2.6.8 den $Hom\ (P,\ \cdot\ )$ funktoru soldan tamdır. $s \in Hom(P,C)$ olsun. P projektif olduğundan

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] & C \arrow[r] & 0 \\ & P \arrow[u, "s"'] \arrow[ul, dashed, "t"] & \end{tikzcd}$$

diyagramı bir $t: P \longrightarrow B$ homomorfizması ile değişmeli üçgene tamamlanabilir. O halde $s = g \circ t = g_*(t)$ olacak şekilde bir $t \in Hom(P,B)$ bulunur. Dolayısıyla g_* epimorfizmadır.

$(\mathbf{ii}) \Rightarrow (\mathbf{iii})$ $Hom(P,\ \cdot\ )$ funktoru $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ dizisine uygulanırsa $0 \longrightarrow Hom(P,A) \xrightarrow{f_*} Hom(P,B) \xrightarrow{g_*} Hom(P,P) \longrightarrow 0$ tam dizisi elde edilir. O halde g_* epimorfizmadır ve dolayısıyla $I_P \in Hom(P,P)$ için $g \circ u = g_*(u) = I_P$ olacak şekilde bir $u \in Hom(P,B)$ bulunur. Buradan, $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ dizisi Teorem 2.2.27 den dolayı parçalanabilirdir.

$(\mathbf{iii}) \Rightarrow (\mathbf{iv})$ Teorem 2.7.4 den dolayı F serbest modülü için $f: F \longrightarrow P$ epimorfizması bulunur. Hipotezden i içerme homomorfizması olmak üzere $0 \longrightarrow Çek(f) \xrightarrow{i} F \xrightarrow{f} P \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi de parçalanabilirdir. Teorem 2.2.27 den $F \cong Çek(f) \oplus P$ izomorfizması elde edilir. Sonuç olarak P bir serbest modülün direkt toplam terimine izomorftur.

(iv) $\Rightarrow$ **(i)** Teorem 2.2.27 ve Teorem 2.7.3 den dolayı serbest modülün direkt toplam terimi bir projektif modüldür.

2.7.6 Tanım M bir R-modül olsun. M modülü M-projektif ise **hemen hemen projektif** denir. Her alt modülü projektif olan M modülüne **kalıtsal modül** denir [6].

2.7.7 Önerme E bir R-modül olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

i) R-modül homomorfizmalarının keyfi bir $0 \to A \to B$ tam dizisi için aşağıdaki diyagramı değişmeli kılacak şekilde bir $B \to E$ R-modül homomorfizması olmasıdır.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[dl, dashed] \\ & E & \end{tikzcd}$$

ii) I, R nin keyfi bir sol ideali olmak üzere keyfi $0 \to I \to R$ tam dizisi için aşağıdaki diyagramı değişmeli kılacak şekilde bir $R \to E$ R-modül homomorfizmasının olmasıdır.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[dl, dashed] \\ & E & \end{tikzcd}$$

iii) R-modül homomorfizmalarının keyfi bir $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi için $0 \longrightarrow Hom_R(C, E) \longrightarrow Hom_R(B, E) \longrightarrow Hom_R(A, E) \longrightarrow 0$ dizisi tamdır [7].

2.7.8 Tanım Yukarıda birbirine denk olan üç koşuldan herhangi birini sağlayan E R-modülüne **injektif** denir. Bir $\mathbb{Z}$-modül olarak injektif olan abel gruba **injektif grup** denir [7].

D bölme halkasının 0 ve kendisinden başka sol ideali olmadığından Önerme 2.7.7 (ii) deki koşulları D üzerindeki her bir modül sağlar. Dolayısıyla bir bölme halkası üzerindeki her modül injektiftir. Bu yüzden cisim üzerindeki vektör uzayları da modül yapısına sahip olduğundan injektiftir. Aşikar olarak, 0 injektiftir [8].

2.7.9 Önerme $\{ E_i \}_{i \in I}$ R-modüllerin bir ailesi olsun. Bu taktirde

1. Eğer $\oplus_{i\in I} E_i$ injektif ise, her $i \in I$ için E_i ler injektiftir.
2. Eğer I sonlu bir indis kümesi ve her $i \in I$ için E_i ler injektif ise, $\oplus_{i\in I} E_i$ injektiftir [8].

2.7.10 Yardımcı Teorem Her abel grup bir injektif abel grup içine gömülebilirdir [8].

2.7.11 Yardımcı Teorem: R bir halka, G injektif abel grup olsun. Bu takdirde $Hom_Z(R,G)$ injektif R-modüldür [8].

2.7.12 Yardımcı Teorem E R-modülü, $Hom_Z(R,E)$ R-modülü içine gömülebilirdir [8].

2.7.13 Teorem Her R-modül bir injektif R-modül içine gömülebilirdir [8].

İspat E R-modül olsun. Bu takdirde E abel gruptur. Yardımcı Teorem 2.7.10 gereğince E bir E' injektif abel grubu içine gömülebilirdir. Dolayısıyla bir

$\phi : E \longrightarrow E'$ monomorfizması vardır. $0 \longrightarrow E \xrightarrow{\phi} E'$ tam dizisi için Teorem 2.6.8 gereğince $0 \longrightarrow Hom_Z(R,E) \xrightarrow{\Psi} Hom_Z(R,E')$ dizisi tamdır. ψ bir $\mathbb{Z}$-modül monomorfizması olduğundan $Hom_Z(R,E)$, $Hom_Z(R,E')$ içine gömülebilirdir. Yardımcı Teorem 2.7.12 den E; $Hom_Z(R,E)$ içine gömülebilirdir. Buradan monomorfizmaların bir $E \longrightarrow Hom_Z(R,E) \longrightarrow Hom_Z(R,E')$ dizisi elde edilir. Burada E' injektif olduğundan $Hom_Z(R,E')$ bir injektif R-modüldür. Böylece E injektif $Hom_Z(R,E')$ R-modülü içine gömülebilirdir.

2.7.14 Teorem E R-modül olsun. E modülünün injektif olması için gerek ve yeter koşul E nin her genişlemesinde bir direkt toplam terimi olmasıdır [8].

İspat $(\Rightarrow)$ E injektif ve E modülünün bir genişlemesi E' olsun. Dolayısıyla $i: E \longrightarrow E'$ monomorfizması vardır. E injektif olduğundan

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r, "i"] \arrow[d, "I_E"'] & E' \arrow[dl, "\varphi"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde bir $\varphi : E' \to E$ homomorfizması vardır. $e' \in E'$ keyfi olsun. $\varphi(e') \in E$ dir. Buradan $\varphi(\varphi(e')) = (\varphi i)(\varphi(e')) = I_E(\varphi(e')) = \varphi(e')$ olup $\varphi(e' - \varphi(e')) = 0$ bulunur. Böylece $e' - \varphi(e') \in Çek(\varphi)$ dir. $E \subseteq E'$ ve $Çek(\varphi) \subseteq E'$ olduğundan $E + Çek(\varphi) \subseteq E'$ elde edilir. Dolayısıyla $E' = E + Çek(\varphi)$ dır. $e \in E \cap Çek(\varphi)$ keyfi olsun. Bu takdirde $\varphi(e) = 0$ dır. Buradan $\varphi(e) = \varphi(i(e)) = I_E(e) = e = 0$ yazılır. O halde $E \cap Çek(\varphi) = 0$ dır. Dolayısıyla $E' = E \oplus Çek(\varphi)$ bulunur.

$(\Leftarrow)$ Teorem 2.7.13 gereğince E bir N injektif modülün alt modülüdür. Hipotez gereğince $N = E \oplus K$ olacak şekilde N nin bir K alt modülü vardır. Önerme 2.7.9 gereğince N injektif olduğundan N nin her bir direkt toplam terimi de injektiftir. Sonuç olarak E injektiftir.

2.7.15 Tanım E R-modülü A R-modülünün bir genişlemesi olsun. Eğer E nin sıfırdan farklı her E' alt modülü için $E' \cap A \neq 0$ oluyorsa, E ye A modülünün bir **büyük genişlemesi** denir. Bu tanıma denk olarak; E nin A modülünün büyük genişlemesi olması için gerek ve yeter koşul $\forall 0 \neq e \in E$ için $0 \neq re \in A$ olacak şekilde $r \in R$ elemanının mevcut olmasıdır [8].

2.7.16 Uyarı M bir R-modül olsun. Her $0 \neq m \in M$ için $0 \neq mr \in M$ olacak şekilde $r \in R$ olduğundan her modül kendisinin bir büyük genişlemesidir. $A \subseteq B \subseteq C$ modülleri için aşağıdaki ifadeler denktir.

i) C; A nın bir büyük genişlemesidir.

ii) C; B nin bir büyük genişlemesi ve B; A nın bir büyük genişlemesidir [8].

2.7.17 Teorem E R-modül olsun. E modülünün injektif olması için gerek ve yeter koşul E nin öz büyük genişlemeye sahip olmamasıdır [8].

İspat ($\Rightarrow$) E injektif olsun. E modülünün E' öz büyük genişlemeye sahip olduğunu kabul edelim. Teorem 2.7.14 gereğince E injektif olduğundan her bir genişlemesinin bir direkt toplam terimidir. O halde $E' = E \oplus F$ olacak şekilde E' modülünün bir F alt modülü vardır. Burada $E \neq E'$ olduğundan $F \neq 0$ dır. E' nün $F \neq 0$ alt modülü için $E \cap F = 0$ olduğundan E', E nin bir büyük genişlemesi olamaz. Dolayısıyla E öz büyük genişlemeye sahip değildir.

($\Leftarrow$) E öz büyük genişlemeye sahip olmasın ve F modülü de E nin bir genişlemesi olsun. $E = F$ ise $E = E \oplus 0$ olduğu açıktır. F, E nin bir öz genişlemesi olsun. $E \cap X = 0$ koşulunu sağlayan F nin sıfırdan farklı X alt modüllerinin kümesine Ω diyelim. Hipotez gereğince E öz büyük genişlemeye sahip olmadığından $\Omega \neq \emptyset$ dır.

