İKİ ARALIKLI BİR SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNE DAİR ASİMPTOTİK İFADELER VE KARAKTERİSTİK POLİNOMLAR

TEVHİDE BALTÜRK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2017

AMASYA

İKİ ARALIKLI BİR SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNE DAİR ASİMPTOTİK İFADELER VE KARAKTERİSTİK POLİNOMLAR

TEVHİDE BALTÜRK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2017

AMASYA

Tevhide BALTÜRK tarafından hazırlanan "İKİ ARALIKLI BİR SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNE DAİR ASİMPTOTİK İFADELER VE KARAKTERİSTİK POLİNOMLAR" adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR ....
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU ....
(Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalı, GOÜ)

Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR ....
(Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı, A.Ü.)

Yrd. Doç. Dr. Serpil ŞAHİN ....
(Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı, A.Ü.)

Tarih: 10/07/2017

Bu tez ile A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Doç. Dr. Mehmet KARA ....
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içinde yer alan bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallara uygun olarak hazırlanıp sunulduğunu, tez yazım kurallarına uygun olarak yazıldığını ayrıca bu tez çalışmasında bana ait olmayan her türlü bilgi ve ifadenin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Tevhide BALTÜRK

İKİ ARALIKLI BİR SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNE DAİR ASİMPTOTİK İFADELER VE KARAKTERİSTİK POLİNOMLAR

(Yüksek Lisans Tezi)

Tevhide BALTÜRK

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2017

ÖZET

Bu tez, iki aralıklı bir sınır değer probleminin çözümüne dair asimptotik ifadeleri ve özellikle de problemin özdeğerlerine ait karakteristik (kuazi) polinomları incelemek amacıyla hazırlanmıştır.

Bu tez, esas olarak sekiz bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tez konusunun tarihi hakkında bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, diferensiyel denklemler, bazı uzaylar ve lineer operatörler hakkında bazı temel tanım ve özelliklere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, asimptotik notasyonlardan olan büyük-O gösteriminin ve küçük-o gösteriminin tanımına yer verilmiştir. Ayrıca büyük-O gösterimi ve küçük-o gösterimi ile ilgili bazı teoremler ve örnekler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, matrisler ve lineer denklem sistemleri ile ilgili bazı temel tanımlara, teoremlere ve örneklere yer verilmiştir. Yine bu bölümde sabit katsayılı lineer homojen diferensiyel denklem sistemlerinin genel çözümleri elde edilirken kullanılan farklı özdeğer ve katlı özdeğer kavramlarına yer verilmiş, tam ve eksik özdeğer kavramları tanımlanmış, bu kavramlar ayrıntılı olarak incelenmiştir. Ayrıca

bu bölümde özdeğerlere ait genelleştirilmiş özdeğer, cebirsel kat, geometrik kat, özuzay ve özbaz kavramları tanımlanmıştır.

Beşinci bölümde, diferensiyel operatör, sınır değer problemi ve Sturm Liouville sınır değer problemi tanımlanmıştır. Ayrıca yine bu bölümde sınır değer problemleri ve Sturm Liouville sınır değer problemlerine ait özdeğer ve özfonksiyon problemlerine yer verilmiştir.

Altıncı bölümde, iki aralıklı bir sınır değer probleminin çözümüne dair asimptotik ifadelere ve bu sınır değer probleminin özdeğerlerine ait karakteristik (kuazi) polinomlara yer verilmiştir.

Yedinci bölümde tez çalışmamızda kullandığımız materyal ve metotlar açıklanmıştır.

Sekizinci bölümde tez çalışmamız ile ilgili sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Bilim Kodu :

Anahtar Kelimeler **:** Özdeğer ve Özvektör, Lineer operatör, Diferensiyel Operatör, Sınır Değer Problemi, Asimptotik İfadeler, Karakteristik (Kuazi) Polinomlar

Sayfa Sayısı **:** 92

Tez Yöneticisi **:** Mustafa KANDEMİR

CHARACTERISTIC POLYNOMIALS AND ASYMPTOTIC EXPRESSIONS FOR SOLUTIONS OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH TWO INTERVAL

(M. Sc. Thesis)

Tevhide BALTÜRK

AMASYA UNIVERSITY

INSTITUE OF SCIENCE

July 2017

ABSTRACT

This thesis is carried out to investigate asymptotic expressions of a two interval boundary value problem and the characteristic (quasi) polynomials belong to the eigenvalues of the problem. This thesis is essentially consists of eight chapters. In the first chapter some informations about the subject of the thesis are given.

In the second chapter, some fundamental definitions and properties about differential equations, some spaces and linear operators are given.

In the third chapter, the definition of the big-O and the small-o notations which are the asymptotic notitions are defined. In addition to these definitions some theorems and examples about the big-O and the small-o notations are given.

In the fourth chapter, some fundamental definitions, theorems and examples about matrices and system of linear equations are given. Furthermore the terms distinct eigenvalue, repeated eigenvalue, defective eigenvalue and non-defective eigenvalue are introduced. These terms are examined with details. In addition to these, in this chapter, the expressions generalized eigenvalue, algebraic power, geometric power, eigenspace and eigenbasis are introduced.

In the fifith chapter, the differential operator, boundary value problem and the Sturm Liouville boundary value problem are introduced. Moreover in this chapter, eigenvalue and eigenfunction problems which are belong to boundary value problem and Sturm Liouville boundary value problem are examined.

In the sixth chapter, asymptotic expressions about a two interval boundary value problem and the characteristic (quasi) polynomials belong to the eigenvalues of this problem are given.

In the seventh chapter, the materials and the methods that we used in our thesis are explained.

In the eighth chapter, conclusions and recommendations related with this thesis are given.

Science Code :

Key Words **:** Eigenvalue and eigenvector, Linear Operator, Differential Operator, Boundary Value Problem, Asymptotic Expressions, Characteristic (Quasi) Polynomial

Page Number **:** 92

Adviser **:** Mustafa KANDEMİR

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının konusunun belirlenmesinde, çalışma sürecinde ve bu aşamalara kadar gelmesinde şahsıma göstermiş olduğu maddi manevi desteklerinden dolayı saygıdeğer danışman hocam **Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR**'e sonsuz saygı ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca bu süreç boyunca desteğini esirgemeyen sevgili eşim **Yücel BALTÜRK**'e, hayatımın her döneminde bana destek olan sevgili babam **Galip GÖKTÜRK**'e ve sevgili annem **Emine GÖKTÜRK**'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

TEMMUZ 2017

Tevhide BALTÜRK

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR LİSTESİ

Bu tez çalışmasında kullanılan bazı kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda verilmiştir.

Kısaltmalar	**Açıklama**
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar
$\mathbb{C}$	: Karmaşık Sayılar
$\rho(T)$	: T Operatörünün Regüler Değerinin Kümesi
$R(\lambda,T)$	: T Operatörünün Rezolventi
$\sigma(T)=\mathbb{C}-\rho(T)$	: T Operatörünün Spektrumu
(X, A, μ)	: Ölçü Uzayı
$C_0^\infty = D(\Omega)$	: Test Fonksiyonlarının Uzayı
$D'(\Omega)$	: Genelleştirilmiş Fonksiyonların Lineer Uzayı
$L_{loc}^p(\Omega)$	: Lokal Lebesgue Uzayı
$L_{loc}^1(\Omega)$	: Lokal İntegrallenebilir Fonksiyon Uzayı
$W_p^k(\Omega)$	: Sobolev Uzayı
$W_p^k(-1,0,1)=W_p^k(-1,0)+W_p^k(0,1)$	: Sobolev Uzaylarının Direkt Toplamı

1. GİRİŞ

Sturm-Liouville teorisinin başlangıcı 1830'lu yıllara dayanmaktadır. Charles Sturm ve Joseph Liouville bu yıllarda yayınlamış oldukları makalelerde bir diferensiyel denklemin niteliksel özelliklerini incelemişlerdir [2]. Günümüzde fizik, matematik ve mühendislikte Sturm-Liouville teorisi ile ilgili çalışmalar yapılmaktadır.

Birkhoff 1908 yılında yayınlanan "Boundary Value and Expansion Problems of Ordinary Linear Differential Equations" isimli makalesinde özdeğer parametreli diferensiyel denklemin çözümünün doğasını, karakteristik değerlerin dağılımını incelemiş, regüler sınır şartını tanımlamış, diferensiyel denklemle ilişkili açık bir aralıkta verilen bir fonksiyonun açılımının yakınsaklığı hakkında bir teoremi ispatlamıştır [8].

Titchmarsh, 1946 yılındaki "Eigenfunction Expansions Asoociated With Second-Order Differential Equations" isimli kitabında, özdeğer açılımlarını, tekil durumları incelemiş, bu durumlarla ilgili çeşitli lemma ve teoremleri ispatları ile birlikte vermiş, tekil durumların genel halini açıklamış ve ilgili örneklere yer vermiştir. Ayrıca spektrumun doğası başlığı altında çeşitli bilgilere yer veren Titchmarsh kitabında özel bir yakınsaklık teoremine yer vermiş ve özdeğerlerin dağılımını incelemiştir [38].

M. A. Naimark 1968 yılında yayınlanan "Linear Differential Operators" isimli kitabında, diferensiyel operatörlerin spektral teorisi konu başlığı altında bilgiler vermiş ve yine bu başlık altında özfonksiyon açılımları konusunu incelemiştir. Bu kitabında Naimark ayrıca birinci mertebeden diferensiyel denklem sistemlerinin çözümlerinin asimptotik davranışı ve ikinci mertebeden lineer diferensiyel denklemin asimptotik davranışı hakkında bilgi vermiştir [32].

Yoshimi Saito, 1971 yılındaki "Eigenfunction Expansions Associated with Second-order Differential Equations For Hilbert Space-Valued Functions" isimli makalesinde yarı açık bir aralıkta özel bir diferensiyel operatör ele almış ve bu operatörle ilişkili özdeğer açılımı üzerine çalışmıştır $[36]$.

Sasun Yakubov, regüler diferensiyel operatörler teorisi üzerine olan eserini 1994 yılında yayınlamıştır. Ayrıca, Yakov Yakubov ile birlikte kaleme aldığı adi ve kısmi diferensiyel denklemlerle ilgili diferensiyel operatör denklemleri konu alan kitabını ise 1999 yılında yayınlamıştır. Bununla birlikte Sasun Yakubov ve Yakov Yakubov sürekli katsayılı sınır değer problemleri ile ilgili çok sayıda makale yayınlamışlardır $[41,42,43,44,45]$.

Werner O. Amrein, Andreas M. Hinz ve David B. Pearson ‘un editörülüğünü yaptığı 2005 yılında yayınlanan “Sturm-Liouville Theory Past and Present” isimli kitapta Sturm ile Liouville’in çalışmalarına nasıl başladıkları hakkında bilgilere yer verilirken ayrıca Sturm’un Salınım Teorisi (Oscillation Results) ile ilgili sonuçlara, teorinin gelişimine, karşılaştırma teoremlerine, Sturm-Liouville operatörlerinin spektral teorisinin ve Sturm-Liouville operatörlerinin spektral analizinde asimptotik metotların açıklandığı oldukça önemli bölümlere yer verilmiştir $[2]$.

Vladimir A. Marchenko, 2011 yılında yayınlanan “Sturm-Liouville Operators and Applications Revised Edition” isimli kitabında, sınırlı aralık üzerinde Sturm-Liouville sınır değer problemi, Sturm-Liouville denkleminin çözümleri, özdeğerler ve iz formülleri için asimptotik formüllere yer vermiştir. Bu kitapta ayrıca Saçılım Teorisi (Scatterıng Theory)’nin sınır değer problemi bölümüne de yer verilmiştir $[23]$.

Bu tez iki aralıklı bir sınır değer probleminin çözümüne dair asimptotik ifadeleri ve karakteristik (kuazi) polinomları incelemek amacıyla ortaya konulmuştur. İki aralıklı bir sınır değer problemine ait özdeğerler ve bu özdeğerlere ait karakteristik polinomların elde edilişi incelenmiştir.

Bu tez çalışmasında ele aldığımız sınır değer problemi süreksizlik noktası ve sınır şartlarında soyut lineer fonksiyoneller içerdiği için lokal olmayan bir sınır değer problemidir. Bu tipte sınır değer problemleri O. Sh. Mukhtarov ve çalışma arkadaşları tarafından çalışılmıştır. O. Sh. Mukhtarov ve çalışma arkadaşlarının bu tipte problemlere ait çok sayıda yayınlanmış makaleleri bulunmaktadır [1, 4, 5, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30].

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tezde kullanacağımız bazı temel kavramları vereceğiz.

2.1. Diferensiyel Denklemler

Doğadaki olayları betimleyen yasaların çoğu bir veya daha fazla büyüklüğün, diğer bazı büyüklüklere göre değişim hızlarını içermektedir. Bu değişim hızları matematikte türev ile ifade edilmektedir. Her bir sürecin matematiksel ifadesinde farklı değişim hızları, farklı türevler olarak ifade bulur. Ayrıca fiziksel süreci tanımlayan yasalar, türevleri de ihtiva eden bazı matematiksel bağıntılar halini alır. Süreci ortaya koyan fonksiyonlarla birlikte bu fonksiyonların sonlu mertebeden türevlerini de içeren matematiksel bağıntılara diferensiyel denklem denir $[16]$.

Şimdi diferensiyel denklemin matematiksel tanımını verelim.

2.1.Tanım $\mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C}$ kümesi $\mathbb{F}$ ile gösterilsin. $\mathbb{F}^m$ üzerinde tanımlanan norm Euclid normu olsun. Bu durumda

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \times (\mathbb{F}^m)^{n+1} \to \mathbb{F}^m, \qquad m \geq 1, n \geq 1 \ (m, n \in \mathbb{N})$$

fonksiyonu ile tanımlanan

$$f\left(x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x), ..., y^{(n)}(x)\right) = 0$$

denklemine **adi diferensiyel denklem** adı verilir.

Buna göre bir adi diferensiyel denklem bir bağımlı değişken, bir bağımsız değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevlerini ihtiva eden bir denklemdir $[20]$.

2.2. Tanım Kısmi türevli diferensiyel denklem birden fazla bağımsız değişkeni, en az bir bağımlı değişkeni ve bu bağımlı değişkenlerin bağımsız değişkenlere göre kısmi türevlerini ihtiva eden bir denklemdir.

$\mathbb{F}$, $\mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C}$ ile gösterilsin. $\mathbb{F}^m$ üzerinde tanımlanan norm Euclid normu olsun. Bu durumda

$$f:\Omega\subseteq(\mathbb{F}^m)^{N^k}\times(\mathbb{F}^m)^{N^{k-1}}\times\cdots\times(\mathbb{F}^m)^N\times\mathbb{F}^m\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{F}^m \quad m\geq 1,\ n\geq 2,\ (m,n\in\mathbb{N})$$

fonksiyonu aracılığıyla tanımlanan

$$f\left(D^k u(x), D^{k-1}u(x),\ldots,Du(x),u(x),x\right)=0$$

denklemine m tane bağımlı değişken ve n tane bağımsız değişken ihtiva eden k - yıncı mertebeden bir **kısmi türevli diferensiyel denklem** adı verilir. Bu denklemdeki $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu

$$u:K\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{F}^m,\ u(x)=\left(u_1(x),u_2(x),\ldots,u_m(x)\right)$$

biçiminde tanımlı bir fonksiyondur. Ayrıca $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ ve k pozitif bir tam sayıdır.

$D^k u(x)$ ise $u(x)$ fonksiyonunun k -yıncı mertebeden bütün türevlerinin kümesini ifade eder [20].

2.3. Tanım x bir bağımsız değişken ve $y=y(x)$ bağımlı değişken olmak üzere n. mertebeden bir diferensiyel denklem

$$f\left(x,\ y(x),\ y'(x),\ y''(x),\ y'''(x),\ \ldots,\ y^{(n)}(x)\right)=0$$

biçiminde yazılır.

Bir I aralığında sürekli olan bir $u=u(x)$ fonksiyonunun $u',u'',\ldots,u^{(n)}$ türevleri I aralığında mevcut ve bu aralıkta bulunan bütün x ler için

$$f\left(x,u,u',u'',\ldots,u^{(n)}\right)=0$$

ise $u=u(x)$ fonksiyonuna

$$f\left(x,\ y(x),\ y'(x),\ y''(x),\ y'''(x),\ \ldots,\ y^{(n)}(x)\right)=0$$

diferensiyel denkleminin bir **çözümü** adı verilir [14].

2.4. Tanım

$$f\left(x,\ y(x),\ y'(x),\ y''(x),\ y'''(x),\ \ldots,\ y^{(n)}(x)\right)=0$$

diferensiyel denklemini sağlayan ve içinde n adet keyfi sabit ihtiva eden

$$F(x,y,c_1,c_2,\ldots,c_n)=0$$

bağıntısına bu diferensiyel denklemin **genel çözümü** adı verilir [20].

2.5. Tanım $F(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0$ genel çözümündeki $c_1, c_2, ..., c_n$ keyfi sabitlerine özel değerler vererek, $F(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0$ genel çözümünden elde edilen çözümlere $f\left(x,\ y,\ y',\ y'',\ y''',\ ...,\ y^{(n)}\right) = 0$ diferensiyel denkleminin **özel çözümleri** adı verilir $[20]$.

2.6. Tanım $f\left(x,\ y(x),\ y'(x),\ y''(x),\ y'''(x),\ ...,\ y^{(n)}(x)\right) = 0$ diferensiyel denklemini ele alalım. x in belli bir x_0 değeri için y nin ve y nin $(n-1)$. mertebeye kadar türevlerinin değeri

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ y''(x_0) = y_2,\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

biçiminde tanımlansın. Bu biçimde tanımlanan ifadelere **başlangıç şartları** adı verilir. Başlangıç şartları ile beraber kurulan

$$\begin{cases} f\left(x,\ y(x),\ y'(x),\ y''(x),\ y'''(x),\ ...,\ y^{(n)}(x)\right) = 0 \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ y''(x_0) = y_2,\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

biçimindeki problemlere **başlangıç değer problemi** denir $[20]$.

2.2. Vektör Uzayları ve Bazı Normlu Uzaylar

2.7. Tanım $(V, \oplus)$ değişmeli bir grup, $(K,\ +,\ \cdot)$ bir cisim olarak verilsin.

$$\odot : K \times V \to V,$$
$$\odot : (k, x) \to k \odot x$$

dış işlemi aşağıda verilen özellikleri sağlıyorsa, V ye $(K,\ +,\ \cdot)$ cismi üzerinde **vektör uzayı** adı verilir.

i. $\forall k \in K$ ve $\forall x \in V$ için $k \odot x \in V$

ii. $\forall k \in K$ ve $\forall x, y \in V$ için $k \odot (x \oplus y) = (k \odot x) \oplus (k \odot y)$

iii. $\forall k, l \in K$ ve $\forall x \in V$ için $(k + l) \odot x = (k \odot x) \oplus (l \odot x)$

iv. $\forall k, l \in K$ ve $\forall x \in V$ için $(k \cdot l) \odot x = k \odot (l \odot x)$

v. $1 \in K$ ve $\forall x \in V$ için $1 \odot x = x$

vi. $\left(K, +, \cdot\right)$ cismi üzerindeki V vektör uzayı $\left((V,\oplus), (K, +, \cdot), \odot\right)$ biçiminde gösterilir.

Eğer $K=\mathbb{R}$ ise V ye **reel vektör uzayı**, $K=\mathbb{C}$ ise **kompleks vektör uzayı** denir $[11]$.

2.8. Tanım A boş olmayan herhangi bir küme olmak üzere

$$d: A\times A \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu $\forall\, x, y, z\in A$ için

i. $d(x,y)\geq 0$

ii. $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

iii. $d(x,y)=d(y,x)$

iv. $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa d fonksiyonuna A kümesi üzerinde bir **metrik** denir. d fonksiyonu A kümesi üzerinde bir metrik ise $\left(A,d\right)$ ikilisine **metrik uzay** adı verilir $[6]$.

2.9. Tanım A, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzay olmak üzere

$\forall x, y\in A$ ve $\forall \delta\in\mathbb{F}$ için

i. $\| x\|\geq 0$

ii. $\| x\|=0 \Leftrightarrow x=0$

iii. $\| \delta x\|=|\delta|\| x\|$

iv. $\| x+y\|\leq\| x\|+\| y\|$

özellikleri sağlanıyorsa

$$\|.\|: A\rightarrow\mathbb{R}$$

fonksiyonuna A üzerinde bir norm adı verilir.

Üzerinde bir $\|.\|$ normu tanımlanmış A vektör uzayına **normlu vektör uzay** ya da **normlu uzay** denir. $\left(A, \|.\|\right)$ biçiminde gösterilir $[12]$.

2.10. Tanım (A,d) metrik uzayından alınan bir $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım. $\forall\varepsilon>0$ ve $\forall m,n\geq n_0$ için $d(x_m,x_n)<\varepsilon$ olacak biçimde bir $n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{Z}^+$ sayısı mevcut ise $\{x_n\}$ dizisine bir **Cauchy dizisi** adı verilir $[37]$.

2.11. Tanım $(A,\|.\|)$ bir normlu vektör uzay ve d fonksiyonu, $d(x,y)=\|x-y\|$ ile bir metrik tanımlar. O halde d metriğine $\|.\|$ normu tarafından **indirgenen (üretilen) metrik** adı verilir $[37]$.

2.12. Tanım (A,d) metrik uzayında yer alan her Cauchy dizisi yakınsak ise (A,d) metrik uzayına **tam uzay** adı verilir $[37]$.

2.13. Tanım Bir normlu vektör uzayı, normdan üretilen metriğe göre tam ise bu normlu vektör uzayına **Banach uzayı** adı verilir $[37]$.

2.14. Tanım A bir kompleks vektör uzayı olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan

$$\langle,\rangle : A\times A\to\mathbb{C}$$

fonksiyonuna bir **iç çarpım** adı verilir. $\forall x,y,z\in A$ ve $\forall\delta\in\mathbb{C}$ için

i. $\langle x,x\rangle\geq 0$ ve $\langle x,x\rangle=0\Leftrightarrow x=\theta$,

ii. $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$,

iii. $\langle\delta x,y\rangle=\delta\langle x,y\rangle$,

iv. $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$.

Üzerinde bir iç çarpım tanımlı olan A vektör uzayına ise bir **iç çarpım uzayı** denir $[13]$.

2.15. Tanım Üzerindeki iç çarpım aracılığıyla tanımlanmış metriğe göre tam olan iç çarpım uzayına (ön Hilbert uzayına), bir **Hilbert uzayı** adı verilir $[12]$.

2.3. Lineer Operatörler ve Spektral Özellikleri

2.16. Tanım U ve V normlu vektör uzayları skaler $\mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlı olsun. $\delta \in \mathbb{R}$ ve $\beta \in \mathbb{R}$ (ya da $\mathbb{C}$) olsun. Her $x, y \in U$ için

$$A : U \to V$$

fonksiyonu

$$A(\delta x + \beta y) = \delta A(x) + \beta A(y)$$

koşulunu sağlıyorsa A fonksiyonuna **lineer dönüşüm** ya da **lineer operatör** adı verilir $[39]$.