Ω, $\subseteq$ bağıntısına göre kısmen sıralı bir kümedir. Ψ, Ω nın keyfi bir tam sıralı kümesi olmak üzere $X' = \bigcup_{X \in \Psi} X$, Ω bir üst sınırıdır. Zorn Yardımcı Teoremi gereğince Ω bir X_0 maksimal elemanına sahiptir. $E \subseteq F$ ve $X_0 \subseteq F$ olduğundan $E + X_0 \subseteq F$ dir. $F/X_0 \supseteq E + X_0/X_0 \cong E/E \cap X_0$ yazılır. X_0, Ω nın bir maksimal elemanı olduğundan $E \cap X_0 = 0$ dır. O halde $F/X_0 \supseteq E + X_0/X_0 \cong E/E \cap X_0 \cong E/0 \cong E$ bulunur. $F \neq E + X_0$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde F nin X_0 ı kapsayan alt modülleri ile F/X_0 ın alt modülleri arasında birebir eşleme olduğundan $F/X_0 \supset (E + X_0)/X_0$ yazılır. E öz büyük genişlemeye sahip olmadığından $(E + X_0)/X_0$ öz büyük genişlemeye sahip değildir. Dolayısıyla X_0 ı kapsayan F nin öyle bir Y alt modülü için $Y/X_0 \cap (E + X_0)/X_0 = 0$ yazılır. Dolayısıyla $Y \cap (E + X_0)/X_0 = 0$ olup $Y \cap (E + X_0) = X_0$ bulunur. $Y \cap E \subseteq Y \cap (E + X_0) = X_0$ ve $Y \cap E \subseteq E$ olduğundan $Y \cap E \subseteq E \cap X_0 = 0$ dır. Buradan $Y \cap E = 0$ olup Ω nın tanımı gereğince $Y \in \Omega$ bulunur. Bu ise X_0 ın Ω nın bir maksimal elemanı oluşu ile çelişir. O halde $F = E + X_0$ olmalıdır. $X_0 \in \Omega$ olduğundan $E \cap X_0 = 0$ eşitliğinden $F = E \oplus X_0$ bulunur. Teorem 2.7.14 gereğince E injektiftir.

2.7.18 Tanım E R-modülü A R-modülünün bir genişlemesi olsun. E, A nın bir büyük genişlemesi ve E nin bir E' öz büyük genişlemesi için E', A nın bir büyük genişlemesi olmuyorsa, E ye A nın bir **maksimal büyük genişlemesi** denir [8].

2.7.19 Tanım N R-modülü A R-modülünün bir genişlemesi olsun. Eğer

N injektif ve N nin A yı kapsayan N' öz alt modülü için N' injektif olmuyor ise, N ye A nın bir **minimal injektif genişlemesi** denir [8].

2.7.20 Önerme N R-modül, E, A nın bir genişlemesi olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

i) E, A nın büyük injektif genişlemesidir.

ii) E, A nın maksimal büyük genişlemesidir.

iii) E, A nın minimal injektif genişlemesidir [8].

İspat **(i)$\Rightarrow$(ii)** E; A nın büyük injektif genişlemesi olsun. E injektif olduğundan Teorem 2.7.17 gereğince E öz büyük genişlemeye sahip değildir. Dolayısıyla E, A modülünün bir maksimal büyük genişlemesidir.

(ii)$\Rightarrow$(i) E; A nın maksimal büyük genişlemesi olsun. Bu takdirde E öz büyük genişlemeye sahip olmayıp Teorem 2.7.17 gereğince E injektiftir. Bu yüzden E, A nın büyük injektif genişlemesidir.

(ii)$\Rightarrow$(iii) E, A nın maksimal büyük genişlemesi olsun. Böylece E injektif olup Teorem 2.7.13 gereğince E de kapsanan A nın bir E' injektif genişlemesi vardır. E; A nın büyük genişlemesi olduğundan $A \subseteq E' \subseteq E$ için Uyarı 2.7.16 gereğince E; E' nün büyük genişlemesidir. Ayrıca E' injektif olduğundan Teorem 2.7.17 gereğince E' öz büyük genişlemeye sahip değildir. Dolayısıyla $E = E'$ olmalıdır. E, A nın bir minimal injektif genişlemesidir.

(iii)$\Rightarrow$(ii) E; A nın minimal injektif genişlemesi olsun. Bu durumda E; A nın bir maksimal büyük genişlemesi olan E'' alt modülüne sahiptir. Burada E'' öz büyük genişlemeye sahip olmadığından Teorem 2.7.17 gereğince E injektiftir. E, A nın minimal injektif genişlemesi ve E'', A nın injektif genişlemesi olduğundan $E'' = E$ olup E, A nın bir maksimal büyük genişlemesidir.

2.7.21 Tanım A bir R-modül olsun. Önerme 2.7.20 deki denk koşulları sağlayan E R modülüne A modülünün **injektif bürümü** denir ve $E = E(A)$ ile gösterilir [8].

A injektif olsun. A, A nın bir minimal injektif genişlemesi olduğundan tanım gereğince $E = E(A)$ dır. Örneğin $\mathbb{Q}$ sağ $\mathbb{Z}$-modülünün injektif bürümü $\mathbb{Q}$ olup $E(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ dur.

2.7.22 Önerme E injektif bir R-modül olsun. Bu taktirde aşağıdaki ifadeler denktir.

i) E parçalanamazdır.

ii) $E \neq 0$ dır ve E nin sıfırdan farklı her alt modülünün injektif bürümü E nin kendisidir.

iii) E nin sıfır alt modülü indirgenemezdir.

2.7.23 Sonuç Eğer S basit R-modül ise, $E(S)$ parçalanamazdır.

2.8 Lokal ve Oyuk Modüller

2.8.1 Tanım M sıfırdan farklı bir R-modül olsun. M modülünün her N öz alt modülü için $N \ll M$ ise, M R-modülüne **oyuk modül** denir.

M modülünün bütün öz alt modüllerini içeren bir öz alt modülü varsa, M R-modülüne **lokal modül** denir [1].

Lokal modüller oyuktur. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Örneğin $p \in \mathbb{P}$ asal olmak üzere $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ $\mathbb{Z}$-modülü oyuk modül olup lokal değildir.

2.8.2 Teorem Sıfırdan farklı M modülünün lokal olması için gerek ve yeter koşul M nin sonlu üretilmiş ve bir tek maksimal alt modüle sahip olmasıdır. Bu durumda M nin maksimal alt modülü $Rad(M)$ olup $Rad(M) \ll M$ dir [1].

İspat **(⇒)** M lokal modül ve M nin öz alt modüllerinin toplamı K olsun. $K \neq M$ olduğundan en az bir $m \in M$ vardır öyle ki $m \notin K$ ve $mR \nleq K$ dır. K, M nin öz alt modüllerin toplamı olduğundan $mR = M$ olup M devirlidir. K nın maksimal alt modül olduğu ise, tanımdan açıktır.

(⇐) M devirli ve M bir tek K maksimal alt modülüne sahip olsun. M sonlu üretilmiş olduğundan M nin kendisinden farklı her alt modülü K tarafından kapsanır. Dolayısıyla M nin kendisinden farklı bütün alt modüllerinin toplamı K olup M lokal modüldür. Radikalin tanımı gereği $Rad(M) = K$ olup M devirli olduğundan Teorem 2.5.6 (vii) den dolayı $Rad(M) \ll M$ elde edilir.

2.8.3 Önerme M sıfırdan farklı bir R-modül olsun.

i) M oyuktur gerek ve yeter koşul M nin boştan farklı her bölüm modülü parçalanamazdır.

ii) Aşağıdaki ifadeler denktir.

a) M oyuktur ve $Rad\ (M) \neq M$ dir.

b) M oyuktur ve devirlidir (veya sonlu üretilmiştir).

c) M lokaldir [1].

2.8.4 Tanım R birimli bir halka olsun. R tek bir sol maksimal ideale sahipse R ye **lokal halka** denir [1].

$p \in \mathbb{P}$ asal ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\mathbb{Z}_{p^n}$ halkası lokaldir. Ayrıca her cisim aynı zamanda lokal halkadır.

2.8.5 Önerme R bir halka olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

i) R lokaldir

ii) R bir tek maksimal sol ideale sahiptir.

iii) R nin küçük olan tek bir maksimal sol ideali vardır.

iv) R nin terslenebilir olmayan iki elemanının toplamı terslenebilir değildir.

v) R bir tek maksimal sağ ideale sahiptir.

vi) R nin küçük olan tek bir maksimal sağ ideal vardır [1].

2.9 Artin ve Noether Modüller

2.9.1 Tanım: M bir R-modül olsun. M nin alt modüllerinin $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots$ ($M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots$) şeklindeki her bir azalan (artan) zinciri için öyle bir $m \in \mathbb{Z}^+$ ve $\forall\, n \geq m$ için $M_n = M_m$ oluyorsa M R-modülüne **azalan (artan) zincir koşulunu sağlıyordur** denir.

Azalan zincir koşulunu sağlayan modüle **artin modül** denir [1].

R_R artin modül olan R halkasına **sağ artin halka** denir [1].

2.9.2 Tanım Artan zincir koşulunu sağlayan modüle **noether modül** denir [1].

2.9.3. Önerme R bir halka ve M bir R-modül olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

i) M noether modüldür.

ii) M nin her alt modülü sonlu üretilmiştir.

iii) M nin alt modüllerinin herhangi bir boştan farklı ailesinin bir maksimal elemanı vardır [1].

İspat **(i)⟹(ii)** N, M nin herhangi bir alt modülü olsun ve N alt modülünün sonlu üretilmiş olmadığını kabul edelim. Bu takdirde $N \neq \langle m_1 \rangle$ olacak şekilde bir $m_1 \in N$ ve $N \neq \langle m_1, m_2 \rangle$ olacak şekilde $m_2 \in N \backslash \langle m_1 \rangle$ elemanı vardır. Bu şekilde devam edilirse, $m_{k+1} \in N \backslash \langle m_1, m_2, m_3, \dots, m_k \rangle$ bulunur. Böylece M nin alt modüllerinin $\langle m_1 \rangle \subset \langle m_1, m_2 \rangle \subset \cdots \subset \langle m_1, m_2, m_3, \dots, m_k \rangle \subset \cdots$ artan sonsuz zinciri elde edilir. Bu ise M nin noether olmasıyla çelişir. O halde M nin her alt modülü sonlu üretilmiş olmalıdır.

(ii)⟹(iii) S, M modülünün alt modüllerinin boştan farklı herhangi bir ailesi ve $N_0 \in S$ olsun. N_0, S nin maksimal alt modülü değilse, $N_0 \subset N_1$ olacak şekilde $N_1 \in S$, N_1, S nin maksimal alt modülü değilse, $N_1 \subset N_2$ olacak şekilde $N_2 \in S$ vardır. Eğer S ailesinin maksimal alt modülü yoksa, $N_0 \subset N_1 \subset N_2 \dots \subset N_k \subset \cdots$ sonsuz zinciri elde edilir. $N = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} N_i$ olsun. Her $i \in \mathbb{N}$ için $N_i \leq M$ ve N_i sonlu üretilmiş olduğundan N, M nin sonlu üretilmiş alt modülüdür. Bu takdirde $N = \langle m_1, m_2, m_3, \dots, m_k \rangle$ olacak şekilde $m_1, m_2, m_3, \dots, m_k \in M$ vardır. Böylece $m_1, m_2, m_3, \dots, m_k$ elemanlarını içeren M nin bir N_j alt modülü bulunur. Buradan $N_j = N_{j+1} = \cdots$ dir. Bu durumda S nin bir maksimal elemanı vardır.

(iii)⟹ (i) M nin alt modüllerinin herhangi bir $N_1 \subset N_2 \dots \subset N_k \subset \cdots$ artan zinciri verilsin. Bu takdirde $\{N_i\}$ modüller ailesinin bir N_j maksimali vardır. Böylece $N_1 \subset N_2 \dots \subset N_j = N_{j+1} = \cdots$ elde edilir. Sonuç olarak M noetherdir.

2.9.4 Önerme $0 \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow E'' \longrightarrow 0$ R- modüllerin tam dizisi olsun. Bu takdirde E nin noether (artin) olması için gerek ve yeter koşul E' ve E'' nün noether (artin) olmasıdır [8].

2.9.5 Önerme $E_1, E_2, \dots E_n$ R-modüller olsun. Bu taktirde $E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$ direkt toplamının noether (artin) olması için gerek ve yeter koşul her bir E_i modülünün noether (artin) olmasıdır [8].

İspat n üzerine tümevarım uygulanırsa; $n = 1$ için iddianın doğruluğu açıktır. $n = 2$ olmak üzere $0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_1 \oplus E_2 \longrightarrow E_2 \longrightarrow 0$ tam dizisi için Önerme 2.9.4 kullanılırsa $E_1 \oplus E_2$ nin noether (artin) olması için gerek ve yeter koşul E_1 ve E_2 nin noether (artin) olmasıdır. $n > 2$ olmak üzere iddia $n - 1$ için doğru olsun. İçerme ve izdüşüm homomorfizmaları yardımıyla oluşturulan

$0 \longrightarrow (E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_{n-1}) \longrightarrow (E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n) \longrightarrow \mathrm{E_n} \longrightarrow 0$ tam dizisi ele alınırsa, Önerme 2.9.4 den $E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$ noether (artin) modülü için $E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_{n-1}$ ve $\mathrm{E_n}$ noetherdir. Buradan her bir E_i modülünün noether olduğu görülür.

Tersine; $E_1, E_2, \dots E_n$ noether (artin) olsun. Tümevarım kabulünden $E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_{n-1}$, $\mathrm{E_n}$ noether (artin) olduğundan kurulan tam dizi ve bir önceki Önerme 2.9.4 gereğince $E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$ noether (artin) dir.

2.9.6 Tanım Alt modülleri tam sıralı olan M modülüne **tek seriseldir** denir.

Tek serisel modüllerin direkt toplamı olarak yazılabilen modüle de **seriseldir** denir [6].

R R-modülü tek serisel modül ise, R halkasına **tek serisel halka**, R R-modülü serisel modülse R halkasına **serisel halka** adı verilir. Ayrıca artin olan serisel halkaya da **artin serisel halka** denir.

2.9.7 Önerme: M bir modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

i) M tek seriseldir.

ii) M modülünün her bölüm modülü düzgündir.

iii) M modülünün her alt modülü oyuktur.

iv) M modülünün her sonlu üretilmiş alt modülü lokaldir.

v) M modülünün her alt modülü en fazla bir maksimalde kapsanır.

3. MATERYAL VE METOT

3.1 (Dual Sonlu) Yükseltilebilir ve (P*) Özelliğine Sahip Modüller

3.1.1 Tanım M bir modül olsun. M nin her (dual sonlu) N alt modülü M modülünün bir $L \leq M$ direkt toplam terimini kapsıyor ve $M = L \oplus K$ için $N \cap K \ll M$ oluyorsa M modülüne **yükseltilebilir modül** denir [6].

3.1.2 Tanım M bir modül olsun. M nin bir P direkt toplam terimi için $P \subseteq A$ ve $A + U = P + U$ olacak şekilde $A, U \leq M$ alt modülleri varsa ve $(A+U)/_U$, $M/_U$ nun direkt toplam terimi ise $U \leq M$ alt modülüne **hemen hemen güçlü yükseltilebilir modül** denir [16].

3.1.3 Tanım M bir modül ve herhangi $U, V \leq M$ alt modülleri için $M = U + V$ olsun. $U' \subset U$ ve $M = U' + V$ olacak şekilde M modülünün bir U' direkt toplam terimi varsa M ye **arıtılabilir modül** denir [6].

3.1.4 Teorem Her sağ R-modülün yükseltilebilir olması için gerek ve yeter koşul R nin sağ ve sol artin serisel halkası ve $Rad\,(R)^2 = 0$ olmasıdır. [6].

3.1.5 Tanım i) U, M modülünün bir alt modülü olsun. $U + V = M$ ve $U \cap V \ll V$ oluyorsa V alt modülüne U nun M de **tümleyeni** denir [9].

ii) M modülünün her (dual sonlu) alt modülü M de bir tümleyene sahipse M modülüne **(dual sonlu) tümlenmiş modül** denir [10].

iii) M modülünün herhangi bir (dual sonlu) alt modülü N için $M = N + K$ olduğunda N , M modülünde $V \leq K$ olan bir V tümleyenine sahipse M ye **(dual sonlu) bol tümlenmiş modül** denir [10].

Bir M modülünün her direkt toplam terimi bir tümleyendir.

iv) M (dual sonlu) bol tümlenmiş modül ve M nin (dual sonlu) alt modüllerinin tümleyenleri M de direkt toplam terimi ise M modülüne **(dual sonlu) yükseltilebilir modül** denir [13].

3.1.6 Tanım M bir modül olsun. M nin her N alt modülü M modülünün bir $L \leq M$ direkt toplam terimini kapsıyor ve $M = L \oplus K$ için $N \cap K \subseteq Rad(K)$ oluyorsa M modülüne ($\boldsymbol{P^*}$) **özelliğine sahiptir** denir [15].

Aşikar olarak her yükseltilebilir modül (P^*) özelliğine sahiptir.

3.1.7 Teorem (P^*) özelliğine sahip her projektif modül yükseltilebilirdir [14].

3.2 Yarı Mükemmel, (Dual Sonlu) (Rad) ⊕-Tümlenmiş Modüller

3.2.1 Tanım M, N R-modüller, $f : M \longrightarrow N$ R-modül epimorfizması olsun. Eğer $Çek(f) \ll M$ ise f ye **küçük örtü** denir. Burada M projektif modül ise f ye **projektif örtü** denir [6].

Ayrıca $Çek(f) \leq Rad(M)$ ise f ye **genelleştirilmiş küçük örtü** denir [9].

Her modül projektif örtüye sahip değildir. Örneğin $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ modülü projektif örtüye sahip olsa M projektif olmak üzere bir $f : M \longrightarrow \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ epimorfizması vardır ve $Çek(f) \ll M$ dir. Buradan $Çek(f) \subseteq Rad\,(M)$ olur. Homomorfizma teoreminden $M/_{Çek(f)} \cong f\,(M) = \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ dir. M projektif olduğundan $Rad\,(M) \neq M$ dir. Bu durumda M, bir N maksimal alt modülüne sahiptir. $Çek(f) \subseteq N$ olduğundan $N/_{Çek(f)}$, $M/_{Çek(f)}$ modülünün maksimal alt modülüdür. $M/_{Çek(f)} \cong \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ olduğundan $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ in maksimal alt modüle sahip olmamasıyla çelişir. Buradan $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ modülünün projektif örtüye sahip olmadığı görülür.

3.2.2 Tanım: M bir R-modül olsun. M modülünün her N alt modülü için $M/_N$ bölüm modülü bir projektif örtüye sahip ise, M ye **yarı mükemmel modül** denir [1].

Ayrıca $M/_N$ bölüm modülü bir genelleştirilmiş projektif örtüye sahip ise, M ye **genelleştirilmiş yarı mükemmel modül** denir [9].

Her sonlu üretilmiş sağ R-modülü bir projektif örtüye sahip olan R halkasına **yarı mükemmel halka,** her sağ R-modülü bir projektif örtüye sahip olan R halkasına da **mükemmel halka** denir [1].

3.2.3 Teorem R bir halka olsun. R nin sağ (yarı) mükemmel olması için gerek ve yeter koşul her sağ R-modülün (dual sonlu) tümlenmiş olmasıdır [15].

3.2.4 Tanım M bir modül olsun. M nin her (dual sonlu) N alt modülü M de direkt toplam terimi olacak şekilde bir tümleyene sahip ise, M modülüne **$\oplus$-(dual sonlu) tümlenmiş modül** denir [21, 12]

3.2.5 Teorem Dedekind bölgesi üzerindeki her tümlenmiş modül $\oplus$-tümlenmiştir [29].

3.2.6 Yardımcı Teorem R birimli bir halka olsun. R sağ R-modülün $\oplus$-dual sonlu tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul her serbest R-modülün $\oplus$-dual sonlu tümlenmiş olmasıdır [12].