2.17. Tanım Bir lineer operatör

$$A : U \to V$$

olmak üzere $V = \mathbb{F}\ (\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C})$ durumunda $A : U \to V$ lineer operatörüne **lineer fonksiyonel** adı verilir $[37]$.

2.18. Tanım $\left(X, \|.\|_X\right)$ ve $\left(Y, \|.\|_Y\right)$ normlu lineer uzaylar ve $T : X \to Y$ lineer bir operatör olsun. Her $x \in X$ için

$$\|Tx\|_Y \leq K \|x\|_X$$

olacak biçimde bir $K \geq 0$ reel sayısı varsa T lineer operatörüne **sınırlı operatör** adı verilir $[6]$.

$T : X \to Y$ sınırlı bir lineer operatör olsun. $\|T\|$ normu, $\|Tx\|_Y \leq K\|x\|_X$ eşitsizliğini sağlayan en küçük K sayısıdır.

$$\|T\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$$

biçiminde gösterilir.

2.19. Tanım X , bir Banach uzayı olmak üzere

$$T : X \to X$$

biçiminde tanımlanan bir sınırlı lineer operatör olsun.

$$Tx = \lambda x$$

ya da I birim operatör olsun. Bu durumda

$$(T - \lambda I)x = 0$$

denkleminin sıfırdan farklı bir x çözümü mevcut ise $\lambda \in \mathbb{C}$ değerine T operatörüne ait **karakteristik değer** ya da **özdeğer (eigenvalue)**, x vektörüne ise λ özdeğerine karşılık gelen **karakteristik vektör** ya da **özvektör (eigenvector)** adı verilir $[20]$.

2.20. Tanım X , bir Banach uzayı olsun.

$$T : D(T) \subset X \to R(T) \subset X$$

sınırlı lineer operatör olmak üzere, $(T - \lambda I)$ operatörünün tersinin var olmasını sağlayan $\lambda \in \mathbb{C}$ değerine T operatörünün **regüler değeri** denir.

$$\rho(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, (T - \lambda I)^{-1} \text{ mevcut } \right\} \subset \mathbb{C}$$

kümesine ise T operatörünün regüler değerlerinin kümesi adı verilir. $(T - \lambda I)$ operatörünün $(T - \lambda I)^{-1}$ tersinin var olması durumunda bu ters operatöre T operatörünün **rezolventi (resolvent)** denir.

$$R(\lambda, T) = (T - \lambda I)^{-1}$$

biçiminde gösterilir. Bundan dolayı T operatörünün regüler değerlerinin kümesi ayrıca **rezolvent kümesi** olarak da isimlendirilir $[20]$.

2.21. Tanım T operatörü X Banach uzayında sınırlı lineer operatör olsun. T operatörünün $\rho(T)$ regüler değerlerinin kümesinin tümleyeni olan

$$\sigma(T) = \mathbb{C} - \rho(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, (T - \lambda I)^{-1} \text{ yoktur} \right\}$$

kümesine T operatörünün **spektrumu (spectrum)** adı verilir $[20]$.

2.22. Tanım $\lambda \in \sigma(T)$ olsun. Bu durumda i, ii ve iii ifadeleri geçerlidir.

i) T nin **nokta spektrumu**

$$\sigma_p(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, (T - \lambda I) \text{ birebir değildir} \right\}$$

kümesi ile tanımlanır. Burada $\sigma_p(T)$ kümesinin elemanları T operatörünün özdeğerleridir. Buradan $(T-\lambda I)y=0$ olduğundan $(T-\lambda I)$ nın birebir olmadığı anlaşılır. Buradan da $(T-\lambda I)^{-1}$ ifadesinin tersinin var olmadığı elde edilir. Dolayısıyla özdeğerler T operatörünün bir spektrumu olur.

ii) T nin **sürekli spektrumu**

$$\sigma_c(T)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}\,\middle|\,(T-\lambda I)\text{ bire bir, örten değil ve }\overline{R(T-\lambda I)}=X\right\}$$

kümesi ile tanımlanır.

iii) T nin **artık spektrumu**

$$\sigma_r(T)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}\,\middle|\,(T-\lambda I)\text{ bire bir, örten değil ve }\overline{R(T-\lambda I)}\neq X\right\}$$

kümesi ile tanımlanır $[20]$.

2.1. Örnek $T\in B\left(\ell^2\right)$ operatörü

$$T\left(x_1,x_2,x_3,x_4,...\right)=\left(x_1,-x_2,x_3,-x_4,...\right)$$

biçiminde tanımlansın.

i. T operatörünün $\left(1,0,0,0,...\right)$ özvektörüne karşılık gelen özdeğerinin 1 olduğunu ve T operatörünün $\left(0,1,0,0,...\right)$ özvektörüne karşılık gelen özdeğerinin -1 olduğunu gösterelim.

ii. T operatörü için $|T|^2$ yi bularak T operatörünün spektrumunun $\sigma\left(T\right)=\{-1,1\}$ kümesi olduğunu gösterelim.

Çözüm:

i) 1 değerinin T operatörünün özdeğeri olduğunu göstermek için

$T\left(1,0,0,0,...\right)=\lambda\left(1,0,0,0,...\right)$ eşitliğini sağladığını göstermeliyiz.

$$\left(1,0,0,0,...\right)\in\ell^2$$

olduğundan

$$T(1,0,0,0,...)=(1,0,0,0,...)=1\cdot(1,0,0,0,...)$$

olur. Böylece yukarıda verilen eşitlik sağlanır. Buradan 1 değerinin T operatörünün özdeğeri olduğu elde edilir.

Benzer şekilde -1 değerinin T operatörünün özdeğeri olduğunu göstermek için

$$T(0,1,0,0,...)=\lambda(0,1,0,0,...)$$

eşitliğini sağladığını göstermeliyiz.

$$(0,1,0,0,...)\in\ell^2$$

olduğundan

$$T(0,1,0,0,...)=(0,-1,0,0,...)=(-1)\cdot(0,1,0,0,...)$$

olur. Böylece yukarıda verilen eşitlik sağlanır. Buradan -1 değerinin T operatörünün özdeğeri olduğu elde edilir.

ii)

$$T^2(x_1,x_2,x_3,x_4,...)=T(T(x_1,x_2,x_3,x_4,...))=T(x_1,-x_2,x_3,-x_4,...)=(x_1,x_2,x_3,x_4,...)$$

olur. Buradan

$$T^2=\mathrm{I}$$

olur.

$T^2=\mathrm{I}$ olduğundan

$$\sigma(T^2)=\{1\}$$

olur. Dolayısıyla

$$\sigma(T^2)=(\sigma(T))^2$$

eşitliği mevcut olduğundan

$$\sigma(T)\subseteq\{-1,1\}$$

dir.

1 ve -1 değerleri T operatörünün özdeğerleri olduğu için

$$\{-1,1\}\subseteq\sigma(T)$$

olur. Böylece

$$\sigma(T) \subseteq \{-1,1\} \text{ ve } \{-1,1\} \subseteq \sigma(T)$$

olduğundan

$$\sigma(T) = \{-1,1\}$$

elde edilir $[35]$.

2.2. Örnek Öyle bir $T \in B(\ell^2)$ operatörü bulalım ki $T \neq 0$ ve $\sigma(T) = 0$ olsun$[35]$.

Çözüm: T operatörünü

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ...) = (0, x_1^2, 0, x_3^2, 0, ...)$$

olarak tanımlayalım. Bu şekilde tanımlanan T operatörü için $T \neq 0$ olduğu açıktır. Öte yandan

$$\|T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, ...)\|^2 = \|(0, x_1^2, 0, x_3^2, 0, ...)\|^2 \leq \|(x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2, x_5^2, ...)\|^2$$

olur. Dolayısıyla T operatörü sınırlıdır. Buna göre

$$T^2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ...) = T(0, x_1^2, 0, x_3^2, 0, ...) = (0, 0^2, 0, 0^2, 0, ...) = (0, 0, 0, 0, 0, ...)$$

elde edilir. Buradan ise,

$$T^2 = 0$$

olur. Dolayısıyla $\lambda \in \sigma(T)$ ise o zaman

$$\sigma(T^2) = \{0\}$$

olur. Buradan

$$\lambda^2 \in \sigma(T^2) = \{0\} \text{ elde edilir.}$$

Ayrıca bir $(0, 0, 0, 1, 0, ...)$ elemanı için,

$$T(0, 0, 0, 1, 0, ...) = (0, 0, 0, 0, 0, ...)$$
$$= 0.(0, 0, 0, 0, 0, ...)$$

olur. Yukarıdaki eşitlikten 0 değerinin T operatörü için bir özdeğer olduğu anlaşılır. Buradan da

$$0 \in \sigma(T)$$

elde edilir. Böylece

$$\sigma(T)=\{0\}$$

olur.

2.4. Zayıf Türevler ve Sobolev Uzayları

2.23. Tanım (X, A, η) bir ölçü uzayı olarak verilsin. $g \in M(X, A)$ olmak üzere $\int_X g^+ d\eta$ ve $\int_X g^- d\eta$ integrallerinin ikisi de sonlu oluyorsa g fonksiyonuna X üzerinde η ye göre **integrallenebilir fonksiyon** adı verilir. Bu integral

$$\int_X g d\eta = \int_X g^+ d\eta - \int_X g^- d\eta$$

reel sayısı olur [11] .

2.24. Tanım $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ve $f : \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olmak üzere,

$$\overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}$$

kümesine f fonksiyonunun **supportu (desteği)** adı verilir ve $\operatorname{supp} f$ ile ifade edilir. f fonksiyonunun support kümesi Ω kümesinde kompakt oluyorsa f fonksiyonuna **supportu kompakt olan fonksiyon** adı verilir [3].

2.25. Tanım Her mertebeden türevlenebilen ve Ω kümesinde supportu kompakt olan fonksiyonlara **test fonksiyonu** adı verilir. Ω kümesindeki test fonksiyonlarının uzayı $\mathcal{D}(\Omega)$ şeklinde gösterilir. Buradan $\mathcal{D}(\Omega)$ uzayı,

$$\mathrm{C}_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega) = \left\{ f \in \mathrm{C}^\infty(\Omega) \mid \operatorname{supp}(f) \text{ kompakt} \right\}$$

biçiminde ifade edilebilir [3].

2.26. Tanım $\mathbb{R}^n$ de bir bölge Ω olsun. $\overline{Y}$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin kapanışı olsun. $\overline{Y} \subset \Omega$ ve $\overline{Y}$ kümesi $\mathbb{R}^n$ nin kompakt bir alt kümesi olduğunda $Y \subset\subset \Omega$ yazılır. f fonksiyonu, Y kümesinde tanımlı ise, f fonksiyonun desteği $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in Y \mid f(x) \neq 0\}}$ biçiminde tanımlanır. Ayrıca $\operatorname{supp} f \subset\subset \Omega$ oluyorsa f fonksiyonuna **Ω da kompakt desteğe sahip fonksiyon** adı verilir $[3]$.

2.27. Tanım $D(\Omega)$ üzerinde tanımlı olan sürekli lineer fonksiyonellerin uzayına $D(\Omega)$ uzayının dual uzayı adı verilir ve

$$D'(\Omega) = \{ f \mid f : D(\Omega) \to \mathcal{F} \text{ sürekli ve lineer} \}$$

biçiminde gösterilir. $D'(\Omega)$ dual uzayının elemanlarına ise **genelleştirilmiş fonksiyon** denir $[11]$.

2.28. Tanım $1 \leq p < \infty$ ve Ω, $\mathbb{R}^n$ de bir bölge olsun. Bu durumda p. kuvveti Ω bölgesinin bütün kompakt alt kümelerinde integrallenebilen **Ω deki bütün ölçülebilir fonksiyonlar uzayı $L^p_{loc}(\Omega)$** biçiminde gösterilir. Bu uzay $p = 1$ için lokal integrallenebilir fonksiyonlar sınıfını ifade eder ve $L^1_{loc}(\Omega)$ biçiminde gösterilir $[3]$.

2.29. Tanım u fonksiyonu, Ω üzerinde hemen hemen her yerde tanımlanmış olsun. Her açık $U \subset \Omega$ için $u \in L^1(U)$ olmak üzere, u fonksiyonuna **lokal integrallenebilirdir** denir ve $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ biçiminde gösterilir.

Her $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ fonksiyonuna karşılık gelen burada bir $T_u = \mathcal{D}'(\Omega)$ genelleştirilmiş fonksiyonu mevcuttur ve

$$T_u(\varphi) = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx, \qquad \varphi(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$$

biçiminde ifade edilir $[11]$.

2.30. Tanım $\mathbb{R}^n$ de bir bölge Ω ve $k \in \mathbb{Z} - \mathbb{Z}^-$ olsun. Ω bölgesinde $|\alpha| \le k$ mertebesine kadar bütün $D^\alpha f$ kısmi türevleri sürekli olan fonksiyonlardan meydana gelen lineer uzay $C^k(\Omega)$ şeklinde ifade edilir.

$$C(\Omega) = C^0(\Omega) \text{ ve } C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega)$$

olmak üzere $C^0(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega)$ alt uzayları sırasıyla Ω da kompakt desteğe sahip olan $C^0(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega)$ uzaylarındaki bütün fonksiyonlardan meydana gelir. $C^\infty(\Omega)$ uzayının elemanlarına **test fonksiyonu** ya da **düzgün (smooth) fonksiyon** adı verilir. $C^\infty(\Omega)$ uzayının Ω bölgesinde yer alan ve kompakt desteğe sahip fonksiyonlarından oluşan uzay ise $C_0^\infty(\Omega)$ biçiminde ifade edilir $[3]$.

2.31. Tanım α çoklu – indisi ve $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ fonksiyonu verilsin. Her $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega v\psi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega uD^\alpha \psi dx$$

eşitliği sağlanıyorsa $v \in L^p_{loc}(\Omega)$ fonksiyonuna u fonksiyonunun $\boldsymbol{\alpha}$**. zayıf türevi** adı verilir $[3]$.

2.32. Tanım $\mathbb{R}^n$ de bir açık küme Ω olarak verilsin. $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $1 \le p \le \infty$ olmak üzere $L_p(\Omega)$ uzayında alınan ve $k-$yıncı mertebeden kısmi türevleri mevcut olan fonksiyonların

$$W_p^k(\Omega) = \left\{ u \in L_p \middle| D^\alpha u \in L_p(\Omega), |\alpha| \le k \right\}$$

uzayına **Sobolev uzayı** adı verilir.

Burada,

i. $u : \Omega \to \mathbb{R}$ lokal integrallenebilen fonksiyon

ii. α bir çoklu-indis olmak üzere $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$,

iii. $D^\alpha u = \partial^\alpha u = \partial^{\alpha_1}\partial^{\alpha_2}\ldots\partial^{\alpha_n} u = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$

biçiminde tanımlıdır.

iv. $D^{\alpha}u$, u nun $\alpha-$yıncı mertebeden genelleştirilmiş türevini ifade etmektedir.

v. $W_p^k(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{W_p^k}=\left(\sum_{|\alpha|\le k}\|D^{\alpha}u\|^p_{L_p(\Omega)}\right)^{1/p},\quad 1\le p<\infty,$$

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)}=\max_{|\alpha|\le k}\|D^{\alpha}u\|_{L_\infty(\Omega)},\quad p=\infty$$

normuna göre bir Banach uzayı olur.

vi. $p=2$ için $W_2^k(\Omega)$ uzayı

$$\langle u,u\rangle=\left(\sum_{|\alpha|\le k}\langle D^{\alpha}u,D^{\alpha}u\rangle_{L_p(\Omega)}\right)^{1/2}$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayı olur.

vii. $W_p^0(\Omega)=L_p(\Omega)$ [3].

2.33. Tanım (Sobolev Uzaylarının Direkt Toplamı)

$p>1$ reel sayı ve $k\ge 0$ olmak üzere Sobolev uzaylarının direkt toplamı $W_p^k(-1,0,1)=W_p^k(-1,0)+W_p^k(0,1)$ ile gösterilir. Bu durum

$$\|u\|_{p,k}=\|u\|_{W_p^k(-1,0)}+\|u\|_{W_p^k(0,1)}$$

normu ile sırasıyla $(-1,0)$ ve $(0,1)$ aralıklarında $W_p^k(-1,0)$ ve $W_p^k(1,0)$ uzaylarına ait olan, $[-1,0)\cup(0,1]$ aralığında tanımlı $u=u(x)$ kompleks değerli fonksiyonların Banach uzayı şeklinde ifade edilir [11].

3. ASİMPTOTİK NOTASYONLAR

Bu bölümde asimptotik notasyonlardan büyük-O ve küçük-o gösterimleri tanıtılacaktır. Ayrıca bu gösterimlere ait birtakım özelliklere ve örneklere yer verilecektir.

3.1. Büyük-O Gösterimi

Paul Bachmann, büyük-O gösterimini ilk olarak 1892 yılında yayınlanan kitabında tanıtmıştır. İlerleyen yıllarda Edmund Landau tarafından büyük-O gösterimi geliştirilmiştir. Büyük-O gösterimi, Edmund Landau'nun katkılarından dolayı **Landau sembolü** olarak da adlandırılır $[15]$.

3.1. Tanım $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ve $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tanımlı fonksiyonlar olmak üzere , $x \geq n$ olduğu zaman $|f(x)| \leq K|g(x)|$ olacak biçimde bu eşitsizliği sağlayan pozitif K ve n reel sayılar mevcut ise $f(x)=O\big(g(x)\big),\ x\to\infty$ olur.

Bu ise " $f(x)$ fonksiyonu $g(x)$ fonksiyonunun büyük-O sudur" ile ifade edilir. Eğer f fonksiyonu g fonksiyonunun büyük-O su ise $f \in O(g)$ biçiminde yazılabilir $[33]$.

Diğer bir ifadeyle,

$$O\big(g(x)\big)=\left\{\begin{array}{c} f(x): \forall x \geq n \text{ için } |f(x)| \leq K|g(x)| \text{ olacak şekilde} \\ \text{pozitif } K \text{ ve } n \text{ reel sayıları mevcuttur.} \end{array}\right\}$$

şeklinde de yazılabilir.

Başka bir deyişle, $f(x)$ fonksiyonunun $O\big(g(x)\big)$ şeklinde belirlenmesi demek, x sonsuza giderken $f(x)$ fonksiyonunun alacağı değerlerin $g(x)$ fonksiyonunun bir sabit sayı ile çarpılmış halinden daha yavaş büyüyor olması demektir. Ayrıca buradan g fonksiyonunun f fonksiyonu için bir asimptotik üst sınır olduğu söylenir $[17]$.

$f(x) \in O\big(g(x)\big)$ olduğunu göstermek için $x \geq n$ olduğu zaman $|f(x)| \leq K|g(x)|$ olacak biçimde bu eşitsizliği sağlayan K ve n sabitlerinden yalnızca bir tanesine ihtiyacımız vardır. $f(x)$ fonksiyonunun $O(g(x))$ olması için K ve n sabitleri mevcut ise, sonsuz sayıda K ve n sabitleri bulabiliriz. Bu durumu göstermek için $x \geq n'$ ve $x \geq n$ olduğu zaman $|f(x)| \leq K|g(x)| \leq K'|g(x)|$ olduğu dikkate alınmalıdır. Burada K ve n sabitleri $K < K'$ ve $n < n'$ koşulunu gerçekleyen herhangi bir K' ve n' sabitleri olmaktadır.

$f(x)$ fonksiyonunun $O(g(x))$ olması ilişkisi bazen $f(x) = O(g(x))$ şeklinde de ifade edilir. Lakin buradaki eşitlik durumu gerçek eşitliği ifade etmemektedir. Çünkü $O(g(x))$, değeri $O(g(x))$ olan fonksiyonlar kümesidir. Dolayısıyla, $f(x) \in O(g(x))$ şeklinde de yazılabilir.

Büyük-O gösterimi kullanıldığı zaman $f(x) \in O(g(x))$ olması durumunda $g(x)$ fonksiyonu mümkün olduğu kadar küçük seçilir $[33]$.

3.1. Örnek Büyük-O gösteriminden yararlanarak r tane pozitif tamsayının toplamı için büyük-O öngörüleri elde edelim.

Çözüm: İlk r tane tam sayının toplamında yer alan her bir tamsayı r yi geçmemektedir. Buradan,

$$1+2+...+r \leq r+r+...+r = r^2$$

olmaktadır. Bu eşitsizlikten $1+2+3+...+r$ toplamı $O(r^2)$ olmaktadır. Burada sabitler $K=1$ ve $n=1$ olarak alınmıştır $[33]$.

3.2. Örnek Faktöriyel fonksiyonu ile faktöriyel fonksiyonun logaritması için büyük-O gösteriminden yararlanarak büyük-O öngörüleri elde edelim.

Not: Burada faktöriyel fonksiyonu $f(r) = r!$ olarak tanımlanmaktadır. $r! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot r$ olmak üzere r bir pozitif tamsayıdır. Ayrıca $0! = 1$dir.

Not: $r!$ fonksiyonu hızlı bir şekilde büyümektedir. Yani;

$1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 6,\ ...\ 10! = 3628800$ şeklinde hızla büyümektedir.

Çözüm: Çarpımda yer alan her bir terim r yi geçmemektedir. Böylece $r!$ için büyük-O öngörüleri elde edilebilir. Buradan

$$\begin{aligned} r! &= 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot r \\ &\leq r\cdot r\cdot \ldots \cdot r \\ &= r^r \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilmektedir.

Bu eşitsizlik sayesinde $r!$ değerinin $O\left(r^r\right)$olduğu elde edilir. Burada sabitler $K=1$ ve $n=1$ olarak alınmıştır.

$r!$ için elde edilen eşitsizliğin her iki tarafının logaritmasını alacak olursak

$$\log r! \leq \log r^r = r\log r$$

olur. Buradan $\log r!$ değerinin $O\left(r\log r\right)$ olduğu elde edilir. Burada $K=1$ ve $n=1$ sabitler olarak belirlenmiştir $[33]$.

3.3. Örnek $f(x)=x^2+3x+1\in O(x^2)$ olduğunu gösterelim.

Çözüm: $x\geq 1$ olduğu zaman $x\leq x^2$ ve $1\leq x^2$ olacaktır. Buradan, $x\geq 1$ olduğu zaman

$$0\leq x^2+3x+1\leq x^2+3x^2+x^2=5x^2$$

olarak bulunur. Burada $K=5$ ve $n=1$ değerlerini $f(x)\in O(x^2)$ olduğunu göstermek için sabitler olarak kabul edebiliriz. Dolayısıyla $x\geq 1$ olduğu zaman $f(x)=x^2+3x+1\leq 5x^2$ olmaktadır. Ayrıca

$x\geq 3$ olduğu zaman ise $3x\leq x^2$ ve $1\leq x^2$ olmaktadır. Buradan, $x\geq 3$ iken

$$0\leq x^2+3x+1\leq x^2+x^2+x^2=3x^2$$

olmaktadır. Buradan sonuç olarak $K=3$ ve $n=3$ değerleri $f(x)\in O(x^2)$ olması için aranan sabitleridir.