3.2.7 Teorem R birimli bir halka olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

i) R yarı mükemmeldir.

ii) Her sonlu üretilmiş serbest R-modül $\oplus$-tümlenmiştir.

iii) R_R modülü $\oplus$-tümlenmiştir.

iv) R_R modülü $\oplus$-dual sonlu tümlenmiştir.

v) Her serbest R- modül $\oplus$-dual sonlu tümlenmiştir [12].

3.2.8 Teorem R bir halka ve M, (DTT) özelliği olan bir R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

i) M modülü $\oplus$-dual sonlu tümlenmiştir.

ii) M modülünün her maksimal alt modülü M de direkt toplam terimi olan bir tümleyene sahiptir [12].

3.2.9 Teorem R değişmeli halka olsun. R nin artin esas ideal halkası olması için gerek ve yeter koşul her sağ R-modülün $\oplus$-tümlenmiş olmasıdır [13].

3.2.10 Tanım U, M modülünün alt modülü olsun. Eğer $M = U + V$ ve $U \cap V \subseteq Rad\,(V)$ olacak şekilde M modülünün bir V alt modülü varsa bu V alt modülüne U nun **Rad-tümleyeni** denir [6].

Her tümleyen aynı zamanda Rad-tümleyendir. Buna göre alt modüllerde aşağıdaki diyagram geçerlidir:

direkt toplam terimi $\Longrightarrow$ tümleyen $\Longrightarrow$ Rad-tümleyen

3.2.11 Tanım i) M modülünün her (dual sonlu) alt modülü M de bir Rad-tümleyene sahipse M modülüne **(dual sonlu) Rad-tümlenmiş modül** denir [17].

ii) M modülünün her (dual sonlu) alt modülü M de bir direkt toplam terimi olan Rad-tümleyene sahipse M modülüne **(dual sonlu) Rad-$\bigoplus$-tümlenmiş modül** denir. Dual sonlu Rad-$\bigoplus$- tümlenmiş modüller kısaca $cgs^{\oplus}$ ile gösterilir [11].

3.2.12 Teorem M projektif bir modül olsun. M modülünün Rad-$\bigoplus$-tümlenmiş modül olması için gerek ve yeter koşul M modülünün $\bigoplus$-tümlenmiş olmasıdır [14].

3.2.13 Sonuç Bir R halkasının sağ mükemmel olması için gerek ve yeter koşul her projektif sağ R- modülün Rad-$\bigoplus$-tümlenmiş olmasıdır [14].

3.2.14 Teorem R değişmeli halka olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

i) R artin serisel halkadır.

ii) Her sağ R-modül $\bigoplus$-tümlenmiştir.

iii) Her sağ R-modül Rad-$\bigoplus$-tümlenmiştir [13, 14]

3.2.15 Sonuç R değişmeli bir halka olsun. R nin artin serisel halka olması için gerek ve yeter koşul her sağ R-modülün Rad-$\bigoplus$-tümlenmiş olmasıdır [14].

3.2.16 Önerme R bir halka olsun. R halkasının yarı mükemmel olması için gerek ve yeter koşul her serbest R-modülün $cgs^{\oplus}$ olmasıdır [11].

3.3 (Dual Sonlu) D_{12} ve $Rad - D_{12}$ Modüller

3.3.1 Tanım M bir modül olsun. M nin her (dual sonlu) N alt modülü için M modülünün bir K direkt toplam terimi ve $Çek\,(\alpha) \ll M/K$ olacak şekilde $\alpha : M/K \longrightarrow M/N$ epimorfizması varsa M modülüne **(dual sonlu) D_{12} modül** denir [28].

3.3.2 Önerme M (dual sonlu) $\oplus$-tümlenmiş modül olsun. Bu durumda M modülü (dual sonlu) D_{12} modüldür [28].

3.3.3 Tanım M bir modül olsun. M nin her N alt modülü için M modülünün bir K direkt toplam terimi ve $Çek\,(\alpha) \subseteq Rad\,(K)$ olacak şekilde $\alpha : K \longrightarrow M/N$ epimorfizması varsa, M modülüne **$Rad - D_{12}$ modül** denir [25].

3.3.4 Önerme Her Rad-$\oplus$- tümlenmiş modül $Rad - D_{12}$ modüldür [25].

İspat M Rad-$\oplus$-tümlenmiş modül olsun. M modülünün herhangi bir N alt modülünü alalım. M Rad-$\oplus$-tümlenmiş modül olduğundan $M = N + K,\ N \cap K \subseteq Rad\,(K)$ ve $M = K \oplus K'$ koşullarını sağlayan $K, K' \leq M$ direkt toplam terimleri vardır. $g : K \longrightarrow M/N$, $k \longmapsto k + N$ şeklinde tanımlanan g dönüşümü bir epimorfizmadır.

$Çek\,(g) = \{k \in K : g\,(k) = N\} = \{k \in K : k + N = N\} = \{k \in K : k \in N\}$
$= N \cap K \subseteq Rad\,(K)$ olduğundan M $Rad - D_{12}$ modüldür.

3.3.5 Örnek p bir asal sayı ve n bir pozitif tamsayı olmak üzere olmak üzere $M = \left(\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}} \right) \oplus \left(\mathbb{Z}/_{p^n\mathbb{Z}} \right)$ modülü; $\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_p$ ve $\mathbb{Z}_p$ basit modül olduğundan $\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$ oyuk $\mathbb{Z} -$ modüldür.

$\mathbb{Z}/_{p^n\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_{p^n}$ lokal modülü $\mathbb{Z}$-modüldür. Sonlu sayıda oyuk modülün direkt toplamı da $\oplus$-tümlenmiş olduğundan M $\oplus$-tümlenmiştir. Bu durumda M modülü Rad-$\oplus$-tümlenmiştir. Bir önceki önermeden M $Rad - D_{12}$ modüldür [25].

3.3.6 Teorem M kalıtsal modülü için aşağıdaki ifadeler denktir.

i) M genelleştirilmiş yarı mükemmeldir.

ii) M $Rad - D_{12}$ dir.

iii) M Rad-$\oplus$- tümlenmiştir.

iv) M Rad tümlenmiştir [25].

3.3.7 Teorem $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. M_2 modülünün $Rad - D_{12}$ olması için gerek ve yeter koşul M_1 modülünü içeren M modülünün her N alt modülü için M_2 modülünün bir K direkt toplam terimi ve $\varphi : M \longrightarrow M/_N$ epimorfizması vardır öyle ki K, M de $Çek\ (\varphi)$ nin direkt toplam terimi olacak şekilde bir Rad-tümleyenidir [25].

İspat $(\Rightarrow)$ M_2 modülü $Rad - D_{12}$ olsun. $M_1 \subseteq N$ olacak şekilde M modülünün keyfi bir N alt modülü verilsin. $N \cap M_2 \leq M_2$ alt modülü için M_2 modülü $Rad - D_{12}$ olduğundan $\alpha : K \longrightarrow M_2/_{(N \cap M_2)}$ epimorfizması verildiğinde $Çek\ (\alpha) \subseteq Rad\ (K)$ olacak şekilde $K \leq M_2$ direkt toplam terimi vardır. $M_1 \subseteq N$ olduğundan $M = N + M_2$ ve K alt modülü M_2 de direkt toplam terimi olduğundan

$M = K \oplus K'$ olacak şekilde $K' \leq M$ vardır. $\eta : M \longrightarrow K$ izdüşüm homorfizması, $M_2/_{(N \cap M_2)} \cong M_2 + N/_N \cong M/_N$ olduğundan $\beta\,(x + N \cap M_2) = x + N$ şeklinde tanımlı $\beta : M_2/_{(N \cap M_2)} \longrightarrow M/_N$ dönüşümü bir izomorfizmadır. Buradan $\beta\alpha\eta : M \longrightarrow M/_N$ bir epimorfizmadır. $\beta\alpha\eta = \varphi$ diyelim. Açıkça görülür ki $Çek\,(\varphi) = Çek\,(\alpha) \oplus K'$ dür. Diğer taraftan $M = K \oplus K'$ olduğundan $M = K + Çek\,(\varphi)$ ve $K \cap Çek\,(\varphi) = Çek\,(\alpha) \subseteq Rad\,(K)$ olduğundan K, $Çek\,(\varphi)$ nin direkt toplam terimi ve Rad-tümleyenidir.

($\Longleftarrow$) $M_2 \subseteq N$ olan keyfi $N \leq M$ alt modülü önermedeki koşulu sağlasın. $H \leq M_2$ için $H \oplus M_1 \leq M$ olur. Hipotezden $K \leq M_2$ direkt toplam terimi ve $\varphi : M \longrightarrow M/_{H \oplus M_1}$ epimorfizması vardır öyle ki $M = K + Çek\,(\varphi)$ ve $K \cap Çek\,(\varphi) \subseteq Rad\,(K)$ dir. $f : K \longrightarrow M/_{H \oplus M_1}$ dönüşümü φ nin K ya kısıtlanışıdır. $\eta\big(m_1 + m_2 + (H \oplus M_1)\big) = m_2 + H$ ile tanımlı $\eta : M/_{H \oplus M_1} \longrightarrow M_2/_H$ bir izomorfizmadır. Dolayısıyla $\eta f : K \longrightarrow M_2/_H$ epimorfizmadır. $\alpha = \eta f$ denilirse

$$
\begin{aligned}
Çek\,(\alpha) = Çek\,(\eta f) &= \{k \in K : \eta(f(k)) = 0\} \\
&= \left\{k \in K : f\,(k) = {(H \oplus M_1)}/_{(H \oplus M_1)}\right\} \\
&= \{k \in K : k \in Çek\,(f)\}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan $Çek(\alpha) = Çek\,(f) = K \cap Çek\,(\varphi) \subseteq Rad\,(K)$ dır. Dolayısıyla $Çek\,(\alpha) \subseteq Rad\,(K)$ olduğundan M_2 modülü $Rad - D_{12}$ dir.

3.3.8 Teorem $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ eş modül olsun. Her $i \in I$ için M_i $Rad - D_{12}$ ise, M modülü $Rad - D_{12}$ dir [25].

İspat $L \leq M$ olsun. M eş modül olduğundan $L = \bigoplus_{i \in I} (L \cap M_i)$ dır. Her $i \in I$ için M_i $Rad - D_{12}$ ve $L \cap M_i \leq M_i$ olduğundan $K_i \leq M_i$ direkt toplam terimi ve $\alpha_i : K_i \longrightarrow {}^{M_i}/_{L \cap M_i}$ epimorfizması için $Çek\ (\alpha_i) \subseteq Rad\ (K_i)$ dır.

Öyle bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için $k_{i_1} + \ldots + k_{i_n} \longmapsto \alpha_{i_1}(k_{i_1}) + \ldots + \alpha_{i_n}(k_{i_n})$ şeklinde tanımlı

$$\alpha : \bigoplus_{i \in I} K_i \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} \left({}^{M_i}/_{(L \cap M_i)} \right) \cong {}^{\bigoplus_{i \in I} M_i}/_{[\bigoplus_{i \in I} (L \cap M_i)]} \cong {}^{M}/_{L}$$

homomorfizması bir epimorfizmadır. Ayrıca $Çek\ (\alpha) \subseteq Rad\ (\bigoplus_{i \in I} K_i)$ dir ve $\bigoplus_{i \in I} K_i$, M modülünün direkt toplam terimidir. Buradan M modülü $Rad - D_{12}$ bulunur.

3.3.9 Teorem Bir R halkasının sağ mükemmel olması için gerek ve yeter koşul her projektif sağ R-modülünün $Rad - D_{12}$ olmasıdır [25].

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde $Rad - D_{12}$ ve dual sonlu D_{12} modüllerinin bir öz genelleştirilişi olarak dual sonlu $Rad - D_{12}$ modüller tanımlandı ve belirli cebirsel özelliklerine yer verildi.

4.1. Dual Sonlu $\boldsymbol{Rad - D_{12}}$ Modülleri

4.1.1. Tanım M bir modül olsun. M modülünün her dual sonlu N alt modülü için M nin bir K direkt toplam terimi ve $Çek\ (\alpha) \subseteq Rad\ (K)$ olacak şekilde bir $\alpha : K \longrightarrow {}^{M}/_{N}$ epimorfizması varsa M modülüne **dual sonlu $\boldsymbol{Rad - D_{12}}$ modül** denir.

4.1.2 Önerme Her $cgs^{\oplus}$ modül dual sonlu $Rad - D_{12}$ modüldür.

İspat M bir $cgs^{\oplus}$ modül ve $N \le M$ dual sonlu alt modül olsun. Bu takdirde $M = N + K,\ N \cap K \subseteq Rad\ (K)$ olacak şekilde M modülünün $M = K \oplus K'$ koşulunu sağlayan K, K' direkt toplam terimleri vardır. $k \longmapsto k + N$ şeklinde tanımlı $g : K \longrightarrow {}^{M}/_{N}$ dönüşümü bir epimorfizmadır. Ayrıca;

$Çek\ (g) = \{ k \in K : g(k) = {}^{N}/_{N} \}$

$= \{ k \in K : k + N = {}^{N}/_{N} \}$

$= \{ k \in K : k \in N \} = N \cap K \subseteq Rad\ (K)$ olduğundan M modülü dual sonlu $Rad - D_{12}$ dir.

Bu tanım ve önerme sonucunda modüllerle ilgili aşağıdaki tablo elde edilir:

$$\begin{tikzcd}
 & & yarı\ basit \arrow[d] & & \\
 & & yükseltilebilir \arrow[dll] \arrow[d] \arrow[drr] & & \\
(P^*)\ özelliği \arrow[d] & & \oplus - tümlenmiş \arrow[dll] \arrow[d] \arrow[drr] & & dual\ sonlu\ yükseltilebilir \arrow[d] \\
Rad - \oplus - tümlenmiş \arrow[d] \arrow[drr] & & D_{12} \arrow[d] \arrow[drr] & & \oplus - dual\ sonlu\ tümlenmiş \arrow[d] \\
cgs^{\oplus} \arrow[drr] & & Rad - D_{12} \arrow[d] & & dual\ sonlu\ (D_{12}) \arrow[dll] \\
 & & dual\ sonlu\ Rad - D_{12} & &
\end{tikzcd}$$

Sıradaki örnek her dual sonlu $Rad - D_{12}$ modülün bir $cgs^{\oplus}$ modül olmak zorunda olmadığını göstermektedir.

Örnek 1 R, $W = Rad\,(R)$ için $W^2 = 0$, $Q = {}^{R}/_{W}$ değişmeli olacak şekilde $\dim({}_{Q}W) = 2$, $\dim(W_Q) = 1$ olan lokal artin halka olsun. R lokal olduğundan $W = Rad\,(R)$, R nin tek maksimal idealidir. Dolayısıyla $Q = {}^{R}/_{W}$ basittir. Hipotez gereğince $Q = {}^{R}/_{W}$ değişmeli ve $W^2 = 0$ dır. W sağ R- modülü aşağıdaki dış işlem ile birlikte sağ ${}^{R}/_{W}$ -modül yapısına sahiptir.

$\cdot : \ W \ \times {}^{R}/_{W} \ \longrightarrow W$

$\quad (b\,, a + W) \ \longmapsto ba$

$W = Ru + Rv, \quad D = \{\, (ur, -vr) \colon \ r \ \in R\}$ olmak üzere $U = [\,{}^{R \,\oplus\, R}/_{D}]$

parçalanamaz injektif modüldür. [25, Örnek 4.6] gereğince U Rad-tümlenmiştir. Ancak U parçalanamaz olduğundan $\forall\, L \ \leq U$ için $L \ \oplus Q\,,$ M de direkt toplam terimi olacak şekilde Rad-tümleyene sahip değildir. M Rad-$\oplus$-tümlenmiş değildir. Böylece $M \quad cgs^{\oplus}$ değildir. Diğer taraftan $Q = {}^{R}/_{W}$ basit R-modül olduğundan $M = U \ \oplus Q$ ve M nin dual sonlu keyfi bir N alt modülü yardımıyla oluşturulan $\psi : Q \ \longrightarrow \ {}^{M}/_{N}$ epimorfizması için, $Çek\ (\psi\,) = Q \cap N$ olup Q basit olduğundan $Çek\ (\psi\,) = Q \cap N = 0 \subseteq Rad(Q)$ dur. Ayrıca Q direkt toplam terimi olduğundan M dual sonlu $Rad - D_{12}$ modüldür.

4.1.3 Teorem M hemen hemen projektif modül olsun.

i) M modülü $Rad - D_{12}$ ise, M Rad-$\oplus$-tümlenmiş modüldür.

ii) M modülü dual sonlu $Rad - D_{12}$ ise, $M \ \ cgs^{\oplus}$ modüldür.

İspat **i)** N, M modülünün alt modülü olsun. M modülü $Rad - D_{12}$ olduğundan M modülünün bir K direkt toplam terimi ve bir $\alpha : K \ \longrightarrow \ {}^{M}/_{N}$ epimorfizması vardır öyle ki $Çek\ (\,\alpha\,) \subseteq Rad\ (\,K\,)$ dır. $\pi : M \ \longrightarrow \ {}^{M}/_{N}$ doğal homomorfizması alalım. M modülü hemen hemen projektif olduğundan

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "\pi"] & \\ K \arrow[r, "\alpha"] & {}^{M}/_{N} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde $h : M \longrightarrow K$ homomorfizması vardır yani $\pi : \alpha \circ h$ dır. Ayrıca M K-projektif olduğundan h homomorfizması parçalanabilirdir. Yani M modülünün öyle bir K' direkt toplam terimi vardır ki $h|_{K'}: K' \longrightarrow K$ kısıtlanış homomorfizması yardımıyla $K' \cong K$ izomorfizması elde edilir. Buradan $\pi|_{K'}$ bir epimorfizmadır. Böylece $M = K' + N$ ve $N \cap K' = Çek\ (\pi|_{K'}) \subseteq$ Rad(M) dir. $K' \leq M$ direkt toplam terimi olduğundan $N \cap K' \subseteq$ Rad (K) dır. Sonuç olarak M Rad-⊕-tümlenmiş modüldür.

ii) i) şıkkına benzer şekilde ispat yapılabilir.

Örnek 2 [24, teorem 4.3 ve Not 4.4.] M eşdüzgün modül ve $S = End\ (M)$ olsun. Kabul edelim ki P projektif S-modül ve $\dim(P) = (1,0)$ olsun. Bu durumda P parçalanamaz zayıf lokal modüldür. $\dim(P) = (1,0)$ olduğundan P sonlu üretilmiş modül değildir. Dolayısıyla P $cgs^{\oplus}$ modüldür fakat ⊕-dual sonlu tümlenmiş değildir. Sonuç olarak P dual sonlu $Rad - D_{12}$ modüldür ancak dual sonlu (D_{12}) modül değildir.

4.1.4 Önerme M dual sonlu $Rad - D_{12}$ modül olsun. Eğer $Rad\ (M) \ll M$ ise, M dual sonlu (D_{12}) modüldür.

İspat $N \leq M$ dual sonlu alt modül olsun. M dual sonlu $Rad - D_{12}$ modül olduğundan M modülünün bir K direkt toplam terimi ve bir $\alpha : K \longrightarrow M/N$ epimorfizması vardır öyle ki $Çek\ (\alpha) \subseteq Rad\ (K)$ dır. $Rad\ (K) \subseteq Rad\ (M) \ll M$ olduğundan Önerme 2.4.2 $i)$ $Çek\ (\alpha) \ll M$ olur. K, M modülünün direkt toplam terimi olduğundan Önerme 2.4.2 iv) gereğince $Çek\ (\alpha) \ll K$ dır. Dolayısıyla M dual sonlu (D_{12}) modüldür.