" $f(x) \in O(x^2)$ olması" durumunda x^2 nin, x^2 den büyük değerleri olan başka bir fonksiyon ile yer değiştirilebileceği dikkate alınmalıdır. Örneğin, $f(x) \in O(x^3)$, $f(x) \in O(x^2 + x + 6)$ gibi.

3.2. Büyük - O Gösterimine Ait Teoremler

3.1. Teorem $f:\mathbb{N} \to \mathbb{R},\ g:\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar olsun. Eğer

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = L, \quad L \geq 0 \text{ ise } f \in O(g)$$

olur.

İspat: Kabul edelim ki $\lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = L$ olsun. Burada L, negatif olmayan bir reel sayıdır.

Limitin tanımı gereği x-i yeterince büyük seçerek $\frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ ifadesini L ye yaklaştırabiliriz.

Özel halde bazı pozitif n sayıları için $x \geq n$ seçerek $\frac{|f(x)|}{|g(x)|}$ ifadesinin L nin 1 komşuluğunda olmasını sağlayabiliriz. Burada $x \geq n$ ve $n \geq 0$ olacak şekildeki n sayısı için $\left| \frac{|f(x)|}{|g(x)|} - L \right| \leq 1$ elde edilir. Özel halde,

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} - L \leq 1 \Rightarrow \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq L + 1 \Rightarrow |f(x)| \leq (L+1)|g(x)|$$

olur. Buradan $K = L + 1$ seçilebilir. Dolayısıyla $f \in O(g)$ olur [10].

3.4. Örnek $x^2+10 \in O(x^2)$ olduğunu gösterelim.

Çözüm:

1.Yol (Büyük-O tanımını kullanarak): $K=3$ ve $n=3$ olsun. Buradan, eğer $x \geq 3$ ise, $3x^2 = x^2+2x^2 \geq x^2+2.3^2 \geq x^2+10$ olduğundan $x^2+10 \in O(x^2)$ olur.

2.Yol (Büyük-O tanımını kullanarak): $K=2$ ve $n=4$ olsun. Buradan, eğer $x \geq 4$ ise

$2x^2 = x^2+x^2 \geq x^2+4^2 \geq x^2+10$ olduğundan $x^2+10 \in O(x^2)$ olur.

3.Yol (3.1 teorem kullanılarak): $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+10}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{10}{x^2}\right) = 1+0=1$ olur.

Dolayısıyla 3.1 teorem gereği, $x^2+10 \in O(x^2)$ olur $[10]$.

3.2. Teorem : $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar olsun. Eğer $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|f(x)|}{|g(x)|}=\infty$ ise bu durumda $f \notin O(g)$ olur.

İspat: Kabul edelim ki $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|f(x)|}{|g(x)|}=\infty$ olsun. Bu ise, her pozitif K sayısı için öyle bir M pozitif sayısı vardır ki $x \geq M$ için $\dfrac{|f(x)|}{|g(x)|} > K$ olması anlamına gelir. Dolayısıyla her K ve n pozitif sayısı için bir $x \geq n$ (x, n ve M nin en büyüğünden daha büyük olarak alınıyor) vardır öyle ki $\dfrac{|f(x)|}{|g(x)|} > K$ veya $|f(x)| > K|g(x)|$ dir. Buradan $f \notin O(g)$ olur $[10]$.

3.5. Örnek $x^2 \notin O(x)$ olduğunu gösterelim.

Çözüm: 1.Yol (Büyük-O tanımını kullanarak): x-i öyle seçelim ki $x \geq n$ ve $x > K$ olsun. Buradan $x^2 = x.x > K.x$ eşitsizliği elde edilir. Böylece $x^2 \notin O(x)$ elde edilir.

2.Yol (3.2 teorem kullanılarak): $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} x = \infty$ olur. Dolayısıyla 3.2 teorem gereği $x^2 \notin O(x)$ olur $[10]$.

3.6. Örnek $6x^2 \in O(x^3)$ olduğunu gösterelim.

Çözüm: $x \geq 6$ olduğu zaman, $6x^2 \leq x^3$ eşitsizliği mevcuttur.

Burada, $K=1$ ve $n=6$ değerlerini $6x^2$ nin $O(x^3)$ olması durumunun sabitleri olarak kabul edebiliriz. Ayrıca, $x \geq 1$ olduğu zaman $6x^2 \leq 6x^3$ olur. Yani $K=6$ ve $n=1$ değerleri de, $6x^2$ nin $O(x^3)$ olması durumunun sabitleri olur.

3.7. Örnek $6x^2 \in O(x^3)$ olduğunu gösterdik. Acaba $x^3 \in O(6x^2)$ midir?

Çözüm: $x^3 \in O(6x^2)$ olup olmadığını bulmak için, $x \geq n$ olduğunda $x^3 \leq K(6x^2)$ eşitsizliğini sağlayan K ve n sabitlerinin olup olmadığını bulmamız gerekir. $x^3 \leq K(6x^2)$ eşitsizliği $x \leq 6K$ eşitsizliğine denktir. Son eşitsizlik ilk eşitsizliğin pozitif değerler alan x^2 ile bölünmesi ile elde edilmektedir. n-nin değeri ne olursa olsun tüm $x \geq n$-ler için $x \leq 6K$ eşitsizliğini sağlayan bir K yoktur. Çünkü x çok büyük herhangi bir sayı yapılabilir. Yani, buradaki büyük-O ilişkisi için hiçbir K ve n sabitleri yoktur. Dolayısıyla $x^3 \notin O(6x^2)$ olur.

3.3. Teorem $f(x) = a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ olmak üzere, $a_0, a_1, \ldots, a_p$ reel sayılardır. Bu durumda $f(x) \in O\left(x^p\right)$ olur.

İspat: Üçgen eşitsizliğini kullanacak olursak, eğer $x \geq 1$ ise

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= \left|a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right| \\
&\leq \left|a_p\right| x^p + \left|a_{p-1}\right| x^{p-1} + \ldots + \left|a_1\right| x + \left|a_0\right| \\
&= x^p \left(\left|a_p\right| + \frac{\left|a_{p-1}\right|}{x} + \ldots + \frac{\left|a_1\right|}{x^{p-1}} + \frac{\left|a_0\right|}{x^p} \right) \\
&\leq x^p \left(\left|a_p\right| + \left|a_{p-1}\right| + \ldots + \left|a_1\right| + \left|a_0\right| \right)
\end{aligned}$$

Buradan $x \geq 1$ olduğu zaman

$$|f(x)| \leq Kx^p$$

eşitsizliği elde edilir.

Burada $K = |a_p| + |a_{p-1}| + ... + |a_1| + |a_0|$ olarak alınır. Dolayısıyla sabitler $K = |a_p| + |a_{p-1}| + ... + |a_1| + |a_0|$ ve $n = 1$ olarak belirlenirse $f(x) \in O(x^p)$ olduğu elde edilir $[33]$.

3.4. Teorem $f_1(x) \in O(g_1(x))$ ve $f_2(x) \in O(g_2(x))$ olsun. Bu durumda

$$(f_1 + f_2)(x) \in O\left(\max\{|g_1(x)|, |g_2(x)|\}\right)$$

olur.

İspat: Büyük-O gösteriminin tanımından yararlanırsak

$x \geq n_1$ olduğu zaman $|f_1(x)| \leq K_1 |g_1(x)|$ ve $x \geq n_2$ olduğu zaman $|f_2(x)| \leq K_2 |g_2(x)|$ eşitsizliğini sağlayan K_1, K_2, n_1 ve n_2 sabitleri mevcuttur. $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ toplamını tahmin etmek için, üçgen eşitsizliğini kullanacak olursak

$$\begin{aligned} |(f_1 + f_2)(x)| &= |f_1(x) + f_2(x)| \\ &\leq |f_1(x)| + |f_2(x)| \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

x, n_1 ve n_2 değerlerinin her ikisinden büyük olduğu zaman, $|f_1(x)|$ ve $|f_2(x)|$ ifadelerinin eşitsizlikleri sayesinde aşağıdaki sonuca ulaşılmaktadır.

$$\begin{aligned} |f_1(x)| + |f_2(x)| &\leq K_1 |g_1(x)| + K_2 |g_2(x)| \\ &\leq K_1 |g(x)| + K_2 |g(x)| \\ &= (K_1 + K_2)|g(x)| \\ &= K|g(x)|, \end{aligned}$$

Buradaki eşitsizlikte $K = K_1 + K_2$ ve $g(x) = \max(|g_1(x)|, |g_2(x)|)$ olarak alınmaktadır. Bu eşitsizlik ile $x \geq n$ olduğu zaman $|(f_1 + f_2)(x)| \leq K|g(x)|$ elde edilmektedir. Bu eşitsizlikte $n = \max(n_1, n_2)$ olarak alınır.

Böylece $(f_1 + f_2)(x) \in O\left(\max\{|g_1(x)|, |g_2(x)|\}\right)$ olduğu elde edilir $[33]$.

3.1. Sonuç Eğer $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ fonksiyonunun her ikisi de $O\left(g(x)\right)$ ise bu durumda $\left(f_1+f_2\right)(x)\in O\left(g(x)\right)$ olur.

3.5. Teorem $f_1(x)\in O\left(g_1(x)\right)$ ve $f_2(x)\in O\left(g_2(x)\right)$ olduğunda

$$\left(f_1 f_2\right)(x)\in O\left(g_1(x)g_2(x)\right)$$

olur.

İspat:

$$\begin{aligned}\left|\left(f_1 f_2\right)(x)\right| &= \left|f_1(x)\right|\left|f_2(x)\right| \\ &\le K_1\left|g_1(x)\right|K_2\left|g_2(x)\right| \\ &\le K_1K_2\left|\left(g_1g_2\right)(x)\right| \\ &\le K\left|\left(g_1g_2\right)(x)\right|\end{aligned}$$

Bu eşitsizlikte $K=K_1K_2$ olarak alınırsa, $\left(f_1 f_2\right)(x)\in O\left(g_1g_2\right)$ elde edilir. Yani $x\ge n$ olduğu zaman $\left|\left(f_1 f_2\right)(x)\right|\le K\left|g_1(x)g_2(x)\right|$ durumunu sağlayan K ve n sabitleri mevcuttur. Bu sabit değerler $K=K_1K_2$ ve $n=\max\left(n_1,n_2\right)$ olarak alınır $[33]$.

3.8. Örnek $f(m)=4m\log(m!)+\left(m^2+3\right)\log m$ için büyük-O tahmini elde edelim.

Çözüm: Öncelikle $4m\log\left(m!\right)$ çarpımı için büyük-O tahmini elde edelim. 3.2 örnekten $\log\left(m!\right)\in O\left(m\log m\right)$ olması durumu ile $4m\in O\left(m\right)$ olması durumu kullanılır ise 3.5 teoreminin ifadesi ile

$$4m\log\left(m!\right)\in O\left(m^2\log m\right)$$

durumu elde edilir.

Ardından $\left(m^2+3\right)\log m$ çarpımı için büyük-O tahmini elde edelim. $m>2$ olduğu zaman $m^2+3<2m^2$ olduğu için $m^2+3\in O\left(m^2\right)$ olur. Buradan 3.5 teoremden

$$\left(m^2+3\right)\log m\in O\left(m^2\log m\right)$$

olur. 3.1. sonucunun ifadesinden

$$f(m)=4m\log(m!)+\left(m^2+3\right)\log m\in O\left(m^2\log m\right)$$

olduğu elde edilir.

3.6. Teorem Eğer $f_1 \in O(f_2)$ ve $f_2 \in O(f_3)$ ise $f_1 \in O(f_3)$ olur.

3.7. Teorem Eğer $f(x) \in O(g(x))$ ise ve $p \in \mathbb{N}$ sabiti için $p.f(x) \in O(g(x))$ olur.

İspat: Eğer $f(x) \in O(g(x))$ ise $\forall\ x \geq n$ için öyle bir pozitif $K \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ sabiti vardır ki $|f(x)| \leq K|g(x)|$ olur. Dolayısıyla $\forall\ x \geq n$ ve $p \in \mathbb{N}$ için $|p.f(x)| = p|f(x)| \leq (pK)|g(x)|$ olur. Buradan büyük-O tanımı gereği $p.f(x) \in O(g(x))$ elde edilir.

3.9. Örnek $f(x) = (x+1)\log(x^2+1) + 5x^2$ fonksiyonu için büyük-O tahmini verelim.

Çözüm: Öncelikle $(x+1)\log(x^2+1)$ için büyük-O tahmini elde edelim. $(x+1) \in O(x)$ olur. Buradan $x \geq 1$ olduğu zaman $x^2+1 \leq 2x^2$ olur. Burada $x \geq 2$ ise,

$$\log(x^2+1) \leq \log(2x^2) = \log 2 + \log x^2 = \log 2 + 2\log x \leq 3\log x$$

eşitsizliği elde edilmektedir. Böylece, $\log(x^2+1) \in O(\log x)$ olduğu anlaşılır. 3.5. teoremden $(x+1)\log(x^2+1) \in O(x\log x)$ olur. Ayrıca $5x^2 \in O(x^2)$ olduğundan 3.4.teoreminin ifadesi gereği $O(\max(x\log x, x^2))$ olur. $x \geq 1$ olduğunda $x\log x \leq x^2$ elde edilir. Buradan $f(x) \in O(x^2)$ olur.

3.3. Küçük-*o* Gösterimi

Eğer f ve g fonksiyonları, $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ şeklinde fonksiyonlar ise $f(x)$ fonksiyonu, $g(x)$ fonksiyonunun küçük-o sudur denir. $f \in o(g)$ şeklinde yazılır. Ayrıca 3.1 teoreminin bir sonucu olarak aşağıdaki teorem elde edilir [10].

3.8. Teorem Eğer $f \in o(g)$ ise bu durumda $f \in O(g)$ olur.

3.8 teoremde ifade edildiği gibi, küçük-o ilişkisi, büyük-O ilişkisinden daha kuvvetlidir. Bu ilişkinin en önemli iki örneği aşağıda verilmiştir.

i. $\log_a x \in o(x)$ dir. Burada a sayısı, 1 den farklı bir pozitif sayıdır.

ii. $a > 1$ için $x^m \in o(a^x)$ [10].

3.10. Örnek a, 1 den farklı bir pozitif sayı olmak üzere $\log_a x \in o(x)$ olduğunu gösterelim [10].

Çözüm: Öncelikle $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$ olduğu ve $\ln x = \log_e x$ olmak üzere $\dfrac{d}{dx}\log_a x = \dfrac{1}{x \ln a}$ olduğu bilinmektedir. L'Hôspital kuralından

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x\ln a}}{1} = 0$$

olur. Böylece küçük-o gösteriminin tanımından $\log_a x \in o(x)$ elde edilir.

3.11. Örnek $a > 1$ için $x \in o(a^x)$ olduğunu gösterelim.

Çözüm: Öncelikle $\lim\limits_{x\to\infty} x = \lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty$ olduğu bilinmektedir. L'Hôspital kuralından $a > 1$ olmak üzere $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{a^x} = \dfrac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{a^x \ln a} = 0$

olur. Buradan küçük-o gösteriminin tanımından $a > 1$ için $x \in o(a^x)$ elde edilir [10].

3.12. Örnek $(x^4 + 5\log x)/x^3 + 1 \in O(x^m)$ olmak üzere en küçük m tamsayısını bulalım.

Çözüm: Öncelikle $\dfrac{x^4}{x^3+1}$ ifadesini göz önüne alalım.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x^4)/(x^3+1)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3+1} = 1$$

olur.

Limit değeri 1 olduğundan, 3.1 teoreminin ifadesi gereği $\dfrac{x^4}{x^3+1} \in O(x)$ elde edilir.

$\dfrac{x^4}{x^3+1} \notin O(x^0) = O(1)$ olduğunu göstermek için 3.2 teoremi kullanılabilir:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^4\right)/\left(x^3+1\right)}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+\frac{1}{x^3}}=\infty$$

olduğundan 3.2 teoreminin ifadesi gereği $\frac{x^4}{x^3+1}\notin O\left(x^0\right)=O(1)$ olur.

Şimdi $\frac{5\log x}{x^3+1}$ ifadesini göz önüne alalım. $\log x\in O\left(x\right)$ olduğundan,

$\frac{5\log x}{x^3+1}\in O\left(\frac{5x}{x^3+1}\right)$ olur. Yukarıdakine benzer bir limit alındığında $\frac{5x}{x^3+1}\in\ o\left(x\right)$ olur. Buradan 3.8 teorem gereği $\frac{5x}{x^3+1}\in\ O\left(x\right)$ sonucuna ulaşılır.

Asıl fonksiyon iki fonksiyonun toplamı olduğundan ve her iki fonksiyon da $O\left(x\right)$ olduğundan 3.1 sonuçtan $\left(x^4+5\log x\right)/(x^3+1)\in\ O\left(x\right)$ olur. Sonuç olarak en küçük m tamsayısı 1 olarak bulunur $[10]$.

4. LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ

4.1. Normal Lineer Diferensiyel Denklem Sistemleri

4.1. Tanım n -tane y_i, $(i=1,2,...,n)$ bilinmeyen fonksiyonlarının yalnızca birinci mertebeden türevlerini ihtiva eden

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\
\frac{dy_2}{dx} &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{dy_n}{dx} &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x)
\end{aligned} \tag{4.1}$$

sistemine **normal lineer diferensiyel denklem sistemi** adı verilir. (4.1) sistemi kısa olarak

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)y_j + f_i(x), \quad i=1,2,...,n$$

biçiminde de yazılabilir. Burada, $a_{ij}(x)$ ve $f_i(x)$ ($i=1,2,...,n$, $j=1,2,...,n$), bir $a \le x \le b$ aralığında sürekli olan fonksiyonlardır. Eğer her i ve j için $a_{ij}(x)$ katsayıları sabit reel sayılarsa (4.1) sistemine sabit katsayılı normal denklem sistemi aksi durumda değişken katsayılı normal denklem sistemi adı verilir. Ayrıca; her i için $f_i(x)=0$ oluyorsa (4.1) sistemine homojen normal denklem sistemi, aksi durumda homojen olmayan normal denklem sistemi denir $[20]$.

4.2. Tanım n -bilinmeyenli ve m -tane denklemden meydana gelen

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned} \tag{4.2}$$

lineer denklem sistemini ele alalım.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\ \text{ve}\ B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

olmak üzere (4.2) sistemini

$$Ax=B$$

biçiminde de yazabiliriz. Burada $B\neq 0$ ise (4.2) lineer denklem sistemine homojen olmayan denklem sistemi adı verilir. $B=0$ oluyorsa

$$Ax=0 \tag{4.3}$$

sistemine homojen sistem denir.

Burada n- bilinmeyenli n- tane denklemden meydana gelen lineer ve homojen olan

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n &=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n &=0 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n &=0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

denklem sistemi ele alınacaktır. Buna göre bu sistemin katsayılar determinantı,

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{4.5}$$

biçiminde olmaktadır [20].

4.1. Teorem (4.4) denklem sisteminin sıfırdan farklı bir çözümünün var olması için gerek ve yeter şart (4.4) denklem sistemine ait (4.5) katsayılar determinantının sıfır olmasıdır [20].

4.2. Teorem (4.4) denklem sisteminin yalnızca bir tek çözümünün (aşikar çözümünün) var olması için gerek ve yeter şart (4.4) denklem sistemine ait (4.5) katsayılar determinantının sıfırdan farklı olmasıdır [20].

4.3. Tanım

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

λ reel ya da karmaşık olan bir sabit sayı olsun. Burada

$$Ax=\lambda x \tag{4.6}$$

denklem sisteminin sıfırdan farklı bir x çözümü varsa λ sayısına A matrisine ait **karakteristik değer** ya da **özdeğer (eigenvalue)** adı verilir. λ sayısı A nın özdeğeri olmak üzere λ özdeğerine karşılık gelen x vektörüne de A nın **karakteristik vektörü** ya da **özvektörü (eigenvector)** denir.

$Ax=\lambda x$ denklem sistemi yukarıdaki matris ifadeleri kullanılarak tekrar yazılacak olursa

$$\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\cdots+a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda)x_n &= 0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.7) denklem sistemi daha kısa olarak

$$(A-\lambda I)x=0$$

biçiminde de ifade edilir. 4.1 teorem gereğince (4.7) denklem sisteminin sıfırdan farklı bir çözümünün var olması için gerek ve yeter şart

$$\det\left(A-\lambda I\right)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{4.8}$$

olmasıdır. (4.8) determinantı hesaplandığında λ ya göre n-yinci dereceden bir denklem bulunur. Bu denklemin kökleri ise λ özdeğerlerini (ya da karakteristik değerlerini) vermektedir. (4.8) denklemine A matrisine ait **karakteristik denklem** denir $[20]$.

4.2. Sabit Katsayılı Homojen Normal Lineer Diferensiyel Denklem Sistemleri

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{aligned} \tag{4.9}$$

denklem sistemini ele alalım. Burada a_{ij}, $(i = 1,2,...,n;\ j = 1,2,...,n)$ katsayıları reel sabit katsayılardır. (4.9) sistemini matris formunda yazalım.

A, $n \times n$ tipinde reel sabit matris

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

şeklinde gösterilsin.

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

bir vektör olarak tanımlansın. Bir vektörün türevi tanımından

$$y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

ve bir matrisin bir vektörle çarpımından

$$Ay = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ \vdots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

elde edilir.

Burada (4.9) sistemi yukarıdaki gösterimler dikkate alınırsa daha basit bir şekilde

$$y' = Ay \tag{4.14}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada (4.10) ile tanımlanan A matrisine (4.14) sabit katsayılı homojen lineer denklem sisteminin katsayılar matrisi adı verilir $[34]$.

4.4. Tanım: $y' = Ay$ homojen lineer denklem sisteminin çözümü

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

$n \times 1$ tipinde vektör fonksiyonudur. Bu fonksiyonun bileşenleri olan $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ nin her biri $a \le t \le b$ aralığında sürekli türevlere sahiptir ve $a \le t \le b$ olan $\forall$ t için

$$\begin{aligned} \phi_1'(t) &= a_{11}\phi_1(t) + a_{12}\phi_2(t) + ... + a_{1n}\phi_n(t) \\ \phi_2'(t) &= a_{21}\phi_1(t) + a_{22}\phi_2(t) + ... + a_{2n}\phi_n(t) \\ &\vdots \\ \phi_n'(t) &= a_{n1}\phi_1(t) + a_{n2}\phi_2(t) + ... + a_{nn}\phi_n(t) \end{aligned} \tag{4.16}$$

şeklindedir. Başka bir ifadeyle ϕ nin $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ bileşenleri

$$\begin{aligned} y_1 &= \phi_1(t) \\ y_2 &= \phi_2(t) \\ &\vdots \\ y_n &= \phi_n(t) \end{aligned} \tag{4.17}$$

şeklinde de yazılabilir $[34]$.