4.1.5 Sonuç Her eş-atom dual sonlu $Rad - D_{12}$ modül, dual sonlu (D_{12}) modüldür.

İspat M eş-atom dual sonlu $Rad - D_{12}$ modül olsun. M eş-atom olduğundan $Rad\ (\ M\ ) \ll M$ dir. Önerme 4.1.4 den M dual sonlu (D_{12}) modüldür.

4.1.6 Önerme M radikal olmayan parçalanamaz modül olsun. M modülü dual sonlu $Rad - D_{12}$ modül ise, M zayıf lokaldir.

İspat M radikal modül olmasın. Yani $Rad\ (\ M\ ) \neq M$ olsun. Bu durumda M modülünün bir N maksimal alt modülü vardır. $M/_N$ bölüm modülü basit modül olduğundan Teorem 2.3.2 gereğince devirlidir. Dolayısıyla M nin N alt modülü dual sonlu alt modüldür. Hipotez gereği M modülü dual sonlu $Rad - D_{12}$ modül olduğundan M modülünün bir K direkt toplam terimi ve bir $\alpha : K \longrightarrow M/_N$ epimorfizması vardır öyle ki $Çek\ (\ \alpha\ ) \subseteq Rad\ (\ K\ )$ dır. $K\ \neq 0$ ve M parçalanamaz modül olduğundan $M = K$ dır. Bu durumda $\alpha : M \longrightarrow M/_N$ epimorfizma olup Homomorfizma Teoreminden $M/_{Çek(\alpha)} \cong M/_N$ dir. N maksimal alt modül olduğundan $Çek\ (\ \alpha\ )$, M modülünün maksimal alt modülüdür. $Çek\ (\ \alpha\ ) \subseteq Rad\ (\ M\ )$ ve $Rad\ (\ M\ ) \neq M$ olduğundan $Çek\ (\ \alpha\ ) = Rad\ (\ M\ )$ dir. Dolayısıyla $Rad\ (\ M\ )$, M nin tek maksimal alt modülüdür. Böylece M zayıf lokal modül bulunur.

4.1.7 Sonuç Her sonlu üretilmiş parçalanamaz (dual sonlu) $Rad - D_{12}$ modül lokaldir.

4.1.8 Teorem M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş modül ve $Rad\ (M\ )$, M modülünde hemen hemen güçlü yükseltilebilir modül olsun. Bu durumda M dual sonlu $Rad - D_{12}$ modüldür.

İspat $N \leq M$ dual sonlu alt modül olsun. Bu durumda M/N sonlu üretilmiştir. Buradan $\dfrac{M/N}{(N+Rad(M))/N} \cong M/(N+Rad(M))$ sonlu üretilmiştir.

$M/(N+Rad(M)) \cong \dfrac{M/Rad(M)}{(N+Rad(M))/Rad(M)}$ sonlu üretilmiştir.

Yani $(N+Rad(M))/Rad(M) \leq M/Rad(M)$ dual sonlu alt modüldür. $Rad\,(M)$ M modülünde hemen hemen güçlü yükseltilebilir modül olduğundan $(N+Rad(M))/Rad(M) \leq M/Rad(M)$ direkt toplam terimidir ve $K \subseteq N$ için $N + Rad\,(M) = K + Rad\,(M)$ olacak şekilde $M = K \oplus L$ olacak şekilde M modülünün K, L direkt toplam terimleri vardır. $\alpha(l) = l + N$ kuralı ile tanımlı $\alpha : L \longrightarrow M/N$ dönüşümü bir epimorfizmadır. Genelliği bozmadan $Çek(\alpha) = L \cap N$ dir. $M = K \oplus L$ olduğundan $Rad(M) = Rad(K) \oplus Rad(L)$ dir. Dolayısıyla $N + Rad\,(L) = K + Rad\,(L)$ yazılabilir. $L \cap \big(N + Rad\,(L)\big) = L \cap \big(K + Rad\,(L)\big)$ olup $L \cap N + Rad\,(L) = L \cap K + Rad\,(L) = Rad(L)$ bulunur. Yani $Çek(\alpha) = L \cap N \subseteq Rad\,(L)$ olup M dual sonlu $Rad - D_{12}$ modüldür.

4.1.9 Sonuç M dual sonlu zayıf Rad-tümlenmiş arıtılabilir modül olsun. Bu takdirde M dual sonlu $Rad - D_{12}$ modüldür.

İspat M modülü arıtılabilir olduğundan M nin her alt modülü M de hemen hemen güçlü yükseltilebilirdir. Teorem 4.1.8 den M dual sonlu $Rad - D_{12}$ modüldür.

4.1.10 Önerme M dual sonlu $Rad - D_{12}$ modül olsun. Eğer $Rad\ (M) \neq M$ ise, M modülünün sıfırdan farklı zayıf lokal direkt toplam terimi vardır.

İspat $N,\ M$ modülünün maksimal alt modülü olsun. $M/_N$ bölüm modülü basit olup devirlidir. Dolayısıyla N, M modülünün dual sonlu alt modülüdür. M dual sonlu $Rad - D_{12}$ modül olduğundan M modülünün öyle bir K direkt toplam terimi ve $\alpha : K \longrightarrow M/_N$ epimorfizması vardır ki $Çek(\alpha) \subseteq Rad\ (K)$ dır. Ayrıca $K \neq 0$ olduğu açıktır. Genelliği bozmadan $Çek(\alpha) = K \cap N$ alınır ve N nin M modülünün maksimal alt modülü olması kullanılırsa $Çek(\alpha)$ nın K nın bir maksimal alt modülü olduğu görülür. Bu durumda $Çek(\alpha) = Rad\ (K)$ olur. Dolayısıyla $K,\ M$ modülünün zayıf lokal direkt toplam terimidir.

Sıradaki örnek dual sonlu $Rad - D_{12}$ modülünün direkt toplam teriminin dual sonlu $Rad - D_{12}$ olmayabileceğini göstermektedir.

Örnek 3 Örnek 1 deki $M = U \oplus Q$ sağ R-modülünü ele alalım. M dual sonlu $Rad - D_{12}$ modüldür ancak M nin $U = [R \oplus R/_D]$ alt modülü dual sonlu $Rad - D_{12}$ modül değildir.

4.1.11 Teorem $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. M_2 modülünün dual sonlu $Rad - D_{12}$ olması için gerek ve yeter koşul M_1 modülünü içeren M modülünün her dual sonlu N alt modülü için M_2 modülünün bir K direkt toplam teriminin ve $K,\ M$ de direkt toplam terimi ve $Çek\ (\varphi)$ nin bir Rad tümleyeni olacak şekilde bir $\varphi : M \longrightarrow M/_N$ epimorfizması vardır.

İspat **($\Longrightarrow$)** M_2 modülü dual sonlu $Rad - D_{12}$ olsun. $M_1 \subseteq N$ olacak şekilde M modülünün keyfi bir N dual sonlu alt modülü ve M_2 modülünün $N \cap M_2$ alt modülü verilsin. M_2 modülü dual sonlu $Rad - D_{12}$ olduğundan $\alpha : K \longrightarrow {M_2}/{(N \cap M_2)}$ epimorfizması $Çek\ (\alpha) \subseteq Rad\ (K)$ olacak şekilde $K \leq M_2$ direkt toplam terimi vardır. $M_1 \subseteq N$ olduğundan $M = N + M_2$ ve K alt modülü M_2 de direkt toplam terimi olduğundan $M = K \oplus K'$ olacak şekilde $K' \leq M$ vardır.

$\eta : M \longrightarrow K$ izdüşüm homomorfizması ve ${M_2}/{(N \cap M_2)} \cong {M_2 + N}/{N} \cong {M}/{N}$ olduğundan $\beta\,(x + N \cap M_2) = x + N$ kuralı ile tanımlı $\beta : {M_2}/{(N \cap M_2)} \longrightarrow {M}/{N}$ dönüşümü bir izomorfizmadır.

Buradan $\beta\alpha\eta : M \longrightarrow {M}/{N}$ bir epimorfizmadır. $\beta\alpha\eta = \varphi$ denilirse, $Çek\ (\varphi) = Çek\ (\alpha) \oplus K'$ olduğu kolaylıkla görülür. $M = K \oplus K'$ olduğundan $M = K + Çek\ (\varphi)$, $K \cap Çek\ (\varphi) = Çek\ (\alpha) \subseteq Rad\ (K)$ olduğundan K, $Çek\ (\varphi)$ nin direkt toplam terimi olacak şekilde Rad – tümleyenidir.

($\Leftarrow$) $M_2 \subseteq N$ olan keyfi $N \leq M$ dual sonlu alt modülü için M_2 modülünün bir K direkt toplam terimi, $\varphi : M \longrightarrow {M}/{N}$ epimorfizma olmak üzere, K, M de direkt toplam terimi olacak şekilde $Çek\ (\varphi)$ nin bir Rad-tümleyeni olsun. $H \leq M_2$ dual sonlu alt modülünü ve $H \oplus M_1 \leq M$ alalım. Hipotez gereğince K, M_2 nin bir direkt toplam terimi ve $M = K + Çek\ (\varphi)$ ve $K \cap Çek\ (\varphi) \subseteq Rad\ (K)$ olacak şekilde $\varphi : M \longrightarrow {M}/{H \oplus M_1}$ epimorfizması vardır. $f : K \longrightarrow {M}/{H \oplus M_1}$ dönüşümü φ nin K ya kısıtlanış homomorfizması olsun. $\eta\big(m_1 + m_2 + (H \oplus M_1)\big) = m_2 + H$ kuralı ile tanımlanan $\eta : {M}/{H \oplus M_1} \longrightarrow {M_2}/{H}$ dönüşümü bir izomorfizmadır. Bu durumda

$\eta f : K \longrightarrow {M_2}/{H}$ epimorfizma olup $\alpha = \eta f$ denilirse,

$Çek\ (\alpha) = Çek\ (\eta f) = \{\, k \in K : \eta\big(f(k)\big) = {H}/{H} \,\}$

$$= \left\{ k \in K : f(k) = {}^{(H \oplus M_1)}\!/_{(H \oplus M_1)} \right\}$$

$$= \{ k \in K : k \in Çek(f) \}$$

$$= Çek\,(f) = K \cap Çek\,(\varphi) \subseteq Rad\,(K)$$

olduğundan M_2 modülü dual sonlu $Rad - D_{12}$ dir.

4.1.12 Teorem $\{ M_i \}_{i \in I}$, bir R halkası üzerinde dual sonlu $Rad - D_{12}$ modüllerinin herhangi bir ailesi ve $M = \oplus_{i \in I} M_i$ olsun. Eğer M modülünün her dual sonlu alt modülü karakteristik alt modül ise, M modülü dual sonlu $Rad - D_{12}$ dir.

İspat $N \leq M$ dual sonlu alt modül olsun. N, M nin karakteristik alt modülü olduğundan $N = \oplus_{i \in I} (N \cap M_i)$ dir. $M/N \cong {}^{\oplus_{i \in I} M_i}\!/_{\oplus_{i \in I} (N \cap M_i)} \cong \oplus_{i \in I} \left({}^{M_i}\!/_{(N \cap M_i)} \right)$ olduğundan her $i \in I$ için $(N \cap M_i)$ alt modülü M_i nin dual sonlu alt modülüdür. Her $i \in I$ için M_i dual sonlu $Rad - D_{12}$ olduğundan M_i nin K_i direkt toplam terimi ve $\alpha_i : K_i \longrightarrow {}^{M_i}\!/_{(N \cap M_i)}$ epimorfizması için $Çek(\alpha_i) \subseteq Rad(K_i)$ dir. her $j = 1,2, \ldots n$ için $k_{i_1} \in K_{i_j}$ için $k_{i_1} + \cdots + k_{i_n} \longmapsto \alpha_{i_1}(k_{i_1}) + \cdots + \alpha_{i_n}(k_{i_n})$ kuralı ile tanımlı $\alpha : \oplus_{i \in I} K_i \longrightarrow \oplus_{i \in I} {}^{M_i}\!/_{(N \cap M_i)}$ homomorfizması ele alınırsa burada α_{i_j} ler epimorfizma ve α nın tanımından α nın epimorfizma olduğu açıktır. Ayrıca $Çek(\alpha) \subseteq Rad(\oplus_{i \in I} K_i)$ olduğundan ve $\oplus_{i \in I} K_i$, M modülünün direkt toplam terimi olduğundan M modülü dual sonlu $Rad - D_{12}$ dir.

4.1.13 Önerme M modülü (DTT) özelliğine sahip dual sonlu $Rad - D_{12}$ modül ve L, M nin direkt toplam terimi olsun. Bu taktirde $M/_L$ bölüm modülü dual sonlu $Rad - D_{12}$ dir.

İspat M modülü dual sonlu $Rad - D_{12}$ modül ve $N/_L$, $M/_L$ bölüm modülünün dual sonlu alt modülü olsun. Bu durumda $N \leq M$ alt modülü de dual sonludur. M modülü dual sonlu $Rad - D_{12}$ olduğundan Teorem 4.1.11 den M nin bir K direkt toplam terimi ve $Çek(\alpha) \subseteq Rad\ (K)$ olacak şekilde $\alpha : K \longrightarrow M/_N$ epimorfizması vardır. M modülü (DTT) özelliğine sahip olduğundan $K + L$, M nin bir direkt toplam terimidir. Yani $M = (K + L) \oplus X$ olacak şekilde bir $X \leq M$ vardır. $K + L/_L \cap X + L/_L \subseteq \big(X \cap (K + L) + L \cap (K + L + X)\big)/_L = L/_L$ olduğundan

$M/_L = (K + L)/_L \oplus X + L/_L$ dir. Ayrıca $M/_N \cong {M/_L}/_{N/_L}$ dir. Dolayısıyla

$k + l + L = k + L \longmapsto \alpha(k)$ şeklinde tanımlı $\alpha' : (K + L)/L \longrightarrow M/N$ dönüşümünün epimorfizma olduğu açıktır ve $Çek(\alpha') \subseteq Rad\ (\ (K + L)/L\ )$ dir. Sonuç olarak $M/_L$ dual sonlu $Rad - D_{12}$ modüldür.

4.1.14 Teorem M (dual sonlu) $Rad - D_{12}$ modül ve L , M nin karakteristik alt modülü olsun. Bu taktirde $M/_L$ bölüm modülü (dual sonlu) $Rad - D_{12}$ modüldür.

İspat $N/_L \leq M/_L$ (dual sonlu) alt modül olsun. Buradan $N \leq M$ (dual sonlu) alt modüldür. M (dual sonlu) $Rad - D_{12}$ modül olduğundan Teorem 4.1.11 gereğince M nin $M = K \oplus K'$ olacak şekilde bir K direkt toplam terimi ve $Çek(\alpha) \subseteq Rad\ (K)$ olacak şekilde $\alpha : K \longrightarrow M/_N$ epimorfizması vardır. L, M nin karakteristik alt modülü olduğundan $L = (L \cap K) \oplus (L \cap K')$ olur. Ayrıca $M/_L = {(K+L)}/_L \oplus {(K'+L)}/_L$ dir. $\left. {M/_L} \middle/ {N/_L} \right. \cong M/_N$ olduğundan $\beta : {K+L}/_L \longrightarrow M/_N$, $k + l + L = k + L \longmapsto \alpha(k)$ şeklinde tanımlı dönüşümün epimorfizma olduğu açıktır. $Çek(\beta) \subseteq Rad\left({(K+L)}/_L\right)$ olduğundan $M/_L$ (dual sonlu) $Rad - D_{12}$ modüldür.

4.2 Modülleri (Dual Sonlu) $Rad - D_{12}$ Olan Halkalar

Bu bölümde değişmeli artin serisel bir R halkası üzerine her R-modülün dual sonlu $Rad - D_{12}$ modül olduğu gösterilecektir.

4.2.1 Teorem R bir halka olsun. R halkasının yarı mükemmel olması için gerek ve yeter koşul her serbest sağ R modülünün dual sonlu $Rad - D_{12}$ modül olmasıdır.

İspat ($\Longrightarrow$) Kabul edelim ki R yarı mükemmel halka olsun. Önerme 3.2.16 dan her serbest sağ R-modülü $cgs^{\oplus}$ modüldür. Bu durumda Önerme 4.1.2 den her serbest sağ R-modülü dual sonlu $Rad - D_{12}$ modüldür.

($\Longleftarrow$) Hipotez gereği her serbest sağ R-modül dual sonlu $Rad - D_{12}$ modül olsun. Her serbest modül projektif olduğundan Teorem 4.1.4 gereği R modülü $cgs^{\oplus}$ modüldür. Önerme 3.2.16 dan R yarı mükemmel halkadır.

4.2.2 Teorem Bir R halkasının sağ mükemmel olması için gerek ve yeter koşul her serbest sağ R-modülün $Rad - D_{12}$ modül olmasıdır.

İspat ($\Longrightarrow$) Kabul edelim ki R sağ mükemmel halka olsun. Sonuç 3.2.13 den her projektif sağ R- modül Rad-$\bigoplus$-tümlenmiş modüldür. Bu durumda Önerme 4.1.2 den her serbest sağ R-modül $Rad - D_{12}$ modüldür.

($\Longleftarrow$) Hipotez gereği her serbest sağ R-modül $Rad - D_{12}$ modül olsun. Her serbest modül projektif olduğundan Teorem 4.1.4 gereği R modülü Rad-$\bigoplus$-tümlenmiş modüldür. Sonuç 3.2.13 den R halkası sağ mükemmeldir.

4.2.3 Önerme M lokal bir R halkası üzerinde düzgün modül olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

i) M modülü tek seriseldir.

ii) M modülünün her alt modülü dual sonlu $Rad - D_{12}$ modüldür.

İspat $(\mathbf{i}) \Longrightarrow (\mathbf{ii})$ M modülü tek serisel olsun. Bu durumda her alt modülü oyuktur. M modülünün keyfi bir alt modülü N olsun. $L \leq N$ dual sonlu alt modülü verilsin. N modülünün bir K direkt toplam terimi için $Çek\ (\alpha) \subseteq Rad\ (K)$ olacak şekilde $\alpha : K \longrightarrow {}^{N}/_{L}$ epimorfizmasının var olduğu gösterilirse ispat biter. N modülü parçalanamaz ve $K \neq 0$ olduğundan $K = N$ dir. Bu durumda $\alpha : N \longrightarrow {}^{N}/_{L}$ dönüşümü doğal homomorfizmadır ve $Çek\ (\alpha) = N \cap L = L$ olur. M modülünün her alt modülü oyuk olduğundan $L \ll N$ dir. Dolayısıyla $L = Çek\ (\alpha) \subseteq Rad\ (N)$ olur. Yani M modülünün keyfi N alt modülü dual sonlu $Rad - D_{12}$ modüldür.

$(\mathbf{ii}) \Longrightarrow (\mathbf{i})$ Önerme 2.9.7 gereğince M modülünün tek serisel olduğunun gösterilmesi için her sonlu üretilmiş alt modülünün lokal olduğunun gösterilmesi yeterlidir. M modülünün keyfi bir sonlu üretilmiş alt modülü N olsun. Hipotez gereği N dual sonlu

$Rad - D_{12}$ modüldür. M modülü düzgün olduğundan N alt modülü parçalanamazdır. Sonuç 4.1.7 den N lokaldir. Dolayısıyla M modülü tek seriseldir.

Önerme 2.7.22 ve Sonuç 2.7.23 kullanılarak bir basit modülün injektif bürümünün sıfırdan farklı her alt modülünün parçalanamaz olduğu görülür. Ayrıca Önerme 2.4.4 gereğince basit bir modülün injektif bürümü düzgündir. Bu özellik kullanarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.2.4 Sonuç R halkası lokal değişmeli bir halka olsun. Kabul edelim ki $M = E(\ {}^{R}/_{Rad(R)})$ modülü ve M modülünün her alt modülü dual sonlu $Rad - D_{12}$ modül olsun. Bu taktirde R tek seriseldir.