4.5. Tanım: $y' = Ay$ homojen lineer denklem sisteminin lineer bağımsız çözümleri

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \vdots \\ \phi_{n1} \end{pmatrix}, \phi_2 = \begin{pmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \vdots \\ \phi_{n2} \end{pmatrix}, ..., \phi_n = \begin{pmatrix} \phi_{1n} \\ \phi_{2n} \\ \vdots \\ \phi_{nn} \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

olsun. $c_1, c_2, ..., c_n$ ise n tane keyfi sabitler olmak üzere $y' = Ay$ homojen lineer denklem sisteminin genel çözümü

$$y = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + ... + c_n\phi_n(t) \tag{4.19}$$

şeklinde ifade edilir. Daha açık bir ifadeyle

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1\phi_{11}(t) + c_2\phi_{12}(t) + ... + c_n\phi_{1n}(t) \\ y_2 &= c_1\phi_{21}(t) + c_2\phi_{22}(t) + ... + c_n\phi_{2n}(t) \\ &\vdots \\ y_n &= c_1\phi_{n1}(t) + c_2\phi_{n2}(t) + ... + c_n\phi_{nn}(t) \end{aligned} \tag{4.20}$$

şeklinde de ifade edilebilir [34].

4.6. Tanım: n tane ve sırasıyla

$$\phi_1(t) = \begin{pmatrix} \phi_{11}(t) \\ \phi_{21}(t) \\ \vdots \\ \phi_{n1}(t) \end{pmatrix}, \phi_2(t) = \begin{pmatrix} \phi_{12}(t) \\ \phi_{22}(t) \\ \vdots \\ \phi_{n2}(t) \end{pmatrix}, ..., \phi_n(t) = \begin{pmatrix} \phi_{1n}(t) \\ \phi_{2n}(t) \\ \vdots \\ \phi_{nn}(t) \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

olarak tanımlanan $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ vektör fonksiyonlarını göz önüne alalım.

$$\begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{vmatrix} \tag{4.22}$$

$n \times n$ determinantı, (4.21) ile tanımlanan $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ vektör fonksiyonlarının **Wronskianı** olarak adlandırılır. Bu determinant $W(\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n)$ ile gösterilir. Bu determinantın t deki değeri ise $W(\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n)(t)$ ile ifade edilir [34].

4.3. Teorem (4.21) de tanımlanan $\phi_1,\ \phi_2,\ldots,\phi_n$ vektör fonksiyonları $a \le t \le b$ aralığında lineer bağımlı ise $[a,b]$ aralığının bütün noktalarında $W(\phi_1,\phi_2,...,\phi_n)=0$ olur $[20]$.

İspat: Eğer $\phi_1,\ \phi_2,\ldots,\phi_n$ vektör fonksiyonları lineer bağımlı ise $a \le t \le b$ aralığında

$$c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + \cdots + c_n\phi_n = 0$$

olacak biçimde en az biri sıfırdan farklı olan $c_1,\ c_2,\ldots,c_n$ sayıları mevcuttur. Bu denklem sisteminin daha açık hali olan

$$\begin{array}{c} c_1\phi_{11}(t)+c_2\phi_{12}(t)+...+c_n\phi_{1n}(t) \\ c_1\phi_{21}(t)+c_2\phi_{22}(t)+...+c_n\phi_{2n}(t) \\ \vdots \\ c_1\phi_{n1}(t)+c_2\phi_{n2}(t)+...+c_n\phi_{nn}(t) \end{array} \tag{4.23}$$

sisteminde yer alan c_i katsayılarının tamamı sıfır olmadığı için bu sistemin sıfırdan farklı çözümü vardır. Bu durumda 4.1 teorem gereğince (4.23) denklem sisteminin katsayılar determinantı sıfır olur. (4.23) denklem sisteminin katsayılar determinantı ise $\phi_1,\ \phi_2,\ldots,\phi_n$ vektör fonksiyonlarına ait Wronskian determinantı olduğu için $[a,b]$ aralığının her bir noktasında $W(\phi_1,\phi_2,...,\phi_n)=0$ olur.

4.4. Teorem (4.21) de tanımlanan $\phi_1,\ \phi_2,\ldots,\phi_n$ vektör fonksiyonları $a \le t \le b$ aralığının herhangi bir noktasında $W(\phi_1,\phi_2,...,\phi_n)=0$ ise bu vektör fonksiyonları bu aralıkta lineer bağımlıdır $[20]$.

İspat: $W(\phi_1,\phi_2,...,\phi_n)=0$ ise (4.23) denklem sisteminin sıfırdan farklı çözümleri mevcuttur. Buradan (4.23) denklem sistemini sağlayan c_i sayılarının tamamı sıfır değildir. Yani $\phi_1,\ \phi_2,\ldots,\phi_n$ vektör fonksiyonları lineer bağımlı olur.

4.3 teoremden ve 4.4 teoremden elde ettiğimiz sonuçlara göre aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

4.5. Teorem $y' = Ay$ homojen lineer denklem sisteminin $a \le t \le b$ aralığındaki çözümleri $\phi_1,\ \phi_2, \ldots, \phi_n$ vektör fonksiyonları olsun. Bu vektör fonksiyonlarının Wronskian determinantı ise $W(\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n)$ olsun. Burada $a \le t \le b$ aralığının bütün noktalarında $W(\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n) = 0$ olur ya da $W(\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n) = 0$ eşitliğini sağlayacak biçimde $[a,b]$ aralığının hiçbir noktası yoktur $[20]$.

4.6. Teorem $y' = Ay$ homojen lineer denklem sisteminin n tane $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ vektör fonksiyonlarının bir $a \le t \le b$ aralığında lineer bağımsız olması için gerek ve yeter şart $\forall\ t \in [a,b]$ için $W(\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n)(t) \neq 0$ olmasıdır $[34]$.

İspat: $\phi_1,\ \phi_2, \ldots, \phi_n$ vektör fonksiyonları lineer bağımsız ise $a \le t \le b$ aralığında

$$c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + \cdots + c_n\phi_n = 0$$

eşitliği yalnızca $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ olduğu zaman sağlanır. Bu denklemin açık hali olan (4.23) denklem sisteminde de $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ olduğu için bu sistemin yalnızca aşikar çözümü mevcuttur. 4.2 teorem gereğince sistemin katsayılar determinantı sıfırdan farklı olur. Dolayısıyla $W(\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n)(t) \neq 0$ olur.

Tersine, eğer $W(\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n) \neq 0$ ise (4.23) denklem sisteminin 4.2 teorem gereğince yalnızca aşikar çözümü vardır. Bu denklem sistemi için (4.21) vektör fonksiyonlarının hepsi sıfır olmadığı için bu durum sadece $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ olması durumunda gerçekleşir. Buradan $\phi_1,\ \phi_2, \ldots, \phi_n$ vektör fonksiyonlarının lineer bağımsız olduğu elde edilir.

Şimdi $y' = Ay$ sisteminin $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ ve λ sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 e^{\lambda t} \\ y_2 &= \alpha_2 e^{\lambda t} \\ &\vdots \\ y_n &= \alpha_n e^{\lambda t} \end{aligned} \tag{4.24}$$

şeklindeki aşikar (trivial) olmayan çözümlerini inceleyelim.

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ ve } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

olarak alınırsa (4.24) denklemleri kısa olarak

$$y = \alpha e^{\lambda t}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Dolayısıyla $y' = Ay$ homojen lineer denklem sisteminin çözümleri α bir sabit vektör ve λ bir sayı olmak üzere

$$y = \alpha e^{\lambda t} \tag{4.26}$$

şeklinde aranacaktır.

(4.26) denklemleri $y' = Ay$ homojen lineer denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$\lambda \alpha e^{\lambda t} = A\alpha e^{\lambda t}$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$A\alpha = \lambda \alpha \tag{4.27}$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla I, $n \times n$ tipinde birim matris olmak üzere

$$(A - \lambda I)\alpha = 0$$

eşitliği elde edilir. Şimdi (4.24) çözüm fonksiyonları ve bu fonksiyonların türevleri (4.9) denklem sisteminde yerine yazılırsa $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, n tane bilinmeyen olmak üzere

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)\alpha_1 + \quad a_{12}\alpha_2 + ... + \quad a_{1n}\alpha_n &= 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda)\alpha_2 + ... + \quad a_{2n}\alpha_n &= 0, \\ &... \\ a_{n1}\alpha_1 + \quad a_{n2}\alpha_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)\alpha_n &= 0, \end{aligned} \tag{4.28}$$

sistemi elde edilir. Bu sistemin aşikar (trivial) olmayan çözüme sahip olması için 4.1 teoreminin ifadesi gereği

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{4.29}$$

olmasıdır. Bu determinant λ-ya bağlı n-yinci dereceden bir polinomdur. Bu polinoma ise A matrisinin karakteristik denklemi denir. A matrisinin karakteristik denkleminin kökleri

$$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$$

değerlerine ise A matrisinin karakteristik değeri ya da özdeğerleri denir.

Her bir λ_i $(i = 1, 2, ..., n)$ özdeğeri (4.28) sisteminde yerine yazılırsa (4.28) sisteminin aşağıdaki trivial olmayan çözümü elde edilir.

$$\alpha_1 = \alpha_{1i}\ , \alpha_2 = \alpha_{2i}\ , ..., \ \alpha_n = \alpha_{ni} \quad (i = 1, 2, ..., n)\ .$$

Burada

$$\alpha^{(i)} = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni} \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2, ..., n), \tag{4.30}$$

olarak tanımlanan vektör λ_i-ye bağlı (i=1,2,...,n) bir özvektördür.

Dolayısıyla, eğer

$$y' = Ay$$

homojen lineer denklem sistemi

$$y = \alpha e^{\lambda t}$$

şeklinde çözüme sahipse λ sayısı A katsayılar matrisinin bir λ_i özdeğeridir. Buradan α vektörü de λ_i özdeğerine karşılık gelen $\alpha^{(i)}$ özvektörüdür [34].

4.2.1. Farklı Özdeğerler

Bu bölümde karakteristik denklemin köklerinin farklı olması durumunda özvektörlerin nasıl elde edileceğini ve buradan diferensiyel denklem sisteminin genel çözümünün nasıl bulunacağını inceleyeceğiz.

$y' = Ay$ homojen lineer denklem sisteminin $n \times n$ tipinde A katsayılar matrisinin n tane $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ özdeğerinin her birinin farklı yani tekrar etmediğini kabul edelim. Ayrıca $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, ..., \alpha^{(n)}$ vektörleri A katsayılar matrisinin n tane lineer bağımsız özvektörleri olsun. Buna göre $y' = Ay$ homojen lineer denklem sisteminin her reel $[a,b]$ aralığı üzerindeki çözümleri

$$y^{(1)}(t) = \alpha^{(1)} e^{\lambda_1 t},\ y^{(2)}(t) = \alpha^{(2)} e^{\lambda_2 t}, ..., y^{(n)}(t) = \alpha^{(n)} e^{\lambda_n t} \tag{4.31}$$

olarak tanımlanan $y_1, y_2, ...y_n$, n adet farklı vektör fonksiyonudur. Her $i = 1, 2, ..., n$ için (4.27) eşitliğinden

$$\lambda_i \alpha^{(i)} = A\alpha^{(i)}$$

olduğu ve $y_i(t)$ nin (4.31) deki tanımını kullanırsak

$$\left[y_i(t)\right]' = \lambda_i \alpha^{(i)} e^{\lambda_i t} = A\alpha^{(i)} e^{\lambda_i t} = Ay^{(i)}(t)$$

olduğu kolayca görülebilir. Bu da $[a,b]$ üzerinde $y^{(i)}(t)$ nin

$$y' = Ay$$

homojen lineer denklem sistemini sağladığını gösterir.

Şimdi (4.31) ile tanımlanan n adet $y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(n)}$ çözümünün Wronskian determinantını göz önüne alalım.

$$W(y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(n)})(t) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} e^{\lambda_1 t} & \alpha_{12} e^{\lambda_2 t} & \cdots & \alpha_{1n} e^{\lambda_n t} \\ \alpha_{21} e^{\lambda_1 t} & \alpha_{22} e^{\lambda_2 t} & \cdots & \alpha_{2n} e^{\lambda_n t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} e^{\lambda_1 t} & \alpha_{n1} e^{\lambda_2 t} & & \alpha_{nn} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix}$$

$$= e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n)t} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

n adet $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, ..., \alpha^{(n)}$ özvektörleri lineer bağımsız olduğundan

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

olur. Ayrıca, her t için $e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n)t} \neq 0$ dır. Dolayısıyla $[a,b]$ aralığı üzerindeki her t için $W(y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(n)})(t) \neq 0$ olur. Ayrıca $y' = Ay$ homojen lineer denklem sisteminin çözümleri olan $y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(n)}$ çözümleri 4.6 teorem gereği $[a,b]$ aralığında lineer bağımsızdır. Dolayısıyla $c_1, c_2, ..., c_n$, n adet keyfi sayılar olmak üzere (4.14) denklem sisteminin genel çözümü

$$y = c_1 y^{(1)} + c_2 y^{(2)} + ... + c_n y^{(n)}$$

olur. Aşağıdaki teorem elde edilen sonuçları özetlemektedir:

4.7. Teorem

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n \end{aligned}$$

homojen lineer denklem sistemini ele alalım.

Yani $a_{ij}(i = 1, 2, ..., n \; ; \; j = 1, 2, ..., n)$ reel sabitler ve A , $n \times n$ tipinde matris

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$y' = Ay$$

homojen lineer denklem sistemini göz önüne alalım.

A matrisine ait n adet $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ özdeğerlerin her birinin farklı olduğunu kabul edelim. Buradan, her reel aralık üzerinde $y' = Ay$ homojen lineer denklem sisteminin genel çözümü , $\alpha^{(1)}e^{\lambda_1 t}, \alpha^{(2)}e^{\lambda_2 t}, ..., \alpha^{(n)}e^{\lambda_n t}$ n tane lineer bağımsız çözümler ve $c_1, c_2, ..., c_n$ n tane keyfi sabitler olmak üzere

$$y = c_1\alpha^{(1)}e^{\lambda_1 t} + c_2\alpha^{(2)}e^{\lambda_2 t} + ... c_n\alpha^{(n)}e^{\lambda_n t}$$

şeklinde ifade edilir.

Ayrıca $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ özdeğerlerinin farklı oldukları kabul edilmiş olmasına karşın bu özdeğerlerin reel olmaları şart değildir. Bu özdeğerler kompleks özdeğerler de olabilir.

Ancak, A reel bir matris olduğundan özdeğerler eşlenik çiftler olarak ortaya çıkmak zorundadır. $\lambda_1 = a+bi$ ve $\lambda_2 = a-bi$ değerleri bir çift olarak kabul edilirse bu çifte bağlı çözümler

$$\alpha^{(1)}e^{(a+bi)t} \text{ ve } \alpha^{(2)}e^{(a-bi)t}$$

şeklinde olur. Bu çözümler kompleks çözümlerdir [34].

4.1. Örnek

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + 3y_2 - y_3 \\ y_2' &= y_1 + 4y_2 - y_3 \\ y_3' &= 3y_1 + 3y_2 - 2y_3 \end{aligned}$$

denklem sisteminin genel çözümünü bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + 3y_2 - y_3 \\ y_2' &= y_1 + 4y_2 - y_3 \\ y_3' &= 3y_1 + 3y_2 - 2y_3 \end{aligned} \tag{4.32}$$

olsun.

$$y = \alpha e^{\lambda t} \text{ ya da } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} e^{\lambda t} \tag{4.33}$$

ifadesi (4.32) denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} (2-\lambda)\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + (4-\lambda)\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_2 - (2+\lambda)\alpha_3 &= 0 \end{aligned} \tag{4.34}$$

sistemi elde edilir. (4.34) sisteminin katsayılar determinantı

$$\begin{vmatrix} (2-\lambda) & 3 & -1 \\ 1 & (4-\lambda) & -1 \\ 3 & 3 & -(2+\lambda) \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 4$$

$$= (\lambda^2 - 1)(4-\lambda) = 0$$

olduğundan bu denklemin kökleri yani (4.32) sisteminin özdeğerleri

$$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 4$$

sayılarıdır.

$\lambda_1 = -1$ özdeğeri (4.34) sisteminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 3\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + 5\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin birinci ve üçüncü denklemleri aynı ifadelerdir. Birinci veya üçüncü denklem ile ikinci denklem arasında

$$3\alpha_1 + 3\alpha_2 = \alpha_1 + 5\alpha_2$$

bağıntısı elde edilir. Burada özel olarak

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$$

olarak alınırsa

$$\alpha_3 = 3\alpha_1 + 3\alpha_2$$

olduğundan

$$\alpha_3 = 6$$

olarak elde edilir.

$\lambda_1 = -1$ özdeğerine karşılık gelen özvektör,

$$\alpha_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

biçiminde bulunur. Bu özvektör yardımıyla bulunan ve aynı zamanda (4.32) sisteminin bir çözümü olan vektör fonksiyonu

$$\phi_1 = \alpha_{\lambda_1} e^{-t} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \\ 6e^{-t} \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

$\lambda_2 = 1$ özdeğeri (4.34) sisteminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_2 - 3\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

sistemi elde edilir. Bu sistemin birinci ve ikinci denklemi aynıdır. Birinci veya ikinci denklem ile üçüncü denklem arasında

$$\alpha_1 + 3\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2$$

bağıntısı elde edilir. Buradan

$$3\alpha_2 = \alpha_2$$

olarak bulunur. Böylece

$$\alpha_2 = 0$$

elde edilir. $\alpha_2 = 0$ değeri birinci denklemde yerine yazılırsa

$$\alpha_1 = \alpha_3$$

bağıntısı elde edilir. Burada özel olarak

$$\alpha_1 = \alpha_3 = 1$$

alınırsa $\lambda_2 = 1$ özdeğerine karşılık gelen özvektör

$$\alpha_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

biçiminde bulunur. Bu özvektör yardımıyla elde edilen ve aynı zamanda (4.32) sisteminin bir çözümü olan vektör fonksiyonu

$$\phi_2 = \alpha_{\lambda_2} e^t = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

$\lambda_3 = 4$ özdeğeri (4.34) sisteminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} -2\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 - \alpha_3 &= 0 \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_2 - 6\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

sistemi elde edilir. Bu sistemin ikinci denkleminden

$$\alpha_1 = \alpha_3$$

bağıntısı elde edilir. Burada özel olarak

$$\alpha_1 = \alpha_3 = 1$$

alınırsa ve birinci denklemde $\alpha_1 = \alpha_3 = 1$ yerine yazılırsa

$$-2 + 3\alpha_2 - 1 = 0$$
$$3\alpha_2 = 3$$
$$\alpha_2 = 1$$

bulunur. Böylece

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$$

olarak bulunur.

$\lambda_3 = 4$ özdeğerine karşılık gelen özvektör

$$\alpha_{\lambda_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

biçiminde bulunur. Bu özvektör yardımıyla elde edilen ve aynı zamanda (4.32) sisteminin bir çözümü olan vektör fonksiyonu

$$\phi_3 = \alpha_{\lambda_3} e^{4t} = \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix}$$

biçimindedir. O halde (4.32) sisteminin çözüm fonksiyonları

$$\phi_1 = \alpha_{\lambda_1} e^{-t} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \\ 6e^{-t} \end{pmatrix}, \phi_2 = \alpha_{\lambda_2} e^{t} = \begin{pmatrix} e^{t} \\ 0 \\ e^{t} \end{pmatrix}, \phi_3 = \alpha_{\lambda_3} e^{4t} = \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilmiş olur. Buna göre (4.32) sisteminin genel çözümü c_1, c_2 ve c_3 keyfi sabitler olmak üzere

$$y = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3$$

biçiminde ya da matris formunda

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \\ 6e^{-t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{t} \\ 0 \\ e^{t} \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Bu çözüm sistemi açık bir şekilde yazılırsa

$$y_1 = c_1 e^{-t} + c_2 e^{t} + c_3 e^{4t}$$
$$y_2 = c_1 e^{-t} + c_3 e^{4t}$$
$$y_3 = 6c_1 e^{-t} + c_2 e^{t} + c_3 e^{4t}$$

olur. Bu çözüm sisteminin Wronskian determinantı

$$W(\phi_1,\phi_2,\phi_3) = \begin{vmatrix} e^{-t} & e^{t} & e^{4t} \\ e^{-t} & 0 & e^{4t} \\ 6e^{-t} & e^{t} & e^{4t} \end{vmatrix} = 5e^{4t} \neq 0$$

olduğu için çözüm fonksiyonları olan ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3 vektör fonksiyonları lineer bağımsızdır.

4.2.2. Katlı Özdeğerler

Bu bölümde karakteristik denklemin köklerinin katlı olması durumunda özvektörlerin nasıl elde edileceğini ve buradan diferensiyel denklem sisteminin genel çözümünün nasıl bulunacağını inceleyeceğiz.

$$\frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n$$
$$\frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n$$
$$\vdots$$
$$\frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n$$

denklem sistemini ele alalım. Bu denklem sistemine ait çözüm sistemi

$$y = \alpha e^{\lambda t}$$

biçiminde olduğundan $y = \alpha e^{\lambda t}$ çözüm sistemi denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$(a_{11}-\lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = 0$$
$$a_{21}\alpha_1 + (a_{22}-\lambda)\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n = 0$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \cdots + (a_{nn}-\lambda)\alpha_n = 0$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin katsayılar matrisi

$$\left(A-\lambda I\right)=\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Bu matrisin determinantı ya da A matrisinin karakteristik denklemi $k \leq n$ olmak üzere

$$P(\lambda)=\left|A-\lambda I\right|=\prod_{i=1}^{k}\left(\lambda-\lambda_i\right)^{m_i}=\left(\lambda-\lambda_1\right)^{m_1}\left(\lambda-\lambda_2\right)^{m_2}\cdots\left(\lambda-\lambda_k\right)^{m_k}=0,$$

biçiminde bir polinom denklemidir.

Bu polinom denklemindeki $m_1, m_2, \ldots, m_k$ sayılarına sırasıyla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ özdeğerlerinin katı denir. Bu özdeğerlerin katlarının toplamı ise polinomun derecesine eşit olur. Buradan

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = n$$

eşitliği yazılabilir. $P(\lambda)$ polinom denklemine ise A matrisinin karakteristik denklemi adı verilir.

4.7. Tanım $P(\lambda)$ karakteristik denkleminin λ_0 ile ifade edeceğimiz bir $\lambda=\lambda_0$ kökü var olduğunu ve $(\lambda-\lambda_0)^m$ $(1<m\leq n)$ çarpanına sahip olduğunu kabul edelim. Buradan λ_0 sayısı $P(\lambda)$ karakteristik denkleminin m-katlı bir kökü olmaktadır. Eğer $\lambda=\lambda_0$ özdeğerine karşılık m-tane lineer bağımsız özvektör varsa $\lambda=\lambda_0$ özdeğerine **tam özdeğer (hatasız)** adı verilir.

m katlı λ_0 özdeğerine karşılık gelen lineer bağımsız vektör sayısı k olsun. Buna göre,

i) $k=m$ yani λ_0 **özdeğeri tam** ise m-tane lineer bağımsız özvektör vardır. Dolayısıyla bu m-tane vektör $\lambda=\lambda_0$ değeri için $(A-\lambda_0 I)\alpha=0$ sisteminden kolaylıkla bulunabilir.

ii) $1 \le k < m$ yani λ_0 **özdeğeri tam değil** ise özvektörlerin sayısı eksik olur. Yani λ_0 özdeğeri **defektli (defective)** olur. Dolayısıyla buradan denklem sisteminin genel çözümünü bulmamız için gerekli olan lineer bağımsız vektör fonksiyonlarının eksik olduğu görülür $[20]$.

4.8. Tanım Eksik özvektörlerin

$$d = m - k$$

sayısına defektli λ_0 **özdeğerinin hatası** denir $[20]$.

A matrisi $1 < m \le n$ olmak üzere m katlı bir λ_1 özdeğerine sahip olsun. Eğer varsa diğer tüm $\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \ldots, \lambda_n$ özdeğerleri farklı olsun. Burada $1 \le k \le m$ olmak üzere tekrarlı m katlı λ_1 özdeğeri k tane lineer bağımsız özvektöre sahip olsun. Şimdi iki tane alt durumu göz önüne alalım.

1. $\boldsymbol{k = m}$ durumu
2. $\boldsymbol{k < m}$ durumu

1. $\boldsymbol{k = m}$ durumu:

$k = m$ durumunda, m katlı λ_1 özdeğerine bağlı m tane lineer bağımsız $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(m)}$ özvektörü vardır. Buradan $y' = Ay$ homojen lineer denklem sisteminin lineer bağımsız çözümleri

$$\alpha^{(1)} e^{\lambda_1 t},\ \alpha^{(2)} e^{\lambda_1 t}, \ldots,\ \alpha^{(m)} e^{\lambda_1 t},\ \alpha^{(m+1)} e^{\lambda_{m+1} t}, \ldots,\ \alpha^{(n)} e^{\lambda_n t}$$

şeklinde ifade edilebilir.

$$y' = Ay$$

homojen lineer denklem sisteminin genel çözümü ise, n tane keyfi sabitler

$$c_1, c_2, \ldots, c_n$$

olmak üzere

$$y = c_1 \alpha^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \alpha^{(2)} e^{\lambda_1 t} + \ldots + c_m \alpha^{(m)} e^{\lambda_1 t} + c_{m+1} \alpha^{(m+1)} e^{\lambda_{m+1} t} + \ldots + c_n \alpha^{(n)} e^{\lambda_n t}$$

şeklinde ifade edilir.

2. $k<m$ durumu:

$k<m$ durumunda m katlı λ_1 özdeğerine bağlı m taneden az sayıda lineer bağımsız $\alpha^{(1)}$ özvektörleri vardır. Dolayısıyla (4.9) denklem sisteminin $\alpha^{(1)}e^{\lambda_1 t}$ şeklinde λ_1-e bağlı m taneden az sayıda lineer bağımsız çözümü vardır. Şimdi diğer lineer bağımsız çözümleri araştıralım.

λ, $m=2$ katlı bir özdeğer olsun. $k=1<m$ kabul edelim. Buradan sadece bir tek tipte α_1 özvektörü vardır ve dolayısıyla sadece bir tipte λ-ya bağlı

$$y_1=\alpha_1 e^{\lambda t}$$

şeklinde çözüm vardır.

Buradan $y_1=\alpha_1 e^{\lambda t}$ çözümü ile lineer bağımsız olacak biçimde aradığımız diğer eksik ikinci çözüm ise α_2 vektörü için

$$y_2=(\alpha_1 t+\alpha_2)e^{\lambda t}$$

şeklinde bir vektör fonksiyonudur.

Burada y_2 çözümü ve türevi $y'=Ay$ homojen lineer denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 t}=(A-\lambda_1 I)\alpha_1 t e^{\lambda_1 t}+(A-\lambda_1 I)\alpha_2 e^{\lambda_1 t}$$

denklemi elde edilir. Eğer t-ye göre aynı dereceden terimlerin katsayıları birbirine eşitlenirse, α_1 vektörü

$$(A-\lambda I)\alpha_1=0$$

eşitliğini sağlayan bir özvektör ve α_2 vektörü

$$(A-\lambda I)\alpha_2=\alpha_1$$

eşitliğini sağlayan bir özvektör olur. Ayrıca α_1 özvektörü bilindiğinden α_2 özvektörü

$$(A-\lambda I)\alpha_2=\alpha_1$$

eşitliğinden bulunabilir. Yine bu eşitlikten α_2 vektörü için

$$(A-\lambda_1 I)^2\alpha_2=(A-\lambda_1 I)[(A-\lambda_1 I)\alpha_2]=(A-\lambda_1 I)\alpha_1=0$$

eşitliği sağlandığı için α_2 vektörü

$$(A-\lambda_1 I)^2\alpha_2=0$$

eşitliğinden ve α_1 vektörü ise

$$(A-\lambda_1 I)\alpha_2=\alpha_1$$

eşitliğinden bulunabilir.

Şimdi λ, $m=3$ katlı bir özdeğer olsun. $k<m$ olduğunu kabul edelim. Burada iki olasılık vardır. Bunlar $k=1$ ve $k=2$ durumlarıdır.

Eğer $k=1$ ise sadece tek tipte özvektör vardır ve dolayısıyla sadece bir tipte λ-ya bağlı

$$y_1=\alpha_1 e^{\lambda t} \tag{4.35}$$

şeklinde çözüm vardır. Buradan α_1 vektörü λ-ya bağlı özvektör olmak üzere bir ikinci çözüm

$$y_2=(\alpha_1 t+\alpha_2)e^{\lambda t} \tag{4.36}$$

şeklindedir. Burada α_1 vektörü

$$(A-\lambda I)\alpha_1=0 \tag{4.37}$$

eşitliğini sağlayan bir özvektör ve α_2 vektörü

$$(A-\lambda I)\alpha_2=\alpha_1 \tag{4.38}$$

eşitliğini sağlayan bir özvektördür.

Bu durumda, λ-ya bağlı bir üçüncü çözüm, α_1 özvektörü (4.37) denklemini; α_2 özvektörü (4.38) denklemini sağlamak üzere

$$y_3=\left(\alpha_1\frac{t^2}{2!}+\alpha_2 t+\alpha_3\right)e^{\lambda t} \tag{4.39}$$

şeklindedir. Burada α_3 vektörü

$$(A-\lambda I)\alpha_3=\alpha_2 \tag{4.40}$$

eşitliğini sağlar. Bulunan üç adet çözüm yani (4.35), (4.36) ve (4.39) çözümleri lineer bağımsız çözümlerdir.

Eğer $k=2$ ise λ-ya bağlı iki tane lineer bağımsız α_1 ve α_2 özvektörleri mevcuttur. Buradan

$$y_1=\alpha_1 e^{\lambda t} \text{ ve } y_2=\alpha_2 e^{\lambda t} \tag{4.41}$$

şeklinde iki tane lineer bağımsız çözüm vardır. Buradan λ-ya bağlı bir üçüncü çözüm

$$y_3 = (\beta t + \alpha_3)e^{\lambda t} \tag{4.42}$$

şeklindedir. Burada β,

$$\beta = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 \tag{4.43}$$

olmak üzere c_1 ve c_2 sayıları

$$(A - \lambda I)\alpha_3 = \beta \tag{4.44}$$

denklemini sağlayacak şekilde seçilir. c_1 ve c_2 sayıları bulunduktan sonra β vektörü bulunur. Dolayısıyla eksik olan üçüncü özvektör α_3 özvektörü bulunmuş olur. Buradan y_3 çözümü elde edilir. Sonuç olarak elde edilen üç adet (4.41) ve (4.42) çözümleri lineer bağımsız çözümlerdir [34].

4.9. Tanım $n \times n$ tipinde bir matris T olsun. T matrisine ait bir özdeğer λ_0 sayısı olmak üzere

1) λ_0 özdeğerinin tekrar etme sayısına λ_0 özdeğerinin **cebirsel katı** adı verilir. Buradan λ_0 özdeğerinin cebirsel katının m olması demek, λ_0 sayısı $|T - \lambda I| = 0$ karakteristik denkleminin m - katlı bir kökü, dolayısıyla $(\lambda - \lambda_0)^m$ $(m \le n)$ ifadesinin T matrisine ait karakteristik denklemin bir çarpanı olduğu anlamına gelmektedir.

2) λ_0 özdeğeri T matrisinin katlı bir özdeğeri olmak üzere λ_0 özdeğerine karşılık gelen lineer bağımsız özvektörlerin sayısına λ_0 ın **geometrik katı** denir. T matrisinin bir λ_0 özdeğeri için, (λ_0 ın geometrik katı) $\le$ (λ_0 ın cebirsel katı) eşitsizliği sağlanır. Bu ifade daha kısa olarak,

$$g_T(\lambda_0) \le c_T(\lambda_0)$$

biçiminde de ifade edilebilir [20].

4.2.3. Özuzay ve Özbaz

4.10. Tanım $n \times n$ tipinde bir matris T olmak üzere, T matrisine ait bir özdeğer λ_0 sayısı olsun.

$$(T - \lambda_0 I)\alpha = 0$$

denkleminin çözüm kümesine T matrisinin λ_0 özdeğerine karşılık gelen **özuzayı** adı verilir. $E_{\lambda_0}(T)$ ya da E_{λ_0} biçiminde gösterilir.

4.11. Tanım $n \times n$ tipinde bir matris T olmak üzere, T matrisinin özvektörlerinden meydana gelen $\mathbb{R}^n$ nin bir bazına T matrisinin **özbazı** adı verilir [20].

4.2. Örnek

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisini ele alalım.

$$|T - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda - 1)^2 = 0$$

karakteristik denkleminden

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \text{ ve } \lambda_3 = 3$$

özdeğerleri bulunur. $\lambda = 1$ özdeğerine ait cebirsel kat 2 ve $\lambda = 3$ özdeğerine ait cebirsel kat 1 olur.

$\lambda = 1$ özdeğeri için, $(T - \lambda I)\alpha = 0$ eşitliğinden

$$(T - I)\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 0$$

ya da

$$\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler iki parametreye bağlı olduklarından

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ -\alpha_2 \end{pmatrix}$$

olarak alınırsa $\lambda = 1$ özdeğerine karşılık gelen özvektörler

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

$\lambda = 1$ özdeğerine ait iki tane özvektör bulunduğu için bu özdeğere ait geometrik kat 2 olur. Buradan $\lambda = 1$ özdeğerine karşılık gelen özuzay

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \ker(T - I) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (T - I)x = 0 \right\}$$

$$= Sp\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

biçiminde elde edilir.

$\lambda = 3$ özdeğeri için, $(T - \lambda I)\alpha = 0$ eşitliğinden

$$(T - 3I)\alpha = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 0$$

ya da

$$-2\alpha_1 = 0$$

$$-\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

denklemleri elde edilir. Birinci denklemden $\alpha_1 = 0$ olarak bulunur. İkinci ve üçüncü denklem aynı denklemdir. Buradan $\alpha_2 = \alpha_3$ eşitliği elde edilir.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

olarak alınırsa, $\lambda = 3$ özdeğerine karşılık gelen özvektör

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan $\lambda = 3$ özdeğerine ait geometrik kat 1 olur. Dolayısıyla $\lambda = 3$ özdeğerine karşılık gelen özuzay

$$E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \ker(T - 3I) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, (T - 3I)x = 0 \right\}$$

$$= Sp\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

biçiminde elde edilir.

4.12. Tanım $n \times n$ tipinde bir matris T olmak üzere, T matrisinin lineer bağımsız özvektörlerinin sayısı n den küçük ise T matrisine eksik matris ya da **defektli** matris adı verilir. Başka bir ifadeyle , $n \times n$ tipindeki bir T matrisi en az bir eksik özdeğere sahip ise bu T matrisine **eksik** ya da **defektli matris** adı verilir [20].

4.3. Örnek

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisi verilsin.

$$|T-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(-\lambda) = 0$$

denkleminden

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \text{ ve } \lambda_3 = 0$$

özdeğerleri bulunur. $\lambda = 2$ özdeğeri için,

$$(T-2I)\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 0$$

eşitliğinden $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ olur. Buradan

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

özvektörü bulunur.

$\lambda = 0$ özdeğeri için,

$$(T-0I)\alpha = T\alpha = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 0$$

eşitliğinden $\alpha_3 = 0$ ve $\alpha_1 = -\alpha_2$ olur. Buradan

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

özvektörü elde edilir. Dolayısıyla T matrisinin özbazı

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

şeklindedir. Yani T matrisi defektli (eksik) matristir .

4.2.4. Genelleştirilmiş Özvektör

4.13. Tanım $n \times n$ tipinde bir matris T olmak üzere, T matrisine ait bir özdeğer λ olsun.

$$(T-\lambda I)^p \alpha_p = 0 \text{ ve } (T-\lambda I)^{p-1} \alpha_p \neq 0 \ , \ p \geq 1$$

ise sıfırdan farklı α_p vektörüne λ özdeğerine karşılık gelen p-yinci dereceden **genelleştirilmiş özvektör** adı verilir. $p=1$ ise α_1 vektörüne **regüler (sıradan, alışılmış)** bir **özvektör** adı verilir $[20]$.

Genelleştirilmiş özvektörler, katlı özdeğerler eksik olduğunda karşımıza çıkmaktadır.

4.4. Örnek

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 + 3y_2 + y_3 \\ y_2' &= -4y_1 - 4y_2 - 2y_3 \\ y_3' &= 8y_1 + 12y_2 + 6y_3 \end{aligned}$$

denklem sisteminin genel çözümünü bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 + 3y_2 + y_3 \\ y_2' &= -4y_1 - 4y_2 - 2y_3 \\ y_3' &= 8y_1 + 12y_2 + 6y_3 \end{aligned} \tag{4.45}$$

olsun.

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} e^{\lambda t} \tag{4.46}$$

ifadesi (4.45) denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} (4-\lambda)a + 3b + c &= 0 \\ -4a - (4+\lambda)b - 2c &= 0 \\ 8a + 12b + (6-\lambda)c &= 0 \end{aligned} \tag{4.47}$$

sistemi elde edilir. Bu sisteme ait katsayılar determinantının kökleri, (4.45) denklem sisteminin özdeğerlerini verecektir. Elde edilen (4.47) sisteminin katsayılar determinantı

$$\begin{vmatrix} (4-\lambda) & 3 & 1 \\ -4 & -(4+\lambda) & -2 \\ 8 & 12 & (6-\lambda) \end{vmatrix} = (\lambda-2)^3 = 0$$

olduğundan bu denklemin kökleri yani (4.45) sisteminin özdeğerleri

$$\lambda = 2$$

3 katlı özdeğeridir. $\lambda = 2$ üç katlı özdeğeri (4.47) sisteminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 2a+3b+c &= 0 \\ -4a-6b-2c &= 0 \\ 8a+12b+4c &= 0 \end{aligned}$$

sistemi elde edilir. Bu üç denklem de aynı denklemdir. $2a+3b+c=0$ denklemini sağlayacak şekilde

$$a=1,\ b=0,\ c=-2$$

olarak seçilirse bulunan özvektör

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Benzer şekilde $2a+3b+c=0$ denklemini sağlayacak şekilde

$$a=0,\ b=1,\ c=-3$$

seçilirse bulunan özvektör

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Bu özvektörlere göre sistemin lineer bağımsız çözümleri

$$y_1 = \alpha_1 e^{2t} \text{ ve } y_2 = \alpha_2 e^{2t}$$

şeklinde bulunur. Bu çözümlerle lineer bağımsız olacak şekilde üçüncü bir çözümü bulmak için α_1 ve α_2 özvektörleri ile lineer bağımsız olacak şekilde bir α_3 özvektörünün elde edilmesi gerekmektedir. c_1 ve c_2 keyfi sabitler ve

$$\beta = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$$

olmak üzere

$$(T-2I)\alpha_3 = \beta$$

eşitliğini dikkate alalım. α_3 genelleştirilmiş özvektörü

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

olsun.

$$(T-2I)\alpha_3 = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = \beta$$

denkleminden

$$(T-2I)\alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & -6 & -2 \\ 8 & 12 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -2c_1 - 3c_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2k_1 + 3k_2 + k_3 \\ -4k_1 - 6k_2 - 2k_3 \\ 8k_1 + 12k_2 + 4k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -2c_1 - 3c_2 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} 2k_1 + 3k_2 + k_3 &= c_1 \\ -2(2k_1 + 3k_2 + k_3) &= c_2 \end{aligned}$$

denklemlerinden

$$-2c_1 = c_2$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$c_1 = 1 \text{ ve } c_2 = -2$$

olarak alınırsa

$$\begin{aligned} \beta &= c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 \\ &= 1.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

$$2k_1 + 3k_2 + k_3 = c_1$$

eşitliğinden

$$2k_1 + 3k_2 + k_3 = 1$$

olur. Burada

$$k_1 = k_2 = 0 \text{ ve } k_3 = 1$$

olarak alınırsa

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

biçiminde bulunur. Buna göre (4.45) sisteminin üçüncü çözümü,

$$y_3 = (\beta t + \alpha_3)e^{2t}$$

şeklinde elde edilir. Buna göre (4.45) sisteminin genel çözümü; c_1, c_2, c_3 keyfi sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned} y &= c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 \\ &= c_1\alpha_1 e^{2t} + c_2\alpha_2 e^{2t} + c_3(\beta t + \alpha_3)e^{2t} \\ &= c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{2t} + c_3\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) e^{2t} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 + c_3 t \\ c_2 - 2c_3 t \\ -2c_1 - 3c_2 + c_3(4t+1) \end{pmatrix} e^{2t} \end{aligned}$$

biçiminde bulunur [34].

4.2.5. Genel Durum

Şimdi 4.2.2 katlı özdeğerler durumunda $m=2$ ve $m=3$ için verdiğimiz ifadeleri genelleştirelim.

$\lambda = \lambda_1$ sayısı (4.9) denklem sisteminin karakteristik denkleminin m-katlı bir kökü ve α_1 de λ_1 özdeğerine karşılık gelen özvektörü olmak üzere, eğer λ_1 özdeğerinin hatası $m-1$ ise yani $m-1$ tane eksik vektör mevcut ise bu eksik vektörler aşağıdaki biçimde bulunur.

λ_1 değerine karşılık gelen vektör α_1 olmak üzere (4.9) denklem sisteminin bu vektöre dayalı bulunan bir tek çözümü

$$y_1 = \alpha_1 e^{\lambda_1 t}$$

fonksiyonu olarak elde edilir. (4.9) denklem sisteminin diğer eksik çözümleri ise

$$y_2 = \alpha_1 t e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_1 t}$$

$$y_3 = \frac{1}{2}\alpha_1 t^2 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 t e^{\lambda_1 t} + \alpha_3 e^{\lambda_1 t}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_p = \frac{1}{(p-1)!}\alpha_1 t^{p-1} e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{(p-2)!}\alpha_2 t^{p-2} e^{\lambda_1 t} + \cdots$$

$$+\frac{1}{2!}\alpha_{p-2} t^2 e^{\lambda_1 t} + \alpha_{p-1} t e^{\lambda_1 t} + \alpha_p e^{\lambda_1 t}$$

biçiminde yazılabilir $[20]$.

4.5. Örnek

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + 3y_2 - 3y_3 \\ y_2' &= 3y_1 + 2y_2 - 3y_3 \\ y_3' &= -3y_1 - 3y_2 + 2y_3 \end{aligned}$$

denklem sisteminin genel çözümünü bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + 3y_2 - 3y_3 \\ y_2' &= 3y_1 + 2y_2 - 3y_3 \\ y_3' &= -3y_1 - 3y_2 + 2y_3 \end{aligned} \tag{4.48}$$

olsun.

$$y = \alpha e^{\lambda t} \text{ ya da } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} e^{\lambda t} \tag{4.49}$$

ifadesi (4.48) denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} (2-\lambda)\alpha_1 + 3\alpha_2 - 3\alpha_3 &= 0 \\ 3\alpha_1 + (2-\lambda)\alpha_2 - 3\alpha_3 &= 0 \\ -3\alpha_1 - 3\alpha_2 + (2-\lambda)\alpha_3 &= 0 \end{aligned} \tag{4.50}$$

sistemi bulunur. Elde edilen (4.50) sisteminin katsayılar determinantı

$$\begin{vmatrix} (2-\lambda) & 3 & -3 \\ 3 & (2-\lambda) & -3 \\ -3 & -3 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8$$

$$= (\lambda+1)^2 (8-\lambda) = 0$$

olduğundan bu denklemin kökleri yani (4.48) sisteminin özdeğerleri

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1 \text{ ve } \quad \lambda_3 = 8$$

sayılarıdır. $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ çift katlı kökü (4.50) denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 3\alpha_1 + 3\alpha_2 - 3\alpha_3 &= 0 \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_2 - 3\alpha_3 &= 0 \\ -3\alpha_1 - 3\alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

sistemi elde edilir. Bu sistemdeki denklemler aynı olduğundan katsayılar matrisi

$$(T + I) = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \end{vmatrix}$$

şeklinde olup rankı 1 dir. Buradan sistemin $n - r = 3 - 1 = 2$ tane parametreye bağlı sonsuz sayıda sıfırdan farklı çözümü vardır. (4.48) denklem sisteminin genel çözümünün yazılması için iki tane lineer bağımsız vektör elde etmemiz gerekir. Bu yüzden sistemdeki 1. denklem olan $3\alpha_1 + 3\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0$ denklemini ele alalım. $\alpha_1 = \alpha_3 = 1$ olarak alınırsa $\alpha_2 = 0$ olur. Dolayısıyla birinci özvektör,

$$\alpha_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = -1$ alınırsa $\alpha_3 = 0$ olur. O halde ikinci özvektör,

$$\alpha_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Bu özvektörlere karşılık gelen (4.48) sisteminin lineer bağımsız çözümü olan vektör fonksiyonları da

$$\phi_1 = \alpha_{\lambda_1} e^{-t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}, \ \phi_2 = \alpha_{\lambda_2} e^{-t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}$$

biçiminde elde edilir.