İspat R halkası lokal halka olduğundan $Rad\ (R)$, R nin tek maksimal ideali olup ${}^{R}/_{Rad(R)}$ basit modüldür. Önerme 2.7.22 ve Sonuç 2.7.23 gereğince $M = E\ ({}^{R}/_{Rad(R)})$ nin sıfırdan farklı her alt modülü parçalanamazdır. Önerme 2.4.4 den M düzgündir. Hipotez gereğince M modülünün her alt modülü dual sonlu $Rad - D_{12}$ modül olduğundan Önerme 4.2.3 den M modülü tek seriseldir. R değişmeli lokal halka ve M tek serisel modül olduğundan [7, Yardımcı Teorem 6.2] den R tek seriseldir.

4.2.5 Önerme Değişmeli bir R halkası üzerindeki her sağ R-modül dual sonlu $Rad - D_{12}$ modül ise, R serisel halkadır.

İspat M serbest R-modül olsun. Hipotez gereğince M modülü dual sonlu $Rad - D_{12}$ modüldür. Teorem 4.2.1 gereğince R yarı mükemmel halkadır. $\forall\ 1 \leq i \leq n,\ n \in \mathbb{N}$ için R_i lokal olmak üzere R, $R = R_1 \oplus \dots . \oplus R_n$ parçalanışına sahiptir [1, 42.6]. R değişmeli halka olduğundan, R_i lokal direkt toplam terimleri de değişmelidir.

Hipotez gereğince her sağ R-modül dual sonlu $Rad - D_{12}$ modül olduğundan her sağ R_i-modül dual sonlu $Rad - D_{12}$ modüldür. $1 \leq i \leq n,\ n \in \mathbb{N}$ için $E\left({R_i}/{Rad(R_i)} \right)$ R_i-modülünün her alt modülü dual sonlu $Rad - D_{12}$ modül ve düzgün olduğundan Sonuç 4.2.4 gereğince R_i tek seriseldir. Tek serisel modüllerin direkt toplamı olan R serisel halkadır.

4.2.6 Teorem R değişmeli halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.

i) R artin serisel halkadır.

ii) Her R- modül $Rad - D_{12}$ dir.

İspat $(\mathbf{i}) \Longrightarrow (\mathbf{ii})$ Teorem 3.2.14 ve Önerme 3.3.4 gereğince açıktır.

$(\mathbf{ii}) \Longrightarrow (\mathbf{i})$ Hipotez gereğince her projektif R-modül $Rad - D_{12}$ olduğundan Teorem 4.2.2 gereğince R mükemmel halkadır. R mükemmel halka olduğundan $1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ için R_i ler lokal mükemmel halkalar olmak üzere R, $R = R_1 \oplus \dots \oplus R_n$ parçalanışına sahiptir. R_i ler lokal değişmeli halkadır. ${R_i}/{Rad(R_i)}$ basit R_i-modülü için $E\left({R_i}/{Rad(R_i)} \right)$ düzgün R_i-modüldür. $E\left({R_i}/{Rad(R_i)} \right)$ nin her alt modülü (dual sonlu) $Rad - D_{12}$ R_i-modül olduğundan sonuç 4.2.4 gereğince R_i ler tek serisel olup R serisel halkadır. Ayrıca R_i ler lokal halka olduğundan R_i noether halkadır. Önerme 2.9.5 gereğince R, tek serisel noether R_i halkalarının sonlu toplamı olarak yazılabilen noether serisel halkadır. [4, 11.6.4] gereğince R artin serisel halkadır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında dual sonlu (D_{12}) modüller ve $Rad - D_{12}$ modüller genelleştirilmiş ve dual sonlu $Rad - D_{12}$ modüller tanımlanmıştır. Tanımlanan bu dual sonlu $Rad - D_{12}$ modüllerin belli özellikleri karakterize edilmiştir. Ayrıca modülleri (dual sonlu) $Rad - D_{12}$ olan halkalar üzerinde de çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalardan en çarpıcı olanları; bir halkanın yarı mükemmel olması için gerek ve yeter koşul her serbest sağ modülünün dual sonlu $Rad - D_{12}$ modül olması; ayrıca bir halkanın sağ mükemmel olması için gerek ve yeter koşul her serbest sağ modülünün $Rad - D_{12}$ modül olmasıdır. Bunların dışında değişmeli bir R halkasının tek serisel olması ile her R-modülün $Rad - D_{12}$ modül olmasının denk olduğu sonucuna varılmıştır. Dual sonlu $Rad - D_{12}$ modüllerinin Dedekind bölgeleri üzerindeki yapısı belirlenebilir. Ayrıca dual sonlu $Rad - D_{12}$ R-modüllerinin bir ailesinin direkt toplamının dual sonlu $Rad - D_{12}$ olduğu R halkaları belirlenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Wisbauer, R., “Foundations of Modules and Ring Theory”, *Gordon and Breach*, (1991).

[2] Facchini, A., “Module Theory, Progress in Mathematics’’, *167*, *Birkhauser*, Verlag, Basel (1998).

[3] Alizade, R., Pancar, A., “Homoloji Cebire Giriş’’, *Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi*, Samsun (1991).

[4] Kasch, F., “Modules and Rings’’, *Ludwig-Maximilian University*, Munich, Germany (1982).

[5] Hungerford, T. W., “Algebra’’, *Springer-Verlag*, New York.

[6] Clark, J., Lomp, C., Vajana, N., Wibauer, R., “Lifting Modules’’, *Frontiers In Mathematics*, Bikhauser, Verlag-Basel (2006).

[7] Sharpe, D. W., Vamos, P., “Injective Modules’’, *Lectures In Pure Mathematics University of Sheffield*, The Great Britain (1972).

[8] Pancar, A., Nişancı Türkmen, B., “İnjektif Modüllere Giriş’’, *Pegem Akademi*, Ankara (2014)

[9] Xue, W., “Characterizations of Semiperfect and Perfect Rings’’, *Publicacions Matematiques*, 40(1): 115-125 (1996).

[10] Alizade, R., Bilhan, G. and Smith, P. F., “Modules whose maximal submodules have supplements’’, *Comm. Algebra*, 29(6): 2389-2405 (2001).

[11] Nişancı Türkmen, B., Pancar, A., “On Generalizations of $\oplus$-Cofinitely Supplemented Modules’’, *Ukranian Mathematical Journal*, 62(2): 203-209 (2010).

[12] Çalışıcı, H., Pancar, A., “$\oplus$-Cofinitely Supplemented Modules’’, *Chech. Math. J.*, 54(129): 1083-1088 (2004).

[13] Idelhadj, A., Tribak, R., "Modules for Which Every Submodule Has a Supplement That Is a Direct Summand'', *The Arabian Journal for Sciences and Engineering*, 25(2C): 179-189 (2000).

[14] Türkmen, E., "Rad-⊕-Supplemented Modules'', *An. Şt. Univ. Ovidius Constanta*, 21(1): 225-238 (2013).

[15] Al-Khazzi I., Smith, P.F., "Modules with Chain Conditions on Superfluous Submodules'', *Communications in Algebra*, 19(8): 2331-2351 (1991).

[16] Alkan, M., "On τ-Lifting and τ-Semiperfect Modules'', *Turkish J. Math*, 33: 117-139 (2009).

[17] Büyükaşık, E., Lomp, C., "On a Recent Generalization of Semiperfect Rings'', *Bulletin of The Australian Mathematical Society*, 78(2): 317-325 (2008).

[18] Choubey, S.K., Pandeya, B.M., Gupta, A.J., Ranjan, H., "Cofinitely Weak Rad-Supplemented Modules'', *Research Journal of Pure Algebra*, 2(9): 259-262 (2012).

[19] Keskin, D., Smith, P.F., Xue, W., "Rings whose modules are -⊕-Supplemented'', *Journal of Algebra*, 218: 470-487 (1999).

[20] Keskin, D., Xue, W., "Generalizations of Lifting Modules'', *Acta Math. Hungar.*, 91(3): 253-261 (2001).

[21] Mohamed, S.H., Müller, B.J., "Continious and Discrete Modules'', *Series=London Math. Soc. LNS 147*, Cambridge University-Cambridge, (1990).

[22] Özcan, A.Ç., Harmancı, A., Smith. P.F., "Duo Modules'', *Glasgow Math. J.*, 48: 533-545 (2006).

[23] Puninski, G., "Serial Rings'', *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht, Boston, London, ISBN 0-7923-7187-9 (2001).

[24] Puninski, G., "Projective Modules over the Endomorphism Ring of a Biuniform Module'', *J. Pure Appl. Algebra*, 188: 227-246 (2004).

[25] Talebi, Y., Hamzekolaee, A.R.M., Keskin Tütüncü D., “On Rad-D_{12} Modules’’, *An. Şt. Univ. Ovidius Constanta*, 21(1): 201-208 (2013).

[26] Tribak, R., “On Cofinitely Lifting and Cofinitely Weak Lifting Modules’’, *Communications in Algebra*, 36(12): 4448-4460 (2008).

[27] Wang, Y., Ding, N., “Generalized Supplemented Modules’’, *Taiwenese J. Math.*, 6: 1589-1601 (2006).

[28] Wang, Y., “Cofinitely (D_{12}) Modules’’, *JP Journal of Algebra. Number Theory and Applications*, 27(2): 143-149 (2012).

[29] Zöschinger, H., “Komplementierte moduln über Dedekindringen’’, *Journal of Algebra*, 29: 42-56 (1974).

[30] Wisbauer, R., “Bimodule Structure on Group Actions and Algebras’’, Modules and Algebras, *Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 81*, 361-362 (1996).

ÖZGEÇMİŞ VE İLETİŞİM BİLGİLERİ

Adı Soyadı	: Recep KILIÇ
Doğum Yeri	: Merkez/ AMASYA
Doğum Tarihi	: 01.03.1988
Bildiği Yabancı Dil	: İngilizce

Eğitim Durumu

Lise	: Amasya Anadolu Öğretmen Lisesi (2001 - 2005)
Lisans	: Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği (2005 - 2010)

İletişim Bilgileri

Adres	: Hızırpaşa Mahallesi, Ziya Gökalp Caddesi, Çaycı 2 Apt., Kısım:1 Daire:3 Merkez / Amasya
E-posta	: kilic_88@hotmail.com