$\lambda_3 = 8$ özdeğeri (4.48) sisteminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} -6\alpha_1 + 3\alpha_2 - 3\alpha_3 &= 0 \\ 3\alpha_1 - 6\alpha_2 - 3\alpha_3 &= 0 \\ -3\alpha_1 - 3\alpha_2 - +6\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan birinci ve ikinci denklemden $\alpha_1 = \alpha_2$ bağıntısı elde edilir. Burada keyfi olarak $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ olarak alınırsa

$$\alpha_3 = -1$$

elde edilir. O halde $\lambda_3 = 8$ özdeğerine karşılık gelen özvektör

$$\alpha_{\lambda_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Bu özvektörlere karşılık gelen ve aynı zamanda (4.48) sisteminin lineer bağımsız çözümü olan vektör fonksiyonu

$$\phi_3 = \alpha_{\lambda_3} e^{8t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{8t}$$

biçiminde bulunur. Böylece (4.48) sisteminin çözüm fonksiyonları

$$\phi_1 = \alpha_{\lambda_1} e^{-t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}, \ \phi_2 = \alpha_{\lambda_2} e^{-t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}, \ \phi_3 = \alpha_{\lambda_3} e^{8t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{8t}$$

biçimindedir. Buna göre (4.48) sisteminin genel çözümü c_1, c_2 ve c_3 keyfi sabitler olmak üzere

$$y = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + c_3\phi_3$$

biçiminde veya matris formunda

$$y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix} e^{8t} \\ e^{8t} \\ -e^{8t} \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Bu çözüm sistemi açık bir biçimde yazılırsa

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1e^{-t}+c_2e^{-t}+c_3e^{8t} \\ y_2 &= -c_2e^{-t}+c_3e^{8t} \\ y_3 &= c_1e^{-t}-c_3e^{8t} \end{aligned}$$

olur. Bu çözüm sisteme ait Wronskian determinantı

$$W(\phi_1,\phi_2,\phi_3)=\begin{vmatrix} e^{-t} & e^{-t} & e^{8t} \\ 0 & -e^{-t} & e^{8t} \\ e^{-t} & 0 & -e^{8t} \end{vmatrix}=3e^{6t}\neq 0$$

olduğu için çözüm fonksiyonları olan ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3 vektör fonksiyonları lineer bağımsızdır.

Aşağıda verilecek olan metotlar genelleştirilmiş özvektörlerin tespiti için uygulanabilir.

1) λ_1 özdeğerine karşılık gelen özvektör α_1 olsun.

$$(T-\lambda_1 I)\alpha_1=0,\quad (T-\lambda_1 I)\alpha_2=\alpha_1,\quad (T-\lambda_1 I)\alpha_3=\alpha_2,\ldots,\ (T-\lambda_1 I)\alpha_p=\alpha_{p-1}$$

eşitlikleri sırasıyla uygulanarak α_1 özvektöründen yararlanarak

$$(T-\lambda_1 I)\alpha_2=\alpha_1$$

eşitliğinden α_2 genelleştirilmiş özvektörü elde edilir. Aynı yöntemle α_2 özvektöründen yararlanarak

$$(T-\lambda_1 I)\alpha_3=\alpha_2$$

eşitliğinden α_3 genelleştirilmiş özvektörü elde edilir. Diğer genelleştirilmiş özvektörler benzer yöntemle bulunabilir.

2) Eğer $(T-\lambda I)^p=0$ ise $(T-\lambda I)^p=0$ denklemi, herhangi bir $\alpha_p\ (\alpha_p\neq 0)$ vektörü için sağlanır. Buradan

$$(T-\lambda I)^p\alpha_p=0$$

eşitliği doğru olur. Böylece α_p genelleştirilmiş özvektörü keyfi olarak seçilebilir. α_p özvektörü seçildikten sonra yukarıdaki eşitlikler kullanılarak,

$$(T-\lambda_1 I)\alpha_p = \alpha_{p-1}$$

eşitliğinden α_{p-1} özvektörü elde edilir. Aynı şekilde devam edecek olursak, son olarak

$$(T-\lambda_1 I)\alpha_2 = \alpha_1$$

eşitliğinden α_1 özvektörü elde edilir [20].

4.6. Örnek

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 - y_2 - y_3 \\ y_2' &= 2y_1 - y_3 \\ y_3' &= y_1 \end{aligned}$$

denklem sisteminin genel çözümünü bulalım.

Çözüm:

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 - y_2 - y_3 \\ y_2' &= 2y_1 - y_3 \\ y_3' &= y_1 \end{aligned} \tag{4.51}$$

olsun.

$$y = \alpha e^{\lambda t} \text{ ya da } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} e^{\lambda t} \tag{4.52}$$

ifadesi (4.51) denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} (3-\lambda)\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 - \lambda\alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 - \lambda\alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

(4.53)

sistemi bulunur. Elde edilen (4.53) sisteminin katsayılar determinantı

$$\begin{vmatrix} (3-\lambda) & -1 & -1 \\ 2 & -\lambda & -1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1) = 0$$

$$= (\lambda-1)^3 = 0$$

olduğu için bu denklemin kökleri yani (4.51) sisteminin özdeğerleri

$$\lambda = 1$$

3 katlı özdeğeri olur. Bu özdeğer (4.53) sisteminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 - \alpha_3 \qquad &= 0 \end{aligned}$$

sistemi elde edilir. Buradan üçüncü denklemden $\alpha_1 = \alpha_3$ bağıntısı elde edilir. Buradan $\alpha_1 = \alpha_3$ bağıntısı birinci denklemde yerine yazılırsa $\alpha_1 = \alpha_2$ bağıntısı elde edilir. Buna göre $\lambda = 1$ özdeğeri için bir tek parametreye bağlı $\alpha = (a, a, a)^T$ vektörü elde edilir. Buradan bulunacak vektörler birbirinin birer katı olacağı için bu vektörler aracılığıyla (4.51) sisteminin lineer bağımsız çözümleri yani vektör fonksiyonları yazılamaz. Başka bir deyişle $p = 1 < m = 3$ olduğu için burada iki tane eksik özvektör vardır. Genelleştirilmiş özvektörleri elde etmek için verilen yöntem uygulanacak olursa $\lambda = 1$ için,

$$(T-I)^3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğu için sıfırdan farklı bir α_3 vektörü

$$(T-I)^3 \alpha_3 = 0$$

eşitliğini sağlar. Bu α_3 vektörü,

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

biçiminde alınırsa

$$(T-I)\alpha_3 = \alpha_2$$

eşitliğine göre

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_2$$

genelleştirilmiş özvektörü bulunur. Benzer şekilde

$$(T-I)\alpha_2=\alpha_1$$

eşitliğinden

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}=\alpha_1$$

genelleştirilmiş özvektörü bulunur. Buna göre (4.51) sisteminin vektör fonksiyonları

$$\phi_1=\alpha_1 e^t=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}e^t, \quad \phi_2=(\alpha_1 t+\alpha_2)e^t=\begin{pmatrix} 2t+3 \\ 2t+3 \\ 2t+1 \end{pmatrix}e^t,$$

$$\phi_3=(\frac{1}{2}\alpha_1 t^2+\alpha_2 t+\alpha_3)e^t=\begin{pmatrix} t^2+3t+1 \\ t^2+3t-1 \\ t^2+t \end{pmatrix}e^t$$

biçiminde bulunur. Bu lineer bağımsız vektör fonksiyonları yardımıyla (4.51) sisteminin genel çözümü c_1, c_2, c_3 keyfi sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned} y &= c_1\phi_1+c_2\phi_2+c_3\phi_3 \\ &= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}e^t+c_2\begin{pmatrix} 2t+3 \\ 2t+3 \\ 2t+1 \end{pmatrix}e^t+c_3\begin{pmatrix} t^2+3t+1 \\ t^2+3t-1 \\ t^2+t \end{pmatrix}e^t \end{aligned}$$

olarak bulunur.

5. SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

5.1. Sınır Değer Problemi ve Diferensiyel Operatör

5.1. Tanım $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(a_n \neq 0)$ sabit reel sayılar olsun. Bir $[a,b]$ aralığında tanımlı

$$L(y) = a_n y^{(n)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{5.1}$$

sabit katsayılı lineer homojen diferensiyel denklemini ele alalım. (5.1) diferensiyel denklemindeki, y fonksiyonu $[a,b]$ aralığında n-yinci mertebeye kadar sürekli türevleri mevcut olan bir fonksiyondur. Yani $y \in C^{(n)}$'dir. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ fonksiyonları (5.1) denkleminin lineer bağımsız çözümleri olsun . c_1, $c_2, \ldots$, c_n keyfi sabitler olsun. Bu durumda (5.1) diferensiyel denkleminin genel çözümü

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n \tag{5.2}$$

biçiminde yazılabilir. (5.2) diferensiyel denklemindeki y fonksiyonu ve bu y fonksiyonunun $(n-1)$-inci mertebeye kadar türevlerinin $a \leq x \leq b$ aralığının uç noktalarındaki değerleri

$$y(a),\ y'(a), \ldots, y^{(n-1)}(a)\ ;\ \ y(b),\ y'(b), \ldots, y^{(n-1)}(b)$$

olsun. Bu ifadelerin lineer birleşimlerinden meydana gelen

$$\begin{aligned}
L_1(y) &= \alpha_{11} y(a) + \alpha_{12} y'(a) + \cdots + \alpha_{1n} y^{(n-1)}(a) + \beta_{11} y(b) + \beta_{12} y'(b) + \cdots + \beta_{1n} y^{(n-1)}(b) = 0 \\
L_2(y) &= \alpha_{21} y(a) + \alpha_{22} y'(a) + \cdots + \alpha_{2n} y^{(n-1)}(a) + \beta_{21} y(b) + \beta_{22} y'(b) + \cdots + \beta_{2n} y^{(n-1)}(b) = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
L_m(y) &= \alpha_{m1} y(a) + \alpha_{m2} y'(a) + \cdots + \alpha_{mn} y^{(n-1)}(a) + \beta_{m1} y(b) + \beta_{m2} y'(b) + \cdots + \beta_{mn} y^{(n-1)}(b) = 0
\end{aligned} \tag{5.3}$$

denklem sistemini ele alalım. Bu denklem sistemi daha kısa olarak

$$L_k(y) = 0\ ,\ k = 1, 2, \ldots, m \tag{5.4}$$

biçiminde de yazılabilir $[20]$.

5.2. Tanım (5.3) ya da (5.4) denklem sistemine (5.1) denklem sisteminin **sınır şartları** adı verilir. (5.3) ya da (5.4) denklem sistemindeki her denklem bir sınır şartı ve $L_1,\ L_2,\ldots,\ L_m$ lineer birleşimleri ise sınır formları ya da sınır değer ifadeleri olarak isimlendirilir. (5.1) homojen denklemi ile (5.1) homojen denklemine ait (5.4) sınır şartlarını beraber düşünecek olursak

$$\begin{cases} L(y)=0 \\ L_k(y)=0,\ k=1,2,\ldots,m \end{cases} \tag{5.5}$$

biçiminde ifade edilen bir probleme **homojen sınır değer problemi** denir [20].

5.3. Tanım $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon $f(x)$ olsun. f_k sabit sayılar olsun. Bu durumda

$$\begin{cases} L(y)=f(x) \\ L_k(y)=f_k,\ k=1,2,\ldots,m \end{cases}$$

denklem sistemine **homojen olmayan sınır değer problemi** adı verilir [20].

5.4. Tanım (Özel Tipte Sınır Şartları)

Uygulamada sıklıkla karşılaşılan özel tipte sınır şartları mevcuttur. Bunlar,

- Ayrık: $a_1 y(\gamma)+a_2 y'(\gamma)=c_1$, $b_1 y(\delta)+b_2 y'(\delta)=c_2$
- Drichlet: $y(\gamma)=c_1$, $y(\delta)=c_2$
- Neumann: $y'(\gamma)=c_1$, $y'(\delta)=c_2$
- Periyodik: $y(-T)=y(T)$, $y'(-T)=y'(T)$, ya da $y(0)=y(2T)$, $y'(0)=y'(2T)$

sınır şartlarıdır. Burada periyot $2T$ dir [31].

5.5. Tanım (5.4) sınır şartları ve $L(y)$ diferensiyel ifadesinin tanım bölgesinde bulunan her bir y fonksiyonuna $L(y)=u$ olacak biçimde bir u değerinin karşılık geldiğini kabul edersek (5.5) sınır değer problemi $\mathcal{L}$ ile ifade edilen bir lineer operatör kullanılarak

$$\mathcal{L}y = u$$

şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca bu eşitlik

$$\mathcal{L}y = \big(L(y), L_1(y), L_2(y), ..., L_m(y)\big) = u \tag{5.6}$$

anlamına gelir.

(5.6) biçiminde ifade edilebilen $\mathcal{L}$ operatörüne, $L(y)$ diferensiyel ifadesi ile (5.4) sınır şartları tarafından üretilen **diferensiyel operatör** adı verilir. Burada (5.5) sınır değer problemi ve $\mathcal{L}$ diferensiyel operatörü eşdeğer olmaktadır. Yani (5.5) sınır değer problemi

$$\mathcal{L}y = 0$$

biçiminde ifade edilebilir [20].

5.2. Sınır Değer Problemlerinin Özdeğer ve Özfonksiyonları

Fiziksel çalışmalar çoğunlukla bir başka tipteki probleme; bağımlı değişkenin ya da bağımlı değişkenin türevinin iki ayrı noktadaki değerlerinin yer aldığı yapıdaki bir probleme dönüşebilir. Bu şekildeki şartlara y ve y' nün aynı noktadaki karşılığını veren başlangıç şartlarından farklı olması adına sınır şartları denir.

5.6. Tanım Bir diferensiyel denklem ile uygun sınır şartları bir **iki nokta sınır değer problemi** oluşturmaktadır. Genel bir örnek verecek olursak

$$y'' + k(x)y' + m(x) = r(x) \tag{5.7}$$

denklemi ile

$$y(\alpha) = y_0, \quad y(\beta) = y_1 \tag{5.8}$$

sınır koşulları verilebilir.

(5.7)-(5.8) iki nokta sınır değer problemini çözebilmek için (5.7) denklemini $\alpha < x < \beta$ aralığında sağlayan ve aralığın sınır noktalarındaki değeri y_0 ve y_1 değerlerine eşit olan bir $y = \varphi(x)$ fonksiyonunun bulunması gerekmektedir. Genel olarak bir sınır değer problemi çözülürken ilk olarak diferensiyel denklemin çözümü bulunur. Ardından sınır şartları da kullanılarak keyfi sabitler belli edilir [9].

Şimdi homojen lineer denklemlerin genel çözümünün bulunması yöntemiyle oldukça benzerlik gösteren sınır değer problemlerinin genel çözümlerine bazı örnekler verelim.

$$Ax = 0 \tag{5.9}$$

(5.9) homojen lineer denkleminin her zaman $x = 0$ aşikar çözümü mevcuttur. Eğer A karesel matrisinin tersi mevcut ise sistemin bir tek aşikar çözümü vardır. Eğer A karesel matrisinin tersi mevcut değilse sistemin aşikar çözümünün haricinde sonsuz çözümü vardır [9].

5.1. Örnek

$$y'' + 2y' + 5y = 0;$$
$$y(0) = 2 \;\;,\;\; y(\pi/4) = 1$$

sınır değer problemine ait tüm çözümleri bulalım.

Çözüm: Sınır değer probleminde verilen denklemin karakteristik denklemi $r^2 + 2r + 5 = 0$ olup bu karakteristik denklemin kökleri $r = -1 \pm 2i$ olmaktadır.

Dolayısıyla sınır değer probleminde verilen denklemin genel çözümü

$$y(x) = c_1 e^{-x}\cos 2x + c_2 e^{-x}\sin 2x$$

şeklindedir. Şimdi c_1 ve c_2 sabitleri hesap edilmelidir. $x = 0$ ve $x = \pi/4$ alarak

$$y(0) = c_1 = 2 \;\;,\;\; y(\pi/4) = c_2 e^{-\pi/4} = 1$$

elde edilir. Dolayısıyla buradan, $c_1 = 2$ ve $c_2 = e^{\pi/4}$ bulunur. Buradan verilen sınır değer probleminin tek çözümü

$$y(x) = 2e^{-x}\cos 2x + e^{\pi/4}e^{-x}\sin 2x$$

şeklindedir [31].

Bu örnek ile tek bir çözüme sahip olan homojen bir sınır değer problemi ele alınmıştır.

5.2. Örnek

$$y'' + y = \cos 2x;$$
$$y'(0) = 0 \ , \ y'(\pi) = 0$$

sınır değer problemine ait tüm çözümleri bulalım.

Çözüm: Sınır değer probleminde verilen denklemin karakteristik denklemi $r^2 + 1 = 0$ olur. Dolayısıyla sınır değer probleminde verilen denklemin homojen kısmının genel çözümü $y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ şeklindedir.

Belirsiz katsayılar yönteminden de bilindiği üzere sınır değer probleminde verilen homojen olmayan denklemine ait bir özel çözüm $y_ö(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$ şeklindedir. $y_ö$ özel çözümü verilen sınır değer probleminin denkleminde yerine yazılırsa $A = -1/3$ ve $B = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $y_ö(x) = -(1/3)\cos 2x$ olarak elde edilir. Buradan, verilen sınır değer problemindeki denklemin genel çözümü

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x - (1/3)\cos 2x$$

şeklindedir.

c_1 ve c_2 değerlerini belirlemek için sınır değer probleminde verilen sınır şartları $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x - (1/3)\cos 2x$ genel çözümünde yerine yazılmalıdır. Buradan,

$$y'(0) = c_2 = 0 \ , \ y'(\pi) = -c_2 = 0$$

elde edilir. Buradan $c_2 = 0$ olarak elde edilir. Dolayısıyla verilen sınır değer problemi bir parametreli çözümler ailesine sahiptir. Yani sınır değer probleminin genel çözümü

$$y(x) = c_1 \cos x - (1/3)\cos 2x$$

biçimindedir. Burada c_1 herhangi bir reel sayıdır $[31]$.

Bu örnekte c_1 katsayısı keyfi bırakılarak

$$y(x) = c_1 \cos x - (1/3)\cos 2x$$

şeklinde sonsuz çözüm bulunur. Böylece bu örnek ile homojen olmayan bir sınır değer probleminin sonsuz çözümünün mevcut olabileceğini gördük.

5.3. Sınır Değer Probleminin Genel Çözümünün λ Özdeğerinin Durumuna Göre İncelenmesi

$$Ax = \lambda x \tag{5.10}$$

matris denkleminde yer alan λ nın her bir değeri için $x = 0$; (5.10) denkleminin bir çözümü olur. Diğer yandan λ nın, özdeğerler olarak adlandırılan belli değerleri için aşikar çözüm haricinde de özvektörler olarak adlandırılan çözümleri vardır. Yani λ nın (5.10) denklemi için aşikar çözümü haricinde sahip olduğu değerlere **özdeğerler**; bu özdeğerler sayesinde bulunan aşikar olmayan çözümlere ise **özfonksiyonlar** adı verilir. Buna benzer bir durum sınır değer problemleri için de geçerlidir. Bu durum aşağıda verilen örnek ile açıklanacaktır.

5.3. Örnek

$$y'' + \lambda y = 0$$
$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

problemini ele alalım.

Çözüm: Bu problemin özdeğerleri incelenirken $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ ve $\lambda < 0$ durumları ele alınacaktır. Çünkü bu durumlarda verilen problem farklı yapılarda olacaktır.

i) $\lambda > 0$ durumu

Çoğunlukla karşımıza çıkacak olan karekök işaretinden kurtulmak için $\lambda = \eta^2$ alınırsa

$$y'' + \lambda y = 0$$

denklemi

$$y'' + \eta^2 y = 0$$

şeklinde yeniden ifade edilir. Son denklem için karakteristik polinom denklemi $r^2 + \eta^2 = 0$ denklemidir. Bu denklemin kökleri $r = \pm i\eta$ olduğu için genel çözüm

$$y = c_1 \cos \eta x + c_2 \sin \eta x$$

şeklinde elde edilir. $\lambda > 0$ olduğundan η nün de pozitif olarak kabul edilmesi genelliği bozmaz. Sınır değer şartlarından birincisi $c_1 = 0$ değerini verir. İkinci şart

$$c_2 \sin \eta\pi = 0$$

şeklini alır. Aşikar olmayan çözümler arandığından $c_2 \neq 0$ kabul edilmesi gerekmektedir. Burada, $\sin \eta\pi$ nin sıfır olması gerekmektedir ve η, bu şartı sağlayacak biçimde seçilmelidir. Sinüs fonksiyonunun π nin tam sayı katlarında da sıfır olduğunu dikkate alırsak, η nün herhangi bir pozitif tam sayı olarak alınabileceği anlaşılır. Dolayısıyla, λ nın pozitif tam sayıların karelerine eşit olacağı belli olur. Yani

$$y'' + \lambda y = 0$$
$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

probleminin özdeğerleri

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 9, \ldots, \lambda_k = k^2, \ldots$$

şeklindedir.

Özfonksiyonlar, $y = c_1 \cos \eta x + c_2 \sin \eta x$ denkleminde $c_1 = 0$ değerini yerine yazarsak, $k = 1, 2, 3, \ldots$ için $\sin kx$ fonksiyonları şeklinde elde edilir. $y = c_1 \cos \eta x + c_2 \sin \eta x$ denklemindeki c_2 sabitinin belli edilemediği ve özdeğerlerin çarpımsal bir sabite bağlı olarak tanımlandığı anlaşılır. Bu çarpımsal sabiti 1 olarak seçersek özfonksiyonlar

$$y_1(x) = \sin x, y_2(x) = \sin 2x, \ldots, y_k(x) = \sin kx, \ldots$$

şeklinde yazılır. Ayrıca bunların katlarının da özfonksiyonlar oldukları unutulmamalıdır.

ii) $\lambda < 0$ durumu

Bu durumda $\lambda = -\eta^2$ yazılırsa $y'' + \lambda y = 0$ denklemi

$$y'' - \eta^2 y = 0$$

şeklini alır. Son denklemin karakteristik denklemi $r^2 - \eta^2 = 0$ denklemidir. Bu denklemin kökleri $r = \pm\eta$ olur. Buradan genel çözüm

$$y = c_1 \cosh \eta x + c_2 \sinh \eta x$$

şeklindedir. Birinci sınır değer şartından $c_1 = 0$ olarak bulunur. İkinci şarttan da $c_2 \sinh \eta\pi = 0$ denklemi elde edilir. $\eta \neq 0$ olduğu için $\sinh \eta\pi \neq 0$ olur. Buradan $c_2 = 0$ olarak bulunur.Sonuçta $y = 0$ olur ve $\lambda < 0$ durumunda aşikar çözüm haricinde çözüm var olmadığı görülür. Yani

$$y'' + \lambda y = 0$$
$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

probleminin negatif özdeğeri yoktur.

iii) $\lambda = 0$ durumu

Bu durumda $y'' + \lambda y = 0$ denklemi

$$y'' = 0$$

şeklinde olup genel çözümü

$$y = c_1 x + c_2$$

şeklindedir. Sınır değer koşullları olan $y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$ sadece $c_1 = 0$ ve $c_2 = 0$ için sağlandığından tek çözüm $y = 0$ aşikar çözümdür. Buradan $\lambda = 0$ değerinin bir özdeğer olmadığı sonucuna varılır.

Böylece bu sınır değer probleminin $k = 1, 2, 3, \ldots$, için $\lambda_k = k^2$ biçiminde sonsuz özdeğerlere sahip olduğunu bulduk. Ayrıca bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonları ise $\sin kx$ fonksiyonları olarak elde ettik $[9]$.

5.4. Sturm-Liouville Sınır Değer Problemi

5.7. Tanım Bir $[a,b]$ reel aralığında sürekli $k(x)$, $k'(x)$, $m(x)$ ve $r(x)$ fonksiyonları verilsin. $[a,b]$ aralığının her bir noktasında $k(x) > 0$, $r(x) > 0$ olmak üzere ve λ, x değişkeninden bağımsız bir parametre olsun.

$$\left(k(x)y'\right)' + \left(m(x) + \lambda r(x)\right)y = 0, \quad a \le x \le b$$
$$\gamma_1 y(a) + \gamma_2 y'(a) = 0 , \qquad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 > 0,$$
$$\delta_1 y(b) + \delta_2 y'(b) = 0 , \qquad \delta_1^2 + \delta_2^2 > 0$$

biçiminde tanımlanan probleme **regüler Sturm-Liouville sınır değer problemi** adı verilir $[20]$.

5.4. Örnek :

$$y'' + \lambda y = 0, \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned} L_1(y) &= y(0) = 0 \\ L_2(y) &= y(k) = 0,\ (k > 0) \end{aligned} \tag{5.12}$$

sınır değer problemine ait özdeğer ve özfonksiyonları bulalım.

1) $\lambda = 0$ iken denklem $y'' = 0$ olur. Buradan genel çözüm

$$y = c_1 x + c_2$$

şeklinde olmaktadır. $y(0) = 0$ sınır şartına göre $c_2 = 0$ ve $y(k) = 0$ sınır şartına göre ise $c_1 k = 0$ olduğu için

$$\begin{aligned} c_1 k &= 0 \\ c_2 &= 0 \end{aligned}$$

sistemi elde edilmektedir. Bu sistem için

$$\begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = k \neq 0$$

olduğu için $c_1 = c_2 = 0$ olarak bulunur. Buradan (5.11)-(5.12) sınır değer probleminin yalnızca $y = 0$ aşikar çözümünün var olduğu anlaşılır. Dolayısıyla $\lambda = 0$ sayısı (5.11)-(5.12) sınır değer probleminin özdeğeri değildir.

2) $\lambda < 0$ ise $\lambda = -\alpha^2$ $(\alpha > 0)$ olarak alınırsa denklemin genel çözümü

$$y = c_1 e^{-\alpha x} + c_2 e^{\alpha x}$$

şeklinde olur. $y(0) = 0$ ve $y(k) = 0$ sınır şartlarına göre

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 e^{-\alpha k} + c_2 e^{\alpha k} &= 0 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklem sistemine ait katsayılar determinantı

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\alpha k} & e^{\alpha k} \end{vmatrix} = e^{\alpha k} - e^{-\alpha k} \neq 0$$

olarak bulunur. Yani $e^{\alpha k} - e^{-\alpha k} = 0$ olur ise

$$e^{\alpha k} = e^{-\alpha k}\ ,$$

$$\alpha k = -\alpha k\,,$$

$$2\alpha k = 0\,,$$

$$\alpha k = 0$$

olur. Oysa ki hem $k > 0$ hem de $\alpha > 0$ şeklinde alındığından $\alpha k > 0$ olur. Bu durumda bu katsayılar determinantı sıfıra eşit olamaz. Dolayısıyla sistem yalnızca $c_1 = c_2 = 0$ aşikar çözüme sahiptir. Buradan (5.11)-(5.12) sınır değer probleminin yalnızca $y = 0$ aşikar çözüme sahip olduğu elde edilir. $\lambda < 0$ olacak biçimde bir özdeğer mevcut değildir.

3) $\lambda > 0$ ise $\lambda = \alpha^2$ $(\alpha > 0)$ olarak alınırsa denklemin genel çözümü

$$y(x) = c_1 \cos \alpha x + c_2 \sin \alpha x$$

şeklinde olur. (5.11)-(5.12) sınır değer problemine ait sınır şartlarına göre $y(0) = 0$ ise

$$c_1 = 0 \text{ ve } y(k) = 0 \text{ ise } c_2 \sin \alpha k = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerden oluşan sistem

$$c_1 = 0$$

$$c_2 \sin \alpha k = 0$$

sistemidir. Bu sisteme ait sıfırdan farklı çözümlerin var olması için

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin \alpha k \end{vmatrix} = \sin \alpha k = 0$$

olması gerekir. Buradan

$$\alpha k = \pi n$$

$$\alpha = \frac{\pi n}{k}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

olarak elde edilir. $\lambda = \alpha^2$ olduğundan (5.11)-(5.12) sınır değer probleminin özdeğerleri

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{k^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

biçiminde bulunur. Bu özdeğerlere karşılık gelen öz fonksiyonlar ise c_n keyfi sabitler olmak üzere

$$y(x, \lambda) = c_n \sin \frac{\pi n}{k} x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla $(\lambda_n) \to \infty$ olup (λ_n) dizisi artan ıraksak bir dizi olur [20].

5.5. Örnek

$$y'' + \lambda y = 0 \quad , \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned} &L_1(y) = y(0) = 0 \\ &L_2(y) = qy(k) + y'(k) = 0, \ (q > 0,\ k > 0) \end{aligned} \tag{5.14}$$

sınır değer problemine ait özdeğerleri ve özfonksiyonları bulalım.

1) $\lambda = 0$ ise denklem $y'' = 0$ olur. Buradan genel çözüm

$$y = c_1 x + c_2$$

şeklinde elde edilir. Genel çözümün türevi ise

$$y' = c_1$$

şeklindedir. Buradan $y(0) = 0$ sınır şartına göre $c_2 = 0$ ve $qy(k) + y'(k) = 0$ sınır şartına göre ise $qc_1 k + c_1 = 0$ ya da $c_1(qk+1) = 0$ denklemleri elde edilir. Bu denklemlere göre

$$\begin{aligned} &c_2 = 0 \\ &c_1(qk+1) = 0 \end{aligned} \tag{5.15}$$

sisteminin katsayılar determinantı

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ qk+1 & 0 \end{vmatrix} = -qk - 1 \neq 0$$

olmaktadır. Böylece (5.15) sisteminin yalnızca $c_1 = c_2 = 0$ çözümü mevcuttur. Yani (5.13)-(5.14) sınır değer probleminin yalnızca $y = 0$ aşikar çözümü mevcuttur. Buradan $\lambda = 0$ sayısının (5.13)-(5.14) sınır değer probleminin özdeğeri olmadığı sonucuna ulaşılır.

2) $\lambda < 0$ ise $\lambda = -\alpha^2$ $(\alpha > 0)$ olmak üzere denklemin genel çözümü

$$y = c_1 e^{-\alpha x} + c_2 e^{\alpha x}$$

şeklinde elde edilir. Genel çözümün türevi ise

$$y' = -\alpha c_1 e^{-\alpha x} + \alpha c_2 e^{\alpha x}$$

şeklindedir.

$y(0)=0$ ve $qy(k)+y'(k)=0$ sınır şartlarına göre sırasıyla

$$\begin{aligned} &c_1+c_2=0 \\ &c_1(q-\alpha)e^{-\alpha k}+c_2(q+\alpha)e^{\alpha k}=0 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklem sisteminin katsayılar determinantı

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ (q-\alpha)e^{-\alpha k} & (q+\alpha)e^{\alpha k} \end{vmatrix} = (q+\alpha)e^{\alpha k}-(q-\alpha)e^{-\alpha k} \neq 0$$

olmaktadır. Çünkü $e^{\alpha k} \neq e^{-\alpha k}$ olduğunu 5.4 örnekten bilmekteyiz. Ayrıca $(q+\alpha)\neq(q-\alpha)$ olmaktadır. Dolayısıyla (5.15) sistemin yalnızca $c_1=c_2=0$ çözümü var olup (5.13)-(5.14) probleminin yalnızca $y=0$ aşikar çözümü mevcuttur. Bu nedenle problemin $\lambda<0$ olacak biçimde bir özdeğeri yoktur.

3) $\lambda>0$ ise $\lambda=\alpha^2$ $(\alpha>0)$ olmak üzere denklemin genel çözümü

$$y(x)=c_1\cos\alpha x+c_2\sin\alpha x \tag{5.16}$$

şeklinde olmaktadır. Genel çözümün türevi ise

$$y'(x)=-\alpha c_1\sin\alpha x+\alpha c_2\cos\alpha x$$

şeklinde olmaktadır. Sınır değer probleminin sınır şartlarına göre

$$y(0)=0 \text{ ise } c_1=0$$

$$qy(k)+y'(k)=0 \text{ ise } c_2(q\sin\alpha k+\alpha\cos\alpha k)=0$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} &c_1=0 \\ &c_2(q\sin\alpha k+\alpha\cos\alpha k)=0 \end{aligned}$$

olup sistemin sıfırdan farklı çözümünün var olması için

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q\sin\alpha k+\alpha\cos\alpha k \end{vmatrix} = q\sin\alpha k+\alpha\cos\alpha k=0$$

olmalıdır. Buradan

$$\tan \alpha k = -\frac{\alpha}{q} \tag{5.17}$$

olan (5.17) denklemini çözelim. $0 < \theta < 2\pi$ olmak üzere

$$\tan \theta = -\frac{\alpha}{q}$$

olur ise n tamsayısı için $\alpha k = \theta + n\pi$ olur. Bu eşitlik sayesinde (5.17) denkleminin çözüm kümesi belirlenir. Bu çözüm kümesinin pozitif bir çözümü β olsun. Bu durumda $\beta = \alpha k = \theta + n\pi$ sayısı denklemin pozitif bir çözümü olur. Buradan $\lambda = \alpha^2$ eşitliği dikkate alınırsa (5.13)-(5.14) sınır değer problemine ait özdeğerler

$$\lambda = \alpha^2 = (\frac{\theta + n\pi}{k})^2 = \frac{(\theta + n\pi)^2}{k^2}, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

biçiminde elde edilir. Burada her bir n tamsayısına bir λ özdeğeri karşılık geleceği için (5.13)-(5.14) probleminin özdeğerleri

$$\lambda_1 = \frac{(\theta + \pi)^2}{k^2}, \quad \lambda_2 = \frac{(\theta + 2\pi)^2}{k^2}, \quad \lambda_3 = \frac{(\theta + 3\pi)^2}{k^2}, \quad \lambda_n = \frac{(\theta + n\pi)^2}{k^2}, ...$$

ya da

$$\lambda_1 = \frac{\beta_1^2}{k^2}, \quad \lambda_2 = \frac{\beta_2^2}{k^2}, \quad \lambda_3 = \frac{\beta_3^2}{k^2}, \quad \lambda_n = \frac{\beta_n^2}{k^2}, \ldots$$

biçimindedir. Dolayısıyla açıkça anlaşılmaktadır ki (5.13)-(5.14) sınır değer problemine ait özdeğerlerin genel terimi

$$\lambda_n = \frac{\beta_n^2}{k^2}, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

olan pozitif terimli artan ve ıraksak yani $(\lambda_n) \to \infty$ olan

$$(\lambda_n) = (\frac{\beta_n^2}{k^2})$$

dizisi olmaktadır. Probleme ait özfonksiyonlar ise c_n keyfi sabitler olmak üzere (5.16) genel çözümünde $c_2 \neq 0$ olduğu için

$$y(x, \lambda) = c_n \sin \frac{\beta_n}{k} x, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

şeklinde bulunur $[20]$.

6. İKİ ARALIKLI BİR SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNE DAİR KARAKTERİSTİK POLİNOMLAR

6.1. Tanım $\Delta(\lambda)=|A-\lambda I|$ karakteristik determinantından

$$Q(s)=\sum_{k=1}^{n}|A_k|e^{\alpha_k s}$$
$$=|A_1|e^{\alpha_1 s}+|A_2|e^{\alpha_2 s}+...+|A_n|e^{\alpha_n s}$$

şeklinde elde edilen kompleks değerli özel tipte üstel fonksiyona **karakteristik (kuazi) polinom** denir. Burada,

$$0<\alpha_1<\alpha_2<...<\alpha_n \text{ ve } A_1\neq 0,\ A_n\neq 0$$

olmaktadır.

Sınır değer problemine ait özdeğerlerin kompleks düzlemde dağılımını belirlemek için $\Delta(\lambda)=0$ karakteristik denkleminin sıfırlarının bulunması gerekir. $\Delta(\lambda)=Q(s)=0$ olduğundan karakteristik denklemin kökleri $Q(s)$ karakteristik polinomunun köklerinin kompleks düzlemdeki dağılım özelliklerinden faydalanılarak elde edilir $[7]$

Bu bölümde aşağıdaki verilen iki aralıklı bir sınır değer probleminin özdeğerlerine ait karakteristik polinomların elde edilişini inceleyeceğiz.

$$p(x)y''+y=\rho y,\quad x\in[-1,0)\cup(0,1] \tag{6.1}$$

diferensiyel denklemi ve

$$\begin{aligned}
L_1(y)&=\rho^{1/2}\left(p_{10}y(-1)+\delta_{10}y(-0)+\gamma_{10}y(+0)+\beta_{10}y(1)+N_{10}y\right)\\
&\quad+\left(p_{11}y'(-1)+\delta_{11}y'(-0)+\gamma_{11}y'(+0)+\beta_{11}y'(1)+N_{11}y\right)=0\\[2ex]
L_2(y)&=\rho^{1/2}\left(p_{20}y(-1)+\delta_{20}y(-0)+\gamma_{20}y(+0)+\beta_{20}y(1)+N_{20}y\right)\\
&\quad+\left(p_{21}y'(-1)+\delta_{21}y'(-0)+\gamma_{21}y'(+0)+\beta_{21}y'(1)+N_{21}y\right)=0\\[2ex]
L_3(y)&=\rho^{1/2}\left(p_{30}y(-1)+\delta_{30}y(-0)+\gamma_{30}y(+0)+\beta_{30}y(1)+N_{30}y\right)\\
&\quad+\left(p_{31}y'(-1)+\delta_{31}y'(-0)+\gamma_{31}y'(+0)+\beta_{31}y'(1)+N_{31}y\right)=0\\[2ex]
L_4(y)&=\rho^{1/2}\left(p_{40}y(-1)+\delta_{40}y(-0)+\gamma_{40}y(+0)+\beta_{40}y(1)+N_{40}y\right)\\
&\quad+\left(p_{41}y'(-1)+\delta_{41}y'(-0)+\gamma_{41}y'(+0)+\beta_{41}y'(1)+N_{41}y\right)=0
\end{aligned} \tag{6.2}$$

sınır şartlarını göz önüne alalım. Burada $p(x)$ kompleks değerli fonksiyondur. $x \in [-1,0)$ da $p(x) = p_1$, $x \in (0,1]$ da $p(x) = p_2$ ve $p_{ik}, \delta_{ik}, \gamma_{ik}, \beta_{ik}$ kompleks katsayılar N_{ik} lar soyut lineer fonksiyonellerdir. Ayrıca $y^{(k)}(\pm 0)$ ifadesi $\lim_{x \to \pm 0} y^{(k)}(x)$ anlamındadır.

$W_q^k(-1,0) + W_q^k(0,1)$, $q \in (1,\infty)$; $k = 0,1,2,...,$ ifadesi $[-1,0) \cup (0,1]$ üzerinde tanımlı, $y = y(x)$ kompleks değerli fonksiyonların Banach uzayını belirtmektedir. Burada $W_q^k(-1,0)$ ve $W_q^k(0,1)$ uzayları, sırasıyla, $(-1,0)$ ve $(0,1)$ aralıkları üzerinde tanımlıdır. $W_q^k(-1,0) + W_q^k(0,1)$, $q \in (1,\infty)$; $k = 0,1,2,...,$ Banach uzayının normu $\|y\|_{q,k} = \left(\|y\|^q_{W_q^k(-1,0)} + \|y\|^q_{W_q^k(0,1)} \right)^{1/q}$ ile verilir. Ayrıca $W_q^k(-1,($ ve $W_q^k(0,1)$ uzayları bilinen Sobolev uzaylarıdır.

6.1. Probleme Ait Özdeğerlerin Elde Edilişi

$\rho = \lambda^2$ olmak üzere (6.1) diferensiyel denkleminin $[-1,0)$ aralığı üzerindeki çözümleri $y_{10}(x,\lambda)$, $y_{20}(x,\lambda)$ ve $(0,1]$ aralığı üzerindeki çözümleri de $y_{30}(x,\lambda)$, $y_{40}(x,\lambda)$ olsun. Buna göre (6.1) diferensiyel denkleminin genel çözümü

$$y(x,\lambda) = c_1 y_1(x,\lambda) + c_2 y_2(x,\lambda) + c_3 y_3(x,\lambda) + c_4 y_4(x,\lambda) \tag{6.3}$$

şeklinde yazılabilir. (6.3) çözümü (6.2) sınır şartlarında yerine yazılırsa c_j, $j = 1,2,3,4$ ler keyfi sabitler olmak üzere

$$\sum_{j=1}^{4} c_j L_v(y_j) = 0, \; v = 1,2,3,4 \tag{6.4}$$

sistemi elde edilir. (6.1)-(6.2) probleminin özdeğerleri

$$\Delta(\lambda) = \det(L_v y_j) \tag{6.5}$$

karakteristik determinantının sıfırlarından oluşmaktadır. Bu determinantın sıfırları olan problemin özdeğerleri $\Delta(\lambda) = 0$ denkleminden bulunacaktır. Ancak bu özdeğerlerin kompleks düzlemdeki dağılımlarını, kompleks düzlemi özel sektörlere ayırmak suretiyle belirleyeceğiz $[27]$.

6.2. $\arg p_1 \neq \arg p_2$ İçin Kompleks Düzlemin Sektörlere Ayrılması

Bu bölüm boyunca $-\pi < \arg z \le \pi$ ve $\sqrt{z} = |z| e^{i(\arg z)/2}$ olmak üzere

$$\omega_1 = \left(\sqrt{p_1}\right)^{-1},\ \omega_2 = -\left(\sqrt{p_1}\right)^{-1},\ \omega_3 = \left(\sqrt{p_2}\right)^{-1}, \omega_4 = -\left(\sqrt{p_2}\right)^{-1}$$

gösterimleri kullanılacaktır.

Kompleks $\lambda -$ düzlemi

$$d_k = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda_{wk} = 0,\ (-1)^k \operatorname{Im}\lambda_{wk} \le 0\right\}$$

doğruları yardımıyla $S_v,\ v = 1,2,3,4$ şeklinde dört tane sektöre ayıralım. Bu sektörlerin tamamının üzerinde $\operatorname{Re}\lambda_{wk}$ reel değerli fonksiyonlarının her biri aynı işaretlidir. Çünkü bu fonksiyonlar S_v sektörlerinin sadece sınırlarının üzerinde sıfır olabilmektedir. Naimark'ın *"Linear Differential Operators Part II"* isimli kitabındaki metotlar kullanılarak $y_j(x,\lambda)$ çözümlerinin asimptotik ifadeleri

$$\begin{cases} y_{k0} = e^{\lambda w_k x}\left(1 + O(1/\lambda)\right) \\ y'_{k0} = \lambda w_k e^{\lambda w_k x}\left(1 + O(1/\lambda)\right) \end{cases} \tag{6.6}$$

şeklinde elde edilir.

Burada, $I_1 = (-1,0)$ ve $I_2 = (0,1)$ diyelim. $x \in I_k$, $|f(x,\lambda)| < K$, $K \in \mathbb{R}$ ve $|\lambda| \to \infty$ olmak üzere $O(1/\lambda)$ asimptotik ifadesi $f(x,\lambda)/\lambda$ rasyonel fonksiyonunu temsil etmektedir. Şimdi orijinden geçen $d'_j\left(j = 1,\ldots,4\right)$ doğruları ile d_j doğruları

$$d_1, d'_1, d_2, d'_2, d_3, d'_3, d_4, d'_4 \tag{6.7}$$

şeklinde dizilmiş olsun.

d'_j doğruları her S_v sektörünü iki alt sektöre bölmektedir. Bundan dolayı $\Omega_j,\ j = 1,\ldots,8$ ile gösterilecek olan sekiz tane sektör elde edilir. $\Omega = \{\Omega_1,\ldots,\Omega_8\}$ sektörlerini, $\Omega^{(1)} = \left\{\Omega_1^{(1)},\ldots,\Omega_4^{(1)}\right\}$ ve $\Omega^{(2)} = \left\{\Omega_1^{(2)},\ldots,\Omega_4^{(2)}\right\}$ şeklinde iki gruba ayıralım. Burada $\lambda \to \infty$ iken $\operatorname{Re}\lambda\left(\sqrt{p_k}\right)^{-1} \to \infty$ olacak şekilde $\Omega^{(k)}$ sektörleri Ω_j sektörlerini içermektedir $[27]$.

6.3. Karakteristik Determinanta Ait Asimptotik İfadeler

Her bir reel değerli $\operatorname{Re}\lambda_{wk}$ fonksiyonları Ω_j sektörlerinde de işaret değiştirmez. Çünkü onların her biri bazı S_v sektörlerinin alt sektörleridir. Burada $y_k = y_k(x,\lambda),\ k=1,...,4$, fonksiyonları, I_k da (6.1) denkleminin $y_{k0}(x,\lambda)$ çözümleri için (6.6) asimptotik ifadelerini sağlar.

Öncelikle Ω_j sektörlerinde $\lambda \to \infty$ iken $N_{vk}y_n(\lambda)$ fonksiyonellerinin asimptotik ifadelerini bulmamız gerekmektedir. N_{vk} fonksiyonelleri

$$N_{vk} : W_q^k(-1,0) + W_q^k(0,1) \to \mathbb{C}$$

şeklinde tanımlı sürekli lineer fonksiyoneller olup $1/p + 1/q = 1$ olmak üzere her $y \in W_q^k(-1,0) + W_q^k(0,1)$ ve $U_{vks} \in W_q^k(-1,0) + W_q^k(0,1)$ için

$$N_{vk}(y) = \sum_{s=0}^{k} \left(\int_{-1}^{0} y^{(s)}(x) U_{vks}(x)dx + \int_{0}^{1} y^{(s)}(x) U_{vks}(x)dx \right), v = 1,...,4,\ k = 0,1 \quad (6.8)$$

gösterimine sahiptir $[40]$.

$\Omega^{(1)}$ sektörlerinin sadece birinde

$$\operatorname{Re}\lambda\omega_3 \geq 0 \text{ ve } \operatorname{Re}\lambda\omega_1 \to +\infty,\ \lambda \to \infty$$

ve $\Omega^{(2)}$ sektörlerinin sadece birinde

$$\operatorname{Re}\lambda\omega_1 \geq 0 \text{ ve } \operatorname{Re}\lambda\omega_3 \to +\infty,\ \lambda \to \infty$$

sağlanmaktadır. Bu sektörler sırasıyla $\Omega_0^{(1)}$ ve $\Omega_0^{(2)}$ ile gösterilecektir. $N_{vk}y_j$ için asimptotik ifadeleri $\Omega^{(1)}$ ve $\Omega^{(2)}$ gruplarının sadece bu sektörleri için hesaplanacaktır. Çünkü diğer sektörler için hesaplamalar benzer olarak yapılabilir.

$\lambda \in \Omega_0^{(1)}$ ve $\omega_2 = -\omega_1,\ \omega_4 = -\omega_3$ olduğu göz önüne alınarak (6.6) asimptotik ifadeleri (6.8) denkleminde yerine yazılırsa, Riemann - Lebesgue Lemması kullanılarak aşağıdaki asimptotik ifadeler elde edilir.

$$N_{vk}(y_1)=\sum_{s=0}^{1}\int_{-1}^{0}y_{10}^{(s)}(x,\lambda)U_{vks}(x)dx$$
$$=\sum_{s=0}^{1}\int_{-1}^{0}(\lambda\omega_1)^{(s)}e^{\lambda\omega_1 x}(1+O(1/\lambda))U_{vks}(x)dx \tag{6.9}$$
$$=\lambda^k[0]$$

$$N_{vk}(y_2)=\sum_{s=0}^{1}\int_{-1}^{0}y_{20}^{(s)}(x,\lambda)U_{vks}(x)dx$$
$$=\sum_{s=0}^{1}(\lambda\omega_2)^s e^{-\lambda\omega_2}\int_{-1}^{0}e^{\lambda\omega_2(1+x)}(1+O(1/\lambda))U_{vks}(x)dx \tag{6.10}$$
$$=\lambda^k e^{-\lambda\omega_2}[0]$$

$$N_{vk}(y_3)=\sum_{s=0}^{1}\int_{0}^{1}y_{30}^{(s)}(x,\lambda)U_{vks}(x)dx$$
$$=\sum_{s=0}^{1}(\lambda\omega_3)^s e^{\lambda\omega_3}\int_{0}^{1}e^{-\lambda\omega_3(1-x)}(1+O(1/\lambda))U_{vks}(x)dx \tag{6.11}$$
$$=\lambda^k e^{\lambda\omega_3}[0]$$

$$N_{vk}(y_4)=\sum_{s=0}^{1}\int_{0}^{1}y_{40}^{(s)}(x,\lambda)U_{vks}(x)dx$$
$$=\sum_{s=0}^{1}\int_{0}^{1}(\lambda\omega_4)^s e^{\lambda\omega_4 x}(1+O(1/\lambda))U_{vks}(x)dx \tag{6.12}$$
$$=\lambda^k[0]$$

Bu formüller kullanılarak $\lambda\to\infty$ iken $\Omega_0^{(1)}$ deki $L_v(y_j)$ için asimptotik ifadeler

$$L_i(y_1)=\sum_{k=0}^{1}\lambda^{1-k}\left\{\alpha_{ik}(\lambda\omega_1)^k e^{-\lambda\omega_1}[1]+\delta_{ik}(\lambda\omega_1)^k[1]+(\lambda\omega_1)^k[0]\right\}$$
$$=\lambda\left[\delta_{i0}+\omega_1\delta_{i1}\right] \tag{6.13}$$

$$L_i(y_2)=\sum_{k=0}^{1}\lambda^{1-k}\left\{\alpha_{ik}(\lambda\omega_2)^k e^{-\lambda\omega_2}[1]+\delta_{ik}(\lambda\omega_2)^k[1]+(\lambda\,\omega_2)^k e^{-\lambda\omega_2}[0]\right\}$$
$$=\lambda e^{-\lambda\omega_2}\left[\alpha_{i0}+\omega_2\alpha_{i1}\right] \tag{6.14}$$

$$L_i(y_3)=\sum_{k=0}^{1}\lambda^{1-k}\left\{\gamma_{ik}(\lambda\omega_3)^k[1]+\beta_{ik}(\lambda\omega_3)^k e^{\lambda\omega_3}[1]+(\lambda\omega_3)^k e^{\lambda\omega_3}[0]\right\}$$
$$=\lambda\left\{\left[\gamma_{i0}+\omega_3\gamma_{i1}\right]+e^{\lambda\omega_3}\left[\beta_{i0}+\omega_3\beta_{i1}\right]\right\} \tag{6.15}$$

ve benzer olarak

$$L_i(y_4)=\lambda\left\{\left[\gamma_{i0}+\omega_4\gamma_{i1}\right]+e^{\lambda\omega_4}\left[\beta_{i0}+\omega_4\beta_{i1}\right]\right\} \qquad (6.16)$$

elde edilir. Burada $i=1,2,3,4$ tür.

$\Omega_0^{(2)}$ sektörü için tüm hesaplamalar benzer olarak ortaya koyulur. İleri hesaplamaların ardından,

$$\begin{cases} N_{vk}(y_1)=\lambda^k\left[0\right] & N_{vk}(y_2)=\lambda^k e^{-\lambda\omega_2}\left[0\right] \\ N_{vk}(y_3)=\lambda^k e^{\lambda\omega_3}\left[0\right] & N_{vk}(y_4)=\lambda^k\left[0\right] \end{cases} \qquad (6.17)$$

ve $\Omega_0^{(2)}$ sektöründe $\lambda\to\infty$ iken,

$$\begin{cases} L_i(y_j)=\lambda\left\{\left[\alpha_{i0}+\omega_j\alpha_{i1}\right]e^{-\lambda\omega_j}+\left[\delta_{i0}+\omega_j\delta_{i1}\right],\ j=1,2\right\} \\ L_i(y_3)=\lambda e^{\lambda\omega_3}\left[\beta_{i0}+\omega_3\beta_{i1}\right] \\ L_i(y_4)=\lambda\left[\gamma_{i0}+\omega_4\gamma_{i1}\right] \end{cases} \qquad (6.18)$$

asimptotik ifadeleri elde edilir.

(6.13)-(6.16) asimptotik ifadeleri, $L_i(y_j)$ için $\Delta(\lambda)$ determinantında yerine yazılırsa,

$$\Delta(\lambda)=\lambda^4 e^{\lambda\omega_1}\left(\left[A_1^{(1)}\right]e^{m_1\lambda\omega_3}+\left[A_2^{(1)}\right]e^{m_2\lambda\omega_3}+\ldots+\left[A_{\sigma_1}^{(1)}\right]e^{m_{\sigma_1}\lambda\omega_3}\right) \qquad (6.19)$$

karakteristik(kuazi) polinomu elde edilir. Burada,

$-1=m_1<m_2<\ldots<m_{\sigma_1}=1$ olup $A_j^{(k)}$ herhangi kompleks sayılardır.

Ayrıca, $A_1^{(1)}$ ve $A_{\sigma_1}^{(1)}$

$$A_1^{(1)}=\begin{vmatrix} \delta_{10}+\omega_1\delta_{11} & \alpha_{10}+\omega_2\alpha_{11} & \gamma_{10}+\omega_3\gamma_{11} & \beta_{10}+\omega_4\beta_{11} \\ \delta_{20}+\omega_1\delta_{21} & \alpha_{20}+\omega_2\alpha_{21} & \gamma_{20}+\omega_3\gamma_{21} & \beta_{20}+\omega_4\beta_{21} \\ \delta_{30}+\omega_1\delta_{31} & \alpha_{30}+\omega_2\alpha_{31} & \gamma_{30}+\omega_3\gamma_{31} & \beta_{30}+\omega_4\beta_{31} \\ \delta_{40}+\omega_1\delta_{41} & \alpha_{40}+\omega_2\alpha_{41} & \gamma_{40}+\omega_3\gamma_{41} & \beta_{40}+\omega_4\beta_{41} \end{vmatrix}$$

ve

$$A_{\sigma_1}^{(1)}=\begin{vmatrix}\delta_{10}+\omega_1\delta_{11} & \alpha_{10}+\omega_2\alpha_{11} & \beta_{10}+\omega_4\beta_{11} & \gamma_{10}+\omega_3\gamma_{11}\\ \delta_{20}+\omega_1\delta_{21} & \alpha_{20}+\omega_2\alpha_{21} & \beta_{20}+\omega_4\beta_{21} & \gamma_{20}+\omega_3\gamma_{21}\\ \delta_{30}+\omega_1\delta_{31} & \alpha_{30}+\omega_2\alpha_{31} & \beta_{30}+\omega_4\beta_{31} & \gamma_{30}+\omega_3\gamma_{31}\\ \delta_{40}+\omega_1\delta_{41} & \alpha_{40}+\omega_2\alpha_{41} & \beta_{40}+\omega_4\beta_{41} & \gamma_{40}+\omega_3\gamma_{41}\end{vmatrix}$$

şeklinde olup sıfırdan farklı determinantlardır.

Benzer olarak, $\Delta(\lambda)$ karakteristik determinantı $\Omega_0^{(2)}$ sektörü içinde olmak üzere

$$\Delta(\lambda)=\lambda^4 e^{\lambda\omega_3}\left(\left[A_1^{(2)}\right]e^{n_1\lambda\omega_1}+\left[A_2^{(2)}\right]e^{n_2\lambda\omega_1}+\ldots+\left[A_{\sigma_2}^{(2)}\right]e^{n_{\sigma_2}\lambda\omega_1}\right) \qquad (6.20)$$

karakteristik polinom şeklinde gösterime sahiptir. Burada $A_1^{(2)}$ ve $A_{\sigma_2}^{(2)}$ determinantları

$$-1=n_1<n_2<\ldots<n_{\sigma_1}=1,$$

olmak üzere

$$A_1^{(2)}=\begin{vmatrix}\alpha_{10}+\omega_2\alpha_{11} & \delta_{10}+\omega_1\delta_{11} & \beta_{10}+\omega_4\beta_{11} & \gamma_{10}+\omega_3\gamma_{11}\\ \alpha_{20}+\omega_2\alpha_{21} & \delta_{20}+\omega_1\delta_{21} & \beta_{20}+\omega_4\beta_{21} & \gamma_{20}+\omega_3\gamma_{21}\\ \alpha_{30}+\omega_2\alpha_{31} & \delta_{30}+\omega_1\delta_{31} & \beta_{30}+\omega_4\beta_{31} & \gamma_{30}+\omega_3\gamma_{31}\\ \alpha_{40}+\omega_2\alpha_{41} & \delta_{40}+\omega_1\delta_{41} & \beta_{40}+\omega_4\beta_{41} & \gamma_{40}+\omega_3\gamma_{41}\end{vmatrix}$$

ve

$$A_{\sigma_2}^{(2)}=\begin{vmatrix}\delta_{10}+\omega_1\delta_{11} & \alpha_{10}+\omega_2\alpha_{11} & \beta_{10}+\omega_4\beta_{11} & \gamma_{10}+\omega_3\gamma_{11}\\ \delta_{20}+\omega_1\delta_{21} & \alpha_{20}+\omega_2\alpha_{21} & \beta_{20}+\omega_4\beta_{21} & \gamma_{20}+\omega_3\gamma_{21}\\ \delta_{30}+\omega_1\delta_{31} & \alpha_{30}+\omega_2\alpha_{31} & \beta_{30}+\omega_4\beta_{31} & \gamma_{30}+\omega_3\gamma_{31}\\ \delta_{40}+\omega_1\delta_{41} & \alpha_{40}+\omega_2\alpha_{41} & \beta_{40}+\omega_4\beta_{41} & \gamma_{40}+\omega_3\gamma_{41}\end{vmatrix}$$

şeklinde sıfırdan farklı determinantlardır $[27]$.

7. MATERYAL VE METOT

Bu tez çalışmasında, ele aldığımız temel kavramlar, bu konulara ait basılmış eserlerden çalışılmıştır. Diferensiyel denklem ve sınır değer problemlerinin çözümü için literatürde mevcut olan metotlar kullanılmıştır. Ayrıca iki aralıklı sınır değer problemlerinin kuruluşu ve çözümleri için Oktay Muhtaroğlu ve arkadaşlarının çalışmaları göz önünde tutulmuştur. Diğer taraftan problemin çözümlerinin asimptotik ifadelerinin elde edilmesi bakımından M. A. Naimark'ın *"Linear Differential Operators Part II"* isimli kitabındaki metotlar kullanılmıştır.

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında öncelikle çalışmamızda kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Asimptotik notasyonlardan özellikle büyük-O ve küçük-o gösterimleri tanıtılmış ve bu gösterimlerle ilgili bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Ayrıca sabit katsayılı homojen normal lineer diferensiyel denklem sistemlerine ait özdeğer ve özvektör kavramları tanıtılmış, sisteme ait genel çözüm elde edilmiştir. Son olarak ikinci mertebeden iki aralıklı sınır değer probleminin çözümüne dair asimptotik ifadeler ve karakteristik (kuazi) polinomlar incelenmiştir.

9. KAYNAKLAR

[1] Altınışık, N. , Kadakal, M. , Muhtaroğlu, O. , "Asymptotic Formulas For Eigenfunctions Of The Sturm-Liouville Problems With Eigenvalue Parameter In The Boundary Conditions", **Kuwait Journal Of Science And Engineering**, 39(1), 1-17, (2012).

[2] Amerin,W., O., Hinz,A., M. and Pearson, D., B., “Sturm-Liouville Theory Past and Present”, **Birkhäuser Verlag,** Germany, (2005).

[3] Aşık, T. , “Süreksiz Katsayılı Sınır Değer Problemine Ait Diferensiyel Operatörün Bazı Özellikleri,” Yüksek Lisans, ***Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Amasya, 42-46, (2016).

[4] Aydemir, K. , “Boundary Value Problems With Eigenvalue-Dependent Boundary And Transmission Conditions”, **Bounday Value Problems A Springer Open Journal,** 2014:131, (2014).

[5] Aydemir K. , Muhtaroğlu O. , "Asymptotic Distribution Of Eigenvalues And Eigenfunctions For A Multi-Point Discontinuous Sturm-Liouville Problem", **Electronic Journal Of Differential Equations,** 2016(131), 1-14.

[6] Bayraktar, Mustafa “Fonksiyonel Analiz 3. Baskı”***, Gazi Kitapevi,*** 144, Ankara, (2006).

[7] Belmann, Richard ve Cooke, L. K. “Differential-Difference Equations”, USA, (1963).

[8] Birkhoff, G., D., “Boundary Value and Expansion Problems of Ordinary Linear Differential Equations”, **Transactions of American Mathematical Society**, Vol. 9, No. 4, 373-395, (1908).

[9] Boyce, E.W. , Diprima, C. R.”Elementer Diferansiyel Denklemler ve Sınır Değer Problemleri 10.Baskıdan Çeviri”,Çevirmenler: Muhiddin Uğuz, Çetin Ürtiş, ***Palme Yayıncılık,*** 590-595, Ankara, (2016).

[10] Bryant, J. ve Kirby, P. “Florida Sate University, Course Notes MAD 2104 Discrete Mathematics I”, ***Copyright c 2004 Florida State University,*** Tallahassee, Florida 32306-4510, (2004).

[11] Büyük, A. , “Geçiş Şartlı Bir Sınır Değer Problemine Ait Diferensiyel Operatörün Fredholm ve İzomorfizmi” Yüksek Lisans, ***Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Amasya, 41-43, (2015).

[12] Çakar, Ö. “Fonksiyonel Analize Giriş 1 Erwin Kreyszig’den Uyarlanmış Yeniden Düzenlenmiş 7.Baskı” ***A. Ü. Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletme Yayınları No:13,*** Ankara, 92, (2007).

[13] Çelik, S. ”Fonksiyonel Analize Giriş”, ***Yıldız Teknik Üniversitesi Vakfı Yayınları.,*** İstanbul, 132-136, (2001).

[14] Edwards, C. H. ve Penney, E. D. , “Bilgisayar Destekli Ve Matematiksel Modellemeli Diferensiyel Denklemler Ve Sınır Değer Problemleri 3. Baskıdan Çeviri Gözden Geçirilmiş 2. Türkçe Baskı”, Çeviri Editörü: Prof. Dr. Ömer Akın, ***Palme Yayıncılık,*** Ankara, 6, (2011).

[15] Graham, L.R. , Knuth, E. D. , Patashnik, O. ,”Concrete Mathematics Second Edition”, ***Addison Wesley,*** 440-443.

[16] Hasanov, E. , Uzgören, G. Büyükaksoy, A. , “Diferansiyel Denklemler Teorisi 1. Basım”, ***Papatya Yayıncılık,*** İstanbul, 9, (2002).

[17] Johnsonbaough R. ,”Discrete Mathematics Sixth Edition”, ***Pearson Education International,*** 158, (2005).

[18] Kandemir M, Mukhtarov O Sh, (2000). "Asymptotic Behaviour Of Eigenvalues Of The Functional- Manypoint Boundary-Value Problem With Discontinuous Coefficient", Bulletin Of Pure And Applied Sciences, 19(2), 373-384.

[19] Kandemir M. , Muhtaroğlu O. , Yakubov Yakov Y., (2009). "Irregular Boundary Value Problems With Discontinuous Coefficients And The Eigenvalue Parameter", Mediterranean Journal Of Mathematics, 6317-338.

[20] Kandemir, M. , “Diferensiyel Denklemler 1. Basım”, ***Pegem Akademi,*** Ankara, 8-645 , (2015).

[21] Kandemir, M. , (2017). " Asymptotic Distribution Of Eigenvalues For Fourth-Order Boundary Value Problem With Discontinuous Coefficients And Transmission Conditions", Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Sér. A1 Math. Stat. , 66, 133-152.

[22] Kandemir, M, Mukhtarov O Sh, (2017). “Nonlocal Sturm-Liouville problems with integral terms in the boundary conditions”, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2017 (2017).

[23] Marchenko, V., A., “Sturm-Liouville Operators and Applications Revised Edition”, **AMS Chelsea Publishing**, United States of America, (2011).

[24] Mukhtarov, O. , “Discontinuous Boundary Value Problem With Spectral Parameter In Boundary Conditions”, **Turkish J. Math.,** 18, 183-192, (1994).

[25] Mukhtarov O Sh, Kandemir M, (2000). "Asymptotic Behaviour Of Eigenvalues For The Discontinuous Problem With Functionals In The Boundary Conditions", Series Of Physical-Technical And Mathematical Sciences, Transactions Of As Azerbaijan, (4), 151-161.

[26] Mukhtarov O Sh, Kandemir M, (2002). "Asymptotic Behaviour Of Eigenvalues For The Discontinuous Boundary-Value Problem With Functional-Transmission Conditions", Acta Mathematica Scientia, 22(3), 335-345.

[27] Mukhtarov, O. Sh. , Kandemir, M. , Kuruoğlu, N. , “Distribution Of Eigenvalues For The Discontinuous Boundary-Value Problem With Functional-Manypoint Conditions”, **Israel Journal Of Mathematics,** 129, 143-156, (2002).

[28] Muhtaroğlu O. , Yakubov S. , S. , (2002). "Problems For Ordinary Differential Equations With Transission Conditions", Applicable Analysis, 811033-1064.

[29] Mukhtarov O Sh, Kadakal M, Altınışık N, (2006). "Some Spectral Properties Of Discontinuous Sturm-Liouville Problem With Containing Eigenparameter One Of Boundary Conditions", Journal Of Applicable Differential Equations, 1(1), 95-108.

[30] Muhtaroğlu O. , Aydemir K. , (2015). "Eigenfunction Expansion For Sturm-Liouville Problems With Transmission Conditions At One İnterior Point", Acta Mathematıca Scıentıa, 35(3), 639-649.

[31] Nagle, K. R. , Staff, B. E. , Snider, D.A.”Fundamentals Of Differential Equations And Boundary Value Problems Fifth Edition”***, Pearson Addison Wesley,*** 690-691.

[32] Naimark, M. A. , “Linear Differential Operators Part II”, Everitt, W. N., Dawson, E.R., **Frederic Ungar Publising,** U.S.A., (1968).

[33] Rosen, H. K. , “Ayrık Matematik ve Uygulamaları 7.Baskıdan Çeviri”, Çeviri Editörleri: Prof. Dr. Ömer Akın, Yrd. Doç. Dr. Murat Özbayoğlu, ***Palme Yayıncılık,*** Ankara, 204-214, (2015).

[34] Ross, L. S. , “Introduction To Ordinary Differential Equations Fourth Edition”, ***John Wiley&Sons***, 378-400, U.S.A. , (1989).

[35] Rynne, B., P., and Youngson, M., A., “Linear Functional Analysis Second Edition”, **Springer Verlag,** London, 191-192, (2008).

[36] Saito, Y., “Eigenfunction Expansions Associated with Second-order Differential Equations for Hilbert Space-valued Functions”, **Pttbl. RIMS, Kyoto** Univ., 7 , 1-55, (1971/72).

[37] Soykan, Y. “Fonksiyonel Analiz 1.Baskı” ***Nobel Yayın Dağıtım Ltd. Şti.,*** Ankara, 20-112, (2008).

[38] Titchmarsh, E., C., “Eigenfunction Expansions Associated With Second-Order Differential Equations”, **Oxford University Press Amen House, e.g. 4,** Oxford At The Clarendon Press, (1946).

[39] Şuhubi, Erdoğan S. “Fonksiyonel Analiz 1. Baskı”***, İTÜ Vakfı Yayınları,*** İstanbul, (2001).

[40] V. G. Maz’ja, “Sobolev Space”, **Spinger-Verlağ,** Berlin, 1985.

[41] Yakubov, S., “A Nonlocal Boundary Value Problem For Elliptic Differential-Operator Equations And Applications”, Integr. equ. oper. theory, 35, 485-506, (1999).

[42] Yakubov, S., “Completeness of Root Functions of Regular Differential Operators”, Longman Scientific&Technical, England, Copublished in the United States with John Wiley&Sons, Inc., New York, (1994).

[43] Yakubov, S., “On a New Method for Solving Irregular Problems”, Journal Of Mathematical Analysis And Applications, 220, 224-249, (1998).

[44] Yakubov, S. and Yakubov, Y., “Abel Basis of Root Functions of Regular Boundary Value Problems”, **Math. Nachr.** ,197, 157-187, (1999).

[45] Yakubov, S., Yakubov, Ya., “Differential-Operator Equation Ordinary and Partial Differential Equations”, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, London, New York, Washington, D.C., United States of America, (1999).

10. ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: BALTÜRK, Tevhide
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 20.06.1986 Kırşehir
Medeni hali	: Evli
Telefon	: 0 (535) 6614282
Faks	: -
e-mail	: balturktevhide@gmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Lisans	CUMHURİYET Üni./Mat. Öğrt.	2009
Lise	Kırşehir A.Ö.L.	2004

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2010-2011	Otlukbeli/ERZİNCAN	Matematik Öğrt.
2011-2012	Şereflikoçhisar/ANKARA	Matematik Öğrt.
2012-	Havza/SAMSUN	Matematik Öğrt

Yabancı Dil

İngilizce